



ИЗВЕСТИЯ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

PROCEEDINGS
OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ
ՖԻԶԻԿԱ ФИЗИКА

ՀԱՏՈՐ ТОМ

48

№ 1



ՀՀ ԳԱԱ "ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ" ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ИЗДАТЕЛЬСТВО "ТИТУЛОН" НАН РА
ԵՐԵՎԱՆ ЕРЕВАН

2013

Журнал издается с 1966 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

В. М. Арутюнян, главный редактор
Э. Г. Шароян, зам. главного редактора
А. А. Ахумян
Г. А. Вартапетян
Э. М. Казарян
А. О. Меликян
А. Р. Мкртчян
Д. Г. Саркисян
Ю. С. Чилингарян
А. А. Мирзаханян, ответственный секретарь

ԽՍՐԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՆԵԳԻԱ

Վ. Մ. Հարությունյան, գլխավոր խմբագիր
Է. Գ. Շառոյան, գլխավոր խմբագրի տեղակալ
Ա. Ա. Հախումյան
Հ. Հ. Վարդապետյան
Է. Մ. Ղազարյան
Ա. Հ. Մելիքյան
Ա. Ռ. Մկրտչյան
Դ. Հ. Սարգսյան
Յու. Ս. Չիլինգարյան
Ա. Ա. Միրզախանյան, պատասխանատու քարտուղար

EDITORIAL BOARD

V. M. Aroutiounian, editor-in-chief
E. G. Sharoyan, associate editor
A. A. Hakhumyan
H. H. Vartapetian
E. M. Ghazaryan
A. O. Melikyan
A. R. Mkrтчyan
D. H. Sarkisyan
Yu. S. Chilingaryan
A. A. Mirzakhanyan, executive secretary

Адрес редакции: Республика Армения, 375019,
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Խմբագրության հասցեն՝ Հայաստանի Հանրապետություն,
375019, Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24-գ:

Editorial address: 24-g, Marshal Bagramyan Av.,
Yerevan, 375019, Republic of Armenia.

КАНОНИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ И КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ

В.М. МЫХИТАРЯН[†]

Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак

[†]e-mail: vm@ipr.sci.am

(Поступила в редакцию 1 февраля 2012 г.)

Рассмотрены канонические (не параметрические) решения вариационной задачи для интегральных функционалов и приведены канонические решения вариационных задач механики в пространствах Минковского. На основе объединения вариационных принципов наименьшего действия, потока и гиперпотока получены канонически-инвариантные уравнения для переменной энергии-импульса. Из этих уравнений выведены уравнения для функции действия и волновой функции как общее решение объединенной вариационной задачи механики. Уравнения применимы для описания разных типов частиц и взаимодействий и обобщены в рамках подходов общей теории относительности.

1. Введение

Как известно, поведение механической системы определяется минимизацией действия S :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) dt \rightarrow \min, \quad (1)$$

функционала от лагранжиана L – выражения, составленного из описывающих систему кинематических переменных и динамических констант [1]. Подход сводит описание и формулировку физических закономерностей к описанию только кинематическими переменными – обобщенной координатой и ее производными.

С введением понятия обобщенной координаты и скорости появилась возможность универсальным образом описать разнородные физические явления и выявить поведение системы с помощью одинаковых уравнений для обобщенной координаты и скорости. Вариационный принцип позволил в самом общем виде сформулировать пространственно-временные свойства системы и ввел в физику одно из основных понятий – действие.

Различные физические задачи формулируются как вариационные задачи для интегрального функционала от векторных функций (полей). Например, задача нахождения траектории L перемещения тела в заданном поле сил $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ из точки \mathbf{r}_1 в точку \mathbf{r}_2 (рис. 1а), при котором совершается минимальная работа A :

$$A = \int_{L(r_1 \rightarrow r_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \rightarrow \min. \quad (2)$$

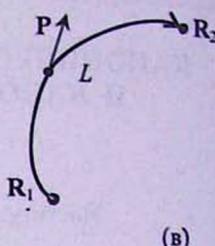
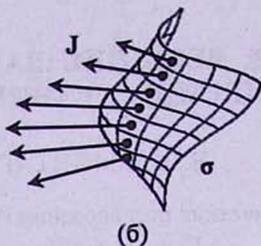
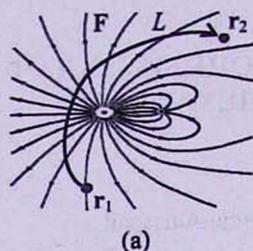


Рис.1. Вариационные задачи нахождения траектории (а), поверхности (б) и четырехмерной кривой (в).

Другой пример – задача нахождения поверхности σ , ограниченной замкнутой кривой L с заданной плотностью тока (жидкости) $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ (рис.1б), при которой обеспечивается минимальный поток K :

$$K = \iint_{\sigma} \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \min. \quad (3)$$

Обобщением первого примера является принцип наименьшего действия в механике. Если система описывается четырехмерным обобщенным импульсом $\mathbf{P} = (\varepsilon, \mathbf{p})$ и координатой $\mathbf{R} = (\tau, \mathbf{r})$, то траектория движения L из точки \mathbf{R}_1 в точку \mathbf{R}_2 (рис.1в) минимизирует действие S :

$$S = - \int_{L(\mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}_2)} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{L(\tau_1, \mathbf{r}_1) \rightarrow (\tau_2, \mathbf{r}_2)} (\varepsilon d\tau - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}) \rightarrow \min. \quad (4)$$

Известный путь нахождения общего аналитического решения вариационной задачи был предложен Эйлером, а затем (в дополненном и более общем виде) Лагранжем. Решение Эйлера основывалось на возможности представления интегрального функционала в параметрической форме. Например, в последнем примере действие можно представить в виде

$$\begin{aligned} S &= - \int_{\mathbf{R}_1}^{\mathbf{R}_2} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{R} = - \int_{\mathbf{R}_1}^{\mathbf{R}_2} (\varepsilon d\tau - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}) = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\varepsilon d\tau - \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right) d\tau = \\ &= - \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\varepsilon - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p}) d\tau = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} L d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

После этого можно использовать решение Эйлера–Лагранжа для получения уравнения движения Ньютона в параметрической форме:

$$\left(\frac{d}{d\tau} \right) (\partial L / \partial \boldsymbol{\beta}) = \partial L / \partial \mathbf{r}, \quad (6)$$

где в параметрическом представлении три переменные $\mathbf{r} = (x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ находятся из системы трех дифференциальных уравнений второго порядка.

Введение Гамильтоном понятия канонических переменных и создание новой (гамильтоновой) механики потребовали как новое представление действия, так и новое решение вариационной задачи. Канонические переменные, наравне с кинематическими переменными – обобщенной координатой и скоростью, включали и динамические переменные – обобщенный импульс и энергию. Введенные Гамильтоном и названные его именем выражение энергии

$$H = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - L(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad (7)$$

и канонические уравнения

$$\mathbf{v} = \partial H / \partial \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{r}} = -\partial H / \partial \mathbf{r} \quad (8)$$

стали основой построения гамильтоновой, а затем и квантовой механики.

На основе вариационного принципа уравнения Гамильтона (8) можно вывести минимизацией действия – определенного в канонических переменных функционала

$$S = -\int (H dt - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}), \quad (9)$$

независимо варьируя координаты и импульс [1]. При этом оказывается, что в рамках преобразований канонические переменные являются канонически сопряженными и поэтому взаимно представляемыми [2]. Эти свойства особенно важны как в релятивистских подходах, когда время и пространственные координаты выступают равноправно, так и в квантовой механике, когда формулируется равноценность координатного и импульсного представлений гамильтониана или волнового уравнения.

С математической точки зрения, введение канонических (динамических) переменных – это способ представления системы s дифференциальных уравнений Эйлера–Лагранжа второго порядка в виде системы $2s$ линейных дифференциальных уравнений первого порядка [1].

Вся нерелятивистская квантовая механика была построена на основе всего лишь одной канонической переменной H , причем производная по времени входит в первой степени, а по пространственным координатам – во второй. Такое положение в нерелятивистской квантовой механике возникло вследствие нарушения каноничности в представлении гамильтониана системы. Конкретно, вместо канонического представления гамильтониана в виде (7),

$$\hat{H} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - L(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = -\mathbf{v} \cdot \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) - L(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (10)$$

в нерелятивистской квантовой механике оно преобразовано в выражение

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{p}} + L(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \frac{mv^2}{2} + U(t, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(t, \mathbf{r}) = \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(t, \mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + U(t, \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (11)$$

и представлено оператором второго порядка. При этом одна из канонических переменных (скорость) исключена из выражения некорректной заменой другой канонической переменной импульса.

В подходе Гамильтона вариационная задача для действия формулируется на основе не параметризованного интегрального функционала от четырехмерной векторной функции (4) и для решения этой вариационной задачи известными способами приходится прибегать к некоему параметрическому представлению переменных и функционала (5).

Пуанкаре и позже Минковский, для сохранения равноправия канонических переменных и инвариантного представления действия, в качестве параметра использовали четырехмерный интервал [3]

$$S = - \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{R} = - \int_{R_1}^{R_2} (\varepsilon d\tau - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}) = - \int_{R_1}^{R_2} \left(\varepsilon \frac{d\tau}{ds} - \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) ds = - \int_{s_1}^{s_2} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}) ds = - \int_{s_1}^{s_2} I ds. \quad (12)$$

В этом случае решение Эйлера–Лагранжа для четырехмерных уравнений движения Пуанкаре в параметрической форме имеет вид

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial I}{\partial \mathbf{V}} = \frac{\partial I}{\partial \mathbf{R}}, \quad (13)$$

где четыре переменные $\mathbf{R} = (\tau(s), x(s), y(s), z(s))$ в параметрическом представлении находятся из системы четырех дифференциальных уравнений второго порядка. Хотя и развитый Пуанкаре подход сохраняет равноправие четырех координат, а действие имеет ковариантное представление, однако отсутствуют явные уравнения для канонических переменных, а их однозначное восстановление из параметрических представлений невозможно.

Процедуры исключения параметра из решений вариационной задачи составили основную часть последующего развития вариационного исчисления и привели к созданию теории Гамильтона–Якоби, интегральных инвариантов (Гильберт, Пуанкаре, Картан) и других [4]. Суть развитых подходов заключалась в нахождении таких алгебраических, дифференциальных или интегральных соотношений, чтобы, несмотря на параметрическое представление переменных, сами соотношения не зависели бы от параметра (были бы инвариантны относительно параметрического представления).

Построение (восстановление) поля для функционала из семейства экстремалей в параметрическом представлении на основе интегрального инварианта было предложено Гильбертом в 1900–1906 гг. [4]. Свойствами интеграла Гильберта обусловлено, в частности, равенство нулю всех скобок Лагранжа, составленных с помощью отвечающих этому семейству экстремалей канонических переменных. Методы построения поля для функционала на основе интегральных инвариантов и их применение для описания физических систем нашли свое последующее развитие в работах Пуанкаре и Картана [5]. Хотя эти подходы являются всего лишь неявным выражением свойств канонических переменных системы, на сегодня коммутационные соотношения и интегральные

инварианты являются одним из основных методов построения современной физической теории.

Если же рассматривать, например, уравнения Максвелла как решение вариационной задачи, то данное решение имеет канонический вид — не содержит ни дополнительных параметров, ни скорости, ни других полных производных. Такого же характера и уравнение непрерывности, и волновое уравнение. И если такие канонически заданные уравнения должны быть получены из решения вариационной задачи, то возникает очевидная необходимость или найти поле из параметрического представления семейства экстремалей исключением параметра, или найти путь для канонического (непараметрического) решения хотя бы для данной конкретной вариационной задачи.

И действительно, именно для представления уравнений Максвелла как решение вариационной задачи используется непосредственный путь решения данной конкретной вариационной задачи [6], отличный от параметрического подхода Эйлера—Лагранжа. Здесь вариация и необходимое условие минимума интегрального функционала представлены в непосредственной (канонической) форме с помощью применения интегральной теоремы Гаусса — без применения каких либо процедур параметризации и, соответственно, без применения решения Эйлера—Лагранжа.

Если бы имелось общее каноническое решение, не содержащее никакого дополнительного параметра и не использующее одну из переменных в качестве параметра, то параметризация стала бы не принципиальной необходимостью для решения самой вариационной задачи, а всего лишь затребованным математическим оформлением конечного результата — как удобное представление решения для описания конкретных систем. Тогда и потребность в каких-то параметрических инвариантах или коммутационных соотношениях полностью отпала бы, так как каноническое решение уже не содержит ничего другого, кроме независимо и равноправно представленных канонических переменных.

Параметрическое представление функционалов и решение Эйлера—Лагранжа, конечно, являются весьма универсальным и мощным средством для решения очень широкого круга математических и физических задач, но необходимо также иметь каноническое решение канонически сформулированной вариационной задачи. Речь идет о решении, где явно и равноправно фигурируют только канонические переменные (без лишних параметров или выделения одной из переменных в качестве параметра), что позволило бы единым образом сформулировать вариационные принципы и решение задач физики в канонически-инвариантной форме.

2. Каноническое решение вариационных задач

Пусть задан интегральный функционал вида $S = \int_{L(R_1 \rightarrow R_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$, определенный на n -мерной кривой L , в области $\mathbf{R} \subset D \subset \mathbb{R}^n$, от векторной функции $\mathbf{F}(\mathbf{R}) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mathbf{F}(\mathbf{R}) = (f_1(\mathbf{R}), f_2(\mathbf{R}), \dots, f_n(\mathbf{R}))$. Вариация функционала

δS для кривых L' и L'' , соединяющих точки R_1 и R_2 (рис.2а,б,в), есть

$$\delta S = \int_{L'(R_1 \rightarrow R_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} - \int_{L''(R_1 \rightarrow R_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_{L'(R_1 \rightarrow R_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} + \int_{L''(R_2 \rightarrow R_1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_{L=L' \cup L''} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}, \quad (14)$$

где L — замкнутая кривая, составленная из кривых L' и L'' .

Из обобщенной теоремы Стокса для многомерного криволинейного интеграла по замкнутой кривой L и ограниченной этой кривой произвольной n -мерной поверхности $\delta\sigma$ имеем

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \oint_L f_i dx_i = \frac{1}{2} \iint_{\delta\sigma} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right) d\sigma_{ik}. \quad (15)$$

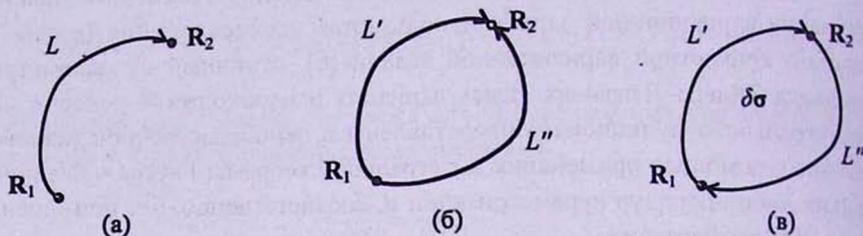


Рис.2. Кривая L (а), на которой определен функционал, кривые L' и L'' (б), на которых определена вариация функционала, и замкнутая кривая $L = L' + L''$ (в), на которой вариация функционала представляется как интеграл по замкнутой кривой L .

Таким образом, вариация криволинейного интегрального функционала равна поверхностному интегралу по замкнутой кривой. Это позволяет определить вариацию криволинейного интеграла вблизи произвольно выбранной точки R заданной (искомой) кривой (рис.3а).

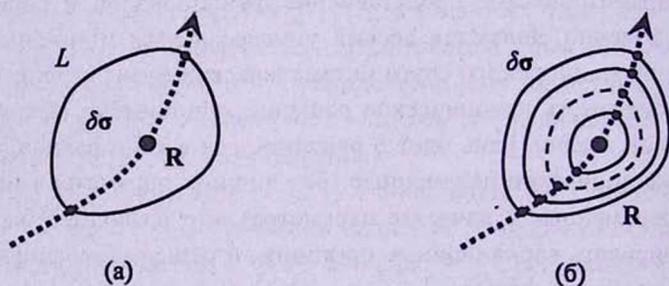


Рис.3. Кривая L (а) и последовательность замкнутых кривых (б) вокруг точки R .

Рассматривая последовательность замкнутых кривых L вокруг точки R (рис.3б), участки которых стремятся к рассматриваемой точке R , в пределе имеем

$$\delta S = \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \frac{1}{2} \iint_{\delta\sigma} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right) d\sigma_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right) \delta\sigma_{ik}, \quad (16)$$

что является определением ротора. Как видим, в качестве переменной варьирования для данного функционала выступает площадь $\delta\sigma$, а линейная по $\delta\sigma$ часть вариации определяется последним выражением в (16). Равенство нулю компонент ротора и есть уравнение искомой кривой, на которой функционал от криволинейного интеграла имеет экстремум. Эти, в общем случае, тензорные соотношения запишем в виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \times \mathbf{F} \right] = 0. \quad (17)$$

Для интегральных функционалов в n -мерных пространствах с элементом интегрирования dx_1, dx_2, \dots, dx_n ($i, j = 1, 2, \dots, n$) более высокого порядка k ($n \geq k \geq 1$), применимы соответствующие интегральные теоремы. Например, вариация n -мерного интегрального функционала по $n-1$ многообразиям $d\Sigma = (dx_2 dx_3 dx_4 \dots dx_n, dx_1 dx_3 dx_4 \dots dx_n, dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1})$

$$\begin{aligned} D &= \int_{\Sigma} \dots \int_{\Sigma}^{n-1} \mathbf{F} \cdot d\Sigma = \min; \\ \delta D &= \int_{\Sigma'} \dots \int_{\Sigma'}^{n-1} \mathbf{F} \cdot d\Sigma - \int_{\Sigma'} \dots \int_{\Sigma'}^{n-1} \mathbf{F} \cdot d\Sigma = \int_{\Sigma'} \dots \int_{\Sigma'}^{n-1} \mathbf{F} \cdot d\Sigma + \int_{-\Sigma'} \dots \int_{-\Sigma'}^{n-1} \mathbf{F} \cdot d\Sigma = \\ &= \int_{\Sigma} \dots \int_{\Sigma}^{n-1} \mathbf{F} \cdot d\Sigma = \int_{\delta\Omega} \dots \int_{\delta\Omega}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} d\Omega \end{aligned} \quad (18)$$

равна, по теореме Гаусса, интегралу от дивергенции по n -мерному объему $d\Omega = dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n$. Тогда решение вариационной задачи для данного функционала выразится уравнением искомой кривой в виде

$$\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{R} = \partial f_i / \partial x_i = 0. \quad (19)$$

В остальных случаях для многомерных интегральных функционалов не представляется возможным предложить какой-то общий вид интегральных теорем. В зависимости от меры и четности пространства они имеют различные формулировки и представления.

Для наглядности, применим полученные результаты для решения приведенных в начале работы первых двух примеров (2) и (3). Для первого имеем $\text{rot } \mathbf{F} = 0$. Движение по этим траекториям образует семейство экстремалей (поле)

$$\mathbf{F} = \partial\varphi / \partial \mathbf{r}, \quad (20)$$

где $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ — произвольная скалярная функция (скалярный потенциал). Например, для силового поля \mathbf{F} , задаваемого выражением

$$F = (ay^3 + by, cx^3 + dx, 0); \Rightarrow \operatorname{rot} F = (0, 0, 3cx^2 - 3ay^2 + d - b),$$

искомые траектории определяются уравнением

$$x^2 - (a/c)y^2 = (b-d)/3c.$$

Отметим, что этим определяются точки (кривые) равновесия. Семейство тех же точек (или кривых) можно задать и в виде системы уравнений

$$ay^3 + by = \partial\phi/\partial x, \quad cx^3 + dx = \partial\phi/\partial x, \quad 0 = \partial\phi/\partial z.$$

Для второго примера (3) имеем $\operatorname{div} J = 0$, а искомые поверхности образуют семейство экстремалей

$$J = \operatorname{rot} A, \quad (21)$$

где $A = A(\mathbf{r})$ — произвольная векторная функция (векторный потенциал). Например, для $J = J_0(x^3/a^2 - x, y^2/a^3 - y, z^3/c^2 - z)$ получаем $\operatorname{div} J = 3J_0 \times (x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1) = 0$. Искомые поверхности $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Это уравнение определяет участки (поверхности) ламинарного (безвихревого) течения. Семейство кривых (или точек) задается в виде системы уравнений $(x^3/a^2 - x, y^3/b^2 - y, z^3/c^2 - z) = \operatorname{rot} A$.

3. Интегральные функционалы в пространствах Минковского

Ввиду важности физических приложений, более детально рассмотрим интегральные функционалы в четырехмерных пространствах Минковского. В этих пространствах возможны физически значимые четыре рода интегрирования [6].

1) Интеграл по кривой в 4-пространстве (криволинейный интеграл). Элементом интегрирования является элемент длины $dR = \{dx^i\} = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$. Дифференциальная форма интегрирования dS представляется как скалярное (ковариантное) произведение 4-векторной функции $A(R)$ и 4-вектора dR :

$$\begin{aligned} dS &= A \cdot dR = A^0 dx^0 - A^1 dx^1 - A^2 dx^2 - A^3 dx^3 = A_i dx^i = A^i dx_i, \\ S &= \int A \cdot dR = \int (A^0 dx^0 - A^1 dx^1 - A^2 dx^2 - A^3 dx^3) = \int A_i dx^i = \int A^i dx_i. \end{aligned} \quad (22)$$

2) Интеграл по поверхности (двумерной) в 4-пространстве (поверхностный интеграл). В 4-пространстве элемент поверхности определяется антисимметричным тензором второго ранга $df^{ik} = dx^i dx^k - dx^k dx^i$. Можно построить тензор $d\sigma^{ik} = (1/2) \epsilon^{iklm} df_{lm}$, дуальный тензору df^{ik} , у которого 6 значимых элементов:

$$d\sigma^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & dx^1 dx^0 & dx^2 dx^0 & dx^3 dx^0 \\ -dx^0 dx^1 & 0 & -dx^2 dx^1 & dx^3 dx^1 \\ -dx^0 dx^2 & dx^1 dx^2 & 0 & -dx^3 dx^2 \\ -dx^0 dx^3 & -dx^1 dx^3 & dx^2 dx^3 & 0 \end{pmatrix} = (dp, da), \quad (23)$$

который можно представить в виде полярного $dp = (dx^0 dx^1, dx^2 dx^0, dx^3 dx^0)$ и аксиального $da = (dx^2 dx^1, dx^3 dx^1, dx^3 dx^2)$ дуальных векторов. Дифференциальная форма интегрирования dD для антисимметричного тензора F^{ik} представляется как ковариантное произведение

$$dD = F^{ik} d\sigma_{ik}; \quad D = \iint F^{ik} d\sigma_{ik}. \quad (24)$$

3) Интеграл по гиперповерхности, т.е. по трехмерному многообразию. Элементом интегрирования является элемент гиперповерхности (3-объема) $dS = dS^i = \{dx^i dx^{j'} dx^{k''}\} = (dx^1 dx^2 dx^3, dx^0 dx^2 dx^3, dx^0 dx^1 dx^3, dx^0 dx^1 dx^2)$. Дифференциальная форма интегрирования dS представляется как скалярное (ковариантное) произведение 4-векторной функции $A(R)$ и 4-вектора dS :

$$d\Phi = A \cdot dS = A^0 dS^0 - A^1 dS^1 - A^2 dS^2 - A^3 dS^3 = A^i dS_i = A_i dS^i, \\ \Phi = \iiint A \cdot dS = \iiint (A^0 dS^0 - A^1 dS^1 - A^2 dS^2 - A^3 dS^3) = \iiint A^i dS_i = \iiint A_i dS^i \quad (25)$$

4) Для интеграла по 4-объему элементом интегрирования является скаляр $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$.

Соответственно, существуют интегральные теоремы преобразования между этими интегралами.

а) Интеграл по четырехмерной замкнутой кривой преобразуется в интеграл по охватываемой ею поверхности путем замены $dx^i \rightarrow df^{ik} \partial/\partial x^k$:

$$\oint A \cdot dR = \oint A_i dx^i = \iint \frac{\partial A_i}{\partial x^k} df^{ki} = \frac{1}{2} \iint \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) df^{ik}, \quad (26)$$

что является обобщением теоремы Стокса.

б) Интеграл по четырехмерной замкнутой поверхности преобразуется в интеграл по охватываемой ею гиперповерхности (3-объему) путем замены элемента интегрирования $d\sigma^{ik} \rightarrow dS_i \partial/\partial x^k - dS_k \partial/\partial x^i$:

$$\frac{1}{2} \oiint F^{ik} d\sigma_{ik} = \frac{1}{2} \iiint \left(dS_i \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^i} \right) = \iiint \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} dS_i. \quad (27)$$

в) Интеграл по замкнутой гиперповерхности (3-объему) можно преобразовать в интеграл по заключенному в ней 4-объему путем замены элемента интегрирования $dS^i \rightarrow d\Omega \partial/\partial x^i$:

$$\oiint A \cdot dS = \oiint A^i dS_i = \iiint \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega = \iiint \frac{\partial A}{\partial R} d\Omega, \quad (28)$$

что является обобщением теоремы Гаусса.

Для физических приложений можно сформулировать вариационные задачи на основе перечисленных интегральных функционалов для четырехмерного вектора (4-вектор энергии-импульса P) и антисимметричного 4-тензора (антисимметричные 4-тензоры электромагнитного поля $F^{ik} = [(\partial/\partial R) \times A] = (E, -B)$ и момента $M^{ik} = [R \times P] = \{x_i p_k - x_k p_i\} = (T, -M)$).

4. Каноническое решение вариационных задач механики

А. Принцип наименьшего действия. Выражение действия по Гамильтону представляется в виде

$$S = - \int_{R_1}^{R_2} P \cdot dR = - \int_{(\tau_1, r_1)}^{(\tau_2, r_2)} (\epsilon d\tau - p \cdot dr) \rightarrow \min, \quad (29)$$

где переменная $P = (\epsilon, p)$ – четырехмерный вектор энергии-импульса. Варьируя, в соответствии с (14) имеем

$$\delta S = - \int_{L'(R_1 \rightarrow R_2)} P \cdot dR + \int_{L''(R_1 \rightarrow R_2)} P \cdot dR = - \left(\int_{L'(R_1 \rightarrow R_2)} P \cdot dR + \int_{L''(R_1 \rightarrow R_2)} P \cdot dR \right) = - \oint_L P \cdot dR. \quad (30)$$

Из обобщенной теоремы Стокса (26) для четырехмерного интеграла по замкнутой кривой $L = L' + L''$ с длиной l и поверхностью $\delta\sigma$ имеем

$$\delta S = \oint_L P_i dx^i = \iint_{\delta\sigma} \frac{\partial P_k}{\partial x^i} d\sigma^{ik} = \frac{1}{2} \iint_{\delta\sigma} \left(\frac{\partial P_k}{\partial x^i} - \frac{\partial P_i}{\partial x^k} \right) d\sigma^{ik}. \quad (31)$$

Вариация действия δS на истинных траекториях равна нулю, поэтому для точек истинной траектории имеем

$$\delta S = \oint_L P_i dx^i = \frac{1}{2} \iint_{\delta\sigma} \left(\frac{\partial P_k}{\partial x^i} - \frac{\partial P_i}{\partial x^k} \right) d\sigma^{ik} = \left(\frac{\partial P_k}{\partial x^i} - \frac{\partial P_i}{\partial x^k} \right) d\sigma^{ik} = 0. \quad (32)$$

Из независимости компонент вариации $d\sigma^{ik}$ следует равенство нулю каждого слагаемого выражения, которое составлено из компонент четырехмерного ротора и соответствующего $d\sigma^{ik}$. Равенство нулю компонент четырехмерного ротора обобщенного импульса можно выразить в виде векторных соотношений

$$\left[\frac{\partial}{\partial R} \times P \right] = \begin{cases} \partial p / \partial \tau + \partial \epsilon / \partial \tau = 0, \\ -\text{rot } p = 0. \end{cases} \quad (33)$$

Отметим, что в данном случае вариационная задача сформулирована без параметризации интегрального функционала и решение представлено в виде системы шести дифференциальных уравнений первого порядка. Соответствующей параметризацией этих уравнений или параметризацией интегрального функционала получатся уравнения Эйлера–Лагранжа – система трех дифференциальных уравнений второго порядка.

Таким образом, вместо канонизации уравнений Эйлера–Лагранжа введением новых переменных энергии и импульса, сформулировано и найдено решение вариационной задачи в канонической форме. То есть определен интегральный функционал и получено решение непосредственно для канонических переменных импульса и энергии.

Для физической задачи это принципиально важно, так как представление параметрических уравнений Эйлера–Лагранжа второго порядка системой уравнений первого порядка не является явным и однозначным. Из всех представлений уравнения Эйлера–Лагранжа в виде системы уравнений первого порядка именно полученное явное представление (33) является каноническим.

Б. Принцип наименьшего потока (тензорные поля $F^{ik} = (\mathbf{E}, -\mathbf{B})$ и момент $M^{ik} = [\mathbf{R} \times \mathbf{P}]$. Если в четырехмерном пространстве система описывается полем, заданным антисимметричным тензором $F^{ik} = (\mathbf{E}, -\mathbf{B})$, то поток поля через поверхность заданной замкнутой кривой L , в соответствии с (24), описывается интегралом

$$D = \iint F^{ik} d\sigma_{ik} \rightarrow \min. \quad (34)$$

Вариационная задача нахождения поверхности, которая минимизирует функционал (34), решается представлением вариации интегрального функционала по четырехмерной замкнутой поверхности S интегралом по охватываемой ею гиперповерхности Σ (3-объему) в соответствии с (27):

$$\begin{aligned} \delta D &= \frac{1}{2} \iint_{S'} F^{ik} d\sigma_{ik} - \frac{1}{2} \iint_{S''} F^{ik} d\sigma_{ik} = \frac{1}{2} \iint_{S'} F^{ik} d\sigma_{ik} + \frac{1}{2} \iint_{-S''} F^{ik} d\sigma_{ik} = \\ &= \frac{1}{2} \oiint_{\Sigma} F^{ik} d\sigma_{ik} = \iiint_{\Sigma} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} d\Sigma, \end{aligned} \quad (35)$$

что при представлении поля дуальными векторами $F^{ik} = (\mathbf{E}, -\mathbf{B})$ выражается уравнениями поля

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{r}} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \tau} - \text{rot } \mathbf{B} = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Если антисимметричный тензор F^{ik} представлен компонентами четырехмерного ротора от вектора \mathbf{P} в виде $F^{ik} = \partial P^k / \partial x_i - \partial P^i / \partial x_k$ и поля представлены как

$$\mathbf{E} = -\partial \mathbf{p} / \partial \tau - \partial \varepsilon / \partial \mathbf{r}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{p}, \quad (37)$$

$$\partial \mathbf{E} / \partial \tau = \text{rot } \mathbf{B}, \quad \partial \mathbf{E} / \partial \mathbf{r} = 0, \quad \partial \mathbf{B} / \partial \tau = -\text{rot } \mathbf{E}, \quad \partial \mathbf{B} / \partial \mathbf{r} = 0, \quad (38)$$

и для обобщенного импульса получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \mathbf{r}^2} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} \right), \\ \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}^2} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} \right). \end{aligned} \quad (39)$$

В. Принцип наименьшего гиперпотока (переноса, перераспределения по трехмерным объемам). Уравнение непрерывности является каноническим решением вариационной задачи при нахождении минимального потока четырехмерного вектора энергии-импульса P через гиперповерхность — гиперпотока:

$$\begin{aligned} \Phi &= \iiint_{\Sigma'} P \cdot d\Sigma \rightarrow \min, \\ \delta\Phi &= \iiint_{\Sigma'} P \cdot d\Sigma - \iiint_{\Sigma'} P \cdot d\Sigma = \iiint_{\Sigma'} P \cdot d\Sigma + \iiint_{-\Sigma'} P \cdot d\Sigma = \\ &= \iiint_{\Sigma} P \cdot d\Sigma = \iiint \frac{\partial P_i}{\partial x_i} d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

что в виде уравнения непрерывности для обобщенного импульса

$$\partial P / \partial R = \partial \varepsilon / \partial t + \operatorname{div} p = 0 \quad (41)$$

выражает закон сохранения энергии, заряда и калибровочное соотношение Лоренца для потенциалов поля.

5. Представление систем в кинематическом и динамическом пространствах

Суммируя вышеизложенное и результаты работы [8], представление механических систем в общем случае можно описать следующим образом.

Физические системы представляются в координатном $R = (\tau, r)$ и импульсном $Q = (\zeta, q)$ (кинематическом и динамическом) пространствах и описываются кинематическими и динамическими (каноническими) переменными (R, V, \dots) и (Q, U, \dots) с размерностями [см] и [эрг с/см], соответственно. Эти пространства должны быть взаимно представляемы и равноценны при описании свойств физической системы.

Более общее представление с помощью метрического тензора имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\zeta^2 - dq^2 = \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} g_{ik} dx^i dx^k = I^2(x) \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} (d\tau^2 - dr^2), \\ g_{00} &= I^2(x); \quad (g_{ik} \rightarrow I^2(x) g_{ik}). \end{aligned} \quad (42)$$

Действие является линейным элементом в импульсном пространстве, а принцип минимума действия сводится к минимизации интервала в импульсном пространстве.

В сущности, характерной физической величиной является инвариант системы $I(x)$, отражающий пространственно-временные свойства (кривизну пространства в данной точке $R = I(x)$) для рассматриваемой частицы. Здесь, как и в общей теории относительности, задача сводится к свойствам геометрии пространства-времени и свойств отображения (координатного представления) импульсного пространства (метрическое соответствие).

Такое соответствие является метрическим, кинематическим соответствием. Сопряженность пространств должна выражаться также соответствием диф-

ференциальных (вариационных) свойств линий (траекторий), поверхностей и гиперповерхностей, описывающих динамические характеристики физической системы в состоянии движения. Такое соответствие является дифференциальным, динамическим соответствием.

Соответственно, представление физической системы в кинематическом и динамическом пространствах должно в полной мере отражать метрическое и дифференциальное соответствие кинематического и динамического пространств.

Как было показано выше, физические и геометрические свойства этих сопряженных пространств в полной мере могут быть описаны в рамках вариационных подходов.

6. Объединение вариационных задач механики. Уравнения действия и волновой функции

Физические характеристики системы и соответствие кинематических и динамических переменных одной и той же системе (частице) выражаются в виде допустимых взаимных представлений и их свойствами, обусловленными свойствами группы допустимых отображений пространств. И если такое представление переменных задано, то определение пространственно-временных свойств означает задание свойств представления (переменных) на линии, поверхности, гиперповерхности и в объеме как свойства одной и той же физической системы (частицы).

Эти фундаментальные пространственно-временные свойства отображений для физической системы должны быть объединены и рассмотрены в целом. Также вариационные задачи или соответствующие дифференциальные уравнения, выражающие свойства представления на линии, поверхности, гиперповерхности и в объеме, должны быть сформулированы для одной и той же переменной. Обычно это переменная обобщенного импульса системы P в координатном представлении, а перечисленные выше свойства формулируются для него в пространстве координат.

В силу вышесказанного, уравнения (33), (39), (41) должны решаться совместно при условии инвариантности представления обобщенного импульса P [8]. Так как условие равенства нулю четырехмерного ротора обобщенного импульса P (33) означает, что подинтегральное выражение (29) является полным дифференциалом, то обобщенный импульс можно представить в виде градиента функции действия в виде $P = (\epsilon, \mathbf{p}) = (-\partial S/\partial \tau, \partial S/\partial \mathbf{r}) = -\partial S/\partial x$. Тогда вместо системы уравнений (33), (39), (41) получим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{r}^2} = 0, \quad (43)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}\right)^2 = \epsilon^2 - \mathbf{p}^2 = I^2 = \frac{(mc^2 + q\varphi)^2 - (q\mathbf{A})^2}{c^2} = \text{inv} \quad (44)$$

— волновое уравнение для действия и условие инвариантности представления вектора энергии-импульса. Последнее и есть уравнение Гамильтона-Якоби для действия, которое в паре с волновым уравнением составляют уравнения эйконала.

Уравнения (43) и (44) выражают волновое свойство переменной энергии-импульса — фундаментальное физическое свойство системы, не зависящее от конкретного вида представления обобщенного импульса и характера взаимодействия. Уравнение (43) определяет фундаментальный класс решений, описывающих волновое поведение любых физических систем при произвольно заданном взаимодействии (44).

Отметим, что физически значимым являются только производные функции действия, а не сама функция, и поэтому нахождение самой функции или детализация свойств дальше первых производных не имеет какого-либо смысла.

Трудность совместного решения уравнений (43) и (44) в том, что из весьма широкого класса решений волнового уравнения (43) нужно отбирать те, которые удовлетворяют условию инвариантности (44). Было бы намного удобнее, если бы условие инвариантности представления непосредственно отражалось в волновом уравнении и сузило бы класс решений волнового уравнения до таких пределов, чтобы они однозначно удовлетворяли условию инвариантности представления (44).

Для этого разделим уравнение (44) на размерную константу \hbar^2 и составим сумму с волновым уравнением (43). Тогда получим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{r}^2} + \frac{1}{\hbar^2} \left(\left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right) = \frac{I^2}{\hbar^2}. \quad (45)$$

Умножая уравнение на функцию $A \exp(iS/\hbar)$ или на $B \exp(-iS/\hbar)$, его можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 e^{iS/\hbar}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 e^{iS/\hbar}}{\partial \mathbf{r}^2} = -\frac{I^2}{\hbar^2} e^{iS/\hbar} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 e^{-iS/\hbar}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 e^{-iS/\hbar}}{\partial \mathbf{r}^2} = -\frac{I^2}{\hbar^2} e^{-iS/\hbar}. \quad (46)$$

Это означает, что для функции

$$\Psi = A e^{iS/\hbar} + B e^{-iS/\hbar}, \quad (47)$$

обычно называемой волновой функцией, имеет место уравнение

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{r}^2} = -\frac{I^2}{\hbar^2} \Psi. \quad (48)$$

Как видим, волновое уравнение для волновой функции Ψ уже содержит выражение, позволяющее явным образом учитывать дополнительное условие (44). Подстановка решений волнового уравнения Ψ в условие инвариантности градиента (44) даст уравнение искомых кривых (траекторий), на которых решения волнового уравнения обеспечивают условие инвариантности.

В таком представлении уравнения явно указывают, что если уравнение (48) решается методом разделения переменных (Ψ представляется в виде произведения функций независимых переменных), то это соответствует решению уравнения (43) представлением S в виде суммы функций независимых переменных.

Если выбрать волновую функцию в виде $\Psi = A \exp(iS/\hbar)$, то есть $S = -i\hbar \ln \Psi + S_0$, то уравнения (43) и (44) представятся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} &= -\frac{I^2}{\hbar^2} \Psi, \\ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)^2 &= -\frac{I^2}{\hbar^2} \Psi^2. \end{aligned} \quad (49)$$

Такое представление является тождественным с точки зрения определения обобщенного импульса на основе функции действия S и волновой функции Ψ . Так как

$$P = -\frac{\partial S}{\partial R}, \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = -\frac{\partial S}{\partial \tau}, \quad p = \frac{\partial S}{\partial r}, \quad (50)$$

то из математического тождества

$$\frac{\partial S}{\partial R} = \frac{1}{A \exp(iS/\hbar)} \left(A \exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right) \frac{\partial S}{\partial R} \right) = -\frac{i\hbar}{A \exp(iS/\hbar)} \frac{\partial}{\partial R} \left(A \exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right) \right) = -i\hbar \frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad (51)$$

следует, что

$$\begin{aligned} P &= -i\hbar \frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R} (-i\hbar \ln \Psi) = \frac{\partial S}{\partial R}, \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon &= i\hbar \frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial S}{\partial \tau}, \quad p = -i\hbar \frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial S}{\partial r}. \end{aligned} \quad (52)$$

Волновую функцию Ψ всегда можно представить также в виде

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{2\sqrt{AB} \sqrt{A/B} \exp(iS/\hbar) + \sqrt{B/A} \exp(-iS/\hbar)}{2} = \\ &= C \frac{\exp(i(S-S_0)/\hbar) + \exp(-i(S-S_0)/\hbar)}{2} = C \cos\left(\frac{S-S_0}{\hbar}\right), \quad S_0 = i\hbar \ln \sqrt{A/B}, \end{aligned} \quad (53)$$

где несущественную константу C можно опустить. При выборе решений для волновой функции в виде $\Psi = \cos((S-S_0)/\hbar)$ (т.е. $S = \hbar \arccos \Psi + S_0$ или $S = \hbar \arcsin \Psi + S_0$) уравнения (48) представляются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} &= -\frac{I^2}{\hbar^2} \Psi, \\ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)^2 &= -\frac{I^2}{\hbar^2} (\Psi^2 - 1). \end{aligned} \quad (54)$$



Удобство решения волнового уравнения в комплексном представлении сохраняется, а аналитическое продолжение функций в комплексной области можно представить в виде

$$S = \pm \hbar \arccos \Psi + S_0 \equiv -i \hbar \ln \left(\Psi \pm i \sqrt{1 - \Psi^2} \right) + S_0,$$

$$\Psi = \cos \left(\frac{S - S_0}{\hbar} \right) \equiv \frac{\exp(i(S - S_0)/\hbar) + \exp(-i(S - S_0)/\hbar)}{2}. \quad (55)$$

Приведем также ковариантное представление уравнений (49):

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g_{ik} \sqrt{-g} \frac{\partial S}{\partial x^k} \right) = 0; \\ g_{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = I^2; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g_{ik} \sqrt{-g} \frac{\partial \Psi}{\partial x^k} \right) = -\frac{I^2}{\hbar^2} \Psi; \\ g_{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^k} = -\frac{I^2}{\hbar^2} \Psi^2. \end{cases} \quad (56)$$

Теперь, если обобщить эти уравнения в рамках подходов ОТО, можно представить всякую систему как результат преобразования исходного (не возмущенного) импульсного пространства

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g_{ik} \sqrt{-g} \frac{\partial S}{\partial x^k} \right) = 0; \\ g_{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = 0, \pm 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g_{ik} \sqrt{-g} \frac{\partial \Psi}{\partial x^k} \right) = -(0, \pm 1) \Psi; \\ g_{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^k} = -(0, \pm 1) \Psi^2. \end{cases} \quad (57)$$

Соответственно, при представлении метрического тензора в виде $g_{i,k} = T_{i,j} T_{j,k} / R^2 = T_{i,j} T_{j,k} / I^2$, где $T_{i,j}$ — матрица инвариантного представления обобщенного импульса из группы Пуанкаре, получим уравнения (43) и (49). С другой стороны, исходя из более общих соображений симметрии и конкретных свойств представления импульсного пространства метрическим тензором или матрицей группы Пуанкаре, из уравнений (57) можно найти допустимые для физической системы представления инвариантов и взаимодействий.

7. Заключение

Предложены канонические решения вариационной задачи для интегральных функционалов и приведены канонические решения вариационных задач механики в пространствах Минковского. На основе объединения вариационных принципов наименьшего действия, потока и гиперпотока получены канонически-инвариантные уравнения для переменной энергии-импульса. Из этих уравнений выведены уравнения для функции действия и волновой функции как общее решение объединенной вариационной задачи механики. Уравнения применимы для разных типов частиц и взаимодействий и обобщены в рамках подходов общей теории относительности.

Автор выражает благодарность профессору А.О. Оганесяну, доценту А.Г. Хачатрян и А.А. Мхитаряну из Ереванского государственного университета и

профессору Н.Б. Енгибаряну из Института математики НАН РА за ценные замечания и полезные обсуждения математических основ данной работы. Автор признателен профессору В.О. Чалтыкяну из Института физических исследований НАН РА за полезные обсуждения и помощь в ходе подготовки рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Д. Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика. М., Физматлит, 2004.
2. Д. тер Хаар. Основы гамильтоновой механики. М., Наука, 1974.
3. К.Ланцош. Вариационные принципы механики. М., Мир, 1965.
4. Н.И.Ахиезер. Лекции по вариационному исчислению. М., ГИТТЛ, 1955.
5. Э.Картан. Интегральные инварианты. М., ГИТТЛ, 1940.
6. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. М., Физматлит, 2003.
7. Проблемы Гильберта. Сборник под общей редакцией П.С.Александрова. М., Наука, 1969.
8. В.М.Мыхитарян. Изв. НАН Армении, Физика, 47, 379 (2012).

ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՎԱՆՈՆԻԿ ԼՈՒՇՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ՎԱՆՈՆԻԿ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Վ.Մ. ՄԵԽԻԹԱՐՅԱՆ

Դիտարկված են ինտեգրալ ֆունկցիոնալների վարիացիոն խնդիրների կանոնիկ (ոչ պարամետրիկ) լուծումները և ներկայացված են Մինկովսկու տարածություններում մեխանիկայի վարիացիոն խնդիրների կանոնիկ լուծումները: Փոքրագույն գործողության, հոսքի և հիփերհոսքի վարիացիոն խնդիրների միավորման հիման վրա ստացվել են կանոնիկ-ինվարիանտ հավասարումներ էներգիա-իմպուլս փոփոխականի համար: Այդ հավասարումներից ընդհանուր տեսքով դուրս են բերվել գործողության և ալիքային ֆունկցիաների հավասարումները՝ որպես մեխանիկայի վարացիոն խնդիրների համատեղ լուծում: Հավասարումները կիրառելի են տարատեսակ մասնիկների ու փոխազդեցությունների նկարագրման համար և ընդհանրացված են ընդհանուր հարաբերակալության մոտեցումների շրջանակներում:

CANONICAL SOLUTIONS OF VARIATIONAL PROBLEMS AND CANONICAL EQUATIONS OF MECHANICS

V.M. MEKHITARIAN

The canonical (non-parametric) solutions of the variational problem for integral functionals are considered and the canonical solutions of variational problems of mechanics in Minkowski spaces are derived. By combining the variational principles of least action, flow, and hyperflow canonically invariant equations for the energy-momentum variable are obtained. From these equations the equations for the action and wave functions as a general solution of the combined variational problems of mechanics are derived. These equations are applicable for describing different types of particles and interactions and are summarized within the approach of general relativity.

УДК 548.732

ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, ПЕРЕСЕКАЮЩЕЙ ВОЛНОВОД С ДИСПЕРСНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ЕГО ОСИ

Э.Д. ГАЗАЗЯН[†], Г.Г. ОКСУЗЯН, А.Д. ТЕР-ПОГОСЯН

Национальная научная лаборатория им. А.И. Алиханяна, Ереван

[†]e-mail: edmon@mail.erphi.am

(Поступила в редакцию 18 июля 2012 г.)

Развита теория переходного излучения заряда, пересекающего заполненный кусочно-однородным диэлектриком волновод перпендикулярно его оси. Рассмотрены случаи пролета заряда между двумя дисперсными пластинами, а также тонкими импедансными металлическими пластинами с толщиной порядка скин-слоя.

В настоящей работе развивается теория переходного излучения заряженной частицы, пересекающей регулярный волновод, заполненный кусочно-однородной диэлектрической дисперсной средой, перпендикулярно его оси. Метод решения является обобщением метода, развитого в работе [1], где волновод был заполнен однородным изотропным диэлектриком, и преследует цель получения общих выражений для полей и интенсивностей переходного излучения в случае дисперсной кусочно-неоднородной среды.

В первой части работы рассмотрен случай, когда волновод заполнен однородной диэлектрической дисперсной средой, и, в отличие от работы [1], выражения для энергии переходного излучения уже будут содержать члены, явно отвечающие за поглощение энергии в дисперсной среде. Во второй части рассмотрено переходное излучение в случае, когда заряженная частица пересекает волновод перпендикулярно его оси между двумя дисперсными пластинами. В конце статьи будет рассмотрен предельный случай тонких металлических пластин с конечной проводимостью.

Решения первой части являются базовыми для второй части, поэтому считаем обоснованным подробное изложение первой части работы.

Часть 1. Пусть регулярный волновод с образующими, параллельными оси z , заполнен средой с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon(\omega)$ и магнитной проницаемостью $\mu = \mu(\omega)$. Заряженная частица с зарядом q движется в плоскости $z = 0$ равномерно и прямолинейно со скоростью $v_x = v$, пересекая при своем движении стенки волновода в точках $(x_1, y_0, 0)$ и $(x_2, y_0, 0)$. Плотности заряда и тока имеют следующий вид:

$$\rho = q\delta(x-vt)\delta(y-y_0)\delta(z), \quad j_x = \rho v. \quad (1)$$

При пересечении зарядом стенок волновода возникают условия для возбуждения как E -типов волн, так и H -типов. Запишем волновые уравнения для потенциальных функций E_z и H_z :

$$\Delta E_z - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \frac{\partial \rho}{\partial z}, \quad (2a)$$

$$\Delta H_z - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial j_x}{\partial y}. \quad (26)$$

Разложим потенциальные функции E_z и H_z , а также плотности заряда ρ и тока j_x в интегралы Фурье по частоте:

$$(E_z, H_z) = \int_{-\infty}^{\infty} (E_{z\omega}, H_{z\omega}) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3a)$$

$$(\rho, j_x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\rho_\omega, j_{x\omega}) e^{i\omega t} d\omega. \quad (36)$$

Подставим разложения (3) в (2):

$$\Delta E_{z\omega} + \varepsilon\mu(\omega^2/c^2)E_{z\omega} = (4\pi/\varepsilon)\partial\rho_\omega/\partial z, \quad (4a)$$

$$\Delta H_{z\omega} + \varepsilon\mu(\omega^2/c^2)H_{z\omega} = (4\pi/c)\partial j_{x\omega}/\partial y. \quad (46)$$

Решения уравнений (4а,б) будем искать в виде разложений

$$E_{z\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(z)\psi_n(x, y), \quad (5a)$$

$$H_{z\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z)\hat{\psi}_n(x, y) \quad (56)$$

по собственным функциям поперечного сечения волновода $\psi_n(x, y)$ и $\hat{\psi}_n(x, y)$, соответствующим собственным значениям χ_n и $\hat{\chi}_n$ и удовлетворяющим двумерным волновым уравнениям $\Delta\psi_n(x, y) + \chi_n^2\psi_n(x, y) = 0$ и $\Delta\hat{\psi}_n(x, y) + \hat{\chi}_n^2\hat{\psi}_n(x, y) = 0$, а также граничным условиям на контуре поперечного сечения $\psi_n|_{\Sigma} = 0$ и $\partial\hat{\psi}_n/\partial n|_{\Sigma} = 0$ (n — нормаль к контуру поперечного сечения волновода Σ). Здесь и далее, если специально не оговорено, под индексом n подразумеваются всегда два индекса: m и p .

Подставим разложения (5) в (4), умножим обе части уравнений на $\psi_m(x, y)$ и $\hat{\psi}_m(x, y)$, соответственно, проинтегрируем их по поперечному сечению волновода и, пользуясь свойствами ортонормированности собственных функций, получим из (4):

$$\gamma_n^2 E_n(z) + \frac{\partial^2 E_n(z)}{\partial z^2} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \int \psi_n(x, y) \frac{\partial \rho_\omega}{\partial z} dx dy, \quad (6a)$$

$$\hat{\gamma}_n^2 H_n(z) + \frac{\partial^2 H_n(z)}{\partial z^2} = \frac{4\pi}{c} \int \hat{\psi}_n(x, y) \frac{\partial j_{x\omega}}{\partial y} dx dy, \quad (66)$$

где $\gamma_n^2 = \epsilon\mu\omega^2/c^2 - \chi_n^2$, $\hat{\gamma}_n^2 = \epsilon\mu\omega^2/c^2 - \hat{\chi}_n^2$. Подставим в (6) обратные преобразования Фурье для ρ_ω и $j_{x\omega}$:

$$\rho_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho e^{-i\omega t} dt = \frac{q}{2\pi|v|} e^{-\frac{i\omega x}{v}} \delta(y - y_0) \delta(z), \quad (7a)$$

$$j_{x\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j_x e^{-i\omega t} dt = \frac{q \operatorname{sgn} v}{2\pi} e^{-\frac{i\omega x}{v}} \delta(y - y_0) \delta(z), \quad (76)$$

и, используя выражения (7), перепишем (6) в следующем виде:

$$\gamma_n^2 E_n(z) + \frac{\partial^2 E_n(z)}{\partial z^2} = \frac{2q}{\epsilon|v|} a_n \delta'(z), \quad (6в)$$

$$\hat{\gamma}_n^2 H_n(z) + \frac{\partial^2 H_n(z)}{\partial z^2} = \frac{2q \operatorname{sgn} v}{c} b_n \delta(z), \quad (6г)$$

где обозначено

$$a_n = \int_{x_1}^{x_2} \psi_n(x, y_0) e^{-\frac{i\omega x}{v}} dx, \quad (8a)$$

$$b_n = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\hat{\psi}_n(x, y_0)}{\partial y_0} e^{-\frac{i\omega x}{v}} dx. \quad (86)$$

Для решения уравнений (6в,г) представим функции $\delta(z)$ и $\delta'(z)$ в следующем виде:

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu z} d\mu, \quad (9a)$$

$$\delta'(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu e^{i\mu z} d\mu. \quad (96)$$

Подставив выражения (9а,б) в (6в,г), получим решения для функций $E_n(z)$ и $H_n(z)$:

$$E_n(z) = -\frac{iq}{\pi\epsilon|v|} a_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu e^{i\mu z}}{\mu^2 - \gamma_n^2} d\mu, \quad (10a)$$

$$H_n(z) = -\frac{q \operatorname{sgn} v}{\pi c} b_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu z}}{\mu^2 - \hat{\gamma}_n^2} d\mu. \quad (106)$$

Интегралы в (10а,б) имеют следующие решения (см. [1,2]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu e^{i\mu z}}{\mu^2 - \gamma_n^2} d\mu = \frac{i\pi \operatorname{sgn} z}{2} \exp(-i\gamma_n |z|), \quad (11a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu z}}{\mu^2 - \hat{\gamma}_n^2} d\mu = \frac{i\pi}{2\hat{\gamma}_n} \exp(-i\hat{\gamma}_n |z|). \quad (11б)$$

Отсюда

$$E_n(z) = (q \operatorname{sgn} z / 2|v|)(a_n/\epsilon) \exp(-i\gamma_n |z|), \quad (10в)$$

$$H_n(z) = (iq \operatorname{sgn} v / 2c)(b_n/\hat{\gamma}_n) \exp(-i\hat{\gamma}_n |z|). \quad (10г)$$

С помощью вышеприведенных формул (3а), (5а,б), (10в,г) можно записать окончательные выражения для потенциальных функций:

$$E_z(x, y, z, t) = \sum_n \psi_n(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} F_n(\omega) e^{i(\omega t - \gamma_n |z|)} d\omega, \quad (12a)$$

$$H_z(x, y, z, t) = \sum_n \hat{\psi}_n(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}_n(\omega) e^{i(\omega t - \hat{\gamma}_n |z|)} d\omega, \quad (12б)$$

где

$$F_n(\omega) \equiv (q \operatorname{sgn} z / 2|v|)(a_n/\epsilon), \quad (13a)$$

$$\hat{F}_n(\omega) \equiv -(iq \operatorname{sgn} v / 2c)(b_n/\hat{\gamma}_n). \quad (13б)$$

Энергию переходного излучения для обоих типов излученных волн найдем как поток вектора Пойнтинга через поперечное сечение волновода за время излучения:

$$W = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int [EH]_z dx dy. \quad (14)$$

Вместо E и H подставим реальные поля [3]:

$$E = (E + E^*)/2, \quad H = (H + H^*)/2, \quad (15)$$

и тогда

$$W = \frac{c}{16\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int (E_x H_y^* - E_y H_x^* + E_x^* H_y - E_y^* H_x) dx dy. \quad (14a)$$

Из-за симметрии задачи по обе стороны от пролета заряда будет излучаться одинаковая энергия, поэтому достаточно определить энергию, излученную зарядом в сторону положительных z . Выразим поперечные компоненты полей через продольные E_z и H_z (12а,б) (см., например, [3]) и подставим в формулу (14а). При вычислении (14а) возникает необходимость перейти в про-

цессе интегрирования по частоте в пределах от $-\infty$ до ∞ к пределам от 0 до ∞ . При этом необходимо воспользоваться известными свойствами функций $\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega)$ и $\mu(-\omega) = \mu^*(\omega)$ [3]. Наличие дисперсии среды приводит к поглощению, и это выражается тем, что постоянная распространения будет комплексной величиной. Для волн, распространяющихся в сторону положительных z , мы выбираем отрицательную комплексную составляющую $\gamma_n = \gamma'_n - i\gamma''_n$, чтобы поля были затухающими, а не растущими, кроме того, при замене ω на $-\omega$ должно выполняться условие $\gamma_n(-\omega) = -\gamma_n^*(\omega)$, чтобы не менялось направление волн. С учетом приведенных замечаний можно из (14а) получить выражения для полной энергии переходного излучения в область $z > 0$ для E -волн (W^E) и H -волн (W^H) как суммы по всем распространяющимся модам:

$$W^E = \sum_n W_n^E, \quad W^H = \sum_n W_n^H, \quad (16)$$

где

$$W_n^E = \frac{1}{4\chi_n^2} \int_0^\infty \omega (\varepsilon\gamma_n^* + \varepsilon^*\gamma_n) |F_n(\omega)|^2 e^{-2\gamma_n z} d\omega, \quad (17a)$$

$$W_n^H = \frac{1}{4\hat{\chi}_n^2} \int_0^\infty \omega (\mu\hat{\gamma}_n^* + \mu^*\hat{\gamma}_n) |\hat{F}_n(\omega)|^2 e^{-2\hat{\gamma}_n z} d\omega. \quad (17б)$$

В формулах (17а,б) интегрирование уже ведется по положительным частотам, а точнее, по частотам, для которых выполняются условия $\text{Re}\gamma_n > 0$ и $\text{Re}\hat{\gamma}_n > 0$. Мы получили, как и следовало ожидать, экспоненциальное затухание энергии переходного излучения $\exp(-2\gamma_n z) = \exp(-2\text{Im}\gamma_n z)$ в зависимости от расстояния. Выражения в скобках в (17а,б) являются реальными величинами:

$$\varepsilon\gamma_n^* + \varepsilon^*\gamma_n = 2(\varepsilon'\gamma'_n + \varepsilon''\gamma''_n), \quad \mu\hat{\gamma}_n^* + \mu^*\hat{\gamma}_n = 2(\mu'\hat{\gamma}'_n + \mu''\hat{\gamma}''_n). \quad (18)$$

Подставим в (17а,б) выражения (13а,б):

$$\begin{aligned} W_n^E &= \frac{q^2}{16v^2\chi_n^2} \int_0^\infty \omega \frac{\varepsilon\gamma_n^* + \varepsilon^*\gamma_n}{|\varepsilon|^2} |a_n|^2 e^{-2\text{Im}\gamma_n z} d\omega = \\ &= \frac{q^2}{8v^2\chi_n^2 v^2} \int_0^\infty \omega \text{Re}(\gamma_n/\varepsilon) |a_n|^2 e^{-2\text{Im}\gamma_n z} d\omega, \end{aligned} \quad (17в)$$

$$\begin{aligned} W_n^H &= \frac{q^2}{16c^2\hat{\chi}_n^2} \int_0^\infty \omega \left(\frac{\mu\hat{\gamma}_n^* + \mu^*\hat{\gamma}_n}{|\hat{\gamma}_n|^2} \right) |b_n|^2 e^{-2\text{Im}\hat{\gamma}_n z} d\omega = \\ &= \frac{q^2}{8c^2\hat{\chi}_n^2} \int_0^\infty \omega \text{Re}(\mu/\hat{\gamma}_n) |b_n|^2 e^{-2\text{Im}\hat{\gamma}_n z} d\omega. \end{aligned} \quad (17г)$$

Рассчитаем величины a_n и b_n (см. [1]) для случая прямоугольного волновода, стенки которого совпадают с плоскостями $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, где a и b – размеры волновода по осям x и y , соответственно, и пересечения

зарядом стенок волновода в точках $(0, y_0, 0)$ и $(a, y_0, 0)$. Запишем ортонормированные собственные функции и собственные значения для прямоугольного волновода:

$$\Psi_n = \Psi_{mn}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y, \quad (19a)$$

$$\hat{\Psi}_n = \hat{\Psi}_{mn}(x, y) = \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos \frac{\pi m}{a} x \cos \frac{\pi n}{b} y \quad (\epsilon_j = 2, j \neq 0, \epsilon_0 = 1); \quad (19b)$$

$$\chi_n = \hat{\chi}_n = \chi_{mn} = \pi \sqrt{m^2/a^2 + n^2/b^2}.$$

Подставим выражения для собственных функций (19a,б) в (8a,б):

$$a_{mn} = -2i \frac{\pi m}{a} \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin \frac{\pi n y_0}{b} \exp \left[-i \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a} \right) \frac{a}{2} \right] \frac{\sin \left[\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a} \right) \frac{a}{2} \right]}{\frac{\omega^2}{v^2} - \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2}, \quad (20a)$$

$$b_{mn} = \frac{2\pi n}{vb} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \sin \frac{\pi n y_0}{b} \exp \left[-i \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a} \right) \frac{a}{2} \right] \frac{\omega \sin \left[\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a} \right) \frac{a}{2} \right]}{\frac{\omega^2}{v^2} - \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2}. \quad (20b)$$

Как видно из (20б), моды H -волн с индексом $n=0$ будут отсутствовать, поэтому в (20б) можно заменить ϵ_n на двойку. Подставим (20a,б) в (17в,г) и получим окончательные выражения для энергии переходного излучения E - и H -типов волн с индексами mn в прямоугольном волноводе:

$$W_{mn}^E = 2 \left(\frac{\pi m}{av} \right)^2 T_{mn} \int_{\text{Re} \dot{\gamma}_{mn} > 0} \omega \text{Re} \left(\frac{\dot{\gamma}_{mn}}{\epsilon} \right) \frac{\sin^2 \left[\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a} \right) \frac{a}{2} \right]}{\left[\frac{\omega^2}{v^2} - \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \right]^2} e^{-2\text{Im} \dot{\gamma}_{mn} z} d\omega, \quad (21a)$$

$$W_{mn}^H = \epsilon_m \left(\frac{\pi n}{cvb} \right)^2 T_{mn} \int_{\text{Re} \dot{\gamma}_{mn} > 0} \omega^3 \text{Re} \left(\frac{\mu}{\dot{\gamma}_{mn}} \right) \frac{\sin^2 \left[\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a} \right) \frac{a}{2} \right]}{\left[\frac{\omega^2}{v^2} - \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \right]^2} e^{-2\text{Im} \dot{\gamma}_{mn} z} d\omega, \quad (21b)$$

где $T_{mn} \equiv (q^2 \sin^2(\pi n y_0/b)) / ab \chi_{mn}^2$. Как видим, энергия излучения обоих типов волн пропорциональна $\sin^2(\pi n y_0/b)$, поэтому в переходном излучении будут отсутствовать моды обоих типов волн со вторым индексом n , для которых выполняется равенство величины $\pi y_0/b$ минимальному целому числу, а также моды с кратными таким n вторыми индексами. Так, если заряд пересекает стенки

волновода $x=a$ и $x=b$ в точках $y_0 = b/2$, то будут отсутствовать моды обоих типов волн с четными индексами $n=2, 4, 6, \dots$ (отсутствие мод H_{m0} отмечено выше).

Часть 2. Перейдем к случаю кусочно-однородного заполнения волновода, когда он заполнен следующим образом: область $-d_1 < z < d_1$ (область I) заполнена средой с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ_1 и μ_1 , области $d_1 < z < d_2$ (область II) и $(-d_2 < z < -d_1)$ заполнены средой с ϵ_2, μ_2 , области $z > d_2$ (область III) и $z < -d_2$ — средой с ϵ_3, μ_3 . Плотности заряда и тока те же, что и в части I (см. (1)). Наличие границ $z = \pm d_1, \pm d_2$ приводит к отражению и преломлению спектральных компонент излученных волн на каждой из границ. Пользуясь результатами части I, запишем решения для спектральной составляющей потенциальной функции $E_n(z)$ (10в):

в области I ($-d_1 < z < d_1$):

$$E_n^{(1)}(z) = \frac{q}{2\epsilon_1 |v|} \left(a_n \operatorname{sgn} z e^{-\gamma_{n1}|z|} + A_{n1}^+ e^{-\gamma_{n1}z} + A_{n1}^- e^{\gamma_{n1}z} \right), \quad (22a)$$

в области II ($d_1 < z < d_2$):

$$E_n^{(2)}(z) = \frac{q}{2\epsilon_2 |v|} \left(A_{n2}^+ e^{-\gamma_{n2}z} + A_{n2}^- e^{\gamma_{n2}z} \right), \quad (22б)$$

в области III ($z > d_2$):

$$E_n^{(3)}(z) = (q/2\epsilon_3 |v|) A_{n3} e^{-\gamma_{n3}z}. \quad (22в)$$

Граничные условия состоят в непрерывности нормальной составляющей электрической индукции и тангенциальной составляющей электрической напряженности на границах $z = d_1$ и $z = d_2$:

$$\epsilon_1 E_{zn}^{(1)} = \epsilon_2 E_{zn}^{(2)} \Big|_{z=d_1}, \quad \frac{\partial E_{zn}^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial E_{zn}^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=d_1}, \quad (23a)$$

$$\epsilon_2 E_{zn}^{(2)} = \epsilon_3 E_{zn}^{(3)} \Big|_{z=d_2}, \quad \frac{\partial E_{zn}^{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial E_{zn}^{(3)}}{\partial z} \Big|_{z=d_2}. \quad (23б)$$

Поскольку задача симметрична относительно траектории пролета заряда, то достаточно решить ее для положительных z , а для восстановления решений в сторону отрицательных z достаточно воспользоваться равенствами

$$E(z) = -E(-z), \quad (24a)$$

$$H(z) = H(-z), \quad (24б)$$

следующими из уравнений Максвелла [3]. Подставим решения (22a-в) в граничные условия (23a,б) и, пользуясь также (24a), получим систему уравнений, решения которой имеют вид

$$A_{n1}^{\pm} = \mp \frac{a_n}{4M_n^E} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_2 \gamma_{n3}}{\varepsilon_3 \gamma_{n2}} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon_1 \gamma_{n2}}{\varepsilon_2 \gamma_{n1}} \right) e^{i\gamma_{n2} \Delta} + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{\varepsilon_2 \gamma_{n3}}{\varepsilon_3 \gamma_{n2}} \right) \left(1 + \frac{\varepsilon_1 \gamma_{n2}}{\varepsilon_2 \gamma_{n1}} \right) e^{-i\gamma_{n2} \Delta} \right] e^{-i\gamma_{n1} d_1}, \quad (25a)$$

$$A_{n2}^{\pm} = \frac{a_n}{2M_n^E} \left(1 \pm \frac{\varepsilon_2 \gamma_{n3}}{\varepsilon_3 \gamma_{n2}} \right) e^{\pm i\gamma_{n2} d_2}, \quad (25b)$$

$$A_{n3} = \frac{a_n}{M_n^E} e^{i\gamma_{n3} d_2}. \quad (25b)$$

В выражениях (25) обозначено $\Delta = d_2 - d_1$ и

$$M_n^E = p_n + i(\varepsilon_2 \gamma_{n3} / \varepsilon_3 \gamma_{n2}) q_n, \quad (26)$$

где

$$p_n = \cos \gamma_{n1} d_1 \cos \gamma_{n2} \Delta - \frac{\varepsilon_1 \gamma_{n2}}{\varepsilon_2 \gamma_{n1}} \sin \gamma_{n1} d_1 \sin \gamma_{n2} \Delta,$$

$$q_n = \cos \gamma_{n1} d_1 \sin \gamma_{n2} \Delta + \frac{\varepsilon_1 \gamma_{n2}}{\varepsilon_2 \gamma_{n1}} \sin \gamma_{n1} d_1 \cos \gamma_{n2} \Delta.$$

Нас будет интересовать излучение, вышедшее за пределы пластины в область $z > d_2$ (область III). Запишем продольную составляющую поля переходного излучения в этой области с помощью (12a):

$$E_z^{(3)}(x, y, z, t) = \sum_n \psi_n(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} F_n^{(3)}(\omega) e^{i(\omega t - \gamma_{n3} z)} d\omega, \quad (27)$$

где $F_n^{(3)}$ будет равняться, согласно (22в) и (25в),

$$F_n^{(3)} = \frac{q}{2|\nu| \varepsilon_3} A_{n3} = \frac{q}{2|\nu| \varepsilon_3} \frac{a_n}{M_n^E} e^{i\gamma_{n3} d_2}. \quad (27a)$$

С помощью формул (17a) и (27a) без труда определим энергию E -волн, излученных в область $z > d_2$:

$$W_n^{E(3)} = \frac{q^2}{8\nu^2 \chi_n^2} \int_0^{\infty} \omega \operatorname{Re} \left(\frac{\gamma_{n3}}{\varepsilon_3} \right) \frac{|a_n|^2}{|M_n^E|^2} e^{-2 \operatorname{Im} \gamma_{n3} z} d\omega. \quad (28)$$

Перейдем к излученным H -волнам. Решения для продольной составляющей магнитного поля ищем в следующем виде:

в области I ($-d_1 < z < d_1$):

$$H_n^{(1)}(z) = -\frac{i q \operatorname{sgn} \nu}{2c \gamma_{n1}} \left(b_n e^{-i\gamma_{n1}|z|} + B_{n1}^+ e^{-i\gamma_{n1} z} + B_{n1}^- e^{i\gamma_{n1} z} \right), \quad (29a)$$

в области II ($d_1 < z < d_2$):

$$H_n^{(2)}(z) = -\frac{iq \operatorname{sgn} v}{2c\gamma_{n2}} (B_{n2}^+ e^{-i\gamma_{n2}z} + B_{n2}^- e^{i\gamma_{n2}z}), \quad (29б)$$

в области III ($z > d_2$):

$$H_n^{(3)}(z) = -\frac{iq \operatorname{sgn} v}{2c\gamma_{n3}} B_{n3} e^{-i\gamma_{n3}z}. \quad (29в)$$

Граничные условия на границах $z = d_1$ и $z = d_2$ состоят теперь в непрерывности нормальной составляющей магнитной индукции и тангенциальной составляющей магнитной напряженности:

$$\mu_1 H_{zn}^{(1)} = \mu_2 H_{zn}^{(2)} \Big|_{z=d_1}, \quad \frac{\partial H_{zn}^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial H_{zn}^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=d_1}, \quad (30а)$$

$$\mu_2 H_{zn}^{(2)} = \mu_3 H_{zn}^{(3)} \Big|_{z=d_2}, \quad \frac{\partial H_{zn}^{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial H_{zn}^{(3)}}{\partial z} \Big|_{z=d_2}. \quad (30б)$$

Решения системы уравнений, получающихся после подстановки полей (29а-в) в граничные условия (30), имеют вид

$$B_{n1}^+ = B_{n1}^- = -\frac{b_n}{4M_n^H} \left[\left(1 + \frac{\mu_3 \gamma_{n2}}{\mu_2 \gamma_{n3}} \right) \left(1 - \frac{\mu_2 \gamma_{n1}}{\mu_1 \gamma_{n2}} \right) e^{i\gamma_{n2}\Delta} + \left(1 - \frac{\mu_3 \gamma_{n2}}{\mu_2 \gamma_{n3}} \right) \left(1 + \frac{\mu_2 \gamma_{n1}}{\mu_1 \gamma_{n2}} \right) e^{-i\gamma_{n2}\Delta} \right] e^{-i\gamma_{n1}d_1}, \quad (31а)$$

$$B_{n2}^\pm = \pm (b_n / 2M_n^H) (1 \pm \epsilon_3 \gamma_{n2} / \epsilon_2 \gamma_{n3}) e^{\pm i\gamma_{n2}d_2}, \quad (31б)$$

$$B_{n3} = (b_n / M_n^H) e^{i\gamma_{n3}d_2}. \quad (31в)$$

В (31) обозначено

$$M_n^H = \hat{p}_n + i(\mu_3 \gamma_{n2} / \mu_2 \gamma_{n3}) \hat{q}_n, \quad (32)$$

где

$$\hat{p}_n = \cos \gamma_{n1} d_1 \cos \gamma_{n2} \Delta - (\mu_2 \gamma_{n1} / \mu_1 \gamma_{n2}) \sin \gamma_{n1} d_1 \sin \gamma_{n2} \Delta,$$

$$\hat{q}_n = \cos \gamma_{n1} d_1 \sin \gamma_{n2} \Delta + (\mu_2 \gamma_{n1} / \mu_1 \gamma_{n2}) \sin \gamma_{n1} d_1 \cos \gamma_{n2} \Delta.$$

Продольную составляющую магнитного поля переходного излучения в области $z > d_2$ записываем с помощью (12б):

$$H_z^{(3)}(x, y, z, t) = \sum_n \hat{\Psi}_n(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}_n^{(3)}(\omega) e^{i(\omega t - \gamma_{n3} z)} d\omega, \quad (33)$$

где $\hat{F}_n^{(3)}$ будет равняться, согласно (29в) и (31в),

$$\hat{F}_n^{(3)} = (-iq \operatorname{sgn} v/2c) B_{n3}/\gamma_{n3} = (-iq \operatorname{sgn} v/2c) (b_n/\gamma_{n3} M_n^H) e^{i\gamma_{n3} d_2}. \quad (33a)$$

С помощью (176) и (33a) нетрудно определить энергию H -волн, излученных в область $z > d_2$:

$$W_n^{H(3)} = \frac{q^2}{8c^2 \chi_n^2} \int_{\operatorname{Re} \gamma_{n3} > 0} \omega \operatorname{Re} \left(\frac{\mu_3}{\gamma_{n3}} \right) \frac{|b_n|^2}{|M_n^H|^2} e^{-2\operatorname{Im} \gamma_{n3} z} d\omega. \quad (34)$$

(В формулах (31-34) для облегчения чтения опущены шапочки над γ_n .) В случае прямоугольного волновода подставим в (28) и (34) значения a_{mn} и b_{mn} из (20а) и (20б):

$$2W_{mn}^{E(3)} = 2 \left(\frac{\pi m}{va} \right)^2 T_{mn} \int_{\operatorname{Re} \gamma_{m3} > 0} \frac{\omega}{|M_{mn}^H|^2} \operatorname{Re} \left(\frac{\gamma_{m3}}{\epsilon_3} \right) \frac{\sin^2 \left[\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a} \right) \frac{a}{2} \right]}{\left[\frac{\omega^2}{v^2} - \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \right]^2} e^{-2\operatorname{Im} \gamma_{m3} z} d\omega \quad (35a)$$

$$W_{mn}^{H(3)} = \epsilon_m \left(\frac{\pi m}{cvb} \right)^2 T_{mn} \int_{\operatorname{Re} \gamma_{m3} > 0} \frac{\omega^3}{|M_{mn}^H|^2} \operatorname{Re} \left(\frac{\mu_3}{\gamma_{m3}} \right) \frac{\sin^2 \left[\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a} \right) \frac{a}{2} \right]}{\left[\frac{\omega^2}{v^2} - \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \right]^2} e^{-2\operatorname{Im} \gamma_{m3} z} d\omega. \quad (35b)$$

С помощью выражений (35а,б) мы имеем возможность определения энергии переходного излучения, выходящего за пределы пластины в область III ($z > d_2$) при произвольных комплексных значениях ϵ и μ во всех трех областях I-III. Как видно из этих выражений, если среда в области $z > d_2$ поглощающая, то из-за наличия экспоненты $e^{-2\operatorname{Im} \gamma_{m3} z}$, где z — расстояние от границы $z = d_2$ до точки наблюдения, происходит убывание энергии, излученной зарядом, по экспоненциальному закону.

Сравнивая выражения (35а,б) со случаем однородного заполнения волновода (21а,б), можно заметить, что они отличаются только множителем $1/|M^{E,H}|^2$ (здесь и далее опускаем для краткости индексы mn). Действительно, если в (35а,б) подставить $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$, то $|M^{E,H}|^2$ обращаются в единицу, т.е. величина $1/|M^{E,H}|^2$ представляет собой отношение энергии излучения на данной частоте при наличии пластины к энергии излучения на той же частоте в случае однородного заполнения волновода во всей его длине. Поэтому представляется важным исследование этой величины для обоих типов излученных волн.

Исследуем $|M^{E,H}|^2$ для практически легко реализуемого случая, когда среда в области I и III — вакуум, а заряд пересекает волновод посередине между двумя поглощающими диэлектрическими пластинами, то есть $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1$,

$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$, $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon$, $\gamma_2 = \sqrt{\varepsilon\omega^2/c^2 - \chi^2} \equiv \gamma$ и $\gamma_1 = \gamma_3 = \sqrt{\omega^2/c^2 - \chi^2} \equiv G$. В этом случае, как отмечалось выше, экспоненциального затухания излучения, прошедшего через пластину в область $z > d_2$, не будет ($\text{Im } \gamma_3 = \text{Im } G = 0$), но будет уменьшение энергии переходного излучения, прошедшего в область $z > d_2$, и это уменьшение будет обусловлено, в основном, множителем $1/|M^{E,H}|^2$. Поэтому представляет интерес исследование этого множителя, ответственного как за сложные интерференционные процессы, имеющие место при отражении и преломлении на границах пластины $z = d_1$ и $z = d_2$, так и за поглощение внутри самой пластины. Запишем диэлектрическую проницаемость пластины в самом общем виде:

$$\varepsilon = |\varepsilon| e^{i\varphi_\varepsilon}, \quad |\varepsilon| = (|\varepsilon'|^2 + |\varepsilon''|^2)^{1/2}, \quad \varphi_\varepsilon = \arctan(\varepsilon''/\varepsilon'), \quad (36a)$$

откуда следует, что

$$\gamma = |\gamma| e^{i\varphi_\gamma}, \quad |\gamma| = \left[\left(\varepsilon' \frac{\omega^2}{c^2} - \chi^2 \right)^2 + \left(\varepsilon'' \frac{\omega^2}{c^2} \right)^2 \right]^{1/4}, \quad \varphi_\gamma = \frac{1}{2} \arctan \frac{\varepsilon''}{\varepsilon' - c^2 \chi^2 / \omega^2}. \quad (36b)$$

(Следует помнить, что мнимая составляющая ε'' будет отрицательной, так как мы выбрали временную зависимость в виде $e^{i\omega t}$ [3].) Подставив общие соображения (36a) и (36b) в (35a,б), заменив $d_1 = d$, найдем величины $|M^{E,H}|^2$:

$$|M^E|^2 = (1/4)(f_1^E e^{2\text{Im } \gamma \Delta} + f_2^E e^{-2\text{Im } \gamma \Delta} + f_3^E), \quad (37a)$$

$$\begin{aligned} f_{1,2}^E &= 1 + \frac{|\varepsilon|G}{|\gamma|} \left(\frac{|\varepsilon|G}{|\gamma|} \mp 2 \cos(\varphi_\varepsilon - \varphi_\gamma) \right) \cos^2 Gd + \frac{|\gamma|}{|\varepsilon|G} \left(\frac{|\gamma|}{|\varepsilon|G} \mp 2 \cos(\varphi_\varepsilon - \varphi_\gamma) \right) \sin^2 Gd + \\ &+ \left[\sin 2(\varphi_\varepsilon - \varphi_\gamma) \mp \left(\frac{|\gamma|}{|\varepsilon|G} + \frac{|\varepsilon|G}{|\gamma|} \right) \sin(\varphi_\varepsilon - \varphi_\gamma) \right] \sin 2Gd, \\ f_3^E &= 2 \left\{ \left[1 - \frac{|\varepsilon|^2 G^2}{|\gamma|^2} \cos^2 Gd - \frac{|\gamma|^2}{|\varepsilon|^2 G^2} \sin^2 Gd - \sin 2Gd \sin 2(\varphi_\varepsilon - \varphi_\gamma) \right] \cos 2 \text{Re } \gamma \Delta - \right. \\ &\left. - \left[2 \left(\frac{|\varepsilon|G}{|\gamma|} \cos^2 Gd - \frac{|\gamma|}{|\varepsilon|G} \sin^2 Gd \right) \sin(\varphi_\varepsilon - \varphi_\gamma) - \left(\frac{|\varepsilon|G}{|\gamma|} - \frac{|\gamma|}{|\varepsilon|G} \right) \sin 2Gd \cos(\varphi_\varepsilon - \varphi_\gamma) \right] \times \right. \\ &\left. \times \sin 2 \text{Re } \gamma \Delta \right\}; \end{aligned}$$

$$|M^H|^2 = \frac{1}{4}(f_1^H e^{2\text{Im } \gamma \Delta} + f_2^H e^{-2\text{Im } \gamma \Delta} + f_3^H), \quad (37b)$$

$$\begin{aligned} f_{1,2}^H &= 1 + \frac{|\gamma|}{G} \left(\frac{|\gamma|}{G} \mp 2 \cos \varphi_\gamma \right) \cos^2 Gd + \frac{G}{|\gamma|} \left(\frac{G}{|\gamma|} \mp 2 \cos \varphi_\gamma \right) \sin^2 Gd + \\ &+ \left[\sin 2\varphi_\gamma \mp \left(\frac{|\gamma|}{G} + \frac{G}{|\gamma|} \right) \sin \varphi_\gamma \right] \sin 2Gd, \end{aligned}$$

$$f_3^H = 2 \left\{ \left[1 - \frac{|\gamma|^2}{G^2} \cos^2 Gd - \frac{G^2}{|\gamma|^2} \sin^2 Gd - \sin 2Gd \sin 2\varphi_\gamma \right] \cos 2 \operatorname{Re} \gamma \Delta - \right. \\ \left. - \left[2 \left(\frac{|\gamma|}{G} \cos^2 Gd - \frac{G}{|\gamma|} \sin^2 Gd \right) \sin \varphi_\gamma - \left(\frac{|\gamma|}{G} - \frac{G}{|\gamma|} \right) \sin 2Gd \cos \varphi_\gamma \right] \sin 2 \operatorname{Re} \gamma \Delta \right\}.$$

Выражения $|M^E|^2$ и $|M^H|^2$, как уже было указано, представляют собой отношения энергии переходного излучения на данной частоте, прошедшего через пластину в область III ($z > d + \Delta$), к энергии излучения на той же частоте без пластины, т.е. в пустом волноводе. При устремлении толщины пластины Δ к нулю $|M^{E,H}|^2 = (f_1^{E,H} + f_2^{E,H} + f_3^{E,H})/4 = 1$. Если пластина непоглощающая, т.е. $\epsilon'' = 0$, $\varphi_\epsilon = \varphi_\gamma = 0$, то $|M^{E,H}|^2$ переходят в соответствующие выражения для непоглощающей пластины.

С помощью формул (37а,б) становится возможным точное описание переходного излучения, вышедшего за пределы диэлектрической пластины. В частности, возможно и описание переходного излучения в случае, когда вместо диэлектрической пластины мы имеем дело с тонкой металлической пленкой. Применение тонких металлических пленок, нанесенных на поверхность прозрачного диэлектрика, создает возможность удаления электрического заряда, накапливаемого на стенках диэлектрика при прохождении электронного пучка через резонатор (датчик). Такая задача была рассмотрена в работах [4] и [5], где был разработан датчик для измерения параметров пучка заряженных частиц в ускорителе на основе переходного излучения в резонаторе-датчике, образованном стенками волновода и двумя металлическими (алюминиевыми) пленками с толщиной, меньшей скин-слоя ($\sim 60 \text{ \AA}$). Полученные строгие выражения (37а,б) могут быть использованы для описания случая тонкой металлической пленки с конечной проводимостью. Действительно, в сантиметровом диапазоне проводимость, например, алюминия $\sigma \approx 3 \times 10^{17} \text{ сек}^{-1}$ и значения мнимой составляющей $\epsilon'' = -4\pi\sigma/\omega$ имеют порядок $\epsilon'' \approx 10^7 + 10^8$, т.е. можно пренебречь действительной составляющей ϵ' по сравнению с ϵ'' . Следовательно, в (36а,б) можно положить $\varphi_\epsilon \approx -\pi/2$, $\varphi_\gamma \approx -\pi/4$, и из формул (37а,б) перейти к предельным выражениям для энергии излучения, прошедшего через тонкую металлическую пленку. При этом излучение, выходящее через пленку, как показано в работах [4,5], позволяет судить о параметрах излучающего сгустка. На основе этого в работе [4] предложена модель датчика параметров электронного сгустка, а в работе [5] — принципиальная схема такого датчика для двухпучковой бицилиндрической ускоряющей структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. К.А.Барсуков, Э.Д.Газазян, Э.М.Лазнев. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 15, 191 (1972).
2. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ГИФМЛ, 1962.
3. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1957.

4. Г.Г.Оксузян, Э.С.Погосян, А.Д.Тер-Погосян. Изв. НАН Армении, Физика, 33, 279 (1998).
5. E.D.Gazazyan, G.G.Oksuzyan, E.S.Pogossian, A.D.Ter-Pogossian. Electron Beam Monitor Based on Waveguide with Thin Impedance Films. Proc of EPAC-2000, Vienna, Austria, 2000, p.1318.

ԴԻՄՊԵՐՍՈՂ ԴԻԷԼԵԿՏՐԻԿՈՎ ԼՑՎԱԾ ԱԼԻՔՍԱՐԻ
ԱՌԱՆՑՔԻՆ ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ՀԱՏՈՂ ԼԻՑՔԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿԻ
ԱՆՑՈՒՄԱՅԻՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ

Է.Դ. ԳԱԶԱԶՅԱՆ, Գ.Գ. ՕՔՍՈՒԶՅԱՆ, Ա.Դ.ՏԵՐ-ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Զարգացված է անցումային ճառագայթման տեսությունը, երբ լիցքավորված մասնիկը հատում է մասնակի անհամասեռ դիսպերսող դիլեկտրիկով լցված ալիքատարը՝ շարժվելով նրա առանցքին ուղղահայաց: Դիտարկված են առանձնացված երկու դիսպերսող միջավայրերի միջով շարժվող լիցքի, ինչպես նաև երկու գերբարակ վերջավոր հաղորդականությամբ օժտված մետաղական թիթեղների դեպքերը:

TRANSITION RADIATION OF A CHARGED PARTICLE CROSSING
THE WAVEGUIDE FILLED WITH DISPERSIVE DIELECTRIC MEDIUM
PERPENDICULARLY TO THE WAVEGUIDE AXIS

E.D. GAZAZYAN, G.G. OKSUZYAN, A.D. TER-POGHOSYAN

The theory of charged particle transition radiation is developed for a particle crossing the waveguide, which is filled with inhomogeneous dielectric dispersive medium, perpendicularly to the waveguide axis. The case, when the charged particle is flying between two dispersive media and the case of flying between two thin impedance films are considered.

ОБРАЗОВАНИЕ КВАНТОВОГО ХАОСА В АНГАРМОНИЧЕСКОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГАУССОВСКИХ ИМПУЛЬСОВ

А.Р. ШАГИНЯН

Ереванский государственный университет, Армения

(Поступила в редакцию 24 августа 2012 г.)

Исследованы режимы квантового хаоса для ангармонического осциллятора под воздействием последовательности гауссовских импульсов в зависимости от параметров импульсов. Приведенные результаты получены в полуклассическом приближении на основе сечения Пуанкаре и экспоненты Ляпунова, а в квантовом подходе – на основе функции Вигнера. Найдены соотношения между параметрами системы, при которых возникает хаотическая динамика на мезоскопическом уровне чисел возбуждения осциллятора.

1. Введение

К настоящему времени проблема хаоса в квантовых динамических системах все еще представляет большой интерес [1-6]. Исследование квантового хаоса, бесспорно, связано с принципом квантово-классического соответствия, декогеренцией и диссипацией [4,5]. В работе [6] было показано, что при применении масштабной инвариантности квантовый хаос проявляется в том случае, когда хаос отсутствует в полуклассическом пределе. Проблема квантового хаоса имеет не только теоретический интерес. Хаотическая динамика систем интересна, так как квантовые системы используются в теории и в практике квантовой информации, нанотехнологиях, и т.д. Много исследований на тему классического и квантового хаоса посвящено импульсному ротатору, который обладает регулярными и хаотическими режимами движения. Ее экспериментальная реализация была осуществлена с ультрахолодными атомами в магнито-оптической ловушке, под действием импульсов стоячих волн [7]. Предложен также параметрический импульсный ротатор в резонаторе с керровской нелинейностью [8]. Показано, что более перспективная реализация этой системы, в том числе и в квантовом режиме, осуществляется в динамике охлажденных ионов (в ловушке), взаимодействующих с периодической последовательностью импульсов [9]. Недавно другая модель для исследования квантового хаоса была предложена в работе [10], где найдено хорошее соответствие между квантовой и классической динамикой. В серии работ [11-15] исследованы режимы квантового хаоса для ангармонического осциллятора с периодическими от времени па-

раметрами, в частности, исследована связь между сечением Пуанкаре и функцией Вигнера [12], показана возможность диагностики хаоса по статистике осцилляторных возбужденных состояний [13,14] и обнаружено образование суперпозиционных состояний в хаотическом режиме [15].

В этой статье показано, что квантовый диссипативный хаос возникает в ангармоническом осцилляторе под воздействием последовательности внешних гауссовских импульсов. Эта схема может быть легко реализована на эксперименте и была недавно предложена для приготовления осцилляторных фоковских состояний, а также для суперпозиционных фоковских состояний [16]. Следует отметить, что параметры импульса (длительность импульсов и временной интервал между ними) являются физическими величинами, которые могут управлять квантовой динамикой системы при наличии диффузии и декогеренции. Аналогичные результаты по контролю диссипативной квантовой динамики были получены ранее, в частности, для увеличения уровня сжатия и квантовой перепутанности непрерывных переменных [17-21].

Следует отметить, что, несмотря на многочисленные теоретические исследования, посвященные квантовому хаосу, эксперименты в этой области достаточно редки. Учитывая неоднозначность в подходе к квантовому хаосу, становится очевидной необходимость обнаружения и исследования новых, экспериментально реализуемых систем. С этой целью в данной работе исследован режим квантового хаоса для ангармонического осциллятора под воздействием последовательности гауссовских импульсов и рассмотрены режимы хаоса в зависимости от параметров импульса.

Следует отметить, что контролирование посредством параметра одиночного импульса было использовано в консервативном импульсном роторе для квантово-классического предельного перехода, так как при настройке параметров импульса можно увеличить или уменьшить осцилляторные числа заполнения [22]. В последнее время большой интерес представляет также исследование хаоса в мезоскопическом режиме возбуждения осцилляторных состояний (см. [15,23]).

2. Математическая модель и ее физические применения

Рассмотрим ангармонический осциллятор, взаимодействующий с резервуаром. Квантовые открытые системы, как правило, описываются с помощью матрицы плотности. Основным уравнением в таком подходе является уравнение для редуцированной матрицы плотности, т.е. матрицы плотности открытой системы, которая усреднена по переменным резервуара. В марковском приближении такое уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \sum_i \left(L_i \rho L_i^\dagger - \frac{1}{2} L_i^\dagger L_i \rho - \frac{1}{2} \rho L_i^\dagger L_i \right), \quad (1)$$

где \hat{H} является гамильтонианом системы, а L_i представляют операторы Линблада для каждой моды i , которые описывают взаимодействие системы с резер-

вуаром. Операторы Линблада имеют следующую форму: $L_1 = \sqrt{N\gamma}a^+$, $L = \sqrt{(N+1)\gamma}a$, где γ является коэффициентом диссипации, $N = 1/(e^{h\nu/kT} + 1)$ – среднее число заполнения резервуара, которое определяется температурой. В этой статье рассмотрен ангармонический осциллятор с высокой степенью ангармоничности и при низких температурах, $N = 0$.

В приближении вращающейся волны $\rho \rightarrow e^{i\omega_L a^+ a} \rho e^{i\omega_L a^+ a}$ гамильтониан имеет следующую форму:

$$H = \hbar\Delta a^+ a + \hbar\chi(a^+ a)^2 + f(t)(a^+ + a), \quad (2)$$

где $\Delta = \omega_0 - \omega_L$ является расстройкой, χ – коэффициент ангармоничности, $f(t)$ – внешнее воздействие. Здесь в качестве внешнего воздействия выбрана последовательность гауссовских импульсов: $f(t) = \Omega \sum_n \exp(-(t - n\tau)^2/T^2)$, где T – период импульса, τ – временной промежуток между импульсами, Ω – амплитуда внешнего воздействия.

Эта простая модель имеет ряд физических реализаций. Ангармонический осциллятор с нелинейностью третьего порядка описывает нано-механический осциллятор, оптическое волокно, электромагнитное поле в резонаторе с нелинейной керровской средой (где нелинейность описывает фотон-фотонное взаимодействие для электромагнитного поля), джозефсоновский контакт, и т.д. Последний прогресс в охлаждении нано-механических осцилляторов до их основных состояний [24,25] позволяет использовать их в квантовых режимах. Модели нано-механического осциллятора и джозефсоновский контакт представляют большой интерес, так как для этих систем достигнута высокая степень ангармоничности χ/γ , которая является характеристическим параметром для достижения квантовых эффектов.

Нелинейный осциллятор с $f(t) = \text{const}$ был исследован аналитически в работах [26,27]. В этом случае система имеет стационарное решение и при параметрах, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \chi(\Delta + \chi) &< 0, \\ |\Delta + \chi|/0.5\gamma &> \sqrt{3}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\left[1 + \frac{27\chi\Omega^2}{(\chi + \Delta)^3} + \left(\frac{3\gamma/2}{\chi + \Delta} \right)^2 \right]^2 < \left[1 - 3 \left(\frac{\gamma/2}{\chi + \Delta} \right)^2 \right]^3,$$

проявляет бистабильность и гистерезисное поведение. Однако, в импульсном режиме, при котором $f(t) = \Omega \sum_n \exp(-(t - n\tau)^2/T^2)$ гамильтониан системы имеет явную временную зависимость, которая не может быть исключена в приближении вращающейся волны.

Уравнение (1) описывает динамику системы в квантовом режиме, а в полуклассическом пределе эта динамика описывается с помощью уравнения для безразмерной амплитуды:

$$d\alpha/dt = -i(\Delta + \chi(1 + 2|\alpha|^2))\alpha - if(t) - \gamma/2. \quad (4)$$

Далее, для исследования хаоса в полуклассическом пределе используется уравнение (4) в фазовом пространстве для безразмерных величин $X = \text{Re}(\alpha)$, $Y = \text{Im}(\alpha)$. Числа заполнения в полуклассическом пределе определяются по формуле $n = |\alpha|^2$. Что касается квантового анализа, то он проводится на основе численного решения уравнения матрицы плотности моды осциллятора в рамках метода диффузии квантового состояния [28]. Приложения метода для исследования квантово-оптических систем приведены в работах [11-16, 29-37].

3. Режимы квантового хаоса

Перейдем теперь к обсуждению квантового хаоса, решая численно уравнения (1) и (4). Выше было указано, что система имеет бистабильный режим при монохроматическом управлении ангармонического осциллятора, однако, известно, что в этом случае система не обладает хаотической динамикой. Тем не менее, следует ожидать, что хаотический режим может возникнуть для ангармонического осциллятора под управлением последовательностью гауссовских импульсов вблизи параметров, которые определяют бифуркационную точку в случае монохроматического возбуждения. Такая точка зрения подтверждается вычислениями. Таким образом, далее динамика системы рассматривается для параметров, удовлетворяющих неравенствам для реализации бистабильности:

$$\chi(\Delta + \chi) < 0,$$

$$|\Delta + \chi|/0.5\gamma > \sqrt{3},$$

а параметры импульсного возбуждения осциллятора выбираются таким образом, чтобы система оказалась в хаотическом режиме. Рассматриваются микроскопические и мезоскопические режимы, для которых отношение χ/γ порядка единицы.

На рис.1 приведены кривые, описывающие динамику чисел заполнения осциллятора для разных параметров импульса при одинаковых прочих параметрах на основе численного вычисления матрицы плотности. Как показывает анализ, возникновение хаотического режима системы зависит от параметров T и τ . Так, сравнивая три режима, приведенные на рис.1, можно прийти к заключению, что хаос реализуется только для параметров импульсов, приведенных на рис.1в. Вначале приведем результаты в полуклассическом рассмотрении, на основе экспоненты Ляпунова, которая определяется по формуле $L = (1/\Delta t) \times \ln \left[\frac{x_2(t) - x_1(t)}{x_{02}(t_0) - x_{01}(t_0)} \right]$, где $x_1(t)$, $x_2(t)$ являются траекториями с разными начальными состояниями, $x_{01}(t_0)$, $x_{02}(t_0)$ – начальные значения, а $\Delta t = t - t_0$. При $L > 0$ система имеет хаотическую динамику, $L = 0$ свойственно стабильным консервативным системам, а $L < 0$ реализуется при диссипационных регулярных системах.

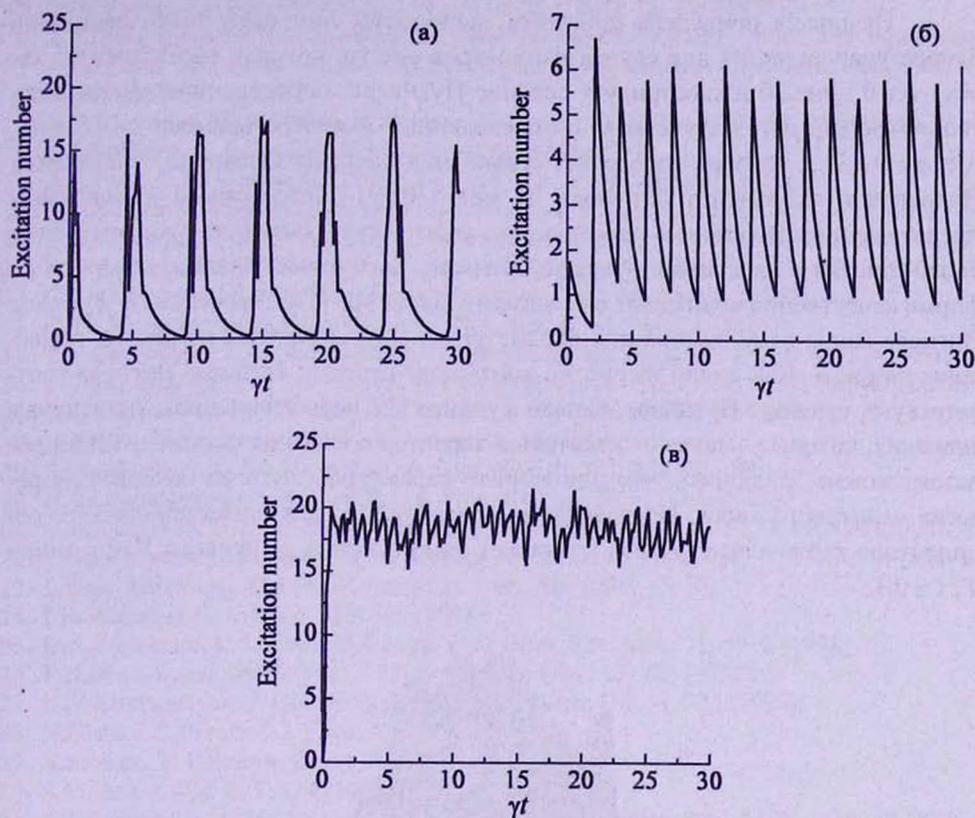


Рис.1. Число заполнения осциллятора при следующих параметрах: $\Delta/\gamma = -8$, $\chi/\gamma = 1$, $\Omega/\gamma = 80$ (а) $T = 0.5\gamma^{-1}$, $\tau = 5\gamma^{-1}$, (б) $T = 0.02\gamma^{-1}$, $\tau = 2\gamma^{-1}$, (в) $T = 0.02\gamma^{-1}$, $\tau = 0.2\gamma^{-1}$.

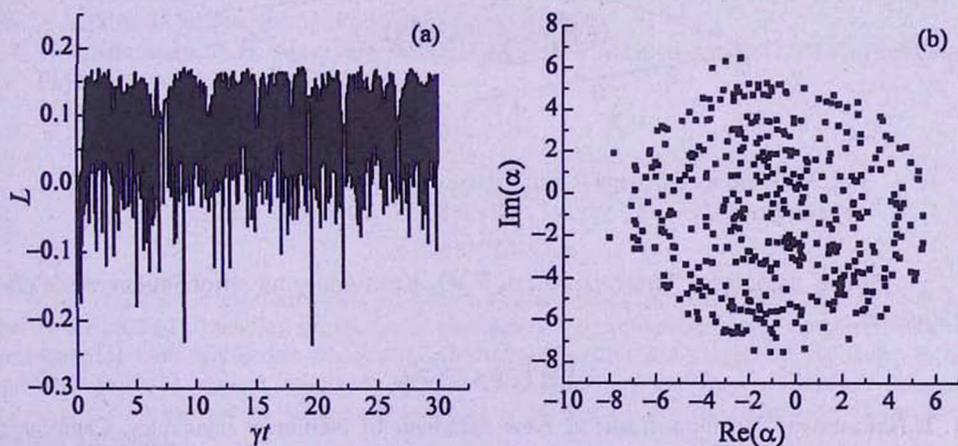


Рис.2. Динамика экспоненты Ляпунова (а) и сечение Пуанкаре (б) при следующих параметрах: $\Delta/\gamma = -8$, $\chi/\gamma = 1$, $\Omega/\gamma = 80$, $T = 0.02\gamma^{-1}$, $\tau = 0.2\gamma^{-1}$.

На рис.2а приведена динамика экспоненты Ляпунова, вычисленная на основе уравнения (4) для случая параметров рис.1в, которая соответствует хаосу, $L > 0$. Рис.2б иллюстрирует сечение Пуанкаре, определенное как множество точек (x_n, p_n) , полученных в определенные моменты времени $t_n = t_0 + n\tau$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, которое определяет странный аттрактор. Очевидно, что сечения Пуанкаре и экспонента Ляпунова не могут быть использованы в квантовом представлении. В фазовом пространстве хаотическая динамика системы может быть описана с помощью функции Вигнера, контурные сечения которого по форме качественно совпадают с сечениями Пуанкаре [12]. Вычисления функции Вигнера моды осциллятора для параметров, использованных на рис.1в, приведены на рис.3. Как видно из рис.3а, контурные сечения функции Вигнера соответствуют сечению Пуанкаре, однако функция Вигнера имеет также негативные значения, которые выявляют квантовый характер состояния системы. Таким образом, можно заключить, что для данных параметров система находится в режиме квантового хаоса. Исследования показали, что для ангармонического осциллятора хаотический режим возникает при коротких импульсах $T \ll \gamma$ и при $T/\tau \approx 0.1$.

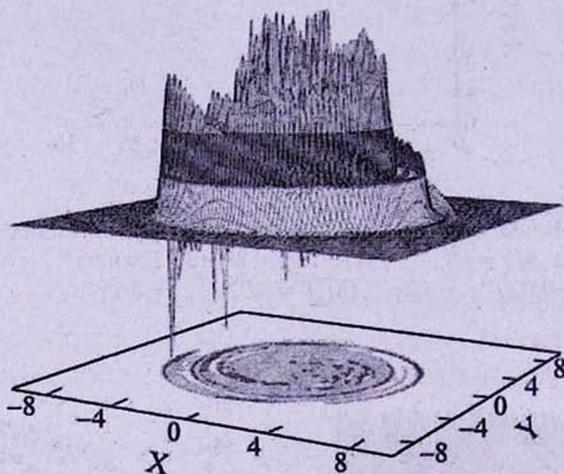


Рис.3. Функция Вигнера и контурное сечение функции Вигнера для параметров $\Delta/\gamma = -8$, $\chi/\gamma = 1$, $\Omega/\gamma = 80$, $T = 0.02\gamma^{-1}$, $\tau = 0.2\gamma^{-1}$.

Автор выражает благодарность Г.Ю. Крючкяну за многочисленные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. K.Nakamura. Quantum chaos: A New Paradigm of Nonlinear Dynamics. Cambridge University Press, 1994.
2. F.Хааке. Quantum Signatures of Chaos. Berlin, Springer, 2000.
3. H.Mori, Y.Kuramoto. Dissipative Structure and Chaos. Berlin, Springer, 1998.
4. W.H.Zurek. Rev. Mod. Phys., 75, 715 (2003).

5. W.H.Zurek, J.P.Paz. Phys. Rev. Lett., 72, 2508 (1994); 75, 351 (1995).
6. T.V.Gevorgyan, A.R.Shahinyan, G.Yu.Kryuchkyan. Modern Optics and Photonics: Atoms and Structured Media, G.Kryuchkyan, G.Gurzadyan, A.Papoyan, eds., World Scientific, 2010, pp.60-77.
7. B.G.Klappauf, W.H.Oskay, et al. Phys. Rev. Lett., 81, 1203 (1998); 82, 241 (1999).
8. G.J.Milburn, C.A.Holmes. Phys. Rev. A, 44, 4704 (1991).
9. A.J.Scott, C.A.Holmes, G.J.Milburn. Phys. Rev. A, 61, 013401 (2000).
10. S.Chaudhury, A.Smith, B.E.Anderson, S.Ghose, P.S.Jesse. Nature, 461, 768 (2009).
11. H.H.Adamyanyan, S.B.Manvelyan, G.Yu.Kryuchkyan. Phys. Rev. A, 63, 022102 (2001).
12. H.H.Adamyanyan, S.B.Manvelyan, G.Yu.Kryuchkyan, Phys. Rev. E, 64, 046219 (2001).
13. G.Yu.Kryuchkyan, S.B.Manvelyan. Phys. Rev. Lett., 88, 094101 (2002).
14. G.Yu.Kryuchkyan, S.B.Manvelyan. Phys. Rev. A, 68, 013823 (2003).
15. T.V.Gevorgyan, A.R.Shahinyan, G.Yu.Kryuchkyan. Phys. Rev. A, 79, 053828 (2009).
16. T.V.Gevorgyan, A.R. Shahinyan, G.Yu.Kryuchkyan. Phys. Rev. A, 85, 053802 (2012).
17. G.Yu.Kryuchkyan, M.Jakob, A.S.Sargsian. Phys. Rev. A, 57, 2091 (1998).
18. M.Jakob, G.Yu.Kryuchkyan. Phys. Rev. A, 58, 767 (1998).
19. H.H.Adamyanyan, G.Yu.Kryuchkyan. Phys. Rev. A, 74, 023810 (2006).
20. G.Yu.Kryuchkyan, L.A.Manukyan. Phys. Rev. A, 69, 013813 (2004).
21. N.H.Adamyanyan, H.H.Adamyanyan, G.Yu.Kryuchkyan. Phys. Rev. A, 77, 023820 (2008).
22. A. Kowalewska-Kudlaszyk, J. K. Kalaga, W. Leonski. Phys. Lett. A, 373, 1334 (2009).
23. L.Guo, Zh.Zheng, Xin-Qi Li. Europhys. Lett., 90, 10011 (2010).
24. I.Fushman et al. Science, 320, 769 (2008).
25. Q.A.Turchette, C.J.Hood, W.Lange, et al. Phys. Rev. Lett., 75, 4710 (1995).
26. P.D.Drummond, D.F.Walls. J. Phys. A: Math. Gen., 13, 725 (1980).
27. K.V.Kheruntyan. J. Opt. B: Quantum Simclassical. Opt., 1, 225 (1999).
28. N.Gisin, I.C.Percival. J. Phys. A, 25, 5677 (1992).
29. R.Schack, T.A.Brunn. Comp. Phys. Commun., 102, 210 (1997).
30. S.M.Tan. J. Opt. B, 1, 424 (1999).
31. S.T.Gevorkyan, G.Yu.Kryuchkyan, N.T.Muradyan. Phys. Rev. A, 61, 043805 (2000).
32. K.V.Kheruntyan, G.Yu. Kryuchkyan, N.T.Mouradyan, K.G.Petrosian. Phys. Rev. A, 57, 535 (1998).
33. D.A.Antonosyan, T.V.Gevorgyan, G.Yu.Kryuchkyan. Phys. Rev. A, 83, 043807 (2011).
34. G.Yu.Kryuchkyan, N.T. Muradyan. Phys. Lett. A, 286, 113 (2001).
35. G.Yu.Kryuchkyan, L.A.Manukyan, N.T.Muradyan, Opt. Commun., 190, 245 (2001).
36. A.Vukics, H.Ritsch. Europ. Phys. J. D, 44, 585 (2007).
37. H.H.Adamyanyan, N.H.Adamyanyan, N.T.Gevorgyan, T.V.Gevorgyan, G.Yu.Kryuchkyan. Phys. Part. Nuclei Lett., 5, 161 (2008).

QUANTUM CHAOS PRODUCTION IN ANHARMONIC OSCILLATOR UNDER TRAIN OF GAUSSIAN PULSES

A.R. SHAHINYAN

The regimes for quantum chaos production of anharmonic oscillator under train of Gaussian pulses are studied depending on the pulse parameters. The presented results are derived in the semiclassical limit within the framework of Poincaré section and Lyapunov exponent. In the quantum limit the regimes of chaos are considered based on the Wigner function. Relations between system parameters when quantum chaos is observable in mesoscopic level of excitation number are found.

УДК 535.343.4

ИССЛЕДОВАНИЕ УЗКОПОЛОСНОГО ОПТИЧЕСКОГО *N*-РЕЗОНАНСА, ФОРМИРУЮЩЕГОСЯ В ПАРАХ АТОМОВ ИЗОТОПА ^{87}Rb ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Р.К. МИРЗОЯН

Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения

Laboratoire Interdisciplinaire Carnot de Bourgogne, Université de Bourgogne, France

(Поступила в редакцию 26 июля 2012 г.)

Исследован узкополосный каскадный *N*-резонанс, который формируется в Λ -системе атомов рубидия. Использовались излучения двух непрерывных узкополосных лазеров, один из которых имел фиксированную частоту, а второй являлся пробным лазером. *N*-резонанс может иметь суб-натуральную ширину и демонстрирует увеличение поглощения. Исследовано поведение *N*-резонанса во внешнем магнитном поле при использовании паров атомов ^{87}Rb .

1. Введение

В последние годы активно исследуется новый когерентный процесс, при котором формируется так называемый узкополосный *N*-резонанс, который демонстрирует увеличенное поглощение [1]. По своим характеристикам *N*-резонанс похож на "светлый" резонанс, формируемый в результате процесса электромагнитно-индуцированного поглощения в *V*-системе [2], однако в данном случае используется Λ -система атомов рубидия D_1 линии, а также два лазерных излучения [3-6]. К основным достоинствам процесса следует отнести высокий контраст *N*-резонанса и его малую спектральную ширину. На рис.1 приведена схема формирования *N*-резонанса в Λ -системе атомов ^{87}Rb , D_1 линии, в которых нижними уровнями для Λ -системы являются уровни $F_g = 1, 2$, а верхним уровнем – два доплеровски уширенных сверхтонких уровня $5P_{1/2}$, $F_e = 1, 2$. Частота пробного лазера ν_p сканируется по переходам $F_g = 1 \rightarrow F_e = 1, 2$, а частота связывающего лазера ν_{c1} фиксирована. В спектре пробного излучения *N*-резонанс формируется, когда разность частот $\nu_c - \nu_p = \Delta$, где Δ – величина сверхтонкого расщепления нижнего уровня (6068 МГц).

В отмеченных работах [3-6] для формирования *N*-резонанса необходимым условием являлось наличие буферного газа в ячейке с парами атомов Rb.

Целью настоящей работы было исследование (ранее не изученного) поведения *N*-резонанса во внешнем магнитном поле при использовании паров атомов изотопа ^{87}Rb . Отмечена также возможность практического применения этих исследований.

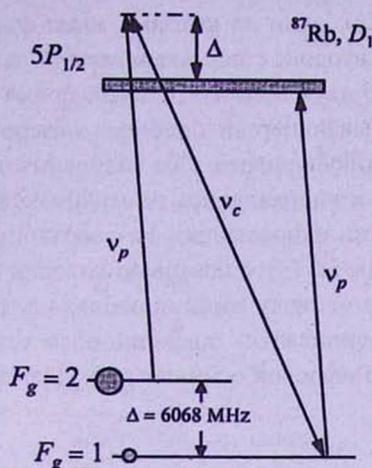


Рис.1. Λ -система атомов ^{87}Rb , D_1 линии, нижние уровни $F_g = 1, 2$, верхние уровни $F_c = 1, 2$; при частоте $\nu_{c1} - \nu_p = \Delta$ в спектре пробного излучения формируется N -резонанс, демонстрирующий увеличение поглощения. Большим кружком показана населенность N_2 уровня $F_g = 2$, малым кружком – населенность N_1 уровня $F_g = 1$.

2. Эксперимент

2.1. Конструкция ячейки

В эксперименте использовалась микроячейка толщиной ~ 50 мкм, заполненная парами Rb с добавлением буферного газа неона, имеющего давление 100 Торр. Прямоугольные окна размерами 20×30 мм и толщиной 2 мм были изготовлены из кристаллического сапфира. Ось с перпендикулярна поверхности окна, что существенно уменьшает двулучепреломление проходящего излучения. Поверхности сапфировых окон тщательно отполированы (локальная шероховатость < 5 нм). Для формирования клиновидного зазора (между внутренними поверхностями окон) в нижней и в верхней части между окнами помещались платиновые полоски толщиной 20 и 80 мкм, соответственно. Клиновидный зазор между окнами необходим для выявления минимальной толщины столба паров атомов, при которой исследуемый процесс все еще протекает эффективно. Это важно для дальнейшей миниатюризации ячейки с целью практических применений [7]. Заполнение микроячейки осуществлялось природным рубидием, состоящим из изотопов ^{85}Rb (72%) и ^{87}Rb (28%). Дополнительные детали конструкции микроячеек приведены в [8,9].

2.2. Экспериментальные результаты

Схема экспериментальной установки приведена на рис.2. Использовались излучения двух непрерывных узкополосных (с шириной ~ 1 МГц и с длиной волны $\lambda \approx 795$ нм) диодных лазеров с внешним резонатором (extended

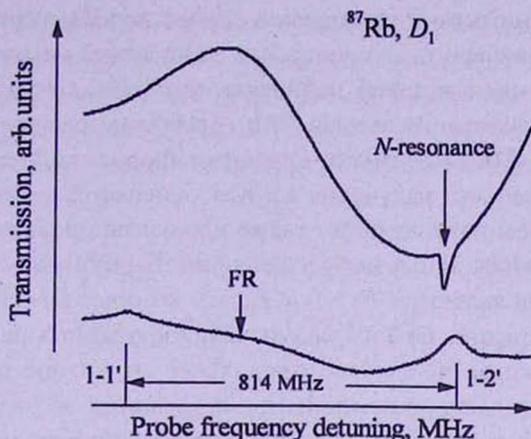


Рис.3. Верхняя кривая – спектр пропускания, содержащий N -резонанс. Контраст 15%, ширина спектра на полувысоте 16 МГц. Мощности связывающего и пробного лазера составляют 27 мВт и 1 мВт, соответственно. Нижняя кривая FR – частотный репер.

Спектральная ширина N -резонанса составляет ≈ 16 МГц. При сильном уменьшении мощности связывающего и пробного лазеров контраст N -резонанса уменьшается до нескольких %, при уменьшении спектральной ширины до ≈ 5 МГц. Нижняя кривая на рис.3 – это частотный репер FR, который формируется с помощью СТЯ с толщиной $L = \lambda$ [10].

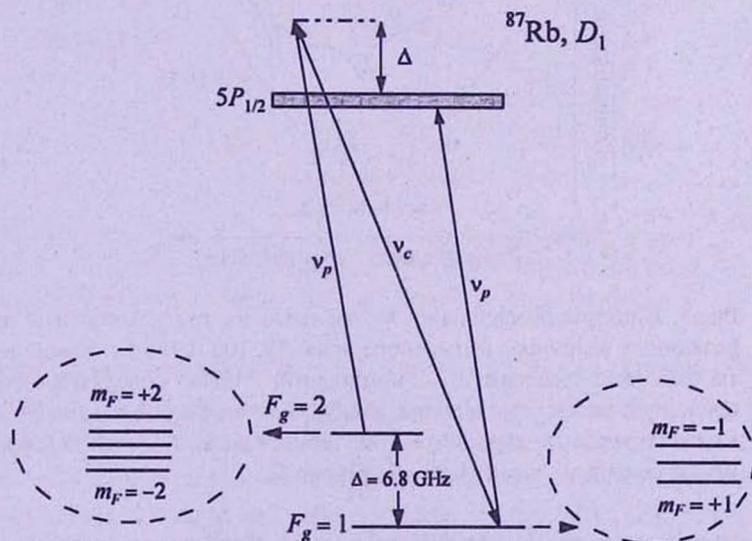


Рис.4. Во внешнем магнитном поле нижние уровни $F_g = 1$ и $F_g = 2$, которые участвуют в формировании N -резонанса, расщепляются, соответственно, на 3 и 5 подуровней. Число подуровней, на которые расщепляется уровень с квантовым числом F , равно $2F + 1$.

Высокий контраст N -резонанса в случае использования буферного газа позволяет легко проследить его поведение во внешнем магнитном поле в широком интервале магнитных полей, начиная от нескольких Гс до нескольких сотен Гс. В случае использования атомов ^{87}Rb N -резонанс расщепляется на три или четыре компоненты (в зависимости от взаимной ориентации магнитного поля \mathbf{B} и направления лазерного излучения \mathbf{k}). Как отмечается ниже, поведение N -резонанса в магнитном поле помогает также идентифицировать физический механизм его образования. В случае расщепления N -резонанса в магнитном поле нижними уровнями являются $F_g = 1$ и $F_g = 2$, которые во внешнем поле расщепляются, соответственно, на 3 и 5 подуровней, показанных на рис.4.

В случае, когда приложено продольное магнитное поле ($\mathbf{B} \parallel \mathbf{k}$), N -резонанс расщепляется на три компоненты, показанные на рис.5. Мощности связывающего и пробного лазеров 27 мВт и 1 мВт, соответственно. В зависимости от величины магнитного поля частотное расстояние между компонентами изменяется. Нетрудно показать, что при полях $B < 200$ Гс частотное расстояние между соседними компонентами составляет ~ 1.4 МГц/Гс [11]. Следовательно, измеряя частотное расстояние между компонентами, можно определить величину приложенного магнитного поля.

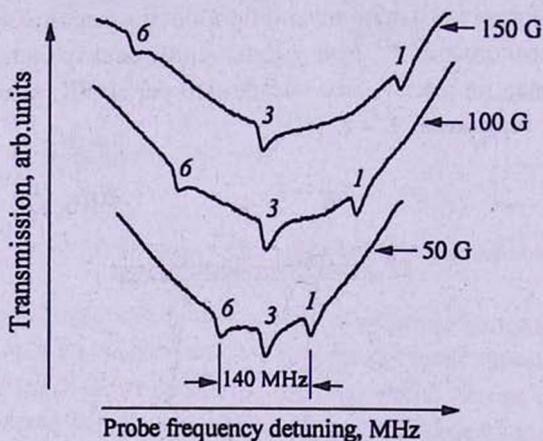


Рис.5. Спектры расщепления N -резонанса на три компоненты при различных величинах магнитного поля: 50, 100 и 150 Гс. Компоненты отмечены номерами 1,3,6; компонента 1 может содержать неразрешенную по частоте дополнительную компоненту 2; компонента 3 может содержать дополнительные компоненты 4,5; компонента 6 может содержать компоненту 7 (см. рис.6).

Как видно из рис.1, для формирования N -резонанса необходимо выполнение условия:

$$|\nu_p - \nu_c| = \frac{E(F_g = 2, m_F) - E(F_g = 1, m_F)}{h}, \quad (1)$$

а число компонент N -резонанса, формирующихся в постоянном магнитном поле, и их частотное поведение зависят от числа и сдвига магнитных подуровней m_F с нижних уровней $F_g = 1, 2$. В случае ^{87}Rb , D_1 линии нелинейный энергетический сдвиг магнитных подуровней m_F (уровни $F_g = 1, 2$ отмечены ниже как $F = 1, 2$) может быть рассчитан по формуле Раби-Брейта, приведенной, например, в работах [12,13]:

$$E(F = 2, m_F) = h\nu_{\text{hfs}} \left[-1/8 + 1/2(1 + m_F x + x^2)^{1/2} \right] \quad (m_F \neq -2), \quad (2)$$

$$E(F = 2, -2) = h\nu_{\text{hfs}} (3/8 - x/2), \quad (3)$$

$$E(F = 1, m_F) = h\nu_{\text{hfs}} \left[-1/8 - 1/2(1 + m_F x + x^2)^{1/2} \right], \quad (4)$$

где $x = 2\mu_B B / h\nu_{\text{hfs}}$, μ_B — магнетон Бора и $\nu_{\text{hfs}} = 6835$ МГц.

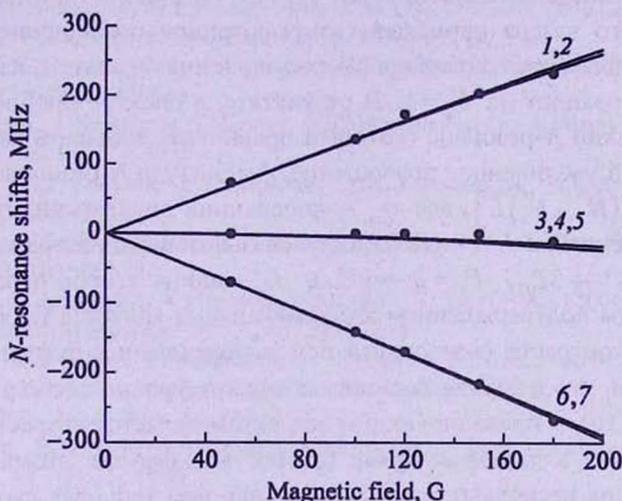


Рис.6. Зависимость частотного сдвига расщепленных компонент N -резонанса в зависимости от величины магнитного поля. Сплошные линии — теория; черные кружки — эксперимент.

На рис.6 приведено семь кривых, построенных по формулам (1)-(4), которые описывают частотное положение (частотный сдвиг) компонент N -резонанса в магнитном поле; черные кружки — экспериментальные точки. Отметим, что частоты, представленные кривыми 4 и 5, полностью совпадают при всех величинах магнитного поля, поэтому всего может быть шесть различных по частоте компонент N -резонанса. Как видно из рис.6, до полей 200 Гс образуются три компонента N -резонанса: 1 (может содержать дополнительную компоненту 2), 3 (может содержать дополнительные компоненты 4,5) и компонента 6 (может содержать дополнительную компоненту 7). Эти дополнительные компоненты, возможно, могут быть зарегистрированы, если обеспечить формиро-

вание более узких (с шириной 1–2 МГц) компонент N -резонанса. В формировании компонент N -резонанса с номерами 1, 3 и 6, как это имеет место в случае исследования процесса электромагнитно-индуцированной прозрачности [11], участвуют три Λ -системы со следующими нижними подуровнями сверхтонкой структуры нижнего уровня $5S_{1/2}$ ($F_g = 1, m_F; F_g = 2, m_F$): (1, +1, 2, +1), (1, 0, 2, 0) и (1, -1, 2, -1), соответственно.

Как показывают приведенные результаты по расщеплению N -резонанса в магнитном поле, начальным и конечным являются нижние уровни $F_g = 1, 2$. Следовательно, возможен следующий механизм образования N -резонанса: пробное излучение переводит атомы с уровня $F_g = 1$ на уровень $5P_{1/2}$ с последующим распадом на $F_g = 1$ (так называемый процесс оптической накачки (ОН) [14]). Это приводит к обеднению уровня $F_g = 1$ (его населенность N_1 на рис. 1 условно показана маленьким кружком) и увеличению населенности уровня $F_g = 2$ (его населенность N_2 условно показана большим кружком). В результате, появляется инверсия населенностей $N_2 > N_1$, и при соответствующей частоте связывающего лазера происходит двухфотонное поглощение [15]: атом с уровня $F_g = 2$ поглощает фотон пробного излучения ν_p , затем, излучая фотон с частотой ν_c , переходит на $F_g = 1$. В результате, в спектре пробного излучения формируется узкий N -резонанс (который правильнее называть каскадным), демонстрирующий увеличенное поглощение. Амплитуда N -резонанса пропорциональна $\exp[\sigma_m (N_2 - N_1)L]$, где σ_m – поперечник двухфотонного поглощения (зависит от расстройки Δ , интенсивности связывающего лазера и вероятностей переходов $F_g = 1 \rightarrow 5P_{1/2}$, $F_g = 2 \rightarrow 5P_{1/2}$), L – длина столба паров атомов Rb. Дополнительным подтверждением этого механизма является также факт резкого улучшения контраста N -резонанса при использовании буферного газа. Это объясняется тем, что в случае Λ -системы нижние уровни слабо уширяются буферным газом [16], и превалирующим эффектом является возрастание времени нахождения атома в лазерном пучке (скорость диффузии атома при наличии буферного газа на несколько порядков меньше, чем тепловая скорость атома в чистых парах Rb), и, как следствие, более эффективной ОН, которая прямо пропорциональна времени взаимодействия. Это приводит к возрастанию населенности N_2 и, следовательно, к возрастанию амплитуды N -резонанса.

3. Заключение

Приведены результаты исследования поведения N -резонанса, формируемого в Λ -системе паров атомов ^{87}Rb , D_1 линии во внешних магнитных полях в интервале 1–200 Гс, с использованием микроячейки с толщиной столба паров атомов рубидия $L = 50$ мкм. Использовались излучения двух непрерывных узкополосных диодных лазеров с длиной волны $\lambda \approx 794$ нм (с шириной линии ~ 1 МГц). Теоретическое рассмотрение указывает на возможность наличия шести компонент N -резонанса, однако на эксперименте при магнитных полях $B < 200$ Гс регистрируются три компоненты N -резонанса. Применение микроячейки позволяет осуществить измерение сильно-градиентного магнитного поля с мик-

ронным пространственным разрешением. Изложен физический механизм образования N -резонанса. Приведенная теоретическая модель хорошо описывает расщепление N -резонанса на три компоненты во внешнем магнитном поле. Формирование компонент N -резонанса с помощью микроячейки может быть успешно использовано также для изучения $D_{1,2}$ линий атомов Cs, K, Na и др. в сильных магнитных полях. Описанный метод может использоваться в магнитометрии, как альтернатива λ -Зееман техники [17-19].

Автор благодарит А. Саркисяна за изготовление микроячейки, а также Д. Саркисяна, К. Леруа и Е. Пашаян-Леруа за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. A.S.Zibrov, C.Y.Ye, Y.V.Rostovtsev, et al. Phys. Rev. A, 65, 043817 (2002).
2. A.Lezama, S.Barreiro, A.M.Akulshin. Phys. Rev. A, 59, 4732 (1999).
3. I.Novikova, D.F.Phillips, A.S.Zibrov, et al. Opt. Lett., 31, 2353 (2006).
4. I.Novikova, D.F.Phillips, A.S.Zibrov, et al. Opt. Lett., 31, 622 (2006).
5. C.Hancox, M.Hohensee, M.Crescimanno, et al. Opt. Lett., 33, 1536 (2008).
6. I.Ben-Aroya, G.Eisenstein. Opt. Express, 19, 9956 (2011).
7. A.Sargsyan, G.Hakhumyan, A.Papoyan, D.Sarkisyan, A.Atvars, M.Auzinsh. Appl. Phys. Lett., 93, 021119 (2008).
8. G.Hakhumyan, A.Sargsyan, C.Leroy, Y.Pashayan-Leroy, A.Papoyan, D.Sarkisyan. Opt. Express, 18, 14577 (2010).
9. А.Саргсян, М.Г.Бейсон, Д.Саркисян, А.К.Мохapatра, Ч.С.Адамс. Оптика и спектр., 109, 1359 (2010).
10. A.Sargsyan, Y.Pashayan-Leroy, C.Leroy, R.Mirzoyan, A.Papoyan, D.Sarkisyan. Appl. Phys. B, 105, 767 (2011).
11. A.Sargsyan, D.Sarkisyan, A.Papoyan. Phys. Rev. A, 73, 033803 (2006).
12. K.Motomura, M.Mitsunaga. JOSA, 19, 2456 (2002).
13. M.Auzinsh, D.Budker, S.M.Rochester. Optically Polarized Atoms: Understanding Light-Atom Interactions. Oxford, Oxford University Press, 2010.
14. W.Happer. Rev. Mod. Phys, 44, 169 (1972).
15. В.С.Летохов, В.П.Чеботаев. Нелинейная лазерная спектроскопия сверхвысокого разрешения. М., Наука, 1990.
16. R.Wynands, A.Nagel. Appl. Phys. B, 68, 1 (1999).
17. Т.Варжапетян, Г.Ахумян, В.Бабушкин, Д.Саркисян, А.Атварс, М.Аузинш. Изв. НАН Армении, Физика, 42, 338 (2007).
18. Г.Ахумян. Изв. НАН Армении, Физика, 47, 3, 160 (2012).
19. А.Саргсян, Г.Ахумян, Д.Саркисян. Изв. НАН Армении, Физика, 47, 98 (2012)

STUDY OF OPTICAL NARROW-BAND N -RESONANCE FORMED IN THE VAPOR OF ISOTOPE ^{87}Rb ATOMS IN AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD

R.K. MIRZOYAN

We investigate the narrow-band cascaded N -resonance, which is formed in the Λ -system of rubidium atoms. Two continuous narrow-band radiation of lasers are used, one of which has a fixed frequency, while the second one is a probe laser. The behavior of N -resonance in an external magnetic field is observed with use of ^{87}Rb atomic vapors.

УДК 537.311

О ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ТЕОРЕМЫ КОНА В СЛУЧАЕ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ КВАНТОВЫХ ТОЧЕК

Д.Б. АЙРАПЕТЯН^{1,2}, Э.М. КАЗАРЯН¹, А.А. САРКИСЯН^{1,3}

¹Российско-армянский (Славянский) университет, Ереван, Армения

²Государственный инженерный университет Армении, Ереван, Армения

³Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

e-mail: shayk@ysu.am

(Поступила в редакцию 23 июля 2012 г.)

Рассмотрен электронный газ в сильно сплюснутой эллипсоидальной квантовой точке с непроницаемыми стенками. Влияние стенок квантовой точки в направлении малой полуоси (ось OZ) предполагается настолько сильным, что кулоновским взаимодействием между электронами в этом направлении можно пренебречь и рассматривать его двумерным, парным. На основе геометрической адиабатики показано, что в случае несколько-частичного газа мощный репульсивный потенциал стенок квантовой точки имеет параболический вид и локализуется в геометрическом центре структуры. Благодаря этому возникают условия для реализации в рассматриваемой системе обобщенной теоремы Кона.

1. Введение

Квантовые точки (КТ), являясь системами во многом схожими с реальными атомами, часто проявляют свойства, присущие последним. Поэтому создается уникальная возможность адаптации целого ряда квантомеханических задач атомной физики к случаям полупроводниковых КТ различных размеров и геометрических форм. Ярким примером переноса фразеологии, присущей атомной физике, на случай КТ является классификация одноэлектронных состояний в сферически-симметричных КТ по значениям орбитального квантового числа (s -состояния, p -состояния и т.д.) [1]. Данное обстоятельство существенно упрощает теоретическое описание многих физических свойств КТ, начиная от оптических и заканчивая токовыми [2]. Вместе с тем, теоретическое исследование многочастичных и несколько-частичных систем в КТ также является предметом пристального интереса специалистов, так как полученные результаты могут быть использованы при проектировании полупроводниковых приборов нового поколения.

Простейшим нульмерным комплексом, содержащим несколько частиц, является КТ с двумя электронами – “искусственный атом гелия” [3-7]. Как показывают расчеты, известные методы описания гелиеподобных атомов могут

быть удачно применены для описания свойств двухэлектронных систем в КТ. При этом, последние обладают одним важным преимуществом: в "искусственных атомах гелия" электронными состояниями можно манипулировать за счет изменения как размеров, так и геометрических форм КТ [8,9]. В случае большого количества электронов могут удачно применяться, с одной стороны, метод Хартри-Фока, а с другой – приближение Томаса-Ферми (см., в частности, работы [10-12]).

Одним из наиболее интересных многочастичных эффектов в КТ является реализация в попарно взаимодействующем электронном газе квантовых переходов, характерных для одночастичных систем (теорема Кона) [13,14]. Теорема Кона изначально была сформулирована для случая электронного газа в магнитном поле [15]. Из-за наличия поля электронный газ оказывался локализованным в параболической яме. В дальнейшем, после реализации КТ с параболическим ограничивающим потенциалом, удалось локализовать электронный газ без помощи магнитного поля, благодаря осцилляторному потенциалу стенок КТ (обобщенная теорема Кона). Параболический вид ограничивающего потенциала позволяет в случае электронного газа с парным взаимодействием отделять движение центра масс от относительного и тем самым реализовывать условия для выполнения теоремы Кона. Формирование параболического профиля потенциала ограничения КТ может быть обусловлено, например, взаимной диффузией компонент КТ и окружающей ее среды [16-18]. Вместе с тем, в ряде работ было показано [19,20], что в КТ с сильно сплюснутой и сильно вытянутой эллипсоидальной симметриями также могут быть реализованы условия для возникновения параболического потенциала ограничения стенок КТ. Поэтому вполне логично ожидать, что в таких системах может выполняться обобщенная теорема Кона.

В предлагаемой работе рассмотрено поведение электронного газа в сильно сплюснутой эллипсоидальной КТ (ССЭКТ). Обсуждаются условия, при которых в данной системе могут иметь место квантовые переходы, определяемые теоремой Кона.

2. Теория

Рассмотрим эллипсоидальную КТ, которая имеет форму сильно сплюснутого эллипсоида вращения с непроницаемыми стенками. Потенциал ограничения для каждой из частиц запишется в следующем виде:

$$\hat{V}_{\text{conf}}(x, y, Z) = \begin{cases} 0, & \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \\ \infty, & \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} > 1 \end{cases}, \quad a \gg c, \quad (1)$$

где c и a – соответственно, малая и большая полуоси ССЭКТ. Геометрическая специфика КТ такова, что движение частиц вдоль оси OZ происходит значи-

тельно быстрее, чем в плоскости, перпендикулярной к ней. В рассматриваемой системе находятся N частиц, которые попарно взаимодействуют друг с другом. Нами предполагается, что взаимодействие частиц со стенками КТ вдоль оси OZ настолько сильно, что можно пренебречь межчастичным взаимодействием в этом направлении. Поэтому оператор взаимодействия между электронами $\hat{V}_{\text{int}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ будет функцией только координат в плоскости XOY $\rho(x, y)$ и, при этом, зависящей от взаимного расположения частиц $|\rho_i - \rho_j| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ в плоскости КТ. Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$\hat{H}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^N (\hat{p}_{xj}^2 + \hat{p}_{yj}^2) + \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^N \hat{p}_{zj}^2 + \sum_{j=1}^N \hat{V}_{\text{conf}}(x_j, y_j, z_j) + \hat{V}_{\text{int}}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N). \quad (2)$$

Как следует из (2), в Z -направлении каждый электрон совершает движение в одномерной бесконечно глубокой яме. Согласно адиабатическому приближению, волновую функцию системы ищем в виде

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \chi_{n_{z1}, n_{z2}, \dots, n_{zN}}(z_1(\rho_1), z_2(\rho_2), \dots, z_N(\rho_N)) f(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N). \quad (3)$$

При фиксированном значении координаты ρ движение каждой из частиц будет локализовано в одномерной потенциальной яме с эффективной шириной

$$d_j(\rho_j) = 2c\sqrt{1 - \rho_j^2/a^2}. \quad (4)$$

При сравнительно небольшом количестве частиц можно предположить, что состояния электронов в Z -направлении не зависят друг от друга и поэтому соответствующая волновая функция будет произведением одночастичных волновых функций:

$$\chi_{n_{z1}, n_{z2}, \dots, n_{zN}}(z_1(\rho_1), z_2(\rho_2), \dots, z_N(\rho_N)) = \prod_{j=1}^N \sqrt{\frac{2}{d_j}} \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\pi n_{zj} z_j}{d_j(\rho_j)} \quad (n_{zj} - \text{нечетное}) \\ \cos \frac{\pi n_{zj} z_j}{d_j(\rho_j)} \quad (n_{zj} - \text{четное}) \end{array} \right\}. \quad (5)$$

В свою очередь, для спектра, описывающего состояния системы в Z -направлении, $E_{n_{z1}, n_{z2}, \dots, n_{zN}}^{(z)}$, имеем:

$$E_{n_{z1}, n_{z2}, \dots, n_{zN}}^{(z)}(\rho_1, \dots, \rho_N) = \sum_{j=1}^N \frac{\pi^2 \hbar^2 n_{zj}^2}{2\mu d_j^2(\rho_j)}. \quad (6)$$

Уточним подробнее критерии применимости указанных нами приближений. Между электронами действуют кулоновские силы отталкивания. С другой стороны, на каждый электрон действует также сила со стороны стенок КТ.

При этом энергия размерного квантования определяется областью локализации каждого из электронов в направлении оси OZ . В силу выбранной геометрии КТ следует, что энергия локализации электронов в Z -направлении определяется как

$$E_{n_z}^{(z)}(\rho_j) \sim \hbar^2 / \mu d_{zj}^2(\rho_j). \quad (7)$$

Следовательно, критерием применимости двумерного характера межэлектронного взаимодействия будет

$$\hbar^2 / \mu d_{zj}^2(\rho_{j(i)}) \gg e^2 / \sqrt{(\rho_i - \rho_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, \quad (8)$$

для любых значений i и j . В случае парного взаимодействия оператор взаимодействия \hat{V}_{int} будет иметь вид

$$\hat{V}_{\text{int}}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N U(|\rho_i - \rho_j|). \quad (9)$$

Уравнение Шредингера для рассматриваемой системы имеет следующую форму:

$$\hat{H}\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = E_{n_1, n_2, \dots, n_N} \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (10)$$

Подставляя выражение (3) в (2), а также учитывая формулы (5) и (6), в грубом адиабатическом приближении получим [21]

$$\left\{ \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^N (\hat{p}_{zj}^2 + \hat{p}_{yj}^2) + \sum_{j=1}^N \frac{\pi^2 \hbar^2 n_{zj}^2}{2\mu d_{zj}^2(\rho_j)} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N U(|\rho_i - \rho_j|) \right\} f(\rho_1, \dots, \rho_N) = E_{1, \dots, N} f(\rho_1, \dots, \rho_N). \quad (11)$$

Согласно формуле (4), ширины одномерных ям $d_{zj}(\rho_j)$ параметрическим образом зависят от переменных ρ_j . Если число электронов N небольшое, а размерное квантование в Z -направлении достаточно сильное, то подавляющее большинство из них будет локализовано в геометрическом центре ССЭКТ. Условие локализации электронов в центре КТ математически выразится соотношением $\rho_j \ll a$. С учетом указанного неравенства, разлагая в ряд сумму

$$S_N = \sum_{j=1}^N \left(\pi^2 \hbar^2 n_{zj}^2 / 2\mu d_{zj}^2(\rho_j) \right), \quad (12)$$

после некоторых преобразований приходим к следующему уравнению Шредингера:

$$\left\{ \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^N (\hat{p}_{zj}^2 + \hat{p}_{yj}^2) + \sum_{j=1}^N \frac{\mu \Omega_j^2 \rho_j^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N U(|\rho_i - \rho_j|) \right\} f(\rho_1, \dots, \rho_N) = (E_{1, \dots, N} - S_N^{(0)}) f(\rho_1, \dots, \rho_N), \quad (13)$$

где введены новые обозначения

$$S_N^{(0)} = \sum_{j=1}^N \frac{\pi^2 \hbar^2 n_j^2}{8\mu c^2}, \quad (14)$$

$$\Omega_j^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2 n_j^2}{2\mu^2 a^2 c^2}. \quad (15)$$

Отметим важную деталь, связанную со спецификой рассматриваемой системы. Частота параболического потенциала ограничения Ω_j определяется геометрическими параметрами КТ (большая и малая полуоси), а также квантовым числом Z -направления n_j . Таким образом, варьируя размерами КТ, можно управлять крутизной параболического потенциала ограничения КТ, тем самым создавая наиболее благоприятные условия для локализации электронного газа в середине КТ.

Так как в Z -направлении размерное квантование очень сильное и межуровневые расстояния $\Delta E_{n_j, n_j+1}^{(z)}$ принимают большие значения, то естественно предположить, что электроны будут иметь квантовые числа $n_{z1} = n_{z2} = \dots = n_{zN} = 1$. Следовательно, для Ω_j можно записать:

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \dots = \Omega_N \equiv \Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi \hbar}{\mu a c}. \quad (16)$$

Таким образом, приходим к следующему гамильтониану:

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^N (\hat{p}_{xj}^2 + \hat{p}_{yj}^2) + \frac{\mu\Omega^2}{2} \sum_{j=1}^N (x_j^2 + y_j^2) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (17)$$

Если теперь ввести известные операторы рождения и уничтожения $\hat{C}_{x(y)}^\pm = (\mu\Omega/2\hbar)^{1/2} \sum_{j=1}^N (x_j(y_j) \mp i\hat{p}_{x(y)j}/\mu\Omega)$ [14], то прямым вычислением можно убедиться, что имеют место следующие коммутационные соотношения:

$$[\hat{V}_{\text{int}}, \hat{C}_x^\pm] = [\hat{V}_{\text{int}}, \hat{C}_y^\pm] = 0, \quad (18)$$

$$[\hat{H}_0, \hat{C}_x^\pm] = \pm \hbar \Omega \hat{C}_x^\pm, \quad [\hat{H}_0, \hat{C}_y^\pm] = \pm \hbar \Omega \hat{C}_y^\pm, \quad (19)$$

где

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^N (\hat{p}_{xj}^2 + \hat{p}_{yj}^2) + \frac{\mu\Omega^2}{2} \sum_{j=1}^N (x_j^2 + y_j^2). \quad (20)$$

С учетом соотношений (18) для гамильтониана взаимодействующих частиц (17) получим аналогичные (19) коммутационные соотношения:

$$[\hat{H}, \hat{C}_x^\pm] = \pm \hbar \Omega \hat{C}_x^\pm, \quad [\hat{H}, \hat{C}_y^\pm] = \pm \hbar \Omega \hat{C}_y^\pm. \quad (21)$$

Если функция f_{n_x, n_y} является собственной функцией оператора \hat{H} , которому соответствует собственное значение E_{n_x, n_y} , то из (21) следует, что функция $\hat{C}_x^+ f_{n_x, n_y}$ также будет собственной функцией оператора \hat{H} , но теперь с энергией

$$\hat{C}_x^+ f_{n_x, n_y} \rightarrow E_{n_x, n_y} + \hbar\Omega. \quad (22)$$

В свою очередь, для $\hat{C}_x^- f_{n_x, n_y}$ получим

$$\hat{C}_x^- f_{n_x, n_y} \rightarrow E_{n_x, n_y} - \hbar\Omega, \quad (23)$$

и то же самое можно записать для y -компоненты [22].

Пусть теперь на систему падает длинноволновое электромагнитное возмущение, электрическая составляющая которого имеет вид

$$\mathbf{E}(t) = e^{-i\omega t} \mathbf{E}_0 (\cos\theta, \sin\theta). \quad (24)$$

В указанном приближении оператор возмущения запишется в форме

$$\hat{H}_1 = -e \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_j \mathbf{E}(t). \quad (25)$$

Прямым вычислением можно убедиться, что

$$\sum_{j=1}^N x_j(y_j) = (\hbar/\mu\Omega)^{1/2} (\hat{C}_{x(y)}^+ + \hat{C}_{x(y)}^-). \quad (26)$$

Рассмотрим воздействие оператора \hat{H}_1 на собственные волновые функции $f_{n_x, n_y}^{(0)}$ гамильтониана \hat{H}_0 . Из теории квантовых переходов следует, что действие \hat{H}_1 на $f_{n_x, n_y}^{(0)}$ свяжет собственное состояние $E_{n_x, n_y}^{(0)}$ гамильтониана \hat{H}_0 с состояниями $E_{n_x, n_y}^{(0)} \pm \hbar\Omega$, которые будут соответствовать собственным функциям $\hat{C}_x^\pm f_{n_x, n_y}^{(0)}$, а также $\hat{C}_y^\pm f_{n_x, n_y}^{(0)}$. С другой стороны, согласно (26), действие оператора \hat{H}_1 на функцию f_{n_x, n_y} свяжет состояние E_{n_x, n_y} теперь уже гамильтониана (19) с состояниями $E_{n_x, n_y} \pm \hbar\Omega$. Таким образом, и в случае электронного газа с учетом межчастичного взаимодействия, и в случае, когда это взаимодействие отсутствует, под воздействием длинноволнового излучения в обоих случаях имеют место дипольные переходы, определяемые частотами $\pm\Omega$, что и является сутью теоремы Кона.

3. Заключение

Таким образом, в данной работе нами показана возможность обнаружения одночастичных переходов в многочастичной системе для случая электронного газа, находящегося в ССЭКТ. При этом формирование параболического потенциала ограничения электронного газа обусловлено специфической геометрией КТ.

Работа выполнена в рамках государственной базовой программы Республики Армения "Исследования физических свойств квантовых наноструктур со сложной геометрией и разными ограничивающими потенциалами".

1. Э.М.Казарян, С.Г.Петросян. Физические основы полупроводниковой наноэлектроники. Ереван, изд. РАУ, 2005.
2. D.Bimberg, M.Grundman, N.Ledentsov. Quantum Dot Heterostructures. New York, Wiley, 1999.
3. D.Pfannkuche, R.Gerhardts. Phys. Rev. B, 44, 13132 (1991).
4. D.Pfannkuche, R.Gerhardts, P.Maksym, V.Gudmundsson. Physica B, 189, 6 (1993).
5. М.Encinosa, В.Еtemadi. Physica B, 266, 361 (1999).
6. Т.Sako, G.H.F.Diercksen. J. Phys. B, 36, 1681 (2003).
7. О.Ciftja, М.G.Faruk. Phys. Rev. B, 72, 205334 (2005).
8. N.G.Aghekyan, E.M.Kazaryan, A.A.Kostanyan, H.A.Sarkisyan. Proc. SPIE, 7998, 79981C (2010).
9. N.G.Aghekyan, E.M.Kazaryan, A.A.Kostanyan, H.A.Sarkisyan. Superlattice Microst., 50, 199 (2011).
10. R.Pino. Phys. Rev. B, 58, 4644 (1998).
11. R.Pino. Eur. Phys. J. B, 13, 723 (2000).
12. L.Martín-Moreno. Sol. St. Electr., 37, 1179 (1994).
13. P.A.Maksym, Т.Chakraborty. Phys. Rev. Lett., 65, 108 (1990).
14. F.M.Peeters. Phys. Rev. B, 42, 1486 (1990).
15. W.Kohn. Phys. Rev., 123, 1242 (1961).
16. J.A.Barker, E.P.O'Reilly. Physica E, 4, 231 (1999).
17. Л.С.Петросян. Изв. НАН Армении, Физика, 37, 173 (2002).
18. В.М.Мугнечян, А.А.Киракосян. Изв. НАН Армении, Физика, 42, 83 (2007).
19. Д.Б.Айрапетян. Изв. НАН Армении, Физика, 42, 442 (2007).
20. K.G.Dvoyan, D.B.Hayrapetyan, E.M.Kazaryan, A.A.Tshantshapanyan. Nanoscale Res. Lett., 2, 601 (2007).
21. А.Мигдал, В.Крайнов. Приближенные методы квантовой механики. М., Наука, 1966.
22. H.A.Sarkisyan. Phys. Part. Nucl. Lett., 4, 51 (2007).

ON THE POSSIBILITY OF IMPLEMENTATION OF KOHN'S THEOREM
IN THE CASE OF ELLIPSOIDAL QUANTUM DOTS

D.B. HAYRAPETYAN, E.M. KAZARYAN, H.A. SARKISYAN

An electron gas in a strongly oblated ellipsoidal quantum dot with impenetrable walls is considered. Influence of the walls of the quantum dot is assumed to be so strong in the direction of the minor axis (the axis OZ) that the Coulomb interaction between electrons in this direction can be neglected and may be considered as two-dimensional, coupled. On the basis of geometric adiabaticity it is shown that in the case of a few-particle gas a powerful repulsive potential of the quantum dot walls has a parabolic form and localizes the dot in the geometric center of the structure. Due to this fact, conditions occur to implement the generalized Kohn theorem in this system.

УДК 621.312

ОСТВАЛЬДОВСКОЕ СОЗРЕВАНИЕ ПРИ НАНОИНЖЕНЕРИИ СФЕРИЧЕСКИХ И ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫХ КВАНТОВЫХ ТОЧЕК InAsSbP НА ПОВЕРХНОСТИ $\text{InAs}(100)$

В.М. АРУТЮНЯН^{1†}, К.М. ГАМБАРЯН¹, В.Г. АРУТЮНЯН¹,
П.Г. СУКИАССИАН², Т. БОЕК³, Я. ШМИДТБАУЭР³, Р. БАНСЕН³

¹Ереванский государственный университет, Армения

²Парижский университет Орсе, Париж, Франция

³Институт по росту кристаллов, Берлин, Германия

[†]e-mail: aroutiounv1@yahoo.com

(Поступила в редакцию 12 июля 2012 г.)

Представлены результаты выращивания квазитрехкомпонентных InAsSbP сферических и эллипсоидальных квантовых точек (КТ) методом жидкофазной эпитаксии на подложках $\text{InAs}(100)$. Срастание и укрупнение КТ за счет процесса оствальдовского созревания исследованы с помощью атомно-силового и сканирующего электронного микроскопов. Выращены эллипсоидальные КТ, продолговатые в направлении $[010]$ и сплюснутые в $[001]$. Измерены коэффициенты растянутости эллипсоидальных КТ во всех трех направлениях. Показано, что процесс растягивания сферических КТ в эллипсоидальные начинается с размера их диаметра ~ 50 нм. Обнаружено, что при увеличении времени роста происходит изменение функции распределения числа КТ от их среднего размера от распределения типа функции Грама-Шарлиера к гауссовскому, с последующим переходом в распределение типа Лифшица-Слезова.

1. Введение

Возрастающий интерес к полупроводниковым наноструктурам, в первую очередь, обусловлен существованием широкого спектра возможностей для управления свойствами полупроводников. В квантовых точках (КТ) ограничение движения свободных носителей во всех трех направлениях, приводящее к эффекту размерного квантования, открывает дополнительную возможность эффективного управления свойствами приборов на основе наноструктур путем изменения их размеров [1]. Модифицированная плотность состояний КТ, нанопроволок, совместных структур КТ-нанопоры приводит к существенному улучшению рабочих оптоэлектронных параметров таких полупроводниковых приборов, как лазеры, фотодетекторы и т.д. В частности, применение КТ в полупроводниковых лазерах приводит к повышению температурной стабильности их параметров и уменьшению пороговых токов, увеличению спектра фоточувствительности фо-

тодетекторов и сдвигу в длинноволновую область спектра, к увеличению к.п.д. солнечных элементов и т.д. [2-4]. С точки зрения фундаментальной физики и технологии исследованы также такие явления, как взаимодействия в свдвоенных КТ [5], в кооперативных структурах КТ–нанопоры [6-8], влияние КТ на вольт-амперные и оптоэлектронные характеристики приборных структур [9,10].

Предложены разные методы и подходы для улучшения однородности распределения по размерам самоорганизованных КТ [11-13]. Наноструктуры изготавливаются с использованием нанолитографии или методом самоорганизации – методом Странски–Крастанова (С–К) [14], который в последнее время является наиболее часто используемым в связи с возможностью выращивания бездислокационных наноструктур. В методе С–К релаксация эластичного (деформационного) напряжения, как принцип зародышеобразования, в зависимости от условий роста может происходить за счет формирования КТ, квантовых проволок и колец, или кооперированных структур КТ–нанопоры [7,8,15-17].

В методе С–К последняя стадия зародышеобразования в твердых и жидких растворах часто характеризуется ростом наиболее крупных (сверхкритических) кластеров и растворением малых (субкритических), приводящих к уменьшению плотности кластеров с одновременным увеличением их размеров. Такой процесс укрупнения кластеров в литературе обычно называется процессом остальдовского созревания, в связи с его исследованиями, проведенными еще в начале 20-го века [18]. Первое адекватное теоретическое обоснование этого явления было дано Лифшицем и Слезовым в 1958 г. [19], которое впоследствии было расширено Вагнером [20].

Другим наиболее перспективным методом создания наноструктур является «капельная» эпитаксия (КЭ) (droplet epitaxy) [21,22], суть которой заключается в выращивании наноструктур из наноразмерных капель металлических расплавов. Физика зародышеобразования при КЭ аналогична росту эпитаксиальных структур методом жидкофазной и равновесной электрожидкофазной эпитаксий [23,24], когда подпитка рабочего раствора-расплава осуществляется из «жидких источников», насыщенных соответствующими компонентами. В зависимости от технологических условий роста и кристаллографической ориентации подложки методом КЭ выращены как КТ, так и квантовые кольца и другие наноструктуры [21]. КЭ была успешно применена при выращивании монокристаллического кремния на аморфной подложке из расплава In–Si–Mo [25], а также для выращивания германиевых нанопроволок на поверхности кремния из расплавов золота и индия [26,27].

Бинарные соединения InAs, InP, InSb, а также их узкозонные трех- и четырехкомпонентные твердые растворы представляют наибольший интерес, так как они позволяют перекрывать среднюю (3–5 мкм) инфракрасную область спектра посредством соответствующего подбора состава твердого раствора. С этой точки зрения, InAsSbP четырехкомпонентные эпитаксиальные слои и наноструктуры являются уникальными в классе полупроводниковых соединений A^3B^5 . Это

соединение было успешно выращено на подложках InAs(100) методом как жидкофазной (ЖЭ), так и электрожидкостной (ЭЖЭ) эпитаксии [23,24].

В данной работе представлены результаты исследований по выращиванию сферических и эллипсоидальных InAsSbP КТ методом жидкофазной эпитаксии на подложках InAs (100) с использованием принципа С–К. Процесс оствальдовского созревания выращенных наноструктур исследовался с помощью атомно-силового (АСМ) и сканирующего электронного (СЭМ) микроскопов.

2. Методика эксперимента

При выращивании наноструктур был использован метод жидкофазной эпитаксии с шаговым переохлаждением рабочего раствора-расплава и с использованием модифицированной кристаллизационной ячейки. В этой ячейке процесс роста осуществляется из достаточно тонкой (высотой ~500 мкм) жидкой фазы для предотвращения влияния конвекции и температурных градиентов в жидкой фазе на процесс кристаллизации, а также для улучшения воспроизводимости результатов. В соответствии с фазовой диаграммой системы InAs–InSb–InP [8], начальный состав четырехкомпонентной жидкой фазы был выбран таким образом, чтобы состав твердой фазы соответствовал твердому раствору $\text{InAs}_{0.81}\text{Sb}_{0.06}\text{P}_{0.13}$, который решеточно сопряжен с подложкой InAs. В качестве подложки нами были использованы промышленные кристаллы нелегированного InAs (100) толщиной 450 мкм. Для осуществления процесса роста наноструктур по методу С–К, концентрация сурьмы и фосфора в жидкой фазе выбиралась таким образом, чтобы относительная разница постоянных решеток смачиваемого слоя и подложки составляла 3% при температуре роста $T = 550^\circ\text{C}$. Применение четырехкомпонентной системы InAsSbP позволяет не только гибко управлять значением разницы постоянных решеток, но и ее знаком. В частности, при увеличении концентрации сурьмы (относительно решеточно сопряженного состава) смачиваемый слой приобретает выпуклую форму, а при увеличении концентрации фосфора – становится вогнутой. Релаксация упругого напряжения в первом случае приводит к формированию КТ, а во втором – к образованию нанопор. Более детальное описание технологических условий выращивания представленных и исследованных в данной работе КТ описаны в [6-8,10]. Процессы срачивания и укрупнения КТ при оствальдовском созревании были исследованы с помощью атомно-силового микроскопа "Asylum Research MFP-3D" и сканирующего электронного микроскопа высокого разрешения "FEI Nova 600–Dual Beam".

3. Результаты и обсуждение

СЭМ изображение InAsSbP сферических КТ (с поверхности $S = 17 \times 17$ мкм²), выращенных на подложке InAs (100) методом ЖЭ, представлено на рис.1а. Данная структура была выращена из четырехкомпонентной In–As–Sb–P жидкой фазы с высотой 500 мкм при начальной температуре роста $T = 550^\circ\text{C}$ и длительности контакта рабочего раствора-расплава с поверхностью подложки, равной 20 мин. АСМ изображение области, отмеченной белой окружностью на

рис.1а, вместе с АСМ профилями по направлениям, показанным стрелками на рис.1б, представлены на рис.1б,с, соответственно.

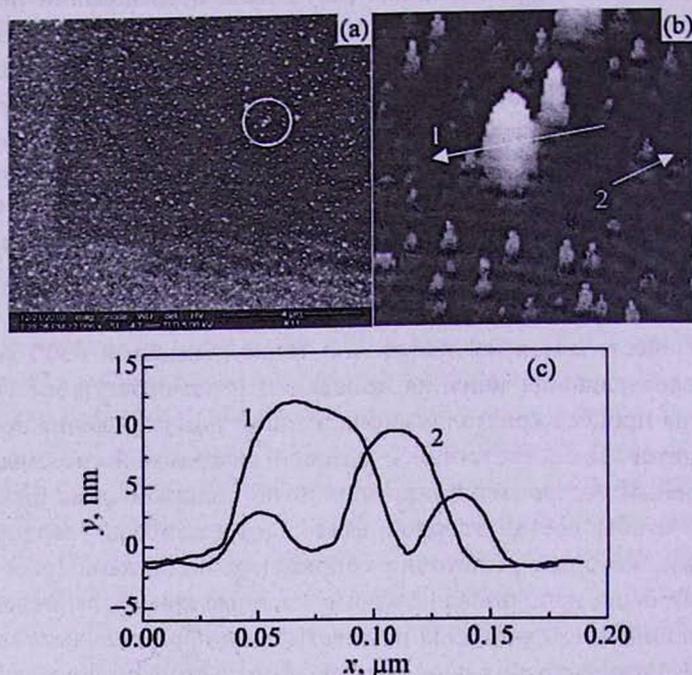


Рис.1. (а) СЭМ ($S = 17 \times 17$ мкм²) и (б) АСМ изображения сферических InAsSbP КТ, выращенных на подложке InAs (100) методом ЖЭ, (с) АСМ профили по направлениям, показанным стрелками на (б).

На рис.1а прослеживается процесс оствальдовского созревания и бимодальный рост КТ. Во-первых, виден массив достаточно однородно распределенных на сравнительно большой поверхности (~ 300 мкм²) КТ малых размеров, и во-вторых, видны также КТ с большим диаметром, но с намного меньшей поверхностной плотностью. Статистическая обработка АСМ измерений показала, что поверхностная плотность малых и в основном сферических КТ равна $(6-8) \times 10^9$ см⁻², а высота и средний диаметр КТ лежат в пределах 0.5–20 нм и 10–50 нм, соответственно. Поверхностная плотность больших КТ на порядок меньше, а их средняя высота и средний диаметр равны соответственно ~ 25 нм и ~ 100 нм. На СЭМ и АСМ изображениях видна начальная стадия оствальдовского созревания КТ, а именно: видно сращивание КТ и то, что области вокруг больших КТ свободны от малых. С нашей точки зрения, это свидетельствует о том, что укрупнение больших КТ происходит за счет растворения малых КТ, с последующей поверхностной диффузией растворенного материала по направлению к большим КТ.

Более детальный анализ измерений показал, что КТ малых размеров в основном имеют сферическую форму, а большие КТ, начиная с диаметра ~ 50 нм –

эллипсоидальную с удлинением в направлении [010]. На рис.2 представлены СЭМ и АСМ изображения эллипсоидальных InAsSbP КТ, выращенных на подложке InAs(100) методом ЖЭ. Приведены также АСМ профили по направлениям, показанным на рис.2b. Поверхностная плотность эллипсоидальных КТ составляла $(5-8) \times 10^8 \text{ см}^{-2}$.

Используя данные АСМ измерений, проведенных на 30 КТ, мы рассчитали коэффициенты удлинения эллипсоидальных КТ (L_x/L_y , L_x/L_z , и L_y/L_z ,) во всех трех направлениях, как это показано на рис.3а, а результаты расчетов подытожены в приложенной к рисунку таблице. Из полученных результатов можно заключить, что эллипсоидальные КТ сравнительно слабо вытянуты в направлении [010] и сильно сплющены в направлении [001]. Соответственно, более сильная локализация дырок (в нашей системе КТ второго типа) ожидаема именно в направлении, перпендикулярном к поверхности подложки. Отметим также, что аналогичное изменение формы поверхности КТ от сферической к островковому было замечено для InAsSb наноструктур, выращенных на подложке InP [28].

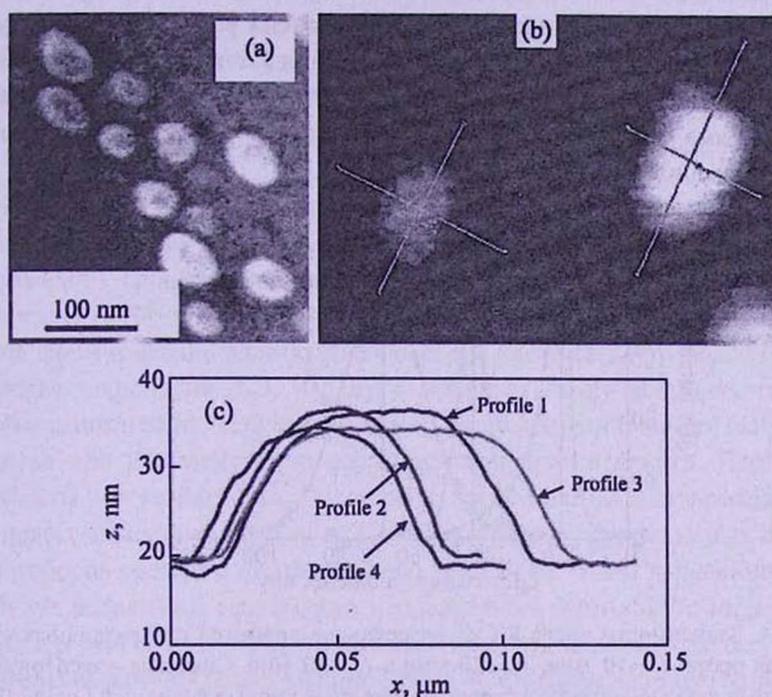


Рис.2. (а) СЭМ и (b) АСМ изображения эллипсоидальных InAsSbP КТ, выращенных на подложке InAs(100) методом ЖЭ, (с) АСМ профили по направлениям, показанным на (b).

Далее, анализируя данные АСМ профилей эллипсоидальных КТ, мы обнаружили линейную зависимость L_x/L_y от L_x , как это представлено на рис.3b. После линейной аппроксимации экспериментальных данных, с последующей экстраполяцией до пересечения с прямой $L_x/L_y = 1$, был найден критический

размер КТ – $L_x^{crit} = 50$ нм, с которого, по нашему мнению, и начинается трансформация сферических КТ в эллипсоидальные.

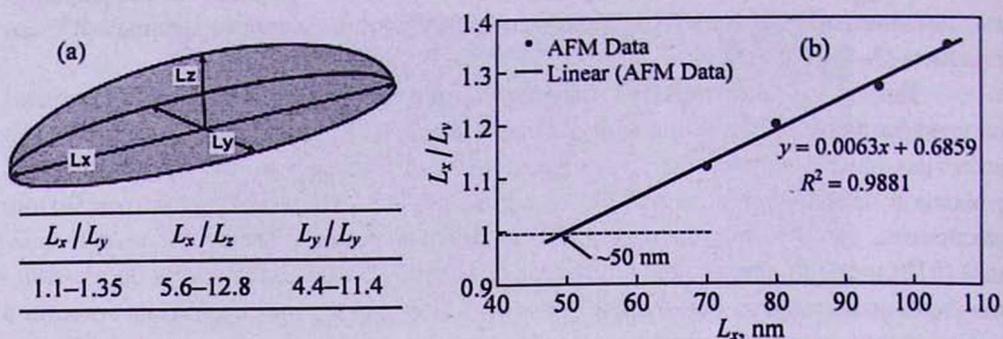


Рис.3. а) – Численные значения коэффициентов продолговатости эллипсоидальных КТ в направлениях X , Y и Z , б) зависимость L_x/L_y от L_x .

Как видно из рис.4, при увеличении времени роста КТ происходит существенная трансформация функции распределения КТ по их размерам. В частности, распределение КТ, выращенных при $t_1 = 10$ мин, хорошо аппроксимируется функцией Грама–Шарлиера, а при $t_2 = 20$ мин и $t_3 = 30$ мин – гауссианом и функцией Лифшица–Слезова, соответственно.

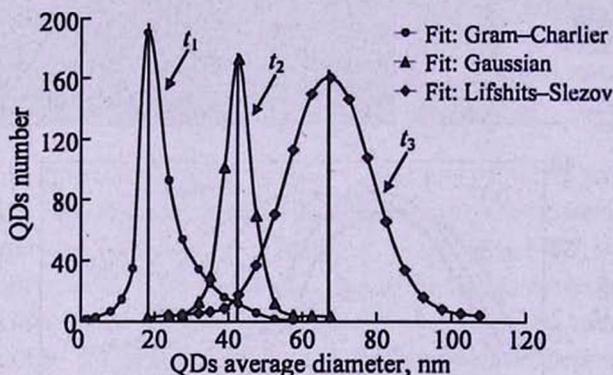


Рис.4. Зависимости числа КТ от их среднего диаметра при различных временах роста: $t_1 = 10$ мин, $t_2 = 20$ мин и $t_3 = 30$ мин. Символы – экспериментальные данные, линии – аппроксимационные кривые функцией Грама–Шарлиера, гауссианом и функцией типа Лифшица–Слезова, соответственно.

Аналогичное изменение функции распределения было замечено при зародышеобразовании кремниевых nanoостровков на поверхности Si (001) [29]. В данной работе путем детального анализа индивидуальных островков и близлежащей к ним области подложки было показано, что сращивание и укрупнение КТ происходит за счет растворения маленьких КТ с последующей поверхностной диффузией растворенного материала к более крупным КТ, приводящей к их

большему укрупнению. Мы предполагаем, что аналогичный механизм укрупнения КТ происходит также в нашем случае. Наши исследования также показали, что при дальнейшем увеличении времени роста происходит трансформация эллипсоидальных КТ в субмикрометрические удлинённые островки пирамидальной формы.

Безусловно, в исследуемой четырехкомпонентной системе InAsSbP релаксация эластического напряжения в смачиваемом слое происходит в основном за счет поверхностной диффузии сурьмы, что является основным механизмом зародышеобразования КТ аналогично механизму в классической системе InAs/InSb [30]. Однако, в нашей системе наличие в растворе-расплаве и в смачиваемом слое также атомов фосфора и их поверхностная диффузия позволяют выращивание также квантовых колец. В отличие от традиционного и довольно сложного механизма создания квантовых колец [31], в нашем случае, когда атомам фосфора энергетически выгодно мигрировать к центру уже образовавшейся, но еще эластически напряженной КТ, происходит дополнительная релаксация напряжения в центре КТ, приводящая к образованию квантового кольца [32]. При жидкофазной эпитаксии КТ этого механизма зародышеобразования наноструктур можно добиться путем увеличения равновесной концентрации фосфора в рабочем растворе-расплаве.

4. Заключение

Представлены результаты выращивания четырехкомпонентных сферических и эллипсоидальных InAsSbP КТ методом модифицированной ЖЭ на подложках InAs (100). Показано, что эллипсоидальные КТ вытянуты в [010] и сильно сплющены в [001] направлениях. Исследовано влияние оствальдовского созревания на формирование эллипсоидальных КТ. Показано, что более простая и менее дорогая технология ЖЭ, наряду с молекулярно-пучковой эпитаксией и газофазной эпитаксией из металлоорганических соединений, может быть успешно применена при наноинженерии квантоворазмерных структур. Представленные результаты могут быть использованы при создании полупроводниковых структур нового поколения на основе КТ, в частности, перспективных оптоэлектронных приборов среднего инфракрасного диапазона. Наши дальнейшие исследования будут посвящены созданию и исследованию р-InAsSbP/n-InAs диодных гетероструктур с КТ в области пространственного заряда р-п перехода.

Авторы выражают благодарность проф. Р. Форнари за плодотворную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. D.Bimberg, M.Grundmann, N.N.Ledentsov. Quantum Dot Heterostructures. New York, Wiley, 1998.
2. P.Bhattacharya, X.H.Su, S.Chakrabarti, et al. Appl. Phys. Lett., 86, 191106 (2005).
3. A.Rogalski. Acta Phys. Pol. A, 116, 389 (2009).
4. V.M.Aroutiounian, S.G.Petrosian, A.Khachatryan, K.Touryan. J. Appl. Phys., 89, 2268 (2001).

5. A.M.Rudin, L.J.Guo, et al. Appl. Phys. Lett., 73, 3429 (1998).
6. O.Marquardt, T.Hickel, J.Neugebauer, K.M.Gambaryan, V.M.Aroutiounian. J. Appl. Phys., 110, 043708 (2011).
7. K.M.Gambaryan. Nanoscale Res. Lett., 5, 587 (2010).
8. V.M.Aroutiounian, K.M.Gambaryan, P.G.Soukiassian. Surf. Sci., 604, 1127 (2010).
9. H.Ishikuro, T.Hiramoto. Appl. Phys. Lett., 71, 3691 (1997).
10. K.M.Gambaryan, V.M.Aroutiounian, V.G.Harutyunyan. Infrared Phys. Techn., 54, 114 (2011).
11. M.Kitamura, M.Nishoka, J.Oshinowo, Y.Arakawa. Appl. Phys. Lett., 66, 3663 (1995).
12. Q.A.Xie, S.B.Samavedam, M.Bulsara, et al. Appl. Phys. Lett., 71, 3567 (1997).
13. K.Kamath, N.Chervela, K.K.Linder, et al. Appl. Phys. Lett., 71, 927 (1997).
14. I.Stranski, L.Krastanow. Math.-Naturwiss., 146, 797 (1938).
15. R.J.Warburton, C.Schulhauser, D.Haft, et al. Phys. Rev. B, 65, 113303 (2002).
16. K.D.Moiseev, M.P.Mikhailova, Ya.A.Parkhomenko, et al. Proc. of SPIE: Quantum dots, particles and nanoclusters-VI 7224 (6), 25-28 January 2009, San Jose, USA.
17. K.M.Gambaryan, V.M.Aroutiounian, T.Boeck, M.Schulze, P.G.Soukiassian. J. Phys. D: Appl. Phys. (FTC), 41, 162004 (2008).
18. W.Ostwald. Analytical Chemie. Leipzig, Germany, 1931.
19. I.M.Lifshitz, V.V.Slezov. J. Exper. Theor. Phys., 35, 479 (1958).
20. C.Wagner. Z. Electrochemie, 65, 581 (1961).
21. J.H.Lee, Zh.M.Wang, E.S.Kim, et al. Nanoscale Res. Lett., 5, 308 (2010).
22. Z.M.Wang, K.Holmes, Y.Mazur, et al. Nanoscale Res. Lett., 1, 57 (2006).
23. V.A.Gevorkyan, V.M.Aroutiounian, K.M.Gambaryan, M.S.Kazaryan, K.J.Touryan, M.W.Wanlass. Thin Solid Films, 451-452, 124 (2004).
24. V.A.Gevorkyan, V.M.Aroutiounian, K.M.Gambaryan, A.H.Arakelyan, I.A.Andreev, L.V.Golubev, Yu.P.Yakovlev. Techn. Phys., 52, 339 (2007).
25. R.Heimbürger, Th.Teubner, N.Dermann, H.-P.Schramm, T.Boeck, R.Fornari. J. of Cryst. Growth, 312, 1632 (2010).
26. A.Kramer, T.Boeck, H.-P.Schramm, R.Fornari. Physica E, 40, 2462 (2008).
27. A.Kramer, M.Albrecht, T.Boeck, et al. Superlattice Microst., 46, 277 (2008).
28. W.Lei, H.H.Tan, C.Jagadish. Appl. Phys. Lett., 99, 193110 (2011).
29. N.C.Bartelt, W.Theis, R.M.Tromp. Phys. Rev. B, 54, 11741 (1996).
30. K.D.Moiseev, Ya.A.Parkhomenko, et al. Tech. Phys. Lett., 33, 295 (2007).
31. J.-H. Dai, J.-H. Lee, S.-C. Lee. IEEE Photonic Technology Letters, 20, 165 (2008).
32. K.M.Gambaryan, V.M.Aroutiounian, V.G.Harutyunyan, O.Marquardt, P.G.Soukiassian. Appl. Phys. Lett., 100, 033104 (2012).

THE OSTWALD RIPENING AT NANOENGINEERING OF InAsSbP SPHERICAL AND ELLIPSOIDAL QUANTUM DOTS ON InAs (100) SURFACE

V.M. AROUTIOUNIAN, K.M. GAMBARYAN, V.G. HARUTYUNYAN,
P.G. SOUKIASSIAN, T. BOECK, J. SCHMIDTBAUER, R. BANSEN

We present the results of a quasi-ternary InAsSbP spherical and ellipsoidal quantum dots (QDs) growth on InAs (100) surface by liquid phase epitaxy. The QDs coarsening due to coalescence and Ostwald ripening was investigated by atomic force and scanning electron microscopy. Ellipsoidal QDs prolated in [010] and oblated in [001] directions were grown. Elongation ratios for the ellipsoidal QDs are measured. It is shown that elongation of spherical QDs to ellipsoidal is started at QDs diameter of ~50 nm. Shape transformation of the QDs' distribution functions from the Gram-Charlier-like to the Gaussian and then to the Lifshits-Slezov-like distribution was revealed at increasing the nucleation time.

УДК 541.14

ИССЛЕДОВАНИЕ УГЛЕРОДНЫХ МИКРОСФЕР, ПОЛУЧЕННЫХ ТВЕРДОФАЗНЫМ ПИРОЛИЗОМ БЕЗМЕТАЛЬНОГО ФТАЛОЦИАНИНА

А.С. МАНУКЯН¹, А.А. МИРЗАХАНЯН¹, Т.К. ХАЧАТРЯН¹,
Г.Р. БАДАЛЯН¹, Г.М. АРЗУМАНЯН², Э.Г. ШАРОЯН^{1†}

¹Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения

²Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

†e-mail: sharoyan@ipr.sci.am

(Поступила в редакцию 18 августа 2012 г.)

Методом твердофазного пиролиза безметалльного фталоцианина ($H_2C_{32}N_8H_{16}$) получены углеродные микросферы со средним диаметром 2–3.5 мкм и достаточно узким распределением по размерам. Элементный состав, структура и морфология образцов исследованы методами сканирующей электронной микроскопии, энергодисперсионного рентгеновского микроанализа и рентгеноструктурного анализа. В микросферах обнаружен сильный электронный парамагнетизм.

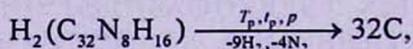
1. Введение

В последние годы, особенно после открытия новых модификаций углерода (фуллерены, нанотрубки, нанокapsулы, графен и т.п.) значительно возрос интерес к углеродным структурам, в частности, к углеродным нано- и микросферам (см., например, обзор [1]). Данные материалы обладают уникальными свойствами и могут быть использованы в качестве особо прочных композитных материалов; электродных материалов для литиевых аккумуляторов, черных пигментов для ксерографии, мезопористых материалов для очистки жидкостей и хранения газов (в частности, водорода), смазочных материалов, в биологии, биомедицине и т.д. [1]. В настоящее время известно несколько методов получения углеродных нано- и микросфер – в частности, дуговой разряд, лазерная абляция, гидротермальный метод, химическое газофазное осаждение и др. [2-12]. Однако эти методы требуют сложного оборудования и состоят из нескольких стадий.

В настоящей работе предложен простой, одностадийный метод синтеза углеродных микросфер с достаточно узким распределением по размерам. Этот метод основан на твердофазном пиролизе безметалльного фталоцианина. Отметим, что данный метод ранее был использован нами для получения наночастиц Ni, Cu и наносплавов Ni–Cu в различных углеродных матрицах [13-16].

2. Методика эксперимента

Для синтеза углеродных микросфер мы использовали предварительно очищенный двойной возгонкой поликристаллический порошок безметалльного фталоцианина ($H_2C_{32}N_8H_{16}$). Процесс твердофазного пиролиза в данном случае можно представить в следующем виде:



где T_p – температура пиролиза (650–1000°C), t_p – время пиролиза (3–450 мин), и P – самогенерированное давление в реакционной камере. Пиролиз проводился в замкнутой ампуле из кварцевого стекла объемом до 100 см³ (с начальным давлением 0.1 Па).

Элементный состав, структура и морфология образцов исследовались с помощью сканирующего электронного микроскопа (СЭМ) Vega TS 5130 MM (Tescan), энергодисперсионного рентгеновского микроанализатора INCA Energy 300 и рентгеновского дифрактометра ДРОН-3 (излучение $CuK\alpha$). Магнитные свойства углеродных микросфер изучались с помощью ЭПР-спектрометра Х-диапазона в области температур 77–300 К.

3. Результаты и обсуждение

Полученные образцы представляли собой устойчивые на воздухе темные порошки с плотностью ≈ 0.9 г/см³. На рис.1 приведены СЭМ-изображения образцов, синтезированных при различных условиях пиролиза. Видно, что форма микросфер близка к сферической, а их размеры зависят от условий пиролиза.

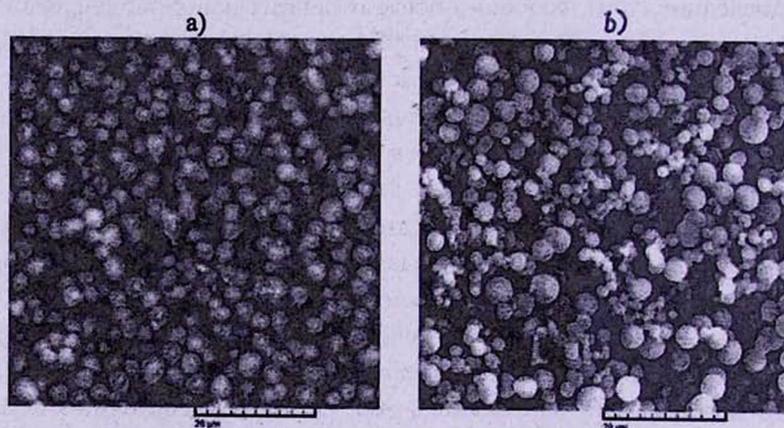


Рис.1. СЭМ-изображения углеродных микросфер, полученных при $T_p = 700^\circ\text{C}$, $t_p = 30$ мин (а) и $T_p = 900^\circ\text{C}$, $t_p = 30$ мин (б).

Существенно, что при низких температурах пиролиза (650–900°C) практически все образцы состоят только из углеродных микросфер, а выход конечного материала составляет 70–80 вес%. Из СЭМ-изображений разрушенных

микросфер видно, что все они являются сплошными, заполненными. Из элементного анализа следует, что микросферы в основном состоят из атомов углерода; лишь при низких температурах пиролиза ($T_p < 900^\circ\text{C}$) в них есть также небольшое количество азота (<10 ат%).

Средние размеры углеродных микросфер для ряда образцов были определены из СЭМ-изображений путем анализа 200–250 микросфер для каждого образца. Распределения размеров микросфер достаточно хорошо описываются гауссовским распределением; в частности, на рис.2 представлено наиболее узкое распределение (соответствующее оптимальным условиям пиролиза) со средним диаметром $d_m \approx 3.35$ мкм и средним отклонением ± 0.04 мкм.

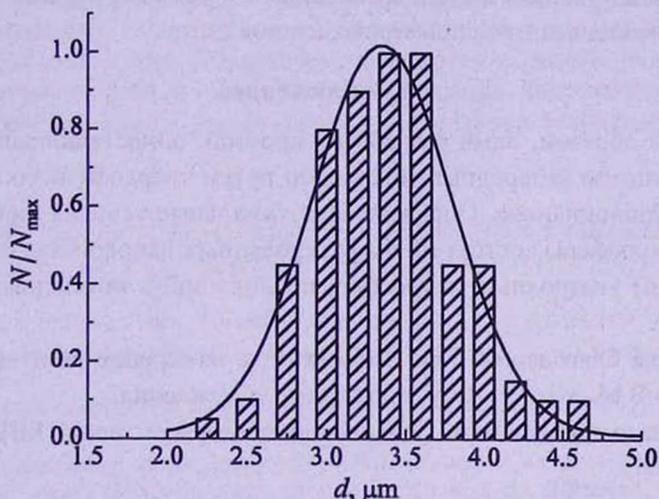


Рис.2. Распределение по размерам углеродных микросфер, полученных при 700°C , 30 мин.

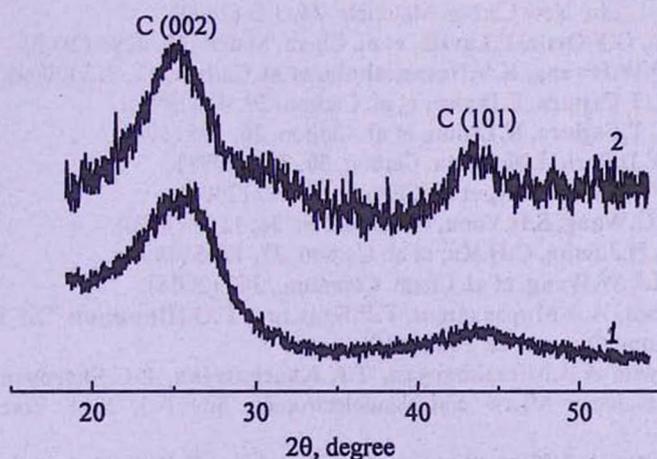


Рис.3. Спектры рентгеновской дифракции углеродных микросфер, полученных при 700°C , 30 мин (1) и 900°C , 30 мин (2).

Как известно, структура углеродных материалов может меняться в широких пределах – от аморфного углерода до кристаллического графита [17]. С целью определения структуры полученных нами образцов были измерены их дифракционные рентгеновские спектры (рис.3). В спектрах видны 2 широких пика на $\sim 25^\circ$ и $\sim 43^\circ$, которые соответствуют отражениям от графитовых плоскостей (002) и (101). Из анализа спектров следует, что углеродные микросферы состоят из слабографитированных нанокристаллитов с межплоскостным расстоянием d_{002} от ≈ 0.345 нм до ≈ 0.357 нм (в зависимости от условий пиролиза). Отметим, что углеродные микросферы обладают сильным парамагнетизмом: в спектре ЭПР наблюдается узкий интенсивный сигнал с g -фактором 2.003. По нашему мнению, данный сигнал в основном обусловлен парамагнитными центрами, возникающими из-за примесных атомов азота.

4. Заключение

Таким образом, нами разработан простой, одностадийный и эффективный метод синтеза углеродных микросфер путем твердофазного пиролиза безметалльного фталоцианина. Определены оптимальные условия пиролиза и показано, что микросферы состоят из графитированных нанокристаллитов. Выявлен парамагнетизм углеродных микросфер, приводящий к интенсивному и узкому сигналу ЭПР.

Авторы благодарны Г.О. Шириняну за измерение рентгеновских спектров, а также В.М. Мыхитаряну за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МИЦНТ №11710 (Дубна, ОИЯИ).

ЛИТЕРАТУРА

1. K.C.Hwang, J. Phys. D: Appl. Phys., 43, 374001 (2010).
2. J.Liu, P.Tian, J.Ye, et al. Chem. Lett., 38, 948 (2009).
3. Y.-Z.Mi, Y.-L.Liu. New Carbon Materials, 24, 375 (2009).
4. R.Alcantara, G.F.Ortiz, P.Lavela, et al. Chem. Mater., 18, 2293 (2006).
5. J.Y.Miao, D.W.Hwang, K.V.Narasimhulu, et al. Carbon, 42, 813 (2004).
6. M.Kodama, T.Fujiura, E.Ikawa, et al. Carbon, 29, 43 (1991).
7. M.Kodama, T.Fujiura, K.Esumi, et al. Carbon, 26, 595 (1988).
8. S.H.Yoon, Y.D.Park, I.Mochida. Carbon, 30, 781 (1991).
9. I.S.Qui, Y.F.Li, Y.P.Wang, et al. Carbon, 41, 767 (2003).
10. Y.Korai, Y.G.Wang, S.H.Yoon, et al. Carbon, 34, 1156 (1996).
11. Y.C.Chang, H.J.Sohn, C.H.Ku, et al. Carbon, 37, 1285 (1999).
12. X.Yang, C.Li, W.Wang, et al. Chem. Commun., 342 (2004).
13. А.С.Манукян, А.А.Мирзаханян, Г.Р.Бадалян, Г.О.Ширинян, Э.Г.Шароян. Изв. НАН Армении, Физика, 45, 202 (2010).
14. A.S.Manukyan, A.A.Mirzakhanyan, T.K.Khachatryan, E.G.Sharoyan. Proc. 8th Int' conf. Semiconductor Micro- and Nanoelectronics, July 1-3, 2011, Yerevan, Armenia, p.44.
15. A.S.Manukyan, A.A.Mirzakhanyan, G.R.Badalyan, G.H.Shirinyan, A.G.Fedorenko, N.V.Lianguzov, Yu.I.Yuzyuk, L.A.Bugaev, E.G.Sharoyan. J. Nanopart. Res., 14, 982 (2012).

16. А.С.Манукян, А.А.Мирзаханян, Т.К.Хачатрян, Г.Р.Бадалян, К.Г.Абдулвахидов, Л.А.Бугаев, Э.Г.Шароян. Изв. НАН Армении, Физика, 47, 442 (2012).
17. M.Inagaki. New Carbons. Control of Structure and Functions. Amsterdam, Elsevier, 2000.

ԱՆՄԵՏԱՂ ՖՏԱԼՈՑԻԱՆԻՆԻ ՊԻՆԴ-ՖԱԶԱՅԻՆ ՊԻՐՈԼԻԶԻ ՄԵԹՈԴՈՎ
ՍՏԱՑՎԱԾ ԱԾՄԱՕՆԱՅԻՆ ՄԻԿՐՈՍՖԵՐԱՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա.Ա. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ, Ա.Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ, Տ.Կ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ,
Գ.Ր. ԲԱԴԱԼՅԱՆ, Գ.Մ. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ, Է.Գ. ՇԱՐՈՅԱՆ

Անմետաղ ֆտալոցիանինի ($H_2C_{32}N_8H_{16}$) պինդ-ֆազային պիրոլիզի մեթոդով ստացված են 2-3.5 մկմ միջին տրամագծով և ըստ չափերի բավականին նեղ բաշխվածությամբ ածխածնային միկրոսֆերաներ: Նմուշների տարրային կազմը, կառուցվածքը և ձևաբանությունը ուսումնասիրված են տեսաձրող էլեկտրոնային մանրադիտակի, էներգադիսպերսային ռենտգենյան միկրովերլուծության և ռենտգենակառուցվածքային վերլուծության մեթոդներով: Ստացված միկրոսֆերաներում բացահայտված է ուժեղ էլեկտրոնային պարամագնիսականություն:

INVESTIGATION OF CARBON MICROSPHERES PREPARED BY
SOLID-PHASE PYROLYSIS OF METAL-FREE PHTHALOCYANINE

A.S. MANUKYAN, A.A. MIRZAKHANYAN, T.K. KHACHATRYAN,
G.R. BADALYAN, G.M. ARZUMANYAN, E.G. SHAROYAN

By using solid-phase pyrolysis of metal-free phthalocyanine ($H_2C_{32}N_8H_{16}$) we have prepared carbon microspheres with a mean diameter of 2-3.5 μm and a sufficiently narrow size distribution. The elemental composition, structure and morphology of samples were studied by scanning electron microscopy, energy dispersive X-ray microanalysis, and X-ray diffraction. A strong electron paramagnetism was revealed in the microspheres.

УДК 548.732

ТРАНСПОРТНЫЕ УРАВНЕНИЯ АМПЛИТУД В ЭЙКОНАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ДИФРАКЦИИ

М.К. БАЛЯН

Ереванский государственный университет, Армения
e-mail: mbalyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 20 июня 2012 г.)

Рассмотрено эйкональное приближение уравнений динамической дифракции рентгеновских волн в деформированных кристаллах на основе уравнений второго порядка для амплитуд пройденной и дифрагированной волн. По аналогии с традиционной оптикой это позволяет не только получить уравнение эйконала и изучить поведение амплитуд нулевого приближения, что обычно делается в теории эйконального приближения динамической дифракции, но и для всех порядков асимптотического разложения амплитуд установить соответствующие транспортные уравнения и их решение представить в виде интеграла по траектории распространения амплитуд. Суммированием транспортных уравнений установлено уравнение для полной амплитуды, соответствующее параболическому уравнению дифракции оптики.

1. Введение

Эйкональное приближение уравнений динамической дифракции [1-6] дает возможность определить амплитуды и эйконал и построить решение для плавно меняющихся полей. Исходя из системы уравнений динамической дифракции [5] получаются уравнение эйконала и транспортные уравнения для амплитуд. Однако транспортные уравнения для амплитуд высших порядков асимптотического разложения приводятся в абстрактном виде, и явно обсуждается только уравнение для нулевого приближения амплитуды.

В настоящей работе эйкональное приближение излагается, переходя из системы уравнений динамической дифракции к уравнениям второго порядка в частных производных для каждой амплитуды в отдельности. Это позволяет написать транспортные уравнения и их решения для всех членов асимптотического разложения амплитуд в компактном виде, что дает возможность суммировать весь ряд последовательных приближений и написать уравнение для амплитуды в целом.

2. Основные формулы эйконального приближения

Здесь, в отличие от общепринятого подхода, мы дадим вывод уравнений эйконального приближения, переходя от системы уравнений динамической ди-

фракции к отдельным уравнениям второго порядка для амплитуд.

В двухволновом режиме дифракции, когда в кристалле присутствуют две динамически взаимодействующие волны, связанные с узлами обратной решетки 0 и h , достаточно плавно меняющееся волновое поле в кристалле представляется в виде

$$E = \left(E_0 e^{iK_0 r} + E_h e^{iK_h r} e^{-ihu} \right) e^{i\Phi} e^{i\chi_0 z / 2 \cos \theta}, \quad (1)$$

где E_0 , E_h – медленно меняющиеся амплитуды, K_0 и $K_h = K_0 + h$ – волновые векторы проходящей и дифрагированной волны, соответственно, удовлетворяющие точному условию Брэгга $K_0^2 = K_h^2 = k^2 = (2\pi/\lambda)^2$, λ – длина волны излучения в вакууме, u – вектор смещения атомов из своих равновесных положений в идеальном кристалле, Φ – эйконал, χ_0 – нулевая фурье-компонента поляризуемости кристалла, θ – угол Брэгга, координата z направлена вдоль отражающих плоскостей, а координата x направлена перпендикулярно к отражающим плоскостям и антипараллельна вектору дифракции. Из системы уравнений динамической дифракции [7], переходя к уравнениям для отдельных амплитуд и используя (1), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_0}{\partial s_0 \partial s_h} + i \frac{\partial E_0}{\partial s_h} P_0 + i \frac{\partial E_0}{\partial s_0} P_h + i E_{0,h} \frac{\partial P_0}{\partial s_h} + (\sigma^2 - P_0 P_h) E_0 &= 0, \\ \frac{\partial^2 E_h}{\partial s_0 \partial s_h} + i \frac{\partial E_h}{\partial s_h} P_0 + i \frac{\partial E_h}{\partial s_0} P_h + i E_h \frac{\partial P_h}{\partial s_0} + (\sigma^2 - P_0 P_h) E_h &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где s_0 , s_h – координаты вдоль проходящей и дифрагированной волн, соответственно, $P_0 = \partial\Phi/\partial s_0$, $P_h = \partial\Phi/\partial s_h + k\alpha/2$, $\alpha = -(2/k) \partial hu / \partial s_h$ – параметр локального отклонения от условия Брэгга, $\sigma^2 = k^2 \chi_h \chi_0 C^2 / 4$, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, $C = 1$ для σ -поляризации и $\cos 2\theta$ для π -поляризации.

В уравнениях (2) роль большого параметра играет σ^2 . Полагая, что деформации достаточно плавные ($|(k/2) \partial \alpha / \partial s_0| = |\partial^2 hu / \partial s_0 \partial s_h| \ll |\sigma^2|$) и деля уравнение (2) на $|\sigma|^2$, находим, что после деления первое слагаемое в (2) будет порядка $|\sigma|^{-2}$, последующие три члена порядка $|\sigma|^{-1}$, а последний член – порядка $|\sigma|^0$. В соответствии с этим амплитуды ищем в виде асимптотических рядов

$$E_{0,h} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{0,h}^{(n)}. \quad (3)$$

Здесь и далее, чтобы избежать громоздких формул, примем, что во всех формулах с обозначением индексов $0, h$ или $h, 0$ первому индексу во всей формуле соответствует первый индекс всех членов формулы и второму индексу соответствует второй индекс во всех членах формулы. Таким образом, такие формулы являются сокращенным обозначением двух отдельных формул для каждого из индексов – первые индексы берутся с первыми индексами, а вторые – со вторыми. Подставляя выражение (3) в (2) и приравнивая члены одного порядка, приходим как к уравнению эйконала

$$P_0 P_h - \sigma^2 = 0, \quad (4)$$

так и к уравнениям для амплитуд нулевого приближения

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_0^{(0)}}{\partial s_0} P_h + \frac{\partial E_0^{(0)}}{\partial s_h} P_0 + E_0^{(0)} \frac{\partial P_0}{\partial s_{h,0}} &= 0, \\ \frac{\partial E_h^{(0)}}{\partial s_0} P_h + \frac{\partial E_h^{(0)}}{\partial s_h} P_0 + E_h^{(0)} \frac{\partial P_h}{\partial s_0} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

и для членов высших порядков разложения

$$\begin{aligned} i \frac{\partial E_0^{(n)}}{\partial s_0} P_h + i \frac{\partial E_0^{(n)}}{\partial s_h} P_0 + i E_0^{(n)} \frac{\partial P_0}{\partial s_h} + \frac{\partial^2 E_0^{(n-1)}}{\partial s_0 \partial s_h} &= 0, \\ i \frac{\partial E_h^{(n)}}{\partial s_0} P_h + i \frac{\partial E_h^{(n)}}{\partial s_h} P_0 + i E_h^{(n)} \frac{\partial P_h}{\partial s_0} + \frac{\partial^2 E_h^{(n-1)}}{\partial s_0 \partial s_h} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (4) дает возможность определить эйконал независимо от амплитуд. Характеристическая система уравнений для (4) будет иметь вид [9]

$$\begin{aligned} ds_0/ds &= P_h; \quad ds_h/ds = P_0, \\ dp_0/ds &= -p_0(k/2)\partial\alpha/\partial s_0; \quad dp_h/ds = -p_0(k/2)\partial\alpha/\partial s_h, \\ d\Phi/ds &= \sigma^2 + p_0 p_h, \end{aligned} \quad (7)$$

где $p_0 = P_0$, $p_h = \partial\Phi/\partial s_h$. После определения траекторий по уравнениям (7), по известной процедуре определяется эйконал [9]. На этом мы не останавливаемся, так как эта процедура многократно обсуждалась в литературе.

3. Транспортные уравнения для $E_{0,h}^{(0)}$

Используя уравнения траектории (7), а также (5), для изменения амплитуд $E_{0,h}^{(0)}$ вдоль траектории имеем

$$\begin{aligned} \frac{dE_0^{(0)}}{ds} &= \frac{\partial E_0^{(0)}}{\partial s_0} \frac{ds_0}{ds} + \frac{\partial E_0^{(0)}}{\partial s_h} \frac{ds_h}{ds} = -E_0^{(0)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_0 \partial s_h}, \\ \frac{dE_h^{(0)}}{ds} &= \frac{\partial E_h^{(0)}}{\partial s_0} \frac{ds_0}{ds} + \frac{\partial E_h^{(0)}}{\partial s_h} \frac{ds_h}{ds} = -E_h^{(0)} \frac{\partial}{\partial s_0} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_h} + k \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Интегрируя (8) вдоль траектории, находим

$$\begin{aligned} E_0^{(0)}(s) &= E_0^{(0)}(0) \exp \left(- \int_0^s \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_0 \partial s_h} ds' \right), \\ E_h^{(0)}(s) &= E_h^{(0)}(0) \exp \left(- \int_0^s \frac{\partial}{\partial s_0} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_h} + k \frac{\alpha}{2} \right) ds' \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения (9) аналогичны соответствующим выражениям, известным из оптики [8], но роль лапласиана здесь играют $\partial^2\Phi/\partial s_0\partial s_h$ и $(\partial/\partial s_0)(\partial\Phi/\partial s_h + k(\alpha/2))$. Из (9) можно сделать вывод, что поля имеют особенность при $\partial^2\Phi/\partial s_0\partial s_h = -\infty$ и $(\partial/\partial s_0)(\partial\Phi/\partial s_h + k(\alpha/2)) = -\infty$. Геометрическое место таких точек соответствует каустике.

Отметим, что исходя из уравнений (5) можно написать уравнения для некоторой сохраняющейся величины. Действительно, согласно (5) имеем

$$\begin{aligned} \sigma^2 \frac{\partial E_0^{(0)2}}{\partial s_0} + \frac{\partial}{\partial s_h} \left(E_0^{(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial s_0} \right)^2 &= 0, \\ \sigma^2 \frac{\partial E_h^{(0)2}}{\partial s_h} + \frac{\partial}{\partial s_0} \left(E_h^{(0)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_h} + k \frac{\alpha}{2} \right) \right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения (10) в переменных (x, z) имеют общеизвестный вид [1,4,5], равный нулю дивергенции от вектора Пойнтинга:

$$\begin{aligned} \cos\theta \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\sigma^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_0} \right)^2 \right) E_0^{(0)2} \right] + \sin\theta \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\sigma^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_0} \right)^2 \right) E_0^{(0)2} \right] &= 0, \\ \cos\theta \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\sigma^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_h} + k \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right) E_h^{(0)2} \right] + \sin\theta \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_h} + k \frac{\alpha}{2} \right)^2 - \sigma^2 \right) E_h^{(0)2} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (11) соответствуют сохранению потока энергии вдоль трубки лучей в кристалле.

4. Транспортные уравнения для $E_{0,h}^{(n)}$

Перейдем к интегрированию уравнений (6) для членов высших порядков асимптотического разложения амплитуды (3). Опять же, используя уравнения траектории (7), можно уравнение (6) написать в виде

$$\begin{aligned} i \frac{dE_0^{(n)}}{ds} + iE_0^{(n)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_0 \partial s_h} &= -\frac{\partial^2 E_0^{(n-1)}}{\partial s_0 \partial s_h}, \\ i \frac{dE_h^{(n)}}{ds} + iE_h^{(n)} \frac{\partial}{\partial s_0} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_h} + k \frac{\alpha}{2} \right) &= -\frac{\partial^2 E_h^{(n-1)}}{\partial s_0 \partial s_h}, \end{aligned} \quad (12)$$

причем $n=1,2,\dots$, а амплитуды удовлетворяют нулевым граничным условиям. В уравнениях (12), сделав подстановку

$$E_0^{(n)} = E_0^{(n)'} \exp \left(-\int_0^s \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_0 \partial s_h} ds' \right), \quad E_h^{(n)} = E_h^{(n)'} \exp \left(-\int_0^s \frac{\partial}{\partial s_0} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s_h} + k \frac{\alpha}{2} \right) ds' \right), \quad (13)$$

и используя (9), получим уравнение

$$\frac{dE_{0,h}^{(n)'}}{ds} = i \frac{E_{0,h}^{(0)}(0)}{E_{0,h}^{(0)}(s)} \frac{\partial^2 E_{0,h}^{(n-1)}}{\partial s_0 \partial s_h} \quad (14)$$

Интегрируя выражение (14) и подставляя в формулу (13), находим

$$E_{0,h}^{(n)}(s) = iE_{0,h}^{(0)}(s) \int_0^s \frac{1}{E_{0,h}^{(0)}(s')} \frac{\partial^2 E_{0,h}^{(n-1)}(s')}{\partial s_0 \partial s_h} ds' \quad (15)$$

Суммируя уравнения (14) по n от 1 до ∞ как для индекса 0, так и для индекса h , получаем интегральные уравнения для полных амплитуд:

$$E_{0,h}(s) = E_{0,h}^{(0)}(s) + iE_{0,h}^{(0)}(s) \int_0^s \frac{1}{E_{0,h}^{(0)}(s')} \frac{\partial^2 E_{0,h}(s')}{\partial s_0 \partial s_h} ds' \quad (16)$$

Из этих интегральных уравнений с помощью дифференцирования по s получаем дифференциальные уравнения для амплитуд

$$\frac{d E_{0,h}(s)}{ds} = \frac{i}{E_{0,h}^{(0)}(s)} \frac{\partial^2 E_{0,h}}{\partial s_0 \partial s_h} \quad (17)$$

Решения (9), (15), (16), а также дифференциальное уравнение (17) аналогичны соответствующим выражениям оптики [8]. Роль лапласиана здесь играет оператор $\partial^2 / \partial s_0 \partial s_h = \cos^2 \theta \partial^2 / \partial z^2 - \sin^2 \theta \partial^2 / \partial x^2$. Кроме того, имеем два уравнения для каждого из полей, соответствующие двум листам дисперсионной поверхности.

Если использовать лучи в центральной области треугольника Бормана для идеального кристалла или же рассматривать слабдеформированные кристаллы, то эйконал в симметричном случае Лауэ можно выбрать в виде

$$\Phi = \pm \sigma \frac{z}{\cos \theta} \quad (18)$$

Тогда из уравнений (7) находим $dz = \pm 2\sigma \cos \theta ds$, и из (9) следует, что $E_{0,h}^{(0)}(s) = E_{0,h}^{(0)}(0)$ постоянны вдоль траекторий. Так как амплитуды медленно меняются вдоль лучей, то в уравнениях (17), в правых частях, можно оставить только производные по x , отбрасывая вторые производные по z , после чего (17) приобретает вид

$$\pm \frac{2i\sigma}{\cos \theta} \frac{\partial E_{0,h}}{\partial z} = \tan^2 \theta \frac{\partial^2 E_{0,h}}{\partial x^2}, \quad (19)$$

т.е. получаем уравнения, аналогичные параболическому уравнению дифракции в вакууме.

В общем случае от переменных (x, z) или (s_0, s_h) можно перейти к переменным (s, τ) криволинейной системы координат вдоль и поперек лучей. В правых частях вновь можно отбросить вторые производные по s , причем криво-

линейную систему координат можно выбрать так, чтобы не входили смешанные вторые производные типа $\partial^2/\partial s \partial \tau$. Можно проверить, что такое условие равносильно условию

$$\frac{dx}{ds} \frac{dx}{d\tau} - \tan^2 \theta \frac{dz}{ds} \frac{dz}{d\tau} = 0, \quad (20)$$

или в переменных (s_0, s_h)

$$\frac{\partial s_0}{\partial \tau} \frac{\partial s_h}{\partial s} + \frac{\partial s_0}{\partial s} \frac{\partial s_h}{\partial \tau} = 0. \quad (21)$$

Условие (20) является условием ортогональности криволинейной системы координат (s, τ) в псевдоевклидовом пространстве (x, z) . Заметим, что в евклидовом пространстве в (20) должен был стоять знак "+" в левой части, что соответствовало бы ортогональности в евклидовом пространстве. В оптике в правой части (17) стоит лапласиан, т.е. сумма вторых производных, а в кристалле в (17) в правой части стоит разность вторых производных, что соответствует псевдоевклидовой геометрии. Условием (20) (или (21)) определяются ортогональные к траекториям линии изменения переменной τ , а также сама переменная τ . Выражая (x, z) или же (s_0, s_h) через (s, τ) , переходя в уравнении (17) к ортогональным координатам по (20) (или по (21)), отбрасывая в правой части (17) вторые производные по s , приходим к параболическому уравнению для амплитуд в общем виде:

$$\frac{\partial E_{0,h}(s, \tau)}{\partial s E_{0,h}^{(0)}(s, \tau)} = \frac{i}{E_{0,h}^{(0)}(s, \tau)} \left(\frac{\partial \tau}{\partial s_0} \frac{\partial \tau}{\partial s_h} \frac{\partial^2 E_{0,h}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial s_0 \partial s_h} \frac{\partial E_{0,h}}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 s}{\partial s_0 \partial s_h} \frac{\partial E_{0,h}}{\partial s} \right), \quad (22)$$

где $\partial^2 \tau / \partial s_0 \partial s_h = ((\partial s / \partial s_h) \partial / \partial s (\partial \tau / \partial s_0) + (\partial \tau / \partial s_h) \partial / \partial \tau (\partial \tau / \partial s_0))$, а $\partial^2 s / \partial s_0 \partial s_h = ((\partial s / \partial s_h) \partial / \partial s (\partial s / \partial s_0) + (\partial \tau / \partial s_h) \partial / \partial \tau (\partial s / \partial s_0))$.

5. Заключение

Нами рассмотрено эйкональное приближение уравнений динамической двухволновой дифракции исходя из уравнений второго порядка для амплитуд проходящей и дифрагированной волн. Напомним, что обычно такое приближение исследуется на основе системы уравнений динамической дифракции. Излагаемый подход дает возможность не только получить уравнение эйконала и изучить поведение амплитуд нулевого приближения, как обычно делается, но и получить транспортные уравнения и их решения в виде интегралов по траектории для всех порядков асимптотического разложения амплитуд. Последующее суммирование полученных транспортных уравнений приводит к параболическому уравнению для полной амплитуды.

Приведен общий вид параболического уравнения в криволинейной ортогональной системе координат (s, τ) , где линии изменения координаты s совпадают с траекториями, а линии изменения координаты τ ортогональны к траек-

ториям в псевдоевклидовом пространстве (x, z) . Приводится также вид параболического уравнения для идеальных или слабо деформированных кристаллов для лучей, находящихся в центральной области треугольника Бормана.

ЛИТЕРАТУРА

1. N.Kato, Y.Ando. J. Phys. Soc. Japan, 21, 264 (1966).
2. K.Kambe. Z. Naturforsch, 20a, 770 (1965).
3. В.Л.Инденбом, Ф.Н.Чуховский. УФН, 107, 229 (1972).
4. Ф.Н.Чуховский, А.А.Штольберг. ЖЭТФ, 64, 957 (1973).
5. З.Г.Пинскер. Рентгеновская кристаллооптика. М., Наука, 1982.
6. В.Г.Кон. Кристаллография, 52, 625 (2007).
7. S.Takagi. J. Phys. Soc. Japan, 26, 1239 (1969).
8. С.Солимено, Б.Крозиньяни, П. Ди Порто. Дифракция и волноводное распространение оптического излучения, М., Мир, 1989.
9. В.И.Смирнов. Курс высшей математики, т.4., М., Наука, 1981.

ԱՄՊԼԻՏՈՒԴՆԵՐԻ ՏԵՂԱՓՈԽՄԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԴԻՆԱՄԻԿ
ԴԻՖՐԱԿՑԻԱՅԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԷՅՎՈՆԱԼԱՅԻՆ ՍՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅԱՄԲ

Մ.Կ. ԲԱԼՅԱՆ

Ներկայացված է դեֆորմացված քուրեղներում ռենտգենյան ալիքների դինամիկ դիֆրակցիայի հավասարումների էկոնալային մոտավորություն անցած և դիֆրակցված ալիքների ամպլիտուդների համար գրված երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների հիման վրա: Օպտիկայի հետ համանման ձևով դա թույլ է տալիս ոչ միայն ստանալ էկոնալային հավասարումը և ուսումնասիրել ամպլիտուդի վարքը գրոյական մոտավորությամբ, ինչը սովորաբար արվում է դինամիկ տեսության էկոնալային մոտավորությամբ, այլ նաև ամպլիտուդի ասիմպտոտիկ վերլուծության բոլոր կարգի անդամների համար հաստատել համապատասխան տեղափոխման հավասարումներ և նրանց լուծումները ներկայացնել ըստ ամպլիտուդի տարածման հետագծի ինտեգրալի տեսքով: Տեղափոխման հավասարումների գումարման միջոցով հաստատված է հավասարում ամբողջ ամպլիտուդի համար, որը համապատասխանում է օպտիկայում դիֆրակցիայի պարաբոլական հավասարմանը:

AMPLITUDE TRANSPORT EQUATIONS IN THE EIKONAL APPROXIMATION OF THE DYNAMICAL DIFFRACTION EQUATIONS

M.K. BALYAN

An approach of the eikonal approximation of the dynamical diffraction theory equations of X-rays in deformed crystals, based on the second-order differential equations for the transmitted and diffracted waves, is presented. By analogy with usual optics, this approach allows one not only to obtain the eikonal equation and to study the behavior of the amplitude in zero-order approximation, which usually is performed in the standard eikonal dynamical diffraction theory, but also to establish for all orders of the amplitude asymptotic expansion the corresponding transport equations and to present their solutions as integrals along the amplitude propagation trajectory. Summarizing the transport equations, an equation for the total amplitude, analogous with the parabolic diffraction equation in optics, is established.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Վ.Ս. Մխիթարյան. Վարիացիոն խնդիրների կանոնիկ լուծումներ և մեխանիկայի կանոնիկ հավասարումներ	3
Է.Դ. Գազազյան, Գ.Գ. Օքսուզյան, Ա.Դ.Տեր-Պողոսյան. Դիսպերսող մեկուսիչով լցված ալիքատարի առանցքին ուղղահայաց հատող լիցքավորված մասնիկի անցումային ճառագայթումը	20
Ա.Ռ. Շահինյան. Զվանտային բառսի առաջացումը հաջորդական գառայան իմպուլսներով ղեկավարվող անհարմոնիկ տատանակում	33
Ռ.Կ. Միրզոյան. Արտաքին մագնիսական դաշտում ^{87}Rb -իզոտոպի ատոմական գոլորշիներում ձևավորվող նեղ հաճախային օպտիկական N -ռեզոնանսի հետազոտումը	40
Դ.Բ. Գայրապետյան, Է.Ս. Ղազարյան, Գ.Ա. Սարգսյան. Կոնի թեորեմի իրականացման հնարավորությունը էլիպտիկալ բվանտային կետերի դեպքում	48
Վ.Ս. Գարությունյան, Կ.Ս. Ղամբարյան, Վ.Գ. Գարությունյան, Պ.Գ. Սուքիասյան, Տ. Բոեք, Յ. Շմիդտբաուեր, Ռ. Բանսեն. Օստվալդյան հասունացումը InAsSbP գերաձև և էլիպտիկալ բվանտային կետերի նանոհարտարագիտության ընթացքում InAs (100) մակերևույթի վրա	55
Ա.Ս. Մանուկյան, Ա.Ա. Միրզախանյան, Տ.Կ. Խաչատրյան, Գ.Ռ. Բադալյան, Գ.Ս. Արզումանյան, Է.Գ. Շառոյան. Անմետաղ ֆտալոցիանինի պինդ-ֆազային պիրոլիզի մեթոդով ստացված ածխածնային միկրոսֆերաների հետազոտությունը	63
Ս.Կ. Բալյան. Ամպլիտուդների տեղափոխման հավասարումները դինամիկ դիֆրակցիայի հավասարումների էկոնալային մոտավորությամբ	68

CONTENTS

V.M. Mekhitarian. Canonical solutions of variational problems and canonical equations of mechanics.....	3
E.D. Gazazyan, G.G. Oksuzyan, A.D. Ter-Poghosyan. Transition radiation of a charged particle crossing the waveguide filled with dispersive dielectric medium perpendicularly to the waveguide axis	20
A.R. Shahinyan. Quantum chaos production in anharmonic oscillator under train of Gaussian pulses	33
R.K. Mirzoyan. Study of optical narrow-band N -resonance formed in the vapor of isotope ^{87}Rb atoms in an external magnetic field	40
D.B. Hayrapetyan, E.M. Kazaryan, H.A. Sarkisyan. On the possibility of implementation of Cohn's theorem in the case of ellipsoidal quantum dots.....	48
V.M. Aroutiounian, K.M. Gambaryan, V.G. Harutyunyan, P.G. Soukiassian, T. Boeck, J. Schmidtbauer, R. Bansen. The Ostwald ripening at nanoengineering of InAsSbP spherical and ellipsoidal quantum dots on InAs (100) surface.....	55
A.S. Manukyan, A.A. Mirzakhanyan, T.K. Khachatryan, G.R. Badalyan, G.M. Arzumanyan, E.G. Sharoyan. Investigation of carbon microspheres prepared by solid-phase pyrolysis of metal-free phthalocyanine	63
M.K. Balyan. Amplitude transport equations in the eikonal approximation of the dynamical diffraction equations	68

СОДЕРЖАНИЕ

В.М. Мыхитарян. Канонические решения вариационных задач и канонические уравнения механики.....	3
Э.Д. Газазян, Г.Г. Оксюзян, А.Д. Тер-Погосян. Переходное излучение заряженной частицы, пересекающей волновод с дисперсным заполнением перпендикулярно его оси.....	20
А.Р. Шагинян. Образование квантового хаоса в ангармоническом осцилляторе под воздействием последовательности гауссовских импульсов.....	33
Р.К. Мирзоян. Исследование узкополосного оптического N -резонанса, формирующегося в парах атомов изотопа ^{87}Rb во внешнем магнитном поле ..	40
Д.Б. Айрапетян, Э.М. Казарян, А.А. Саркисян. О возможности реализации теоремы Кона в случае эллипсоидальных квантовых точек.....	48
В.М. Арутюнян, К.М. Гамбарян, В.Г. Арутюнян, П.Г. Сукиасянан, Т. Боек, Я. Шмидтбауэр, Р. Бансен. Оствальдовское созревание при нанотехнологии сферических и эллипсоидальных квантовых точек InAsSbP на поверхности $\text{InAs}(100)$	55
А.С. Манукян, А.А. Мирзаханян, Т.К. Хачатрян, Г.Р. Бадалян, Г.М. Арзуманян, Э.Г. Шароян. Исследование углеродных микросфер, полученных твердофазным пиролизом безметалльного фталоцианина.....	63
М.К. Балян. Транспортные уравнения амплитуд в эйкональном приближении уравнений динамической дифракции	68

Заказ № 396

Тираж 150. Сдано в набор 10.10.2012.

Подписано к печати 25.10.2012. Печ. л. 4.75.

Бумага офсетная. Цена договорная.

Типография НАН РА.

Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24.