ISSN 0002-3035

ФИЗИКА · ՖԻԶԻԿԱ · PHYSICS

ИЗВЕСТИЯ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

PROCEEDINGS
OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

48, N6, 2013

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ

ՖԻԶԻԿԱ ФИЗИКА

ՀԱՏՈՐ ТОМ

48

№ 6

ՀՀ ԳԱԱ "ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ" ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ИЗДАТЕЛЬСТВО "ГИТУТЮН" НАН РА

ԵՐԵՎԱՆ ЕРЕВАН

2013

Журнал издается с 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках

Адрес редакции: Республика Армения, 375019,
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Խմբագրության հասցեն՝ Հայաստանի Հանրապետություն,
375019, Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24-գ:

Editorial address: 24-g. Marshal Bagramyan Av.,
Yerevan, 375019. Republic of Armenia.

Известия НАН Армении, Физика, т.48, №6, с.375-382 (2013)

УДК 621.384.6

О ВОЗМОЖНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ МАГНИТНОЙ СТРУКТУРЫ СИНХРОТРОНА ЕрФИ

С.Г. БАБАДЖАНЯН[1,2], Э.Д. ГАЗАЗЯН[1,2]*, Д.К. КАЛАНТАРЯН[1,3], В.Ц. НИКОГОСЯН[1], А.Д. ТЕР-ПОГОСЯН[1]

[1]Национальная научная лаборатория им. А.И. Алиханяна (ЕрФИ), Ереван, Армения
[2]Ереванский государственный университет, Армения
[3]DESY (Zeuthen), Germany
[*]e-mail: edmon@yerphi.am

(Поступила в редакцию 28 февраля 2013 г.)

Исследована возможность усовершенствования синхротрона ЕрФИ путем изменения магнитной структуры ускоряющего кольца, при котором динамика пучка сохраняет стабильность. Предлагаемые изменения магнитной структуры дадут возможность иметь длинные свободные промежутки, которые можно будет использовать для многооборотной инжекции пучка, эжекции пучка, а также охлаждения ионного пучка при ускорении ионов. В образовавшихся длинных промежутках можно устанавливать либо фокусирующие, либо дефокусирующие магниты для обеспечения более эффективного контроля рабочей точки, а также секступольные магниты для контроля хроматичности.

1. Введение

Синхротрон ЕрФИ (историческое имя – АРУС – Армянский Ускоритель), запущенный в 1967 г. [1], эффективно функционировал более 30 лет как крупнейший электронный ускоритель Советского Союза (и один из крупнейших в мире). За прошедшее десятилетие было осуществлено несколько запусков ускорителя, показавших, в частности, что он нуждается в существенном усовершенствовании. Возникает вопрос: можно ли, используя существующие инфраструктуры, путем небольших изменений получить ускоритель с более устойчивой динамикой, в котором можно ускорять или накоплять интенсивные пучки с намного лучшими эмиттансами, а также разработать схемы ускорения тяжелых ионов с использованием усовершенствованной магнитной структуры кольца?

Периметр АРУС равен 216 м. Заметим, что многие современные ускорители (действующие или еще на стадии проектирования) приблизительно такого же периметра: так, например, периметр SLS [2] равен 288 м, а периметр накопительного кольца CANDLE [3] – 216 м, т.е. есть размер здания АРУС достаточен для размещения современного ускорителя. При этом одна из проблем заключается в том, что все магниты существующего ускорителя являются магнитами с совмещенными функциями, что не позволяет эффективно контролировать динамику частиц, например, менять число бетатронных колебаний (выбор рабочей точки). Для осуществления контроля числа бетатронных колебаний необходимо менять градиент магнитов, т.е. менять ток в магнитах. Поскольку все магниты с совмещенными функциями, то такие изменения тока приведут к изменению угла поворота в магнитах. Контроль над рабочей точкой (числом бетатронных колебаний) может быть необходим как в некоторых схемах многооборотной инжекции ионов [4,5], так и для того, чтобы держать число бетатронных колебаний вдали от резонансов. В случае магнитов с совмещенными функциями осуществить все это невозможно. В настоящей работе указываются пути усовершенствования магнитной структуры, обеспечивающие эффективную работу синхротрона как в режиме ускорения электронов, так и тяжелых ионов.

2. Магнитная структура АРУС

Ереванский синхротрон состоит из 24 магнитных ячеек (cell) типа FoF–DoD, одна из которых показана на рис.1.

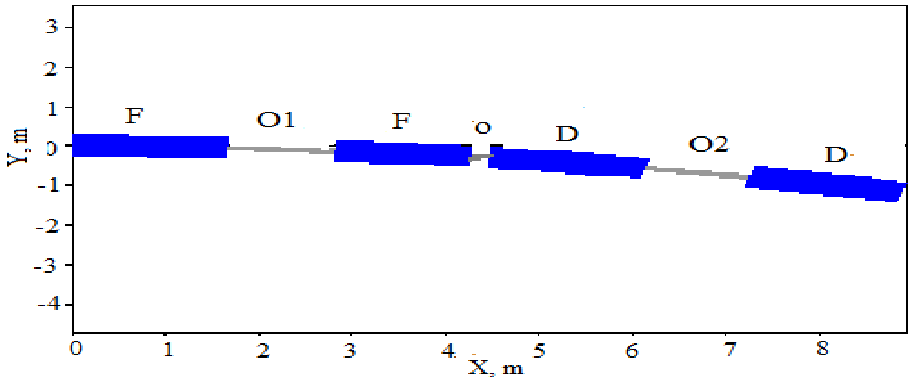


Рис.1. Ячейка ускорителя ЕрФИ.

Ниже в справочных целях мы приводим таблицы параметров кольца (табл.1).

Табл.1. Параметры кольца ускорителя ЕрФИ.

Тип ячеек	FoF–DoD
Число ячеек	24
Радиус кривизны [м]	25.25
Относительный градиент g [$м^{-2}$]	0.18
Энергия электронов [ГэВ]	0.1 – 6
Периметр [м]	216

В табл.2 приведены все параметры магнитов: длина, отклоняющее поле, фокусирующий градиент и т.д.

Табл.2. Параметры магнитов и свободных промежутков.

Компонент	Длина [м]	Эфф. длина [м]	Относ. градиент g [$м^{-2}$]
F	1.6229	1.6449	0.18
o	0.03	0.008	–
D	1.6382	1.6604	–0.18
O1	1.2219	1.2	–
O2	1.1959	1.1738	–

Как известно, траектории движения частиц в ускорителях в отсутствие связи между горизонтальными и вертикальными колебаниями описываются уравнениями Хилла [6]:

$$z'' + K_{z(x,y)}(s)\, z = h_{z(x,y)}(s)\ \delta. \tag{1}$$

В уравнении (1) под z подразумеваются либо горизонтальная (x), либо вертикальная (y) координаты частиц. Коэффициенты $K_{z(x,y)}(s)$ в уравнении Хилла состоят из суммы нормированного градиента (g), меняющегося от фокусирующего магнита к дефокусирующему, и градиента геометрической фокусировки ($\frac{1}{\rho^2}$):

$$K_x(s) = \begin{cases} g + \dfrac{1}{\rho^2} = 0.1816\ м^{-2} & \text{для F магнитов,} \\ -g + \dfrac{1}{\rho^2} = -0.1784\ м^{-2} & \text{для D магнитов,} \\ 0 & \text{для свободных промежутков;} \end{cases} \tag{2}$$

$$K_y(s) = \begin{cases} -g = -0.18\ м^{-2} & \text{для F магнитов,} \\ g = 0.18\ м^{-2} & \text{для D магнитов,} \\ 0 & \text{для свободных промежутков.} \end{cases}$$

В уравнении (1) $h_z(s) = 1/\rho_{z(x,y)}(s)$ – кривизна в соответствующем направлении. Для АРУС эта кривизна равна

$$h_x(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} = 0.0396\ м^{-1} & \text{для F и D магнитов,} \\ 0 & \text{для свободных промежутков;} \end{cases} \qquad h_y(s) = 0. \tag{3}$$

В уравнении (1) введено также обозначение δ – относительное отклонение импульса, определяющееся следующим выражением:

$$\delta = \frac{p - p_d}{p_d}, \tag{4}$$

где p – импульс частицы, а p_d – проектное значение импульса.

Решение уравнения (1) можно записать в следующим виде:

$$z(s) = \mathrm{a}_z\sqrt{\beta_z(s)}\cos(\Phi_z(s)-\delta_z)+\eta_z(s)\delta,$$
$$z'(s) = -\frac{\mathrm{a}_z}{\sqrt{\beta_z(s)}}\left(\sin(\Phi_z(s)-\delta_z)+\alpha_z(s)\cos(\Phi_z(s)-\delta)\right)+\eta_z'(s)\delta. \tag{5}$$

В формулах (5) и далее индексы x, y при z для краткости опущены. Здесь a_z и δ_z – постоянные, которые определяются начальными условиями (z_0, z_0'), $\alpha_z(s)$ и $\beta_z(s)$ – альфа- и бета-функции ускорителя (Твисс-параметры), которые определяются магнитной системой, $\Phi_z(s)$ – бетатронная фаза. Функции $\alpha_z(s)$ и $\Phi_z(s)$ выражаются через бета-функцию следующими выражениями:

$$\alpha_z(s) = -\frac{\beta_z'(s)}{2},\quad \Phi_z(s) = \int\limits_{s_0}^{s}\frac{d\tau}{\beta(\tau)}. \tag{6}$$

В уравнении (5) $\eta_z(s)$ – дисперсия, а $\eta_z'(s)$ – производная дисперсии. Как видно из (5), решение стабильное, если $\beta_z(s)$ по всей орбите действительная и ограниченная функция. Из уравнения (5) следует, что размер пучка в точке s определяется функциями $\eta_z(s)$ и $\beta_z(s)$. Эти функции называются “оптическими функциями” ускорителя. Для ускорителя АРУС они представлены на рис.2.

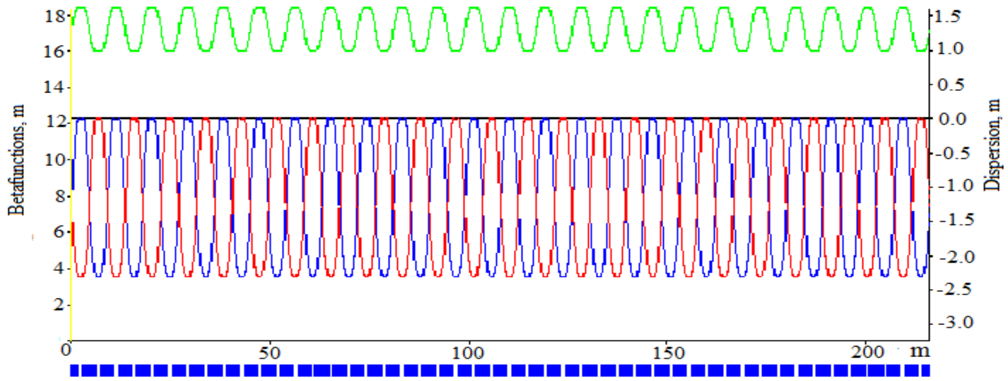


Рис.2. Оптические функции ($\beta_x(s), \beta_y(s), \eta_z(s)$) ускорителя АРУС. Под осью абсцисс для наглядности представлено расположение 48 магнитов вдоль длины периметра кольца АРУС.

3. Возможные изменения кольца

В кольце АРУС можно ускорять электроны до энергии 6 ГэВ. Рассмотрим, до каких энергий можно ускорять тяжелые ионы в этом кольце. Так как магниты с совмещенными функциями, то выражения для магнитной индукции записываются в виде

$$B_y = B_0 + Gx\,,\ B_x = -Gy\,, \tag{7}$$

где G – градиент магнитного поля, который измеряется в Т/м и связан с нормированным градиентом g соотношением $g = eG/p$, где p – средний импульс электронов в ГэВ/c (c – скорость света в вакууме). Учитывая, что на равновесной орбите сила Лоренца по величине должна совпасть с центробежной силой, после несложных математических преобразований получим выражение для магнитной индукции B_0 [6]:

$$B_0 = 0.132\,p\,[\mathrm{T}]. \tag{8}$$

Так как ускоритель был предназначен на 6 ГэВ кинетической энергии, то магнитная индукция в магнитах легко достигнет значений 0.792 Т. Рассмотрим теперь полностью ионизированный ион урана U_{92}^{238}. Связь между магнитной жесткостью и энергией иона можно получить, воспользовавшись выражением для ларморовой частоты [7], учитывая, что в этом случае релятивистской частицей является ион:

$$B\rho = (m_p c / e)(A / Z)\sqrt{\gamma^2 - 1}\,. \tag{9}$$

Здесь m_p – масса покоя протона, A и Z – атомное и зарядовое числа иона. Если кинетическая энергия 2 ГэВ/нуклон, то лоренц-фактор $\gamma = 3$, и для максимального значения индукции получим $B_{\max} = 0.9053$ Т.

Длина свободных промежутков очень мала (максимум 1.2 м) На такой длине невозможно уместить систему охлаждения, BPM (Beam Position Monitors) или корректирующие магниты. Для решения этой проблемы следует разработать такую структуру магнитных ячеек, при которой используются магниты с меньшими длинами. Это позволит увеличить расстояние между магнитами, что даст возможность размещения необходимого дополнительного оборудования. Отметим, что эти изменения не должны существенно влиять на динамику ускоряемого пучка. Такая задача может быть решена, например, путем уменьшения размеров двух соседних дефокусирующих магнитов, как показано на рис.3. Разработан также принцип изменения ячейки, когда дефокусирующая часть магнита заменяется на значительно меньшего размера отклоняющий магнит (нижний рис.3). Для устойчивости в этих промежутках добавляются квадрупольные магниты с эквивалентным магнитным градиентом g =1.47, при этом длина магнита оказывается равной 0.3 м (на рисунке обозначено через QD – quadruple defocusing), и расстояние между соседними ячейками становится значительно больше (3 м).

Такое уменьшение размеров магнитов было осуществлено в результате исследования существующих магнитов с тем, чтобы был обеспечен эффективный поворот ускоряемого заряда.

Как видно из рис.3, в результате такого изменения получается свободный промежуток порядка 3 м. Такой длины свободного промежутка уже достаточно для установки систем охлаждения, эжекции, многооборотной инжекции, а также квадрупольных магнитов и т.д. Нам представляется, что вышеуказанные изменения позволят рассмотреть возможности ускорения тяжелых ионов в кольце Ереванского синхротрона.

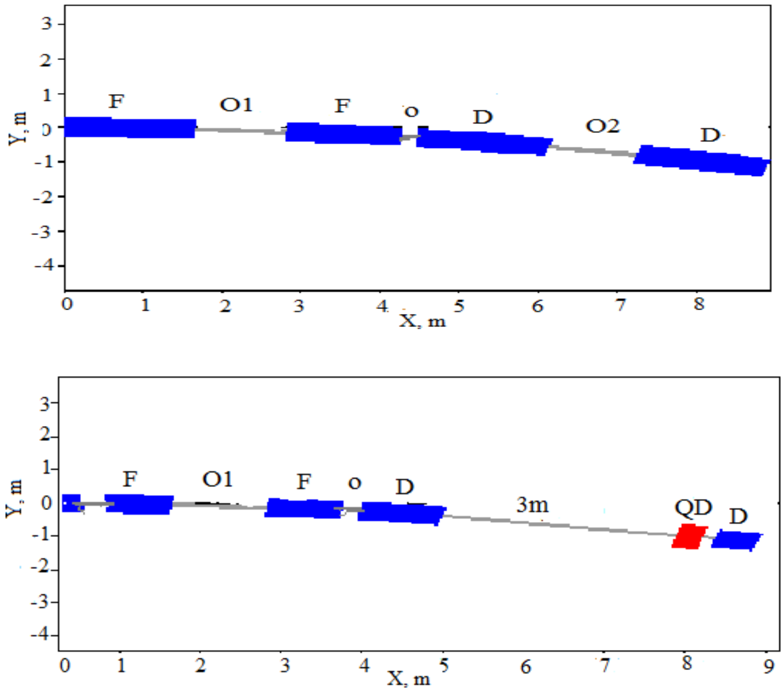


Рис.3. Наверху – начальная ячейка, внизу – измененная ячейка.

4. Оптические функции АРУС с измененной магнитной структурой

Рассмотрим измененную магнитную структуру АРУС, представленную на рис.4, где на девяти ячейках комбинированные магниты заменены на чисто поворотные с размерами, указанными на нижнем рис.3, и обсудим возможности ее использования для ускорения тяжелых ионов. Динамика в кольце, представленном на рис.4, получается стабильной.

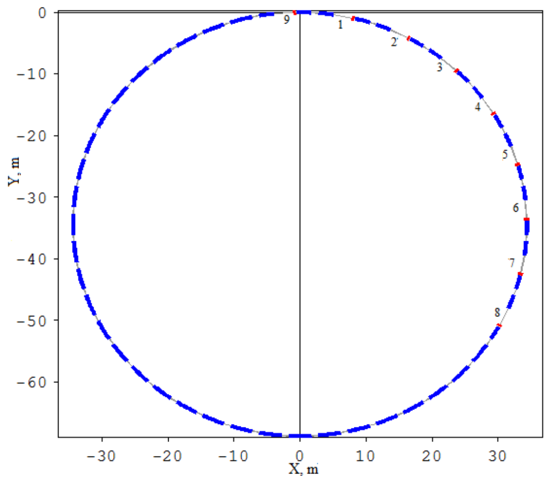


Рис.4. Целое кольцо, где 9 ячеек изменены на новые ячейки с длинными свободными промежутками.

Оптические функции и результаты симуляции в таком модернизированном кольце приведены на рис.5, 6.

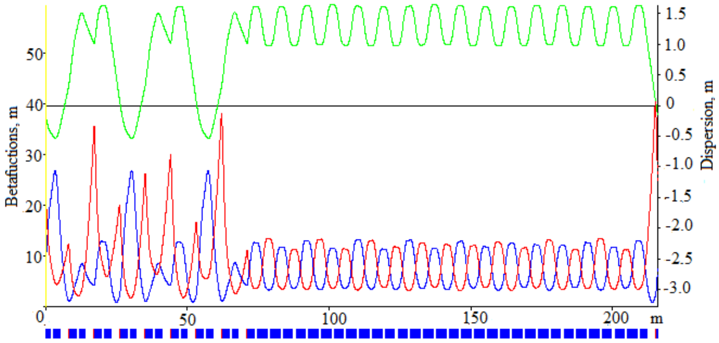


Рис.5. Функции $\beta_x(s)$, $\beta_y(s)$, $\eta_z(s)$ после изменения кольца. Под осью абсцисс представлено новое расположение магнитов вдоль длины периметра кольца АРУС: изменены 9 из 48 магнитов.

Как видно из рис.5, амплитуда бетатронных колебаний несколько растет из-за удаления части фокусирующих магнитов. Однако такое увеличение не является ущербным, т.к. существующие минимальные значения этих амплитуд, которые, кстати, совпадают с минимальными значениями амплитуд с неизмененным магнитным кольцом, вполне обеспечивают стабильную динамику колебаний. Как видно из рисунков, оптические функции не симметричны. Такая несимметричность обусловлена тем, что квадрупольные магниты были заменены на отклоняющие не симметрично. Такую несимметричность при желании можно устранить, если замену квадрупольных магнитов на отклоняющие осуществить не последовательно, как это показано на рис.4, а симметрично вдоль кольца.

На рис.6 представлено число бетатронных колебаний Q за один период, которое определяется выражением [6]

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int_{s}^{s+C}\frac{ds}{\beta(s)}, \tag{10}$$

где C – длина орбиты.

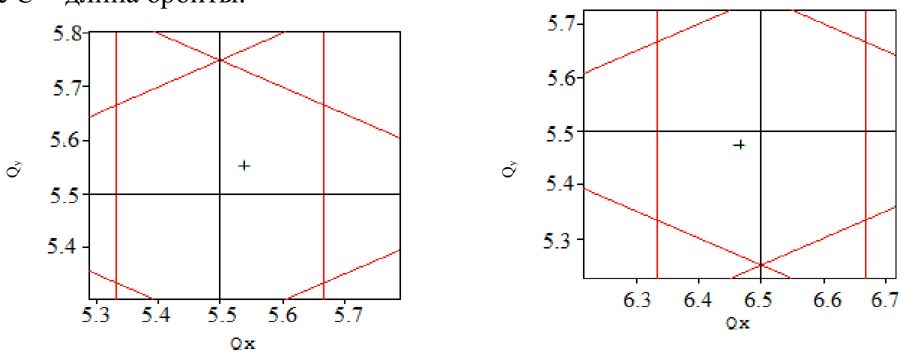


Рис.6. Резонансная диаграмма до и после изменения кольца.

Из рис.6 видно, что рабочая точка (обозначена крестиком) до и после изменения кольца остается стабильной и не совпадает с резонансными линиями (напомним, что резонансными называются линии, которые удовлетворяют уравнению $mQ_x + nQ_y = k$, где m,n,k – целые числа). Нами проверено, что рабочая точка не совпадает с резонансными линиями и для значительно больших значений чисел m,n,k. При этом числа бетатронных колебаний Q_x и Q_y определяются по формуле (10), где вместо β (s) подставлены β_x(s) или β_y(s).

5. Заключение

Исследования и проведенные расчеты показали, что небольшим изменением магнитной системы можно получить ускоряющую систему с возможностью эффективного контроля динамики пучка, в которой будут свободные промежутки для установки инжекционной системы, системы охлаждения пучка, системы контроля пучка и т.д.

В заключение следует отметить, что в качестве предмета исследований был выбран Ереванский синхротрон с его геометрическими параметрами лишь для удобства проведения расчетов и для наглядной демонстрации предлагаемых преобразований. Естественно, что все изложенное применимо для любого аналогичного циклического ускорителя.

Авторы выражают благодарность В.Саакяну за помощь в проведении расчетов с использованием компьютерной программы OPA и Т. Мкртчяну – при оформлении рисунков.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Г.М.Асатрян, Т.Г.Амбарцумян**. Изв. НАН Армении, Физика, **44**, 315 (2009).
2. **A. Streun**. Beam Lifetime in the SLS Storage Ring. SLS–TME–TA–2001–0191, (2001).
3. CANDLE – Conceptual Design Report. ASLS R02–001, Yerevan, 2002.
4. **G.Kulipanov, A.Skrinsky, N.Vinokurov**. Proc. of 43rd ISTC Japan Workshop on Accelerator Sciences, KEK, Tsukuba, Japan, 2007, p.1.
5. **I.Meshkov**. Accelerator Aktivities at Joint Institute for Nuclear Research. **Ibid,** pp.17–23.
6. **J.Rossbach, P.Schmuser**. Basic course on accelerator optics**.** CERN Accelerator School: 5th General Accelerator Physics Course, Finland, 7–18 Sep. 1992, pp.17–88.
7. **Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.** Теория поля**.** М., Наука, 1973.

POSSIBILITY OF TRANSFORMATION OF YEREVAN SYNCHROTRON MAGNET STRUCTURE

S.G. BABAJANYAN, E.D. GAZAZYAN, D.K. KALANTARYAN,
V.Ts. NIKOGHOSYAN, A.D. TER-POGHOSYAN

A possibility of improving the magnet structure of YerPhI Synchrotron with the condition of maintaining the beam dynamics stability is studied. The proposed changes of magnet structure allows one to get free intervals of sufficient length between the magnets which will be used for installing the system of multiturn injection and ejection of the beam and for installing a “cooling” system for the ion beam acceleration as well. In addition, additional focusing or defocusing magnets may be installed in the formed long free intervals.

Известия НАН Армении, Физика, т.48, №6, с.383-393 (2013)

УДК 537.533

РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА ИЗЛУЧЕНИЯ НИЗКОЭНЕРГЕТЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ В ДВУХСЛОЙНОМ ВОЛНОВОДЕ

А.Г. ГРИГОРЯН*

Институт синхротронных исследований "КЕНДЛ", Ереван, Армения
Ереванский государственый университет, Армения

*e-mail: grigoryan@asls.candle.am

(Поступила в редакцию 31 мая 2013 г.)

Получена аппроксимационная формула для низкоэнергетического импеданса двухслойного цилиндрического волновода, допускающая построение явных выражений для пространственно-временных функций, характеризующих излучение заряженной частицы в волноводе. Выявлены общие закономерности эволюции импеданса и кильватерных потенциалов с ростом энергии частицы и с изменением геометрических и электродинамических параметров волновода. Выделены приемлемые для экспериментальных исследований параметры волноводов, обладающих резонансными свойствами при энергиях порядка 20 МэВ.

1. Введение

Получению высокочастотного когерентного излучения с использованием высокоэнергетичных сгустков заряженных частиц в однослойных и многослойных волноводах в настоящее время придается большое значение. По своим частотным, пространственным и мощностным характеристикам оно может быть сравнимо с излучением, получаемым с помощью лазеров на свободных электронах (ЛСЭ) [1]. Работы в этом направлении носят как экспериментальный, так и теоретический характер. В частности, рассматривался керамический волновод [1], волновод с металлизированной диэлектрической стенкой [2], волновод с гофрированной металлической стенкой [3] и т.п. Основная направленность исследований – выявление и использование резонансных свойств волновода в связи с возникающим в нем излучением. Необходимо, чтобы в результате взаимодействия волновода с пролетающим в нем зарядом возникало узкополосное резонансное излучение с единственной резонансной частотой, аккумулирующей большую часть энергии излучения в ее малой окрестности.

В этой связи примечателен двухслойный цилиндрический металлический волновод: при определенных условиях (главное из которых – высокая проводимость металла, заполняющего внешний, основной слой и низкая проводимость тонкого внутреннего металлического покрытия) частотное распределение излучения ультрарелятивистской частицы в волноводе подобного типа обладает необходимыми характеристиками [4-6]. Его резонансные свойства и условия возникновения резонанса для ультрарелятивистского случая исследованы в работе [6]. Там же показана возможность получения узконаправленного когерентного излучения, исходящего из раскрыва полубесконечного волновода упомянутого типа.

В связи с возможностью экспериментальной проверки полученных результатов с помощью строящегося в CANDLE линейного ускорителя AREAL [7] с энергией пучков от 5 до 20 МэВ возникает необходимость их обобщения на случаи с низкими энергиями пучков. Проблемам, связанным с выявлением особенностей излучения низкоэнергетических заряженных частиц, посвящена данная работа.

2. Постановка задачи и импеданс структуры

Рассмотрим бесконечный однородный цилиндрический волновод с двухслойной металлической стенкой (рис.1). Внешний толстый высокопроводящий металлический слой стенки волновода (его толщину можно считать практически бесконечной) покрыт изнутри тонким низкопроводящим металлическим слоем.

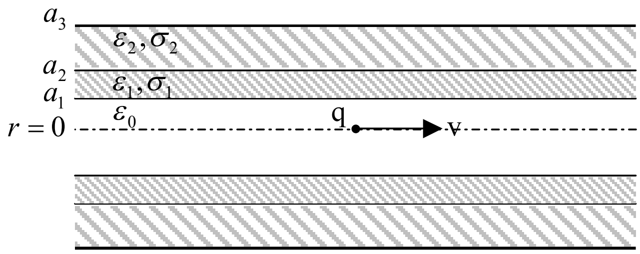


Рис.1. Двухслойный металлический волновод.

Основные геометрические параметры волновода – его внутренний (a_1) и внешний (a_3) радиусы, ограничивающие стенку волновода, и радиус a_2 $(a_1 < a_2 < a_3)$, определяющий границу между слоями. Электродинамические свойства волновода определяются значениями проводимостей слоев – внутреннего σ_1 и внешнего σ_2, причем $\sigma_2 >> \sigma_1$. Мы полагаем металлические слои немагнитными, т.е. магнитные проницаемости $\mu_{1,2}$ металлов, заполняющих слои, определяются магнитной проницаемостью вакуума μ_0 и $\mu_{1,2} = \mu_0$. Электрические проницаемости металлов, заполняющих слои, определяются их проводимостями $\varepsilon_{1,2} = \varepsilon_0 + j\sigma_{1,2}/\omega$, где ω и ε_0 – частота и диэлектрическая проницаемость вакуума, соответственно. Вдоль оси волновода движется точечная заряженная частица с постоянной скоростью v, малой по сравнению со скоростью света c. Энергия частицы задается ее Лоренц-фактором $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Задача заключается в исследовании особенностей частотного и пространственно-временного распределения излучения частицы, т.е. продольных импедансов и кильватерных потенциалов. Необходимо также вывести упрощенные аналитические формулы для импеданса, которые, без ущерба для точности, можно использовать для эффективного расчета кильватерных потенциалов и полей излучения из открытого конца волновода в случае малых энергий частиц, испускающих кильватерные поля. Последнее важно для планирования экспериментов на строящемся линейном ускорителе AREAL [7].

Определяя импеданс круглого многослойного волновода для частицы с произвольной энергией, мы следуем работам [5,8], в которых из полного поля частицы выделяется ее поле излучения, обусловленное конечной проводимостью стенок. Точное аналитическое выражение для продольного импеданса в двухслойной металлической трубе может быть получено на основе результатов работ [4,5]. Для частицы с заданной энергией и с идеальной проводимостью внешнего слоя оно записывается следующим образом:

$$Z_{\|} = \frac{j\varepsilon_0\tau\, Z_0}{G(x,y)} I_0(\lambda r), \tag{1}$$

$$G(x,y) = 2\pi a_1\beta\, I_0(x)\big(\varepsilon_0 I_1(x) + d_1\varepsilon_1 k_v\tau\, I_0(x)\operatorname{cth} y/y\big),\ x = a_1 k_v\tau,\ y = \chi_1 d_1, \tag{2}$$

где $Z_0 = 120\pi\Omega$ – импеданс свободного пространства, $I_{0,1}(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого рода [9], $d_1 = a_2 - a_1$ – толщина внутреннего слоя, $\lambda = k_v\tau,\ \tau = \gamma^{-1}$, $\chi_1 = \sqrt{k_v^2\tau^2 - j\omega\mu_0\sigma_1}$ – поперечное волновое число, $k_v = \omega/v$, $\beta = v/c$. При $\tau = 0$ соотношения (1), (2) стремятся к ультрарелятивистскому пределу:

$$Z_{\|} = j\frac{Z_0}{\pi k a_1^2}\left(1 + \frac{2}{a_1}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0\chi_1}\operatorname{cth}(\chi_1 d_1)\right)^{-1},\ k = \omega/c. \tag{3}$$

В последнем случае (3) распределение импеданса в поперечном сечении равномерно (нет зависимости от радиальной координаты r), тогда как при малых энергиях (1) имеет место заметная радиальная зависимость в поперечном сечении волновода. Выражения для импеданса (1), (2) достаточно просты и пригодны для численных расчетов. Вызывает затруднение, однако, их использование для расчета кильватерных потенциалов. Кильватерный потенциал представляется в виде обратного преобразования Фурье от импеданса [10]:

$$W_{\|}(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Z_{\|}(\omega) e^{-j\frac{\omega}{v}s}\, d\omega, \tag{4}$$

где s – расстояние от ведущей до тестовой частицы, следующей вслед за ней с той же скоростью v. В однородных структурах, подобных рассматриваемой, понятие продольного кильватерного потенциала эквивалентно нормированной на заряд продольной электрической компоненте поля излучения частицы. Подынтегральная функция в (4) содержит быстроосциллирующий экспоненциальный множитель, что, в принципе, не препятствует, но значительно затрудняет ее непосредственное численное интегрирование. В отличие от ультрарелятивистского случая [6], допускающего простое суммирование вычетов от двух полюсов при интегрировании аналитического продолжения подынтегральной функции на комплексной плоскости, здесь интегрирование затруднено наличием бесконечного числа беспорядочно разбросанных полюсов и разрыва аналитичности у подынтегральной функции. Помимо вышесказанного, принципиальные трудности могут возникнуть при расчете дальнозонных характеристик поля излучения из открытого конца полубесконечного волновода (ср. с ультрарелятивистским случаем [6]): период осцилляций у подынтегральной функции убывает с увеличением расстояния от раскрыва до точки наблюдения [6].

Пути преодоления вышеупомянутых трудностей видятся в переходе от модифицированных функций Бесселя первого рода и гиперболической функции, $\mathrm{cth}\, y/y$ входящих в выражение (2), к их разложениям в степенные ряды [9]: при использовании достаточного количества членов они адекватно описывают исходную функцию для сколь угодно больших аргументов. В результате в знаменателе функции (1) формируется степенной алгебраический многочлен, численный расчет комплексных нулей которого не представляет особенных трудностей: их можно определить с высокой точностью, например, с помощью соответствующей стандартной подпрограммы NSolve, встроенной в пакет программ Mathematica–8 [11].

Принимая во внимание малую толщину внутреннего слоя и полагая $|\chi_1| d_1 << 1$, функцию $\mathrm{cth}\, y/y$ в (2) можно заменить первыми двумя членами ее разложения по малому аргументу:

$$\mathrm{cth}\, y/y = 1/y^2 + 1/3 . \qquad (5)$$

Разлагая, далее, функцию $G(x, y)$ по малому параметру $x = a_1 k_v \tau$ и оставляя первые N членов разложения, получаем окончательно в знаменателе функции (1) алгебраический степенной многочлен по степеням ω порядка $N+3$. В частности, при $N = 20$ имеем:

$$Z_{||} = 1.12103\text{x}10^{14} \frac{\sigma_1 Z_0^2}{\pi (a_1 \tau / v)^{22} \tilde{G}(\omega)} \frac{a_1}{d_1} \omega \left(1 + j \frac{\varepsilon_0 \tau^2}{\sigma_1 \beta^2} \omega \right). \qquad (6)$$

Здесь

$$\tilde{G}(\omega) = \sum_{k=0}^{N+3} c_k \omega^k = \prod_{i=1}^{23} (\omega - \omega_i) \qquad (7)$$

есть многочлен порядка $N+3$, ω_i – его корни. Старший коэффициент c_{23} многочлена равен единице.

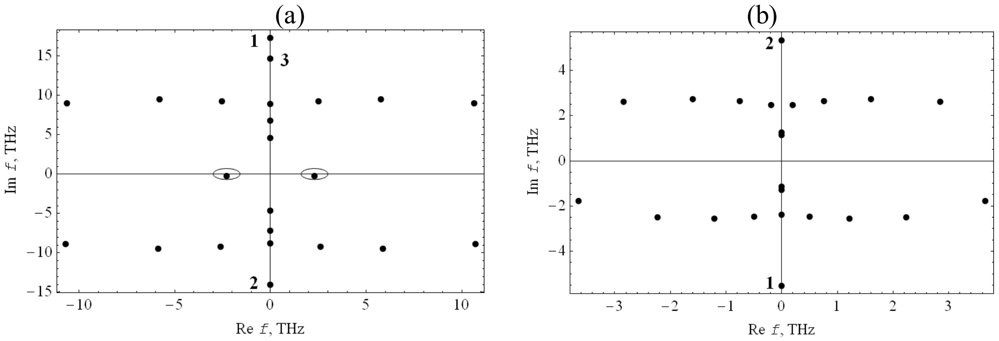


Рис.2. Корни уравнения $\tilde{G}(\omega) = 0$ при $\gamma = 40$ (a) и при $\gamma = 10$ (b), $a_1 = 1\,$мм, $d_1 = 1\,$мкм, $\sigma_1 = 3\times10^4\,\Omega^{-1}\text{м}^{-1}$ и $N = 20$. Масштабы пронумерованных мнимых корней для удобства изображения уменьшены (при $\gamma = 40$: 1) в 5×10^4, 2) в 50, 3) в 10 раз; при γ = 10: 1) в 10^2, 2) – в 10^4 раза).

На рис.2 схематически изображено расположение корней многочлена $\widetilde{G}(\omega)$ на комплексной плоскости для двух различных случаев: $\tau = 0.025$ $(\gamma = 40)$ и $\tau = 0.1(\gamma = 10)$ для идентичных геометрических и электродинамических параметров двухслойного волновода. Как видно из рисунка, корни многочлена являются либо комплексными, либо чисто мнимыми. Действительные корни отсутствуют, однако при $\tau = 0.025$ (на рис.2a), в отличие от случая, изображенного на рис.2b $(\tau = 0.1)$ имеются комплексные корни с малой отрицательной мнимой составляющей, примыкающие к действительной оси со стороны нижней полуплоскости. Имеется равное количество комплексных корней с положительной $\left(\omega_i^{(+)}\right)$ и отрицательной $\left(\omega_i^{(-)}\right)$ действительной составляющей и они симметричны относительно мнимой оси: $\omega_i^{(-)} = -\omega_i^{(+)*}$. В связи с этим многочлен $\widetilde{G}(\omega)$ может быть записан в симметричной форме:

$$\widetilde{G}(\omega) = \prod_{i=1}^{23}(\omega - \omega_i) = \prod_{i=1}^{N'}\left(\omega - \omega_j^{(+)}\right)\prod_{i=1}^{N'}\left(\omega + \omega_j^{(+)*}\right)\prod_{i=1}^{N-2N'+3}\left(\omega - \omega_j^{(0)}\right), \tag{8}$$

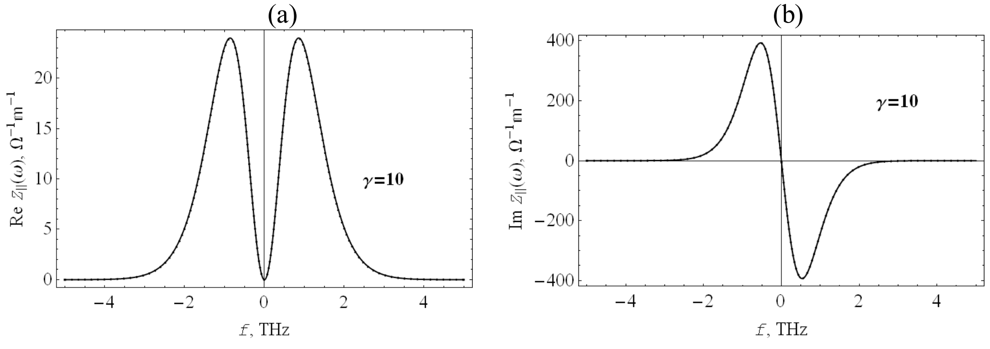
где N' – количество корней с положительной (отрицателой) действительной составляющей и $\omega_j^{(0)}$ – чисто мнимые корни. Из соотношения (8) может быть получено важное свойство симметрии многочлена $\widetilde{G}(\omega)$ относительно мнимой оси:

$$\widetilde{G}(-\omega) = c_{23}\prod_{i=1}^{N'}\left(-\omega - \omega_j^{(+)}\right)\prod_{i=1}^{N'}\left(-\omega + \omega_j^{(+)*}\right)\prod_{i=1}^{N-2N'+3}\left(-\omega - \omega_j^{(0)}\right) = -\widetilde{G}^*(\omega). \tag{9}$$

Это соотношение имеет общий характер: оно обеспечивает выполнение фундаментального соотношения симметрии для продольного импеданса [10]:

$$Z_{\parallel}^{0}(-\omega) = Z_{\parallel}^{0*}(\omega). \tag{10}$$

Применимость представления (6) при конкретных энергиях частицы и параметрах волновода определяется при помощи сравнения графических представлений частотных распределений импедансов, полученных с помощью аппроксимации (6), с результатами, полученными с помощью формулы (1). Фиксируя параметры a_1, d_1, и σ_1 и полагая внешний слой идеально проводящим, приведем зависимости импедансов для различных значений τ. Одновременно можно проследить за эволюцией формы частотного распределения импеданса с возрастанием энергии частицы (рис.3).



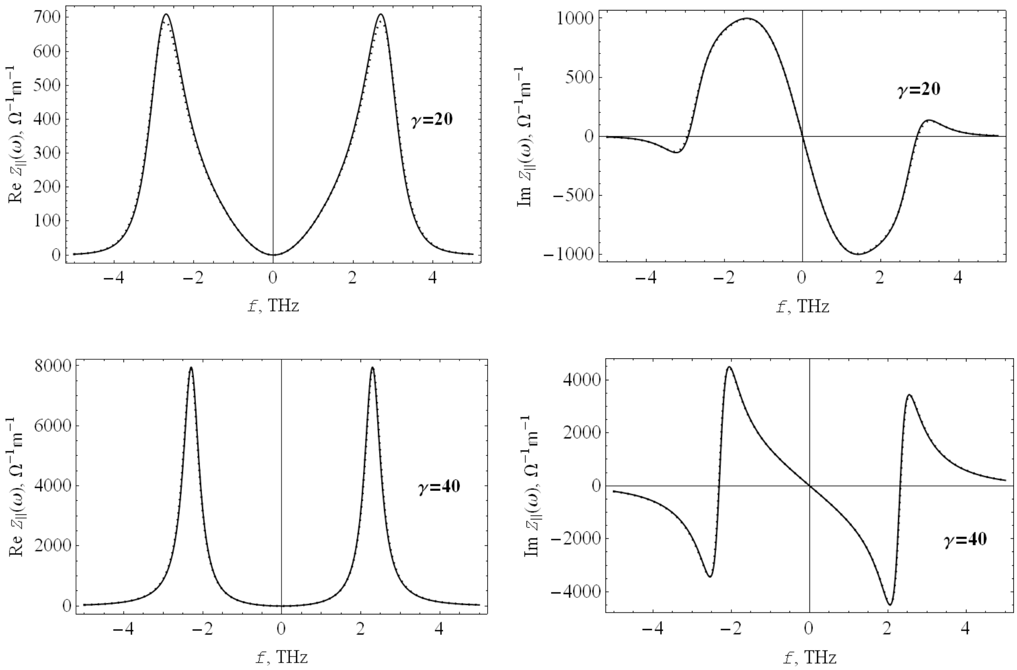


Рис.3. Действительная (a) и мнимая (b) составляющие продольного импеданса двухслойного металлического волновода при постепенно возрастающих значениях γ; $a_1 = 1\,\text{мм}$, $d_1 = 1\,\text{мкм}$, $\sigma_1 = 3\times10^4\ \Omega^{-1}\text{м}^{-1}$. Точки и сплошные кривые соответствуют точным расчетам и расчетам с помощью аппроксимации (6).

При избранных параметрах кривые, рассчитанные по точным формулам и с помощью аппроксимации (6), практически полностью совпадают. Относительно эволюции характера импеданса и его резонансных свойств можно сказать, что с ростом энергии частицы возрастает резонансная частота, которая, впрочем, довольно быстро (уже при $\gamma = 20$) достигает некоторого предельного значения. При очень малых энергиях $(\gamma \le 10)$ резонанс имеет широкополосный характер и его мнимая часть значительно превышает действительную. При этом действительные и мнимые составляющие сохраняют знак, что говорит о преимущественно емкостном характере импеданса. С ростом энергии $(\gamma = 20)$ мнимая часть импеданса становится знакопеременной и уже при $\gamma = 40$ импеданс становится чисто индуктивным и узкополосным и приобретает черты, характерные для ультрарелятивистского импеданса [4-6]: его резонансная частота близка к частоте резонанса излучения ультрарелятивистской частицы $f_{rez} = c\sqrt{2/a_1 d_1}\big/2\pi = 2.15\,\text{ТГц}$ [6].

Наличие узкополосного резонанса при $\gamma = 40$, что соответствует энергиям порядка 20 МэВ, указывает на принципиальную возможность получения высокочастотного (терагерцового) когерентного излучения на линейном электронном ускорителе AREAL [7]. Совпадение результатов точных расчетов и расчетов на основе аппроксимационных формул позволяет провести корректное планирование эксперимента, осуществить предсказание результатов измерений и их последующую обработку.

Использование 20 членов разложения в (6) во многих случаях избыточно, однако оно оправдано тем, что обеспечивает адекватный расчет параметров излучения для широкого диапазона энергий частицы и геометрических и электродинамических параметров двухслойного волновода. Это видно на примере десятикратного увеличения радиуса волновода (рис.4), что, кстати, существенно облегчит подготовку и проведение эксперимента на AREAL.

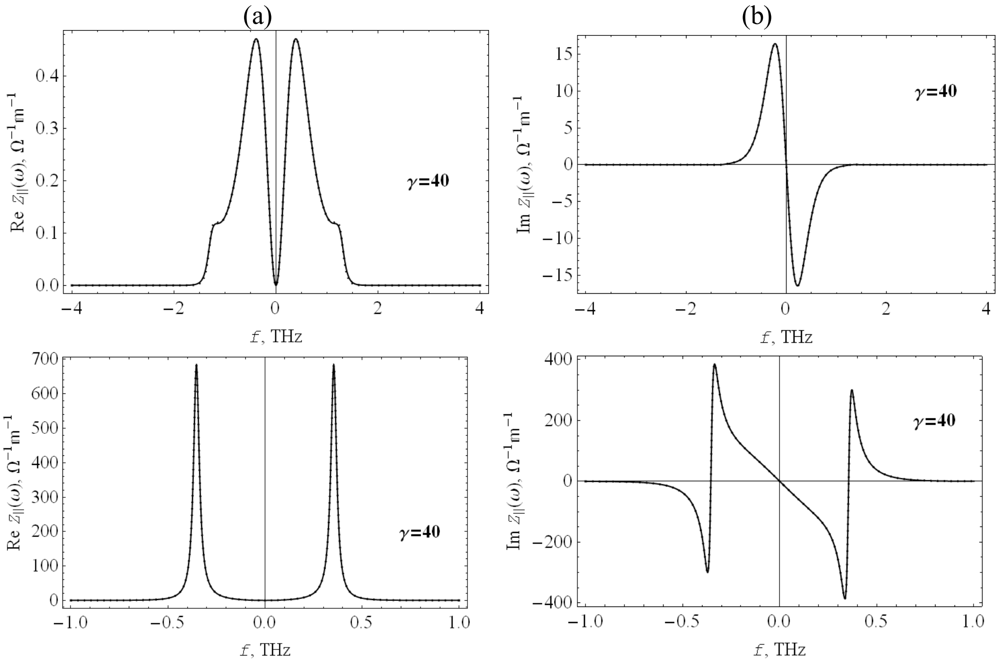


Рис.4. Действительная (a) и мнимая (b) составляющие продольного импеданса двухслойного металлического волновода при $\gamma = 40$ и $a_1 = 1$ см : $d_1 = 1$ мкм , $\sigma_1 = 3\times10^4\ \Omega^{-1}\text{м}^{-1}$ (верхний ряд); $d_1 = 5$ мкм , $\sigma_1 = 3\times10^3\ \Omega^{-1}\text{м}^{-1}$ (нижний ряд). Точки и сплошные кривые соответствуют точным расчетам и расчетам с помощью аппроксимации (6).

Как видно из рисунка, увеличение внутреннего радиуса волновода в десять раз, при неизменных остальных его параметрах d_1 и σ_1, меняет характер импеданса – он становится преимущественно емкостным и теряет свои резонансные свойства.

Добиться сохранения индуктивного характера импеданса с узкополосным резонансом можно при одновременном увеличении толщины покрытия и уменьшении проводимости заполняющего его материала. При этом, естественно, понижается резонансная частота и ослабляется интенсивность излучения (ср. рис.3 и 4). Отметим также полное совпадение результатов расчетов по точным формулам и с помощью полученной аппроксимации.

3. Кильватерные потенциалы

Напомним, что основной целью вывода аппроксмимационного соотношения (6) являлась не необходимость упрощения расчетных формул для построения импедансных кривых и их исследования (эффективное выполнение подобного рода расчетов возможно с помощью выражений (1)). Их эффективность проявляется при расчетах пространственно-временных характеристик волновода: таких, как кильватерные потенциалы или поле излучения из раскрыва полубесконечного круглого волновода [6].

Расчет кильватерных потенциалов, как уже отмечалось, производится по формуле (4). Явные выражения для них (с применением аппроксимации (6)) могут быть получены как непосредственным интегрированием вдоль действительной оси, так и с помощью интегрирования вдоль замыкающегося на бесконечности контура на комплексной плоскости. В последнем случае интергал вдоль дейтвительной оси дополняется равным нулю интегралом вдоль полуокружности бесконечного радиуса R (рис.5).

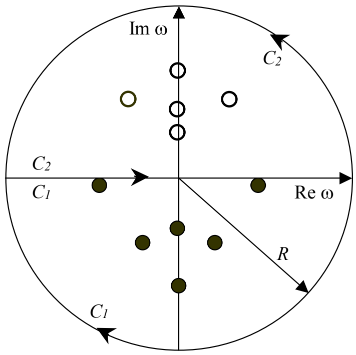


Рис.5. Схематическое изображение полюсов и охватывающих их контуров интегрирования C_1 и C_2.

При определении потенциала позади сгустка $(s>0)$ полуокружность интегрирования расположена в нижней полуплоскости (контур C_1, $\mathrm{Im}\,\omega<0$ на рис.5). Излучение, опережающее сгусток $(s<0)$, определяется интегралом, содержащим дугу, расположенную в верхней полуплоскости (контур C_2, $\mathrm{Im}\omega>0$ на рис.5). В обоих случаях интегрирование сводится к подсчету вкладов от простых полюсов, обусловленных корнями многочлена $\widetilde{G}(\omega)$, расположенных в соответствующих полуплоскостях. В общем виде выражение для продольного кильватерного потенциала, согласно теореме о вычетах [12], может быть записано следующим образом:

$$W_{\parallel}^{0}(s)=C\,\mathrm{sign}(s)\sum_{k=1}^{23}\bigl(1-\mathrm{sign}(s\mathrm{Im}\omega_k)\bigr)\frac{j\omega_k-\varepsilon_0\tau^2\omega_k^2/\sigma_1\beta^2}{(a_1\tau/v)^{22}\prod\limits_{i=1,\,i\neq k}^{23}(\omega_k-\omega_i)}\mathrm{e}^{-j\frac{\omega_k}{v}s}, \tag{11}$$

$$C=1.12105\times10^{14}\,a_1\sigma_1Z_0^2/2\pi d_1\,. \tag{12}$$

Множитель $\mathrm{sign}(s)$, определяющий знак перед суммой в (11), обусловлен противоположной направленностью контуров: по часовой (контур C_2) и против часовой стрелки (контур C_1). Распределения кильватерных потенциалов приведены на рис.6 и 7.

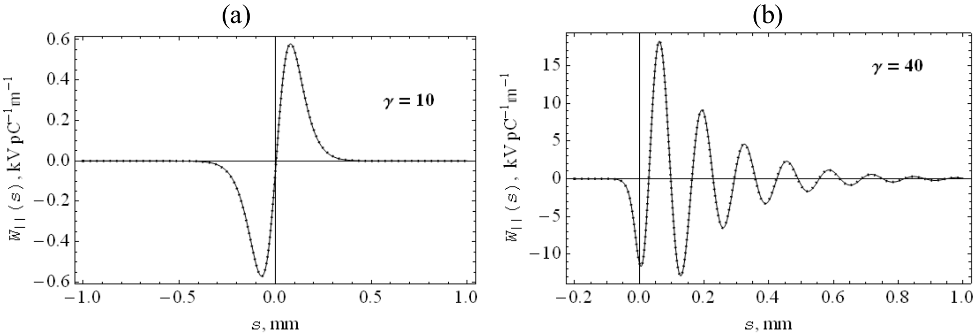


Рис.6. Кильватерные потенциалы двухслойного волновода для энергий $\gamma = 10$ (a) и $\gamma = 40$ (b); значения параметров равны: $a_1 = 1$ мм, $d_1 = 1$ мкм, $\sigma_1 = 3\times10^4\,\Omega^{-1}\text{м}^{-1}$. Точки и сплошные кривые соответствуют точным расчетам и расчетам с помощью аппроксимации (6).

Распределения, приведенные на рис.6, иллюстрируют эволюцию кильватерной функции при увеличении энергии частицы и фиксированных параметрах волновода. С ростом энергии кильватерная функция преобразуется (соответственно преобразованию импеданса на рис.3) от чисто емкостного типа $(\gamma = 10)$ к индуктивному $(\gamma = 40)$. Для емкостного типа характерно симметеричное распределение излучения впереди и позади сгустка при нулевом балансе теряемой и приобретаемой энергии. Индуктивный тип характеризуется преобладающим остаточным излучением позади сгустка с затухающими периодическими осцилляциями.

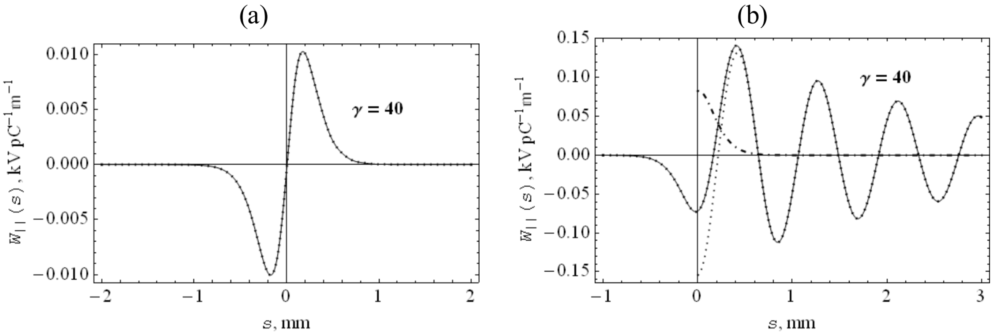


Рис.7. Кильватерные потенциалы двухслойного волновода; $a_1 = 1$ см, $\gamma = 40$; значения параметров равны: $d_1 = 1$ мкм, $\sigma_1 = 3\times10^4\,\Omega^{-1}\text{м}^{-1}$ (a), $d_1 = 5$ мкм, $\sigma_1 = 3\cdot10^3\,\Omega^{-1}\text{м}^{-1}$ (b). На рис.7b даны дополнительно вклад двух главных полюсов (пунктир); вклад остальных полюсов (штрих-пунктир). Точки и сплошные кривые соответствуют точным расчетам и расчетам с помощью аппроксимации (6).

Рис.7 соответствует распределениям импеданса, приведенным в нижнем ряду на рис.4 и указызает на возможность и способ преобразования типа кильватерной функции от емкостного (слева) к индуктивному (справа) при неизменных энергии частицы и внутреннего радиуса волновода.

Наличие у индуктивного импеданса двух симметричных полюсов, обладающих сравнительно малой отрицательной мнимой составляющей (на рис.2 они помечены кружками), является главным заметным его отличием от импеданса емкостного типа. Естественно предположить, что эта пара полюсов играет существенную роль в формировании остаточного излучения. Действительно, как показывает рис.7б, их вклад является определяющим при формировании дальнего кильватерного поля. Их вклад в ближнее поле также является существенным: он соизмерим со вкладом остальных полюсов, расположенных в нижней полуплоскости.

Вклад двух главных полюсов – периодическая функция с убывающими осцилляциями, тогда как вклад остальных полюсов – монотонно-убывающая и быстро затухающая функция. По аналогии с [13], остаточное кильватерное поле, следующее за частицей, разбивается на “резонаторную” и “диффузионную” составляющие, образуемые соответственно вкладами двух главных и остальных полюсов. При $\tau = 0$ [6] “диффузионная” составляющая зануляется и остаются только вклады от двух главных полюсов, образующих “резонаторную” составляющую. В соответствии с теоремой Вильсона о нагрузке [14], значение “резонаторной” составляющей вдвое превышает истинное значение кильватерного потенциала на частице $(s = 0)$, которое равно (с обратным знаком) “диффузной” его составляющей.

4. Заключение

С помощью аппроксимационной формулы для продольного низкоэнергетического импеданса двухслойной металлической трубы получено явное выражение для кильватерного потенциала. Выделены его “резонаторная” и “диффузная” составляющие. Корректность аппроксимационных выражений апробирована сравнениями с точными численными расчетами. Последовательность графических примеров дает возможность проследить эволюцию форм и типов импедансных кривых и кильватерных потенциалов. В частности, выявлены закономерности, по которым они преобразуются – в зависимости от энергии частицы (при фиксированных параметрах волновода) и при вариациях параметров волновода (энергия частицы фиксирована).

Определены геометрические и электродинамические параметры волноводов, при которых возможно наблюдение узкополосного когерентного излучения в терагерцовом (или субтерагерцовом) диапазоне при энергиях пучка 20 МэВ, соответствующих параметрам строящегося линейного ускорителя AREAL.

В заключение автор выражает благодарность В.М.Цаканову и М.И.Иваняну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **J. B. Rosenzweig et al.** AIP Conf. Proc., **1299**, 364 (2010).
2. **M.Ivanyan, A.Tsakanian**. Proc. of IPAC2011, San Sebastián, Spain, 2011, p.703.
3. **G. Stupakov, K.L.F. Bane**. Phys. Rev. ST-AB, **15**, 124401 (2012).
4. **M. Ivanyan, V. Tsakanov**. Phys. Rev. ST-AB, **7**, 114402 (2004).
5. **M. Ivanyan et al.** Phys. Rev. ST- AB, **11**, 084001 (2008).
6. **M. Ivanyan, V. Tsakanov, A. Grigoryan, A.Tsakanian.** http://arxiv.org/abs/1301.7729, 2013.
7. **B. Grigoryan et al.** IPAC2011, San Sebastian, Spain, Sept. 4-9, 2011, pp.1066-1068.
8. **A. Piwinski.** Report No DESY HERA 92-11, May 1992.
9. **M. Abramowitz, I.A. Stegun.** Handbook of Mathematical Functions. NBS, 1964.
10. **B.W. Zotter and S.A. Kheifetz.** Impedances and Wakes in High-Energy Particle Accelerators. Singapore, World Scientific, 1997.
11. www.wolfram.com/mathematica.
12. **Г. Корн, Т. Корн.** Справочник по математике. М., Наука, 1971.
13. **K.L.F. Bane, M. Sands.** Report No SLAC-PUB-96-7074, 1995.
14. **P.B. Wilson.** Fermilab Summer School, 1981, AIP Conf. Proc., **87**, 450 (1982).

ՑԱԾՐ ԷՆԵՐԳԻԱՆԵՐԻ ԷԼԵԿՏՐՈՆԱՅԻՆ ՓՆՋԵՐԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՌԵԶՈՆԱՆՍԱՅԻՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԵՐԿՇԵՐՏ ԱԼԻՔԱՏԱՐՈՒՄ

Ա.Հ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Երկշերտ գլանային ալիքատարի ցածր-էներգիական իմպեդանսի համար ստացված է մոտարկային բանաձև, որը հնարավորություն է տալիս բացահայտ ստանալ ալիքատարում լիցքավորված մասնիկի ճառագայթումը նկարագրող տարածա-ժամանակային ֆունկցիաներ: Բացահայտված են իմպեդանսի և քիլվատերային պոտենցիալների ձևափոխումների ընդհանուր օրինաչափությունները` կախված մասնիկի էներգիայից և ալիքատարի երկրաչափական և էլեկտրադինամիկական պարամետրերից: Բացահայտված են էքսպերիմենտալ հետազոտությունների համար ընդունելի այնպիսի ալիքատարների պարամետրերը, որոնք ռեզոնանսային հատկություններ են ձեռք բերում 20 ՄէՎ էներգիաների դեպքում:

RESONANCE PROPERTIES OF LOW-ENERGY ELECTRON BEAMS RADIATION IN A TWO-LAYER WAVEGUIDE

A.H. GRIGORYAN

We obtain an approximation formula for low-energy impedance of a two-layer cylindrical waveguide, allowing the construction of explicit expressions for the space-time functions that characterize the radiation of a charged particle in the waveguide. The general laws of evolution of impedance and wake potentials with increasing particle energy and with the change of geometric and electrodynamic parameters of the waveguide are obtained. The settings of waveguides convenient for experimental research and having the resonance properties at energies of 20 MeV are revealed.

Известия НАН Армении, Физика, т.48, №6, с.394-406 (2013)

УДК 532.783

ДИСКЛИНАЦИИ В НЕМАТИКАХ ПРИ УЧЕТЕ ФЛЕКСОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

М.Р. АКОПЯН*, Р.С. АКОПЯН, Ю.С. ЧИЛИНГАРЯН

Ереванский государственный университет, Армения
*e-mail: hamara404@gmail.com

(Поступила в редакцию 24 июля 2013 г.)

Рассмотрена задача о влиянии флексоэлектричества на стабильность клиновидных (с чисто поперечным или продольным изгибами) дисклинаций в нематических жидких кристаллах (НЖК). Выведены уравнения движения директора НЖК в цилиндрической системе координат с учетом флексоэлектричества. Эти уравнения позволяют решить целый ряд задач о влиянии флексоэлектричества на ориентационные структуры НЖК. В частности, показано, что благодаря флексоэлектрическому эффекту линия дисклинации с радиальным распределением директора и поперечными размерами порядка нескольких микронов может быть стабилизирована. Для дисклинации с азимутальным распределением директора при всех физически реальных размерах линия неустойчива и вытекает в третье измерение.

1. Введение

Как известно, нематический жидкий кристалл (НЖК) своим названием обязан нитям, которые видны в этой жидкости под микроскопом. В тонких пленках, заключенных между двумя стеклянными пластинками, и при скрещенных поляризаторах нити можно увидеть в виде темных полос, исходящих из точек. Пучки этих полос обусловлены «линейными сингулярностями», перпендикулярными слою. По аналогии с дисклинациями в кристаллах Франк [1,2] предложил именовать эти «сингулярности» «дисинклинациями», а в настоящее время употребляется термин «дисклинации». Смысл этих текстур был понят Леманом [3] и Фриделем [4], однако математическое рассмотрение истинной конфигурации около дисклинации дали Озеен [5] и Франк [1]. Более полное обсуждение теории дано в работах [6,7].

Предположим, что директор $\mathbf{n}$ находится в плоскости стенки ячейки с НЖК (тангенциальные граничные условия), и определим две ортогональные оси (x, y) в этой плоскости (см. рис.1). Обозначим расстояние между сингулярной точкой и точкой наблюдения через r, а ψ – угол между r и x ($\mathrm{tg}\psi = y/x$). Угол между $\mathbf{n}$ и осью x обозначим через θ. Приближенное соотношение для θ, справедливое с точки зрения симметрии, есть $\theta = s\psi + \mathrm{const}$. Здесь s называется силой сингулярности, силой дисклинации, или топологическим зарядом. Таким образом, если мы обойдем вокруг сингулярной точки по замкнутому контуру, сделав один полный оборот ($\Delta\psi = 2\pi$), то обнаружим, что директор повернулся на $\Delta\theta = 2\pi s$. Это справедливо только, если s – целое или полуцелое число (поскольку состояния **n** и –**n** неразличимы).

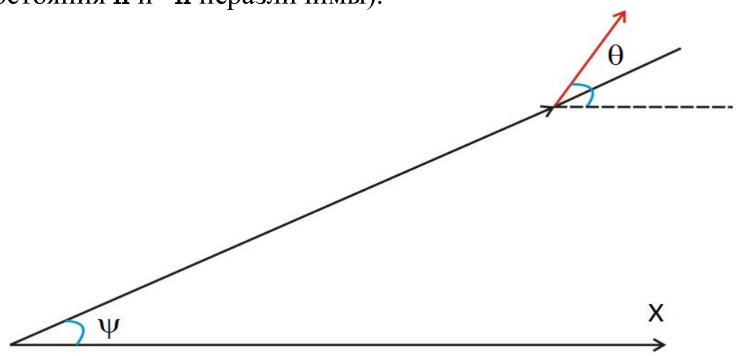


Рис.1. Ориентация директора вдоль радиального луча, составляющего угол ψ с осью x. Директор составляет угол θ с осью x.

В работе [6] было показано, что искажения вокруг линии с целочисленной силой s всегда можно непрерывно преобразовать в гладкую структуру без сингулярной линии. Обсуждены также условия, при которых сингулярная линия может остаться устойчивой.

При механических деформациях (продольных или поперечных) в жидких кристаллах, т.е. из-за градиента тензорного параметра порядка, может возникать макроскопическая поляризация. Физическая природа этого флексоэлектрического эффекта была выяснена впервые в работе [8]. Существует также обратный флексоэлектрический эффект, когда электрическое поле вызывает дополнительную переориентацию директора ЖК.

В настоящей работе исследовано влияние флексоэлектрического эффекта на стабильность радиальной или аксиальной ориентации молекул НЖК вокруг сингулярной линии с топологическим зарядом +1. Получены условия стабильности по отношению к возмущению директора вне плоскости начальной ориентации. Для этого выведено уравнение директора в цилиндрических координатах вариационным принципом Эйлера-Лагранжа с учетом флексоэлектрических членов в выражении для свободной энергии НЖК. Данное рассмотрение полезно с точки зрения технологии приготовления жидкокристаллических аксиконов для амплитудного и поляризационного преобразования лазерных пучков.

2. Свободная энергия НЖК, описывающая флексоэлектрический эффект

Чтобы описать флексоэлектрический эффект, напишем энергию, соответствующую отмеченному выше взаимодействию. Пусть имеем электрический потенциал φ, тогда электростатическое поле $E_i = -\partial\varphi / \partial x_i$ ($x_i = x, y, z$ – координаты декартовой системы) и имеем curl$\mathbf{E} = 0$. Термодинамический потенциал в системе единиц СГС может быть написан как

$$W = W_0 + \frac{1}{8\pi}\varepsilon_{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} - F_d - F_{flex}. \qquad (1)$$

Третий член в формуле (1) описывает упругую энергию деформации директора НЖК, которую мы напишем в обычном виде Озена–Франка:

$$F_d = \frac{1}{2}K_1(\mathrm{div}\mathbf{n})^2 + \frac{1}{2}K_2(\mathbf{n}\mathrm{curl}\mathbf{n})^2 + \frac{1}{2}K_3(\mathbf{n}\times\mathrm{curl}\mathbf{n})^2, \qquad (2)$$

где K_i – упругие константы Франка. Матрица диэлектрического тензора НЖК $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_\perp\delta_{ik} + \varepsilon_a n_i n_k$. Здесь $\varepsilon_\parallel$ и $\varepsilon_\perp$ – диэлектрические постоянные, измеренные вдоль и перпендикулярно к директору, ε_α – анизотропия диэлектрической проницаемости и δ_{ik} – символ Кронекера. Четвертый член в энергии описывает взаимодействие флексоэлектрического поля с директором НЖК. Все возможные члены в нем, удовлетворяющие условиям симметрии, есть

$$F_{flex} = e_1 n_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\mathrm{div}\mathbf{n}) - e_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}[\mathbf{n}\times(\mathrm{curl}\mathbf{n})]_i. \qquad (3)$$

В это выражение входят два коэффициента e_1 и e_3 с размерностью электрического потенциала и произвольным знаком. Они называются флексоэлектрическими коэффициентами. Из термодинамического потенциала можно найти электрическую индукцию D:

$$D_i = 4\pi\frac{\partial W}{\partial E_i} = -4\pi\frac{\partial W}{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}} = \varepsilon_{ik}E_k + 4\pi e_1 n_i(\mathrm{div}\mathbf{n}) - 4\pi e_3[\mathbf{n}\times(\mathrm{curl}\mathbf{n})]_i. \qquad (4)$$

Очевидно, что $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}(e_i = 0) + 4\pi\mathbf{P}_{\mathrm{flex}} = \mathbf{D}(e_i = 0) + 4\pi\mathbf{P}_{\mathrm{flex}}$, где $\mathbf{P}$ есть поляризация среды. Поэтому получаем

$$D_i = \varepsilon_{ik}E_k + 4\pi P_{\mathrm{iflex}}, \qquad (5)$$

где

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{flex}} = e_1\mathbf{n}(\mathrm{div}\mathbf{n}) - e_3[\mathbf{n}\times(\mathrm{curl}\mathbf{n})]. \qquad (6)$$

Здесь заметим, что в некоторых работах используют ($-e_3$) вместо e_3 (например, в [9,10]). Знаки совпадают с приведенными в (6), например, в работах [11-14]. Вариация термодинамического потенциала по φ даст нам уравнение для электрического поля:

$$\frac{\delta W}{\delta\phi} - \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\delta W}{\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right)} = 0.$$

Тогда имеем $\mathrm{div}\mathbf{D} = 0$. Окончательно для электрического поля имеем систему уравнений

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = 0, \quad \mathrm{curl}\mathbf{E} = 0. \qquad (7)$$

Вариация термодинамического потенциала по $\mathbf{n}$ даст нам уравнение для директора

$$\Pi_{ij}\left[\frac{\delta W}{\delta n_j}-\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\delta W}{\delta\left(\partial n_j/\partial x_k\right)}\right]=0, \tag{8}$$

где $\Pi_{ij}=\delta_{ij}-n_i n_j$ есть проекционный оператор. Если обозначить $f_j=\dfrac{\delta W}{\delta n_j}$, $\varphi_j=\dfrac{\partial}{\partial x_k}\dfrac{\delta W}{\delta\left(\partial n_j/\partial x_k\right)}$, то мы найдем флексоэлектрические члены в уравнении движения директора: $f_{\mathrm{jflex}}=\dfrac{\delta F_{\mathrm{flex}}}{\delta n_j}$, $\varphi_{\mathrm{jflex}}=\dfrac{\partial}{\partial x_k}\dfrac{\delta F_{flex}}{\delta\left(\partial n_j/\partial x_k\right)}$. Имея в виду, что $\left[A\times B\right]_i=e_{ijk}A_jB_k$ ($e_{ijk}-$ полностью антисимметричный единичный тензор) и $e_{ijk}e_{kpq}=\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp}$, можно выражение (3) записать в виде

$$F_{\mathrm{flex}}=-e_1\boldsymbol{nE}\left(\mathrm{div}\mathbf{n}\right)-e_3\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{n}\nabla\right)\boldsymbol{n}. \tag{9}$$

Таким образом, имеем

$$f_{\mathrm{jflex}}=-e_1E_j\left(\mathrm{div}\mathbf{n}\right)-e_3E_k\frac{\partial n_k}{\partial x_j},\quad \phi_{\mathrm{jflex}}=-e_1\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathbf{nE}\right)-e_3\frac{\partial}{\partial x_k}\left(E_jn_k\right). \tag{10}$$

Теперь уравнение директора (8) можно написать в виде

$$f_i-\varphi_i-n_i\left[\mathbf{n}\left(\mathbf{f}-\varphi\right)\right]=0, \tag{11}$$

$$\mathbf{f}=\mathbf{f}_{\mathrm{d}}+\mathbf{f}_{\mathrm{flex}},\ \varphi=\varphi_d+\varphi_{\mathrm{flex}}, \tag{12}$$

$$f_{jd}=\frac{\delta F_d}{\delta n_j},\quad \varphi_{jd}=\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\delta F_d}{\delta\left(\partial n_j/\partial x_k\right)}. \tag{13}$$

Теперь для каждого флексоэлектрического эффекта в НЖК необходимо решать систему уравнений (7) и (11)-(13) совместно с (5). Следует найти **D** и **E** из (7) и, подставив их в (11), найти уравнение для ориентации директора НЖК. В общем случае такую задачу решить трудно. Поэтому имеет смысл рассмотреть конкретные задачи.

3. Уравнения в цилиндрических координатах

Для того, чтобы получить уравнение директора в цилиндрических координатах, надо минимизировать свободную энергию во всем объеме:

$$\mathbf{F}=\iint F2\pi r dr dz\text{, где } F=F_d+F_{el}+F_{flex},\ F_{el}=-\frac{1}{8\pi}\varepsilon_{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}.$$

Таким образом, нам нужно варьировать производную F_r. Тогда уравнение для директора будет иметь следующий вид:

$$\Pi_{ij}\left[\frac{\delta\left(F_r\right)}{\delta n_j}-\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\delta\left(F_r\right)}{\delta\left(\partial n_j/\partial x_k\right)}\right]=0. \tag{14}$$

Из формулы (9) имеем

$$F_{\text{flex}} = -e_1\mathbf{nE}S - e_3 E_i B_i\,. \tag{15}$$

Здесь сделаны следующие обозначения:

$$S = \operatorname{div}\mathbf{n} = \frac{n_r}{r} + \frac{\partial n_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial n_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial n_z}{\partial z}, \quad \mathbf{B} = -[\mathbf{n}\times \operatorname{curl}\mathbf{n}],$$

$$B_r = -\frac{n_\varphi^2}{r} + (\mathbf{n}\nabla)n_r\,, \;\; B_\varphi = \frac{n_r n_\varphi}{r} + (\mathbf{n}\nabla)n_\varphi\,, \;\; B_z = (\mathbf{n}\nabla)n_z\,. \tag{16}$$

Чтобы окончательно написать уравнение директора в цилиндрических координатах, нам необходимы следующие векторы и тензоры:

$$f_{\text{jflex}} = \frac{\delta(rF_{flex} + rF_{el})}{\delta n_j} = -e_1 r E_j S - e_3 r E_i \frac{\delta B_i}{\delta n_j} - \varepsilon_0\varepsilon_a(\mathbf{nE})E_j,$$

$$f_{\text{rflex}} = -e_1 r E_r S - e_3 r\left[E_r\frac{\delta n_r}{\delta r} + E_\varphi\left(\frac{n_\varphi}{r} + \frac{\delta n_\varphi}{\delta r}\right) + E_z\frac{\delta n_z}{\delta r}\right],$$

$$f_{\varphi\text{flex}} = -e_1 r E_\varphi S - e_3 r\left[E_r\left(-2\frac{n_\varphi}{r} + \frac{\delta n_r}{\delta \varphi}\right) + E_\varphi\left(\frac{n_r}{r} + \frac{\delta n_\varphi}{\delta \varphi}\right) + E_z\frac{\delta n_z}{\delta \varphi}\right],$$

$$f_{\text{zflex}} = -e_1 r E_z S - e_3 r\left[E_r\frac{\delta n_r}{\delta z} + E_\varphi\frac{\delta n_\varphi}{\delta z} + E_z\frac{\delta n_z}{\delta z}\right],$$

$$f_{rrf} = \frac{\delta(rF_{flex})}{\delta(\partial n_r/\partial r)} = -e_1 r\mathbf{nE} - e_3 r E_r n_r\,, \qquad f_{\varphi zf} = \frac{\delta(rF_{flex})}{\delta(\partial n_\varphi/\partial z)} = -e_3 r E_\varphi n_z\,,$$

$$f_{r\varphi f} = \frac{\delta(rF_{flex})}{\delta(\partial n_r/\partial \varphi)} = -e_3 E_r n_\varphi\,, \; f_{zrf} = \frac{\delta(rF_{flex})}{\delta(\partial n_z/\partial r)} = -e_3 r E_z n_r\,,$$

$$f_{rzf} = \frac{\delta(rF_{flex})}{\delta(\partial n_r/\partial z)} = -e_3 r E_r n_z\,, \;\; f_{z\varphi f} = \frac{\delta(rF_{flex})}{\delta(\partial n_z/\partial \varphi)} = -e_3 E_z n_\varphi\,,$$

$$f_{\varphi rf} = \frac{\delta(rF_{flex})}{\delta(\partial n_\varphi/\partial r)} = -e_3 r E_\varphi n_r\,, \; f_{zzf} = \frac{\delta(rF_{flex})}{\delta(\partial n_z/\partial z)} = -e_1 r\mathbf{nE} - e_3 r E_z n_z\,,$$

$$f_{\varphi\varphi f} = \frac{\delta(rF_{flex})}{\delta(\partial n_\varphi/\partial \varphi)} = -e_1\mathbf{nE} - e_3 E_\varphi n_\varphi\,,$$

$$\phi_{\text{jflex}} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\delta(rF_{flex})}{\delta(\partial n_j/\partial x_k)},$$

$$\varphi_{\text{rflex}} = -e_1\mathbf{nE} - e_1 r\frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{nE}) - e_3 r\left[E_r Q_1 + (\mathbf{n}\nabla)E_r\right],$$

$$\phi_{\varphi\text{flex}} = -e_1\frac{\partial}{\partial \varphi}(\mathbf{nE}) - e_3 r\left[E_\varphi Q_1 - \frac{n_r}{r}E_\varphi + (\mathbf{n}\nabla)E_\varphi\right],$$

$$\phi_{z\text{flex}} = -e_1 r \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{nE}) - e_3 r\left[E_z Q_1 - \frac{n_r}{r}E_z + (\boldsymbol{n}\nabla)E_z\right].$$

Из этих выражений надо построить следующие векторы:

$$f_{rf} - \phi_{rf} = -e_1\left[rE_r S - \mathbf{nE} - r\frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{nE})\right] - e_3 r\left[E_r\left(\frac{\delta n_r}{\delta r} - S\right) + E_\varphi\left(\frac{n_\varphi}{r} + \frac{\delta n_\varphi}{\delta r}\right) + E_z\frac{\delta n_z}{\delta r} - (\mathbf{n}\nabla)E_r\right],$$

$$f_{\varphi f} - \phi_{\varphi f} = -e_1\left[rE_\varphi S - \frac{\partial}{\partial\varphi}(\mathbf{nE})\right] - e_3 r\left[E_r\left(-2\frac{n_\varphi}{r} + \frac{\delta n_r}{\delta\varphi}\right) + E_\varphi\left(2\frac{n_r}{r} + \frac{\delta n_\varphi}{\delta\varphi} - S\right) + E_z\frac{\delta n_z}{\delta\varphi} - (\mathbf{n}\nabla)E_\varphi\right], \tag{17}$$

$$f_{zf} - \phi_{zf} = -e_1 r\left[E_z S - \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{nE})\right] - e_3 r\left[E_r\frac{\delta n_r}{\delta z} + E_\varphi\frac{\delta n_\varphi}{\delta z} + E_z\left(\frac{n_r}{r} + \frac{\delta n_z}{\delta z} - S\right) - (\mathbf{n}\nabla)E_z\right],$$

$$\Phi = \mathbf{n}(\boldsymbol{f} - \phi) = n_r(f_r - \phi_r) + n_\varphi(f_\varphi - \phi_\varphi) + n_z(f_z - \phi_z).$$

Теперь можно решать уравнение (11) для директора в цилиндрических координатах с векторами из (17) в конкретных случаях.

4. Планарно-радиальное и азимутальное распределения директора

Рассмотрим стабильность распределения директора по отношению к возмущению вне плоскости начальной ориентации для случаев чисто поперечного (планар-радиального) и чисто продольного (планар-азимутального) изгибов (см. рис.2). Рассмотрение проведем с учетом флексоэлектричности НЖК.

Рис.2. Дисклинации Франка силы s = 1 для случаев чисто поперечного и чисто продольного изгибов. Верхние две фигуры показывают невозмущенные распределения, а нижние – возможную релаксацию директора в третье измерение.

4.1. Изначально радиальная ориентация

В случае чисто поперечного изгиба имеем $n_r = 1,\ n_\varphi = 0,\ n_z = 0$. Тогда $S = \frac{1}{r}$, $T = B_1 = B_2 = B_3 = 0$, $F_d = \frac{1}{2}K_1\frac{1}{r^2}$ и свободная энергия во всем объеме имеет вид

$$\mathrm{F_s} = \pi K_1 L \ln\frac{R}{r_0}, \tag{18}$$

где R – радиус цилиндрического образца и r_0 – молекулярный размер. Если имеем возмущение вне плоскости ориентации директора, то поле последнего можно записать как

$$n_r = \cos\theta(r),\ \ n_\varphi = 0,\ \ n_z = \sin\theta(r). \tag{19}$$

Тогда имеем

$$S = \frac{\cos\theta}{r} - \sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial r},\ \ B_1 = -\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial r},\ B_2 = 0,\ B_3 = \cos^2\theta\frac{\partial\theta}{\partial r}. \tag{20}$$

В этом случае можно положить $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$, и из уравнений $\mathrm{div}\mathrm{D} = 0$, $\mathrm{curl}\mathbf{E} = 0$ получим $D_r = \mathrm{const} \equiv c_1$, $E_z = \mathrm{const} \equiv c_2$ и $E_\varphi = \mathrm{const}/r \equiv c_3/r$. Разумно предположить, что вдали от домена радиальной ориентации электрическое поле стремится к нулю в отсутствие внешних полей. Это означает, что константы мы можем считать равными нулю. Из уравнения (4) имеем

$$D_i = \varepsilon_{ik}E_k + 4\pi e_1 n_i(\mathrm{div}\mathbf{n}) - 4\pi e_3[\mathbf{n}\times(\mathrm{curl}\mathbf{n})]_i. \tag{21}$$

Отсюда необходимо найти E_r. Для этого запишем

$$c_1 = \varepsilon_{rr}E_r + \frac{c_3}{r}\varepsilon_{r\varphi} + \varepsilon_{rz}c_2 + 4\pi P_r. \tag{22}$$

Тогда, учитывая вышеприведенное замечание ($c_1 = c_2 = c_3 = 0$), получим

$$E_r = -\frac{4\pi}{\varepsilon_{rr}}P_r, \tag{23}$$

и для свободной энергии можно записать

$$F_{el} = -\frac{1}{8\pi}\varepsilon_{ik}E_iE_k = -\frac{2\pi}{\varepsilon_{rr}}P_r^2,\ P_r = e_1 n_r S + e_3 B_r,$$

$$F_{flex} = -e_1\mathbf{nE}S - e_3E_iB_i = -E_r\frac{4\pi}{\varepsilon_{rr}}P_r = \frac{4\pi}{\varepsilon_{rr}}P_r^2,\quad F_{el} + F_{flex} = \frac{2\pi}{\varepsilon_{rr}}P_r^2. \tag{24}$$

В приближении отсутствия диэлектрической и флексоэлектрической анизотропий ($\varepsilon_\parallel = \varepsilon_\perp = \varepsilon$ и $e_1 = -e_3 = e$) имеем

$$P_r = e_1 n_r S + e_3 B_r = e_1\left(\frac{\cos^2\theta}{r} - \sin\theta\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial r}\right) - e_3\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial r} = e\frac{\cos^2\theta}{r},$$

$$2\left(F_{el} + F_{flex}\right) = \Sigma\frac{\cos^4\theta}{r^2},$$

где $\Sigma = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon}$. Для типичных НЖК $\varepsilon \sim 10$, $e \sim 10^{-4}$ СГС и $\Sigma \sim 10^{-8}$ СГС.

Учитывая упругую часть свободной энергии

$$2F_d = K_1\left(\frac{\cos\theta}{r} - \sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)^2 + K_3\left(\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)^2, \tag{25}$$

можно минимизировать общую энергию во всем объеме:

$$\frac{\mathrm{F}_{sb}}{\pi} = \iint \left[K_1 \left(\frac{\cos\theta}{r} - \sin\theta \frac{\partial\theta}{\partial r} \right)^2 + K_3 \left(\cos\theta \frac{\partial\theta}{\partial r} \right)^2 + \Sigma \frac{\cos^4\theta}{r^2} \right] r dr dz\,. \qquad (26)$$

Тогда, при наличии флексоэлектрического эффекта, свободная энергия F_s состояния чисто поперечного изгиба, вместо (18), принимает вид

$$\mathrm{F}_s = \pi \left(K_1 + \Sigma \right) L \ln \frac{R}{r_0}\,. \qquad (27)$$

При расчете свободной энергии возмущенного состояния, для простоты, распределение директора выберем как решение уравнения в одноконстантном приближении упругости и в отсутствие флексоэлектричности. Тогда имеем уравнение

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} \right) = -\frac{\sin 2\theta}{2r^2}$$

или

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{d\theta}{dr} \right) = -\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\,. \qquad (28)$$

Конечно, здесь мы имеем тривиальное решение $\theta = 0,\ \dfrac{d\theta}{dr} = 0$, которое указывает на локальный экстремум функции F_s. Первый интеграл уравнения (28) с граничными условиями $\theta(r=0) = \pi/2,\ \theta(r=R) = 0$ есть

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{r}{R}\,. \qquad (29)$$

Из уравнения (29) можно видеть, что θ линейно уменьшается до нуля при $r \to 0$ и что градиенты **n** не имеют особенности на оси. Таким образом, в этом решении с продольным и поперечным изгибами линейная дисклинация исчезает.

Вычисления можно также произвести для более реального случая с анизотропией упругих констант. Функциональный вид $\theta(r)$ при этом видоизменяется, но качественные черты, которые видны из уравнения (29), остаются неизменными. Энергию можно найти точно. Из (29) получим $\dfrac{d\theta}{dr} = -\dfrac{\cos\theta}{r}$,

$\sin\theta = \dfrac{1-\rho^2}{1+\rho^2}$ и $\cos\theta = \dfrac{2\rho}{1+\rho^2}$. С учетом этого, имеем

$$\frac{\mathrm{F}_{sb}}{\pi} = \iint \left[K_1 \frac{\cos^2\theta}{r} \left(1 + \sin\theta \right)^2 + K_3 \left(\cos\theta \frac{\partial\theta}{\partial r} \right)^2 + \Sigma \frac{\cos^4\theta}{r^2} \right] r dr dz\,. \qquad (30)$$

Если обозначить $K_3^{'} = K_3 + \Sigma$, то энергия преобразуется следующим образом:

$$\frac{\mathrm{F}_{sb}}{\pi K_1 L} = \int_0^1 \left[\frac{\cos^2\theta}{\rho}\left(1+\sin\theta\right)^2 + \frac{K_3^{'}}{K_1}\frac{\cos^4\theta}{\rho} \right] d\rho\,, \tag{31}$$

где $\rho = r / R$. Далее, обозначив $y = \rho^2$, получим

$$\frac{\mathrm{F}_{sb}}{\pi K_1 L} = 8\int_0^1 \frac{1+\frac{K_3^{'}}{K_1}y}{\left(1+y\right)^4} dy = \frac{1}{3}\left(2\frac{K_3^{'}}{K_1} + 7 \right). \tag{32}$$

Таким образом, чисто поперечное распределение или радиальная линейная дисклинация будет устойчивой, если

$$\ln\frac{R}{r_0} < \frac{2K_3^{'} + 7K_1}{3\left(K_1 + \Sigma\right)}. \tag{33}$$

В отсутствие флексоэлектричества ($\Sigma = 0$) получаем известное неравенство [12]. Как было отмечено там, окрестности точки фазового перехода из нематика в смектик А отношение K_3/K_1 может быть очень большим. Так, например, если $K_3/K_1 = 16$, то условие (33) соответствует $R \le 563 r_0 \approx 1$ мкм. В присутствии флексоэлектричества этого можно достичь даже далеко от фазового перехода.

В наиболее общем случае, когда $\varepsilon_{\parallel} \ne \varepsilon_{\perp}$ и $e_1 \ne -e_3$, имеем

$$P_r = e_1 n_r S + e_3 B_r = e_1\frac{\cos^2\theta}{r} - \left(e_1 + e_3\right)\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial r}. \tag{34}$$

С другой стороны,

$$2\left(F_{el} + F_{flex}\right) = \frac{4\pi}{\varepsilon_{rr}} P_r^2\,. \tag{35}$$

Мы имеем также $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a n_r^2$ и $\varepsilon_{rr}^{-1} = \varepsilon_{\perp}^{-1}\left(1+\xi n_r^2\right)^{-1}$, где $\xi = \varepsilon_a / \varepsilon_{\perp}$. Сделаем обозначения $\Sigma_1 = \dfrac{4\pi e_1^2}{\varepsilon_{\perp}}$ и $e = \dfrac{e_1 + e_3}{e_1}$. Тогда получим

$$2\left(F_{el} + F_{flex}\right) = \Sigma_1\left(1+\xi\cos^2\theta\right)^{-1}\left[\frac{\cos^2\theta}{r} - e\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial r}\right]^2. \tag{36}$$

Теперь, делая те же самые обозначения и преобразования, что были сделаны выше, для объемной энергии получим

$$\frac{\mathrm{F}_{sb}}{\pi K_1 L} = 8\int_0^1 \frac{1}{\left(1+y\right)^4}\left[1 + \frac{K_3}{K_1}y + \frac{\Sigma_1}{K_1}y\left[\left(1+y\right)^2 + 4\xi y\right]^{-1}\left(1+y+e-ey\right)^2\right]dy\,\cdot$$

Если диэлектрическая анизотропия не очень велика, то получим $\left[(1+y)^2 + 4\xi y\right]^{-1} \approx (1+y)^{-4}\left[(1+y)^2 - 4\xi y\right]$. Тогда интеграл легко берется:

$$\mathrm{F}_{sb} = \frac{\pi L}{3}\left[7K_1 + 2\left(K_3 + \Sigma\right) + \Sigma_1 \mathrm{e}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{5}e\right) - 8\xi\Sigma\left(\frac{1}{15} + \frac{e}{24} + \frac{e^2}{105}\right)\right]. \tag{37}$$

Отсюда хорошо видно, что анизотропия флексоэлектричества еще более стабилизирует, а диэлектрическая анизотропия немного дестабилизирует распределение чисто поперечного изгиба.

4.2. Изначально азимутальная ориентация

Теперь рассмотрим стабильность деформации директора чисто продольного изгиба. В этом случае имеем $n_r = 0,\ n_\varphi = 1,\ \ n_z = 0$. Поэтому $S = 0,$ $T = B_2 = B_3 = 0,\ \ B_1 = \frac{1}{r},\ F_d = \frac{1}{2} K_3 \frac{1}{r^2}$ и свободная энергия всего объема, в отсутствие флексоэлектричества, будет

$$\mathrm{F}_b = \pi K_3 L \ln \frac{R}{r_0}. \tag{38}$$

В присутствии возмущения вне плоскости изначального распределения поле директора запишем в виде

$$n_r = 0\,, n_\varphi = \cos\theta\left(r\right), n_z = \sin\theta\left(r\right). \tag{39}$$

Тогда имеем

$$S = 0\,,\ T = \frac{\sin\theta\cos\theta}{r} - \frac{\partial\theta}{\partial r}\,, \quad B_1 = -\frac{\cos^2\theta}{r}\,,\ B_2 = 0\,,\ B_3 = 0\,.$$

В этом случае мы получаем то же уравнение (24) с $P_r = e_3 B_r$. Если пренебречь диэлектрической анизотропией ($\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{\perp} = \varepsilon$), то получим

$$P_r = -e_3 \frac{\cos^2\theta}{r}, \quad 2\left(F_{el} + F_{flex}\right) = \Sigma_3 \frac{\cos^4\theta}{r^2},$$

где $\Sigma_3 = \frac{4\pi e_3^2}{\varepsilon}$. В этом случае упругая часть свободной энергии имеет вид

$$2F_d = K_2 \left(\frac{\sin 2\theta}{2r} - \frac{\partial\theta}{\partial r} \right)^2 + K_3 \frac{\cos^4\theta}{r^2}.$$

Минимизируем свободную энергию всего объема:

$$\frac{\mathrm{F}_{bt}}{\pi} = \iint \left[K_2 \left(\frac{\sin 2\theta}{2r} - \frac{\partial\theta}{\partial r} \right)^2 + K_3 \frac{\cos^4\theta}{r^2} + \Sigma_3 \frac{\cos^4\theta}{r^2} \right] r dr dz\,.$$

В присутствии флексоэлектрического эффекта свободная энергия F_b состояния чисто продольного изгиба, вместо (38), имеет вид

$$\mathrm{F}_b = \pi\left(K_3 + \Sigma_3\right) L \ln \frac{R}{r_0}. \tag{40}$$

Распределение директора вновь берем в виде (29). Для свободной энергии возмущенного состояния получим

$$\frac{\mathrm{F}_{bt}}{\pi K_2 L} = \int_0^1 \left[\frac{\cos^2\theta}{\rho} \left(1 + \sin\theta\right)^2 + \frac{K_3^{'}}{K_2} \frac{\cos^4\theta}{\rho} \right] d\rho\,, \tag{41}$$

где имеем те же обозначения: $K_3^{'} = K_3 + \Sigma_3,\ \rho = r/R,\ y = \rho^2$. Получаем такой же интеграл (32) и, окончательно, для энергии имеем

$$\frac{\mathrm{F}_{bt}}{\pi K_2 L} = 8\int_0^1 \frac{1+\frac{K_3^{'}}{K_2}y}{\left(1+y\right)^4}dy = \frac{1}{3}\left(2\frac{K_3^{'}}{K_2}+7\right). \tag{42}$$

Чисто продольное распределение или азимутальная линейная дисклинация будет устойчивой, если

$$\ln\frac{R}{r_0} < \frac{1}{3}\left(2+7\frac{K_2}{K_3^{'}}\right). \tag{43}$$

В этом случае мы имеем обратную ситуацию. Для стабильности чисто продольного изгиба необходимо, чтобы отношение K_3/K_2 было как можно меньше. Для не особо специальных условий, у обычных НЖК, для стабильности необходимо условие $R \le 12.6 r_0 \approx 25\text{Å}$. Таким образом, для всех физически реальных размеров R линия неустойчива. А наличие флексоэлектричества делает условие стабильности более трудно выполнимым.

Если учесть диэлектрическую анизотропию ($\varepsilon_{\parallel} \ne \varepsilon_{\perp}$), то получим

$$P_r = e_3 B_r = -e_3\frac{\cos^2\theta}{r}, \quad 2\left(F_{el}+F_{flex}\right) = \frac{4\pi}{\varepsilon_{rr}}P_r^2.$$

Имеем также $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a n_r^2$ и $\varepsilon_{rr}^{-1} = \varepsilon_{\perp}^{-1}\left(1+\xi n_r^2\right)^{-1} \approx \varepsilon_{\perp}^{-1}\left(1-\xi n_r^2\right)$, где $\xi = \varepsilon_a/\varepsilon_{\perp}$. Обозначив $\Sigma_3^{'} = \dfrac{4\pi e_3^2}{\varepsilon_{\perp}}$, получим

$$2\left(F_{el}+F_{flex}\right) = \Sigma_3^{'}\left(1-\xi\cos^2\theta\right)\frac{\cos^4\theta}{r^2}.$$

Необходимо минимизировать объемную свободную энергию

$$\frac{\mathrm{F}_{bt}}{\pi} = \iint\left[K_2\left(\frac{\sin 2\theta}{2r}-\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)^2 + K_3\frac{\cos^4\theta}{r^2} + \Sigma_3^{'}\left(1-\xi\cos^2\theta\right)\frac{\cos^4\theta}{r^2}\right] r\,dr\,dz\,. \tag{44}$$

В присутствии флексоэлектрического эффекта свободная энергия F_b состояния чисто продольного изгиба, вместо (38), (38)имеет вид

$$\mathrm{F}_b = \pi\left[K_3 + \Sigma_3^{'}\left(1-\xi\right)\right]L\ln\frac{R}{r_0}. \tag{45}$$

Свободную энергию в возмущенном состоянии перепишем в виде

$$\frac{\mathrm{F}_{bt}}{\pi K_2 L} = \int_0^1\left[\frac{\cos^2\theta}{\rho}\left(1+\sin\theta\right)^2 + \frac{K_3^{'}}{K_2}\frac{\cos^4\theta}{\rho} - \frac{\Sigma_3^{'}\xi}{K_2}\frac{\cos^6\theta}{\rho}\right]d\rho\,. \tag{46}$$

В тех же обозначениях получим

$$\mathrm{F}_{bt} = 8\pi K_2 L\int_0^1\frac{1+\frac{K_3^{'}}{K_2}y - \frac{\Sigma_3^{'}\xi}{K_2}\frac{4y^2}{\left(1+y\right)^2}}{\left(1+y\right)^4}dy = \frac{\pi L}{3}\left(7K_2 + 2K_3^{'} - \frac{8}{5}\Sigma_3^{'}\xi\right). \tag{47}$$

Чисто продольное распределение или линейная дисклинация будет устойчивой, если

$$\ln\frac{R}{r_0}<\frac{1}{3}\frac{7K_2+2K_3+2\Sigma_3^{'}\left(1-\xi\right)+\frac{2}{5}\Sigma_3^{'}\xi}{K_3+\Sigma_3^{'}\left(1-\xi\right)}\,. \tag{48}$$

Как видно, с учетом анизотропии диэлектрической проницаемости ситуация не становится лучше.

5. Заключение

Из сделанных расчетов следует, что, используя тонкие капилляры, можно стабилизировать линию с радиальным распределением директора в присутствии флексоэлектричества даже вдали от фазового перехода в смектическую фазу. Но, в отсутствие флексоэлектричества и вдали от указанного фазового перехода, мы видим, что на практике линия должна вытекать в третье измерение. Что касается капилляров с азимутальным распределением директора, то для всех физически реальных размеров R линия неустойчива и вытекает в третье измерение. С другой стороны, линии с полуцелой силой ($s=\pm 1/2$) устойчивы просто потому, что они не могут вытекать в гладкую структуру, сохраняя то же самое значение s.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13-1C061.

ЛИТЕРАТУРА

1. **F.C.Frank.** Disc. Far. Soc., **25**, 19 (1958).
2. **Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.** Теоретическая физика, т. 7. Теория упругости. М., Наука, 1987.
3. **O.Lehmann.** Ann. Physik, **2**, 649 (1900).
4. **G.Friedel.** Ann. Physique, **18**, 273 (1922).
5. **C.W.Oseen.** Trans. Faraday Soc., **29**, 883 (1933).
6. **J.Nehring, A.Saupe.** Journ. Chem. Soc., Faraday Trans., **2**, 68, (1972).
7. **P.E.Cladis, M.Kleman.** J. de Physique, **33**, 591 (1972).
8. **R. B. Meyer.** Phys. Rev. Lett., **22**, 918 (1969).
9. **S.Chandrasekhar.** Liquid Crystals. Cambridge University Press, 1977.
10. **P.Oswald, P.Pieranski.** Nematic and Cholesteric Liquid Crystals. Taylor & Francis Group, London, 2005.
11. **D.Demus, J.W. Goodby, G.W.Gray, H.W.Spiess.** Handbook of Liquid Crystals. New York, Wiley-VCH, 1998.
12. **P.G. de Gennes, J.Prost.** The Physics of Liquid Crystals. Oxford, Clarendon Press, 1993.
13. **H.J.Deuling.** Solid State Commun., **14,** 1073 (1974).
14. **С.М.Аракелян, Ю.С.Чилингарян.** Нелинейная оптика жидких кристаллов. М., Наука, 1984.

ԴԻՍԿԼԻՆԱՑԻԱՆԵՐ ՆԵՄԱՏԻԿՆԵՐՈՒՄ ՖԼԵՔՍԱԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Մ.Ռ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Ռ.Ս. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Յու.Ս. ՉԻԼԻՆԳԱՐՅԱՆ

Դիտարկված են խնդիրներ նեմատիկ հեղուկ բյուրեղներում (ՆՀԲ), ֆլեքսաէլեկտրականության առկայությամբ, սեպաձև (մաքուր լայնական ու երկայնական ճկումներով) դիսկլինացիաների կայունության վերաբերյալ: Ստացված են ՆՀԲ-ի ուղղորդի շարժման հավասարումները գլանային կոորդինատներում ֆլեքսաէլեկտրականության առկայությամբ: Այդ հավասարումների օգնությամբ կարելի է լուծել բազմաթիվ հետաքրքիր խնդիրներ ՆՀԲ-ի կողմնորոշումային կառուցվածքի վրա ֆլեքսաէլեկտրականության ազդեցության վերաբերյալ: Այստեղ, մասնավորապես, ցույց է տրված, որ կարելի է կայունացնել ուղղորդի ռադիալ բախշվածությամբ դիսկլինացիայի գիծը ֆլեքսաէլեկտրականության առկայության դեպքում նույնիսկ դեպի սմեկտիկ փուլային անցման կետից շատ հեռու: Ինչ վերաբերվում է ուղղորդի ազիմուտալ բախշվածությամբ դիսկլինացիային, ապա ֆիզիկապես իրական բոլոր չափերի դեպքում այդ գիծն անկայուն է և հոսում է դեպի երրորդ չափողականություն:

DISCLINATIONS IN NEMATICS IN THE PRESENCE OF FLEXOELECTRICITY

M.R. HAKOBYAN, R.S. HAKOBYAN, Yu.S. CHILINGARYAN

The stability problems of wedge disclinations (with pure splay and bend distortions) in nematic liquid crystals (NLC) are considered in the presence of flexoelectricity. We write NLC director equations in the cylindrical coordinate system, taking into account flexoelectricity. These equations allow us to solve many interesting problems on the influence of flexoelectricity on the orientational structures of NLC. In particular, it is shown that the line of disclination with radial distribution of director can be stabilized in the presence of flexoelectricity even far from nematic-smectic–phase transition point. For the disclination with azimuthal distribution of director for all physical sizes the line is not stable and escapes in the third dimension.

Известия НАН Армении, Физика, т.48, №6, с.407-419 (2013)

УДК 548.0

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В АНИЗОТРОПНЫХ МЕТАМАТЕРИАЛАХ. I. ДИСПЕРСИОННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

А.А. ГЕВОРГЯН*, М.С. РАФАЕЛЯН

Ереванский государственный университет, Армения
*e-mail: agevorgyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 24 июня 2013 г.)

Рассмотрены особенности решения дисперсионного уравнения волны в безграничной индефинитной среде при прозвольно ориентированной по отношению к направления оптической оси системе координат. Описаны все возможные дисперсионные поверхности, возникающие в этой среде, и получены условия их возникновения. Показано, что могут возникать только определенные пары дисперсионных поверхностей. Получено дисперсионное уравнение для граничной задачи и исследованы зависимости дисперсионных кривых от ориентации оптической оси. Показано существование невзаимности преломления в данных средах.

1. Введение

Метаматериал – это система искусственных структурных элементов, сконструированных для достижения полезных и/или необычных электромагнитных свойств. Они демонстрируют такие линейные и нелинейные оптические свойства, как отрицательное преломление, обратный эффект Доплера, распространение энергии электромагнитной волны в сторону, обратную волновому вектору, и т.п. [1-5]. Можно отметить также оптическое таммовское состояние таких сред, гигантский рост плотности оптических состояний молекул или квантовой точки, размещенной в такой среде, значительное сокращение времени флуоресценции молекул на поверхности такой среды, гигантский рост инфракрасного излучения нагретого тела в присутствии слоя такой среды, и т.д. Они находят такие замечательные применения, как совершенные линзы [6], невидимая маскировка [7,8], совершенные поглотители [9], и т.д. Хотя отрицательное преломление наиболее легко обнаруживается в изотропных метаматериалах, оно может наблюдаться также в анизотропных метаматериалах. В последнем случае нет необходимости требовать, чтобы все элементы тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей принимали отрицательные значения [10]. Более того, все их элементы могут быть также положительно определенными [11]. В последнее время исследование таких анизотропных метаматериалов вызывает большой интерес [12-23]. В литературе, однако, в основном рассматриваются случаи, когда главные направления диэлектрической и магнитной проницаемостей либо параллельны, либо перпендикулярны границе раздела сред. В работе [16] исследованы особенности сверхсветового распространения света в анизотропном метаматериале – при произвольной ориентации оптической оси в плоскости падения света. В работе [18] исследовано всенаправленное (omnidirectional) полное прохождение и возможность существования отрицательного угла Брюстера на границе *изотропная среда–анизотропная среда,* с произвольной ориентацией оптической оси в случае $\hat{\mu} = \hat{I}$ ($\hat{\mu}$ – тензор магнитной проницаемости, $\hat{I}$ – единичная матрица). В работе [21] исследованы возможность полного отражения на границе изотропная среда–анизотропный метаматериал и получены условия полного отражения. В работе [22] исследованы возможности отрицательного полного отражения на границе изотропная среда–анизотропная среда с произвольной ориентацией оптической оси, снова при $\hat{\mu} = \hat{I}$. В работе [15] классифицированы дисперсионные уравнения для анизотропных метаматериалов.

В данной работе исследованы особенности решения дисперсионного уравнения волны в безграничной индефинитной среде в прозвольно ориентированной по отношению к направлению оптической оси системе координат.

2. Безграничная среда. Дисперсионные поверхности

В этом разделе мы выведем уравнение Френеля для рассматриваемой среды, рассмотрим, какие поверхности волновых нормалей могут возникать и, наконец, какие пары поверхностей возникают. Эти вопросы особенно важны в оптике, в частности, в кристаллооптике. Будем предполагать, что длина волны электромагнитной волны намного больше характерной длины структурных элементов метаматериала, так что среда может быть рассмотрена как сплошная и характеризована матрицами диэлектрической и магнитной проницаемостей. Далее, будем также предполагать, что тензоры диэлектрической $\hat{\varepsilon}_0$ и магнитной $\hat{\mu}_0$ проницаемостей среды могут быть диагонализированы в одной и той же координатной системе и что эти тензоры в соответствующей системе координат имеют вид

$$\hat{\varepsilon}_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \ \hat{\mu}_0 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Главные значения диэлектрической и магнитной проницаемостей являются комплексными числами: $\varepsilon_i = \varepsilon_i^{'} + i\varepsilon_i^{''}$ и $\mu_i = \mu_i^{'} + i\mu_i^{''}$, i = 1,2,3 (комплексная форма выбрана в виде exp($-i\omega t$), поэтому среды с положительными мнимыми частями волнового вектора соответствуют поглощающим средам, а с отрицательными – усиливающим средам). Реальные части диэлектрической и магнитной проницаемостей могут быть как положительными, так и отрицательными. Ниже будем предполагать, что среда одноосная, т.е. $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \neq \varepsilon_1$ и $\mu_2 = \mu_3 \neq \mu_1$ и оптическая ось находится в плоскости *xz* и с осью *x* составляет угол ϕ, так что

$$\hat{\varepsilon} = \hat{T}\left[y,\phi\right]\hat{\varepsilon}_0\hat{T}\left[y,\phi\right]^{-1}, \qquad (2)$$

$$\hat{\mu} = \hat{\mathrm{T}}\left[y,\phi\right]\hat{\mu}_0\hat{\mathrm{T}}\left[y,\phi\right]^{-1}, \qquad (3)$$

где $\hat{T}\left[y,\phi\right]$ – матрица вращения на угол ϕ вокруг оси y. $\hat{T}\left[y,\phi\right]$ имеет вид:

$$\hat{T}\left[y,\phi\right] = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Из уравнения Максвелла для поля плоской монохроматической волны получаем следующее дисперсионное уравнение для волнового вектора:

$$\begin{gathered}\left(n^2(1-\delta_\varepsilon) + \mu_m\,\varepsilon_m\left(\delta_\varepsilon^2 - 1\right)\left(1-\delta_\mu\right) + \delta_\varepsilon\xi\right)\left(n^2(1-\delta_\mu) + \right. \\ \left. + \mu_m\,\varepsilon_m\left(\delta_\mu^2 - 1\right)\left(1-\delta_\varepsilon\right) + \delta_\mu\xi\right) = 0,\end{gathered} \qquad (5)$$

где $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$, $\xi = 2\left(n_x\cos\phi + n_z\sin\phi\right)^2$, $\varepsilon_{\mathrm{m}} = \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)/2$, $\mu_m = \left(\mu_1 + \mu_2\right)/2$, $\varepsilon_{\mathrm{m}} = \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)/2$, $\delta_\mu = \left(\mu_1 - \mu_2\right)/\left(\mu_1 + \mu_2\right)$, $n_x = \dfrac{\lambda}{2\pi}k_x$, $n_y = \dfrac{\lambda}{2\pi}k_y$, $n_z = \dfrac{\lambda}{2\pi}k_z$, а k_x, k_y, k_z – компоненты волнового вектора, λ – длина волны света в вакууме. Дисперсионное уравнение (5) эквивалентно двум уравнениям:

$$n^2(1-\delta_\varepsilon) + \mu_m\,\varepsilon_m\left(\delta_\varepsilon^2 - 1\right)\left(1-\delta_\mu\right) + \delta_\varepsilon\xi = 0, \qquad (5a)$$

$$n^2(1-\delta_\mu) + \mu_m\,\varepsilon_m\left(\delta_\mu^2 - 1\right)\left(1-\delta_\varepsilon\right) + \delta_\mu\xi = 0. \qquad (5b)$$

Здесь (5a) является дисперсионным уравнением для электрической моды, а (5a) – для магнитной моды.

Приведем дисперсионное уравнение (5a) к каноническому виду. Для этого представим n_x, n_y и n_z в виде

$$n_x = a n_1 + n_2 + n_3,\; n_y = n_1 + b n_2,\; n_z = n_1 + n_2 + c n_3, \qquad (6)$$

где

$$a = 1,\; b = 2\frac{1+\delta_\varepsilon\sin 2\phi}{\delta_\varepsilon - 1},\; c = \frac{1+\delta_\varepsilon\cos 2\phi + \delta_\varepsilon\sin 2\phi}{-1+\delta_\varepsilon\cos 2\phi - \delta_\varepsilon\sin 2\phi}.$$

Тогда (5a) принимает вид

$$\frac{n_1^2}{\lambda_1} + \frac{n_2^2}{\lambda_2} + \frac{n_3^2}{\lambda_3} = 1, \qquad (7)$$

где

$$\begin{gathered}\lambda_1 = \varepsilon_m\mu_m\left(3-\delta_\varepsilon + 2\delta_\varepsilon\sin 2\phi\right)\left(\delta_\varepsilon^2 - 1\right)\left(1-\delta_\mu\right), \\ \lambda_2 = 2\varepsilon_m\mu_m\left(1+\delta_\varepsilon\sin 2\phi\right)\left(1-\delta_\mu\right), \\ \lambda_3 = 2\varepsilon_m\mu_m\left(1+\delta_\varepsilon\sin 2\phi\right)\left(3-\delta_\varepsilon + 2\delta_\varepsilon\sin 2\phi\right)\left(1+\delta_\varepsilon\right)\left(1-\delta_\mu\right).\end{gathered} \qquad (8)$$

Такие же преобразования можно выполнить и для дисперсионного уравнения магнитной моды (5b).

Дисперсионные поверхности характеризуют зависимость преломления электромагнитной волны в среде от направления распространения волны. Плоские электромагнитные волны, распространяющиеся внутри среды, в зависимости от значений параметров λ_1, λ_2, λ_3 могут привести к дисперсионным поверхностям в виде эллипсоидов вращения, однополостных гиперболоидов, двухполостных гиперболоидов и т.д. Далее, в зависимости от ориентации оптической оси, пересечения этих поверхностей с фиксированными плоскостями (в частности, с плоскостью падения) могут дать круги, эллипсы, гиперболы или прямые линии. Ниже рассмотрим конкретные случаи.

I. Если в соотношении (7) λ_1, λ_2, λ_3 имеют положительные знаки, т.е.

$$\begin{cases} f = \varepsilon_m \mu_m \left(\delta_\varepsilon - 1\right)\left(\delta_\mu - 1\right) > 0, \\ g = \left(\delta_\mu + 1\right)\left(3 - \delta_\mu + 2\delta_\mu \sin 2\phi\right) > 0, \\ h = \left(\delta_\mu - 1\right)\left(1 + \delta_\mu \sin 2\phi\right) < 0, \end{cases}$$

то дисперсионная поверхность электрической моды представляет собой эллипсоид вращения с полуосями, направленными вдоль направлений $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$ и $\mathbf{n_3}$:

$$\mathbf{n_1} = \left(\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x} + \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{z}\right)\left(1 + \delta_\varepsilon \sin 2\phi\right) + \left(\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x} - \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{z}\right)\delta_\varepsilon \cos 2\phi + \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{y}\left(1 - \delta_\varepsilon\right),$$

$$\mathbf{n_2} = \left(\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x} + \mathbf{n}_\mathbf{z} - 2\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{y}\right)\left(1 + \delta_\varepsilon \sin 2\phi\right) + \left(\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x} - \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{z}\right)\delta_\varepsilon \cos 2\phi, \ \mathbf{n_3} = \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x} - \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{z},$$

где $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x}$, $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{y}$ и $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{z}$ – орты осей *x*, *y* и *z*.

I. Если $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_3 < 0$ (т.е. при $f < 0$, $g > 0$ и $h < 0$), то мода, представленная уравнением (5а), является эванесцентной.

II. Если один из параметров λ_1, λ_2, λ_3 отрицателен, а остальные положительны (т.е. при $f < 0$ и $g < 0$ или при $f < 0$ и $h > 0$), то дисперсионная поверхность является однополостным гиперболоидом с полуосями вдоль направлений $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$ и $\mathbf{n_3}$.

III. Если один из параметров λ_1, λ_2, λ_3 положителен, а остальные отрицательны (т.е. при $f > 0$ и $g < 0$, или при $f > 0$ и $h > 0$), то дисперсионная поверхность является двухполостным гиперболоидом, с полуосями вдоль направлений $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$ и $\mathbf{n_3}$.

IV. Если $\delta_\varepsilon = 1$, то дисперсионная поверхность есть плоскость, поскольку в этом случае из (5а) получаем $n_x \cos\phi + n_z \sin\phi = 0$.

Отметим также, что при $\delta_\varepsilon = -1$ дисперсионное уравнение принимает вид $n_y^2 + \left(n_z \cos\phi - n_x \sin\phi\right)^2 = 0$. Это означает, что при $n_y = 0$ дисперсионная поверхность есть прямая $n_z = n_x \operatorname{tg}\phi$. В противном случае мода эванесцентна. Подчеркнем, что плоскость возникает только при $\delta_\varepsilon = 1$, а прямая только при $\delta_\varepsilon = -1$.

На рис.1 представлены возможные пары дисперсионных поверхностей (одна для электрической моды, другая для магнитной) при различных параметрах задачи. Они определяются из дисперсионного уравнения (5). Отметим, что в общем случае невозможно получить следующие пары: эллипсоид вращения с однополостным гиперболоидом, однополостный гиперболоид с двухполостным гиперболоидом, одна эванесцентная мода с двухполостным гиперболоидом. Это

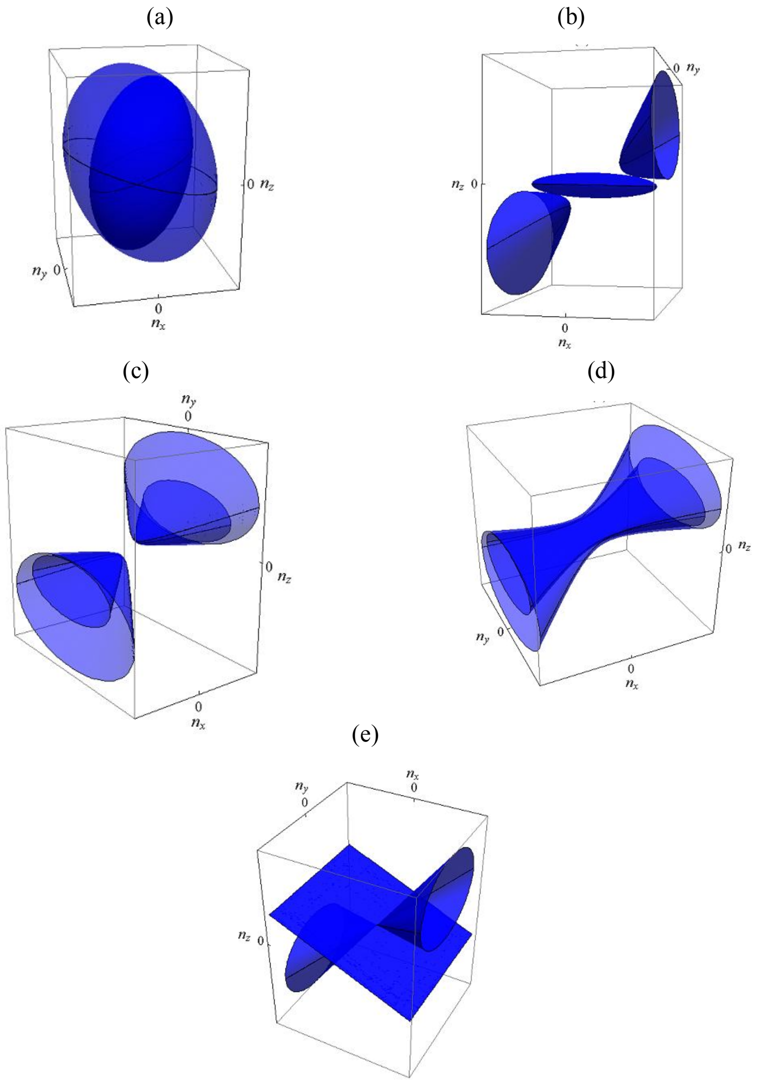


Рис.1. Пары дисперсионных поверхностей при различных параметрах среды: a) $\varepsilon_1 = 2.5$, $\varepsilon_2 = 1.5$, $\phi = \pi/3$, $\mu_1 = 1.7$, $\mu_2 = 2.9$; b) $\varepsilon_1 = 3.1$, $\varepsilon_2 = 2.5$, $\phi = \pi/4$, $\mu_1 = -1.3$, $\mu_2 = 2.2$; c) $\varepsilon_1 = 1.2$, $\varepsilon_2 = -1.5$, $\phi = \pi/5$, $\mu_1 = 1.3$, $\mu_2 = -1.1$; d) $\varepsilon_1 = -2.2$, $\varepsilon_2 = 3$, $\phi = \pi/4$, $\mu_1 = 1.3$, $\mu_2 = -2.2$; e) $\varepsilon_1 = 2.5$, $\varepsilon_2 = 0$, $\phi = \pi/4$, $\mu_1 = -0.9$, $\mu_2 = 3.7$.

естественно, так как можно аналитически доказать, что $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6 > 0$, т.е что существует только четное число отрицательных λ_i. Здесь λ_4, λ_5, λ_6 – соответствующие коэффициенты дисперсионного уравнения для магнитной моды, приведенной к каноническому виду. Они получаются из λ_1, λ_2, λ_3 заменой $\delta_\varepsilon \to \delta_\mu$ и $\mu_m \to \varepsilon_m$ в (8). Заметим также, что если дисперсионная поверхность одной из мод есть плоскость, то другая – либо коническая поверхность, представленная на рис.1e (превращающаяся в частных случаях либо в плоскость, либо в прямую), либо эванесцентна. Действительно, при $\delta_\varepsilon = 1$ (частный случай) дисперсионное уравнение для магнитной моды имеет вид $pn_x^2 + qn_y^2 + rn_z^2 + sn_x n_z = 0$, где *p, q, r, s* – некоторые параметры, характеризующие среду. Это означает, что либо соответствующая дисперсионная поверхность коническая, либо мода эванесцентная.

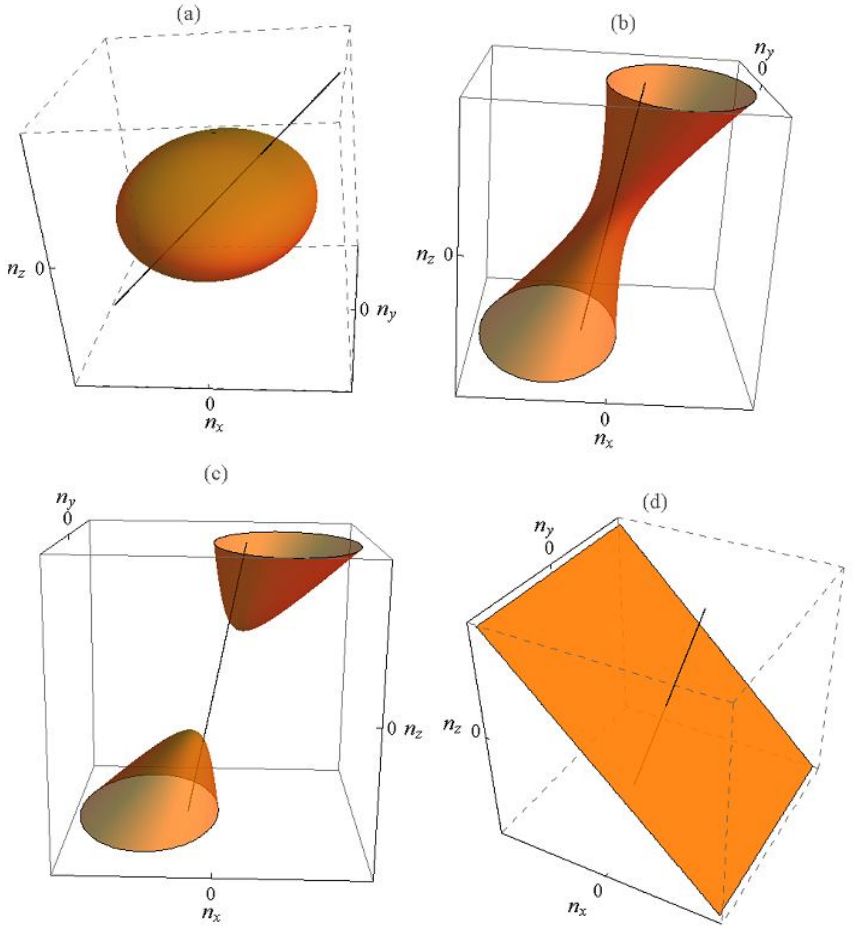


Рис.2. Дисперсионные поверхности в случае, когда одна из них прямая: a) $\varepsilon_1 = 0,\ \ \varepsilon_2 = 0.7,\ \ \phi = \pi/3,\ \ \mu_1 = 1.2,\ \ \mu_2 = 1.1$; b) $\varepsilon_1 = 0,\ \ \varepsilon_2 = 0.7,\ \ \phi = \pi/3,\ \ \mu_1 = 1.2,\ \ \mu_2 = -1.5$; c) $\varepsilon_1 = 0,\ \ \varepsilon_2 = 0.7,\ \ \phi = \pi/3,\ \ \mu_1 = -1.2,\ \ \mu_2 = 1.5$; d) $\varepsilon_1 = 0,\ \ \varepsilon_2 = 0.7,\ \ \phi = \pi/3,\ \ \mu_1 = 1.5,\ \ \mu_2 = 0$.

Если же дисперсионная поверхность одной из мод прямая, то другая может быть эллипсоидом вращения, однополостным или двухполостным гиперболоидом, плоскостью (рис.2). Наконец, если обе поверхности являются прямыми, то они обязательно совпадают.

3. Отражение от полупространства

Рассмотрим отражение и преломление света на границе изотропная непоглощающая среда–анизотропный метаматериал. Геометрия задачи представлена на рис.3. Среда занимает полупространство $z \geq 0$, т.е. граница раздела сред совпадает с плоскостью xy, а плоскость падения совпадает с плоскостью xz (xyz – лабораторная система). Электромагнитная волна частоты ω падает из среды 1 на рассматриваемое полупространство (среда 2) под углом α. Среда 1 однородна и изотропна, с параметрамы ε_l и μ_l (диэлектрическая и магнитная проницаемости среды).

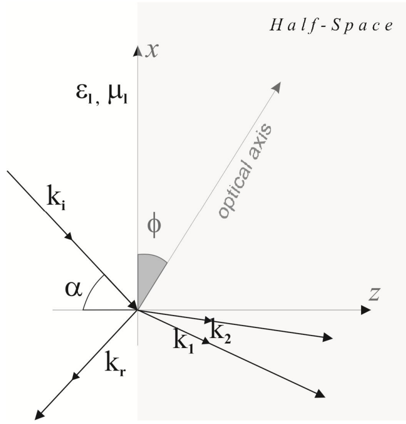


Рис.3. Геометрия задачи.

Согласно методу 4х4 матриц Берремана, систему уравнений Максвелла можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{\psi} = -ik_0\hat{\Delta}\boldsymbol{\psi}\,, \tag{9}$$

где вектор-столбец $\boldsymbol{\psi}$ и 4х4 матрица Берремана $\hat{\Delta}$ имеют вид:

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} E_x & H_y & E_y & -H_x \end{bmatrix}^T, \tag{10}$$

$$\hat{\Delta} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}}n_x & \hat{\mu}_{22} - \dfrac{\mu_{23}^2}{\mu_{33}} - \dfrac{n_x^2}{\varepsilon_{33}} & \left(\dfrac{\mu_{23}}{\mu_{33}} - \dfrac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}}\right)n_x & \mu_{21} - \dfrac{\mu_{23}\mu_{31}}{\mu_{33}} \\ \dfrac{\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{13}^2}{\varepsilon_{33}} & -\dfrac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}}n_x & \dfrac{\varepsilon_{12}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{13}\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}} & 0 \\ 0 & \mu_{12} - \dfrac{\mu_{13}\mu_{32}}{\mu_{33}} & \dfrac{\mu_{13}}{\mu_{33}}n_x & \mu_{11} - \dfrac{\mu_{13}^2}{\mu_{33}} \\ \varepsilon_{21} - \dfrac{\varepsilon_{23}\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}} & \left(\dfrac{\mu_{32}}{\mu_{33}} - \dfrac{\varepsilon_{23}}{\varepsilon_{33}}\right)n_x & \varepsilon_{22} - \dfrac{\varepsilon_{23}^2}{\varepsilon_{33}} - \dfrac{n_x^2}{\mu_{33}} & \dfrac{\mu_{31}}{\mu_{33}}n_x \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $n_x = \sqrt{\varepsilon_l\mu_l}\sin\alpha$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_m\left(1+\delta_\varepsilon\cos 2\phi\right)$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_m\left(1-\delta_\varepsilon\right)$,

$$\varepsilon_{13}=\varepsilon_{31}=\varepsilon_m\delta_\varepsilon\sin 2\phi,\ \varepsilon_{33}=\varepsilon_m\left(1-\delta_\varepsilon\cos 2\phi\right),\ \varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=0,\ \varepsilon_{23}=\varepsilon_{32}=0,$$
$$\mu_{22}=\mu_m\left(1-\delta_\mu\right),\ \mu_{33}=\mu_m\left(1-\delta_\mu\cos 2\phi\right),\ \mu_{11}=\mu_m\left(1+\delta_\mu\cos 2\phi\right),$$
$$\mu_{12}=\mu_{21}=0,\ \mu_{13}=\mu_{31}=\mu_m\delta_\mu\sin 2\phi,\ \mu_{23}=\mu_{32}=0.$$

Так как для однородной анизотропной среды $\hat{\Delta}$ постоянна и не зависит от z, то зависимость полей от z можно представить в виде

$$\mathbf{\Psi}(z)=\mathbf{\Psi}_j(0)\exp(ik_{jz}z),\qquad j=1,2,3,4. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (9), получим матричное уравнение для собственных значений:

$$\left(k_z\hat{I}-\frac{\omega}{c}\hat{\Delta}\right)\mathbf{\Psi}(0)=0, \tag{13}$$

где $\hat{I}$ – единичная матрица. Собственные значения этого уравнения являются корнями алгебраического уравнения четвертой степени:

$$\begin{gathered}\left(n^2(1-\delta_\varepsilon)+\mu_m\,\varepsilon_m\left(\delta_\varepsilon^2-1\right)\left(1-\delta_\mu\right)+\delta_\varepsilon\xi\right)\left(n^2(1-\delta_\mu)+\right.\\ \left.+\,\mu_m\,\varepsilon_m\left(\delta_\mu^2-1\right)\left(1-\delta_\varepsilon\right)+\delta_\mu\xi\right)=0,\end{gathered} \tag{14}$$

где $n^2=n_x^2+n_z^2$.

Отметим, что дисперсионное уравнение не является биквадратным, каковым оно является для изотропных или анизотропных сред в случаях, когда оптическая ось перпедикулярна (или параллельна) границам раздела сред.

Решения уравнения (14) имеют вид

$$n_{z1,2}=\frac{\pm A-n_x\delta_\varepsilon\sin 2\phi}{1-\delta_\varepsilon\cos 2\phi},\ n_{z3,4}=\frac{\pm B-n_x\delta_\mu\sin 2\phi}{1-\delta_\mu\cos 2\phi}, \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered}A=\sqrt{\left(\delta_\varepsilon^2-1\right)\left(n_x^2+\varepsilon_m\mu_m\left(\delta_\mu-1\right)\left(1-\delta_\varepsilon\cos 2\phi\right)\right)}\\ B=\sqrt{\left(\delta_\mu^2-1\right)\left(n_x^2+\varepsilon_m\mu_m\left(\delta_\varepsilon-1\right)\left(1-\delta_\mu\cos 2\phi\right)\right)}\end{gathered}. \tag{16}$$

Разность в модулях двух идущих вперед и назад волн, определяемых решениями (15) (т.е. разность в модулях между n_{1z} и n_{2z} и аналогично между n_{3z} и n_{4z}), свидетельствует о наличии невзаимодействия волн в рассматриваемой системе:

$$n\left(\mathbf{k},\omega\right)\neq n\left(-\mathbf{k},\omega\right). \tag{17}$$

Теперь перейдем к исследованию особенностей зависимости z-компонент фазовой и групповой скоростей от ориентации оптической оси по отношению к граничной поверхности. На рис.4 представлены зависимости n_{iz} от угла ϕ. Как видно из рисунка, возможны самые различные ситуации, а именно, ситуация, когда n_{iz} для двух мод положительны, а для двух других отрицательны, ситуация, когда n_{iz} для трех мод положительны, а для одного отрицательно, ситуация, когда n_{iz} для всех четырех мод положительны, и наоборот. То есть система обладает фазовой невзаимностью.

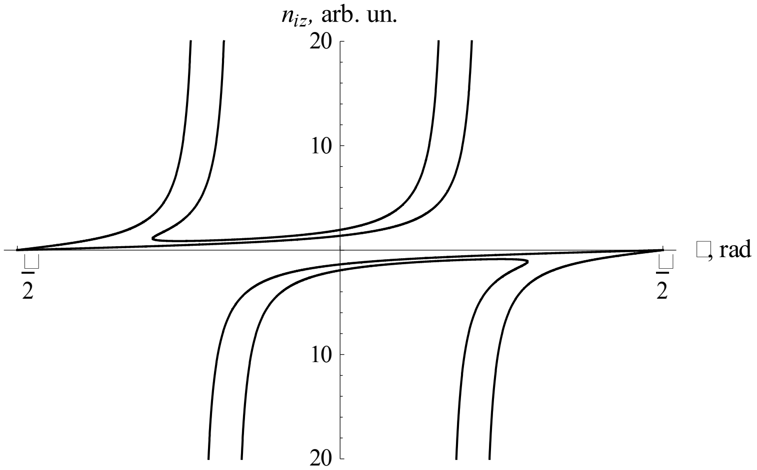


Рис.4. Зависимости фазовой скорости от ориентации оптической оси по отношению к граничной поверхности при $\varepsilon_1 = -1.5$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $\mu_1 = 1.5$, $\mu_2 = -1$, $\alpha = \pi/3$, $\varepsilon_l = 1$, $\mu_l = 1$.

Для x и z-компонент групповых скоростей электрических мод имеем

$$V_{gz1} = -c\frac{A}{\varepsilon_m\mu_m\left(\delta_\mu - 1\right)\left(\delta_\varepsilon^2 - 1\right)},\ V_{gz2} = c\frac{A}{\varepsilon_m\mu_m\left(\delta_\mu - 1\right)\left(\delta_\varepsilon^2 - 1\right)},$$

$$V_{gx1} = c\frac{n_x\left(1-\delta_\varepsilon^2\right) - \delta_\varepsilon A}{\varepsilon_m\mu_m\left(\delta_\mu - 1\right)\left(\delta_\varepsilon^2 - 1\right)\left(1 - \delta_\varepsilon\cos 2\phi\right)},$$

$$V_{gx2} = c\frac{n_x\left(1-\delta_\varepsilon^2\right) + \delta_\varepsilon A}{\varepsilon_m\mu_m\left(\delta_\mu - 1\right)\left(\delta_\varepsilon^2 - 1\right)\left(1 - \delta_\varepsilon\cos 2\phi\right)},$$

а x и z-компоненты групповых скоростей магнитных мод получаются заменой $\delta_\varepsilon \to \delta_\mu$ и $\mu_m \to \varepsilon_m$. На рис.5 представлены зависимости V_{giz} от угла ϕ. Как видно из рисунка, эти кривые симметричны относительно оси ϕ. И невозможна ситуация, когда три V_{giz} имеют один знак, а другие – обратный знак.

В заключение этого раздела отметим, что явный вид матрицы $\hat{\Delta}$ и решения дисперсионного уравнения позволяют построить трансфер-матрицу $\hat{P}(d)$, что, в свою очередь, позволяет исследовать особенности неоднородных анизотропных сред и многослойных структур. Это мы намерены сделать в нашей следующей работе.

Перейдем к подробному анализу дисперсионного уравнения (14). Исследуем зависимость дисперсионных кривых от ориентации оптической оси. Дисперсионное уравнение (14) эквивалентно следующим двум уравнениям:

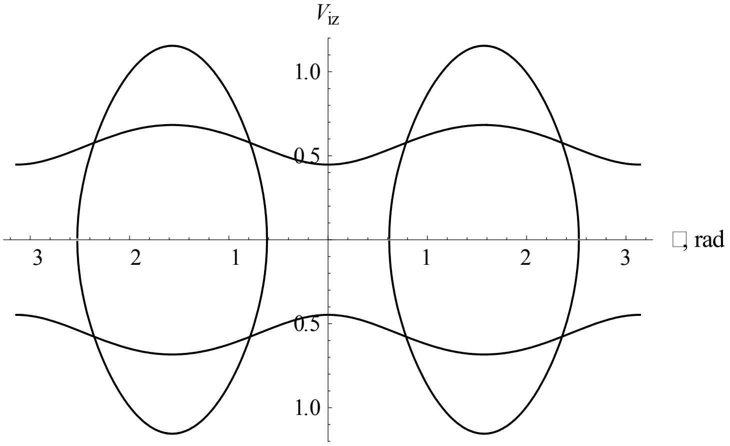


Рис.5. Зависимости групповой скорости от угла ориентации оптической оси по отношению к граничной поверхности при $\varepsilon_1 = 2.5$, $\varepsilon_2 = 1.5$, $\mu_1 = -0.5$, $\mu_2 = 1$, $\alpha = \pi/3$, $\varepsilon_l = 1$, $\mu_l = 1$.

$$n^2(1-\delta_\varepsilon) + \mu_m\,\varepsilon_m\left(\delta_\varepsilon^2 - 1\right)\left(1-\delta_\mu\right) + \delta_\varepsilon\xi = 0\,, \tag{18}$$

$$n^2(1-\delta_\mu) + \mu_m\,\varepsilon_m\left(\delta_\mu^2 - 1\right)\left(1-\delta_\varepsilon\right) + \delta_\mu\xi = 0\,. \tag{19}$$

Произведя соответствующее вращение в плоскости *xz*, получаем нормальную форму уравнения (18):

$$\frac{n_1^2}{\lambda_1} + \frac{n_2^2}{\lambda_2} = 1\,, \tag{20}$$

где

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu_m\,\varepsilon_m\left(1-\delta_\mu\right)\left(1-\delta_\varepsilon^2\right)\left(1+\delta_\varepsilon\cos 2\phi\right),\ n_1 = n_x\left(1+\delta_\varepsilon\cos 2\phi\right) + n_z\delta_\varepsilon\sin 2\phi\,, \\ \lambda_2 = \mu_m\,\varepsilon_m\left(1-\delta_\mu\right)\left(1+\delta_\varepsilon\cos 2\phi\right),\ n_2 = n_z. \end{cases} \tag{21}$$

Дисперсионное уравнение для магнитной моды имеет аналогичный вид, но в этом случае в выражениях для λ_1, λ_2 и n_1, n_2 в (21) следует произвести следующие перестановки: $\delta_\varepsilon \to \delta_\mu$, $\mu_m \to \varepsilon_m$.

Дисперсионные поверхности (20) также можно систематизировать с помощью анализа знаков величин λ_1 и λ_2. В общем случае нужно различать следующие случаи:

I. Если λ_1 и λ_2 положительны, т.е

$$\begin{cases} \mu_m\,\varepsilon_m\left(1-\delta_\mu\right)\left(1+\delta_\varepsilon\cos 2\phi\right) > 0, \\ 1-\delta_\varepsilon^2 > 0, \end{cases} \tag{22}$$

то сечение дисперсионных поверхностей и плоскости падения дают эллипсы с полуосями вдоль направлений $\mathbf{n_1} = \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x}\left(1+\delta_\varepsilon\cos 2\phi\right) + \hat{n}_z\delta_\varepsilon\sin 2\phi$ и $\mathbf{n_2} = \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{z}$.

II. Если λ_1 и λ_2 отрицательны, т.е

$$\begin{cases} \mu_m\,\varepsilon_m\left(1-\delta_\mu\right)\left(1+\delta_\varepsilon\cos 2\phi\right)<0, \\ 1-\delta_\varepsilon^2<0, \end{cases} \tag{23}$$

то моды, представленные уравнением (18), являются эванесцентными. В этом случае анизотропный слой конечной толщины может стать идеальным зеркалом, и свет, падающий на такой слой, полностью отразится при произвольных углах падения и поляризации. Следовательно, такой слой является всенаправленным (omnidirectional) отражателем.

III. Если λ_1 и λ_2 противоположны, т.е $\delta_\varepsilon^2>1$, то дисперсионные кривые – гиперболоиды с полуосями вдоль направлений $\mathbf{n_1}$ и $\mathbf{n_2}$.

IV. Если $\delta_\varepsilon=\pm1$, то дисперсионные кривые являются прямыми (заметим, что прямые возникают только в этом случае).

Перейдем, наконец, к исследованию зависимости дисперсионных кривых от параметра ϕ, характеризующего ориентацию оптической оси. На рис.6а представлена зависимость дисперсионных кривых от угла ϕ при тех параметрах задачи, при которых дисперсионная кривая есть эллипс. Если угол вращения оптической оси ϕ равен $\pi k/2$ (k – целое число), то полуоси эллипса направлены вдоль $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x}$ и $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{z}$, что видно также на рис.6а. При других значениях этого угла полуоси эллипсов смещены от направлений $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x}$ и $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{z}$, что также видно на рис.6а.

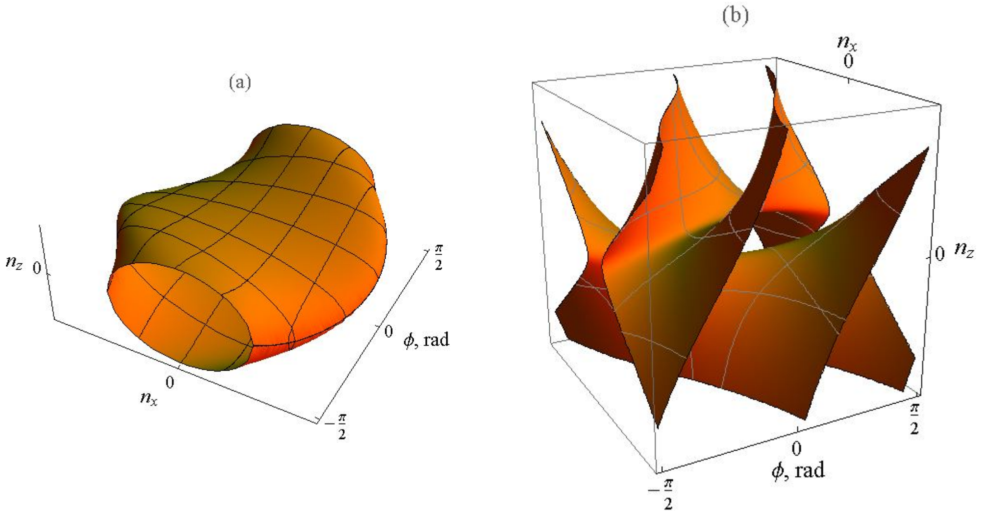


Рис.6. Зависимости дисперсионных кривых от угла ориентации оптической оси при различных параметрах среды: а) $\varepsilon_1=1.2$, $\varepsilon_2=3.8$, $\mu_1=1.5$, $\mu_2=1.1$; b) $\varepsilon_1=1.2$, $\varepsilon_2=-0.7$, $\mu_1=1.5$, $\mu_2=1.2$.

На рис.6b представлены зависимости дисперсионных кривых от угла ϕ при тех параметрах задачи, при которых дисперсионная кривая есть гипербола. Как видно из рисунка, при изменении угла ϕ дисперсионные кривые, представляющие собой гиперболы, поворачиваются в плоскости $n_x n_z$, и при определенных значениях этого угла оси $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x}$ и $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{z}$ превращаются в асимптоты.

Отметим, что вышеизложенные рассуждения будут верны также для магнитных мод (достаточно сделать перестановки $\delta_\varepsilon \to \delta_\mu$, $\mu_m \to \varepsilon_m$).

3. Заключение

Мы исследовали особенности дисперсионных поверхностей для анизотропных метаматериалов с диэлектрической и магнитной анизотропиями. Показано, что при различных ориентациях оптической оси могут возникать следующие пары дисперсионных поверхностей: два эллипсоида вращения, эллипсоид вращения и двухполостный гиперболоид, два двухполостных гиперболоида, два однополостных гиперболоида, плоскость и коническая поверхность. Если одна из дисперсионных поверхностей превращается в прямую, то она может появляться вместе с дисперсионной поверхностью любого из перечисленных выше типов (кроме конической). В остальных случаях моды эванесцентны. Мы исследовали зависимости дисперсионных кривых от ориентации оптической оси. Как видно из канонического вида дисперсионного уравнения (20), невозможно изменением ориентации оптической оси (в плоскости падения) превратить дисперсионную кривую от эллипса в гиперболу, и наоборот. Изменение ориентации оптической оси приводит лишь к изменению модулей и вращению осей этих кривых.

Авторы выражают благодарность М.З. Арутюняну, С.Г. Рафаеляну и В.А. Арзуманяну за ценные обсуждения.

Работа поддержана грантом 13А-1с34 Государственного комитета по науке Министерства образования и науки Республики Армения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **V.G. Veselago.** Sov. Phys. Usp., **10**, 509 (1968).
2. **D.R. Smith, W.J. Padilla, et al.** Phys. Rev. Lett., **84**, 4184 (2000).
3. **R.A. Shelby, D.R. Smith, S. Schultz.** Science, **292**, 77 (2001).
4. **V.M. Shalaev.** Nature Photonics, **1**, 41 (2007).
5. **S.H. Lee, C.M. Park, Y.M. Seo, C.K. Kim.** Phys. Rev. B, **81**, 241102 (2010).
6. **J.B. Pendry, D. Schurig, D.R. Smith.** Science, **312**, 1780 (2006).
7. **A. Alu, N. Engheta.** Phys. Rev. E, **72**, 016623 (2005).
8. **U. Leonhardt.** Science, **312**, 1777 (2006).
9. **N.I. Landy, S. Sajuyigbe, et al.** Phys. Rev. Lett., **100**, 207402 (2008).
10. **I.V. Lindell, S.A. Tretyakov, K.I. Nikoskinen, S. Ilvonen.** Microw. Opt. Technol. Lett., **31**, 129 (2001).
11. **Р.А. Силин.** Необычные законы преломления. М., ФАЗИС, 1999.
12. **D.R. Smith, D. Schurig.** Phys. Rev. Lett., **90**, 077405 (2003).
13. **P.A. Belov.** Microw. Opt. Technol. Lett., **37**, 259 (2003).
14. **N.H. Shen, Q. Wang, J. Chen, et al.** Phys. Rev. B, **72**, 153104 (2005).
15. **R.A. Depine, M.E. Inchaussandague,** et al. J. Opt. Soc. Amer. A, **23**, 949 (2006).
16. **H. Luo, W. Hu, W. Shu, F. Li, Z. Ren.** Europhys. Lett., **74**,1081 (2006).
17. **Y.-J. Jen, A. Lakhtakia, C.-W. Yu, C.-T. Lin.** Eur. J. Phys., **30**,1381 (2009).
18. **H. Chen, Sh. Xu, J. Li.** Opt. Express, **17,** 19791 (2009).
19. **H. Liu, Q. Lv, H. Luo, et al.** J. Opt. A: Pure Appl. Opt., **11,** 105103 (2009).
20. **V.A. Markel, J.C. Schotland.** J. Opt., **12,** 01510 (2010).
21. **Y. Xiang, X. Dai, S. Wen.** Opt. Commun., **274,** 248 (2007).

22. **L. Yonghua, W. Pei, Y. Peijun, X. Jianping, M. Hai.** Opt. Commun., **246,** 429 (2005).
23. **J. Lekner.** JOSA A, **10**, 2059 (1993).

ԼՈՒՅՍԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՄԵՏԱՆՅՈՒԹԵՐՈՒՄ
I. ԴԻՍՊԵՐՍԻՈՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԸ

Ա.Հ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ, Մ.Ս. ՌԱՖԱՅԵԼՅԱՆ

Քննարկված են դիսպերսիոն հավասարման լուծումները անեզր և անորոշ պարամետրերով միջավայրում՝ օպտիկական առանցքի նկատմամբ կամայական դասավորված կոորդինատական համակարգում: Նկարագրված են հնարավոր բոլոր դիսպերսիոն մակերևույթները և ստացված են վերջիններիս առաջանալու պայմանները: Ցույց է տրված, որ հնարավոր են միայն մակերևույթների որոշակի զույգեր: Սահմանային խնդրի համար նույնպես ստացված է դիսպերսիոն հավասարումը: Հետազոտված է դիսպերսիոն կորերի կախվածությունը օպտիկական առանցքի կողմնորոշումից: Ցույց է տրված, որ նշված համակարգում ալիքների ընթացքն անշրջելի է:

LIGHT PROPAGATION IN ANISOTROPIC METAMATERIALS.
I. DISPERSION SURFACES

A.H. GEVORGYAN, M.S. RAFAYELYAN

Peculiarities of solutions of the wave dispersion equation in an infinite indefinite medium for arbitrary oriented optical axes are considered. All the possible dispersion surfaces arising in the mentioned medium are described, and the conditions of their existence are obtained. It is shown that only some specific couples of surfaces are possible. The dispersion equation for the boundary problem is obtained, as well as the dependences of dispersion curves on the orientation of optical axis. The nonreciprocity of the wave refraction in these media is shown.

Известия НАН Армении, Физика, т.48, №6, с.420-427 (2013)

УДК 621.315

ЭЛЕКТРОННЫЕ СОСТОЯНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КВАНТОВОЙ ТОЧКЕ С МОДИФИЦИРОВАННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ ПЕШЛЯ–ТЕЛЛЕРА ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Д.Б. АЙРАПЕТЯН[1,2], А.Ш. АЧОЯН[1], Э.М. КАЗАРЯН[1], О.Х. ТЕВОСЯН[1]*

[1]Российско-Армянский (Славянский) университет, Ереван

[2]Государственный инженерный университет Армении, Ереван

*e-mail: hovhannes.tevosyan@gmail.com

(Поступила в редакцию 7 ноября 2012 г.)

Исследованы энергетические уровни электрона в цилиндрической квантовой точке с модифицированным потенциалом Пешля–Теллера при наличии внешнего однородного магнитного поля. Получены аналитические выражения для волновой функции и энергии электрона. Рассмотрены разные режимы магнитного квантования и выявлены особенности поведения энергетического спектра электрона от величины приложенного магнитного поля.

1. Введение

В последние два десятилетия резко возрос интерес к исследованию физических свойств квантовых точек (КТ) (см., например, [1-3]), уникальные свойства которых позволяют применять их в полупроводниковых устройствах нового поколения. Интерес к этим структурам обусловлен ярко выраженным эффектом размерного квантования во всех трех направлениях, благодаря чему характер энергетического спектра носителей заряда уподобляется атомарному, а плотность состояний имеет δ-образный характер. Это делает полупроводниковые КТ легко управляемыми и привлекательными для приложений в микро- и наноэлектронике [4]. На сегодняшний день реализованы полупроводниковые КТ сферической, эллипсоидальной, пирамидальной, цилиндрической и других геометрии (см., например, [5-12]).

Для математического описания поведения носителей заряда в КТ необходимо дать максимально приближенный к реальному вид потенциала ограничения КТ. Профиль этого потенциала зависит как от физико-механических и физико-химических характеристик КТ и окружающей среды, так и от метода выращивания изучаемого образца. В частности, если в ходе выращивания КТ имеет место диффузия между компонентами КТ и окружающей среды, то профиль потенциала ограничения сглаживается, и в первом приближении его можно аппроксимировать параболическим (см., например, [13,14]). Однако, в действительности, параболический потенциал реализуется только для сравнительно нижних уровней энергетического спектра, а для высокоэнергетичных электронов профиль потенциала ограничения будет отличаться от параболического [15-17].

В качестве более реалистичных потенциалов ограничения КТ были предложены потенциал Вуда–Саксона [18,19], Хюльтена [20], Пешля–Теллера [21-29], Винтерница–Смородинского [30,31] и т.д..

Помимо размерного квантования энергетическими уровнями носителей заряда в КТ можно управлять с помощью внешних электрического и магнитного полей. При этом возникает интересная проблема выявления характера конкуренции размерного квантования с квантованием, обусловленным внешними полями. Следует отметить, что при наложении магнитного поля на КТ магнитное квантование проявляет себя только в поперечной к полю плоскости. Это обстоятельство в особенности упрощает описание физических свойств КТ с цилиндрической геометрией, когда поле направлено вдоль оси цилиндра [14,32-36].

В данной работе исследовано влияние магнитного поля на энергетический спектр электрона в цилиндрической КТ с модифицированным потенциалом Пешля–Теллера (МППТ). При этом предполагается, что на систему наложено внешнее однородное магнитное поле.

2. Теория

Рассмотрим движение электрона в цилиндрической КТ при наличии внешнего однородного магнитного поля, которое направлено по оси цилиндра (ось OZ). В предложенной модели будем считать, что потенциал ограничения КТ вдоль оси цилиндра описывается МППТ, а в радиальном направлении – параболическим потенциалом. В цилиндрических координатах для ограничивающего потенциала можно записать:

$$U\left(\rho,Z\right)=\tilde{U}_0-\frac{\tilde{U}_0}{\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{Z}{\tilde{\beta}}\right)}+\frac{m_e^*\omega^2\rho^2}{2}, \tag{1}$$

где $\tilde{U}_0$ и $\tilde{\beta}$ – соответственно, глубина и полуширина МППТ.

В предположении, что на бесконечности МППТ стремится к значению скачка потенциалов на границе перехода КТ–окружающая среда $\tilde{U}_0$, и путем его вписания в прямоугольную яму конечной высоты $\tilde{U}_0$, определим связь между высотой КТ h_0 и полушириной МППТ следующим образом: $h_0 = \delta\beta$, где δ – параметр, зависящий от конкретной структуры КТ. Что касается частоты ω, то она может быть определена из квантовой вириальной теоремы и связана с радиусом сечения КТ R_0 согласно соотношению $\omega \sim \frac{\hbar}{m_e^* R_0^2}$.

Вид МППТ в зависимости от полуширины и глубины потенциальной ямы, приведен на рис.1.

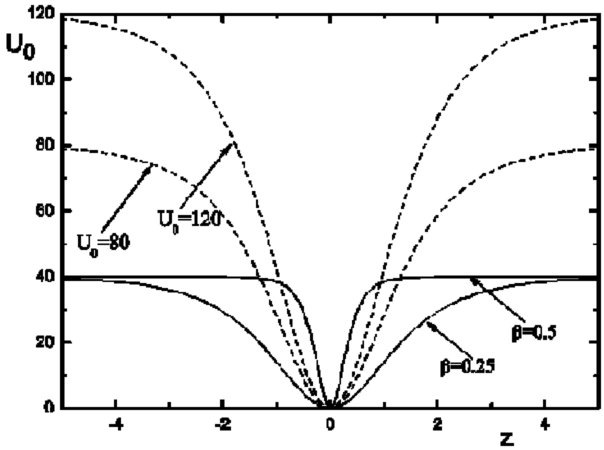


Рис.1. Модифицированный потенциал Пешля-Теллера для различных значений полуширины и глубины потенциальной ямы.

С учетом наличия внешнего магнитного поля, гамильтониан системы запишется в виде

$$\hat{\tilde{H}} = \frac{1}{2m_e^*}\left(\hat{\tilde{\mathbf{P}}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + U(\rho, Z), \tag{2}$$

где $\boldsymbol{P}$ – оператор импульса частицы, $\boldsymbol{A}$ – векторный потенциал магнитного поля, c – скорость света в вакууме, m_e^* – эффективная масса электрона, e – модуль заряда электрона. Выберем калибровку векторного потенциала в следующем виде: $A_\rho = 0$, $A_\varphi = \frac{1}{2}B\rho$, $A_z = 0$. Тогда для гамильтониана системы можем записать

$$\hat{\tilde{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m_e^*}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\partial}{\rho\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right] - \\ - i\frac{\hbar\omega_c}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{m_e^*\omega_c^2}{8}\rho^2 + \tilde{U}_0 - \frac{\tilde{U}_0}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{Z}{\tilde{\beta}}\right)} + \frac{m_e^*\omega^2\rho^2}{2}, \tag{3}$$

где $\omega_c = \frac{eB}{cm_e^*}$. Полный гамильтониан системы в безразмерных величинах можно представить в виде суммы гамильтонианов, описывающих состояние электрона вдоль поля и в плоскости, поперечной ее направлению:

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2, \tag{4}$$

где

$$\hat{H}_1 = U_0 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{U_0}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{z}{\beta}\right)},$$
$$\hat{H}_2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) - i\gamma\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{4}\gamma^2 r^2 + \frac{1}{4}\gamma_0^2 r^2. \tag{5}$$

Здесь введены обозначения: $r = \frac{\rho}{a_\mathrm{B}}$, $\mathrm{z} = \frac{Z}{a_\mathrm{B}}$, $\hat{H} = \frac{\hat{\tilde{H}}}{E_\mathrm{R}}$, $\gamma_0 = \frac{2m_\mathrm{e}^*\omega a_\mathrm{B}^2}{\hbar}$, $\gamma = \frac{\hbar\omega_\mathrm{c}}{2E_\mathrm{R}}$, $\beta = \frac{\tilde{\beta}}{a_\mathrm{B}}$, $U_0 = \frac{\tilde{U}_0}{E_\mathrm{R}}$, $E_\mathrm{R} = \frac{\hbar^2}{2m_\mathrm{e}^* a_\mathrm{B}^2}$ – эффективная энергия Ридберга, $a_\mathrm{B} = \frac{\kappa\hbar^2}{m_\mathrm{e}^* e^2}$ – эффективный боровский радиус, κ – диэлектрическая проницаемость.

Уравнение Шредингера для первой подсистемы примет следующий вид:

$$\chi''(z) + \left(\varepsilon_\mathrm{z} - U_0 + \frac{U_0}{\mathrm{ch}^2(z/\beta)}\right)\chi(z) = 0. \tag{6}$$

После несложных преобразований уравнения (6) получаем уравнение Куммера, решения которого задаются гипергеометрическими функциями Гаусса [37] и окончательно, для волновой функции первой подсистемы получаем:

$$\chi(z) = \left(1 - \mathrm{th}^2\left(\frac{z}{\beta}\right)\right)^{\varepsilon_\mathrm{z}/2} {}_2F_1\left\{\varepsilon_\mathrm{z} - s,\ \varepsilon_\mathrm{z} + s + 1,\ \varepsilon_\mathrm{z} + 1, \frac{1 - \mathrm{th}(z/\beta)}{2}\right\}, \tag{7}$$

где $s = (1/2)\left[-1 + \sqrt{1 + 4\beta^2 U_0}\right]$. А энергия подсистемы будет определяться выражением

$$\varepsilon_\mathrm{z} = U_0 - \frac{1}{4\beta^2}\left[-(1 + 2n_\mathrm{z}) + \sqrt{1 + 4\beta^2 U_0}\right]^2, \tag{8}$$

где n_z – квантовое число и принимает значения $n_\mathrm{z} = 0, 1, 2, \ldots$.

Перейдем к рассмотрению задачи нахождения волновых функций и энергетического спектра электрона для второй подсистемы. Ищем волновую функцию второй подсистемы в виде $\psi(\mathrm{r}, \varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} R(\mathrm{r})$ и, подставляя ее в соответствующее уравнение Шредингера, получаем:

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \left(\frac{m^2}{r^2} + m\gamma - \frac{(\gamma^2 + \gamma_0^2)}{4} r^2\right) R(r) = \varepsilon_\mathrm{r} R(r), \tag{9}$$

где m – магнитное квантовое число и принимает значения $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Решения для уравнения (9) хорошо известны и задаются вырожденными гипергеометрическими функциями [35]:

$$R(\xi)=e^{-\frac{\sqrt{\gamma^2+\gamma_0^2}}{4}r^2}\left(\frac{\sqrt{\gamma^2+\gamma_0^2}}{2}r^2\right)^{|m|/2}{}_1F_1\left\{-\left(\frac{\varepsilon_r}{2\sqrt{\gamma^2+\gamma_0^2}}-\frac{|m|+1}{2}\right),|m|+1,\frac{\sqrt{\gamma^2+\gamma_0^2}}{2}r^2\right\}. \quad (10)$$

Из стандартных условий для энергии поперечного полю движения окончательно находим

$$\varepsilon_r = m\gamma + 4\sqrt{\gamma^2+\gamma_0^2}\,(N+1), \quad (11)$$

где введено обозначение $N = 2n_r + |m|$, $N = 0,1,2,\ldots$. Здесь n_r и N – соответственно, радиальное и осцилляторное квантовые числа. Полная энергия системы будет суммой энергий подсистем:

$$\varepsilon = U_0 - \frac{1}{4\beta^2}\left[-(1+2n_z)+\sqrt{1+4\beta^2U_0}\right]^2 + m\gamma + 4\sqrt{\gamma^2+\gamma_0^2}\,(N+1). \quad (12)$$

Перейдем к рассмотрению различных режимов магнитного квантования. Рассмотрим сперва случай экстремально сильного магнитного поля. Тогда, в выражении (11) можно пренебречь членом γ_0, и зависимость энергии радиальной подсистемы от величины магнитного поля будет линейной:

$$\varepsilon_r = \gamma\big(m + 4(N+1)\big). \quad (13)$$

В этом предельном случае движение частицы в основном обусловлено магнитным квантованием [38]. Отметим, что в основном состоянии ($m = 0$, $N = 0$) энергия электрона для радиальной части принимает значение $\varepsilon_r = 4\gamma$. В случае, если поле недостаточно сильное, чтобы пренебречь γ_0 по сравнению с γ, однако γ все еще значительно превышает γ_0, можно разложить последний член в уравнении (11) в ряд. Тогда энергетический спектр для радиальной подсистемы будет иметь вид

$$\varepsilon_r = m\gamma + 4\gamma\left(1+\frac{\gamma_0^2}{2\gamma^2}\right)(N+1). \quad (14)$$

Как видно из (14), зависимость энергии от параметра ω принимает квадратичный характер ($\gamma_0 \sim \omega$). При этом, наложение даже слабого магнитного поля приводит к полному снятию вырождения по магнитному квантовому числу m, так как скрытая симметрия, характерная для кругового осциллятора, благодаря наложению поля исчезает [39].

3. Обсуждение

Перейдем к обсуждению полученных результатов. Следует отметить, что численные расчеты сделаны для цилиндрической КТ из GaAs, для которой введенные выше параметры имеют следующие значения: $m_e^* = 0.067m_e$, $\kappa = 13.8$, $E_R = 5.275$ мэВ, $a_B = 104$ Å.

На рис.2 приведена зависимость энергии частицы от параметра γ при фиксированных значениях остальных параметров КТ, когда $m = 0$ и $n_z = 0$. Как видно из рисунка, при увеличении значения магнитного поля энергия частицы возрастает, так как вклад магнитного квантования в энергию частицы возрастает. Это обусловлено тем, что магнитное поле локализует движение частицы в области с радиусом $a = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$. Отметим, что с увеличением параметра γ увеличиваются межуровневые расстояния. Так, например, когда $\gamma = 0.2$ (что соответствует значению магнитного поля 0.03 Т), расстояние между первыми двумя уровнями энергетического спектра составляет $\Delta E \approx 2.6 E_R$, а частота перехода – $\omega_{10} = 0.85 \cdot 10^{16}\,\text{c}^{-1}$, а когда $\gamma = 3.5$ (0.58 Т), межуровневое расстояние равно $\Delta E \approx 11.8 E_R$, а частота перехода – $\omega_{10} = 3.86 \cdot 10^{16}\,\text{c}^{-1}$.

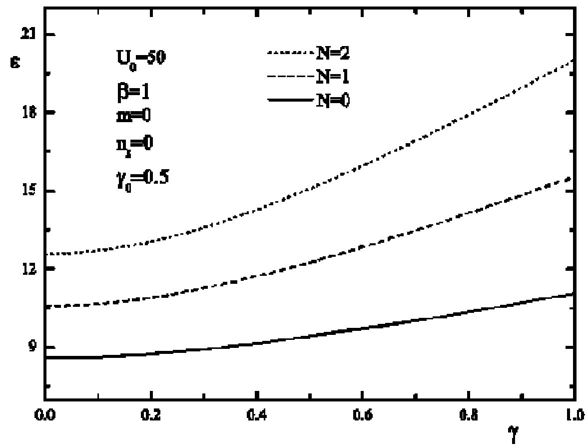


Рис.2. Зависимость энергии частицы в цилиндрической КТ с МППТ от величины магнитного поля.

Нужно особо отметить, что при больших полях в системе реализуется ландауподобный спектр. В результате зависимость энергии от значения магнитного поля становится линейной. Такая зависимость приведена на рис.3, когда

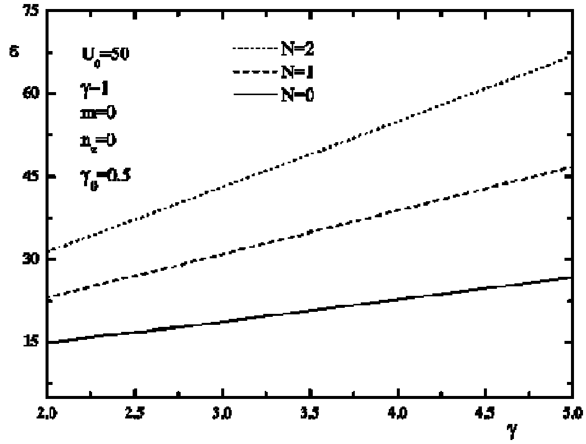


Рис.3. Зависимость энергии частицы в цилиндрической КТ с МППТ от величины магнитного поля для случая сильных магнитных полей.

величина магнитного поля принимает экстремально большие значения и размерное квантование заглушается магнитным. На рис.4a и b приведены зависимости энергии электрона, соответственно, от полуширины и глубины МППТ, когда фиксированы остальные параметры цилиндрической КТ, а также величина внешнего магнитного поля. Как видно из рисунков, при увеличении глубины

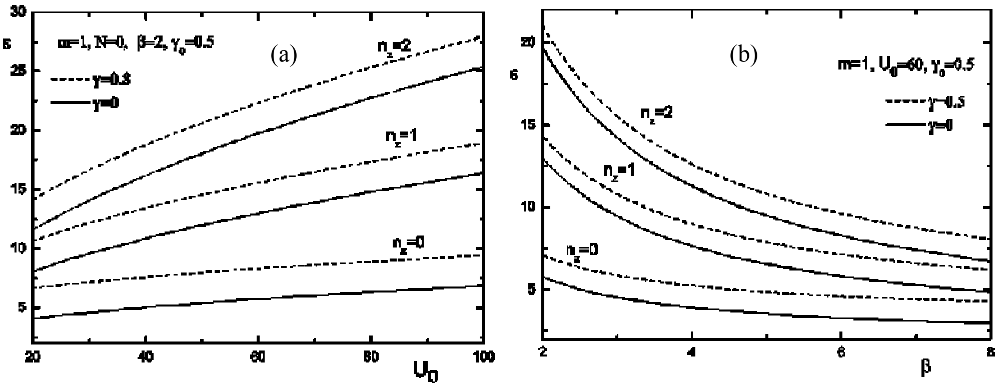


Рис.4. Зависимость энергии электрона в цилиндрической квантовой точке от глубины (a) и полуширины (b) модифицированного потенциала Пешля–Теллера при наличии магнитного поля.

МППТ энергия электрона увеличивается, а при увеличении полуширины МППТ – уменьшается. Это объясняется тем, что в первом случае вклад РК в энергию электрона увеличивается, а во втором – уменьшается. Наличие магнитного поля приводит к смещению всех кривых в сторону больших энергий, так как магнитное квантование дает положительный вклад в энергию частицы. Другими словами, магнитное квантование приводит к дополнительной локализации электрона и одинаковому смещению энергетических линий спектра.

В заключение авторы выражают благодарность профессору А.А. Саркисяну за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **P. Harrison.** Quantum wells, wires and dots. Theoretical and computational physics. John Wiley & Sons ltd, NY, 2005.
2. **R.K. Willardson.** Self-Assembled InGaAs-GaAs Quantum Dots. Academic Press, v. 60, 1999.
3. **Э.М. Казарян, С.Г. Петросян.** Физические основы полупроводниковой наноэлектроники. Ереван, изд. РАУ, 2005.
4. **D. Bimberg. Semicond., 33,** 951 (1999).
5. **M. Grundmann, O. Stier, D. Bimberg,** Phys. Rev. **B, 52**, 11969 (1995).
6. **A. Mathew, M.K. Nandy.** Physica E, **42**, 1383 (2010).
7. **F. Adler et al.** J. Appl. Pyhs., **80**, 4019 (1996).
8. **L.E. Oliveira, R. Perez-Alvarez.** Phys. Rev. **B, 40**, 10460 (1989).
9. **Д.Б Айрапетян**. Изв. НАН Армении, Физика, **42**, 442 (2007).
10. **G. Cantele, D. Ninno, G. Iadonisi.** J. of Phys.: Cond. Matt., **12**, 9019 (2000).
11. **A.H. Rodríguez et al.** Phys. Rev. B, **63**, 125319 (2001).
12. **A.J. Williamson, L.W. Wang, A. Zunger**. Phys. Rev. B, **62**, 12963 (2000).

13. **А.А Костанян.** Изв. НАН Армении, Физика, **42**, 107 (2007).
14. **H.A. Sarkisyan**. Modern Phys. Lett. B, **18**, 443 (2004).
15. **L.S. Costa et al.** Journ. of Phys. B, **32**, 2461 (1999).
16. **G. Todorović, V. Milanović, Z. Ikonić, D. Indjin**. Phys. Rev. B, **55**, 15681 (1997).
17. **E.M. Kazaryan, A.A. Kostanyan, R G Poghosyan.** J. Phys.: Conf. Ser., **350**, 012020 (2012).
18. **Л.С. Петросян**. Изв. НАН Армении, Физика, **37**, 35 (2002)
19. **A.Kh. Manaselyan, A.A. Kirakosyan.** Physica E, **28**, p. 462 (2005).
20. **L.A. Juharyan, E.M. Kazaryan, L.S. Petrosyan**. Solid State Comm., **139**, 537 (2006).
21. **A. Rodriguez, J.M. Ceveno.** Phys. Rev. B, **74**, 104201 (2006).
22. **G. Wang, Q. Guo, L. Wu, X. Yang.** Phys. Rev. B, **75**, 205337 (2007).
23. **Д.Б. Айрапетян, К.Г. Двоян, Э.М. Казарян, А.А. Чанчапанян.** ДНАН Армении, **108**, 320 (2008).
24. **A. Hakimyfard, M.G. Barseghyan, C.A. Duque, A.A. Kirakosyan**. Phys. B, **404**, 5159 (2009).
25. **Ch. Jia, T. Chen, L. Cui**. Phys. Lett. A, **373**, 1621 (2009).
26. **W. Chen, G. Wei, W. Qiang**. Modern Phys. Lett. A, **24**, 1371 (2009).
27. **M.G. Barseghyan, A. Hakimyfard, S.Y. López, C.A. Duque, A.A. Kirakosyan**. Physica E, **42**, 1618 (2010).
28. **M. Rey, F. Michelot**. Phys. Lett. A, **374**, 4761 (2010).
29. **H.Kh. Tevosyan, D.B. Hayrapetyan, K.G. Dvoyan, E.M. Kazaryan.** Int. Journ. of Mod. Phys., Conf. Ser., **15**, 204 (2012).
30. **А.К. Атаян, Э.М. Казарян, А.В. Меликсетян, А.А. Сарксиян.** Изв. НАН Армении, Физика, **45**, 126 (2010)
31. **N.G. Aghekyan, E.M. Kazaryan, A.A. Kostanyan, H.A. Sarkisyan.** Proc. SPIE, **7998**, 79981 (2010).
32. **K.G. Dvoyan, D.B. Hayrapetyan, E.M. Kazaryan, A.A. Tshantshapanyan.** Nanoscale Research Letters, **2**, 601 (2007).
33. **A. Aghchegala, V.N. Mughnetsyan, A.A. Kirakosyan.** Proc. SPIE, **8414**, 84140F (2011).
34. **A.K. Atayan, E.M. Kazaryan, H.A. Sarkisyan.** Physica E, **31**, 83 (2006)
35. **Q. Wu, K. Guo, G. Liu, J. Wu.** Physica B, **410**, 206 (2013).
36. **G. Liu, K. Guo, Ch. Wang.** Physica B, **407**, 2334 (2012).
37. Справочник по специальным функциям. Под ред. **М. Абрамовица** и **И. Стиган**. М., Наука, 1979.
38. **Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.** Квантовая механика. М., Наука, 1989.
39. **D.B. Hayrapetyan, E.M. Kazaryan, H.Kh. Tevosyan.** Physica E, **46**, 274 (2012).

ELECTRONIC STATES IN A CYLINDRICAL QUANTUM DOT WITH THE MODIFIED PÖSCHL–TELLER POTENTIAL IN THE PRESENCE OF EXTERNAL MAGNETIC FIELD

D.B. HAYRAPETYAN, A.Sh. ACHOYAN, E.M. KAZARYAN, H.Kh. TEVOSYAN

Energy levels of an electron in a cylindrical quantum dot with a modified Pöschl-Teller potential in the presence of an external magnetic field are studied. Analytical expressions for the wave function and energy of the particle are obtained. The different regimes of magnetic quantization are considered and the dependences of the electron energy on the magnetic field are revealed for all regimes.

Известия НАН Армении, Физика, т.48, №6, с.428-430 (2013)

К 75-летию академика Ю.С. Чилингаряна

22 сентября исполняется 75 лет со дня рождения и более 50 лет научно-педагогической деятельности известного ученого-физика, академика НАН РА Юрия Сергеевича Чилингаряна. Своими работами Ю.С. Чилингарян внес весомый вклад в новые направления лазерной физики и нелинейной оптики. Он фактически развил научное направление, которое можно сформулировать как лазерную физику и нелинейную оптику жидких кристаллов.

Будучи студентом физического факультета Ереванского государственного университета, он был направлен в Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова для прохождения преддипломной практики и выполнения дипломной работы в НИИЯФ МГУ.

Дипломная работа была выполнена в области ядерной спектроскопии. После успешной защиты в 1960 г. Ю.С. Чилингарян был принят на работу на физическом факультете ЕГУ в качестве ассистента. Летом 1961 г. во время работы школы по физике элементарных частиц в Ереване Бруно Максимович Понтекорво проэкзаменовал Ю.С. Чилингаряна и предложил ему поехать в Дубну в качестве аспиранта. Для этого требовался допуск первой категории, обычная процедура оформления которого занимала целый год.

В этот период из Ереванского физического института в университет перешел работать М.Л. Тер-Микаелян. Он возглавил кафедру и одновременно стал научным руководителем проблемной лаборатории радиационной физики ЕГУ. В те годы во всем мире только начинались исследования по лазерной тематике. Тер-Микаелян решил переориентировать тематику проблемной лаборатории на лазерную и Ю.С. Чилингарян с самого начала включился в эти работы. В 1962 г. в ЕГУ был запущен первый армянский лазер. Чилингарян непосредственно принимал участие в сборке и запуске первого лазера в Армении.

В 1963 г. Ю.С. Чилингарян переходит с кафедры в проблемную лабораторию радиационной физики, которая в 1965 г. вобрала в себя отдел квантовой электроники института радиофизики и электроники АН Армении, образовав Объединенную радиационную лабораторию АН и ЕГУ (ОРЛАН ЕГУ). Там он прошел путь от ведущего инженера до заведующего (1963-1972). С самого начала в СССР очень интенсивно налаживались контакты между учеными, вовлеченными в лазерную науку. В 1964 г. Ю.С. Чилингарян был командирован в Москву (МГУ), Ленинград (ГОИ), Горький (ИПФ). Состоялись встречи с Р.В. Хохловым, С.А. Ахмановым, А.М. Бонч-Бруевичем, А.В. Гапоновым-Греховым и другими. Эти встречи не просто способствовали установлению связей между научными центрами, но и сыграли решающую роль в становлении в науке Ю.С. Чилингаряна, выработке его научного стиля, основанного на глубоких знаниях и постановке прецизионных и достоверных экспериментов. Успеху способствовала также хорошая интуиция, помогающая в выборе направлений, проблем, задач.

Его становление в науке происходило в Московском государственном университете под руководством выдающихся ученых, классиков нелинейной оптики, лауреатов Ленинской и Ломоносовской премий – профессора С.А. Ахманова и академика Р.В. Хохлова. Ю.С. Чилингаряном были выполнены первые в Армении работы по нелинейной оптике. Фактически, он является основоположником этого направления в Армении.

Уже в первых экспериментальных работах по исследованию динамики развития нелинейно-оптических эффектов в жидкостях был получен ряд результатов, в некоторых случаях в корне меняющих традиционные представления. Это, например, отличие спектрального состава вынужденного рассеяния Мандельштама–Бриллюэна от спонтанного; обнаружение и определение оптимального радиуса самофокусирующегося пучка для неоднородных по сечению лазерных пучков, конкуренция эффектов вынужденного рассеяния и др. Эти работы стали основой кандидатской диссертации, защищенной в 1968 г. В период с 1968 по 1972 г. Чилингарян выполняет серию работ по нестационарным нелинейным явлениям в кристаллах. В частности, генерация второй гармоники в нелинейных кристаллах, нестационарное вынужденное рассеяние на поляритонах в йодате лития. Он создает уникальную установку, позволяющую наблюдать спектрально-пространственно-временную картину развития нелинейных эффектов при взаимодействии пикосекундных лазерных импульсов со средой.

В 1972 г. Ю.С. Чилингарян становится заведующим кафедрой оптики ЕГУ. Он начинает заниматься вопросами взаимодействия лазерного излучения со статистически упорядоченными средами, в частности, жидкими кристаллами (ЖК). ЖК имеют несколько модификаций, очень чувствительны к внешним воздействиям, изучение свойств ЖК требует понимания процессов различной природы – от молекулярной физики и термодинамики до гидродинамики и теории неравновесных процессов. Все эти процессы вносят вклад в формирование оптических свойств ЖК и поэтому могут изучаться оптическими методами.

Практически все проявления и особенности взаимодействий лазерного излучения с ЖК оказались в поле зрения Ю.С. Чилингаряна и его сотрудников. Сильные оптические нелинейности, трех-, и четырехволновые взаимодействия, выявление флексоэлектрического механизма генерации второй гармоники в нематических ЖК, когерентная активная спектроскопия комбинационного рассеяния света (измерение компонент высших моментов параметра упорядочения), обращение волнового фронта, самофокусировка света, исследования в области термодинамического фазового перехода, светоиндуцированные фазовые переходы, нелинейные волновые процессы в поверхностных структурах, бистабильность и мультистабильность, лазерная генерация красителя в ЖК (среда с двухкомпонентным параметром упорядочения) – вот далеко не полный перечень исследованных им проблем. Благодаря тому, что исследования велись широким фронтом, на их основе сформировалось новое научное направление: ”Лазерная физика и нелинейная оптика жидких кристаллов”. Кафедра оптики стала авторитетным научным центром, признанным мировым научным сообществом.

В 1984 г. Ю.С. Чилингарян защищает докторскую диссертацию, в том же году совместно с С.М. Аракеляном издает монографию “Нелинейная оптика жидких кристаллов” (Москва, “ Наука”, 1984 г., 360 стр.)

В 1996 г. Ю.С. Чилингарян избирается академиком Национальной Академии наук Армении.

В числе учеников Чилингаряна 6 докторов и 12 кандидатов наук. Многие представители его научной школы в настоящее время успешно работают в Канаде, США, РФ, Германии, Франции, Японии и в других ведущих странах мира.

Результаты исследований неустойчивостей и критических явлений, гидродинамических, светогидродинамических и ориентационных эффектов в ЖК послужили основой для создания элементов и систем на их основе. К числу таких разработок относятся сверхчувствительный широкодиапазонный сейсмометр, квазиволноводный жидкокристаллический лазер на красителе, внутрирезонаторные ЖК элементы для плавной перестройки частоты лазерного излучения и т.д. Достойны упоминания работы Ю.С. Чилингаряна по волоконной оптике. Под его руководством были синтезированы особо чистые многокомпонентные стекла и на их основе созданы двухсердцевинные оптические волокна, разработаны волоконно-оптические датчики температуры и давления. Акцент был сделан на поляризационных и интерференционных эффектах. По работам прикладного характера Ю.С. Чилингарян имеет девять авторских свидетельств в области оптоэлектроники и волоконной оптики.

Список публикаций Ю.С. Чилингаряна превышает 250 наименований. Он неоднократно выступал с приглашенными докладами на международных конференциях и симпозиумах по когерентной оптике.

Ю.С. Чилингарян участвовал в организации ряда научных форумов. Так, например, он являлся организатором Первого Всесоюзного научного совещания по "Взаимодействию лазерного излучения с жидкими кристаллами" (Дилижан, 1978 г.), одним из организаторов Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике (Ереван, 1967 г.), Международной конференции по когерентной и нелинейной оптике (Ереван, 1982 г.), Первого Всемирного конгресса физиков- армян (Ереван, 2004 г.).

Ю.С. Чилингарян являлся членом ряда научных проблемных советов АН СССР. Так, например, он был членом научного совета АН СССР по проблеме "Когерентная и нелинейная оптика" (со дня основания совета и до распада СССР), членом объединенного Совета по Оптике, плоской (планарной) оптике, волоконной оптике и ряда других. В период с 2003 по 2006 год он был председателем проблемного Совета по физике и астрофизике НАН Армении.

В должности заведующего кафедрой оптики Ю.С. Чилингарян проработал до 2007 г., одновременно – с 1985 по 2000 гг. – он являлся деканом физического факультета ЕГУ. По его инициативе и под его руководством на факультете для особо одаренных студентов было организовано углубленное обучение, была разработана и внедрена в учебный процесс программа учебного цикла "Компьютерные методы в физике'', организована подготовка студентов по целому ряду новых специализаций, разработан учебный план бакалавриата и магистратуры. Он является автором двух учебников и ряда учебных пособий.

В 2006 г. Ю.С. Чилингарян избирается академиком-секретарем вновь созданного в НАН РА отделения физики и астрофизики, а также членом Президиума НАН РА.

Ю.С. Чилингаряну в качестве признания его научно-педагогических заслуг в 2007 г. было присвоено звание почетного заведующего кафедрой оптики ЕГУ. В 2009 г. он был удостоен звания заслуженного деятеля науки Республики Армения.

В настоящее время он является членом коллегии национальных экспертов стран СНГ по "Лазерам и лазерным технологиям'', членом редакционного совета журнала "Квантовая электроника'' (РФ), членом редколлегии журнала "Известия НАН Армении. Физика'', заместителем председателя правления Армянского физического общества, членом специализированного совета по защите диссертаций по физике.

Он полон творческих сил. Об этом свидетельствуют его последние работы, посвященные исследованию эффектов взаимодействия света со средами с периодической структурой (холестерическими ЖК).

Поздравляя Юрия Сергеевича Чилингаряна с 75-летним юбилеем, редколлегия, его коллеги и ученики желают ему крепкого здоровья, благополучия, новых успехов в науке и значительных достижений в благородном деле подготовки научных кадров.

Редколлегия

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

CONTENTS

СОДЕРЖАНИЕ

Заказ № 459
Тираж 150. Сдано в набор 15.08.2013.
Подписано к печати 23.08.2013. Печ. л. 3.75.
Бумага офсетная. Цена договорная.
Типография НАН РА. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24.