ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2002

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №4, 2002 Механика

МЕСЧЯН СТЕПАН РУБЕНОВИЧ
(К восьмидесятилетию со дня рождения)

Доктору технических наук, профессору, одному из основоположников экспериментальной реологии грунтов Степану Рубеновичу Месчяну исполнилось восемьдесят лет.

С.Р.Месчян родился 19 октября 1922 г. в г.Ахалцихе. В 1939 г. он окончил Тбилисскую 72-ю армянскую школу, в 1944 г. — строительный факультет Тбилисского института инженеров ж/д транспорта. В 1956 г. в Ленинградском политехническом институте защитил диссертацию и ему была присуждена степень кандидата технических наук, а в 1965 г. в Московском инженерно-строительном институте защитил бывшем СССР работа по ползучести грунтов — стала программной для его научной деятельности. В ней впервые была использована наследственная теория стареющих материалов Маслова-Арутюняна, получившая в дальнейшем широкое применение в механике и реологии грунтов.

С.Р.Месчяном выполнены обширные и весьма длительные исследования в области одномерной и сдвиговой ползучести глинистых грунтов. Им был разработан метод выделения ползучести скелета этих грунтов из общего процесса длительного деформирования, он раскрыл природу этих деформаций. Разработал методы и осуществил исследования закономерностей мгновенных и ползучих деформаций водонасыщенных и неводонасыщенных глинистых грунтов при постоянных и переменных напряжениях, установил границы применимости к этим грунтам нелинейных теорий наследственной ползучести, упрочнения и старения с учетом изменяемости их состояния и многих важнейших факторов.

Эти работы позволили С.Р.Месчяну сформулировать обобщенный закон сдвиговой ползучести, связывающий между собой нелинейную деформацию сдвига, касательное напряжение, время, нормальное напряжение и параметры прочности. Решены задачи течения грунтового слоя по наклонной поверхности при статических и сейсмических воздействиях.

Осуществлена очень большая работа по прочности глинистых грунтов. Фундаментальные исследования С.Р.Месчяна (1959-1965гг.) позволили дать исчерпывающий ответ на многие спорные вопросы, по которым шла тогда большая дискуссия.

С.Р.Месчян совместно со своими учениками провел фундаментальные исследования релаксаций напряжений в глинистых грунтах, термо-виброреологии, реологии набухающих и просадочных грунтов, созданию противофильтрационных элементов гидросооружений из грунтовых смесей. Им создан Государственный стандарт Армении АСТ 178-99 по определению прочности грунтов, свободный от многих недостатков межгосударственного стандарта ГОСТ 12248-96.

Результаты работ С.Р.Месчяна и его учеников опубликованы в более чем 170 работах, в том числе, в девяти монографиях. Его монографии "Ползучесть глинистых грунтов" (1967г.), "Экспериментальная реология глинистых грунтов" (Москва: Недра, 1985г.) и ее второе издание на английском языке (Голландия: Балкема, 1985г.) давно получили международное признание.

С.Р.Месчяном выполнена большая научно-организационная работа. Им организованы крупные лаборатории по реологии грунтов в Институте механики НАН Армении и в Ереванском государственном университете. С.Р.Месчян плодотворно занимался подготовкой научных и инженерных кадров. Под его руководством защищены пять кандидатских диссертаций, он более сорока лет преподавал курс "Механика грунтов, основания и фундаменты" в ВУЗах Еревана. Его учебные пособия, написанные на армянском языке, являются настольными книгами как студентов вузов, так и работников геотехнических лабораторий Армении.

Редакция журнала "Известия НАН Армении, Механика" и научная общественность Армении поздравляют Степана Рубеновича Месчяна с юбилеем и желают ему доброго здоровья, дальнейших творческих успехов.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №4, 2002 Механика

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Белубекян В.М.

Վ. Մ. Բելուբեկյան
Սալի կայունության խնդրի մասին լայնական սահքի դեֆորմացիայի հաշվառումով

Իզոտրոպ սալերի կայունության խնդիրներում լայնական սահքերի հաշվառումը սովորաբար առաջացնում է, Կիրխհոֆի տեսության համեմատ, ճշգրտում, որը սալի հարաբերական հաստության քառակուսու կարգի անի: Սակայն որոշ եզրային պայմանների դեպքում այդ ճշգրտումը ավելի էական է: Հոդվածում ներկայացված են սալերի կայունության հավասարումները Վ.Վ. Վասիլևի կողմից առաջարկված առաջին կարգի ճշգրտված տեսության հիման վրա: Սալի ազատ եզրի մոտ տեղայնացված անկայունության օրինակի վրա քննարկվում է երեք "բնական" եզրային պայմանների ազդեցությունը:

Vagharshak Belubekian
On the Problem of Stability of Plate under Account of Transverse Shears

Учет поперечных сдвигов в задачах устойчивости изотропных пластин в большинстве случаев приводит к поправке порядка квадрата относительной толщины по сравнению с результатами теории пластин Кирхгофа[1]. Однако для некоторых вариантов граничных условий на кромках пластины эта поправка оказывается более существенной. В статье приводятся уравнения устойчивости пластинки на основе варианта уточненной теории первого порядка, предложенного В.В. Васильевым [2]. На примере локализованной неустойчивости у свободного края пластинки обсуждается вклад трех естественных граничных условий.

Изотропная пластинка постоянной толщины $2h$ в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Пластинка сжата равномерно по сторонам $x = 0, a$ усилием $p = 2h\sigma_0$. Принимается наиболее простой вариант уравнений пространственной задачи устойчивости [3,4]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{jk}^0 \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) = 0 \quad (i, j, k = 1,2,3) \tag{1.1}$$

в которых пренебрежены начальные деформации, а σ_{ij}^0 – начальные напряжения. В дальнейшем считается, что в начальном напряженном состоянии $\sigma_{11}^0 = -\sigma_0 = \text{const}$, а остальные компоненты напряжений тождественно равны нулю.

При сведении пространственной задачи устойчивости пластинки к двумерной, в основе берется уточненная теория первого порядка (теория типа Э. Рейснера) согласно варианту В.В.Васильева [2]. В частности, для перемещений принимается

$$u_1 = u - z\theta_1, \quad u_2 = v - z\theta_2, \quad u_3 = w \tag{1.2}$$

где $u_1, u_2, u_3, u, w, \theta_1, \theta_2$ являются функциями только координат x, y.

Выражения (1.2) отличаются от соответствующих выражений статьи [2] знаком при θ_1 и θ_2, что не имеет для дальнейшего никакого значения.

Процедура сведения к двумерным уравнениям, (в том числе и обозначения) идентична изложению цитируемой статьи. При этом, как обычно, задача обобщенного плоского напряженного состояния отделяется от задачи изгиба. Окончательно, уравнения статической устойчивости пластинки получаются в виде:

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+\frac{\partial\theta_2}{\partial y}=\Delta w-\frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1.3}$$

$$D\left[\frac{1-\nu}{2}\Delta\theta_1+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+\frac{\partial\theta_2}{\partial y}\right)\right]+2Gh\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta_1\right)-\frac{2h^3}{3}\sigma_0\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2}=0 \tag{1.4}$$

$$D\left[\frac{1-\nu}{2}\Delta\theta_2+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+\frac{\partial\theta_2}{\partial y}\right)\right]+2Gh\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\theta_2\right)-\frac{2h^3}{3}\sigma_0\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2}=0 \tag{1.5}$$

где

$$D=2Eh^3/3(1-\nu^2),\ G=E/2(1-\nu)$$

Как показано в [2], структура системы уравнений типа (1.3)-(1.5) позволяет ввести потенциальные функции следующим образом:

$$\theta_1=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \theta_2=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.6}$$

После преобразования (1.6) система уравнений (1.3)-(1.5), после некоторых преобразований, приводится к виду:

$$\Delta w-\frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\Delta\varphi=0 \tag{1.7}$$

$$\Delta\varphi-\frac{1-\nu}{2}\frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{3(1-\nu)}{2h^2}(\varphi-w)=0 \tag{1.8}$$

$$\Delta\psi-\frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{3}{h^2}\psi=0 \tag{1.9}$$

В итоге имеется система двух уравнений (1.7),(1.8) относительно искомых функций w,φ и автономное уравнение (1.9), определяющее функцию ψ. Из уравнения (1.7),(1.8) можно исключить функцию w:

$$\left(\Delta-\frac{1-\nu}{2}\frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2}{\partial x}\right)\left(\Delta\varphi-\frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)+\frac{2h\sigma_0}{D}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0 \tag{1.10}$$

Точно такое же уравнение получается и для w, если исключить φ. Из уравнения для w, при пренебрежении вторыми производными по x в скобках, следует уравнение статической устойчивости пластин по теории Кирхгофа. Однако решения задач предпочтительнее начинать с решения уравнения (1.10), после чего функция w определяется из уравнения (1.8) непосредственно.

2. В отличие от теории Кирхгофа, на краю пластинки должны быть заданы три граничные условия. В частности, при $x = \mathrm{const}$ обычному условию шарнирного закрепления $(w = 0,\ M_1 = 0)$ здесь соответствуют два варианта условий [5]

$$w = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad M_1 = 0 \tag{2.1}$$

$$w = 0, \quad H = 0, \quad M_1 = 0 \tag{2.2}$$

Аналогично имеется два варианта граничных условий типа скользящего контакта [6]

$$\theta_1 = 0, \quad H = 0, \quad N_1 = P\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.3}$$

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad N_1 = P\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.4}$$

Условия (2.3), (2.4) эквиваленты условиям

$$\theta_1 = 0, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Наконец следует отметить, что уточненная теория дает возможность удовлетворить трем естественным граничным условиям

$$H = 0, \ M_1 = 0, \ N_1 = P\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{при } x = \mathrm{const} \tag{2.5}$$

В [7] приводятся восемь вариантов граничных условий для теории пластин Рейснера.

При решении системы уравнений (1.7) -(1.9) граничные условия следует выразить через функции w, φ, ψ. В частности, условия (2.5) будут иметь вид:

$$2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (1-\nu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(w - \varphi) - \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial w}{\partial x}$$

В (2.3)-(2.6) считается, что сжимающее усилие не меняет направление при деформации пластинки (неследящая нагрузка).

Процедура решения задач потери устойчивости пластин по цилиндрической поверхности (форма изгиба пластины не зависит от координаты y) принципиально не отличается от решения соответствующих задач по теории Кирхгофа.

Дополнительное третье граничное условие в (2.1)-(2.4) приводит к тому, что решение уравнения (1.5) становится тождественно равным нулю $(\theta_2 \equiv 0)$.

В частности, если края пластинки $x = 0,\ a$ шарнирно закреплены, независимо от варианта граничных условий (2.1) или (2.2), для определения критической нагрузки получается формула

$$\frac{P_*}{D} = \left[1 + \frac{3-\nu}{3(1-\nu)}\left(\frac{\pi h}{a}\right)^2\right]^{-1}\frac{\pi^2}{a^2} \tag{2.7}$$

При выводе формулы (2.7) пренебрегается величина порядка $(h/a)^4$ по сравнению с единицей.

В случае, когда на всех сторонах прямоугольной пластинки имеют место условия шарнирного закрепления (2.1), но не (2.2), задача решается также просто и критическая нагрузка определяется из выражения [8] :

$$\frac{P_{mn}}{D} = \left[1 + \frac{3-\nu}{3(1-\nu)}\left(\mu_m^2 + \lambda_m^2\right)\pi^2 h^2\right]^{-1}\frac{\left(\mu_m^2 + \lambda_m^2\right)^2}{\mu_m^2} \tag{2.8}$$

Во всех указанных случаях поправка к результатам теории Кирхгофа имеет порядок квадрата относительной толщины пластинки. Необходимо отметить, что уравнения статической теории устойчивости пластин, аналогичные уравнениям (1.3)-(1.5), на основе теории С.А. Амбарцумяна, приведены в [9].

3. Рассматривается задача локализованной неустойчивости пластинки. Пусть полубесконечная пластинка по краям $x = 0,\ a$ шарнирно закреплена по варианту граничных условий (2.1). Край $y = 0$ свободен, т.е. $H = 0$, $M_2 = 0$, $N_2 = 0$, что при помощи функций w, φ, ψ записывается следующим образом:

$$2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - (1-\nu)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(w - \varphi) - \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$$

Требуется найти нетривиальное решение системы уравнений (1.7) – (1.9), удовлетворяющее граничным условиям (2.1), (3.1) и условиям затухания

$$\lim_{y\to\infty} w = 0\ ,\ \lim_{y\to\infty}\varphi = 0\ ,\ \lim_{y\to\infty}\psi = 0 \tag{3.2}$$

Система уравнений уравнений (1.7) – (1.9) имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям уравнений (2.1) вида

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y)\sin\mu_m x \qquad \varphi = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(y)\sin\mu_m x \tag{3.3}$$

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y)\cos\mu_m x \qquad \mu_m = m\pi / a$$

Функция $g_m(y)$, удовлетворяющая условию затухания из (3.2), определяется из решения уравнения (1.10)

$$g_m = A_1 \exp(-p_1\mu_m y) + A_2 \exp(-p_2\mu_m y) \tag{3.4}$$

где A_1, A_2 – произвольные постоянные.

$$p_1 = \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha + \gamma_m^2}\right)^{1/2} \qquad p_2 = \left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha + \gamma_m^2}\right)^{1/2} \tag{3.5}$$

$$\alpha = 1 - \frac{3-\nu}{2}\frac{\sigma_0}{G} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\sigma_0^2}{G^2}, \quad \beta = 1 - \frac{3-\nu}{4}\frac{\sigma_0}{G}, \qquad \gamma_m^2 = \frac{2h\sigma_0}{D\mu_m^2}$$

При этом затухающее по y решение (3.4) существует, если выполняется условие

$$0 < \gamma_m^2 < \alpha \tag{3.6}$$

Функции $f_m(y)$ определяются непосредственно из уравнения (1.8)

$$f_m = \left[1 + \frac{2}{1-\nu}\xi^2\left(1 - \frac{1-\nu}{2}\frac{\sigma_0}{G}\right)\right]g_m - \frac{2h^2}{3(1-\nu)}g_m'' \qquad \xi^2 = \frac{\mu_m^2 h^2}{3} \tag{3.7}$$

Решение для функции $q_m(y)$, удовлетворяющее условию затухания из (3.2), находится из уравнения (1.9) и имеет вид

$$q_m = B_1 \exp(-\eta y), \quad \eta = \frac{\sqrt{3}}{h}\sqrt{1-\xi^2} \tag{3.8}$$

Подстановка (3.3), (3.4), (3.7), (3.8), в граничные условия (3.1) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_1, A_2, B:

$$\begin{aligned}
&p_1 A_1 + p_2 A_2 \mu - 0{,}5(1 + \mu_m^{-2}\eta^2)B_1 = 0 \\
&(\kappa - p_1^2)p_1 A_1 + (\kappa - p_2^2)p_2 A_2 \mu - 0{,}5(1-\nu)\xi^{-2} B_1 = 0 \\
&(p_1^2 - \nu)A_1 + (p_2^2 - \nu)A_2 \mu - (1-\nu)\mu_m^{-1}\eta B_1 = 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

где $\kappa = 1 - \xi^2\gamma_m^2$

Приравняв нулю детерминант системы (3.9), после некоторых преобразований получим уравнение относительно $\gamma_m(y)$

$$(p_1 - p_2)K(\gamma_m) = 0 \tag{3.10}$$

где

$$\begin{aligned}
K(\gamma_m) = {}& \frac{1}{1-\nu}\left(\xi^2 + \sqrt{1-\xi^2}\right)\left[-p_1^2 p_2^2 + (\nu-\kappa)p_1 p_2 + \nu(p_1^2 + p_2^2) - \nu\kappa\right] - \\
&- p_1 p_2 - \nu + 2\xi\sqrt{1-\xi^2}\, p_1 p_2 (p_1 + p_2)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Локализованная неустойчивость будет иметь место, если уравнение (3.10), а следовательно и уравнение

$$K(\gamma_m)=0 \tag{3.12}$$

имеет решение, удовлетворяющее условию затухания (3.6).

Если в уравнении (3.12) положить $\xi=0$, то получится уравнение, следующее из теории Кирхгофа [10]

$$1-\gamma_m^2+2(1-\nu)\sqrt{1-\gamma_m^2}-\nu^2=0, \quad 0<\gamma_m^2<1 \tag{3.13}$$

которое всегда имеет решение при естественном ограничении $\nu\neq0$.

Для выяснения вопроса существования действительного корня уравнения (3.12), определяются значения функции $K(\gamma_m)$ на концах интервала, задаваемого неравенствами (3.6). Имея в виду, что в теории пластин выполнение неравенства $\xi<0$ необходимо, нетрудно показать, что $K(0)<0$. Из равенства

$$K(\sqrt{\alpha})=\frac{\nu}{1-\nu}\left[\left(\xi^2+\sqrt{1-\xi^2}\right)\left(1-\frac{2\xi^2\alpha}{1-\nu}\right)-1+\nu\right] \tag{3.14}$$

получается что

$$K(\sqrt{\alpha})>0,\ \frac{2\nu(1-\nu)}{1+3\nu}>\xi^2 \tag{3.15}$$

Отсюда следует, что условие (3.15) достаточно для существования корня уравнения (3.12), удовлетворяющего условию затухания (3.6). Необходимо отметить, что в отличие от (3.13), здесь при учете поперечных сдвигов, не для всех значений коэффициентов Пуассона ν имеет место локализованная неустойчивость.

Если в уравнении (3.12) пренебречь ξ^2 по сравнению с единицей, то можно получить приближенное решение в виде

$$\gamma_m^2=(1-\nu)\left[1+\nu+2(1-\xi)\sqrt{(1-\nu)^2(1-\xi)^2+\nu^2}-2(1-\nu)(1-\xi)^2\right] \tag{3.16}$$

При $\xi=0$ из (3.16) получается решение уравнения (3.13), соответствующее теории Кирхгофа. Следует отметить, что минимальной критической силе соответствует значение $m=1$.

Табл 1.

$\xi \setminus \nu$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0.99997	0.99940	0.99621	0.98533	0.95711
0.1	0.99996	0.99926	0.99541	0.98257	0.95041
0.3	0.9994	0.99880	0.99285	0.97440	0.93223

В табл.1 приводятся численные значения γ_m^2 по формуле (3.16) в зависимости от относительной толщины пластинки ξ и коэффициента Пуассона ν. Очевидно, что при больших значениях ξ отличие от теории

Кирхгоффа будет больше. Во всех случаях значения γ_m^2 близки к единице, что означает слабое затухание формы неустойчивости от свободного края пластинки. Полученые критические значения таблицы должны быть проверенны сравнением со значениями нагрузки, при которых нарушается условие прочности [11].

4. Показывается также, что при граничных условиях на краю $y=0$ типа шарнирного закрепления (2.1),(2.2) и типа скользящего контакта (2.3),(2.4) локализованная неустойчивость не имеет места.

Аналогичные результаты получены и во уточненной теории С.А.Амбарцумяна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ. //Изв. АН МТТ. 1998. N3. С. 46-58.
3. Новожилов В.В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1962. 431с.
4. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругости. М.: Физматгиз. 1961. 340с.
5. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости . // ПММ. 1962. Т.19. N4, С.13-27.
6. Белубекян В.М., Белубекян М.В. О граничных условиях теории теории пластин. // Изв АН Армении. Механика. 1999. Т.52. N2. С.11-21.
7. Иванова Е.А. Асимптотический и численный анализ высокочастотных колебаний прямоугольных пластин. // Изв. РАН. МТТ. 1998. N2. С.163-174.
8. Мелконян А.П., Хачатрян А.А. Об устойчивости прямоугольных трансверсально изотропных пластинок // Прикладная механика. 1966. Т.2. Вып. 2. С.29-35.
9. Томашевский В.Т. К общей нелинейной теории устойчивости анизотропных оболочек и пластин. / Труды VI Всес. Конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1966. С.753-761.
10. Белубекян М.В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. /В сб.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван. ЕГУ. 1997. С.95-99.
11. Гнуни В.В. Проектирование сжатых осевой силой цилиндрических оболочек из композиционных материалов. Ереван: Изд. "Гитутюн". 2000. 118с.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
23.12.2002

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №4, 2002 Механика

УДК 539.3

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ И ОБЖАТИЯ*)

Киракосян Р.М.

Ռ.Մ. Կիրակոսյան
Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի հիմնական հավասարումները ընդլայնական սահքերի և սեղմման հաշվառմամբ

Առաջարկվում է միջին հարթության նկատմամբ սիմետրիկ փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի հավասարումների մի տարբերակ, որը հաշվի է առնում ինչպես ընդլայնական սահքերի, այնպես էլ ընդլայնական սեղմման ազդեցությունը հաշվային մեծությունների վրա: Բերվում է հավասարաչափ բաշխված նորմալ բեռի ազդեցության տակ գտնվող գծայնորեն փոփոխական հաստության սալ-գոտու ծռման խնդրի լուծումը եզրերի հոդակապորեն հենման դեպքում: Կատարվում է ստացված արդյունքների վերլուծություն:

R.M. Kirakosyan
Fundamental Equations of Orthotropic Plates of Variable Thickness Taking into Account the Transversal Shears and Normal Compression

Вопросы учета поперечных сдвигов и обжатия для пластин постоянной толщины достаточно обстоятельно и полно рассмотрены в [1]. Аналогичные вопросы для многослойных оболочек переменной жесткости обсуждены в [2] и [3]. В [4] предложен один вариант учета поперечных сдвигов для ортотропных пластин переменной толщины. В настоящей работе делается попытка учитывать влияние как поперечных сдвигов, так и обжатия на напряженно-деформированное состояние ортотропных пластин переменной толщины.

1. Рассмотрим прямоугольную пластину переменной толщины h из прямолинейно-ортотропного линейно-упругого материала. Лицевые поверхности пластины симметричны относительно срединной плоскости. Пластину отнесем к системе декартовых координат x, y, z, оси которых параллельны главным направлениям ортотропии материала. Координатную плоскость xOy совместим со срединной плоскостью пластины. Пусть на пластину действуют поверхностные нагрузки, проекции интенсивностей которых на координатные оси, приведенные к единице площади срединной плоскости, составляют $X^{\pm}$, $Y^{\pm}$, $Z^{\pm}$. Знаками "+" и "−" будем отмечать величины, относящиеся к поверхностям пластины $z=+h/2$ и $z=-h/2$ соответственно. Условия опирания и нагружения краев пластины произвольны.

Попытаемся получить основные уравнения, способные учитывать влияние поперечных сдвигов и обжатия на напряженно-деформированное состояние рассматриваемой пластины.

Будем считать, что поперечные касательные напряжения τ_{xz}, τ_{yz} по толщине пластины изменяются по законам квадратных трехчленов

$$\tau_{xz} = \varphi_1 + z\varphi_2 + z^2\varphi_3, \qquad \tau_{yz} = \psi_1 + z\psi_2 + z^2\psi_3 \tag{1.1}$$

*) Работа доложена на международной конференции "ISAAC Conference on Complex Analysis, Differential Equations and related topics, September 17-21, 2002, Yerevan, Armenia"

где φ_i, ψ_i — неизвестные функции координат x, y.

Из условия обеспечения корректности дифференциальных уравнений равновесия сплошной среды следует, что при (1.1) основные напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ должны иметь линейное, а нормальное напряжение σ_z — кубическое распределение по толщине пластины. Проинтегрировав третье дифференциальное уравнение равновесия сплошной среды с учетом (1.1) и соответствующих поверхностных условий пластины, находим:

$$\sigma_z = Z_1 + \frac{h}{4}\left(\varphi_2\frac{\partial h}{\partial x} + \psi_2\frac{\partial h}{\partial y}\right) - z\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right) + \frac{h^2 - 4z^2}{8}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right) -$$
$$- \frac{z^3}{3}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y}\right), \qquad Z_1 = \frac{Z^+ - Z^-}{2} \tag{1.2}$$

Из обобщенного закона Гука ортотропного тела [1] для основных напряжений получается:

$$\sigma_x = B_{11}\varepsilon_x + B_{12}\varepsilon_y - A_1\sigma_z, \quad \sigma_y = B_{12}\varepsilon_x + B_{22}\varepsilon_y - A_2\sigma_z, \quad \tau_{xy} = B_{66}\gamma_{xy} \tag{1.3}$$

Здесь

$$A_1 = a_{13}B_{11} + a_{23}B_{12}, \quad A_2 = a_{23}B_{22} + a_{13}B_{12} \tag{1.4}$$

B_{ij} — параметры, которые выражаются через упругие постоянные материала a_{ij} по известным формулам [1].

Поскольку распределение напряжений σ_x и σ_y по толщине должно быть линейным, то в (1.3) для σ_z вместо (1.2) следует брать его первые три члена, то есть сохранить только главные вклады плоской задачи и задачи изгиба —

$$\sigma_z = Z_1 + \frac{h}{4}\left(\varphi_2\frac{\partial h}{\partial x} + \psi_2\frac{\partial h}{\partial y}\right) - z\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right) \tag{1.5}$$

Этому соответствует линейное распределение деформации ε_z, а следовательно, квадратичное распределение нормального перемещения u_z —

$$u_z = w + zw_1 + z^2w_2 \tag{1.6}$$

Здесь w — прогиб срединной плоскости пластины, а w_1 и w_2 — функции координат x, y, подлежащие определению.

Поскольку тангенциальные перемещения по толщине пластины должны иметь линейное распределение, то с использованием (1.1), геометрических соотношений и обобщенного закона Гука [1] для них получим

$$u_x = u - z\left(\frac{\partial w}{\partial x} - a_{55}\varphi_1\right), \qquad u_y = v - z\left(\frac{\partial w}{\partial y} - a_{44}\psi_1\right) \tag{1.7}$$

Здесь u, v — перемещения срединной плоскости по осям x, y. Они представляют главный вклад плоской задачи, а члены с множителем z — главный вклад задачи изгиба пластины.

Важно отметить, что выражения (1.7) отнюдь не означают принятие гипотезы о линейном распределении тангенциальных перемещений по толщине пластины. Они только означают, что с целью построения простейшей теории, для перемещений u_x и u_y следует брать только первые члены выражений τ_{xz}, τ_{yz}. Разумеется, что в рамках этой же теории для других величин необходимо будет брать другое количество членов. Забегая вперед, отметим, что в выражениях напряжений σ_x и σ_y участвуют функции φ_1, φ_2 и ψ_1, ψ_2, фигурирующие в первых двух членах τ_{xz}, τ_{yz}. В выражениях же поперечных сдвигов γ_{xz}, γ_{yz}, которые получаются из соответствующих соотношений закона Гука, участвуют уже все три члена (1.1)

Учитывая (1.5) и (1.7), из (1.3) находим

$$\sigma_x = B_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial v}{\partial y} - A_1\left[Z_1 + \frac{h}{4}\left(\varphi_2\frac{\partial h}{\partial x} + \psi_2\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right] -$$

$$- z\left[B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{55}B_{11} + A_1)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - (a_{44}B_{12} + A_1)\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right]$$

$$\sigma_y = B_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial v}{\partial y} - A_2\left[Z_1 + \frac{h}{4}\left(\varphi_2\frac{\partial h}{\partial x} + \psi_2\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right] - \tag{1.8}$$

$$- z\left[B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{55}B_{12} + A_2)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - (a_{44}B_{22} + A_2)\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right]$$

$$\tau_{xy} = B_{66}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - z\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - a_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)\right]$$

Имея в виду (1.5) и (1.8), путем интегрирования соответствующего соотношения закона Гука, с учетом (1.6) для функций w_1 и w_2 получим

$$w_1 = A_1\frac{\partial u}{\partial x} + A_2\frac{\partial v}{\partial y} - \Delta_1\left[Z_1 + \frac{h}{4}\left(\varphi_2\frac{\partial h}{\partial x} + \psi_2\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right]$$

$$w_2 = -\frac{1}{2}\left(A_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \Delta_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \Delta_3\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right) \tag{1.9}$$

Здесь

$$\Delta_1 = a_{13}A_1 + a_{23}A_2 - a_{33},\quad \Delta_2 = a_{13}(a_{55}B_{11} + A_1) + a_{23}(a_{55}B_{12} + A_2) - a_{33}$$

$$\Delta_3 = a_{13}(a_{44}B_{12} + A_1) + a_{23}(a_{44}B_{22} + A_2) - a_{33} \tag{1.10}$$

Члены выражения (1.6) zw_1 и z^2w_2 характеризуют изменение нормального перемещения u_z по толщине пластины, обусловленное учетом обжатия. Судя по формулам (1.9), нетрудно убедиться в том, что член zw_1 относится к плоской задаче пластины и в значение u_z он вносит поправку порядка h^2/l^2, где l – характерный размер пластины в плане. Член же z^2w_2 относится к задаче изгиба и его поправка имеет порядок

h^2/l^2. Поэтому с целью построения простейшей теории изгиба следует пренебречь членом zw_1 и для u_z взять:

$$u_z = w - \frac{z^2}{2}\left(A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \Delta_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \Delta_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \tag{1.11}$$

Из поверхностных условий [4], с учетом (1.1) и (1.8), получим:

$$h\varphi_2 = \frac{1}{4 + A_1(\partial h/\partial x)^2 + A_2(\partial h/\partial y)^2}\left\{\left[4 + A_2\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]X_2 - A_1\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}Y_2 - 4A_1\frac{\partial h}{\partial x}Z_2 + \right.$$

$$+\left[4B_{11} + B_{11}A_2\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 - B_{12}A_1\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + B_{66}\left[4 + A_2\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 - A_1\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right]\times$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial y} + \left[4B_{12} + B_{12}A_2\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 - B_{22}A_1\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right\}$$

$$h\psi_2 = \frac{1}{4 + A_1(\partial h/\partial x)^2 + A_2(\partial h/\partial y)^2}\left\{\left[4 + A_1\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right]Y_2 - A_2\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}X_2 - 4A_2\frac{\partial h}{\partial y}Z_1 + \right.$$

$$+\left[4B_{22} + B_{22}A_1\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 - B_{12}A_2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + B_{66}\left[4 + A_1\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 - A_2\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]\times$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial x} + \left[4B_{12} + B_{12}A_1\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 - B_{11}A_2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right\} \tag{1.12}$$

$$h^2\varphi_3 = 4(X_1 - \varphi_1) - h\left\{\left[B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{55}B_{11} + A_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (a_{44}B_{12} + A_1)\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right]\frac{\partial h}{\partial x} + B_{66}\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{55}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - a_{44}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial y}\right\}$$

$$h^2\psi_3 = 4(Y_1 - \psi_1) - h\left\{\left[B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{55}B_{12} + A_2)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (a_{44}B_{22} + A_2)\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right]\frac{\partial h}{\partial y} + B_{66}\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{55}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - a_{44}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial x}\right\}$$

Здесь

$$X_1 = (X^+ - X^-)/2, \quad Y_1 = (Y^+ - Y^-)/2,$$

$$X_2 = X^+ + X^-, \quad Y_2 = Y^+ + Y^-, \quad Z_2 = Z^+ + Z^- \tag{1.13}$$

С учетом (1.8) для усилий и моментов пластины имеем

$$T_x = h\left[\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_3\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \alpha_4\left(X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1\right)\right]$$

$$T_y = h\left[\beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial y} + \beta_3\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \beta_4\left(X_2 \frac{\partial h}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial y} + 4Z_1\right)\right]$$

$$S_{xy} = B_{66} h\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$N_x = \frac{1}{3h}\left[h^2(2\varphi_1 + X_1) + 3\left(M_x \frac{\partial h}{\partial x} + M_{xy} \frac{\partial h}{\partial y}\right)\right] \tag{1.14}$$

$$N_y = \frac{1}{3h}\left[h^2(2\psi_1 + Y_1) + 3\left(M_y \frac{\partial h}{\partial y} + M_{xy} \frac{\partial h}{\partial x}\right)\right]$$

$$M_x = -\frac{h^3}{12}\left[B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{55} B_{11} + A_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - (a_{44} B_{12} + A_1)\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right]$$

$$M_y = -\frac{h^3}{12}\left[B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (a_{55} B_{12} + A_2)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - (a_{44} B_{22} + A_2)\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right]$$

$$M_{xy} = -\frac{h^3}{12} B_{66}\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\alpha_1 = B_{11} - \alpha_4\left[B_{11}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + B_{12}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right], \quad \beta_1 = B_{12} - \beta_4\left[B_{11}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + B_{12}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$\alpha_2 = B_{12} - \alpha_4\left[B_{12}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + B_{22}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right], \quad \beta_2 = B_{22} - \beta_4\left[B_{12}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + B_{22}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$\alpha_3 = -2B_{66}\alpha_4 \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}, \quad \beta_3 = -2B_{66}\beta_4 \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} \tag{1.15}$$

$$\alpha_4 = \frac{A_1}{4 + A_1(\partial h/\partial x)^2 + A_2(\partial h/\partial y)^2}, \quad \beta_4 = \frac{A_2}{4 + A_1(\partial h/\partial x)^2 + A_2(\partial h/\partial y)^2}$$

Подставляя выражения внутренних усилий и моментов (1.14) в уравнения равновесия дифференциального элемента срединной плоскости пластины, после некоторых преобразований приходим к следующим системам разрешающих дифференциальных уравнений:

а) Система плоской задачи

$$h\left[\alpha_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha_3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+(\alpha_2+B_{66})\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right]+\frac{\partial(\alpha_1 h)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+$$

$$+\left(\alpha_3\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial\alpha_3}{\partial x}+B_{66}\frac{\partial h}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial(\alpha_2 h)}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=$$

$$=-X_2+\frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha_4 h\left(X_2\frac{\partial h}{\partial x}+y_2\frac{\partial h}{\partial y}+4Z_1\right)\right] \quad (1.16)$$

$$h\left[\beta_2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+B_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\beta_3\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+(\beta_1+B_{66})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right]+\frac{\partial(\beta_2 h)}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+$$

$$+\left(\beta_3\frac{\partial h}{\partial y}+h\frac{\partial\beta_3}{\partial y}+B_{66}\frac{\partial h}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial(\beta_1 h)}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}=$$

$$=-Y_2+\frac{\partial}{\partial y}\left[\beta_4 h\left(X_2\frac{\partial h}{\partial x}+y_2\frac{\partial h}{\partial y}+4Z_1\right)\right]$$

б) Система задачи изгиба

$$h^2\left[\left(B_{11}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+B_{22}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+4B_{66}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]-$$

$$-h\left\{\left[8+h\left((a_{55}B_{11}+A_1)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+(a_{55}B_{12}+A_2)\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\left[8+h\left((a_{44}B_{12}+A_1)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+(a_{44}B_{22}+A_2)\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right\}-$$

$$-2B_{66}h^2\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\left(a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+a_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)-16\left(\frac{\partial h}{\partial x}\varphi_1+\frac{\partial h}{\partial y}\psi_1\right)=$$

$$=4\left[3Z_2+h\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}+\frac{\partial Y_1}{\partial y}\right)-X_1\frac{\partial h}{\partial x}-Y_1\frac{\partial h}{\partial y}\right]$$

$$h^2\left[B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]+2h\left[\left(B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial h}{\partial x}+2B_{66}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]-$$

$$-h^2\left[(a_{55}B_{11}+A_1)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+B_{66}a_{55}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}+(a_{44}B_{12}+a_{44}B_{66}+A_1)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial y}\right]- \quad (1.17)$$

$$-2h\left[(a_{55}B_{11}+A_1)\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+B_{66}a_{55}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+(a_{44}B_{21}+A_1)\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+B_{66}a_{44}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right]+8\varphi_1=8X_1$$

$$h^2\left[B_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]+2h\left[\left(B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial h}{\partial y}+2B_{66}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]-$$

$$-h^2\left[\left(a_{44}B_{22}+A_2\right)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}+B_{66}a_{44}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\left(a_{55}B_{12}+a_{55}B_{66}+A_2\right)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y}\right]-$$

$$-2h\left[\left(a_{44}B_{22}+A_2\right)\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+B_{66}a_{44}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\left(a_{55}B_{12}+A_2\right)\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+B_{66}a_{55}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right]+8\psi_1=8Y_1$$

Имея в виду (1.14) из (1.1) для касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} получим:

$$\tau_{xz}=\frac{12z^2-h^2}{2h^2}X_1+\frac{z}{h}X_2+\frac{z}{h^2}\left(T_x\frac{\partial h}{\partial x}+S_{xy}\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{SN_x}{J}+$$

$$+\frac{h}{4J}\left(1-\frac{sh}{J}\right)\left(M_x\frac{\partial h}{\partial x}+M_{xy}\frac{\partial h}{\partial y}\right) \qquad (1.18)$$

$$\tau_{yz}=\frac{12z^2-h^2}{2h^2}Y_1+\frac{z}{h}Y_2+\frac{z}{h^2}\left(T_y\frac{\partial h}{\partial y}+S_{xy}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{SN_y}{J}+$$

$$+\frac{h}{4J}\left(1-\frac{sh}{J}\right)\left(M_y\frac{\partial h}{\partial y}+M_{xy}\frac{\partial h}{\partial x}\right),\qquad s=\frac{h^2-4z^2}{8},\; J=\frac{h^3}{12}$$

Эти формулы совпадают с аналогичными формулами, соответствующими классической теории пластин переменной толщины. Учет поперечных сдвигов и обжатия сказывается только на значениях внутренних усилий и моментов. Выражения же поперечных касательных напряжений через силовые факторы пластины остаются без изменений.

2. Система уравнений плоской задачи (1.16) имеет четвертый порядок, а система уравнений задачи изгиба (1.17) — шестой. В соответствии с этим на каждой стороне края пластины необходимо ставить по два условия для плоской задачи, по три — для задачи изгиба. Эти условия можно сформулировать традиционно [4], используя выражения усилий и моментов (1.14) и перемещений (1.7), (1.11).

Ради простоты рассмотрим только один из возможных вариантов условий шарнирного опирания края $x=\text{const}$:

а) Условия плоской задачи

$$\alpha_1\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial v}{\partial y}-\alpha_4\left(X_2\frac{\partial h}{\partial x}+Y_2\frac{\partial h}{\partial y}+4Z_1\right)=0,\quad\left(T_x=0\right) \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad\left(S_{xy}=0\right)$$

б) Условия задачи изгиба

$$B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(a_{55}B_{11}+A_1\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\left(a_{44}B_{12}+A_1\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial y}=0,\quad\left(M_x=0\right)$$

$$2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{55}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - a_{44}\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0, \quad (M_{xy} = 0) \tag{2.2}$$

$$w - \frac{z_0^2}{2}\left(A_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \Delta_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \Delta_3\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right) = 0, \quad \left(u_z\Big|_{z=z_0} = 0\right)$$

Здесь $-h/2 \le z_0 \le h/2$ – линия опирания края пластины.

Таким образом, определение напряженно–деформированного состояния ортотропной пластины переменной толщины при учете поперечных сдвигов и обжатия сводится к нахождению пяти функций $u, v, w, \varphi_1, \psi_1$, для чего необходимо проинтегрировать уравнения плоской задачи (1.16) и задачи изгиба (1.17) при соответствующих краевых условиях.

Нетрудно заметить, что поправки от поперечных сдвигов и от нормального напряжения σ_z имеют одинаковый порядок h^2/l^2. В том, что эти поправки должны иметь одинаковый порядок, можно убедиться из того факта, что члены с a_{44}, a_{55}, представляющие влияние поперечных сдвигов и члены с A_1, A_2, представляющие влияние напряжения σ_z, как в разрешающих уравнениях, так и в краевых условиях задачи фигурируют одинаково, как отдельные слагаемые. А то, что поправка от поперечных сдвигов имеет порядок h^2/l^2, общеизвестно.

Полагая $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$, получим случай, при котором влияние обжатия пренебрегается и учитывается только влияние поперечных сдвигов.

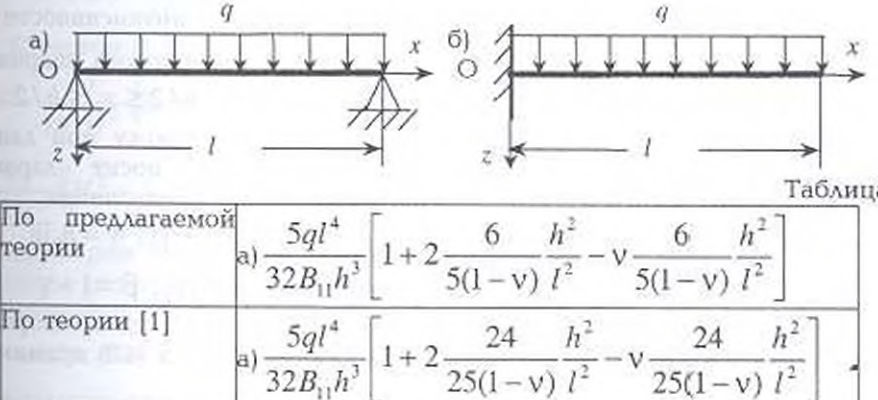


Таблица 1

По предлагаемой теории	а) $\dfrac{5ql^4}{32B_{11}h^3}\left[1 + 2\dfrac{6}{5(1-\nu)}\dfrac{h^2}{l^2} - \nu\dfrac{6}{5(1-\nu)}\dfrac{h^2}{l^2}\right]$
По теории [1]	а) $\dfrac{5ql^4}{32B_{11}h^3}\left[1 + 2\dfrac{24}{25(1-\nu)}\dfrac{h^2}{l^2} - \nu\dfrac{24}{25(1-\nu)}\dfrac{h^2}{l^2}\right]$
По предлагаемой теории	б) $\dfrac{3ql^4}{2B_{11}h^3}\left[1 + 2\dfrac{1}{2(1-\nu)}\dfrac{h^2}{l^2} + \nu\dfrac{1}{2(1-\nu)}\dfrac{h^2}{l^2}\right]$
По теории [1]	б) $\dfrac{3ql^4}{2B_{11}h^3}\left[1 + 3\dfrac{2}{5(1-\nu)}\dfrac{h^2}{l^2} + \nu\dfrac{2}{5(1-\nu)}\dfrac{h^2}{l^2}\right]$

3. В табл. 1 представлены значения максимальных прогибов срединной плоскости изотропной пластины – полосы постоянной толщины для двух случаев. Эти значения подсчитаны на основе предлагаемой теории при $z_0 = 0$ и по теории [1].

Внутри больших скобок фигурируют три слагаемые. Первая из них, т.е. "1", относится к классической теории пластин, вторая слагаемая представляет вклад поперечного сдвига, а последняя слагаемая – вклад нормального напряжения σ_z. Данные таблицы приводят к следующим заключениям.

1. Для каждой задачи качественный характер поправки от σ_z по обеим теориям одинаков. Причем, для шарнирно–опертой полосы (случай а)) учет σ_z приводит к уменьшению, а для консольной полосы (случай б)) – к увеличению максимального прогиба.

2. По обеим теориям поправки от поперечного сдвига в несколько раз превосходят поправки от σ_z.

3. Отношение величин поправок от поперечного сдвига к величине поправок от σ_z по предложенной теории в обоих случаях составляет $2/\nu$. По теории же [1] это отношение равно в случае а) $2/\nu$, а в случае б) $3/\nu$.

Таким образом, в рассмотренных случаях значения поправок от σ_z, по обеим теориям как по характеру, так и по величине мало отличаются друг от друга. Несмотря на это, естественно ожидать, что в общем случае картина может существенно измениться в зависимости от типа задачи, характера анизотропии и изменения толщины пластины.

4. В качестве приложения рассмотрим пластину–полосу шириной l, толщина которой изменяется по закону

$$h = h_0 + h_1 x, \quad 0 \le x \le l \tag{4.1}$$

Здесь h_0 и h_1 – заданные постоянные. Пусть пластина–полоса несет равномерно распределенную нормальную нагрузку интенсивности q, приложенную на поверхности $z = -h/2$. Пластина–полоса шарнирно оперта вдоль линий $x = 0$, $z = z_0$ и $x = l$, $z = z_0$, где $-h/2 \le z_0 \le h/2$.

Ограничимся рассмотрением задачи изгиба, поскольку при данной нагрузке и краевых условиях деформирование носит характер доминирующего изгиба. Примем обезразмеривающие обозначения

$$\begin{gathered} x = l\bar{x},\ z = h_0\bar{z},\ h_0/l = s,\ h_1/s = \gamma,\ H = h_0 H,\ H = 1 + \gamma\bar{x},\ w = h_0\bar{w} \\ u_z = h_0\bar{u}_z,\ \ q = B_{11}\bar{q},\ a_{55}B_{11} = \chi,\ \bar{\Delta}_z = B_{11}\Delta_z,\ \varphi_1 = B_{11}\bar{\varphi}_1,\ \beta = 1 + \gamma \end{gathered} \tag{4.2}$$

Третье дифференциальное уравнение системы (1.17) удовлетворяется тождественно, а ее первые два уравнения в обозначениях (4.2) принимают вид:

$$\begin{gathered} H\frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}} + 2\gamma\bar{\varphi}_1 = -\frac{3\bar{q}}{2s} \\ \frac{d}{d\bar{x}}\left\{H^2\left[s\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - (\chi + \Delta_z)\right]\frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}}\right\} + \frac{8\bar{\varphi}_1}{s^2} = 0 \end{gathered} \tag{4.3}$$

Краевые условия будут

$$\left[s\frac{d^2\overline{w}}{d\overline{x}^2}-(\chi+A_1)\frac{d\overline{\varphi}_1}{d\overline{x}}\right]\Bigg|_{\substack{\overline{x}=0\\ \overline{x}=l}}=0,\quad \left(M_x\Bigg|_{\substack{x=0\\ x=l}}=0\right)$$
$$\left[2\overline{w}-s\overline{z}_0^2\left(A_1 s\frac{d^2\overline{w}}{d\overline{x}^2}-\overline{\Delta}_2\frac{d\overline{\varphi}_1}{d\overline{x}}\right)\right]\Bigg|_{\substack{\overline{x}=0\\ \overline{x}=l}}=0,\quad \left(u_z\Bigg|_{\substack{x=0,\ z=z_0\\ x=l,\ z=z_0}}=0\right) \tag{4.4}$$

Общее решение системы (4.3) имеет вид:

$$\overline{\varphi}_1=\frac{C_1}{H^2}-\frac{3\overline{q}}{4\gamma s}$$
$$\overline{w}=\frac{6\overline{q}}{h_1^4}\left[(1+H)\ln H-\gamma\overline{x}\right]+C_1\frac{4-(\chi+A_1)h_1^2}{h_1^3 H}-C_2\frac{s}{h_1^2}\ln H+C_3\overline{x}+C_4 \tag{4.5}$$

Удовлетворив краевым условиям (4.4), для постоянных интегрирования C_i находим:

$$C_1=\frac{3\overline{q}\beta}{4h_1},\quad C_2=-\frac{6\overline{q}\beta}{sh_1^2}$$
$$C_4=\frac{C_1}{h_1^3}\left\{\left[4-(\chi+A_1)h_1^2\right]\left(A_1h_1\overline{z}_0^2-1\right)+h_1^4\overline{\Delta}_2\overline{z}_0^2\right\}+\frac{A_1s\overline{z}_0^2C_2}{2}$$
$$C_3=\frac{3A_1\overline{z}_0^2}{h_1s\beta^2}\overline{q}+\frac{6\overline{q}}{h_1^4}\left[\gamma-(1+\beta)\ln\beta\right]-\frac{C_1}{h_1^3\beta^3}\left\{\left[4-(\chi+A_1)h_1^2\right]\left(\beta^2-A_1h_1^2\overline{z}_0^2\right)-\right.$$
$$\left.-h_1^4\overline{\Delta}_2\overline{z}_0^2\right\}+\frac{C_2s}{2h_1^2\beta^2}\left(A_1h_1^2\overline{z}_0^2+2\beta^2\ln\beta\right)-C_4 \tag{4.6}$$

С учетом (1.11), (4.2) и (4.5) для нормального перемещения получим:

$$\overline{u}_z=-\frac{3\overline{q}}{sh_1^4H^2}\left\{2sH^2\left[\gamma\overline{x}-(1+H)\ln H\right]+A_1h_1^3\overline{x}\overline{z}^2\right\}+C_3\overline{x}+C_4+ \tag{4.7}$$
$$+\frac{C_1}{h_1^3H^3}\left\{\left(H^2-A_1h_1^3\overline{x}\overline{z}^2\right)\left[4-(\chi+A_1)h_1^2\right]-h_1^4\overline{\Delta}_2\overline{z}^2\right\}-\frac{C_2s}{2h_1^2H^2}\left(2H^2\ln H+A_1h_1^2\overline{z}^2\right)$$

5. Рассмотрим численный пример для изотропной и ортотропной полос линейно-переменной толщины. В табл. 2 и 3 представлены значения безразмерной координаты сечения максимального прогиба срединной плоскости полосы $\overline{x}_m$. Представлены также значения относительного нормального перемещения u_z как для точек срединной плоскости $(\overline{z}=0)$, так и для крайних точек сечения $\overline{x}_m$ $(\overline{z}=\pm0.5)$. Рассмотрены случаи как пренебрежения, так и учета поперечного сдвига и обжатия при двух положениях линии шарнирного опирания краев полосы. В одном случае линия опирания находится на срединной плоскости $(\overline{z}_0=0)$, а в другом – на одной из лицевых поверхностей $(\overline{z}_0=\pm0.5)$. Результаты, полученные без учета поперечного сдвига, помещены в столбцах $\chi=0$.

Табл. 2 относится к случаю изотропного материала с коэффициентом Пуассона $\nu=1/3$, при котором $A_1=-0.5,\ \overline{\Delta}_2=-2.25,\ \chi=3$. Табл. 3 относится к случаю ортотропного материала, модуль Юнга которого в поперечном направлении в 3 раза меньше, чем в направлении оси x. Для этого материала $A_1 = -1$, $\bar{\Delta}_z = -5$, $\chi = 5$. В обоих случаях геометрические параметры полосы одинаковы: относительная толщина на тонком краю равна 1/6, а на толстом – 1/4 $(s = 1/6,\ h_1 = 1/12,\ \gamma = 1/2)$. Для иллюстрационного примера выбор такой, достаточно толстой пластины – полосы оправдывается тем, что в этом случае поправки от поперечного сдвига и обжатия окажутся существенно ощутимыми, что позволяет судить об их качественном и количественном влияниях. Приведенные в таблицах результаты соответствуют нагрузке $\bar{q} = 5 \cdot 10^{-}$[illegible], что не важно, поскольку значения $\bar{x}_m$ не зависят от $\bar{q}$, а значения $\bar{u}_z$ прямо пропорциональны ей.

Таблица 2

			$\bar{z}_0 = 0$		$\bar{z}_0 = \pm 0.5$	
			$\chi = 0$	$\chi = 3$	$\chi = 0$	$\chi = 3$
$\bar{u}_z \cdot 10^2$	$\bar{x}_m$	Без обжатия	0.4646	0.4629	0.4646	0.4629
		С обжатием	0.4649	0.4632	0.4654	0.4633
	$\bar{z} = 0$	Без обжатия	53.700	61.877	53.700	61.877
		С обжатием	52.338	60.513	52.102	60.419
	$\bar{z} = \pm 0.5$	Без обжатия	53.700	61.877	53.700	61.877
		С обжатием	51.628	59.690	51.392	59.596

Таблица 3

			$\bar{z}_0 = 0$		$\bar{z}_0 = \pm 0.5$	
			$\chi = 0$	$\chi = 5$	$\chi = 0$	$\chi = 5$
$\bar{u}_z \cdot 10^2$	$\bar{x}_m$	Без обжатия	0.4646	0.4620	0.4646	0.4620
		С обжатием	0.4653	0.4624	0.4665	0.4626
	$\bar{z} = 0$	Без обжатия	53.700	67.328	53.700	67.328
		С обжатием	50.976	64.602	50.408	64.507
	$\bar{z} = \pm 0.5$	Без обжатия	53.700	67.328	53.700	67.328
		С обжатием	49.632	62.879	49.067	62.784

Анализ результатов таблиц показывает, что влияние анизотропии материала проявляется только количественно. Для случаев изотропной и анизотропной полос приходим к следующим, качественно одинаковым, заключениям:

1. Учет поперечного сдвига приводит к незначительному смещению сечения $\bar{x}_m$ в сторону тонкого края пластины, а учет обжатия, наоборот – к незначительному смещению этого сечения в сторону толстого края.
2. Учет поперечного сдвига увеличивает максимальное значение $\bar{u}_z$ в случае изотропного материала примерно на 15%, а в случае ортотропного материала – примерно на 25%. Учет обжатия, наоборот, уменьшает значение $\bar{u}_z$. Причем, это уменьшение для всех $\bar{z}$ не превосходит в случае изотропного материала 4.2%, а в случае ортотропного – 8.5%. Интересно отметить, что в случае изотропной полосы отношение поправок, вносимых в значения максимального прогиба срединной плоскости от поперечного сдвига и обжатия.

совпадает с отношением этих поправок, соответствующих полосе постоянной толщины. На самом деле, при $\bar{z}=0$ отмеченная поправка только от поперечного сдвига составляет 15.23%, а только от обжатия -2.54%, т.е. в $2/\nu=6$ раза меньше.

3. При учете обжатия изменение месторасположения линии опирания краев слабо влияет на значение $\bar{u}_z$. В случае изотропного материала это влияние составляет 0.5%, а для ортотропного -1.2%. Причем большее значение $\bar{u}_z$ получается, когда $\bar{z}_0=0$, т.е. при нахождении линии опирания на срединной плоскости.
4. При учете обжатия значение $\bar{u}_z$ с удалением от срединной плоскости уменьшается. В случае изотропного материала это уменьшение не превосходит 1.4%, а в случае ортотропного -2.4%.

В заключение отметим, что как влияние обжатия, так и обусловленное им влияние месторасположения линии опирания полосы могут существенно возрастать при уменьшении относительного модуля Юнга материала в поперечном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин.М.: Наука. 1987. 360с.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наукова Думка, 1981. 544с.
3. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Уточненные модели деформирования неоднородных анизотропных оболочек // Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван. 2002. С.155–166.
4. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван: Изд. Гитутюн НАН РА, 2000. 122с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
16.09.2002

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №4, 2002 Механика

УДК 539-3

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ КРУГОВЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН С НЕСЖИМАЕМЫМ СРЕДНИМ СЛОЕМ

Вирабян Е.Г.

Ե.Գ. Վիրաբյան

Անսեղմելի միջին շերտով եռաշերտ շրջանային օղակաձև սալերի առաձգականության տեսության եզրային խնդիրների ասիմպտոտիկական լուծումները

Ելնելով առաձգականության տեսության գլանային կոորդինատներով գրված հավասարումներից ասիմպտոտիկ եղանակով արտածված են ռեկուրենտ բանաձևեր սեղմելի և անսեղմելի նյութերից պատրաստված իզոտրոպ բարակապատ կլոր մարմինների լարումների և տեղափոխումների դաշտերի բաղադրիչների որոշման համար: Որոշված են անսեղմելի միջին շերտերով եռաշերտ շրջանային օղակաձև սալերի լարվածադեֆորմացիոն վիճակները, երբ նրանց դիմային մակերևույթների վրա տրված են կինեմատիկական կամ խառը եզրային պայմաններ: Բերված են ռետինամետաղական սեյսմամեկուսիչների աշխատանքը մոդելավորող օրինակներ

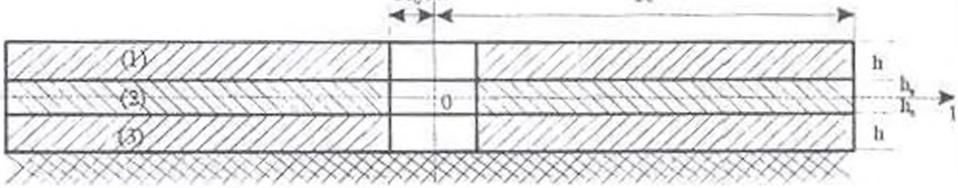
Ye.G. Virabyan

Asymptotic solutions of boundary problems of elasticity theory for three layered round circular plates with incompressible medial layer

Исходя из уравнений теории упругости, в цилиндрических координатах асимптотическим методом выведены рекуррентные формулы для определения компонентов полей напряжений и перемещений изотропных тонких, круглых тел из сжимаемых и несжимаемых материалов. Определено напряженно-деформированное состояние трехслойных круговых кольцевых пластин с несжимаемым средним слоем, когда на их лицевых поверхностях заданы кинематические и смешанные условия. Приведены примеры, моделирующие работу резинометаллических сейсмоизоляторов.

1. Имеем трехслойную, тонкую круглую кольцевую пластину, отнесенную к цилиндрическим координатам (фиг. 1.).

$$\Omega = \{r, \varphi, z : R_0 \le r \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi, -(h+h_e) \le z \le h+h_e,$$
$$h + h_e << \min\{R_0, R - R_0\}\}$$



Фиг. 1

Считается, что слои (1) и (3) $(h_e \le |z| \le h_e + h)$ из сжимаемого материала $(\vartheta < 1/2)$, а слой $-h_e \le z \le h_e$ – из несжимаемого материала $(\vartheta = 1/2)$.

На лицевых поверхностях пластины заданы кинематические

$$u_j(r, \varphi, z = \pm(h + h_e)) = u_j^{\pm} \qquad j = r, \varphi, z \tag{1.1}$$

или смешанные условия

$$u_j(r,\varphi,z=-h-h_c)=u_j^- \qquad j=r,\varphi,z$$

$$\sigma_{jz}(r,\varphi,z=h+h_c)=\sigma_{jz}^+ \qquad j=r,\varphi,z \tag{1.2}$$

а между слоями выполняются условия полного контакта

$$u_j^{(1)}(r,\varphi,z=h_e)=u_j^{(e)}(r,\varphi,z=h_e)\,,\,u_j^{(3)}(r,\varphi,z=-h_e)=u_j^{(e)}(r,\varphi,z=-h_e)$$

$$\sigma_{jz}^{(1)}(r,\varphi,z=h_e)=\sigma_{jz}^{(e)}(r,\varphi,z=h_e)\,,\sigma_{jz}^{(3)}(r,\varphi,z=-h_e)=\sigma_{jz}^{(e)}(r,\varphi,z=-h_e) \tag{1.3}$$

(Величинам несжимаемого слоя приписан индекс "e").

Граничные условия на торцах $r=R_0$, $r=R$ не приводим, поскольку здесь решается внутренняя задача.

Требуется определить напряженно-деформированное состояние трехслойной круговой кольцевой пластины.

Для решения поставленных краевых задач в уравнениях теории упругости в цилиндрических координатах для сжимаемых и несжимаемых тел [1] переходим к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям и вводим геометрический малый параметр по формулам

$$\xi=r/l\,,\quad \eta=\varphi\,,\quad \zeta=z/h_1=\varepsilon^{-1}z/l\,,\ u=u_r/l\,,\quad v=u_\varphi/l\,,\quad w=u_z/l$$

$$\varepsilon=h_1/l\,,\quad l=\min\{R_0,R-R_0\}\,,\qquad h_1=h+h_e\,. \tag{1.4}$$

Получаем две системы сингулярно-возмущенных уравнений, решения которых ищем в виде асимптотических разложений [2-5]

$$Q=\varepsilon^{\chi}\sum_{S=0}^{N}\varepsilon^{S}Q^{(S)}(\xi,\eta,\zeta) \tag{1.5}$$

где

$$\chi_\sigma=-1\,,\qquad \chi_u=0 \tag{1.6}$$

для всех напряжений и перемещений слоев из сжимаемого материала и

$$\chi_{\sigma_{rr}}=\chi_{\sigma_{\varphi\varphi}}=\chi_{\sigma_{zz}}=-3$$

$$\chi_{\sigma_{rz}}=\chi_{\sigma_{\varphi z}}=\chi_{\sigma_{r\varphi}}=-2 \tag{1.7}$$

$$\chi_u=\chi_v=-1\,,\ \chi_w=0$$

для величин слоя из несжимаемого материала. Подставив (1.5)-(1.7) в сингулярно-возмущенные системы уранений и, методом Пуанкаре, приравняв коэффициенты при ε^S в левых и правых частях, получим непротиворечивые системы уравнений для коэффициентов разложения (1.5). Решив эти системы уравнений и возвратившись к размерным координатам и перемещениям, получим рекуррентные формулы для определения компонентов тензора напряжения и вектора перемещения в слоях из сжимаемого материала [4]

$$Q(r,\varphi,z)=\sum_{S=0}^{N}Q^{(S)}(r,\varphi,z)$$

$$\sigma_{jz}^{(S)}=\sigma_{jz0}^{(S)}(r,\varphi)+\sigma_{jz*}^{(S)}(r,\varphi,z) \qquad j=r,\varphi,z$$

$$\sigma_{rr}^{(S)}=\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\sigma_{zz0}^{(S)}+\frac{1}{1-\vartheta^2}P_1^{(S)} \qquad (r,\varphi;P_1,P_2)$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(S)} = G\frac{\partial u_r^{(S-1)}}{\partial \varphi} + G\frac{\partial u_\varphi^{(S-1)}}{\partial z} - G\frac{u_\varphi^{(S-1)}}{z}$$

$$u_r^{(S)} = u_{r0}^{(S)} + z\frac{1}{G}\sigma_{rz0}^{(S)} + u_{r*}^{(S)}(r,\varphi,z) \quad (r,\varphi)$$

$$u_z^{(S)} = u_{z0}^{(S)}(r,\varphi) + z\frac{(1+\vartheta)(1-2\vartheta)}{E(1-\vartheta)}\sigma_{zz0}^{(S)} + u_{z*}^{(S)}(r,\varphi,z)$$

$$\sigma_{rz*}^{(S)} = -\int_0^z\left[\frac{\partial \sigma_{rr}^{(S-1)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(S-1)}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}(\sigma_{rr}^{(S-1)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(S-1)}) + F_r^{(S)}\right]dz$$

$$\sigma_{\varphi z*}^{(S)} = -\int_0^z\left[\frac{\partial \sigma_{r\varphi}^{(S-1)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}^{(S-1)}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_{r\varphi}^{(S-1)}}{r} + F_\varphi^{(S)}\right]dz$$

$$\sigma_{zz*}^{(S)} = -\int_0^z\left[\frac{\partial \sigma_{rz}^{(S-1)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi z}^{(S-1)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\sigma_{rz}^{(S-1)} + F_z^{(S)}\right]dz \qquad (1.8)$$

$$P_1^{(S)} = 2(1+\vartheta)G\frac{\partial u_r^{(S-1)}}{\partial r} + 2\vartheta(1+\vartheta)G\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi^{(S-1)}}{\partial \varphi} + 2\vartheta(1+\vartheta)G\frac{1}{r}u_r^{(S-1)} + \vartheta(1+\vartheta)\sigma_{zz*}^{(S-1)}$$

$$P_2^{(S)} = 2\vartheta(1+\vartheta)G\frac{\partial u_r^{(S-1)}}{\partial r} + 2(1+\vartheta)G\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi^{(S-1)}}{\partial \varphi} + 2\vartheta(1+\vartheta)G\frac{1}{r}u_r^{(S-1)} + \vartheta(1+\vartheta)\sigma_{zz*}^{(S-1)}$$

$$u_{r*}^{(S)} = -\int_0^z\left[\frac{1}{G}\sigma_{rz*}^{(S)} - \frac{\partial u_z^{(S-1)}}{\partial r}\right]dz,\quad u_{\varphi*}^{(S)} = -\int_0^z\left[\frac{1}{G}\sigma_{\varphi z*}^{(S)} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_z^{(S-1)}}{\partial \varphi}\right]dz$$

$$u_{z*}^{(S)} = -\int_0^z\left[\frac{1}{2(1+\vartheta)G}\sigma_{zz*}^{(S)} - \frac{\vartheta}{2G(1+\vartheta)(1-\vartheta^2)}(P_1^{(S)} + P_2^{(S)})\right]dz$$

и в слое из несжимаемого материала [5] пластины

$$\sigma_{zz}^{(S)} = \sigma_{zz0}^{(S)} + \sigma_{zz*}^{(S)} \quad (r,\varphi,z),\quad \sigma_{rr0}^{(S)} = \sigma_{\varphi\varphi0}^{(S)} = \sigma_{zz0}^{(S)}$$

$$\sigma_{rz}^{(S)} = \sigma_{rz0}^{(S)} - z\frac{\partial \sigma_{zz0}^{(S)}}{\partial r} + \sigma_{rz*}^{(S)},\quad \sigma_{\varphi z}^{(S)} = \sigma_{\varphi z0}^{(S)} - \frac{z}{r}\frac{\partial \sigma_{zz0}^{(S)}}{\partial \varphi} + \sigma_{\varphi z*}^{(S)}$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(S)} = G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r^{(S-1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi^{(S-1)}}{\partial r} - \frac{1}{r}u_\varphi^{(S-1)}\right)$$

$$u_r^{(S)} = u_{r0}^{(S)} + \frac{1}{2G}\left(2z\sigma_{rz0}^{(S)} - z^2\frac{\partial \sigma_{zz0}^{(S)}}{\partial r}\right) + u_{r*}^{(S)}$$

$$u_\varphi^{(S)} = u_{\varphi0}^{(S)} + \frac{1}{2G}\left(2z\sigma_{\varphi z0}^{(S)} - \frac{z^2}{r}\frac{\partial \sigma_{zz0}^{(S)}}{\partial \varphi}\right) + u_{\varphi*}^{(S)}$$

$$u_z^{(S)} = u_{z0}^{(S)} + u_{z*}^{(S)} - z\left(\frac{\partial u_{r0}^{(S)}}{\partial r} + \frac{1}{r}u_{r0}^{(S)} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_{\varphi0}^{(S)}}{\partial \varphi}\right) -$$

$$-\frac{z^2}{2G}\left(\frac{\partial\sigma_{rz0}^{(S)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\sigma_{rz0}^{(S)}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi z0}^{(S)}}{\partial\varphi}-\frac{z}{3}\frac{\partial^2\sigma_{zz0}^{(S)}}{\partial r^2}-\frac{z}{3r}\frac{\partial\sigma_{zz0}^{(S)}}{\partial r}-\frac{z}{3r^2}\frac{\partial^2\sigma_{zz0}^{(S)}}{\partial\varphi^2}\right) \quad (1.9)$$

$$\sigma_{zz*}^{(S)}=-\int_0^z\left(\frac{\partial\sigma_{rz}^{(S-2)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi z}^{(S-2)}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\sigma_{rz}^{(S-2)}\right)dz$$

$$\sigma_{rr*}^{(S)}=\sigma_{zz*}^{(S)}+4G\frac{\partial u_r^{(S-2)}}{\partial r}+\frac{2G}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi^{(S-2)}}{\partial\varphi}+u_r^{(S-2)}\right)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi*}^{(S)}=\sigma_{zz*}^{(S)}+\frac{4G}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi^{(S-2)}}{\partial\varphi}+u_r^{(S-2)}\right)+2G\frac{\partial u_r^{(S-2)}}{\partial r}$$

$$\sigma_{rz*}^{(S)}=-\int_0^z\left(\frac{\partial\sigma_{rr}^{(S)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}^{(S-1)}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\left(\sigma_{rr}^{(S)}-\sigma_{\varphi\varphi}^{(S)}\right)\right)dz$$

$$\sigma_{\varphi z*}^{(S)}=-\int_0^z\left(\frac{\partial\sigma_{r\varphi}^{(S-1)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi*}^{(S)}}{\partial\varphi}+\frac{2\sigma_{r\varphi}^{(S-1)}}{r}\right)dz$$

$$u_{r*}^{(S)}=\int_0^z\left(\frac{1}{G}\sigma_{rz*}^{(S)}-\frac{\partial u_z^{(S-2)}}{\partial r}\right)dz\,,\; u_{\varphi*}^{(S)}=\int_0^z\left(\frac{1}{G}\sigma_{\varphi z*}^{(S)}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_z^{(S-2)}}{\partial\varphi}\right)dz$$

$$u_{z*}^{(S)}=\int_0^z\left(3\alpha\theta-\frac{\partial u_{r*}^{(S)}}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_{\varphi*}^{(S)}}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}u_{r*}^{(S)}\right)dz$$

Общий интеграл поставленных краевых задач, представленный асимптотическим разложением и рекуррентными формулами (1.7),(1.8),(1.9) содержит необходимое количество (18 штук) неизвестных пока функций интегрирования, которые должны определиться из граничных условий и условий контакта слоев (1.1)-(1.3).

2. Применение полученных рекуррентных формул проиллюстрируем на конкретных прикладных задачах.

а) Пусть одна лицевая поверхность пластины жестко закреплена, а противоположной лицевой поверхности сообщено постоянное нормально сжимающее перемещение

$$\begin{aligned} &u_j(r,\varphi,z=-h_e-h)=u_j^-=0\,, \qquad j=r,\varphi,z\\ &u_z(r,\varphi,z=h+h_e)=u_z^+=-\Delta \qquad\qquad (2.1)\\ &u_j(r,\varphi,z=h+h_e)=u_j^+=0\,, \qquad j=r,\varphi \end{aligned}$$

После двух шагов итерации для компонентов полей напряжений и перемещений получаем для первого сжимаемого слоя $h_e\le z\le h_e+h$

$$\sigma_{zz}^{(1)}=\sigma\,,\;\sigma_{rr}^{(1)}=\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}=\frac{\theta}{1-\theta}\sigma\,,\;\sigma_{r\varphi}^{(1)}=\sigma_{\varphi z}^{(1)}=0$$

$$\sigma_{rz}^{(1)}=\left[h_e(2\theta-1)-z\theta\right]\frac{1}{1-\theta}\frac{\partial\sigma}{\partial r}\,,\;\; u_\varphi^{(1)}=0 \qquad (2.2)$$

$$u_r^{(1)} = \left[\frac{(h+h_c)^2 - z^2}{4G(1-\vartheta)} - \frac{(h+h_c-z)(h-h_c)(1-2\vartheta)}{2G(1-\vartheta)}\right]\frac{\partial\sigma}{\partial r}$$

$$u_z^{(1)} = -\Delta + \frac{(z-h-h_c)(1-2\vartheta)}{2G(1-\vartheta)}\sigma$$

для среднего (несжимаемого) слоя $-h_c \le z \le h_c$

$$\sigma_{zz}^c = \sigma_{rr}^c = \sigma_{\varphi\varphi}^c = \sigma,\ \sigma_{r\varphi}^c = \sigma_{\varphi z}^c = 0,\ \sigma_{rz}^c = -z\frac{\partial\sigma}{\partial r}$$

$$u_r^c = \frac{h_c^2 - z^2}{2G_c}\frac{\partial\sigma}{\partial r} + \frac{4hh_c(1-\vartheta) + h^2(4\vartheta-1)}{4G(1-\vartheta)}\frac{\partial\sigma}{\partial r} \tag{2.3}$$

$$u_z^c = -\frac{1}{2}\Delta + \left[\frac{z(z^2-3h_c^2)}{6G_c} - z\frac{4hh_c(1-\vartheta)+h^2(4\vartheta-1)}{4G(1-\vartheta)}\right]\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right)$$

для третьего (сжимаемого) слоя $-h-h_c \le z \le -h_c$

$$\sigma_{zz}^{(3)} = \sigma,\ \sigma_{rr}^{(3)} = \sigma_{\varphi\varphi}^{(3)} = \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\sigma,\ \sigma_{r\varphi}^{(3)} = \sigma_{\varphi z}^{(3)} = 0,\ u_\varphi^{(3)} = 0$$

$$\sigma_{rz}^{(3)} = -\frac{\vartheta z - h_c(1-2\vartheta)}{1-\vartheta}\frac{\partial\sigma}{\partial r}$$

$$u_r^{(3)} = \left[\frac{(h+h_c)^2 - z^2}{4G(1-\vartheta)} - \frac{(h+h_c+z)(h-h_c)(1-2\vartheta)}{2G(1-\vartheta)}\right]\frac{\partial\sigma}{\partial r} \tag{2.4}$$

$$u_z^{(3)} = \frac{(z+h+h_c)(1-2\vartheta)}{2G(1-\vartheta)}\sigma$$

$$\sigma = -\frac{\Delta G(1-\vartheta)}{(1-2\vartheta)h} + AI_0(r\sqrt{\alpha}) + BK_0(r\sqrt{\alpha})$$

$$A = \frac{\Delta G(1-\vartheta)}{(1-2\vartheta)hD}\left(K_0(R\sqrt{\alpha}) - K_0(R_0\sqrt{\alpha})\right) \tag{2.5}$$

$$B = \frac{\Delta G(1-\vartheta)}{(1-2\vartheta)hD}\left(I_0(R_0\sqrt{\alpha}) - I_0(R\sqrt{\alpha})\right)$$

$$D = I_0(R_0\sqrt{\alpha})K_0(R\sqrt{\alpha}) - I_0(R\sqrt{\alpha})K_0(R_0\sqrt{\alpha})$$

$$\alpha = \frac{(1-2\vartheta)h}{G(1-\vartheta)}\left[\frac{h_c h(4(1-\vartheta)h_c - (1-4\vartheta)h)}{2G(1-\vartheta)} + \frac{2h_c^3}{3G_c}\right]^{-1}$$

где $I_0(x) = J_0(ix)$ - бесселева цилиндрическая функция мнимого аргумента нулевого индекса, $K_0(x)$ -соответствующая функция Макдональда [7].

б) Одна лицевая поверхность пластины жестко закреплена, а противоположной лицевой поверхности сообщено крутящее тангенциальное перемещение

$$u_j(r,\varphi,z=-h-h_c) = u_j^- = 0, \qquad j = r,\varphi,z$$

$$u_\varphi(r,\varphi,z=h+h_c) = u_\varphi^+ = v_r \tag{2.6}$$

$$u_j(r,\varphi,z=h+h_e)=u_j^*=0 \qquad j=r,z.$$

После двух шагов итерации получаем:

для всех слоев $-h-h_e \le z \le h+h_e$

$$\sigma_{zz}=\sigma_{rr}=\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{rz}=\sigma_{r\varphi}=u_z=u_r=0,\ \sigma_{\varphi z}=\frac{GG_e}{2(h_eG+hG_e)}v_* \tag{2.7}$$

для первого (сжимаемого) слоя $h_e \le z \le h+h_e$

$$u_\varphi^{(1)}=v_*+\frac{(z-h-h_e)G_e}{2(h_eG+hG_e)}v_* \tag{2.8}$$

для среднего (несжимаемого) слоя $-h_e \le z \le h_e$

$$u_\varphi^{(a)}=\frac{(z+h_e)G+hG_e}{2(h_eG+hG_e)}v_* \tag{2.9}$$

для третьего (сжимаемого) слоя $-h-h_e \le z \le -h_e$

$$u_\varphi^{(3)}=\frac{(z+h+h_e)G_e}{2(h_eG+hG_e)}v_* \tag{2.10}$$

Эти результаты могут быть применены в расчетах резинометаллических сейсмоизоляторов [8].

Автор выражает признательность Р.С.Геворкяну за внимание, оказанное при решении задачи и оформлении статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Теория упругости. М. ОНТИ, 1937.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией // В кн. Механика конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука. 1984. С. 105-110.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Саакян А.В. Об асимптотическом решении краевых задач для полос из несжимаемых материалов.// Докл.НАН Армении 1997. Т.97. N3. С.13-18.
4. Вирабян Е.Г., Геворкян Р.С. Асимптотические решения для краевых задач для круговых кольцевых пластин.// Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т.54. N2. С.42-49.
5. Геворкян Р.С., Вирабян Е.Г. Асимптотические решения краевых задач теории упругости для круговой кольцевой пластины из несжимаемого материала. // Докл. НАН Армении. 2001. Т.101. N3. С.237-244.
6. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Саакян А.В. К асимптотическому решению пространственной задачи теории упругости для пластин из несжимаемых материалов. // ПММ. 2002. Т.66. Вып.2. С.293-305.
7. Коренев Б.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности решаемые в Бесселевых функциях. М.: Физматгиз, 1960. 459с.
8. Kelly J.M. -Report N$_0$ UCB/EERC-94/03 Mach. 1994, p.59.

Институт меаники
НАН Армении

Поступила в редакцию
25.09.2002

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №4, 2002 Механика

УДК 537.2 : 539.3

ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ КУБИЧЕСКОЙ И ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ (КЛАССЫ 23 И 6mm)

Берберян А.Х.

Ա.Խ. Բերբերյան

Սահքի էլեկտրաառաձգական ալիքի բեկումը խորանարդային և հեքսագոնալ պյեզոէլեկտրիկ 23 և 6mm դասի բյուրեղների բաժանման սահմանից

Դիտարկված է սահքի էլեկտրաառաձգական հարթ ալիքի անդրադարձումը և բեկումը խորանարդային և հեքսագոնալ պյեզոէլեկտրիկ 23 և 6mm դասի բյուրեղների բաժանման սահմանից: Գտնված են ալիքային դաշտերը պյեզոէլեկտրիկ բյուրեղներում, որոշված են առաջացող ալիքների լայնույթային գործակիցները: Ցույց է տրված, որ բյուրեղներում առաջանում է ուղեկցող մակերևութային ալիքներ:

A.Kh.Berberyan

Refraction of an electroelastic shear wave at the interface between a cubic and hexogonal piezoelectric crystal of 23 and 6mm classes

Рассмотрено отражение и преломление плоской электроупругой сдвиговой волны на границе раздела кубического и гексагонального пьезоэлектрических кристаллов классов 23 и 6mm. Найдены волновые поля в пьезоэлектрических кристаллах, определены амплитудные коэффициенты возникающих волн. Показано, что в кристаллах возникают сопутствующие поверхностные волны.

Введение. Как известно [1–5], наличие пьезоэлектрических свойств у кристалла может существенно менять поведение волновых процессов, хотя коэффициент электромеханической связи для известных пьезокристаллов мал по сравнению с единицей. Такая ситуация возникает, например, при отражении и преломлении электроупругих волн на границе пьезоэлектриков. В работе [9] для пьезокристаллов ромбической симметрии класса 222 показано, что наличие пьезоэффекта приводит к возникновению в кристалле дополнительных электроупругих колебаний, которые не являются собственными колебаниями кристалла и возникают только в присутствии падающей на границу раздела электроупругой волны. Такое колебание локализуется у границы кристалла и называется сопутствующим поверхностным колебанием (СПК) [1,6,9]. В настоящей работе рассматривается задача преломления сдвиговой электроупругой волны на границе раздела пьезоэлектрических кристаллов кубической и гексагональной симметрии класса 23 и 6mm.

1.Постановка задачи. Пусть два пьезоэлектрических кристалла кубической и гексагональной симметрии класса 23 и 6mm в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ находятся в акустическом контакте вдоль плоскости $y = 0$. Величины, характеризующие пьезоэлектрик, находящийся при $y > 0$, будем сопровождать индексом α, а при $y<0$ – индексом β. Пусть пьезоэлектрик, занимающий область $y>0$, является кубический кристалл, а область $y<0$ занимает гексагональный кристалл. Одна из осей симметрии второго порядка кубического кристалла параллельна главной оси гексагонального кристалла и оси Oz, и лежат они в плоскости границы раздела (фиг. 1). Далее, пусть кристаллы находятся в антиплоском деформированном состоянии, так что упругие и электрические поля в средах имеют вид:

$$\begin{aligned} y>0: \bar{u}_\alpha &= \{0,0,u_\alpha(x,y,t)\}, \quad \varphi_\alpha = \varphi_\alpha(x,y,t) \\ y<0: \bar{u}_\beta &= \{0,0,u_\beta(x,y,t)\}, \quad \varphi_\beta = \varphi_\beta(x,y,t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\bar{u}$ – вектор упругого перемещения точек среды, φ – потенциалы электрических полей в средах.

При сделанных предположениях из соотношений линейной теории электроупругости и квазистатического электрического поля получаются следующие уравнения и граничные условия для рассматриваемой задачи [1,7]:

1. в области $y>0$:

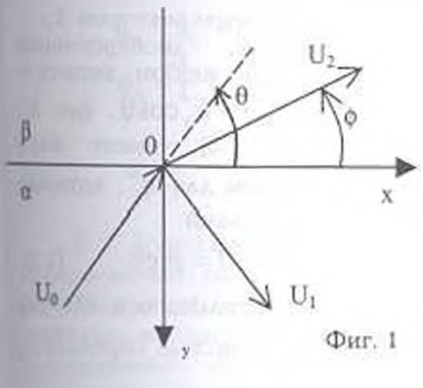
$$\begin{aligned} & c_{44}^\alpha \Delta u_\alpha + 2e_{14}^\alpha \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x \partial y} = \rho^\alpha \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} \\ & 2e_{14}^\alpha \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x \partial y} - \varepsilon_{11}^\alpha \Delta \varphi_\alpha = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

2. в области $y<0$

$$\begin{aligned} & c_{44}^\beta \Delta u_\beta + e_{15}^\beta \Delta \varphi_\beta = \rho^\beta \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2} \\ & e_{15}^\beta \Delta u_\beta - \varepsilon_{11}^\beta \Delta \varphi_\beta = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Граничные условия при $y=0$:

$$u^\alpha = u^\beta; \ \varphi^\alpha = \varphi^\beta; \ D_y^\alpha = D_y^\beta; \ \sigma_{zy}^\alpha = \sigma_{zy}^\beta \tag{1.4}$$



Фиг. 1

Здесь приняты обозначения: c_{44}^α, c_{44}^β – упругие постоянные, e_{14}^α, e_{15}^β – пьезоэлектрические модули, ε_{11}^α, ε_{11}^β – диэлектрические проницаемости, ρ^α, ρ^β – плотности пьезокристаллов кубической и гексагональной симметрии соответственно. В работе используется международная система измерения СИ.

2. Однородные и неоднородные плоские волны. Сначала рассмотрим решения уравнений (1.2) и (1.3) электроупругости, представляющих собой плоские гармонические волны

$$u = Ue^{i(px+qy-\omega t)}, \quad \varphi = \Phi e^{i(px+qy-\omega t)} \tag{2.1}$$

где U и Φ — амплитуды перемещения и потенциала в волне, p и q — продольное и поперечное волновые числа относительно оси Ox, ω — частота колебаний.

Для кристалла кубической симметрии, подставляя решение (2.1) в систему уравнений (1.2), из условия разрешимости этой системы получаем дисперсионное уравнение для поперечного волнового числа q и соотношение между амплитудами смещения U_α и потенциала Φ_α.

$$(p^2 + q_\alpha^{\ 2})(p^2 + q_\alpha^{\ 2} - S_0^{-2}\omega^2) + 4\chi_\alpha^2 p^2 q_\alpha^{\ 2} = 0 \qquad (2.2)$$

$$[(p^2 + q_\alpha^{\ 2}) - \rho_\alpha \omega^2]U_\alpha + 2e_{14} p q_\alpha \Phi_\alpha = 0 \qquad (2.3)$$

или

$$2e_{14} p q_\alpha U_\alpha - \varepsilon_{11}^\alpha (p^2 + q_\alpha^2)\Phi_\alpha = 0 \qquad (2.4)$$

где

$$S_\alpha^2 = S_0^2 = \frac{c_{44}^\alpha}{\rho^\alpha}, \ \chi_\alpha^2 = \frac{e_{14}^2}{c_{44}^\alpha \varepsilon_{11}^\alpha} \qquad (2.5)$$

Здесь S_α — скорость объемной упругой волны в направлении оси Oy, χ_α — коэффициент электромеханической связи.

Для однородных волн p и q можно представить в виде:

$$p = k\cos\theta, \ q = -k\sin\theta \qquad (2.6)$$

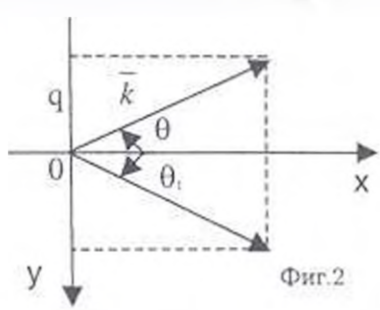
где θ — угол скольжения, т.е. угол между волновым вектором $\bar{k} = \{p, q\}$ и положительным направлением оси Ox (фиг.2), причем

$$k^2 = p^2 + q^2, \ \mathrm{tg}\theta = -\frac{q}{p} \qquad (2.7)$$

При обозначениях (2.6) и (2.7) дисперсионное уравнение (2.2) принимает форму [6]

$$k_\alpha^2 = \omega^2 / S_\alpha^2 (1 + \chi_\alpha^2 \sin^2 2\theta) \qquad (2.8)$$

Отметим, что k_α принимает действительные значения для любого θ. Этот факт следует из того, что средняя во времени потенциальная энергия волны положительна [1,2]. Отсюда следует, что плоская однородная волна распространяется в любом направлении, заданном волновым вектором $\bar{k}_\alpha$.



Фиг.2

Таким образом, дисперсионное уравнение (2.2) при любом вещественном значении $p = k_\alpha \cos\theta$, где k_α определяется по (2.8), имеет пару вещественных корней для q^α, которые определяются формулами:

$$q_1^\alpha = \pm q_0^\alpha, \ q_0^\alpha = k_\alpha \sin\theta = p\,\mathrm{tg}\theta \qquad (2.9)$$

и отвечают зеркально-симметричным волнам относительно оси Ox (на фиг.2 $\theta_1 = -\theta$). Другую пару корней уравнения (2.2) можно определить, используя теорему Виета [9]. Получим $q_2^\alpha = \pm ir$, где

$$r = \frac{\omega|\cos\theta|\sqrt{1 + 4\chi_\alpha^2 \cos^2\theta}}{S_\alpha \sqrt{1 + \chi_\alpha^2 \sin^2 2\theta}} \qquad (2.10)$$

Таким образом, уравнения пьезокристалла (1.2) имеют решения вида (2.1), представляющие неоднородные плоские волны:

$$u = Ue^{\pm ry + i(px - \omega t)}$$
$$\varphi = \Phi e^{\pm ry + i(px - \omega t)} \tag{2.11}$$

которые распространяются в направлении оси Ox и убывают в направлении оси Oy (при знаке "+") или $-Oy$ (при знаке "−"). Ясно, что для безграничного кристалла они не имеют физического смысла и могут описывать физический процесс в ограниченных кристаллах.

Перейдем к уравнению (1.3), описывающему квазистатическое поле в кристалле гексагональной симметрии.

Ища решение в виде (2.1), получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$(p^2 + q_\beta^2)(p^2 + q_\beta^2 - k_\beta^2) = 0 \tag{2.12}$$

откуда одна пара корней описывает электростатические колебания: $q_\beta = \pm i|p|$, следовательно, получаем решения в виде неоднородных плоских волн. Волновое число и потенциал будут:

$$k_\beta^2 = \omega^2 / S_\beta^2 (1 + \chi_\beta^2)$$
$$\Phi_\beta = e_{15}^\beta \, U_\beta / \varepsilon_{11}^\beta \tag{2.13}$$

где
$$S_\beta^2 = \frac{c_{44}^\beta}{\rho^\beta}, \quad \chi_\beta^2 = \frac{e_{15}^2}{c_{44}^\beta \varepsilon_{11}^\beta}$$

3. Решение задачи. Пусть из объема кубического пьезоэлектрика, на границу раздела падает плоская сдвиговая электроупругая волна вида (2.1) с амплитудами U_0, Φ_0, частотой ω, волновым числом k_α, продольными и поперечными волновыми числами $p = k_\alpha \cos\theta$, $q_\alpha = -k_\alpha \sin\theta = -q_0$, углом скольжения θ (фиг. 1). Вследствие взаимодействия падающей волны с границей раздела, в кубическом пьезоэлектрике возникают: отраженные электроупругие плоские волны и сопутствующие поверхностные электроупругие (неоднородные) волны. Отбрасывая нефизические решения, растущие в глубь кристалла, имеем при $y > 0$ полное решение:

$$u_\alpha = u_0^\alpha + u_1^\alpha = \left[U_0 e^{-iq_0 y} + U_1 e^{iq_0 y} + iB\Phi_\alpha e^{-ry}\right] e^{i(px - \omega t)}$$
$$\varphi_\alpha = \left[-U_0 A e^{-iq_0 y} + AU_1 e^{iq_0 y} + \Phi_\alpha e^{-ry}\right] e^{i(px - \omega t)} \tag{3.1}$$

где
$$A = \frac{e_{14}^\alpha \sin 2\theta}{\varepsilon_{11}^\alpha}, \quad B = \frac{2e_{14}^\alpha \, p \cos^2\theta}{c_{44}^\alpha r}$$

В пьезоэлектрике гексагональной симметрии возникают преломленные волны и сопутствующие поверхностные электроупругие (неоднородные) волны. Преломленные волны распространяются, очевидно, в плоскости падения, поскольку проекция волновых векторов преломленных волн на границу раздела должны совпадать с той же проекцией волнового вектора падающей волны. В рассматриваемой плоскости падения, как отмечено в [1], квазипродольные и квазипоперечные волны поляризованы в этой же плоскости ($u_z = 0$) и непьезоактивны. Сдвиговые волны поляризованы перпендикулярно плоскости падения $(u_x = u_y = 0, u_z \neq 0)$, поэтому условие непрерывности вектора смещения на границе раздела требует, чтоб преломленная волна была также сдвиговой. Таким образом, отбрасывая нефизические решения, растущие в глубь кристалла, при $y < 0$ имеем полное решение:

$$u_\beta = U_2 e^{-iq_\beta y} e^{i(px-\omega t)}$$

$$\varphi_\beta = \left[\frac{e_{15}^\beta}{\varepsilon_{11}^\beta} U_2 e^{-iq_\beta y} + \Phi_\beta e^{|p|y} \right] e^{i(px-\omega t)} \tag{3.2}$$

Вследствие удовлетворения граничным условиям, все волны имеют одинаковую частоту ω и продольное волновое число p (т. е. волны вдоль границы распространяются с одинаковой скоростью), совпадающие с соответствующими характеристиками падающей волны. Отраженная, преломленная и сопутствующие поверхностные волны имеют соответственно следующие волновые числа:

$$q = q_0 = k \sin\theta, \quad q = q_\beta = (k_\beta^2 - p^2)^{1/2}, \quad q = ir, \quad q = -i|p| \tag{3.3}$$

где r определяется по (2.12) или (2.13).

Связь между амплитудами упругого перемещения и электрического потенциала дается по (2.3) или (2.4). Компоненты индукции и смещения для обеих сред даются следующими выражениями:

$$D_y^\alpha = e_{14}^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_{11}^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \sigma_{zy}^\alpha = c_{44}^\alpha \frac{\partial u}{\partial y} + e_{14}^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$D_y^\beta = e_{15}^\beta \frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon_{11}^\beta \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \sigma_{zy}^\beta = c_{44}^\beta \frac{\partial u}{\partial y} + e_{15}^\beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{3.4}$$

Здесь U_0, U_1, U_2 – амплитуды смещения падающей, отраженной и преломленной волн соответственно, Φ_α, Φ_β – амплитуды потенциала СПК в кубическом и гексагональном кристаллах соответственно.

Подставляя решения (3.2) в граничные условия (1.4), после некоторых, но громоздких вычислений, получим:

$$R = U_1 / U_0 = [-P + N'\sin\phi + (-M_1 + M_2 - M_3 + M_4)\sin\theta +$$

$$+ i(P_1 - N_1 \sin\phi + (M_{x1} - M_{x2} + M_{x3})\sin\theta)] / D$$

$$T = U_2 / U_0 = [(-2 \frac{e_{14}^\alpha \varepsilon_{11}^\alpha}{e_{15}^\beta \varepsilon_{11}^\beta} M_1 \sin 2\theta + 2M_4)\sin\theta +$$

$$i(2M_{x1} + 2\sin^2 M_{x4})\sin\theta] / D$$

$$Q = \Phi_\alpha / U_0 = [(M_* + M_{**})\sin\theta + i(N_* \sin\phi + M_{x*} \sin\theta)] / D$$

$$Q_1 = \Phi_\beta / U_0 = [(M_* + M_{**} 2\cos^2\theta)\sin\theta + i(N_{**} \sin\phi + M_{x**} \sin\theta)] / D$$

где $D = -P + N'\sin\phi + (M_1 + M_2 + M_3 + M_4)\sin\theta +$

$$+ i(-P_1 + N_1 \sin\phi + (M_{x1} + M_{x2} + M_{x3})\sin\theta)$$

$$P = e_{14}^2 k_\alpha^2 \cos^2\theta \cos 2\theta + e_{15}^2 \varepsilon_{11}^\alpha k_\alpha \gamma |\cos\theta| / \varepsilon_{11}^\beta$$

$$M_1=\frac{1}{2}e_{14}^2k_\alpha^2\cos\theta\sin 4\theta;\qquad M_2=\frac{2e_{14}e_{15}k_\alpha^3\cos^3\theta|\cos\theta|}{\gamma}$$

$$M_3=\frac{2e_{14}^2e_{15}^2k_\alpha^3\cos^3\theta\sin 2\theta|\cos\theta|}{\gamma c_{44}^\alpha\varepsilon_{11}^\beta};\qquad M_4=2e_{14}e_{15}k_\alpha\gamma\cos\theta|\cos\theta|$$

$$N=k_\beta(e_{15}^2+c_{44}^\beta\varepsilon_{11}^\beta);\qquad n=4e_{14}^2k_\alpha\cos^2\theta\sin\theta$$

$$N'=N\cdot n\cdot k_\alpha|\cos\theta|/(\gamma c_{44}^\alpha\varepsilon_{11}^\alpha);\qquad P_1=2e_{14}e_{15}k_\alpha^2\cos^3\theta|\cos\theta|$$

$$N_\varepsilon=\frac{N(c_{44}\gamma(\varepsilon_{11}^\beta k_\alpha|\cos\theta|+\gamma\varepsilon_{11}^\alpha))-N\cdot n\cdot k_\alpha\sin\theta}{\gamma c_{44}^\alpha\varepsilon_{11}^\beta}$$

$$M_{z1}=\frac{1}{\varepsilon_{11}^\alpha}k_\alpha(\varepsilon_{11}^\beta k_\alpha|\cos\theta|(c_{44}^\alpha\varepsilon_{11}^\alpha+4e_{14}^2\cos^4\theta)+\varepsilon_{11}^\alpha\gamma(c_{44}^\alpha\varepsilon_{11}^\alpha+2e_{14}^2\cos^2\theta))$$

$$M_{z2}=e_{14}e_{15}k_\alpha^2\sin 2\theta\,|\cos\theta|;\quad M_{z3}=\frac{2e_{14}^2k_\alpha(e_{14}^2+c_{44}^\alpha\varepsilon_{11}^\alpha+e_{14}^2\cos 2\theta)\cos^4\theta}{\gamma c_{44}^\alpha\varepsilon_{11}^\alpha}$$

$$M_*=e_{14}c_{44}^\alpha k_\alpha^2(\cos\theta+\cos 3\theta);\qquad M_{**}=\frac{4e_{14}^3k_\alpha^2\cos 2\theta\cos^3\theta}{\varepsilon_{11}^\alpha}$$

$$N_f=2e_{14}k_\alpha\sin 2\theta(e_{15}^2+c_{44}^\beta\varepsilon_{11}^\beta);\qquad N_*=\frac{k_\alpha|\cos\theta|}{\varepsilon_{11}^\alpha}N_f$$

$$N_{**}=\frac{1}{\varepsilon_{11}^\beta}\left(\frac{4e_{14}^2k_\alpha^2\cos^4\theta\sin^2\theta}{c_{44}^\alpha\gamma\varepsilon_{11}^\alpha}-\gamma\right)N_f \tag{3.5}$$

$$M_{z*}=2e_{15}k_\alpha^2|\cos\theta|\left(c_{44}^\alpha+\frac{e_{14}^2\sin^2 2\theta}{\varepsilon_{11}^\alpha}\right)$$

$$M_{z**}=\frac{2e_{15}k_\alpha}{c_{44}^\alpha\gamma\varepsilon_{11}^\beta}\left(c_{44}^\alpha+\frac{2e_{14}^2\cos^2\theta}{\varepsilon_{11}^\alpha}\right)(e_{14}^2k_\alpha^2\sin^2 2\theta\cos^2\theta-c_{44}^\alpha\varepsilon_{11}^\alpha\gamma^2)$$

Полученные выражения описывают отражение и преломление сдвиговых акустоэлектрических волн на границе раздела пьезоэлектриков кубической и гексагональных систем.

Обсудим полученные результаты. Рассмотрим вначале отражение волн от свободной границы, полагая $c_{44}^\beta=e_{15}^\beta=0,\ \varepsilon_{11}^\beta=\varepsilon_*$ [9].

Получаем: $U_1=R_1U_0,\quad \Phi_\alpha=Q_2U_0,\quad \Phi_\beta=Q_*U_0$, где

$$R_1=\frac{M\sin\theta-i\chi_\alpha^2N|\cos\theta|}{M\sin\theta+i\chi_\alpha^2N|\cos\theta|},\qquad Q_2=\frac{\pm 4ie_{14}^\alpha r_*P_1\sin\theta}{M\sin\theta+i\chi_\alpha^2N|\cos\theta|}$$

$$Q_*=\frac{\pm 8ie_{14}^\alpha r_*P_*\sin\theta}{M\sin\theta+i\chi_\alpha^2N|\cos\theta|},\qquad M=4\varepsilon_*r_*(1+\chi_\alpha^2\cos^4\theta)+4\varepsilon_{11}^\alpha(1+2\chi_\alpha^2\cos^2\theta)^2$$

$$N=4\varepsilon_{11}^\alpha r_*\cos^2 2\theta,\qquad P_2=-2(1+2\chi_\alpha^2\cos^2\theta)\cos 2\theta$$

$$P_*=-(1+4\chi_\alpha^2\cos^4\theta)\cos 2\theta,\qquad r_*=\sqrt{1+4\chi_\alpha^2\cos^2\theta} \tag{3.6}$$

где ε_0 – электрическая постоянная.

Обратим внимание на следующие важные обстоятельства. Если $\theta << \chi_\alpha^2$, то $\Phi_2 \to 0$ и $U_1 \to -U_0$, т.е. сдвиговые электроупругие волны параллельно поверхности пьезокристалла рассматриваемой симметрии не распространяются. Между тем, без пьезоэффекта такое распространение возможно (при $\chi_\alpha^2 = 0$, $R_1 = 1$). Далее, при $\theta \sim \chi_\alpha^2$ амплитуда потенциала СПК существенно превосходит амплитуду потенциала отраженной волны.

Преломленная волна скользит во второй среде под углом ϕ, находимым из соотношения: $\cos\phi = S_\beta S_\alpha^{-1} \cos\theta$, т.е. величина $S_\beta S_\alpha^{-1}$ играет роль показателя преломления. Если показатель преломления больше единицы, то при углах скольжения $\theta > \phi_n$ величина q_β становится мнимой и по модулю, равной единице, т. е. возникает полное внутреннее отражение. Как видно, пьезоэффект меняет величину ϕ_n лишь постольку, поскольку перенормирует скорость акустических волн. В отличие от оптики и акустики непьезоэлектрических сред, отражение и преломление в пьезокристаллах отличается тем, что коэффициенты отражения и преломления – комплексные величины даже при углах скольжения, меньше угла полного внутреннего отражения ϕ_n. Это означает, что на границе отраженная и преломленная волны сдвинуты по фазе относительно падающей на величины $\operatorname{arctg}(\operatorname{Im} R / \operatorname{Re} R)$ и $\operatorname{arctg}(\operatorname{Im} T / \operatorname{Re} T)$ соответственно. Если показатель преломления меньше единицы и $\rho^\alpha < \rho^\beta$, то в непьезоэлектрических кристаллах граница может стать прозрачной $(R = 0)$ для волн, скользящих под углом $\theta_T =$ $= \arcsin\left\{(S_\beta S_\alpha^{-1}) \times \left[(1 - S_\alpha^2 S_\beta^{-2})(\rho^\beta / \rho^\alpha - 1)\right]^{1/2}\right\}$. В пьезоэлектриках условие прозрачности существенно ужесточается, т.к. R – комплексная величина и необходимо обращение в нуль ее действительной и мнимой частей.

Заключение. Рассмотрено преломление плоской электроупругой сдвиговой волны на границе раздела кубического и гексагонального пьезоэлектрических кристаллов классов 23 и 6mm.

Определены волновые поля в пьезоэлектрических кристаллах. Показано, что падающие волны, отражаясь на границе гексагонального кристалла, преломляются, порождая в нем упругое поле. Такая волна порождает дополнительную поверхностную электрическую волну в пьезокристалле кубической симметрии, а следовательно, и сопутствующее ей упругое колебание. В свою очередь, электрическое поле падающей волны частично просачивается в кристалл гексагональной симметрии, порождая в нем, около границы раздела, волну электрического поля, распространяющуюся вдоль границы с той же фазовой скоростью, что и электроупругие волны. Такая волна порождает дополнительную поверхностную электрическую волну в гексагональном пьезокристалле, а следовательно, и сопутствующие упругие колебания.

Далее, сдвиговые волны, параллельно поверхности кристаллов (при малых углах скольжения $(\theta < \chi^2)$) не могут распространяться. При углах скольжения $(\theta > \phi_n$ $(\cos\phi_n = S_\beta S_\alpha^{-1}))$, и если показатель преломления больше единицы, величина $q_\ast$ становится мнимой и по модулю равной единице, т. е. возникает полное внутреннее отражение. А также на границе отраженная и преломленная волны сдвинуты по фазе относительно падающей на величины $\mathrm{arctg}(\mathrm{Im}\,R/\mathrm{Re}\,R)$ и $\mathrm{arctg}(\mathrm{Im}\,T/\mathrm{Re}\,T)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, сибирское отделение, 1982. 240с.
2. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах.М.: Наука. 1982. 424с.
3. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А. Поведение мод сдвиговых поверхностных электроупругих волн Лява в пьезоэлектрических подложках с диэлектрическим слоем // В кн.: "Актуальные проблемы неоднородной механики", Материалы Всесоюзного научного семинара, Ереван, 1991. 23 – 26 июня. С.49 – 54.
4. Белубекян М.В., Белубекян В.М. О сдвиговой волне, локализованной вдоль движущейся границы раздела пьезоэлектриков // Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. №3 – 4. С.78 – 82.
5. Аветисян А.С., Маргарян Дж.М. Электроупругие поверхностные волны сдвига на границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств. // Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. №3 – 4. С.31 – 36.
6. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Отражение упругой волны от границы раздела пьезокристалл – вакуум // ФТТ. 1969. Т.11. Вып.4. С.1027 – 1029.
7. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1985. Т.38. №1. С.12 – 19.
8. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
9. Багдасарян Г.Е., Берберян А.Х, Даноян З.Н. Отражение электроупругой сдвиговой волны от границы раздела ромбического пьезоэлектрического кристалла класса 222 и вакуума // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №3. С.42 – 48.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
22.11.2002

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №4, 2002 Механика

УДК 62-50

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПО МИНИМАЛЬНОМУ СУММАРНОМУ ВРЕМЕНИ ГАРАНТИРОВАННЫЙ ПОИСК И ПРИВЕДЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Аветисян В.В.

Վ.Վ. Ավետիսյան
Դինամիկական համակարգով սահմանափակ տիրույթի անշարժ կետի օպտիմալ ըստ նվազագույն գումարային ժամանակի երաշխավորված փնտրումն ու նրան բերումը:

Դիտարկվում է ուղղանկյուն տիրույթում արագությամբ ղեկավարվող դինամիկական համակարգով անշարժ կետային օբյեկտը օպտիմալ ըստ նվազագույն գումարային ժամանակի երաշխավորված փնտրելու և այնուհետև մոտենալու խնդիրը: Ստացված է խնդրի լուծումը այն դեպքում, երբ հայտնաբերված օբյեկտին մոտենալու ժամանակը շատ անգամ փոքր է որոնելի օբյեկտի փնտրման ժամանակից: Աշխատանքը [1-3]-ի շարունակությունն է:

V.V. Avetisyan
The Total Time-Optimal Guaranteed Search and Putting the Dynamic System to yhe Immobile Point in the Limited Domain

Рассматривается задача оптимального по минимальному суммарному времени гарантированного поиска и приведения в неподвижную точку в прямоугольной области динамической системы, управляемой по скорости. Получено решение поставленной задачи в случае, когда время приведения в обнаруженную точку намного меньше времени поиска искомой точки. Работа является продолжением [1-3].

1. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве задано некоторое выпуклое компактное связанное множество $D \subset R^3, D = D' + D''$, где $D' \subset R^2$ и $D'' \subset R$ – взаимно-ортогональные выпуклые компактные подмножества соответственно. Рассмотрим систему из двух точечных объектов: совершающего простое движение во множестве $D \subset R^3$ управляемого объекта X с вектором положения x, и неподвижного в пределах подмножества $D' \subset D, D' \subset R^2$ объекта Y с вектором положения y. Пусть проекции $x' = (x_1, x_2) \in D'$ и $x'' \in D''$ вектора $x \in D$ управляются с помощью управлений $u' \in U'$ и $u'' \in U''$ соответственно, где U', U'' – взаимно-ортогональные выпуклые компактные подмножества множества $U : U' + U'' = U$. При таком предположении динамика описанной системы на фиксированном интервале времени $[t_0, T]$ задается следующими соотношениями:

$$X:\ \dot{x}' = u',\quad x', u' \in R^2, \qquad \dot{x}'' = u'',\quad x'', u'' \in R^1,$$

$$x'(t_0) = x'^0,\quad |u'(t)| \le U', \qquad x''(t_0) = x''^0,\quad |u''(t)| \le U'',$$

$$x'(t) \in D' \subset R^2,\ t \ge t_0, \qquad x''(t) \in D'' \subset R^1,\ t \ge t_0,$$

$$x(t) = (x'(t), x''(t)) \in D = D' \cup D'' \subset R^3,\ t \ge t_0,$$

$$Y:\ y(t) \equiv y(t_0) \in D' \subset R^2,\ t \ge t_0 \tag{1.1}$$

Предположим, что управляемому объекту X в процессе движения доступна полная информация о соотношениях (1.1) за исключением начального состояния объекта $Y - y(t_0)$. Однако, имеется некоторое подвижное и изменяющееся информационное множество $G(x(t))$, связанное с текущим значением вектора $x(t)$, позволяющее уточнить информацию о координатах местоположения точечного объекта Y в случае попадания последнего в это множество.

Определим область $G(x)$ для любого $x \in D \subset R^3$ следующим образом:

$$G(x(t), C) = G(x'(t), x''(t), C) = \left\{ \begin{array}{l} \xi' \in R^2:\ |\xi' - x'| \le \rho' = C|x''|, \\ \qquad\qquad x' \in D',\ x'' \in D'',\quad C > 0 \end{array} \right\} \tag{1.2}$$

Область $G(x, C)$ (1.2) представляет собой круг с центром в точке $x'(t) \in D' \subset D$ и с радиусом $\rho' = C\,|x''|$, где $|x''|$ – расстояние объекта X до подмножества D', а $C > 0$ – такое число, при котором имеет место включение $G(x', \rho'_{\max}) \subset D'$, $\rho'_{\max} = C \max\limits_{x' \in D'} |x''|$ хотя бы для одной точки $x' \in D'$.

Пусть управляемый процесс начинается в момент $t = t_0$ из начальной точки $x^0 = (x'^0, x''^0) \in D$ и заканчивается в момент $t = T$, когда выполняется условие

$$x(T) = x^1,\quad x^1 = (x'^1, x''^1),\quad x'^1 = y,\quad x''^1 = 0 \tag{1.3}$$

Цель объекта X – выполнение условия (1.3) за минимальное время T.

Разобьем процесс управляемого движения объекта X на два этапа – этапы поиска и приведения в искомую точку y. В связи с этим допустимыми будем считать комбинированные управляющие функции вида [2]

$$u = \begin{cases} u_0(x^0; t), & t_0 \le t \le t_*, \\ u_1(x^*, t_*, x^1; t), & t_* \le t \le T \end{cases} \tag{1.4}$$

принимающие значения из области U. Здесь величины x^0, x^*, x^1, t_*, T являются параметрами, $x^0, x^*, x^1 \in D$, $T \ge t_* \ge t_0$. Управлению u_0 соответствует этап поиска, а управлению u_1 – этап приведения на искомую точку.

Движение системы (1.1) при управлении вида (1.4) строится следующим образом. На интервале $[t_0, t_*]$ используется управление поиска u_0, а затем после момента наблюдения t_*, когда вектор x^1 становится известным, на интервале $\left[t_*, T\right]$ используется управление u_1, приводящее систему из точки x^* в точку x^1. Вопрос существования конечного момента $t_* \geq t_0$ является основным в задаче поиска и ее решение зависит от способа управления объектом X.

Пусть $\Delta = \{D'\}$ - некоторое множество областей D' таких, что $\cap\{D'\} \neq \varnothing$ и $x''^0 \in (\cap\{D'\})$. Пусть начальная координата x''^0 задана. Тогда каждому значению координаты x''^0 и каждому допустимому управлению $u = \{u_0, u_1\}$ соответствует некоторое время гарантированного поиска и приведения $T = T(D', x''^0, u)$.

Задача. Найти минимальное суммарное время гарантированного поиска и приведения $T^*(D)$, управление $u^* = \{u_0^*, u_1^*\}$ и начальную координату $(x''^0)^*$, доставляющие минимум

$$T^*(D') = \min_{0 \leq x''^0 \leq C^{-1} l_{00}} \; \min_{u = \{u_0, u_1\}} T(D', x''^0, u), \qquad D' \in \Delta \tag{1.5}$$

В (1.5) второй минимум по компоненту u_1 является задачей оптимального по быстродействию управления по заданным краевым точкам x^* и x^1.

2. Пусть область D в (1.1) задается в виде параллелепипеда

$$D = \left\{(x_1, x_2, x'') \in R^3: \; 0 \leq x_1 \leq a, \; 0 \leq x_2 \leq b, \quad 0 \leq x'' \leq c, \quad a, b, c > 0\right\} \tag{2.1}$$

Будем предполагать, что рассматриваемый параллелепипед принадлежит заданному множеству параллелепипедов

$$\Delta = \left\{D(a, b, c): \; h_0 \leq a \leq d, \; h_0 \leq b \leq d, \quad 0 \leq c \leq d' = C^{-1} h_0 / 2\right\} \tag{2.2}$$

Здесь h_0, d — заданные положительные числа, определяемые ниже.

Таким образом, Δ представляет собой множество всевозможных параллелепипедов $D(a, b, c)$ (2.2), расположенных в подпространстве с положительными полуосями декартовой системы координат Ox_1x_2x'', имеющих общую вершину в начале координат $(0,0,0)$ и содержащихся в заданном параллелепипеде $D = \left\{(x_1, x_2, x'') \in R^3 : 0 \leq x_1, x_2 \leq d, \; 0 \leq x'' \leq d'\right\}$. Задавая параметры a, b, c, мы тем самым задаем параллелепипед $D(a, b, c)$.

Пусть для заданного параллелепипеда $D \in \Delta$ (2.2) стороны a и b его прямоугольного основания D' удовлетворяют соотношениям:

$$0 \leq \left[a / h\right] = k(a, h), \qquad 0 \leq \left[b / h\right] = p(b, h)$$

$$0 < h \leq h_0 \leq a, b \leq d, \quad h_0 = 2 l_0, \; l_0 = C \max_{0 \leq x'' \leq d'} x'' = C d' \tag{2.3}$$

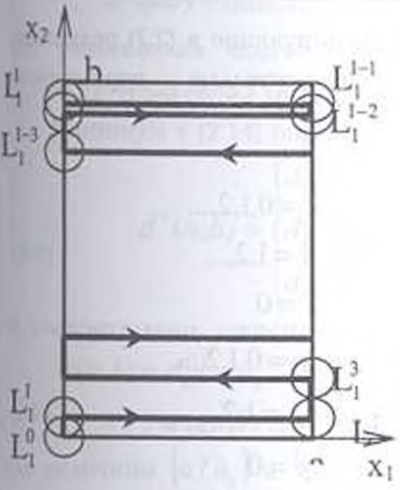
$$hN \leq d < h(N + 1), \quad N = N(d, h), \; 0 \leq k, p \leq N$$

Здесь $[\cdot]$ означает целую часть действительного числа.

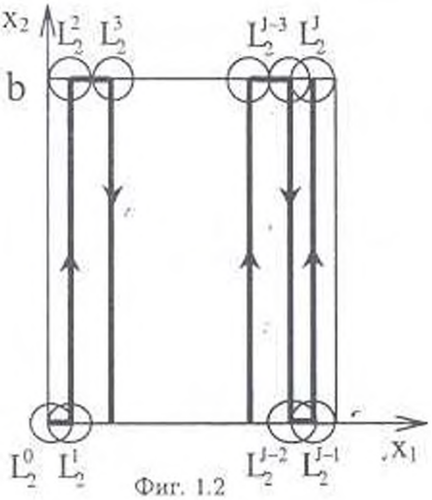
Предположим, что управляемый процесс начинается из точки $x_0 = (0, 0, x_0'')$, $0 < x_0'' \leq d'$. Рассмотрим исходящие из начальной точки две траектории, проекции L_1, L_2 которых на прямоугольную область D'

плоскости Ox_1x_2 изображены на рис. 1.1, 1.2 соответственно. Движение объекта X по каждому участку траектории L_1 и L_2 происходит с максимальной скоростью U' и с постоянным радиусом обнаружения $l = h/2 = C \cdot x^{*0}$. В [1] доказано, что траектории L_1 и L_2 – покрывающие, т.е движение объекта X по этим траекториям при соответствующих управлениях обеспечивает обнаружение искомой точки за конечное время. Там же, на основе исходных – двух простых – покрывающих траекторий L_1 и L_2, построено целое множество покрывающих прямоугольную область с заданной точностью траекторий и доказано, что в зависимости от параметров прямоугольника поиска, в построенном множестве оптимальным в смысле минимальной длины является одна из исходных траекторий.

Гарантированное время $t_*^{(i)}$, $i = 1,2$ поиска ("просмотра" D') при про-



Фиг. 1.1



Фиг. 1.2

хождении объекта X по траектории L_i, $i = 1,2$ равно:

$$t_*^{(i)}(a,b,h) = d_i(a,b,h)/U', \qquad i = 1,2 \tag{2.4}$$

где

$$d_1(a,b,h) = [b/h]a + a\,\mathrm{sgn}(b/h - [b/h]) + b - h/2,\ b/h \geq [b/h],\ 0 < h \leq h_0 \tag{2.5}$$

$$d_2(a,b,h) = [a/h]b + b\,\mathrm{sgn}(a/h - [a/h]) + a - h/2,\ a/h \geq [a/h],\ 0 < h \leq h_0 \tag{2.6}$$

Здесь d_1, d_2 – длины рассматриваемых траекторий L_1 и L_2, зависящих от параметров a,b,h.

В данной работе, в отличие от [3], рассматривается случай, когда на этапе приведения оптимальное время $T'(h/2)$ перемещения из точки обнаружения в целевую точку по координате x', соответствующего управлению $u_1^{\prime *}$, больше оптимального времени $T''(|x''^{0}|)$ вертикального перемещения по координате x'', соответствующего управлению $u_1^{\prime\prime *}$ - $\max(T', T'') = T'$, т.е. $U' < CU''$. Тогда для суммарного времени гарантированного поиска и приведения будем иметь

$$T^{(1)}(a,b,h)=t_*^{(1)}+t_1^{(1)}=d^{(1)}/U'$$
$$d^{(1)}=([b/h]+\mathrm{sgn}(b/h-[b/h]))a+b$$
$$T^{(2)}(a,b,h)=t_*^{(2)}+t_1^{(2)}=d^{(2)}/U'$$
$$d^{(2)}=[a/h]b+b\,\mathrm{sgn}(a/h-[a/h])+a \tag{2.7}$$

где $d^{(1)},d^{(2)}$ – длины траекторий $L_1+h/2$, $L_2+h/2$ соответственно (фиг. 1.1,1.2).

С учетом (2.7) задача (1.5) сводится к следующей задаче минимума:

$$T^*(a,b)=\min_{0<h\le h_0}(T^{(1)}(a,b,h),\quad T^{(2)}(a,b,h))=\min(\min_{0<h\le h_0}T^{(1)}(a,b,h)$$
$$\min_{0<h\le h_0}T^{(2)}(a,b,h))=\min(\min_{0<h\le h_0}d^{(1)}(a,b,h) \tag{2.8}$$
$$\min_{0<h\le h_0}d^{(2)}(a,b,h))/U'=d^*(a,b)/U', \qquad h_0\le a,b\le d$$

Для фиксированных значений a и b, фигурирующие в (2.7) величины $[a/h]$, $[b/h]$ – ступенчатые функции относительно переменной $h=2l:0<h\le h_0$

$$[a/h]=\begin{cases} & h_{k+1}(a)<h\le h_k(a), \quad k=0,1,2,...,\\ [a/h_0]+k, & h_k(a)=a/([a/h_0]+k), \quad k=1,2,...\\ & h_k(a)=h_0, \quad k=0\end{cases} \tag{2.9}$$

$$[b/h]=\begin{cases} & h_{p+1}(b)<h\le h_p(a), \quad p=0,1,2....\\ [b/h_0]+p, & h_p(b)=b/([b/h_0]+p), \quad p=1,2,...\\ & h_p(b)=h_0, \quad p=0\end{cases} \tag{2.10}$$

претерпевающие разрыв первого рода справа в точках $h_p(b), p=1,...$ и $h_k(a), k=1,...$ соответственно. Учитывая (2.9), (2.10), функции $d^{(1)}$, $d^{(2)}$ (2.7) можно представить следующим образом:

$$d^{(1)}(a,b,h)=\begin{cases} & h_{p+1}(b)<h\le h_p(b), \quad p=0,1,2,...\\ ([b/h_0]+p+1)a+b, & h_p(b)=b/([b/h_0]+p), \quad p=1,2,...\\ & h_{p+1}(b)\le h\le h_p(b), \quad p=0,\\ & h_p(b)=h_0, \quad p=0\end{cases} \tag{2.11}$$

$$d^{(2)}(a,b,h)=\begin{cases} & h_{k+1}(a)<h\le h_k(a), \quad k=0,1,2,...\\ ([a/h_0]+k+1)b+a, & h_k(a)=a/([a/h_0]+k), \quad k=1,2,...\\ & h_{k+1}(a)\le h\le h_k(a), \quad k=0,\\ & h_k(a)=h_0, \quad k=0\end{cases} \tag{2.12}$$

Функции $d^{(1)},d^{(2)}$ в (2.11), (2.12) – монотонно убывающие ступенчатые функции относительно параметра h и, следовательно, минимальные значения принимают при всех $h \in [h_1(a), h_0]$ и $h \in [h_1(b), h_0]$ соответственно, в частности, при $h = h_0$

$$\begin{aligned}
&\min_{0<h\le h_0} d^{(1)}(a,b,h) = d_0^{(1)}(a,b) = \left(\left[b/h_0\right] + \operatorname{sgn}(b/h_0 - [b/h_0])\right)a + b \\
&\min_{0<h\le h_0} d^{(2)}(a,b,h) = d_0^{(2)}(a,b) = \left(\left[a/h_0\right] + \operatorname{sgn}(a/h_0 - [a/h_0])\right)b + a
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Это означает, как и предполагалось, что оптимальный поиск нужно осуществить с максимальным и постоянным радиусом обнаружения

$$h_0 = 2l_0 = C \cdot \max_{0<x^{*0}\le d'} x^{*0} = C \cdot d'$$

соответствующего максимальному значению d' начальной координаты x^{*0} – расстояния объекта X до плоскости прямоугольника D'.

Таким образом, с учетом (2.13), из (2.8) получаем

$$d^*(a,b) = \min(d_0^{(1)}(a,b), d_0^{(2)}(a,b)), \quad h_0 \le a,b \le d \tag{2.14}$$

что равносильна задаче определения из двух траекторий $L_1 + h/2$ и $L_2 + h/2$ траектории минимальной длины.

Минимум в (2.14) определяется следующим образом:

$$d^*(a,b) = \begin{cases} d_0^{(2)}(a,b), & F(a,b) > 0 \\ d_0^{(1)}(a,b) = d_0^{(2)}(a,b), & F(a,b) = 0 \\ d_0^{(1)}(a,b), & F(a,b) < 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

и, следовательно, зависит от знака функции

$$\begin{aligned}
F(a,b) = d_0^{(1)} - d_0^{(2)} &= [b/h_0]a - [a/h_0]b + \\
&+ a\operatorname{sgn}(b/h_0 - [b/h_0]) - b\operatorname{sgn}(a/h_0 - [a/h_0]) + b - a
\end{aligned} \tag{2.16}$$

где величины $[a/h_0]$ и $[b/h_0]$, при фиксированном h_0, определяются следующим образом

$$[b/h_0] = \begin{cases} & d_p = hp \le a < h(p+1) = d_{p+1}, \quad p = 1,2,\dots,N-1 \\ p, & d_p = hp \le a \le d < d_{p+1}, \quad p = N \\ & hN \le d < h(N+1) \end{cases} \tag{2.17}$$

$$[a/h_0] = \begin{cases} & d_k = hk \le a < h(k+1) = d_{k+1}, \quad k = 1,2,\dots,N-1, \\ k, & d_k = hk \le a \le d < d_{k+1}, \quad k = N, \\ & hN \le d < h(N+1) \end{cases} \tag{2.18}$$

При заданных параметрах h_0, d и фиксированном значении переменного b, $h_0 \le b \le d$, функция F представляет собой функцию одного только переменного a, изменяющегося на отрезке $h_0 \le a \le d$, подробно исследованой в [1].

Здесь ограничимся приведением окончательных результатов.

Знак функции F в (2.15) и, следовательно, решение задачи (2.8) определяется таким образом:

$$T^*, d^* = T_0^{(2)}, d_0^{(2)}, \text{ если } F > 0 \iff \tag{2.19}$$

(1) $b = d_p = hp,\ p = 3,\dots,N,$

$d_k = hk < d_k^*(p,b) = bk/(p-1) < a < h(k+1) = d_{k+1},$

$k = 1,\dots,p-2$

(2) $d_p = hp < b < h(p+1) = d_{p+1},$

$p = 1,\dots,N-1,$

$d_k^*(p,b) = bk/(p-1) < a < d_{k+1},$

$k = 1,\dots,p;\ p = 1,\dots,N-1$

(3) $d_p = hp < b < hp(k+1)/k < h(p+1) = d_{p+1},$

$p = 1,\dots,N-2,$

$d_k^*(p,b) = bk/(p-1) < a < d_{k+1},$

$k = p+1,\dots,N-1;\ p = 1,\dots,N-2$

(4) $d_p = hp < b < dp/N,$

$p = 1,\dots,N,$

$d_k = hk < a \le d, \quad k = N$

$$T^*, d^* = T_0^{(2)}, d_0^{(2)} = T_0^{(1)}, d_0^{(1)}, \text{ если } F = 0 \Leftrightarrow \tag{2.20}$$

(1) $b = d_p = hp, \quad p = 2,\dots,N,$

$a = d_k^*(p,b), \quad k = 1,\dots,N-1,$

$k = 1,\dots,p-1; \quad p = 2,\dots,N$

(2) $d_p = hp < b < hp(k+1)/k < h(p+1) = d_{p+1},$

$k = p+1,\dots,N-1; \quad p = 1,\dots,N-2.$

$a = d_k^*(p,b) = bk/(p-1),$

$k = p+1,\dots,N-1; \quad p = 1,\dots,N-2$

(3) $d_p = hp < b = dp/N \le d, \quad p = 1,\dots,N,$

$a = d_k^*(p,b) = dp/k, \quad k = N;\ p = 1,\dots,N$

$$T^*, d^* = T_0^{(1)}, d_0^{(1)}, \text{ если } F < 0 \Leftrightarrow \tag{2.21}$$

(1) $b = d_p = hp, \quad p = 1,$

$d_k < a \le d_{k+1}, \quad k = 1,\dots,N-1,$

$d_k < a \le d, \quad k = N$

(2) $b = d_p = hp, \quad p = 2,\dots,N,$

$d_k < a < d_k^*(p,b),\ k = 1,\dots,p-1.$

$d_k < a \le d_{k+1}, \quad k = p,\dots,N-1;\ p = 2,\dots,N-1,$

$d_k < a \le d, \quad k = p,\dots,N;\ p = N$

(3) $d_p = hp < b < hp(k+1)/k < h(p+1) = d_{p+1}$,

$p = 1,...,N-2$,

$d_k^*(p,b) = bk/(p-1) < a < d_{k+1}$,

$k = p+1,...,N-1;\ p = 1,...,N-2$

(4) $d_p = hp < dp/N < b \le d$,

$p = 1,...,N$,

$d_k = hk < a < d_k^*(p,b) = dp/N \le d$,

$k = N$

Формулы (2.19)-(2.21) позволяют по заданным параметрам задачи h_0, a, b и начальной точки процесса поиска определить оптимальную, в смысле минимальной длины, ломаную из двух исходных траекторий L_1 и L_2.

Предложенные в данной работе способы движения (фиг.1.1, 1.2) могут быть использованы для поисковых движений манипуляционных роботов в случае, когда их динамика описывается уравнением вида (1.1), а рабочая зона поиска представляет собой прямоугольник.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В. Оптимальный по минимальному гарантированному времени поиск неподвижного объекта в прямоугольной области. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 1. С. 62-69.
2. Аветисян В.В. О задаче оптимального гарантированного приведения динамической системы в целевую точку в ограниченной области при неполной информации. // Изв. НАН РА. Механика. 2002. № 3. С.65-71.
3. Avetisyan V.V. The problem of optimal guaranted search and capture of immobile object in rectangular domain. // 10-th International Symposium on Dynamic Games and Applications. Saint Petersburg, Russia. 2002, p. 65-68.

Иститут Механики
НАН РА

Поступила в редакцию
04.04.2002

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №4, 2002 Механика

УДК 539.3,62.50

О НАБЛЮДЕНИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Айрапетян В.В., Гукасян А.А.

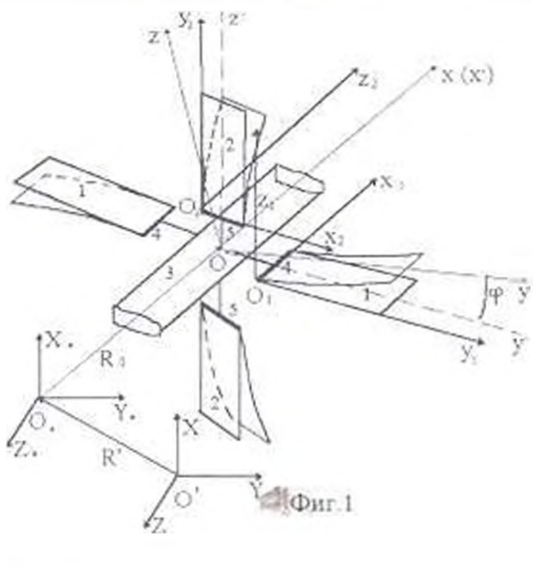
Վ.Վ.Հայրապետյան, Ա.Ա.Ղուկասյան
Բաշխված պարամետրերով ղեկավարվող համակարգերի դիտման մասին

Հետազոտված է առաձգական թռչող սարքի և առաձգական վերջին օղակով մանիպուլյացիոն ռոբոտի առաձգական էլեմենտների դիտման խնդիրը: Ստացված են դիտման օպտիմալ ֆիլտրներ, որոնք չափվող ազդակի միջոցով վերականգնում են նրանց ֆազային վիճակը:

V.V.Hayrapetyan, A.A.Ghukasyan
On estimation of controlled systems with distributed parameters

Исследована задача наблюдения упругих элементов для упругого летательного аппарата и манипуляционного робота с упругим последним звеном. Получены оптимальные фильтры наблюдения, которые с помощью измеряемого сигнала восстанавливают фазовое состояние систем.

Современные тенденции увеличения габаритных размеров, сложности структуры космических аппаратов (КА), манипуляционных роботов (МР) и требования к снижению их масс и энергозатрат привели к необходимости использования легких, упругих материалов при их конструировании. Следовательно, упругость конструкции необходимо учитывать уже на стадии проектирования систем управления. Методы и алгоритмы управления таких систем используют информацию о текущем состоянии, которая обеспечивается специальными средствами наблюдения. Разработка таких средств для систем с упругими элементами приводит к задачам наблюдения с распределенными параметрами [1-3].



Фиг.1

Рассматриваются две упругие системы: упругий космический аппарат (КА) и двухзвенный манипулятор с упругим последним звеном.

1. КА представляет собой цилиндрическое, абсолютно твердое тело (центральное тело) с закрепленными к нему упругими пластинами (фиг.1). Пары пластин 1 и 2 находятся в взаимно-перпендикулярных плоскостях. Края пластин жестко закреплены с центральным телом 3 посредством жестких стержневых конструкций 4.5. Пластины однородные с толщиной h и размерами a, b. Они

характеризуются плотностью ρ, модулем Юнга E и жесткостью на изгиб D. Радиус центрального тела обозначим через q. Введем инерциальную систему координат $O_*X_*Y_*Z_*$ и связанную прямоугольную систему координат $Oxyz$, начало которой находится в центре масс KA, а ось Ox направлена вдоль продольной оси KA [4,5].

Здесь, как и в [4,5], рассматривается поступательное движение KA вдоль оси Ox и вращение вокруг той же оси. Положение начала системы координат $O_*X_*Y_*Z_*$ относительно $O'XYZ$ определим радиус-вектором $\mathbf{R}'$, а положение центра масс KA относительно системы $O_*X_*Y_*Z_* - \mathbf{R}_0$. Относительное положение точки тела в деформированном состоянии обозначим через вектор $\mathbf{r}$. Абсолютное положение точек KA определяется вектором

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}' + \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}\,;\ (\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{w}(t,x,y))$$

где вектор R_0 определяет положение центра масс KA в системе координат $O_*X_*Y_*Z_*$, r – относительное положение точек KA, ($\mathbf{w}(t,x,y)$ – вектор упругих смещений пластин), $\mathrm{R}' = \mathrm{const}$.

Поступательное движение и вращение KA происходят за счет силы F, направленной вдоль оси Ox и вращательного момента M, приложенного вокруг той же оси. Для аналитических исследований уравнений движения и упругих колебаний пластин предполагается, что ось O_*X_* совпадает с продольной осью KA. Уравнения движения KA и упругих колебаний пластин в рамках линейной теории упругости, с учетом следующих предположений $D \sim \varepsilon^{-1}$, $w_i / \max(c,b) \sim \varepsilon$ $i = 1,2$, $\dot{\varphi} \sim \varepsilon^{1/2}$, $\ddot{\varphi} \sim \varepsilon$, $\dot{R}_0 \sim \varepsilon^{1/2}$, $\ddot{R}_0 \sim \varepsilon$ $\varepsilon \ll 1$ имеют вид [4,5]:

$$m\ddot{R}_0 = -mg + F - 2\rho h \iint_\Omega \ddot{w}_2 d\Omega \tag{1.1}$$

$$2a_{\varphi 1}\ddot{\varphi}\rho h + 2\rho h \iint_\Omega \ddot{w}_1 (q + l + y_1) d\Omega + I\ddot{\varphi} = M(t) \tag{1.2}$$

$$\ddot{w}_1 + \frac{D}{\rho h}\Delta^2 w_1 = -\ddot{\varphi}(q + l + y_1) \tag{1.3}$$

$$\ddot{w}_2 + \frac{D}{\rho h}\Delta^2 w_2 = -\ddot{R}_0 + g \tag{1.4}$$

с начальными

$$R_0(0) = R_{0*},\quad \dot{R}_0(0) = 0,\ \varphi(0) = \varphi_0,\quad \dot{\varphi}(0) = 0 \tag{1.5}$$

$$w_i(0,x,y) = 0,\quad \dot{w}_i(0,x,y) = 0 \quad i = 1,2 \tag{1.6}$$

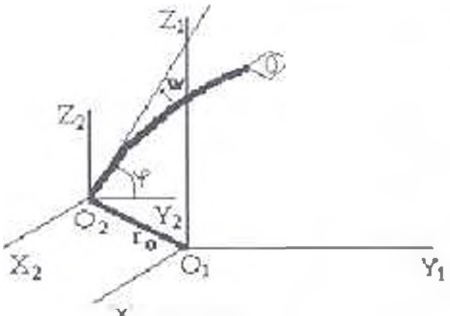
и граничными условиями [4], где $(a \times b) = \Omega$,

$$a_{\varphi 1} = d_2 \rho h \iint_\Omega [(q + l + y_1)^2 + (x_2 - b/2)^2] d\Omega + \rho h \iint_\Omega (q + l + y_2)^2 d\Omega,$$

$d_2 = 1 - \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_3 \sin \theta_2$, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ являются самолетными углами [6].

2. Рассматривается кинематическая модель двухзвенного манипуля-

тора (фиг.2), последнее звено которого моделируется как упругий стержень. На конце упругого звена находится схват с грузом [4,5]. Уравнения движения последнего звена и упругих колебаний относительно системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$ имеют вид [7-9]



Фиг.2

$$A\ddot{\varphi} + \int_0^l \rho s \xi \ddot{w}(t,\xi) d\xi = Q(t) \qquad (2.1)$$

$$\ddot{w}(t,\xi) + \frac{EI_0}{\rho_0 s_0} w^{IV}(t,\xi) = -\ddot{\varphi}\xi \qquad (2.2)$$

со следующими начальными и граничными условиями

$$w(t,0) = w'(t,0) = w''(t,l) = 0$$

$$w'''(t,l) = \frac{m}{EI_0}[\ddot{w}(t,l) + \ddot{\varphi} l] \qquad (2.3)$$

$$w(0,\xi) = \dot{w}(0,\xi) = \dot{\varphi}(0) = 0;\ \varphi(0) = \varphi_0 \qquad (2.4)$$

где

$A = \int_0^l \rho s \xi^2 d\xi$, $\rho s = \rho_0 s_0 + m\delta(\xi - l)$, $E-$модуль Юнга, $m-$масса груза.

3. Для улучшения качества управления вышеприведенных систем необходимо иметь также информацию о текущем состоянии упругих элементов во время движения.

Допустим, есть возможность с помощью измерительных устройств на некоторых областях положительной меры упругих элементов измерить некоторую величину, определенную на промежутке времени $t - \theta \le \tau \le t$, где $\theta > 0$, постоянное число. Число θ определяется из дополнительных требований и зависит от физических возможностей измерительных устройств. Поскольку наблюдаемый объект подвержен воздействию управления, необходима также информация о предыстории процесса управления, которая может быть определена на $t - \theta \le \tau < t$ [10,11].

Предполагается, что области упругих элементов, подлежащих измерению, характеризуются функциями $f_i, g_i, i = 1,2$ из класса L_2. Для KA и упругого звена MP они определены следующим образом:

a) $f_1 = f_1(x,y), g_1 = g_1(x,y),\ (x,y) \in [0,b] \times [0,a]$

b) $f_2 = f_2(\xi), g_2 = 0,\ \xi \in [0,l]$ (3.1)

В частности, они могут быть характеристическими функциями измеримых областей.

Требуется по поступающему сигналу вычислить функцию состояния упругих элементов.

Используя метод разделения переменных Фурье, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_i(t) + k_i^2 q_i(t) = u_i(t) \qquad (3.2)$$

$i = 1,2$, где индекс 1 соответствует KA а индекс $2 - MP$.

Для KA имеем [4]

$$w(t,x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty} q_1(t)X_m(x)Y_n(y),\quad q_1(t)=w_{mn1}(t)$$

$$k_1^2=\frac{D}{\rho h}\left[\lambda_n^4+\mu_m^4+2\iint_\Omega X_{mi}''(x_i)Y_{ni}''(y_i)X_{mi}(x_i)Y_{ni}(y_i)d\Omega\right] \tag{3.3}$$

$$u_1(t)=\Phi_{mnj}[t]=\iint_\Omega \Phi_j X_{mj}(x_j)Y_{nj}(y_j)d\Omega,\ j=1,2;\ m,n=1,2,3\cdots$$

Здесь Φ_1,Φ_2 есть правые части уравнений (1.3),(1.4), соответственно. $X_{mi}(x_i),Y_{ni}(y_i), i=1,2$ представляют собой собственные формы колебаний однородных балок, которыми аппроксимируются пластины. λ_n,μ_m – собственные частоты этих балок [4].

Для упругого звена МР [7-9]

$$w(t,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty} q_2(t)X_n(\xi)\ q_2(t)=w_n(t),\ k_2=\lambda_n^2\sqrt{\frac{EJ_0}{\rho_0 s_0}},\ u_2=-\int_0^{b_2}\varphi\xi X_n(\xi)d\xi$$

$$n=1,2,3\cdots. \tag{3.4}$$

Здесь $X_n(x)$ – собственные функции колебаний упругого звена, а λ_n – собственные числа этих функций.

Введя обозначения

$$q_i^{(1)}(t)=q_i(t),\ q_i^{(2)}(t)=\frac{1}{k_i}\dot q_i(t)$$

уравнения (3.2) запишем в нормальной форме

$$\dot q_i^{(1)}(t)=k_i q_i^{(2)}(t)$$
$$\dot q_i^{(2)}(t)=-k_i q_i^{(1)}(t)+\frac{1}{k_i}u_i(t) \tag{3.5}$$

Обозначим коэффициенты Фурье функций f_i, g_i следующим образом: $\bar f_i,\bar g_i\ i=1,2$.

Для *КА*

$$\bar f_1=\int_0^{b_1}\int_0^{c_1} f_1(x,y)X_m(x)Y_n(y)dxdy$$

$$\bar g_1=\int_0^{b_1}\int_0^{c_1} g_1(x,y)X_m(x)Y_n(y)dxdy\quad m,n=1,2,3\cdots.$$

Для *МР*

$$\bar f_2=\int_0^{b_2} f_2(\xi)X_n(\xi)d\xi,\ \bar g_2=0\quad n=1,2,3\cdots$$

Предполагается, что $\bar f_i^2+\bar g_i^2\neq 0,\ i=1,2$ [12].

Допустим, что через измерительные устройства поступает сигнал [10,13]

$$y_i(\tau)=\bar{f}_i q_i^{(1)}(\tau)+\bar{g}_i q_i^{(2)}(\tau), \quad t-0\le\tau\le t, \; i=1,2 \qquad (3.6)$$

Поступающие сигналы могут быть различными. Целесообразность выбора сигнала (3.6) обусловлена содержанием достаточного количества информации и несложной реализацией.

Рассмотрим по отношению (3.6) "усиленный сигнал"

$$y_i(\tau)=k_i^{\alpha}\bar{f}_i q_i^{(1)}(\tau)+k_i^{\alpha}\bar{g}_i q_i^{(2)}(\tau), \quad t-0\le\tau\le t, \; i=1,2 \qquad (3.7)$$

реализация которого также нетрудна [10]. Здесь $\alpha=1+\varepsilon$; $\varepsilon>0$ – малое число. Для KA и упругого манипулятора k_i^{α} имеет, соответственно, следующие виды: $k_{m}^{\alpha}, k_{n}^{\alpha}$, $m,n=1,2,3,\cdots$.

Таким образом, имеем следующую задачу наблюдения: найти линейную операцию $\varphi_i^j[t,\{y_i(\tau),u_i(\tau)\}]$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\varphi_i^j[t,\{y_i(\tau),u_i(\tau)\}]=q_i^{(j)}(t), \; i=1,2; \; j=1,2 \qquad (3.8)$$

каким бы ни было реализовавшееся в системе (3.5) значение $q_i^{(j)}(t)$ и каким бы ни был сигнал (3.7).

4. Приведение задачи наблюдения к проблеме моментов и ее решение. Разрешающие операции $\varphi_i^j[t,\{y_i(\tau),u_i(\tau)\}]$, $i=1,2$; $j=1,2$ составим следующим образом [11]:

$$\varphi_i^j[t,\{y_i(\tau),u_i(\tau)\}]=\bar{\varphi}_i^j[t,y_i(\tau)]-\bar{\varphi}_i^j[t,G_i\int_t^{\zeta}H_i(\zeta,\tau)u_i(\tau)d\tau]$$

$$i=1,2; \; j=1,2 \qquad (4.1)$$

В (4.1) $\bar{\varphi}_i^j$ – разрешающие операции при условии $u_i\equiv 0$, т.е.

$$\bar{\varphi}_i^j[t,y_i(\tau)]=q_i^{(j)}(t) \qquad (4.2)$$

и приняты следующие обозначения:

$$G_i=(k_i^{\alpha}f_i,k_i^{\alpha}g_i), \quad H_i(\zeta,\tau)=X_i(\zeta,\tau)B_i$$

где $X_i(\zeta,\tau)$ – нормированная фундаментальная матрица однородной части системы (3.5) и имеет вид

$$X_i(\zeta,\tau)=\begin{pmatrix}\cos k_i(\zeta-\tau) & \sin k_i(\zeta-\tau)\\ -\sin k_i(\zeta-\tau) & \cos k_i(\zeta-\tau)\end{pmatrix}, \quad B_i=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1}{k_i}\end{pmatrix}, \; i=1,2 \qquad (4.3)$$

Для построения операции $\varphi_i^j[t,\{y_i(\tau),u_i(\tau)\}]$, $i=1,2$; $j=1,2$ достаточно построить разрешающие операции $\bar{\varphi}_i^j[t,y_i(\tau)]$ для системы

$$\begin{aligned}\dot{q}_i^{(1)}(t)&=k_i q_i^{(2)}(t)\\ \dot{q}_i^{(2)}(t)&=-k_i q_i^{(1)}(t) \qquad (4.4)\\ i&=1,2;\end{aligned}$$

удовлетворяющей условию (4.2) [11]. Решение системы (4.4), согласно формуле Коши, запишется в следующем виде

$$\bar{q}_i(\tau)=X_i(\tau,t)\bar{q}_i(t) \quad i=1,2 \qquad (4.5)$$

где

$$\overline{q}_i(\tau)=\begin{pmatrix} q_i^{(1)}(\tau) \\ q_i^{(2)}(\tau) \end{pmatrix};\ i=1,2$$

Из (3.7),(4.5) получаем

$$y_i(\tau)=G_i X_i(\tau,t)\overline{q}_i(t),\ t-\theta\le\tau\le t \tag{4.6}$$

Операции, вычисляющие функции $q_i^{(1)}(t), q_i^{(2)}(t)$ по сигналу (3.7), будем искать в виде

$$\int_{t-\theta}^{t} y_i(\tau)\overline{V}_i^{(j)}(t,\tau)d\tau=q_i^{(j)}(t),\quad i=1,2;\ \ j=1,2 \tag{4.7}$$

Подставляя $y_i(\tau)$ из (3.7) в (4.7), выполняя замену переменного $\tau-t=\xi$ и введя обозначение $\overline{V}_i^{(j)}(t,t+\xi)=V_i^{(j)}(\xi)$ $i=1,2;\ j=1,2$, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\theta}^{0}(f_i\cos k_i\xi-g_i\sin k_i\xi)\overline{V}_i^{(1)}(\xi)d\xi=\frac{1}{k_i^{\alpha}}\\
&\int_{-\theta}^{0}(f_i\sin k_i\xi+g_i\cos k_i\xi)\overline{V}_i^{(1)}(\xi)d\xi=0\\
&\int_{-\theta}^{0}(f_i\cos k_i\xi-g_i\sin k_i\xi)\overline{V}_i^{(2)}(\xi)d\xi=0\\
&\int_{-\theta}^{0}(f_i\sin k_i\xi+g_i\cos k_i\xi)\overline{V}_i^{(2)}(\xi)d\xi=\frac{1}{k_i^{\alpha}}
\end{aligned}\right\}\quad i=1,2. \tag{4.8}$$

Найдем функции $\overline{V}_i^{(1)}(\xi),\overline{V}_i^{(2)}(\xi)$, удовлетворяющие условиям (4.8) и являющиеся оптимальными в смысле

$$\int_{-\theta}^{0}\left[\left(\overline{V}_i^{(1)}(\xi)\right)^2+\left(\overline{V}_i^{(2)}(\xi)\right)^2\right]d\xi\to\min,\qquad i=1,2 \tag{4.9}$$

Решая полученную вариационную задачу (4.8),(4.9) с помощью проблемы моментов [11] для оптимальных функций $\overline{V}_i^{(1)0}(\xi)$, $\overline{V}_i^{(2)0}(\xi)$ получим

$$\begin{aligned}\overline{V}_i^{(1)0}(\xi)=A_i\Big\{&(\overline{g}_i^2\sigma_{i1}+2\bar{f}_i\overline{g}_i\sigma_{i3}+\bar{f}_i^2\sigma_{i2})(\bar{f}_i\cos k_i\xi-\overline{g}_i\sin k_i\xi)-[\bar{f}_i\overline{g}_i(\sigma_{i1}-\sigma_{i2})+\\
&+(\bar{f}_i^2-\overline{g}_i^2)\sigma_{i3}](\bar{f}_i\sin k_i\xi+\overline{g}_i\cos k_i\xi)\Big\}\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}\overline{V}_i^{(2)0}(\xi)=A_i\Big\{&(\bar{f}_i^2\sigma_{i1}-2\bar{f}_i\overline{g}_i\sigma_{i3}+\overline{g}_i^2\sigma_{i2})(\bar{f}_i\sin k_i\xi+\overline{g}_i\cos k_i\xi)-[\bar{f}_i\overline{g}_i(\sigma_{i1}-\sigma_{i2})+\\
&+(\bar{f}_i^2-\overline{g}_i^2)\sigma_{i3}](\bar{f}_i\cos k_i\xi-\overline{g}_i\sin k_i\xi)\Big\}\end{aligned} \tag{4.11}$$

где

$$A_i=2[k_i^{\alpha}(\sigma_{i1}\sigma_{i2}-\sigma_{i3}^2)(\bar{f}_i^2+\overline{g}_i^2)]^{-1}$$

$$\sigma_{i1}=\theta+\frac{\sin 2k_i\theta}{2k_i},\ \ \sigma_{i2}=\theta-\frac{\sin 2k_i\theta}{2k_i},\ \ \sigma_{i3}=-\frac{\sin^2 k_i\theta}{k_i}$$

Чтобы показать ограниченность нормы бесконечномерного вектора $V_i^0(\xi)$, компонентами которого являются найденные универсальные функции $\overline{V}_i^{(1)0}(\xi)$, $\overline{V}_i^{(2)0}(\xi)$, составим квадрат выражения нормы

$$\left\|V_i^0\right\|^2 = \int_{-\theta}^{0} \left\{ \left(V_i^{(1)0}(\xi)\right)^2 + \left(V_i^{(2)0}(\xi)\right)^2 \right\} d\xi,\ i = 1,2$$

Проведя соответствующие вычисления, получим

$$\left\|V_i^0\right\|^2 = \frac{4}{\theta k_i^{2\alpha}\left(1 - (\sin^2 k_i \theta)/k_i^2\theta^2\right)\left(\bar{f}_i^2 + \bar{g}_i^2\right)},\quad i = 1,2 \qquad (4.12)$$

Из (4.12) видно, что выбором функций f_i, g_i можно улучшить сходимость этого ряда.

Таким образом, построены оптимальные операции $\overline{\varphi}_i^{(j)0}$, $i = 1,2$; $j = 1,2$ в виде

$$\overline{\varphi}_i^{(j)0}[t, y_i(t+\xi)] = \int_{-\theta}^{0} V_i^{(j)0} y_i(t+\xi)d\xi,\ i = 1,2 \qquad (4.13)$$

(4.13) является первым слагаемым правой части выражения (4.1). Операции, разрешающие задачу наблюдения системы (3.5) по сигналу (3.7), согласно (4.1), будут

$$\varphi_i^{(j)0}[t, \{y_i(t+\xi), u_i(t+\xi)\}] = \overline{\varphi}_i^{(j)0}[t, y_i(t+\xi)] - \overline{\varphi}_i^{(j)0}[t, G_i\int_0^{\eta} H_i(t+\eta, t+\xi)u(t+\xi)d\xi]$$

$$i = 1,2;\ j = 1,2 \qquad (4.14)$$

где

$$H_i(t+\eta, t+\xi) = \begin{pmatrix} \sin k_i(\eta-\xi) \\ \cos k_i(\eta-\xi) \end{pmatrix},\ i = 1,2.$$

Для второго слагаемого выражения (4.14) с учетом (4.13) и (3.7) после соответствующих вычислений получим

$$\begin{aligned} &\overline{\varphi}_i^{(j)0}[t, G_i\int_0^{\eta} H_i(t+\eta, t+\xi)u(t+\xi)d\xi] = \\ &= \int_{-\theta}^{0} V_i^{(j)0}(\xi)k_i^{\alpha-1}u_i(t+\xi)[f_i \sin k_i\xi + g_i(\cos k_i\xi - 1)]d\xi \end{aligned} \qquad (4.15)$$

Итак, с учетом оптимальных функций $\overline{V}_i^{(1)0}(\xi), \overline{V}_i^{(2)0}(\xi)$ из (4.10),(4.11), значения измерения $y_i(\tau)$ из (3.7) и формул (4.13)-(4.15) функции $q_i^{(j)}(t)$, $i = 1,2$; $j = 1,2$ определяются по формуле

$$\begin{aligned} q_i^{(j)}(t) = &\int_{t-\theta}^{t} \overline{V}_i^{(j)0}(t,\tau)y_i(\tau)d\tau - \\ &- \int_{t-\theta}^{t} \overline{V}_i^{(j)0}(t,\tau)k_i^{\alpha-1}u_i(\tau)\left[f_i \sin k_i(\tau - t) + g_i\left(\cos k_i(\tau - t) - 1\right)\right]d\tau \end{aligned} \qquad (4.16)$$

Подставляя значения функций $q_i(t) \equiv q_i^{(1)}(t)$ из (4.16) в выражения (3.3),(3.4), будем иметь функции состояния упругих элементов в момент времени t (аналогичным образом для скорости точек упругих элементов).

Оптимальный фильтр (4.16) позволяет с помощью измеряемого сигнала (3.7) восстанавливать состояние упругих элементов.

Восстановленные величины $w, \dot{w}$ используются для определения управляющих сил и моментов всей системы в соответствии с уравнениями (1.1),(1.2),(2.1).

Замечание 1. Приведенный алгоритм позволяет измерять также случайные возмущения в процессе движения и учитывать их в системе управления.

Замечание 2. Если при управлении системой возникнет необходимость решения граничных задач, то вышеприведенный алгоритм наблюдения позволит задать начальные условия для этих задач.

Замечание 3. Если при движении системы на упругие элементы наложены ограничения типа $|w(t,x,y)| < \mathrm{const}$, то данный алгоритм позволяет проверить это условие во время движения в любой момент времени t.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М: Наука, 1975. 568с.
2. Охами Ю., Ликинз Л. Влияние упругости КЛА на управляемость и наблюдаемость систем. В сб.: Управление в пространстве. Т.2. М.: Наука, 1970. С.275-285.
3. Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. М.: Машиностроение, 1986. 214с.
4. Айрапетян В.В., Гукасян А.А. Об управляемом движении одной модели летательного аппарата с упругими элементами. //Изв. НАН РА. Механика. 2000. Т.53. N1. С.61-68.
5. Гукасян А.А., Саркисян С.В. О колебательном движении прямоугольной пластинки. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1990. Т.43. N4. С.13-23.
6. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.:Машиностроение, 1987. 232с.
7. Акуленко Л.Д., Гукасян А.А. Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора. //Изв. АН СССР. МТТ. 1983. N5. С.33-41.
8. Гукасян А.А. Анализ движений двухзвенного упругого манипулятора с электромеханическими приводными системами на подвижном основании. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1989. Т.42. N1. С.45-55.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.:Наука, 1966. 724с.
10. Барсегян В.Р., Айрапетян В.В. К задаче наблюдения управляемых колебательных движений мембраны. //Уч. записки Ереванского Государственного Университета. N2. 1997. С.21-26.
11. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476с.
12. Габриелян М.С. О стабилизации неустойчивых движений механических систем. //Изв. АН СССР. ПМ. 1964. Т.28. Вып.3. С.493-501.
13. Барсегян В.Р. Задача наблюдения струны. //Изв. НАН Армении. Механика. 1997. Т.50. N1. С.66-69.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 11.06.2002

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №4, 2002 Механика

УДК 534.1: 539.1

О ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ БАЛКИ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ СИЛОЙ

Габриелян М.С., Мовсисян Л.А.

Մ.Ս. Գաբրիելյան, Լ.Ա. Մովսիսյան
Հեծանի շարժման ուշացումով ստաբիլիզացման և ղեկավարման մասին

Առաձգական հեծանի օրինակի վրա ուսումնասիրվում են համակարգի շարժման ստաբիլիզացիայի և ղեկավարման խնդիրները, երբ ժամանակի տվյալ մոմենտին արտաքին ղեկավարումը օբյեկտին է հասնում որոշ ուշացումով, ընդ որում, վերջինս միշտ մնում է հաստատուն: Երկու խնդիրների համար էլ որպես մինիմիզացվող ֆունկցիոնալներ ընդունված են դասական դեպքերը:
Դիտարկված օրինակում ցույց է տրված տարբեր դրվածքների տարբերությունը:

M.S. Gabrielyan, L.A. Movsisyan
On Stabilization and Control With Lagging of Motion of Beam

На примере упругой балки исследуются задачи стабилизации и управления движением системы, когда внешнее воздействие до объекта доходит с некоторым опозданием, при этом оно не меняется со временем. В качестве минимизируемых функционалов берутся обычные классические случаи. На примере системы с одной степенью свободы показано различие выражений управляющих сил при различных постановках задачи.

Обычно стабилизация и управление движением осуществляется с самого начала движения [1]. Аналогичным образом поступают и для подобных задач для упругих систем [2,3 и др.]. Однако, как следует из характера подобных задач, с момента времени наблюдения движением и до того как реакция дойдет до объекта, необходимо некоторое время, т.е. „сигнал" доходит с некоторым запаздыванием. В настоящей статье управление и стабилизация рассматриваются с этой точки зрения. Следует отметить, что существуют различные постановки задач управления и стабилизации с запаздыванием. Настоящая постановка, наверное, самая простая, когда запаздывание входит только в управляющее воздействие, причем оно одинаковое для всех моментов времени. По существу, управлять или стабилизировать систему, начиная с какого-то момента времени, или условие, при котором действующая сила доходит до объекта с запаздыванием, имеют одинаковый эффект. Возможно, в плане математики нового здесь немного. А разве это так важно? Думается, что с точки зрения практики роль такой постановки бессомненна. Для конкретности изложение проводится для упругой балки.

1. Уравнение движения балки запишем в виде

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=F(x,t-t_1) \qquad (1.1)$$

с соответствующими краевыми и начальными условиями

$$w\big|_{t=0}=a(x),\quad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}=b(x) \qquad (1.2)$$

Предполагается, что время запаздывания t_1 одинаковое для всех моментов и входит в выражение действующей нагрузки (1.1), при этом $F(x,t-t_1)=0$ при $t<t_1$.

Перейдем к безразмерным величинам:

$$u=\frac{w}{\sqrt{S}},\quad y=\frac{x}{l},\quad \tau=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cdot\frac{t}{l}\quad \Phi=\frac{F}{E\sqrt{S}} \qquad (1.3)$$

тогда (1.1) превратится

$$i^2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}=\Phi(y,\tau-\tau_1) \qquad (1.4)$$

Здесь $i=\frac{1}{l}\sqrt{\frac{I}{S}}$ i^{-1} – гибкость стержня $\tau_1=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\cdot\frac{t_1}{l}$ S – площадь поперечного сечения, l – длина стержня.

Если искать решение (1.4) в виде

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}f_m(\tau)X_m(y)$$

где $X_m(y)$ – собственные функции, удовлетворяющие сответственным краевым условиям, то для $f_m(\tau)$ получим

$$\frac{d^2 f_m}{d\tau^2}+\omega_m^2 f_m=\varphi_m(\tau-\tau_1) \qquad (1.6)$$

Здесь $\omega_m=i\lambda_m^2$ – собственные частоты, λ_m – соответствующие собственные значения для заданных краевых условий,

$$\varphi_m=\frac{1}{Q_m}\int_0^1\Phi(y,\tau-\tau_1)X_m(y)dy,\quad Q_m=\int_0^1 X_m^2(y)dy \qquad (1.7)$$

Начальными условиями для (1.6) по (1.2) будут

$$f_m(0)=a_m,\quad \dot f_m(0)=b_m \qquad (1.8)$$

В дальнейшем, если нет необходимости подчеркивать номер гармоники и если не создается путаница, для краткости индекс m опустим.

2. Сначала рассмотрим задачу стабилизации. Систему (1.6) в отдельности изучим для $\tau\le\tau_1$ и $\tau>\tau_1$. Итак, для $\tau\le\tau_1$

$$f = a\cos\omega\tau + \frac{b}{\omega}\sin\omega\tau \tag{2.1}$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \omega^2 f = \Psi(\xi), \quad \xi = \tau - \tau_1, \quad \Psi(\xi) = \varphi(\tau - \tau_1) \tag{2.2}$$

с начальными условиями

$$f(0) = \bar{a} = a\cos\omega\tau_1 + \frac{b}{\omega}\sin\omega\tau_1$$

$$\dot{f}(0) = \bar{b} = -a\omega\sin\omega\tau_1 + b\cos\omega\tau_1 \tag{2.3}$$

Постановка задачи и условие оптимальности обычные [4], т.е. стабилизировать движение (2.2), (2.3) при минимуме функционала

$$I^{(0)} = \int_0^1\int_0^\infty [\text{Э} + \Psi^2(y,\xi)]\,d\xi\,dy \tag{2.4}$$

Под Э понимается безразмерная полная энергия,

$$\text{Э} = \frac{1}{2}\left[\left(i\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)^2\right] \tag{2.5}$$

На основании (1.5) минимум (2.4) равносильно минимуму каждой гармоники, т.е.

$$I_m^{(0)} = \int_0^\infty\left[\gamma_m f_m^2 + \frac{1}{2}(\dot{f}_m)^2 + \psi_m^2(\xi)\right]d\xi \tag{2.6}$$

$$\gamma_m = \frac{1}{2}\int_0^1 [X_m''(y)]^2 dy \Big/ \int_0^1 X_m^2(y)dy$$

Искомый ψ ищется в виде

$$\psi = A_{11}f^2 + 2A_{12}f\dot{f} + A_{22}\dot{f}^2 \tag{2.7}$$

с условиями $A_{11} > 0$, $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 > 0$. Уравнение Ляпунова-Беллмана будет [4]

$$\left(A_{11}f + A_{12}\dot{f}\right)\dot{f} + \left(A_{12}f + A_{22}\dot{f}\right)\left(\psi - \omega^2 f\right) + \frac{1}{2}\left(\gamma f^2 + \frac{1}{2}\dot{f}^2 + \psi^2\right) = 0$$
$$\psi + \left(A_{12}f + A_{22}\dot{f}\right) = 0 \tag{2.8}$$

Подставляя последнее в первое уравнение и требуя, чтобы в полученной квадратичной форме коэффициенты были нулями, получим

$$A_{11} = \Omega\sqrt{\Omega - \gamma}, \quad A_{12} = \Omega - \omega^2$$

$$A_{22} = \sqrt{\frac{1}{2} + \Omega - \omega^2}, \quad \Omega = \sqrt{\omega^4 + \gamma} \tag{2.9}$$

Легко видеть, что условия $A_{11} > 0$ и $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 > 0$ выполняются, следовательно, $\psi > 0$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi} < 0$ и стабилизирующая функция будет

$$\psi = -A_{12} f - A_{22} \dot{f} \tag{2.10}$$

коэффициенты которой определяются выражениями по (2.9), при этом

$$\begin{aligned} f &= \exp(-p_1\xi)(c_1 \sin p_2\xi + c_2 \cos p_2\xi) \\ \dot{f} &= \exp(-p_1\xi)[(p_2c_1 - p_1c_2)\cos p_2\xi - (c_1p_1 + c_2p_2)\sin p_2\xi] \end{aligned} \tag{2.11}$$

где

$$p_1 = \frac{1}{2}A_{22}, \quad p_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3\Omega + \omega^2 - \frac{1}{2}}$$

Постоянные c_i согласно (2.3) определяются

$$c_1 = \frac{\bar{b} + \bar{a}p_1}{p_2}, \quad c_2 = \bar{a} \tag{2.12}$$

Искомая оптимальная функция получится из (2.10) заменой на $\tau - \tau_1$, а

$$\Phi(y, \tau - \tau_1) = \sum_{m=1}^{\bar{m}} \varphi_m(\tau - \tau_1)X_m(y) \tag{2.13}$$

3. Задача оптимального управления также ставится обычным образом. Решение системы (1.6), удовлетворяющее начальным условиям (1.8), будет

$$f = a\cos\omega\tau + \frac{b}{\omega}\sin\omega\tau + \frac{1}{\omega}\int_{\tau_1}^{\tau}\varphi(\theta - \tau_1)\sin\omega(\tau - \theta)d\theta \tag{3.1}$$

Требуется, чтобы в определенный момент времени $\tau = T$ прогиб и скорость балки принимали определенные значения

$$\begin{aligned} u(y,T) &= u_1(y) = \sum_{m=1}^{\bar{m}} c_m X_m(y) \\ \frac{\partial u(y,T)}{\partial\tau} &= u_2(y) = \sum_{m=1}^{\bar{m}} d_m X_m(y) \end{aligned} \tag{3.2}$$

при этом, минимизируя некоторый функционал. Согласно (1.5), (3.1) и (3.2) имеем

$$\begin{aligned} Z_1 &= Y_1 \sin\omega T_1 + Y_2 \cos\omega T_1 \\ Z_2 &= Y_2 \sin\omega T_1 - Y_1 \cos\omega T_1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь приняты обозначения

$$Z_1 = \int_0^{T_1}\psi(\xi)\cos\omega\xi d\xi, \quad Z_2 = \int_0^{T_1}\psi(\xi)\sin\omega\xi d\xi, \quad T_1 = T - \tau_1 \tag{3.4}$$

$$Y_1 = \omega\left(c - a\cos\omega\tau - \frac{b}{\omega}\sin\omega\tau\right)$$

$$Y_2 = d + a\omega\sin\omega\tau - b\cos\omega\tau$$

В качестве минимизируемых функционалов будем изучать два случая. Если критерий качества брать

$$I^{(2)}(y,\tau)=\int_0^1\int_{\tau_1}^{T}\Phi^2(\tau-\tau_1)d\tau\,dy \qquad (3.5)$$

то в конечном счете он сводится к минимуму

$$I_m^{(2)}=\int_0^{T_1}\psi_m^2(\xi)d\xi \qquad (3.6)$$

и поставленная задача сводится к нахождению минимума (3.6) при условиях (3.4). Такую задачу можно решать как типичную изопериметрическую задачу (такой способ будет применен в следующем пункте). Однако для общности она будет изучена при помощи проблемы моментов [4], тем более, что при другом критерии качества, который будет использован ниже, только таким способом можно добиться результата.

Решение поставленной задачи ищется обычным способом [5] и оно есть

$$\psi(\xi)=\mu_1\cos\omega\xi+\mu_2\sin\omega\xi \qquad (3.7)$$

$$\mu_1=\frac{Z_1B_{22}-Z_2B_{12}}{\Delta},\qquad \mu_2=\frac{Z_2B_{11}-Z_1B_{12}}{\Delta}$$

$$B_{11}=\frac{1}{2}T_1-\frac{1}{4\omega}\sin 2\omega\tau_1,\qquad B_{21}=\frac{1}{2\omega}\sin^2\omega\tau_1$$

$$B_{22}=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2\omega}\sin^2\omega T_1$$

$$\Delta=B_{11}Z_2^2-2B_{12}Z_1Z_2+B_{22}Z_1^2$$

Искомая управляющая нагрузка определится по (2.13), но уже с новыми (3.7)

$$\varphi_m(\tau-\tau_1)=\psi_m(\xi).$$

Теперь рассмотрим другой функционал качества:

$$I^{(3)}=\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{T_1}|\psi_m(\xi)|d\xi \qquad (3.8)$$

Условие минимума (3.8) эквивалентно условию минимума

$$I_m^{(3)}=\int_0^{T_1}|\psi_m|d\xi \qquad (3.9)$$

и управление осуществляется через сосредоточенные силы следующим образом: минимальное значение нормы $r_m(h)=\max\limits_{0\le\xi\le T_1}|h_m(\xi)|$ определяется, как

$$r_m^0 = \min_{\sum\le} \max_{0\le\xi\le T_1} \left|\alpha_m \cos\omega_m\xi + \beta_m \sin\omega_m\xi\right| > 0 \quad (3.10)$$

так как $\cos\omega_m\xi$ и $\sin\omega_m\xi$ независимые. Пусть указанный максимум достигается в точках $\xi_k^0 \in [0, T_1]$ ($k = 1, 2, \ldots, s$, число s конечное, так как функция $\alpha\cos\omega\xi + \beta\sin\omega\xi$ аналитическая). Тогда

$$\psi^0(\xi) = \sum_{k=1}^{s} P_k \delta(\xi - \xi_k) \quad (3.11)$$

где $\delta(\cdot)$ — функция Дирака. Числа P_k должны удовлетворять условиям

$$\sum_{k=1}^{s} P_k \cos\omega\xi_k = Z_1, \quad \sum_{k=1}^{s} P_k \sin\omega\xi_k = Z_2 \quad (3.12)$$

Следует отметить, что всегда существуют числа P_k, удовлетворяющие условиям (3.12), но они не всегда определяются единственным образом.

4. Представляет еще определенный интерес также задача следующего типа. В заданный момент времени привести какую-нибудь точку в заданное положение. На примере предыдущей задачи это выглядит так (точка $y = y_0$ в момент $\tau = T$):

$$u(y_0, T) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(T) X_m(y_0) = u_0 \quad (4.1)$$

Учитывая выражение (3.1), соотношение (4.1) можно переписать

$$\int_0^{T_1} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_m(\xi)}{\omega_m} \sin\omega_m(T_1 - \xi) X_m(y_0)\right] d\xi = h \quad (4.2)$$

$$h = u_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\omega_m T + \frac{b_m}{\omega_m} \sin\omega_m T\right) X_m(y_0)$$

Если в качестве минимизируемого функционала брать (3.5) при условии (4.2), то подобную задачу можно рассматривать как изопериметрическую. Тогда

$$\psi_m(\xi) = \frac{2h X_m(y) \sin\omega_m(T_1 - \xi)}{\omega_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(y_0)}{\omega_n^2} \left[T_1 - \frac{\sin 2\omega_n T_1}{2\omega_n}\right]} \quad (4.3)$$

суммарная оптимальная нагрузка будет по (2.13) с новыми (4.3).

5. На одном простом примере покажем разницу в выражениях управляющей нагрузки при различных подходах, когда осуществляется управление. Пусть системе с одной степенью свободы сообщается начальное отклонение (для балки отклонение по одной полуволне). В

момент времени $t=\dfrac{2\pi}{\omega}=T$ (период колебания) отклонение будет x_0.

Теперь потребуем, чтобы при $t=T$ отклонение было нулевым.

Вот выражения управляющих сил при различных постановках:

а) управление начинается с самого начала движения —

$$\varphi(t)=\frac{x_0\omega^2}{\pi}\sin\omega t,\quad 0\le t\le T \tag{5.1}$$

б) сила действует с момента $t=0$, но доходит до объекта через $t=T/4$, или действует, начиная с момента $t=T/4$. Тогда,

$$f\left(t-\frac{T}{4}\right)=\frac{4x_0\omega^2}{3\pi}\cos\omega\left(t-\frac{T}{4}\right),\ \text{или}$$

$$\psi(\xi)=\frac{4x_0\omega^2}{3\pi}\cos\omega\xi,\quad 0\le\xi\le\frac{3T}{4} \tag{5.2}$$

Интересно, что в обоих случаях суммарная сила $\int_0^T\varphi(t)dt$ одинаковая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габриелян М.С. Об оптимальной стабилизации механических систем мощности котинуума // Уч. записки ЕГУ. 1975. №2. С. 49-57.
2. Мовсисян Л.А., Габриелян М.С. Возвращение к вопросу управления движением упругой балки // Изв. НАН Армении. Механика. 1998. Т.51. №3. С. 23-27.
3. Габриелян М.С., Мовсисян Л.А. К оптимальному управлению движением упругих систем // Изв. РАН. МТТ. 1999. №6. С.146-152.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475с.
5. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов // I-IV, — Автоматика и телемеханика. 1960. Т.21. №№4,5,6; 1961. Т.22. №4; 1962. Т.23. №11.

Ереванский государственный университет
Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 12.12.2001

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №4, 2002 Механика

УДК 531.36

О ДЛИТЕЛЬНОСТИ СЕАНСОВ ИЗМЕРЕНИЙ В ЗАДАЧЕ МИНИМАКСНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ КОРРЕКТИРУЕМОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ПРИ СЛАБОМ ВЛИЯНИИ БЕЛОГО ШУМА.

Мартиросян С.Р.

Ս. Ռ. Մարտիրոսյան

Չափման տևողությունների որոշումը մինիմաքսային գնահատման խնդրում սպիտակ աղմուկի թույլ ազդեցության դեպքում

Աշխատանքում ուսումնասիրված է իներցիալ նավիգացիոն պարամետրերի մինիմաքսային գնահատման խնդիրը սպիտակ աղմուկի թույլ ազդեցության դեպքում: Ստացված են չափման տևողությունների ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնք ապահովում են օպտիմալ մինիմաքսային գնահատում:

S.R. Martirosian

On the problem of minimax estimation on account additive white noise with Application to Guidance

Рассматривается более общая постановка задачи минимаксного оценивания параметров корректируемой инерциальной навигационной системы, когда ошибки измерений представлены суммой двух случайных процессов: процесса с неизвестной корреляционной функцией и белого шума. В предлагаемой статье получена асимптотика оптимального оценивания в предположении о слабом влиянии белого шума.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу позиционной коррекции инерциальной навигационной системы, установленной на борту летательного аппарата, движущегося с крейсерской скоростью по траекториям, близким к ортодромии. При этом уравнения ошибок корректируемой инерциальной навигационной системы в продольном направлении движения объекта на интервалах времени, в течение которых производится коррекция, описываются соотношениями [1,6]

$$\dot{\gamma}=\mu,\ \dot{\mu}=-\varphi,\ \dot{\varphi}=\mu-\vartheta,\ \dot{\vartheta}=0 \tag{1.1}$$

Здесь $\dot{(\ )}=\dfrac{d}{d\tau}$, $\tau=\omega_0 t$ — безразмерное время, ω_0 — частота Шулера: $\omega_0^2=g/a$, g — гравитационное ускорение, a — радиус Земли, t — размерное время; γ — угловая ошибка определения местоположения объекта в продольном направлении; $\varphi=\alpha-\varepsilon^0$, α — угловая ошибка приборной вертикали в продольном направлении, ε^0 — постоянная приведенная погрешность продольного ньютонометра; $\mu=\dfrac{\Delta V}{a\,\omega_0}$, ΔV —

ошибка определения скорости в продольном направлении; $\vartheta = \nu / \omega_0$, ν – постоянный дрейф гироплатформы в продольном направлении.

Сторонняя позиционная информация, дополняющая уравнения (1.1), имеет вид [1,6]:

$$z(\tau) = \gamma(\tau) + \rho(\tau), \quad \tau \in [0, T], \quad T \le \frac{\pi}{2} \tag{1.2}$$

где $z(\tau)$ – непосредственно измеряемая величина, $\rho(\tau)$ – ошибка измерения.

Задача коррекции инерциальной навигационной системы с помощью дополнительной информации состоит в построении оценок значений фазовых переменных системы (1.1) в момент времени $\tau = T$ по информации (1.2).

Будем считать, что ошибка измерения $\rho(\tau)$ является суммой двух случайных процессов $\rho_1(\tau)$ и $\rho_2(\tau)$, которые взаимно не коррелированы:

$$\rho(\tau) = \rho_1(\tau) + \rho_2(\tau) \tag{1.3}$$

При этом $\rho_1(\tau)$ – белый шум с интенсивностью $c(\tau) \ge 0$, а $\rho_2(\tau)$ – произвольно коррелированный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и с ограниченной дисперсией:

$M\rho_2(\tau) = 0$, $M[\rho_2(\tau)]^2 \le \sigma^2$, σ – известная величина, а корреляционная функция $M\rho_2(\tau)\rho_2(s) = \sigma(\tau)\sigma(s)r(\tau, s)$ – неизвестна. Известно только, что автокорреляционная функция удовлетворяет ограничению: $|r(\tau, s)| \le 1$.

При выборе алгоритма оценивания решающее значение имеет модель погрешности измерения. В литературе подробно обсуждена задача коррекции инерциальной навигационной системы в предположении, что погрешность измерения является случайным процессом типа белого шума или линейно связанным с ним процессом с заданной корреляционной функцией. Это существенное предположение приводит к оптимальным алгоритмам оценивания по методу наименьших квадратов или фильтру Калмана [4,5].

Однако указанная гипотеза далеко не всегда имеет достаточное обоснование. Поэтому представляет практический интерес рассмотрение задачи коррекции инерциальной навигационной системы в предположении, что либо сама погрешность измерения, либо ее корреляционные характеристики могут изменяться в заданных пределах. В этом случае к задаче оценивания применяется гарантирующий подход. Это предположение приводит к оптимальным гарантированным алгоритмам оценивания [2, 6-8].

Особенность оптимальных гарантированных алгоритмов состоит в том, что из всех имеющихся измерений для оценки используются лишь $k \le m$ измерений, где m – размерность фазового вектора. Эта особенность позволяет отфильтровывать низкочастотные помехи в наихудших ситуациях.

Реально в помехе измерения могут присутствовать и высокочастотные составляющие. Включение их в класс допустимых помех наравне с низкочастотными составляющими в задаче минимаксного оценивания нежелательно, так как при этом теряется информация об их высокочасточности. Как следствие этого, заметно завышается гарантированная оценка точности. Их влияние можно снизить, применяя алгоритм оценивания, в котором кроме k оптимальных моментов измерений с равным весом используются все измерения, лежащие в некоторых малых окрестностях оптимальных моментов измерений (длины сеансов измерений). При этом влияние высокочастотной составляющей осредняется алгоритмом.

Будем искать оценки ошибок параметров инерциальной навигационной системы по измерениям (1.2) в предположении (1.3).

Представим измерения (1.2) в виде

$$z(\tau) = H^T(\tau)q + \rho(\tau),\ \tau \in [0,T] \tag{1.4}$$

где $q = x(T) = (\gamma(T), \mu(T), \varphi(T), \vartheta(T))^T$ – вектор параметров объекта;

$$H(\tau) = \exp\{A^T(\tau - T)\}h_1,\ h_1 = (1,0,0,0)^T,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нетрудно подсчитать, что

$$H(\tau) = (1, -\sin(T-\tau), \cos(T-\tau) - 1, \sin(T-\tau) - (T-\tau))^T \tag{1.5}$$

В такой постановке задача коррекции сводится к минимаксной задаче определения линейного несмещенного оценивателя $\Phi(\tau)$, минимизирующего дисперсию уклонения истинного значения параметра $l = a^T q$ (a – заданный вектор) от его оценки

$$\bar{l} = \int_0^T \Phi(\tau) z(\tau) d\tau \tag{1.6}$$

Проблема определения оценивателя $\Phi(\tau)$ из условий:

$$M(\bar{l} - l) = 0;\ \min_{\Phi(\tau)} \max_{r(t,s)} M[\bar{l} - l]^2 \tag{1.7}$$

сводится к задаче определения $\Phi(\tau)$ из решения следующей задачи [2]:

$$\int_0^T H(\tau)\Phi(\tau)d\tau = a \tag{1.8}$$

$$D(\Phi) = \int_0^T c(\tau)\Phi^2(\tau)d\tau + \beta^2 \to \min_{\Phi(\tau)} \tag{1.9}$$

$$\beta = \sigma_1 \int_0^T |\Phi(\tau)d\tau| \tag{1.10}$$

Используя метод множителей Лагранжа, можно получить следующий вид для минимизирующего оценивателя в общей проблеме [2]:

$$\Phi(\tau) = \begin{cases} -\left[H^T(\tau)\lambda + \sigma(\tau)\beta\right]/c(\tau), & \text{если} \quad [\ ] < 0 \\ -\left[H^T(\tau)\lambda - \sigma(\tau)\beta\right]/c(\tau), & \text{если} \quad [\ ] > 0 \\ 0, & \text{в остальных сл.,} \end{cases} \tag{1.11}$$

где λ — вектор множителей Лагранжа, $\beta \in R_+$, и $\lambda \in R^m$ определяются из следующих соотношений:

$$\int_0^T H(\tau)\Phi(\tau)d\tau = a, \quad \beta = \sigma\int_0^T |\Phi(\tau)|d\tau \tag{1.12}$$

m — размерность фазового вектора.

Задача минимаксного оценивания (1.6) сводится к определению постоянных λ и β из системы (1.10), (1.11). В общем случае эта задача может быть решена только численно.

1. Решение задачи коррекции в предположении о слабом влиянии белого шума.

Пусть $c(\tau) = \varepsilon\bar{c}(\tau)$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. При $\varepsilon = 0$ оцениватель $\Phi(\tau) \neq 0$ не более, чем в m точках, τ_{jk}, $k = \overline{1,l}$, $l \leq m$. Моменты времени τ_{jk}, $k = \overline{1,l}$, $l \leq m$ определяют оптимальный состав измерений для оценки j-ой компоненты в задаче о наихудшей корреляции.

Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то, очевидно, оцениватель $\Phi(\tau)$ (1.11) будет отличен от нуля лишь на интервалах $\left[\tau_{jk} - \alpha_k^j, \tau_{jk} + \alpha_k^j\right]$ в окрестности моментов времени τ_{jk}, длина которых стремится к нулю вместе с ε.

Учитывая, что знак $\Phi(\tau)$ в этих окрестностях совпадает со знаком Φ_{jk}, $k = \overline{1,m}$, формулу (1.11) в окрестности $\tau = \tau_{jk}$ можно записать в виде $\Phi(\tau) = -\beta Q(\tau)A(\tau,\Lambda)/\varepsilon$,

где обозначено $Q(\tau) = \sigma/\bar{c}(\tau)$, $h(\tau) = \dfrac{1}{\sigma}\tilde{H}(\tau)$,

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\beta} \in R^m, \quad A(\tau,\Lambda) = h^T(\tau)\Lambda + \Delta_k, \quad \Delta_k = \mathrm{sign}\Phi_{jk}.$$

Разлагая $A(\tau,\Lambda)$ в ряд в окрестности $\tau = \tau_{jk}$, получаем следующие выражения, определяющие длины сеансов измерений [3]:

$$L_k = \varepsilon^{1/2}\left(2\Phi_{jk}\bar{c}_k^0 \Big/ \beta_0\sigma_k^0 \overset{1}{h}{}_k^T \Lambda_0\right)^{1/2}, \quad k \in I_1 \tag{2.1}$$

$$L_k = \varepsilon^{1/2}\left(-2\Phi_{jk}\bar{c}_k^0 \Big/ \beta_0\sigma_k^0 \overset{1}{h}{}_k^T \Lambda_0\right)^{1/2}, \quad k \in I_2 \tag{2.2}$$

$$L_k = 2\varepsilon^{1/3}\left(\frac{3}{4}\Phi_{jk}\bar{c}_k^0 \Big/ \beta_0\sigma_k^0 \overset{2}{h}{}_k^T \Lambda_0\right)^{1/3}, \quad k \in I_3 \tag{2.3}$$

где I_1 — множество левых интервалов: τ_{jk} совпадает с началом интервала, I_2 — множество правых интервалов: τ_{jk} совпадает с концом интервала,

I_3 – множество интервалов, для которых τ_{jk} лежит внутри.

$$\overset{0}{\bar{C}}_k = \bar{c}(\tau_{jk}),\ \overset{0}{\sigma}_k = \sigma(\tau_{jk}),\ \beta_0 = \sum_{k=1}^{m} \overset{0}{\sigma}_k \left|\Phi_{jk}\right|$$

$$\Lambda_0 = -\overset{0}{H}{}^{-1}\Delta,\ \overset{0}{H} = \begin{pmatrix} \overset{0}{h}{}_1^T \\ \cdots \\ \overset{0}{h}{}_m^T \end{pmatrix},\ \Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_m \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

$$\overset{s}{h}_k = \frac{1}{s!}\cdot\frac{d^s}{d\tau^s}h(\tau)\Big|_{\tau=\tau_{jk}} \qquad s = 0,1,2,...,\ \Delta_k = \operatorname{sgn}\Phi_{jk},\ k = \overline{1,m},\ h(\tau) = \frac{1}{\sigma(\tau)}H(\tau)$$

Перейдем к непосредственному решению задачи (1.8)-(1.11) для различных $a: a_1 = (1,0,0,0)^T$, $a_2 = (0,1,0,0)^T$, $a_3 = (0,0,1,0)^T$, $a_4 = (0,0,0,1)^T$, соответствующих оцениванию параметров $\gamma(T)$, $\mu(T)$, $\varphi(T)$, $\vartheta(T)$.

Сначала рассмотрим задачу (1.7)-(1.9) при $\varepsilon = 0$. Оптимальное решение этой задачи строится в виде [2,6]:

$$\Phi_j(\tau) = \sum_{k=1}^{4} \Phi_{jk}\delta(\tau - \tau^*_{jk}),\quad j = \overline{1,4},$$

где Φ_{jk}, $j,k = \overline{1,4}$ – весовые коэффициенты алгоритмов оценивания; τ^*_{jk}, $j,k = \overline{1,4}$ – оптимальные моменты измерений, определяемые равенствами [6]

$$\tau^*_{j1} = 0,\ \ \tau^*_{j2} = \chi,\ \ \tau^*_{j3} = T - \chi,\ \ \tau^*_{j4} = T,\quad j = \overline{1,4},$$

χ – решение уравнения

$$\sin\left(\chi - \frac{T}{2}\right) + (T-\chi)\cos\left(\chi - \frac{T}{2}\right) - \sin\frac{T}{2} = 0,\ \ \chi \in \left(0, \frac{T}{2}\right),\ \ T \le \frac{\pi}{2}.$$

А весовые коэффициенты Φ_{jk}, $j,k = \overline{1,4}$ определяются выражениями [6]

$$\begin{aligned}
&\Phi_{11} = \Phi_{12} = \Phi_{13} = 0,\ \ \Phi_{14} = 1\\
&\Phi_{21} = [(2\chi - T) + (T-\chi)\cos\chi - \chi\cos(T-\chi) - \sin(T-2\chi) + \sin(T-\chi) - \sin\chi]/\delta\\
&\Phi_{22} = [(T-\chi) - T\cos\chi + \chi\cos T + \sin(T-\chi) - \sin T + \sin\chi]/\delta\\
&\Phi_{23} = [-\chi + T\cos(T-\chi) - (T-\chi)\cos T - \sin(T-\chi) + \sin T - \sin\chi]/\delta\\
&\Phi_{24} = [\chi(\cos\chi - \cos T) + (T-\chi)(\cos T - \cos(T-\chi)) +\\
&+\sin(T-2\chi) - \sin(T-\chi) + \sin\chi]/\delta;\\
&\Phi_{31} = [(T-\chi)\sin\chi - \chi\sin(T-\chi)]/\delta; \qquad \Phi_{32} = [\chi\sin T - T\sin\chi]/\delta\\
&\Phi_{33} = [T\sin(T-\chi) - (T-\chi)\sin T]/\delta;\\
&\Phi_{34} = [\chi\sin\chi - (T-\chi)\sin(T-\chi) + (T-2\chi)\sin T]/\delta\\
&\Phi_{41} = -\Phi_{44} = [\sin(T-\chi) - \sin(T-2\chi) - \sin\chi]/\delta
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\Phi_{42}=-\Phi_{43}=\left[\sin(T-\chi)-\sin T+\sin\chi\right]/\delta$$

$$\delta=4\sin\frac{\chi}{2}\sin\frac{T-\chi}{2}\left[T\sin\left(\frac{T}{2}-\chi\right)-(T-2\chi)\sin\frac{T}{2}\right]$$

Выражения для соответствующих минимальных значений функционала [1.9] при $\varepsilon=0$ имеют вид [6]

$$\dot\beta_1=d_{opt}(\gamma)=\sigma;\quad \dot\beta_2=d_{opt}(\mu)=2\sigma\frac{\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)-\cos\frac{T}{2}}{T\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)-2\sin\frac{T}{2}} \tag{2.6}$$

$$\dot\beta_3=d_{opt}(\varphi)=2\sigma\frac{\sin\frac{T}{2}}{T\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)-2\sin\frac{T}{2}};\dot\beta_4=d_{opt}(\vartheta)=2\sigma\frac{\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)}{T\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)-2\sin\frac{T}{2}}$$

Отметим, что

$$\dot{\bar c}_1=\dot{\bar c}_2=\dot{\bar c}_3=\dot{\bar c}_4=\bar c,\ \dot\sigma_1=\dot\sigma_2=\dot\sigma_3=\dot\sigma_4=\sigma; \tag{2.7}$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\dot H_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&\Phi_{14}\\\Phi_{21}&\Phi_{22}&\Phi_{23}&\Phi_{24}\\\Phi_{31}&\Phi_{32}&\Phi_{33}&\Phi_{34}\\\Phi_{41}&\Phi_{42}&\Phi_{43}&\Phi_{44}\end{pmatrix},\quad \dot H_2^{-1}=\begin{pmatrix}\Phi_{21}&\Phi_{22}&\Phi_{23}&\Phi_{24}\\0&0&0&\Phi_{14}\\\Phi_{31}&\Phi_{32}&\Phi_{33}&\Phi_{34}\\\Phi_{41}&\Phi_{42}&\Phi_{43}&\Phi_{44}\end{pmatrix}$$

$$\dot H_3^{-1}=\begin{pmatrix}\Phi_{31}&\Phi_{32}&\Phi_{33}&\Phi_{34}\\\Phi_{21}&\Phi_{22}&\Phi_{23}&\Phi_{24}\\0&0&0&\Phi_{14}\\\Phi_{41}&\Phi_{42}&\Phi_{43}&\Phi_{44}\end{pmatrix},\quad \dot H_4^{-1}=\begin{pmatrix}\Phi_{41}&\Phi_{42}&\Phi_{43}&\Phi_{44}\\\Phi_{21}&\Phi_{22}&\Phi_{23}&\Phi_{24}\\\Phi_{31}&\Phi_{32}&\Phi_{33}&\Phi_{34}\\0&0&0&\Phi_{14}\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

$$\Delta_{(1)}=(0,0,0,1)^T;\Delta_{(2)}=(-1,1,-1,1)^T;\Delta_{(3)}=(1,-1,1,-1)^T;\Delta_{(4)}=(-1,1,-1,1)^T$$

где $\Phi_{i,j}$, $i,\ j=\overline{1,4}$ определяются выражениями (2.5).

Согласно [2.2], (2.7) величины $\Lambda_{0(\gamma)},\Lambda_{0(\mu)},\Lambda_{0(\varphi)},\Lambda_{0(\vartheta)}$ определяются следующими формулами:

$$\Lambda_{0(\gamma)}=-\begin{pmatrix}\Phi_{14}\\\Phi_{24}\\\Phi_{34}\\\Phi_{44}\end{pmatrix},\qquad \Lambda_{0(\mu)}=-\begin{pmatrix}-\Phi_{21}&+\Phi_{22}&-\Phi_{23}&+\Phi_{24}\\&&\Phi_{14}&\\-\Phi_{31}&+\Phi_{32}&-\Phi_{33}&+\Phi_{34}\\-\Phi_{41}&+\Phi_{42}&-\Phi_{43}&+\Phi_{44}\end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$\Lambda_{0(\varphi)}=-\begin{pmatrix} +\Phi_{31} & -\Phi_{32} & +\Phi_{33} & -\Phi_{34} \\ \Phi_{21} & -\Phi_{22} & +\Phi_{23} & -\Phi_{24} \\ & & -\Phi_{14} & \\ \Phi_{41} & -\Phi_{42} & +\Phi_{43} & -\Phi_{44} \end{pmatrix},\quad \Lambda_{0(\vartheta)}=-\begin{pmatrix} -\Phi_{41} & +\Phi_{42} & -\Phi_{43} & +\Phi_{44} \\ -\Phi_{21} & +\Phi_{22} & -\Phi_{23} & +\Phi_{24} \\ -\Phi_{31} & +\Phi_{32} & -\Phi_{33} & +\Phi_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{14} \end{pmatrix}$$

Подставляя (2.5)-(2.9) в (2.1)-(2.6), получаем выражения для длин сеансов измерений, доставляющих оптимальную гарантированную оценку соответствующей компоненты фазового вектора при слабом влиянии белого шума. Длительности сеансов измерений при оценивании $\gamma(T)$, $\mu(T)$, $\varphi(T)$, $\vartheta(T)$ определяются, соответственно, выражениями:

$L_{1(\gamma)}=L_{2(\gamma)}=L_{3(\gamma)}=0$

$$L_{4(\gamma)}=2\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{c}^{\frac{1}{2}}}{\sigma}\left(\frac{\sin\frac{\chi}{2}\sin\frac{T-\chi}{2}\left(T\sin\left(\frac{T}{2}-\chi\right)-(T-2\chi)\sin\frac{T}{2}\right)}{\chi\sin\frac{T-\chi}{2}\sin\frac{T+\chi}{2}-(T-\chi)\sin\frac{\chi}{2}\sin\left(T-\frac{\chi}{2}\right)+2\sin\frac{\chi}{2}\sin\left(\frac{T}{2}-\chi\right)}\right)^{1/2}$$

$$L_{1(\mu)}=\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{c}^{\frac{1}{2}}}{2\sigma}\left(\frac{\left(\chi\sin^2\left(\frac{T-\chi}{2}\right)-(T-\chi)\sin^2\frac{\chi}{2}-2\sin\frac{\chi}{2}\sin\frac{T-\chi}{2}\sin\left(\frac{T}{2}-\chi\right)\right)}{2\sin^2\frac{\chi}{2}\sin^2\frac{T-\chi}{2}\left((T-\chi)\cos\frac{T}{2}-2\sin\left(\frac{T-\chi}{2}\right)\cos\frac{\chi}{2}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(T\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)-2\sin\frac{T}{2}\right)\right)^{1/2}$$

$$L_{2(\mu)}=\frac{\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{c}^{\frac{1}{3}}}{\sigma^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{3}{4}\frac{\left(T\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)-2\sin\frac{T}{2}\right)\left(T\sin^2\frac{\chi}{2}-\chi\sin^2\frac{T}{2}+2\sin\frac{T-\chi}{2}\sin\frac{T}{2}\sin\frac{\chi}{2}\right)}{(T-\chi)\sin^2\frac{T-\chi}{2}\sin^2\frac{\chi}{2}\sin\left(\frac{T}{2}-\chi\right)}\right)^{1/3}$$

$$L_{3(\mu)}=\frac{\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{c}^{\frac{1}{3}}}{\sigma^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{3}{4}\frac{\left(T\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)-2\sin\frac{T}{2}\right)}{(T-\chi)\sin^2\frac{T-\chi}{2}\sin^2\frac{\chi}{2}\sin\left(\frac{T}{2}-\chi\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\chi\sin^2\frac{T}{2}-T\sin\frac{\chi}{2}\sin\left(T-\frac{\chi}{2}\right)+2\sin\frac{\chi}{2}\sin\frac{T-\chi\sin\frac{T}{2}}{2}\right)\right)^{1/3}$$

$$L_{4(\psi)}=\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{c}^{\frac{1}{2}}}{2\sigma}\left(\frac{1}{2}\frac{\left(T\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)-2\sin\frac{T}{2}\right)}{\sin^2\frac{T-\chi}{2}\sin^2\frac{\chi}{2}\left((T-\chi)\cos\frac{T}{2}-2\sin\frac{T-\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\left((T-\chi)\sin\frac{\chi}{2}\sin\left(T-\frac{\chi}{2}\right)-\chi\sin\frac{T-\chi}{2}\sin\left(\frac{T+\chi}{2}\right)-2\sin\frac{\chi}{2}\sin\frac{T-\chi}{2}\sin\left(\frac{T}{2}-\chi\right)\right)\right)^{1/2}$$

$$L_{1(\varphi)}=\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{c}^{\frac{1}{2}}}{2\sigma}\left(\frac{\left(T\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)-2\sin\frac{T}{2}\right)\left((T-\chi)\sin\chi-\chi\sin(T-\chi)\right)}{2\sin\frac{T}{2}\sin\frac{T-\chi}{2}\sin\frac{\chi}{2}\left(2\sin\frac{T-\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2}-(T-\chi)\cos\frac{T}{2}\right)}\right)^{1/2}$$

$$L_{2(\varphi)}=\frac{\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{c}^{\frac{1}{3}}}{\sigma^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{3}{4}\frac{(T\sin\chi-\chi\sin T)\left(T\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)-2\sin\frac{T}{2}\right)}{(T-\chi)\sin\frac{T}{2}\sin\frac{T-\chi}{2}\sin\frac{\chi}{2}\sin\left(\frac{T}{2}-\chi\right)}\right)^{1/3}$$

$$L_{3(\varphi)}=\frac{\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{c}^{\frac{1}{3}}}{\sigma^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{3}{4}\frac{(T\sin(T-\chi)-(T-\chi)\sin T)\left(T\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)-2\sin\frac{T}{2}\right)}{(T-\chi)\sin\frac{T}{2}\sin\frac{T-\chi}{2}\sin\frac{\chi}{2}\sin\left(\frac{T}{2}-\chi\right)}\right)^{1/3}$$

$$L_{4(\varphi)}=\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{c}^{\frac{1}{2}}}{2\sigma}\left(\frac{\left(T\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)-2\sin\frac{T}{2}\right)}{\sin\frac{T}{2}\sin\frac{T-\chi}{2}\sin\frac{\chi}{2}\left((T-\chi)\cos\frac{T}{2}-2\sin\frac{T-\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\left((T-\chi)\sin\frac{\chi}{2}\cos\left(T-\frac{\chi}{2}\right)-\chi\sin\frac{T-\chi}{2}\cos\frac{T+\chi}{2}\right)\right)^{1/2}$$

$$L_{1(\theta)}=L_{4(\theta)}=\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{c}^{\frac{1}{2}}}{\sigma}\left(\frac{\left(T\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)-2\sin\frac{T}{2}\right)\sin\left(\frac{T}{2}-\chi\right)}{2\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)\left(2\sin\frac{T-\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2}-(T-\chi)\cos\frac{T}{2}\right)}\right)^{1/2}$$

$$L_{2(\theta)}=L_{3(\theta)}=\frac{\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{c}^{\frac{1}{3}}}{\sigma^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{\left(T\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)-2\sin\frac{T}{2}\right)\sin\left(\frac{T}{2}\right)}{(T-\chi)\sin\left(\frac{T}{2}-\chi\right)\cos\left(\frac{T}{2}-\chi\right)}\right)^{1/3} \tag{2.10}$$

Подставляя соотношения (2.5), (2.6), (2.10) в (1.6), (1.9), получаем решение задачи позиционной коррекции в явном виде: оптимальные гарантированные оценки параметров $\gamma(T)$, $\mu(T)$, $\varphi(T)$, $\vartheta(T)$ и выражения для соответствующих ошибок.

Выражения (2.10), определяющие длительности сеансов измерений, очевидно, могут быть легко реализованы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Парусников Н.А., Морозов В.М., Борзов В.И. Задача коррекции в инерциальной навигации. М.: Изд. МГУ, 1982. 176 с.
2. Лидов М.Л. Минимаксная задача оценивания параметров траектории в непрерывной постановке.// Космические исследования. 1984. Т.22. №4.
3. Лидов М.Л. О длительности сеансов измерений при слабом влиянии белого шума. // Космические исследования. 1988. Т.26. №2. С. 179-183.
4. Каленова В.И., Морозов В.М., Парусников Н.А., Шакотько А.Г. О коррекции инерциальных навигационных систем с помощью современной скоростной и позиционной дополнительной информации.//Изв. АН СССР. МТТ. 1981, №5. С. 12-20.
5. Парусников Н.А., Каленова В.И., Парусникова О.И., Шакотько А.Г. Об алгоритмах скоростной и позиционной коррекции в инерциальной навигации. /В сб.: Научные труды Ин-та механики МГУ. —М.: Изд. Моск. Ун-та. 1974. №33. С. 11-21.
6. Матасов А.И., Мартиросян С.Р. Минимальные алгоритмы позиционной коррекции инерциальных навигационных систем.//Изв. АН СССР. МТТ. 1988. №2. С. 4-14.
7. Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг Л.Г. Определение и коррекция движения. М.: Наука, 1980. 360 с.
8. Головап А.А., Мартиросян С.Р., Матасов А.И. Численное сравнение оптимального гарантированного алгоритма с алгоритмом метода наименьших квадратов. // Космические исследования. 1988. Т.26. №2. С. 319-322.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
01.11.2002

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №4, 2002 Механика

УДК 531.36: 534.2

УСЛОВИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫНУЖДЕННОГО ДВИЖЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Матвийчук К.С.

Փոփոխական կառուցվածքով ավտոմատ ղեկավարման ոչ ստացիոնար համակարգերի հարկադրական շարժումների տեխնիկական կայունության պայմանները

Կ.Ս. Մատվիյչուկ

Հետազոտվում են փոփոխական կառուցվածքով ոչ ստացիոնար համակարգերի դինամիկական վիճակների տեխնիկական կայունության հատկությունները արտաքին գրգռման պայմաններում [1-6]. Նախապես տրված բազմությունից, բոլոր հնարավոր սկզբնական վիճակներով ոչ ստացիոնար, փոփոխական կառուցվածքով և արտաքին գրգռման պայմաններում գտնվող դինամիկ պրոցեսների համար ստացված են տեխնիկական կայունության բավարար պայմաններ

Conditions of Technical Stability of the Compelled Movement of Non-Stationary Systems of Automatic Control with Variable Structure

K.S. Matvijchuk

Исследуются свойства технической устойчивости динамических состояний нестационарных систем переменной структуры при наличии внешних воздействий [1-6]. Нестационарные внутренние параметры рассматриваемых систем изменяются непрерывно в заданных диапазонах при выбранных параметрах разрывных законов управления процессами с регулированием по координате рассогласования, выходной координате исполнительного устройства и их производных конечного порядка [2]. Получены достаточные условия технической устойчивости по мере заданных нестационарных, внешне возмущенных динамических процессов переменной структуры при всех возможных начальных распределениях значений из заранее заданного относительно меры множества начальных состояний [5,6].

1. Формулировка задачи. Рассматривается нестационарная динамическая система регулирования с переменной структурой в условиях действия внешних возмущений и в предположении, что зависимые от времени внутренние непрерывные параметры процесса изменяются в области заданных диапазонов. Движение заданной системы описывается системой уравнений вида [2]

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}, \quad i = 1,\dots,n-1 \tag{1}$$

$$\frac{dx_n}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} a_i(t)x_i - \sum_{i=1}^{n-1}\psi_i^s x_i + \sum_{i=0}^{m-1}\left(d_i(t)+\psi_i^s\right)\frac{d^iF(t)}{dt^i} + \frac{d^mF(t)}{dt^m}, \quad t \in T \subset I$$

где функция $F(t)$ имеет следующее представление:

$$F(t) = F_1(t) + \frac{d^{n-m}f_0(t)}{dt^{n-m}} + \sum_{j=0}^{n-m-1} b_j(t)\frac{d^jf_0(t)}{dt^j}, \quad t \in T \subset I \tag{2}$$

T – ограниченный заданный интервал времени, $T=[t_0,+\infty)$, $t_0 \ge 0$; $F_1(t)$ – функция времени $t \in T$, характеризует приведенное ко входу системы возмущающее воздействие и является линейной комбинацией функций внешних, произвольно приложенных к процессу возмущений $f_1(t),\dots,f_n(t)$ и их производных. Предполагается, что заданная система обеспечивает непрерывное воспроизведение задающего воздействия $f_0(t)$ процесса выходной координатой $\varphi(t)$ с точностью до затухающей переходной составляющей; x_1 – координата рассогласования: $x_1 = f_0(t) - \varphi(t)$. Считаем, что $F_1(t)$ непрерывно дифференцируема до порядка m включительно, $m<n$, функции $\varphi(t)$, $f_0(t)$ непрерывно дифференцируемы до порядка n включительно. С помощью непрерывных параметров объекта управления $b_i(t)$ характеризуется [2] связь между величинами $d^i\varphi(t)/dt^i$ $(i=0,1,\dots,n-m)$, y, $F_1(t)$, y – выходная координата исполнительного устройства, по предположению $b_i(t)$ дифференцируемы до порядка $m<n$ включительно и удовлетворяют условиям

$$b_{i\,\min}^{(j)} \le \frac{d^j b_i(t)}{dt^j} \le b_{i\,\max}^{(j)}, \quad i=0,1,\dots,n-m, \quad j=0,1,\dots,m$$

$$b_{i\,\min}^{(j)},\, b_{i\,\max}^{(j)} = \text{const}, \quad t\in T \tag{3}$$

Параметры $d_i(t)$ исполнительного устройства непрерывны, заданы в известных диапазонах

$$d_{i\min} \le d_i(t) \le d_{i\max}, \quad d_{i\min}, d_{i\max} = \text{const}, \quad i=0,1,\dots,m-1, \quad t\in T \tag{4}$$

и характеризуют [2] связь управления u с функциями $d^i y/dt^i$. Полагаем, что управление u в системе зависит от воздействий по координатам $x_1,\dots,x_n, y, dy/dt,\dots,d^{m-1}y/dt^{m-1}$ и имеет представление $u=\sum_{i=1}^{n-1}\psi_i^x x_i - \sum_{i=0}^{m-1}\psi_i^y \frac{d^i y}{dt^i}$, коэффициенты воздействия ψ_i^x и ψ_i^y принимают [1,2] одно из двух значений: α_i^x или β_i^x и α_i^y или β_i^y. Коэффициенты $a_i(t)$ в (1) линейно зависят от величин $d^j b_i(t)/dt^j$, $d_i(t)$, ψ_i^x [2]. Сформируем функцию переключения в пространстве переменных $(x_1,\dots,x_n)$ вида

$$s=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \quad c_i = \text{const}, \quad c_n = 1 \tag{5}$$

Пусть с помощью (5) задан закон изменения коэффициентов ψ_i^x, ψ_i^y:

$$\psi_i^x = 2^{-1}\left\{\alpha_i^x\left[1+\text{sign}(x_i s)\right]+\beta_i^x\left[1-\text{sign}(x_i s)\right]\right\}, \quad i=1,\dots,n-1, \quad \alpha_i^x, \beta_i^x = \text{const} \tag{6}$$

$$\psi_i^y = 2^{-1}\left\{\alpha_i^y\left[1+\text{sign}\left(\frac{d^i F}{dt^i}s\right)\right]+\beta_i^y\left[1-\text{sign}\left(\frac{d^i F}{dt^i}s\right)\right]\right\}, \quad i=0,1,\dots,m-1$$

$$\alpha_i^j,\ \beta_i^j = \text{const} \tag{7}$$

Рассмотрим класс F_m – множество функций $F(t)$ со свойством [2]

$$\left|\frac{d^m F(t)}{dt^m}\right| \Big/ \left|\sum_{i=0}^{m-1}\frac{d^i F(t)}{dt^i}\right| \le A,\quad A = \text{const} > 0 \tag{8}$$

Если внешние воздействия $F_1(t)$ недоступны измерению, то, используя из [2] связь между $f_0(t)$, y, x_i, при $R_i = \frac{d^i y}{dt^i} + \sum_{j=1}^{n-m+i+1} r_{ij}(t)x_j$ имеем

$$\psi_i^j = 2^{-1}\{\alpha_i^j[1+\text{sign}(R_i s)] + \beta_i^j[1-\text{sign}(R_i s)]\},\quad i = 0,1,\dots,m-1 \tag{9}$$

Имеем частный логический закон для ψ_i^j вида

$$\psi_i^j = 2^{-1}\left\{\alpha_i^j\left[1+\text{sign}\left(\frac{d^i y}{dt^i}s\right)\right] + \beta_i^j\left[1-\text{sign}\left(\frac{d^i y}{dt^i}s\right)\right]\right\},\ i = 0,1,\dots,m-1 \tag{10}$$

Пусть процесс (1) – (8) (либо (1) – (5), (9), (8)) определен при условиях

$$x_i(t_0) = x_i^0,\quad i = 1,\dots,n,\quad \forall x_0 = (x_1^0,\dots,x_n^0)\in\Omega_0 \tag{11}$$

Задачу Коши (1) – (8), (11) рассматриваем в области

$$T\times D,\ T = [t_0,\ N\mu^{-1}],\ D = \{x = (x_1,\dots,x_n)\in R^n:\ |x_i| < h_i,\ i = \overline{1,n}\},$$

где $T\subset I$, $\mu\in(0,1)$, $N = \text{const} > 0$, $h_i = \text{const} > 0$ – заданные величины. Пусть задача (1) – (8), (11) удовлетворяет [4] достаточным условиям существования вида:

$$|f(t,x)| \le m(t),$$

$$f(t,x) \equiv -\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x_i) - \sum_{i=1}^{n-1}\psi_i^j x_i + \sum_{i=1}^{m-1}(d_i(t)+\psi_i^j)\frac{d^i F(t)}{dt^i} + \frac{d^m F(t)}{dt^m},\ t\in T\subset I,$$

где $m(t)$ –суммируемая функция при $t\in T\subset I$ [4]. Обозначим $x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$ решение задачи (1)-(8), (11). Зададим меру $\rho = \rho[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Пусть заданы: область начальных состояний для системы (1)-(8), (11): $\Omega_0 = \{x:\ \rho\le\gamma,\ \gamma > 0\}$ и область допустимых текущих состояний этой системы $\Omega(t) = \{x:\ \rho\le\eta(t),\ \eta(t) > 0\}$, где γ, $\eta(t)$ – заданные число и непрерывная в $T\subset I$ функция, при этом $\gamma\le\eta(t_0)$, $\Omega_0\subset\Omega(t_0)$, $\eta(t)\le k$, $\forall t\in T$, $k = \text{const} > 0$.

Для системы (1) – (8),(11) определим нормированную функцию Ляпунова $V(t,x)$ аналогично [5], предполагая, что автономные состояния исходной системы описываются линейной устойчивой системой дифференциальных уравнений без управления и с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1},\ i = 1,\dots,n-1,\ \frac{dx_n}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\bar{a}_i x_i,\quad \bar{a}_i = \text{const} \tag{12}$$

усть функция Ляпунова $V(t,x)$ имеет представление

$$V(t,x)=\exp[\beta_1(t)]W_1(x),\quad W_1(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{ij}}{\theta}x_ix_j,\quad \theta=\varepsilon_n\Lambda,\quad \varepsilon_n>1,\quad \Lambda>1\quad(13)$$

;е для собственных значений $\mu_i(i=\overline{1,n})$ формы $W_1(x)$ справедливо ;ойство

$$<\exp[\beta(t)]\mu_n\le 1,\ \forall t\in T,\ \mu_n=\max\{\mu_i(i=\overline{1,n})\}\text{ и }\mu_1=\min\{\mu_i(i=\overline{1,n})\}\quad(14)$$

2. Достаточные условия технической устойчивости вынужденной ;стационарной системы с переменной структурой. Обозначим на ;шениях системы (1) – (8), (11) соотношения:

$$\Phi(t,x(t))\equiv\frac{d\beta(t)}{dt}V(t)+\frac{1}{\theta}\exp[\beta(t)]W(t)$$

$$\Phi_1(t,x(t),u,F)\equiv\frac{1}{\theta}\exp[\beta(t)]\left[\sum_{i=1}^{n}(\overline{a}_i-a_i(t))x_i(t)-\sum_{i=1}^{n-1}\psi_i^*x_i(t)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\left(d_i(t)+\psi_i^*\right)\frac{d^rF(t)}{dt^r}+\frac{d^mF(t)}{dt^m}\right]\sum_{i=1}^{n}b_{in}x_i(t)$$

$$V(t)=V(t,x(t)),\qquad W(t)=-\sum_{i=1}^{n}x_i^2(t)$$

Пусть в области $\overline{K}=\{t,\ V:t\in T,\ |V|<+\infty\}$ задана непрерывная ;ункция $Z(t,V)$ с условием при $V=0$: $Z(t,0)=0$ и пусть справедливо ;равенство $z_0\ge V_0$, $V_0=\max\limits_{x_0\in\Omega_0}\{\exp[\beta(t_0)]V_1(x_0)\}$, $z_0=\text{const}>0$,

$;_1(x_0)=\frac{1}{\theta}\overline{V}_1(x_1^0,\ldots,x_n^0)$, $\overline{V}_1(x_1^0,\ldots,x_n^0)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}x_i^0x_j^0$. Предполагаем ;уществование задачи Коши сравнения [5,6]

$$\frac{dz}{dt}=Z(t,z+\sigma(t)),\quad t\in T,\quad \sigma(t)=M\int_{t_0}^{t}\omega(\tau)d\tau$$

$$(M=\text{const}>0\text{ – заданная величина})\qquad(15)$$

$$z(t_0)=z_0\ge V_0,\quad 0<z_0\le b,\quad b=\text{const}>0\qquad(16)$$

;е z_0, b –заданные константы, $\omega(t)$ –заданная интегрируемая функция по t области T.

Теорема. Пусть справедливы условия: 1. Внутренние переменные ;араметры нестационарного процесса (1) – (8), (11) существуют в заданных ;иапазонах областей (3), (4). 2. Для динамической нестационарной системы с ;еременной структурой (1)– (8), (11) при вынужденных движениях, ;арактеризуемых функциями вида (2) из класса F_m (8), выполнены ;остаточные условия существования решения. 3. Характеристическое ;равнение порождающей системы (12) имеет n корней с отрицательными ;ействительными частями. 4. Существует положительно-определенная функция V (13), в которой собственные значения $\mu_i (i=\overline{1,n})$ соответствующей квадратичной формы W_1 удовлетворяют условию (14). 5. При разрывных логических законах (6), (7) изменения параметров ψ_i^x, ψ_i^1 процесса на решениях исходной системы (1) – (8), (11) при $\forall x_0 \in \Omega_0$ справедливы условия: 1) заданная функция $Z(t,V)$ удовлетворяет неравенству $\Phi(t,x(t)) \le Z(t,V(t))$, $\forall t \in T$; 2) в $T \subset I$ существует неотрицательная ограниченная функция $\omega(t)$, удовлетворяющая оценке $\left|\Phi_1(t,x(t),F)\right| \le M\omega(t)$, $\forall t \in T$. 6. Существует ограниченное верхнее решение $\bar{z}(t)=\bar{z}(t,t_0,z_0)$ задачи Коши сравнения (15), (16), которое при заданных функции $\sigma(t)$ (15), значении V_0 (16) и условиях $0 < z_0 \le b$, $b = \text{const} > 0$, удовлетворяет в области T свойству $|\bar{z}(t)+\sigma(t)|\mu_1^{-1} \le \eta(t)$, $t \in T$. 7. Множества $C_{z_0} = \{x : V(t,x) \le z_0\}$, Ω_0 удовлетворяют условию $\Omega_0 \subset C_{z_0}$ при $t = t_0$.

Тогда справедливы утверждения: 1. При всех значениях внутренних параметров из диапазонов областей (3), (4), разрывных законах изменения коэффициентов ψ_i^r, ψ_i^1 (6), (7), возмущающих воздействиях из класса F_m и при $\forall x_0 \in \Omega_0$ (16) исходный вынужденный нестационарный динамический процесс (1) – (8), (11) является технически устойчивым по мере ρ на заданном ограниченном промежутке времени $T \subset I$. 2. Пусть нестационарная задача Коши (1) – (8), (11) обладает заданными выше свойствами ее правых частей в любом промежутке времени $T \subseteq I$. Тогда процесс (1) – (8), (11) технически устойчив по мере ρ на бесконечном интервале I, если условия 1–7 теоремы выполняются на любом промежутке $T \subseteq I$. 3. Если дополнительно справедливо условие $\bar{z}(t)+\sigma(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то процесс (1) – (8), (11) асимптотически технически устойчив по мере ρ.

Доказательство. Для полной производной dV/dt функции (13) в силу (1) на решениях исходного процесса получаем

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{d\beta(t)}{dt}V(t) + \exp[\beta(t)]\frac{1}{\upsilon}W(t) + \exp[\beta(t)]\frac{1}{\upsilon}\sum_{i=1}^{n} b_{in}x_i(t) \times$$
$$\times\left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{a}_i - a_i(t))x_i(t) - \sum_{i=2}^{n}\psi_i^r x_i(t) + \sum_{r=0}^{m-1}\left(d_r(t)+\psi_r^1\right)\frac{d^r F(t)}{dt^r} + \frac{d^m F(t)}{dt^m}\right] \tag{17}$$

Из условий теоремы для (17) вдоль решений процесса (1) – (8), (11) имеем $dV(t)/dt \le Z(t,V(t)) + M\omega(t)$, $t \in T$. Используя функцию $k(t)=V(t)-\sigma(t)$, определяем неравенство

$$dk(t)/dt \le Z(t,k(t)+\sigma(t)) \tag{18}$$

Из (18) следует система сравнения (15), (16), которая в области T имеет [5,6] ограниченное верхнее решение $\bar{z}(t)$. Находим $k(t) \le \bar{z}(t)$, $t \in T$. Отсюда, учитывая (18), получаем

$$V(t) \le \bar{z}(t) + \sigma(t), \quad t \in T \tag{19}$$

Так как имеем свойство: $z(t) + \sigma(t) \le \mu_1^{-1}\left[\bar{z}(t) + \sigma(t)\right]$ при $\forall t \in T \subset I$, то из (19) при (16) находим последовательность неравенств [3,5,6]

$$V(t) \le P(t) \le \eta(t), \quad t \in T, \quad P(t) = \bar{z}(t) + \sigma(t) \tag{20}$$

$$V_0 \le b, \quad t_0 \in T \tag{21}$$

вдоль решений системы (1)–(8), (11). Из (19)–(21) получаем свойство включения множеств

$$C_{p(t)} \subset \Omega(t), \quad C_{p(t)} = \left\{x : V(t,x) \le P(t), \ \forall t \in T, \ P(t) \equiv \bar{z}(t) + \sigma(t)\right\} \tag{22}$$

Следовательно, при условиях 7 теоремы в соответствии с (22) свойство технической устойчивости для решений процесса (1) - (8), (11) имеет место по отношению к мере $\rho[x]$ и функции Ляпунова $V(t,x)$ (13), т.е. при условиях теоремы и справедливости включения (22) исходный процесс (1) - (8), (11 технически устойчив по заданных мере $\rho[x]$ и функции Ляпунова $V(t,x)$ (13). Для V (13) при любых ограниченных значениях x и $\forall t \in T$ справедливы оценки $\mu_1\rho(x) \le V(t,x) \le \mu_2\rho(x) \le \rho(x)$ при произвольном радиусе меры $\rho(x)$ и, следовательно, при переменном радиусе, удовлетворяющем условию: $\rho(x) \le \eta(t)$. Отсюда, используя вдоль решений процесса (1) – (8), (11) свойства (19) и неравенство $\mu_1\rho[x(t)] \le V(t, x(t))$, находим на решениях $\rho[x(t)] \le \eta(t)$, $\forall t \in T$. Отсюда и из условий 7 теоремы окончательно получаем утверждение 1 теоремы при всех $x_0 \in \Omega_0$ (16) и при всех значениях параметров из диапазонов (3), (4).

Пусть при $t \to +\infty$ справедливо мажорирование $P(t) \le \eta(t)$. Тогда на любом интервале времени $T \subseteq I$ и $\forall x_0 \in \Omega_0$ получаем утверждение 2 и при условии $z(t) + \sigma(t) \to 0$, $t \to +\infty$ утверждение 3 теоремы. Исходная система (1) – (8), (11) будет неустойчива в T или в I по мере ρ, когда $P(t) \to +\infty$ при $t \in T$ или $t \in I$. При $\chi \ge 1$ теорема будет справедлива при замене в условиях величины $\chi\mu_1$ на μ_1.

Предположим, в области I при каждом значении параметров в диапазонах (4), (5) справедливы неравенства:

$$\frac{d\beta(t)}{dt} V_1(x) + W(x) \le 0$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (\bar{a}_i - a_i(t)) x_i - \sum_{i=1}^{n} \psi_i^t x_i + \sum_{i=0}^{m-1} \left(d_i(t) + \psi_i^x\right) \frac{d^i F(t)}{dt^i} + \frac{d^m F(t)}{dt^m}\right] \sum_{i=1}^{n} b_{in} x_i \le 0$$

$t \in I$. Тогда процесс (1) – (8), (11) устойчив по Ляпунову по мере ρ при параметрах из областей (3), (4).

Используя результаты из [2], убедимся, что в заданной нестационарной системе с переменной структурой (1) – (8), (11) возможен скользящий режим в случае $F = 0$ и $F \neq 0$ при дополнительных условиях вида (5.123)-(5.130) из [2], налагаемых на величину скалярного произведения вектора фазовой скорости на нормаль к гиперплоскости S ($\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$):

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} N_i x_i + \sum_{i=0}^{m-1} \left(d_i(t) + \psi_i^y\right) \frac{d^i F(t)}{dt^i} + \frac{d^m F(t)}{dt^m}$$

$$N_i = c_{i-1} - a_i - \psi_i^x - c_{n-1} c_i + a_i c_i, \quad c_0 = 0.$$

После попадания фазовой точки x процесса (1) – (8), (11) в область $\omega_{F(t)} \subset \Omega(t)$ (22) в соответствии с (20), (21) выходная координата $\varphi(t)$ системы будет отслеживать [1,2,5] задающее воздействие $f_0(t)$ с требуемой точностью по мере ρ на заданном интервале времени T или в I. Теорема доказана.

3. Техническая устойчивость вынужденных движений в нестационарной системе с переменной структурой второго порядка. Рассматривается нестационарная динамическая система с переменной структурой второго порядка [2]

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad t \in T$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - b_1(t)\psi^x x_1 + \left[d_1(t) + b_1(t)\psi^y\right]F(t) + d_2(t)\frac{dF(t)}{dt} \qquad (23)$$

$$u = \psi^x x_1 - \psi^y y \qquad (24)$$

$$\psi^x = 2^{-1}\left\{\alpha^x\left[1 + \mathrm{sign}(x_1 s)\right] + \beta^x\left[1 - \mathrm{sign}(x_1 s)\right]\right\}, \ \alpha^x > 0, \ \beta^x < 0, \ s = x_2 + cx_1$$

$$\alpha^x, \beta^x, c = \mathrm{const}; \ c > 0 \qquad (25)$$

$$\psi^y = 2^{-1}\left\{\alpha^y\left[1 + \mathrm{sign}(sH)\right] + \beta^y\left[1 - \mathrm{sign}(sH)\right]\right\}, \quad H = y + a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2$$

$$\alpha^y, \beta^y = \mathrm{const} \qquad (26)$$

$$\alpha^y < -Aa_{21}(t) - a_{22}(t), \quad \beta^y > Aa_{21}(t) - a_{22}(t) \qquad (27)$$

$$a_1(t) = \frac{\dot{a}_{11}(t)a_{21}(t) + a_{11}(t)a_{22}(t) + \psi^y a_{11}(t)}{a_{12}(t)a_{21}(t)}$$

$$a_2(t) = \frac{a_{12}(t)\psi^y + a_{12}(t)a_{22}(t) + a_{11}(t)a_{21}(t) + \dot{a}_{12}(t)a_{21}(t)}{a_{12}(t)a_{21}(t)}; \ \dot{a}_{11}(t) = \frac{da_{11}(t)}{dt}$$

$$\dot{a}_{12}(t) = \frac{da_{12}(t)}{dt}; \ b_1(t) = \frac{1}{a_{21}(t)a_{12}(t)}; \ \mathrm{d}_1(t) = \frac{a_{22}(t)}{a_{21}(t)a_{12}(t)}, \ \mathrm{d}_2(t) = \frac{1}{a_{21}(t)}$$

Здесь имеем: $F = a_{11}(t)\dot{g}(t) + a_{12}(t)\dot{g}(t) + f(t)$, $\dot{g} = dg(t)/dt$, $d\varphi(t)/dt = y - f(t)$, где $f(t)$ – внешнее возмущающее воздействие. В случае возможности измерения $f_0(t)$ будем полагать, что закон для ψ^y в (23) имеет вид [2]

$$\psi^{\nu} = 2^{-1}\{\alpha^{\nu}[1+\mathrm{sign}(Fs)] + \beta^{\nu}[1-\mathrm{sign}(Fs)]\} \tag{28}$$

Постоянный коэффициент A в (27) характеризует класс входных возмущающих и задающих воздействий, которые должны удовлетворять условию $|dF(t)/dt|/|F(t)| \le A$, $A = \mathrm{const} > 0$. Пусть $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \dot{a}_{11}, \dot{a}_{12}$ удовлетворяют условиям:

$$a_{11\min} \le a_{11}(t) \le a_{11\max},\ a'_{11\min} \le \frac{da_{11}(t)}{dt} \le a'_{11\max},\ 0 < a_{12\min} \le a_{12}(t) \le a_{12\max} \tag{29}$$

$$a'_{12\min} \le \frac{da_{12}(t)}{dt} \le a'_{12\max},\ 0 < a_{21\min} \le a_{21}(t) \le a_{21\max},\ a_{22\min} \le a_{22}(t) \le a_{22\max}$$

где

$a_{11\min}, a_{11\max}, a_{12\min}, a_{12\max}, a_{21\min}, a_{21\max}, a_{22\min}, a_{22\max}, a'_{11\min}, a'_{11\max}, a'_{12\min}, a'_{12\max}$ –известные константы. Процесс (23) – (29) исследуется при заданных начальных условиях

$$x_1(t) = x_1^0,\ x_2(t) = x_2^0,\ \forall x_0 = (x_1^0, x_2^0) \in \Omega_0 \tag{30}$$

Имеем частный случай логического закона для ψ^{ν} вида

$$\psi^{\nu} = 2^{-1}\{\alpha^{\nu}[1+\mathrm{sign}(ys)] + \beta^{\nu}[1-\mathrm{sign}(ys)]\} \tag{31}$$

Для системы (23) – (30) используем функцию Ляпунова

$$V(t,x) = \exp[\beta_1(t)]\left[\frac{b_{11}}{2\theta_1}x_1^2 + \frac{b_{12}}{\theta_1}x_1x_2 + \frac{b_{22}}{2\theta_1}x_2^2\right],\ \theta_1 = \varepsilon_2\Lambda,\ \Lambda = \max_{t\in T}\{\exp[\beta_1(t)]\}$$

$$b_{11} > 0,\ b_{11}b_{12} - b_{12}^2 > 0,\ D_1 = (b_{11} - b_{22})^2 + 4b_{12}^2 \tag{32}$$

$$\varepsilon_1 = \left(b_{11} + b_{12} - \sqrt{D_1}\right)/4,\ \varepsilon_2 = \left(b_{11} + b_{12} + \sqrt{D_1}\right)/4,\ \varepsilon_1 > 1,\ \varepsilon_2 > 1,\ \varepsilon_2 > \varepsilon_1$$

$$0 < \mu_2 \exp[\beta_1(t)] \le 1,\ \forall t \in T,\ \mu_2 = \varepsilon_2/\theta$$

Для $\forall x_0 \in \Omega_0$ имеем: $V(t,x) \le r_*^2 = \gamma$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$, $t \ge t_0$. В силу системы (23) определяем

$$\frac{dV(t,x)}{dt} = \frac{d\beta(t)}{dt}V(t,x) + \exp[\beta(t)]\frac{1}{\theta_1}\left[-x_1^2 - x_2^2 - Q_1(t)x_1x_2 - (Q_1(t)x_1^2 + \right.$$

$$\left. + Q_2(t)x_2^2 + Q_4(t)x_1x_2) + Q_5(t,x)\right],\ Q_1(t) = b_{12}a_1(t) + b_{12}b_1(t)\psi^{\nu} - 1$$

$$Q_2(t) = b_{22}a_2(t) - b_{11} - 1,\ Q_3(t) = b_{12}a_2(t) + b_{22}a_1(t) - b_{11}$$

$$Q_4(t) = 1 + (b_{22} - b_{12})b_1(t)\psi^{\nu} - b_{11}$$

$$Q_5(t,x) = (b_{12}x_1 + b_{22}x_2)\left[(d_1(t) + b_1(t)\psi^{\nu})F(t) + d_2(t)(dF(t)/dt)\right],$$

$$\Phi(t,x) \equiv \frac{d\beta(t)}{dt}V(t,x) - \exp[\beta(t)]\frac{1}{\theta_1}\left(x_1^2 + x_2^2 + Q_1(t)x_1x_2\right)$$

$\Phi_1(t,x,F) \equiv Q_5(t,x) - \left[Q_1(t)x_1^2 + Q_2(t)x_2^2 + (Q_3(t) + Q_4(t))x_1x_2\right]$. Пусть в T задана ограниченная функция $\eta(t)$: $\eta(t) = e^{-\left(t^2 - t_0^2\right)}\left[b + Me^{-t_0^2}\int_{t_0}^{t} e^{\tau^2}\,\overline{\omega_1}(\tau)d\tau\right]$ и выполняются условия

$\Phi(t, x(t)) \le -tV(t, x(t))$, $t \in T$, $|\Phi_1(t, x(t), F)| \le M\widetilde{\omega}_1(t)$, $t \in T$,

$M = \text{const} > 0$, $\mu_1^{-1} M \le \overline{M}$; $z(t_0) = z_0 \ge V_0 = \max\limits_{x_0 \in \Omega_0} V(t_0, x_0)$, $0 < z_0 \mu_1^{-1} \le b$,

$t_0 \in T$.

Вдоль решений исходной системы (23) – (30) имеем последовательность неравенств

$$V(t) \le P(t) \le \eta(t), \; P(t) = \bar{z}(t) + \sigma(t), \; t \in T \subset I$$

$$\bar{z}(t) = z_0 e^{-\left(t^2 - t_0^2\right)} + Me^{-\left(t^2 - t_0^2\right)} \int\limits_{t_0}^{t} e^{\left(\tau^2 - t_0^2\right)} \widetilde{\omega}_1(\tau) d\tau - \sigma(t)$$

а также оценку относительно меры: $\rho[x(t)] \le \eta(t), t \in T \subset I$. Следовательно, исходный нестационарный процесс (23) – (30) при $\forall x_0 \in \Omega_0$ технически устойчив в области $T \subset I$ по мере $\bar{\rho}$. При $t \to +\infty$ имеем $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = 0$, если интеграл $\int\limits_{t_0}^{t} e^{\tau^2} \widetilde{\omega}_1(\tau) d\tau$ – ограниченная величина в области I, т.е. в этом случае процесс (23) – (30) технически устойчив по мере ρ в области I и, более того, асимптотически технически устойчив по мере ρ. При условиях $0 < Q_1(t) < 2$, $Q_1 Q_2 - Q_3 Q_4 > 0$, $\dfrac{d\beta(t)}{dt} \overline{V}_1(x) + Q_5(t, x) \le 0$ система (23) – (30) устойчива по Ляпунову относительно меры ρ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск: Наука. 1987.– 226 с.
2. Емельянов С.В., Уткин В.И., Таран В.А. и др. Теория систем с переменной структурой. М: Наука, 1970. 592 с.
3. Абгарян К.А. Устойчивость движения на конечном интервале // Общая механика. М.: ВИНИТИ. 1976.– Т. 3.– С.43 – 127. (Итоги науки и техники).
4. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.
   М.: Наука, 1985.– 224 с.
5. Matviychuk K.S. On technical stability of forsed automatic control systems with variable structure. – Int. Appl. Mech., 2001, v. 37, N 3, p. 544 – 557.
6. Matviychuk K.S. Technical stability of disconnected control systems with a continual set of initial perturbations. – Int. Appl. Mech., 2000, v. 36, N 11, p. 1142 - 1155.

Институт механики им. С.П. Тимошенко
НАН Украины, г. Киев, Украина

Поступила в редакцию
17.01.2002

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №4, 2002 Механика

УДК 539.3

ОЦЕНКА УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ВАЛО-ШПОНОЧНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Гаспарян С.А., Шекян Л.А.

Ս.Հ. Գասպարյան, Լ.Ա. Շեկյան
Երիզավոր միացությամբ լիսեռների հոգնածային երկարակեցության գնահատումը

Առաջարկվում է երիզավոր միացությամբ լիսեռների լարումների կուտակման գոտում դրանց բաշխման նկարագրման վերլուծական մեթոդ լարումների հարաբերական գրադիենտը որոշելու համար: Բերված է հոգնածային քայքայման նմանության վիճակագրական տեսության կիրառման նոր մոտեցում առաջարկված հարակցային վիճակագրական նմանակի հաշվառմամբ, գործող մեքենամասերի հոգնածային երկարակեցությունը գնահատելու համար

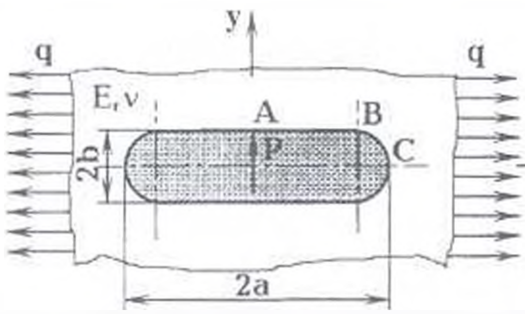
S.H. Gasparyan, L.A. Shekyan
Evaluation of keyed joint shafts' fatigue life

Предложен аналитический метод описания распределения напряжения в зоне их концентрации вало-шпоночных соединений для оценки относительного градиента напряжений. Приведен новый подход приложения теории статистического подобия усталостного разрушения с учетом предложенной композиционной статистической модели для оценки усталостной долговечности натурных деталей машин

Применение возможностей вероятностных методов оценки надежности и долговечности машин и их деталей осуществлялись в ряде работ [1, 2 и др.] на основе концепции "наиболее слабого звена", среди которых привлекает внимание статистическая теория подобия усталостного разрушения [3], послужившая основой создания системы справочной информации определения расчетных характеристик сопротивления усталости деталей машин. Статистическая теория подобия, построенная на постулате вероятности появления усталостной трещины в зоне концентрации, характеризует влияние конструктивных параметров образцов и натурных деталей различных размеров и очертаний, единым критерием. Для оценки усталостной прочности шпоночных соединений методом статистической теории подобия необходимо располагать значением критерия подобия –следовательно, соответствующим распределением напряжений в зоне концентрации напряжений. С этой целью представляется необходимым проведение теоретического исследования напряженного состояния шпоночной канавки для уточнения распределения напряжений вдоль периметра концентратора с учетом влияния соотношения вращающего и изгибающего моментов и изменения длины канавки для установления ее оптимального значения. Помимо этого, построение критерия подобия для предсказания усталостной прочности натурных валов шпоночных соединений возможно реализовать с учетом влияния вышеупомянутых параметров.

Рассматривается шпоночная канавка с концевым участком полукругового очертания, как часто применяемая из-за фиксированного положения шпонки в продольном направлении. Концентрацию напряжений такой канавки можно представить как совместное действие двух концентраторов напряжений –полукрута и галтели (на дне канавки). Ввиду того, что при проектировании валов разных диаметров используется определенное стандартное соотношение радиуса скругления галтели к диаметру вала, можно предположить,что влияние этого фактора не отразится на общем характере распределения напряжений соединения. Помимо этого, проблема концентрации напряжений галтелей в разной постановке вопроса решена теоретически и экспериментально, и общее взаимовлияние совместного действия двух концентраторов напряжений возможно определить путем соответствующего суммирования имеющегося и полученного решений.

Изложенное выше позволяет моделировать шпоночное соединение в виде упругой пластины, ослабленной эллиптическим отверстием и подвергнутой равномерному растяжению интенсивностью q вдоль большой оси эллипса –имитирующему действие изгибающего момента, и одностороннему давлению на боковую поверхность отверстия силой P посредством вставленной в отверстие жесткой шпонки, передающей нагрузку –вращающий момент в поперечном направлении (фиг.1).



Фиг. 1. Схема нагружения шпоночного соединения

Решение данной плоской задачи теории упругости, построенное методом комплексных потенциалов [4,5], представлено следующими выражениями напряжений:

$$\sigma_x = 2\,\mathrm{Re}\,\phi - \mathrm{Re}\,F,\quad \sigma_y = 2\,\mathrm{Re}\,\phi - \mathrm{Re}\,F,\quad \tau_{xy} = \mathrm{Im}\,F \tag{1}$$

$$\sigma_\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \ldots + 6\cdot(\tau_{xy}^2 + \ldots)} \tag{2}$$

где $x + iy = R(\xi + m/\xi)$

$$\phi(\xi) = \frac{\varphi'}{\omega'} = -\frac{Pi}{\pi(\chi+1)}\cdot\frac{\xi}{\xi^2 - m} + \frac{q}{4\chi}\cdot\frac{\chi\xi^2 - m + 2}{\xi^2 - m} \tag{3}$$

$$F = \frac{\xi\left(|\xi|^4 + m\xi^2\right)}{|\xi^2|\left(\xi^2 - m\right)}\phi_1 + \frac{\psi_1\xi^2}{R\left(\xi^2 - m\right)} \tag{4}$$

$$\phi_1 = \phi'(\xi) = \frac{Pi}{\pi(\chi+1)R}\frac{\xi^2 + m}{\xi^2 - m} + \frac{q}{2\chi}\frac{(m - \chi m - 2)\xi}{\xi^2 - m} \tag{5}$$

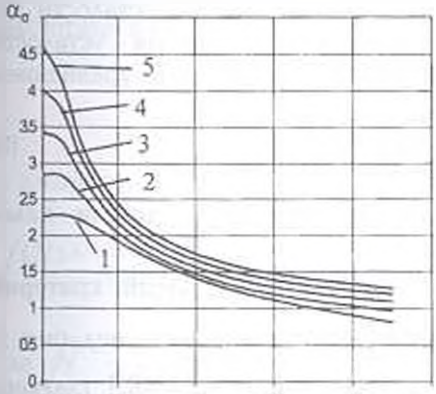
$$\psi_1 = -\frac{\chi Pi}{\pi(\chi+1)}\cdot\frac{1}{\xi} - \frac{2Pi}{\pi(\chi+1)}\cdot\frac{(1+m^2)\xi}{(\xi^2-m)^2} - \frac{q\cdot R}{4}\left[2+\frac{\chi}{\xi^2} - \frac{(1+m^2)\cdot(\xi^2+m)}{(\xi^2-m)^2}\cdot\xi\right] -$$

$$-\frac{qR(m-2)}{4\chi}\cdot\frac{m\xi^4+(m^2+3)\cdot\xi^2-m}{(\xi^2-m)^2\cdot\xi^2} \qquad (6)$$

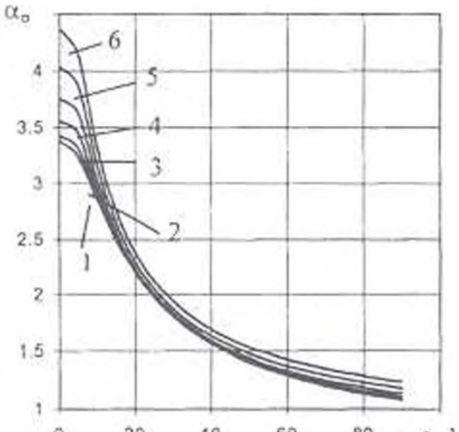
$$m=\frac{a-b}{a+b},\ R=\frac{a+b}{2},\quad \chi=3-4\nu \qquad (7)$$

a, b –длины большой и малой полуосей эллипса, ν –коэффициент Пуассона.

Получены численные значения приведенных зависимостей коэффициентов концентрации напряжений α_0 на наиболее нагруженной части отверстия –квадранта концевого участка BC на стороне приложения P, $x=(a-b)+b\cos t$, $y=b\sin t$ $(0\le t\le 90^\circ)$ и примыкающего прямолинейного участка AB, $y=b$, $(0\le x\le (a-b)$ при $\nu=0.3$ и варьировании относительных значений $P/qR=0,1,2,3,4,5$ и $a/b=1,2,3,4,5$ для оценки влияния этих параметров на характер распределения напряжений. На фиг. 2 приведены семейства кривых α_0 при варьировании этих параметров (номера кривых соответствуют данной последовательности приведенных параметров). Характер распределения кривых (фиг.2а) вдоль рассматриваемого периметра идентичен. Влияние отношения a/b (снизу вверх) значительно только в области высоких значений концентрации напряжений.



а)



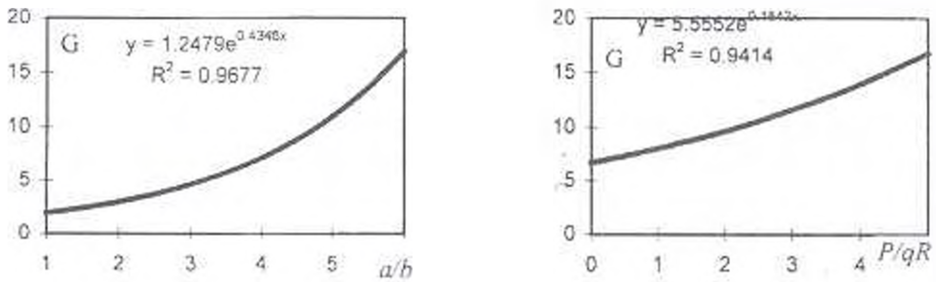
б)

Фиг.2. Семейства кривых распределения коэффициентов концентрации напряжений при изменении: а) a/b, б) P/qR

Таким же образом на фиг. 2б сгруппированы кривые распределения при варьировании значения поперечной силы P. Изменение величины P/qR не отражается на характере распределения напряжений и несущественно влияет на его величину во всем интервале концентрации напряжений –полукругового и прямолинейного участков. Изменение

P/qR влияет только в области высоких значений концентраций.

Численные значения критерия подобия с учетом влияния этих параметров рассчитаны на основе $G = \left.\frac{d\sigma_x}{dx}\right|_{x=a-b,\; y=b}$, $\overline{G} = \frac{G}{\sigma_{max}}$, где G – градиент напряжений.



а) б)

Фиг. 3 Зависимость градиента напряжений от изменения значений параметров: а) a/b ; б) P/qR

На фиг. 3 представлены кривые влияния параметров a/b и P/qR на величину градиента напряжений, аппроксимированные указанными на графиках уравнениями.

Таким образом, на основе вышеизложенного возможно расчетное определение эффективных коэффициентов концентрации напряжений натурных деталей типа шпоночного соединения методом статистической теории подобия, установленным стандартом сопротивления усталости [6]. Средние значения и коэффициенты вариации пределов усталости натурных вало-шпоночных соединений можно определить уравнением подобия, представленным в форме

$$\lg(\xi - 1) = -\nu_\sigma \lg\Theta + u_p S \tag{8}$$

где $\xi = \frac{\sigma_{-1d}\alpha_n}{0.5\overline{\sigma}_{-1}}$, σ_{-1d} –предел усталости натурной детали –вало-шпоночного соединения, $\Theta = (L/\overline{G})/(L/\overline{G}_0)$ –относительный критерий подобия усталостного разрушения; мм², $\overline{G}$, $\overline{\sigma}_{-1}$ –критерий подобия и медианное значение предела выносливости $L/\overline{G}_0 = \pi d_0^2/2 = 88.3$ гладкого лабораторного образца ($d_0 = 7{,}5$ мм), соответственно $L = \pi d/2$ – периметр рабочего сечения на месте концентрации напряжений (концевой участок шпоночной канавки), $\nu_\sigma = 0.2 - 0.0001\sigma_b$ –коэффициент чувствительности металла к концентрации напряжений и масштабному фактору, u_p –квантиль нормального распределения, соответствующий вероятности распределения, P, %, $S = \frac{0.62}{(1/\nu_\sigma) + 0.36}$ –среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Для определения параметров кривой усталости при расчете на ограниченную выносливость, при отсутствии данных принимают в среднем $N_G = 2\cdot10^6$ и $m = c/K$, где $c = 5 + \sigma_B/80$ (σ_B в МПа), $K = \dfrac{\overline{\sigma}_{-1}}{\sigma_{-1d}}$, с учетом того, что величина m с ростом коэффициента снижения предела выносливости K уменьшается.

Результаты усталостных испытаний выражаются числами циклов при заданном уровне напряжений, являющимися случайной величиной. На практике часто требуется определение долговечности или оценка надежности деталей машин при заданной нагрузке. Статистическая теория подобия усталостного разрушения, построенная на постулате вероятности появления усталостной трещины при условии непревышения первого главного напряжения в зоне концентрации заданного максимального значения напряжений, т.е. в качестве случайной величины принята квазистатическая прочность, выраженная в напряжениях. Применение теории подобия ограничено рассмотрением длительного предела выносливости на базе числа циклов, соответствующего точке перелома кривой усталости. Числа циклов N и пределы выносливости, как сопряженные совокупности множеств случайных величин, описываемые определенной функциональной зависимостью (кривой Велера), эквивалентны – характеризуются одной вероятностью.

Поэтому, выбрав в качестве функции преобразования вероятностей закон распределения случайной величины – числа циклов, полученный композицией функций распределения усталостной долговечности – логнормального и Вейбулла-Гнеденко, отражающих правдоподобные физико-статистические модели разрушения, предлагается оценить долговечность натурной детали при заданных вероятности и уровне расчетной нагрузки законом распределения вида

$$P(N) = 1 - \exp\left\{-n\left[\left(\frac{\ln N - \ln N_0}{\ln N_u - \ln N_0}\right)^{\beta} - 1\right]\right\} \qquad (9)$$

с плотностью

$$f(N) = \frac{n\beta}{N(\ln N_u - \ln N_0)}\left(\frac{\ln N - \ln N_0}{\ln N_u - \ln N_0}\right)^{\beta-1}\cdot\exp\left\{-n\left[\left(\frac{\ln N - \ln N_0}{\ln N_u - \ln N_0}\right)^{\beta} - 1\right]\right\} \qquad (10)$$

где N – общее число циклов до разрушения при заданном уровне напряжений, N_0, N_u –минимальное и характеристическое числа циклов –параметры позиции функции распределения наименьших значений, оцениваемые соответствующими зависимостями или использованием логарифмической экстремальной вероятностной бумаги [7]. Предварительные расчеты по опробации теории при сравнении с результатами ранее проведенных экспериментов [8] обнадеживают ее применение.

Таким образом, определение вероятностных значений долговечности натурных валов реализуется с использованием полученного критерия подобия для шпоночных соединений и закона распределения экстремальных значений чисел циклов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. М.: Госстройиздат, 1965. 279 с.
2. Вейбулл В. Усталостные испытания и анализ результатов. М.: Машиностроение, 1964. 275 с.
3. Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. М.: Машиностроение,1977. 232 с.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
5. Мхитарян С.М., Шекян Л.А. О вдавливании вязкоупругого тела в тонкую полосу, лежащую на деформируемом основании.// Изв. АН АрмССР. Механика. 1980. Т.33. №5. С. 3-16.
6. ГОСТ 25. 504-82, Расчеты и испытания на прочность. Методы расчета характеристик сопротивления усталости. / Госкомитет СССР по стандартам. М.: Изд-во стандартов. 1962. 81 с.
7. Gumbel E.G. Statistics of extremes, Columbia University Press, New York. 1962. 450 p.
8. Гаспарян С.А., Стакян М.Г. О выносливости стали при совместном циклическом изгибе и статическом кручении. // Изв. АН Арм. ССР. Сер. техн. н. 1969. Т. XXII. №5.С. 24-29.

Государственный инженерный
университет Армении

Поступила в редакцию
9.07.2002