

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ / PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՖԻՏՈՒթՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՅԻՏԵԼԵԿՆԻԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

высокими правительственными наградами — ордена Отечественной войны I и II степени, орденом Красной Звезды и медалями. После войны Н.Х.Арутюнян вернулся в Армению и возобновил свою плодотворную деятельность. В 1949 г. в Москве в Институте механики АН СССР он блестяще защищает диссертацию на соискание доктора технических наук, а в 1950 г. ему было присвоено звание профессора. В том же году Н.Х.Арутюнян избирается действительным членом АН Армянской ССР и членом Президиума Академии наук. Он — один из организаторов сектора математики и механики в АН Армении, на базе которого в 1955 г. был образован Институт математики и механики. В этом институте в 1955 г. он основал и заведовал лабораторией ползучести и прочности, в 1952-1955 гг. был академиком-секретарем отделения технических наук АН Арм.ССР, а затем в 1959-1961 гг. был вице-президентом АН Арм.ССР.

Наряду с научной и научно-организаторской деятельностью Н.Х.Арутюнян ведет и активную научно-педагогическую деятельность. 1945-1951 гг. он преподает в Ереванском политехническом институте, а в 1951 г. переходит в Ереванский государственный университет. Сначала он занимает должность профессора кафедры теоретической механики, а с 1958 г. заведует основанной им же кафедрой теории упругости и пластичности (ныне кафедра механики сплошной среды), будучи в течение многих лет её бессменным руководителем. В 1961-1963 гг. Н.Х.Арутюнян работал ректором Ереванского госуниверситета. Благодаря его усилиям в университете были созданы новые кафедры и лаборатории, а также объединенный вычислительный центр АН Арм.ССР и университета.

С 1956 г. Н.Х.Арутюнян член Президиума Национального Комитета СССР по теоретической и прикладной механике. Н.Х.Арутюнян входил также в редколлегии многих научных журналов республиканской и союзной Академий, был членом и председателем ряда ученых и специализированных Советов. С 1953 г. он являлся ответственным редактором журнала "Известия АН Армянской ССР, сер. физ.-мат., естественных и технических наук", а затем со дня основания, более двух десятилетий был ответственным редактором журнала "Известия АН Армянской ССР, Механика". Долгие годы Н.Х.Арутюнян был членом редколлегии журнала "Известия АН СССР (РАН). Механика твердого тела".

Свою научную, научно-педагогическую и научно-организаторскую работу Н.Х.Арутюнян сочетал с большой общественно-политической и государственной деятельностью. В 1963-1975 гг. он находился на посту Председателя Президиума Верховного Совета Армянской ССР и заместителя Председателя Президиума Верховного Совета СССР.

В 1975 г. он основал и по 1977 г. заведовал отделом механики сплошной среды в Институте механики АН Армении. В 1977 г. он переехал в Москву и работал в Институте проблем механики АН СССР, где возглавлял сектор механики вязкоупругих тел. В московские годы жизни Н.Х.Арутюнян никогда не прерывал научные и человеческие связи с Институтом механики Армении.

Н.Х. Арутюнян скончался 18 января 1993 г. в Москве. Он оставил богатое научное наследство. Научно-исследовательская деятельность Н.Х.Арутюняна развивалась, в основном, в двух направлениях: математической теории упругости и теории ползучести. Первые его исследования посвящены задачам кручения и изгиба стержней полигонального сечения. Им предложен эффективный метод точного

решения этих задач путем введения вспомогательных функций и последующего сведения решения исходной задачи к решению вполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Эти результаты стали первоисточником дальнейших интенсивных исследований. Многочисленные первоклассные результаты в этой области подытожены в капитальном труде Н.Х.Арутюняна и Б.Л.Абрамяна "Кручение упругих тел" (М.: Физматгиз, 1963).

Н.Х.Арутюняном оригинальные результаты получены также в области контактных и смешанных задач математической теории упругости, в частности, по смешанным задачам о контактном взаимодействии тонкостенных элементов в виде стрингеров и включений с массивными деформируемыми телами.

Наиболее крупный вклад Н.Х.Арутюнян внес в развитие одной из важных областей механики деформируемого твердого тела — теории ползучести. В пятидесятых годах он построил изящную математическую теорию ползучести наследственно-стареющих тел, ныне широко известную как теория ползучести Маслова — Арутюняна. Ряд основополагающих результатов в этом направлении он обобщил в своей известной монографии "Некоторые вопросы теории ползучести" (М.-Л.: Гостехиздат, 1952г.), которая впоследствии была переведена и издана во Франции, Англии, Китае и нашла широкое признание среди механиков зарубежных стран. В последние два десятилетия своей жизни Н.Х.Арутюнян существенно развил и обобщил эту теорию для неоднородно-наследственно-стареющих тел. Он одновременно развил нелинейную теорию ползучести однородно и неоднородно стареющих тел. Им впервые поставлены и в рамках обобщенного принципа суперпозиции скоростей в замкнутой форме решены контактные задачи нелинейной теории ползучести при степенной зависимости между напряжениями и скоростями деформаций.

Вся жизнь Н.Х.Арутюняна — пример служения науке. Он выделялся строгой научной последовательностью и большой работоспособностью. В республиканских, союзных и зарубежных изданиях он опубликовал восемь монографий и около 200 научных работ, известных в научном мире и общепринятых им.

Н.Х.Арутюнян вел большую работу по подготовке научных кадров и по воспитанию молодых ученых. По его рекомендации многие выпускники армянских вузов прошли аспирантскую учебу в известных научных центрах бывшего СССР. Под его научным руководством защищены десятки кандидатских и докторских диссертаций. В Армении и в бывшем СССР им созданы большие научные школы и коллективы, по сей день успешно работающие в областях теории упругости и теории ползучести.

Будучи большим ученым, организатором науки, искусным педагогом, видным общественным и государственным деятелем, человеком широкой натуры и неповторимого очарования, он одновременно отличался принципиальностью, высокой профессиональной порядочностью и требовательностью к работе.

Огромная научная фигура Н.Х.Арутюняна и сегодня внушает уважение к науке, а его научные идеи и замыслы призывают к новым научным подвигам.

УДК 539.3

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ
 НЕПОЛНЫХ СОСТАВНЫХ КОНУСОВ

Аванян М. В., Баблоян А. А., Макарян В. С.

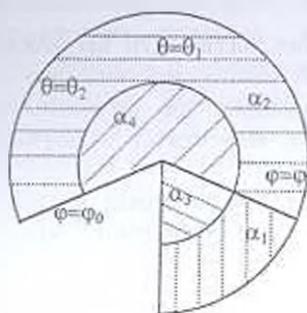
Մ. Վ. Ավանյան, Ա. Հ. Բաբլոյան, Վ. Ս. Մակարյան
 Բաղադրյալ ոչ լրիվ կոնների համար պոտենցիալի տեսության
 հիմնական խնդիրները

Ստացված են վերջավոր չափերով բաղադրյալ ոչ լրիվ շրջանային կոնների համար Գիրիլայեի և Նեյմանի խնդիրների ճշգրիտ լուծումները, երբ կոնական մարմինը կազմող չորս տարրեր նյութերն իրարից բաժանված են կոնական մակերևույթով և կիսահարթություններով: Հետազոտվում է նարմոնիկ ֆունկցիայի վարքը յուրաքանչյուր, ոչ լրիվ կոնի գագաթի շրջակայքում կախված յուրաքանչյուր մարմնի երկրաչափական, ֆիզիկական պարամետրերից և եզրային պայմաններից:

M. V. Avanyan, A.A. Babloyan, V.S. Makaryan

The Basic Problems of the Potential Theory for Incomplete Compound Cones

Получены точные решения задач Дирихле и Неймана для круговых составных неполных конусов конечных размеров, когда четыре составляющих различных материала разделены друг от друга конической поверхностью и полуплоскостью. Исследуется поведение гармонических функций в окрестности вершин неполных составных конусов.



Փյգ. 1

В работе приводятся точные решения некоторых основных задач теории потенциала для области, ограниченной конической и сферической поверхностями и также двумя полуплоскостями, проходящими через ось конуса (на фиг. 1 приведено сечение конуса, перпендикулярное к его оси). Рассматриваемое тело состоит из четырех различных материалов с различными физическими характеристиками α_k ($k = 1 \div 4$).

Четыре различных материала разделены: друг от друга конической поверхностью $\theta = \theta_0$ и полуплоскостью $\phi = \phi_0$. Задачи решаются в предположении $\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3 = 0$. Основная цель работы — изучение поведения гармонических функций при наличии источников в окрестности вершины неполных составных конусов и зависимости от свойств материалов, типа граничных условий и геометрических параметров.

Аналогичные вопросы для однородных неполных конусов исследовались в работах [1–5].

Пусть требуется решить трехмерную задачу Дирихле

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = F(\rho, \theta, \varphi)$$

$$u(\rho, \theta, \varphi)|_r = u_0(\rho, \theta, \varphi), \quad (0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0) \quad (1)$$

когда на поверхностях раздела четырех материалов ($\theta = \theta_1, \varphi = \varphi_1$)

соблюдаются условия сопряжения $(\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_3 \alpha_4)$

$$u(\rho, \theta_1 - 0, \varphi) = u(\rho, \theta_1 + 0, \varphi), \quad u(\rho, \theta_1, \varphi_1 - 0) = u(\rho, \theta_1, \varphi_1 + 0)$$

$$\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_1-0} = \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_1+0}, \quad \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_1-0} = \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_1+0} \quad (2)$$

где (r, θ, φ) — сферические координаты, причем $0 < \theta_1 < \theta_0, 0 < \varphi_1 < \varphi_0,$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_0.$$

Сначала приведем решения следующих двух задач Штурм-Лиувилля с разрывами:

Задача 1.

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(\varphi_0) = 0, \quad \Phi(\varphi_1 - 0) = \Phi(\varphi_1 + 0)$$

$$\alpha_1 \Phi'(\varphi_1 - 0) = \alpha_2 \Phi'(\varphi_1 + 0) \quad (3)$$

Нормированные собственные функции задачи (3) при условии $\sin \mu_p \varphi_1 \neq 0$ (или $\sin \mu_p \varphi_1 = 0$) имеют вид:

$$\varepsilon_p \Phi_p(\varphi) = \begin{cases} \sin \mu_p \varphi_2 \sin \mu_p \varphi & (0 \leq \varphi \leq \varphi_1) \\ \sin \mu_p \varphi_1 \sin \mu_p (\varphi_0 - \varphi) & (0 \leq \varphi \leq \varphi_0) \end{cases}$$

$$2\varepsilon_p^2 = \beta_1 \varphi_1 \sin^2 \mu_p \varphi_2 + \varphi_2 \sin^2 \mu_p \varphi_1; \quad \beta_1 = \alpha_1 / \alpha_2 \quad (4)$$

а собственные числа μ_p в случае задачи Дирихле являются корнями уравнения

$$\sin \mu_p \varphi_1 \cos \mu_p \varphi_2 + \beta_1 \sin \mu_p \varphi_2 \cos \mu_p \varphi_1 = 0, \quad \mu_p > 0 \quad (5)$$

Для задачи Неймана в уравнении (5) нужно заменить $\beta_1 \rightarrow \beta_1^{-1}$, а в формулах (4) — $\sin \gamma$ заменить на $\cos \gamma$.

В случае $\cos \mu_p \varphi_1 \neq 0, \cos \mu_p \varphi_2 \neq 0$ функции $\Phi_p(\varphi)$ имеют вид

$$\varepsilon_p \Phi_p(\varphi) = \begin{cases} \beta_1^{-1} \cos \mu_p \varphi_2 \sin \mu_p \varphi & (0 \leq \varphi \leq \varphi_1) \\ \cos \mu_p \varphi_1 \sin \mu_p (\varphi_0 - \varphi) & (0 \leq \varphi \leq \varphi_0) \end{cases}$$

$$2\varepsilon_p^2 = \beta_1^{-1} \varphi_1 \cos^2 \mu_p \varphi_2 + \varphi_2 \cos^2 \mu_p \varphi_1 \quad (6)$$

В частном случае, когда $\varphi_1 = \varphi_2 = 0,5\varphi_0$, функции $\Phi_p(\varphi)$ определяются простыми формулами

$$\varepsilon_p \Phi_p(\varphi) = \begin{cases} G_1^{-1}(\varphi) \sin \mu_p \varphi, & \mu_p \varphi_0 = 2\pi p, \quad 2\varepsilon_p^2 = \beta_1^{-1} \varphi_1 + \varphi_2 \\ \sin \mu_p \varphi, & \mu_p \varphi_0 = (2p-1)\pi, \quad 2\varepsilon_p^2 = \beta_1 \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases} \quad (7)$$

Задача 2.

$$[\sin \theta T'(\theta)] + [v(v+1) - \mu_p^2 \sin^2 \theta] T(\theta) \sin \theta = 0 \quad (8)$$

$$|T(\theta)| < \infty, \quad T(\theta_0) = 0, \quad T(\theta_1 - 0) = T(\theta_1 + 0), \quad \alpha_1 T'(\theta_1 - 0) = \alpha_2 T'(\theta_1 + 0)$$

Собственными функциями задачи (8) будут

$$T_{kp}(\theta) = \begin{cases} y_1(\theta), & (0 \leq \theta \leq \theta_1) \\ y_1(\theta) + \frac{(\beta_2 - 1)y_1'(\theta_1)}{y_2'(\theta_1)} y_2(\theta), & (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0) \end{cases} \quad (9)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} y_1(\theta) &= P_{\nu_p}^{-\mu_p}(\cos \theta), \quad y_2(\theta) = Q_{\nu_p}^{-\mu_p}(\cos \theta) \\ y_0(\theta) &= y_1(\theta)y_2(\theta_1) - y_1(\theta_1)y_2(\theta), \quad \beta_2 = \alpha_2 / \alpha_1 \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $P_{\nu_p}^{-\mu_p}(x)$, $Q_{\nu_p}^{-\mu_p}(x)$ — присоединенные функции Лежандра, μ_p — корень уравнения (5). Собственные числа ν_p будем определять из уравнения

$$\begin{aligned} T_{kp}(\theta_0) &= 0 \quad (\text{для задачи Дирихле}) \\ T_{kp}'(\theta_0) &= 0 \quad (\text{для задачи Неймана}) \end{aligned} \quad (11)$$

Нетрудно проверить, что уравнения (5) и (11) имеют простые действительные корни.

Отметим, что системы функций $\{\Phi_p(\varphi)\}_{p=1}^{\infty}$ и $\{T_{kp}(\theta)\}_{k,p=1}^{\infty}$ ортогональны с кусочно-постоянными весами $G_1(\varphi)$ и $G_2(\theta)$ соответственно

$$G_1(\varphi) = \begin{cases} \beta_1 & (0 \leq \varphi < \varphi_1) \\ 1 & (\varphi_1 < \varphi \leq \varphi_0) \end{cases}, \quad G_2(\theta) = \begin{cases} \beta_2 & (0 \leq \theta < \theta_1) \\ 1 & (\theta_1 < \theta \leq \theta_0) \end{cases} \quad (12)$$

то есть

$$\int_0^{\varphi_0} G_1(\varphi) \Phi_k(\varphi) \Phi_p(\varphi) d\varphi = \delta_{kp}, \quad \int_0^{\theta_0} G_2(\theta) T_{kp}(\theta) T_{lm}(\theta) d\theta = \delta_{kp} \delta_{lm} \quad (13)$$

где δ_{kp} — символ Кронекера.

$$\omega_{kp} = \frac{\sin \theta_0}{2\nu_{kp} + i} \left[T'_{kp}(\theta_0) \bar{T}'_{kp}(\theta_0) - T_{kp}(\theta_0) \bar{T}'_{kp}(\theta_0) \right] \quad (14)$$

$$T'_{kp}(\theta) = \frac{dT_{kp}(\theta)}{d\nu}, \quad T'_{kp}(\theta) = \frac{dT_{kp}(\theta)}{d\theta}$$

При вычислении ω_{kp} необходимо учесть условие (11).

Решение задачи Дирихле (1) представим в виде двойного ряда Фурье

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{k, p=1}^{\infty} \omega_{kp}^{-1} X_{kp}(\rho) T_{kp}(\theta) \Phi_p(\varphi) \quad (15)$$

обращение которого в силу (13) будет

$$X_{kp}(\rho) = \int_0^{\theta_0} \int_0^{\varphi_0} u(\rho, \theta, \varphi) G_1(\varphi) G_2(\theta) T_{kp}(\theta) \Phi_p(\varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (16)$$

Применяя метод Гринберга к уравнению (1), для определения неизвестных функций $X_{kp}(\rho)$ получим дифференциальное уравнение

$$\left[\rho^2 X'_{kp}(\rho) \right]' - \nu_{kp}(\nu_{kp} + 1) X_{kp}(\rho) = f_{kp}(\rho), \quad |X_{kp}(0)| < \infty, \quad X_{kp}(R) = A_{kp} \quad (17)$$

В силу граничного условия (1) $f_{kp}(\rho)$ и A_{kp} можно считать известными.

Решение уравнения (17), полученное методом вариации постоянных и дальнейшим предельным переходом, имеет вид:

$$X_{kp}(\rho) = A_{kp} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\nu_{kp}} - \int_0^{\rho} \frac{K_{kp}(x, \rho)}{(2\nu_{kp} + 1)R} f_{kp}(x) dx$$

$$K_{kp}(x, \rho) = \begin{cases} x_0^{\nu_{kp}} (\rho_0^{-\nu_{kp}-1} - \rho_0^{\nu_{kp}}) & (x \leq \rho) \\ \rho_0^{\nu_{kp}} (x_0^{-\nu_{kp}-1} - x_0^{\nu_{kp}}) & (x \geq \rho) \end{cases}, \quad x_0 = \frac{x}{R}, \quad \rho_0 = \frac{\rho}{R} \quad (18)$$

Подставляя найденные функции $X_{kp}(\rho)$ из (18) в (15), получим окончательное решение задачи Дирихле (1). При этом ряд (15) будет сходиться абсолютно и равномерно со своими первыми производными в замкнутой области неполного составного конуса, если граничная функция удовлетворяет условиям: а) непрерывна, б) имеет непрерывные первые производные везде, кроме точек линий пересечений раздела материалов с граничной поверхностью, в) на этих линиях $u_0(\rho, \theta, \varphi)$ удовлетворяет условиям (2).

В частном случае, когда

$$f_{kp}(\rho) = B_{kp} \rho^{\alpha}, \quad (\alpha + \nu_{11} > -1, \quad \alpha \neq \nu_{kp}) \quad (19)$$

для $X_{kp}(\rho)$ из (18) получим следующее выражение:

$$X_{kr}(\rho) = A_{kr} \rho_0^{v_{kr}} - \frac{B_{kr} (\rho_0^{v_{kr}} - \rho_0^\alpha)}{(\alpha - v_{kr})(\alpha + v_{kr} + 1)} \quad (20)$$

Асимптотика функции $u(r, \theta, \varphi)$ в малой окрестности вершины неполного конуса ($\rho \ll R$) определяется первым членом ряда (15).

Из (20) следует, что асимптотика гармонической функции в малой окрестности вершины составного неполного конуса, при $\rho \ll R$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{а) } u(\rho, \theta, \varphi) &\approx 2(A_{11} + \tilde{B}_{11}) \omega_{11}^{-1} \rho_0^{v_{11}} Z(\theta, \varphi) & (v_{11} < \alpha) \\ \text{б) } u(\rho, \theta, \varphi) &\approx -\tilde{B}_{11} \omega_{11}^{-1} \rho_0^\alpha Z(\theta, \varphi) & (\alpha < v_{11}) \\ \text{в) } u(\rho, \theta, \varphi) &\approx (A_{11} + \frac{B_{11} \ln \rho_0}{2v_{11} + 1}) \omega_{11}^{-1} \rho_0^{v_{11}} Z(\theta, \varphi) & (\alpha = v_{11}) \end{aligned} \quad (21)$$

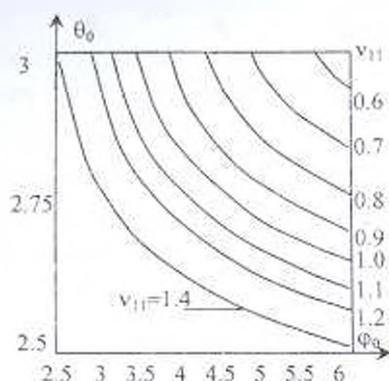
где $B_{11} = \tilde{B}_{11}(\alpha - v_{11})(\alpha + v_{11} + 1)$, $Z(\theta, \varphi) = T_{11}(\theta)\Phi(\varphi)$.

Путем дифференцирования из (21) можно получить асимптотические формулы для всех производных гармонических функций.

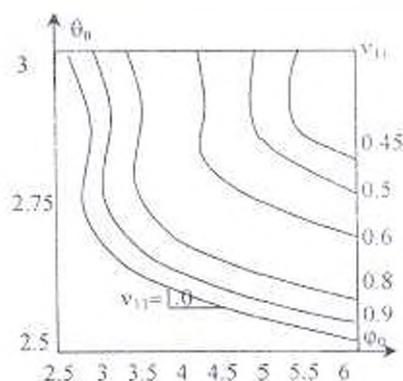
На фиг. 2 приведены графики функции $v_{11}(\varphi_0, \theta_0) = C$, полученные из первого уравнения (11) (задача Дирихле) при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 4, \alpha_4 = 6, \varphi_2 = 0,3\varphi_1, \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_0, \theta_2 = 2\theta_1, \\ 2,5 \leq \varphi_0 \leq 6,28 \quad 2,5 \leq \theta_0 \leq 3,14, v_{11} = \text{const} = 0,45 \div 1,4 \end{aligned}$$

На фиг. 3 приведены аналогичные графики, полученные из второго уравнения (11) (задача Неймана) при тех же значениях параметров.



Фиг. 2



Фиг. 3

Отметим, что как в задаче Дирихле, так и в задаче Неймана, функции $v = v(\varphi_0, \theta_0)$, определяемые из (11), в общем случае являются

неоднозначными. На фиг. 2, 3 приведены графики только первых ветвей функций $v = v_{11}(\varphi_0, \theta_0)$.

Задача 3. Задача Дирихле для составного полного кругового конуса конечной длины.

Пусть круговой полный конус состоит из двух различных материалов (с физическими параметрами α_1 и α_2), которые разделены друг от друга двумя полуплоскостями ($\varphi = \pm\varphi_1$, $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$). Требуется решить неоднородное уравнение Лапласа (1) для составного конуса ($0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$) конечной длины при граничных условиях первого рода

$$u(\rho, \theta_0, \varphi) = u_1(\rho, \varphi), \quad u(R, \theta, \varphi) = u_2(\theta, \varphi) \quad (22)$$

Для простоты рассмотрим случай, когда правая часть уравнения (1) и функции (22) четные относительно полуплоскостей $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm\pi$. При этом задачу будем решать только для области $0 \leq \varphi \leq \pi$, удовлетворяя при этом условиям симметрии

$$\frac{\partial u(\rho, \theta, 0)}{\partial \varphi} = \frac{\partial u(\rho, \theta, \pi)}{\partial \varphi} = 0 \quad (23)$$

и условиям сопряжений двух различных материалов

$$u(\rho, \theta, \varphi_1 - 0) = u(\rho, \theta, \varphi_1 + 0), \quad \alpha_1 \frac{\partial u(\rho, \theta, \varphi_1 - 0)}{\partial \varphi} = \alpha_2 \frac{\partial u(\rho, \theta, \varphi_1 + 0)}{\partial \varphi} \quad (24)$$

Решение задачи Дирихле для полного составного конуса ищем в виде двойного ряда Фурье

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X_{kp}(\rho)}{\omega_{kp}} \cdot P_{\nu_{kp}}^{\mu_{kp}}(\cos \theta) \Phi_p(\varphi) \quad (25)$$

где μ_p и ν_p являются неотрицательными корнями уравнений ($\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$)

$$\alpha_0 \sin \mu_p \varphi_1 \cdot \cos \mu_p \varphi_2 + \sin \mu_p \varphi_2 \cdot \cos \mu_p \varphi_1 = 0, \quad P_{\nu_p}^{\mu_p}(\cos \theta_0) = 0 \quad (26)$$

а функции $\Phi_p(\varphi)$ имеют вид (при $\cos \mu_p \varphi_1 \neq 0$ $k=1, 2$)

$$\varepsilon_p \Phi_p(\varphi) = \begin{cases} \cos \mu_p \varphi_1 \cdot \cos \mu_p \varphi, & (0 \leq \varphi \leq \varphi_1) \\ \cos \mu_p \varphi_2 \cdot \cos \mu_p (\pi - \varphi) & (\varphi_1 \leq \varphi \leq \pi) \end{cases} \quad (27)$$

$$2\varepsilon_p^2 = \alpha_1 \varphi_1 \cos^2 \mu_p \varphi_2 + \alpha_2 \varphi_2 \cos^2 \mu_p \varphi_1 \quad (p = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\omega_{kp} = \int_0^{\theta_0} \left(P_{\nu_{kp}}^{\mu_{kp}}(\cos \theta) \right)^2 \sin \theta d\theta = \frac{\sin \theta_0}{2\nu_{kp} + 1} \cdot P_{\nu_{kp}}^{\mu_{kp}}(\cos \theta_0) \cdot \frac{dP_{\nu_{kp}}^{\mu_{kp}}(\cos \theta_0)}{d\theta}$$

В частном случае, когда $\varphi_1 = \varphi_2 = 0.5\pi$, для функций $\Phi_p(\varphi)$ будем иметь:

$$\varepsilon_p \Phi_p(\varphi) = \begin{cases} \cos \mu_p \varphi, & (\mu_p = 2p) \\ \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \rho_0^{-1}(\varphi) \cos \mu_p \varphi & (\mu_p = 2p-1) \end{cases}, \quad 4\varepsilon_p^2 = (\alpha_1 + \alpha_2) \pi \quad (28)$$

Функции $\Phi_p(\varphi)$ ортогональны на интервале $[0, \pi]$ с весом $\rho_0(\varphi)$

$$\int_0^{\pi} \rho_0(\varphi) \Phi_p(\varphi) \Phi_k(\varphi) d\varphi = \delta_{kp}, \quad \rho(\varphi) = \begin{cases} \alpha_1, & (0 \leq \varphi < \varphi_1) \\ \alpha_2, & (\varphi_1 < \varphi \leq \pi) \end{cases} \quad (29)$$

Аналогичным образом для определения функций $X_{kp}(\rho)$ получим дифференциальное уравнение (17), где

$$\begin{aligned} f_{kp}(\rho) &= g_{kp}(\rho) + \sin \theta_0 \cdot \frac{dP_{\nu}^{\mu_p}(\cos \theta_0)}{d\theta_0} \int_0^{\pi} u_1(\rho, \varphi) \rho_0(\varphi) \Phi_p(\varphi) d\varphi \\ g_{kp}(\rho) &= \int_0^{\theta_1} \int_0^{\pi} G(\rho, \theta, \varphi) \cdot P_{\nu}^{\mu_p}(\cos \theta) \sin \theta \cdot \rho_0(\varphi) \Phi_p(\varphi) d\theta d\varphi \\ A_{kp} &= \int_0^{\theta_1} \int_0^{\pi} u_2(\theta, \varphi) \cdot P_{\nu}^{\mu_p}(\cos \theta) \sin \theta \cdot \rho_0(\varphi) \Phi_p(\varphi) d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (30)$$

Решение уравнения (17) при обозначениях (30) дается формулой (18). Окончательное решение задачи Дирихле определяется формулами (25), (17) и (30).

Литература

1. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 258с.
2. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наукова думка, 1979. 262с.
3. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978. 264 с.
4. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задачах с коническими точками // Math.Nachr., 1977. V.76.
5. Геворкян Г. З., Макарян В. С. Контактная задача для шарового сектора // Изв. ИАН Армении. Механика. 1996. Т. 49. №1. С. 51-60.

Ереванский госуниверситет
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
6.03.2002

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОЙ
 ЛУНОЧКИ С ТРЕЩИНАМИ НА ЛИНИИ РАЗДЕЛА
 МАТЕРИАЛОВ

Աղաբեկյան Ս.Վ., Արստյունյան Ա.Ա.

Ս. Վ. Աղաբեկյան, Ա. Ա. Արստյունյան

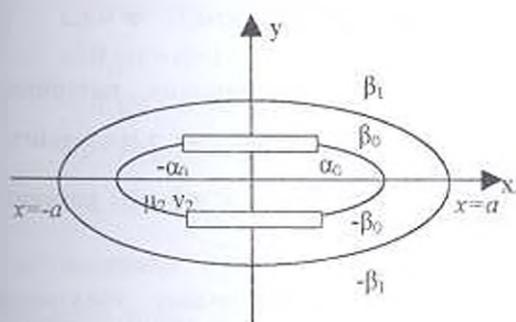
Բաժանման ճակերտային վրա ճաքեր պարունակող բաղադրյալ լուսնաձև ճարձնի կոնտակտային խնդիրը

Երկրենու կորդինատային համակարգի և Ֆուրյեի ինտեգրալների օգնությամբ տրվում է բաժանման ճակերտային վրա սիմետրիկ ճաքեր պարունակող բաղադրյալ լուսնաձև ճարձնի առաձգակախոսքային տեսության կոնտակտային խոսք լուծումը:

P. V. Aghabekyan, L. A. Arutjunyan

A plane contact problem of a compound moon with cracks on the line of division of materials

С помощью биполярных координат и интеграл Фурье дано решение плоской контактной задачи теории упругости для составной области с трещиной.



Փյգ. 1

В данной работе с помощью биполярных координат и аппарата интеграла Фурье дано решение плоской контактной задачи теории упругости для двух областей, с упругими характеристиками μ_m, ν_m ($m = 1, 2$) (где μ_m – модули сдвига материалов, ν_m – коэффициенты Пуассона), образованных пересечением дуг окружностей с

симметричной трещиной между материалами (фиг.1).

Задача решается при помощи функции напряжений в биполярной системе координат α, β , которые связаны с декартовыми координатами x, y соотношениями [1].

$$qx = \operatorname{sh} \alpha, \quad qy = \sin \beta, \quad qa = \operatorname{ch} \alpha + \cos \beta \quad (1)$$

где a – параметр биполярных координат.

Каждая из функций напряжений $\Phi_m(\alpha, \beta)$ ($m = 1, 2$) удовлетворяет бигармоническому уравнению, которое в биполярной системе координат имеет вид [1-3]

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right) (q \Phi_m(\alpha, \beta)) = 0, \quad m = 1, 2 \quad (2)$$

Напряжения и перемещения выражаются через функцию напряжений соотношениями:

$$\begin{aligned} \alpha \sigma_{\alpha}(\alpha, \beta) &= ((\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} \alpha)(q \Phi_m(\alpha, \beta)) \\ \alpha \sigma_{\beta}(\alpha, \beta) &= \left((\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \cos \beta \right) (q \Phi_m(\alpha, \beta)) \\ \alpha \tau_{\alpha \beta}(\alpha, \beta) &= -(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (q \Phi_m(\alpha, \beta)) \\ U(\alpha, \beta) &= \frac{q}{2\mu_m} \left((1 - \nu_m) \frac{\partial \Phi_m(\alpha, \beta)}{\partial \beta} - \frac{\partial \Psi_m(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right) \\ V(\alpha, \beta) &= \frac{q}{2\mu_m} \left((1 - \nu_m) \frac{\partial \Phi_m(\alpha, \beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial \Psi_m(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right) \quad m = 1, 2 \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Psi_m(\alpha, \beta)$ ($m = 1, 2$) – бигармоническая функция, связанная с $\Phi_m(\alpha, \beta)$ ($m = 1, 2$) формулой

$$q \Psi_m(\alpha, \beta) = (1 - \nu_m) \iint \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1 \right) (q \Phi_m(\alpha, \beta)) d\alpha d\beta, \quad m = 1, 2 \quad (4)$$

В биполярных координатах одна из составляющих материалов занимает область $(\beta_1 < \beta \leq \beta_1, -\infty < \alpha < \infty)$ с упругими характеристиками μ_1, ν_1 , а вторая – область $(\beta < \beta_0, -\infty < \alpha < \infty)$ с упругими характеристиками μ_2, ν_2 .

Граничные условия для напряжений равносильны следующим условиям для функции напряжений [1-3]:

$$(q \Phi_1(\alpha, \beta)) \Big|_{|\beta|=\beta} = \varphi_1(\alpha), \quad \frac{\partial (q \Phi_1(\alpha, \beta))}{\partial \beta} \Big|_{|\beta|=\beta} = \psi_1(\alpha) \quad (5)$$

Предполагается, что $\varphi_1(\alpha)$ и $\psi_1(\alpha)$ удовлетворяют условиям разложимости и интеграл Фурье.

Условия симметрии

$$V_2(\alpha, \beta) \Big|_{\beta=0} = 0, \quad \frac{\partial (q \Phi_2(\alpha, \beta))}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} = 0 \quad (6)$$

На линии контакта имеем следующие условия:

$$\frac{\partial (q \Phi_m(\alpha, \beta))}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_0} = 0, \quad (q \Phi_1(\alpha, \beta)) \Big|_{\beta=\beta_0} = (q \Phi_2(\alpha, \beta)) \Big|_{\beta=\beta_0} \quad |\alpha| > \alpha_0 \quad (7)$$

$$q(\Phi_m(\alpha, \beta)) \Big|_{\beta=\beta_0} = 0 \quad |\alpha| < \alpha_0, \quad V_1(\alpha, \beta) \Big|_{\beta=\beta_0} = V_2(\alpha, \beta) \Big|_{\beta=\beta_0} \quad |\alpha| > \alpha_0$$

Учитывая симметрию бигармонической функции напряжений $\Phi_m(\alpha, \beta)$ ($m = 1, 2$) удобно представить интегралом Фурье такого вида

$$q\Phi_m(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_m(\alpha, \beta) \cos t \alpha dt \quad (m = 1, 2) \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(t, \beta) &= A_1(t) \operatorname{ch} t(\beta_1 - \beta) \cos(\beta - \beta_0) + B_1(t) \operatorname{ch} t(\beta - \beta_0) \cos \beta(\beta_1 - \beta) + \\ &+ C_1(t) \operatorname{sh} t(\beta_1 - \beta) \sin(\beta - \beta_0) + D_1(t) \operatorname{sh} t(\beta - \beta_0) \sin(\beta_1 - \beta) \\ f_2(t, \beta) &= A_2(t) \operatorname{ch} t(\beta_0 - \beta) \cos \beta + B_2(t) \operatorname{ch} t \beta \cos(\beta_0 - \beta) + \\ &+ C_2(t) \operatorname{sh} t(\beta_0 - \beta) \sin \beta + D_2(t) \operatorname{sh} t \beta \sin(\beta_0 - \beta) \end{aligned} \quad (9)$$

удовлетворяя граничным условиям (5) и части контактных условий (7) и условиям симметрии (6), получаем следующие системы уравнений для определения неизвестных интегрирования:

$$\begin{aligned} A_1(t) \cos(\beta_1 - \beta_0) + B_1(t) \operatorname{ch} t(\beta_1 - \beta_0) &= \bar{\varphi}_1(t) \\ (tB_1(t) - D_1(t)) \operatorname{sh} t(\beta_1 - \beta_0) - (A_1(t) + tC_1(t)) \sin(\beta_1 - \beta_0) &= \bar{\psi}_1(t) \\ (C_2(t) - tA_2(t)) \operatorname{sh} t \beta_0 + (B_2(t) + tD_2(t)) \sin \beta_0 &= 0 \\ A_2(t) \operatorname{sh} t \beta_0 - D_2(t) \sin \beta_0 &= 0 \\ (B_1(t) + tD_1(t)) \sin(\beta_1 - \beta_0) + (C_1(t) - tA_1(t)) \operatorname{sh} t(\beta_1 - \beta_0) &= 0 \\ (A_2(t) + tC_2(t)) \sin \beta_0 + (D_2(t) - tB_2(t)) \operatorname{sh} t \beta_0 &= 0 \\ A_1(t) \operatorname{ch} t(\beta_1 - \beta_0) + B_1(t) \cos(\beta_1 - \beta_0) &= X(t) \\ A_2(t) \cos \beta_0 + B_2(t) \operatorname{ch} t \beta_0 &= X(t) \end{aligned} \quad (10)$$

где величины $\bar{\varphi}_1(t)$ и $\bar{\psi}_1(t)$ являются преобразованиями Фурье от функции $\varphi_1(\alpha)$ и $\psi_1(\alpha)$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi_1(\alpha) \cos t \alpha d\alpha \\ \bar{\psi}_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \psi_1(\alpha) \cos t \alpha d\alpha \end{aligned} \quad (11)$$

а $X(t)$ — пока неизвестная функция, которая определяется позже.

Разрешая систему (11) для неизвестных $A_m(t), B_m(t), C_m(t)$ и $D_m(t)$ ($m = 1, 2$) найдем значения через неизвестную $X(t)$:

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \frac{1}{\delta(t)} (X(t) \operatorname{ch} t \gamma_1 - \bar{\varphi}_1 \cos \gamma_1) \\ B_1(t) &= \frac{1}{\delta(t)} (\bar{\varphi}_1(t) \operatorname{ch} t \gamma_1 - X(t) \cos \gamma_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1(t) &= \frac{1}{\Delta_1(t)} \left[X(t) (t \operatorname{ch} \gamma_1 + \frac{t^2+1}{2\delta(t)} \operatorname{sh} \gamma_1 \sin 2\gamma_1) - \right. \\
&\quad \left. - \bar{\varphi}_1(t) (t \cos \gamma_1 + \frac{1}{2\delta(t)} (t^2+1) \operatorname{sh} 2\gamma_1 \sin \gamma_1) + \bar{\psi}_1(t) t \sin \gamma_1 \right] \\
D_1(t) &= \frac{1}{\Delta_1(t)} \left[-X(t) (t \cos \gamma_1 + \frac{1}{2\delta(t)} (t^2+1) \operatorname{sh} 2\gamma_1 \sin \gamma_1) + \right. \\
&\quad \left. + \bar{\varphi}_1(t) (t \operatorname{ch} \gamma_1 + \frac{1}{2\delta(t)} (t^2+1) \operatorname{sh} \gamma_1 \sin 2\gamma_1) - \bar{\psi}_1(t) \operatorname{sh} \gamma_1 \right] \\
A_2(t) &= \frac{2tX(t) \sin \gamma_2}{\Delta_2(t)} & C_2(t) &= -\frac{A_2(t)}{t} \\
B_2(t) &= \frac{2X(t) \operatorname{sh} \gamma_2}{\Delta_2(t)} & D_2(t) &= tB_2(t)
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= \operatorname{sh}^2 \gamma_1 + \sin^2 \gamma_1 \\
\Delta_1(t) &= \operatorname{sh}^2 \gamma_1 - t^2 \sin^2 \gamma_1 & \gamma_1 &= \beta_1 - \beta_0 \\
\Delta_2(t) &= \operatorname{sh} 2\gamma_2 + t \sin 2\gamma_2 & \gamma_2 &= \beta_0
\end{aligned} \tag{13}$$

Неизвестная функция $X(t)$ определяется из следующей системы парных интегральных уравнений, которые получаются из контактных условий [7]:

$$\begin{cases} \int_0^{\alpha} X(t) \cos t \alpha dt = 0 & |\alpha| < \alpha_0 \\ \int_0^{\infty} [M(t)X(t) + N(t)] \sin t \alpha dt = 0 & |\alpha| > \alpha_0 \end{cases} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
N(t) &= \frac{1}{\Delta_1(t)} \left\{ -\bar{\varphi}_1(t) (t \operatorname{ch} \gamma_1 \sin \gamma_1 + \operatorname{sh} \gamma_1 \cos \gamma_1) + \bar{\psi}_1(t) \operatorname{sh} \gamma_1 \sin \gamma_1 \right\} \\
\Delta(t) &= (\operatorname{sh} 2\gamma_1 + t \sin 2\gamma_1) \Delta_2(t) + 4h (\operatorname{sh}^2 \gamma_1 + \sin^2 \gamma_1) \Delta_1(t) \\
h &= \frac{\mu_1(1-\nu_1)}{\mu_2(1-\nu_2)}, \quad M(t) = \frac{\Delta(t)}{2\Delta_1(t)\Delta_2(t)}
\end{aligned} \tag{15}$$

В частном случае, при $\alpha_0 = \infty$ из (14) получаем $X(t) = 0$, а при $\alpha_0 = 0$ получаем $X(t) = -M(t)/N(t)$, в обоих случаях задача решается в замкнутом виде.

Учитывая интегральные представления функции Бесселя [4]

$$J_0(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\cos t \alpha d\alpha}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}; \quad J_0(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_x^{\infty} \frac{\sin t \alpha d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \tag{16}$$

можно парные интегральные уравнения (14) представить в виде

$$\int_0^{\infty} (t^2 + 1)X(t)J_0(x, t)dt = 0 \quad \text{при } x < \alpha_0$$

$$\int_0^{\infty} (t^2 + 1)[M(t)X(t) + N(t)]J_0(x, t)dt = 0 \quad \text{при } x > \alpha_0. \quad (17)$$

Применяя преобразование Ханкеля, получаем интегральные уравнения Фредгольма второго рода

$$M(t)X(t) + N(t) = \frac{\alpha_0 t}{t^2 + 1} \int_0^{\infty} (\tau^2 + 1)[(M(\tau) - 1)X(\tau) + N(\tau)]K(t, \tau)d\tau \quad (18)$$

где

$$K(t, \tau) = \frac{1}{t^2 - \tau^2} [J_1(\alpha_0 t)J_0(\alpha_0 \tau) - \tau J_0(\alpha_0 t)J_1(\alpha_0 \tau)] \quad (19)$$

или

$$X(t) = \frac{\alpha_0 t}{t^2 + 1} \int_0^{\infty} (\tau^2 + 1)U(\tau)K(t, \tau)d\tau - H(t) \quad (20)$$

где

$$U(\tau) = (M(\tau) - 1)X(\tau) + N(\tau)$$

$$H(t) = \frac{\alpha_0 t(M(t) - 1)}{(t^2 + 1)M(t)} \int_0^{\infty} (\tau^2 + 1)U(\tau)K(t, \tau)d\tau - \frac{N(t)}{M(t)} \quad (21)$$

На линии контакта нормальное напряжение имеет вид

$$\alpha \sigma_{\alpha}^{(m)}(\alpha, \beta) \Big|_{\beta=\beta_0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [-t^2(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_0) \cos t \alpha + t \operatorname{sh} \alpha \sin t \alpha - \cos \beta_0 \cos t \alpha] \times$$

$$\times \left[\frac{\alpha_0 t}{t^2 + 1} \int_0^{\infty} (\tau^2 + 1)U(\tau)K(t, \tau)d\tau - H(t) \right] dt \quad (m=1,2) \quad (22)$$

Выясним характер напряжений в точках $\alpha = \alpha_0$ и $\alpha = \infty$. Из (22) после некоторых преобразований получаем

$$\alpha \sigma_{\alpha}^{(m)}(\alpha, \beta) \Big|_{\beta=\beta_0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha^2 (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_0)}{\sqrt{\alpha^2 - \alpha_0^2} (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_0^2})} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} (\tau^2 + 1)U(\tau)J_0(\alpha_0 \tau)d\tau + H_1(\alpha) \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned}
H_1(\alpha) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha_0 (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_0) \int_0^{\infty} (\tau^2 + 1) U(\tau) J_0(\alpha_0 \tau) d\tau \int_0^{\infty} \frac{J_1(\alpha_0 t) \cos t \alpha dt}{t^2 + 1} - \\
& - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha_0 (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_0) \int_0^{\infty} (\tau^2 + 1) \tau U(\tau) d\tau \times \\
& \times \int_0^{\infty} \frac{(\tau J_1(\alpha_0 t) J_0(\alpha_0 \tau) - t J_0(\alpha_0 t) J_1(\alpha_0 \tau)) \cos t \alpha dt}{(t^2 + 1)(t^2 - \tau^2)} + \\
& + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha_0 \int_0^{\infty} (\tau^2 + 1) U(\tau) d\tau \int_0^{\infty} \frac{t}{t^2 + 1} (t \operatorname{sh} \alpha \sin t \alpha - \cos t \alpha \cos \beta_0) K(t, \tau) d\tau + \\
& + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [t^2 (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_0) \cos t \alpha - t \operatorname{sh} \alpha \sin t \alpha + \cos \beta_0 \cos t \alpha] H(t) dt \quad (24)
\end{aligned}$$

При $\alpha = \alpha_0$ на линии контакта нормальные напряжения имеют особенность порядка $1/2$. В представленном виде (24) член, содержащий особенность в точке $\alpha = \alpha_0$, разделен, а $H_1(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha = \alpha_0$.

Для исследования поведения напряжений в окрестности края поверхности контакта $x = a$ ($\alpha = \infty$) нормальное напряжение представим в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{\beta}^{(m)} \Big|_{\beta=\beta_0} = & -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [t^2 (1 + e^{-2\alpha} + 2e^{-\alpha} \cos \beta_0) + it(1 - e^{-2\alpha}) + 2e^{-\alpha} \cos \beta_0] \times \\
& \times \frac{T(t)}{\Delta(t)} e^{a(i+\nu)t} dt \quad (25)
\end{aligned}$$

где

$$T(t) = \frac{t_0 t \Delta_1(t) \Delta_2(t)}{t^2 + 1} \int_0^{\infty} (\tau^2 + 1) U(\tau) K(t, \tau) d\tau - N(t) \Delta_1(t) \Delta_2(t) \quad (26)$$

Интеграл (25) по вещественной оси дополняется интегралом по верхней (при $x < 0$ или $\alpha < 0$) или нижней (при $x > 0$ или $\alpha > 0$) полуокружностями радиуса $R \rightarrow \infty$ с центром в начале координат. Применяя теорему о вычетах, представим (25) в виде бесконечного ряда

$$\begin{aligned}
\sigma_{\beta}^{(m)}(\alpha, \beta) \Big|_{\beta=\beta_0} = & -i\sqrt{2\pi} [t_1^2 (1 + e^{-2\alpha} + 2e^{-\alpha} \cos \beta_0) + it_1(1 - e^{-2\alpha}) + 2e^{-\alpha} \cos \beta_0] \times \\
& \times \frac{T(t_1)}{\Delta(t_1)} e^{a(1-i\eta_1)t_1} - i\sqrt{2\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \text{выч} [t_k^2 (1 + e^{-2\alpha} + 2e^{-\alpha} \cos \beta_0) + it_k(1 - e^{-2\alpha}) + \\
& + 2e^{-\alpha} \cos \beta_0] \frac{T(t_k)}{\Delta'(t_k)} e^{a(1-i\eta_k)t_k} \quad (27)
\end{aligned}$$

где $t_k = \zeta_k - i\eta_k$ — корни уравнения $\Delta(t) = 0$ ($\zeta_k > 0$, $\eta_k > 0$).

Очевидно, характер напряженного состояния около края $x = a$ ($\alpha = \infty$) определяется величиной мнимой части первого простого корня $t_1 = \zeta_1 - i\eta_1$ уравнения $\Delta(t) = 0$. Если $\eta_1 > 1$, имеем нулевое напряженное состояние. Если $\eta_1 < 1$, имеем концентрации напряжений. В случае $\eta_1 = 1$ напряжения на краю поверхности контакта конечны.

Укажем условие, из которого можно найти зону контакта. Для определения указанной зоны контакта используется условие равенства нулю контактных напряжений на границах трещины:

$$\int_0^a (\tau^2 + 1) U(\tau) J_0(\alpha_0 \tau) d\tau = 0 \quad (28)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1968. 401с.
2. Арутюнян А.А. Плоская задача теории упругости для составной области, образованной из двух луночек. // Изв. АН Арм ССР. Механика. 1976. Т.29, №1.С. 51-66.
3. Арутюнян А.А., Аликян М.Г., Аветисян Г.А. Плоская контактная задача для составного тела с симметричной трещиной между материалами. Инж.проблемы строительной механики., Ереван: ЕрПИИ 1985.
4. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М.: Изд. иностр. лит. ч.1. 1949. 798с.

Институт Механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
08.04.2002 г.

ЗАДАЧА НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ
ВЕСЬМА ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Ամբարձումյան Ս. Ա.

Ս Ա Համբարձումյան

Էապես փոքր կորույթով թաղանթի ոչ սիմետրիկ ջերմաառաձգականության խնդիրը
Ոչ սիմետրիկ առաձգականության տեսության հիման վրա դիտարկվում է էապես փոքր կորույթով
ունեցող թաղանթի ջերմաառաձգականության խնդիրը: Բերվում են որոշ մոդելային խնդիրների լուծումներ,
որոնք բնորոշում են ոչ սիմետրիկության նուշվածման հետ կապված առանձնահատկությունները:

S. A. Ambartsumian

The Problem of the Nonsymmetrical Thermoelasticity of the Extremely Shallow shells

Рассматривается задача термоупругости весьма пологих оболочек на основе несимметричной теории упругости [1-4]. Приводятся решения некоторых модельных задач, характеризующих специфические особенности, связанные с учетом несимметричности.

1. Рассмотрим изотропную оболочку постоянной толщины h в ортогональной смешанной системе координат α_i . Пусть α_1 и α_2 являются криволинейными координатами, совпадающими с линиями главной кривизны срединной поверхности оболочки, а α_3 является прямолинейной и представляет расстояние по нормали от точки (α_1, α_2) срединной поверхности до точки $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ оболочки. Предполагаем, что коэффициенты первой квадратичной формы $B_i(\alpha_1, \alpha_2)$, а также главные кривизны срединной поверхности $k_i(\alpha_1, \alpha_2)$ при дифференцировании ведут себя как постоянные. При этом система координат α_1, α_2 выбрана так, что выполняется неравенство $k_1 k_2 B_1 B_2 \ll 1$, что с достаточно высокой точностью обеспечивает удовлетворение соотношений Гаусса-Кодацци [3,5]. Предполагается также, что температура в теле оболочки изменяется во времени t на величину $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)$, при этом, первоначальный прямоугольный бесконечно малый параллелепипед тела оболочки остается прямоугольным [6-7]. Считается, что функция T удовлетворяет уравнениям теплопроводности.

Далее принимаются следующие гипотезы [2].

- Нормальное к срединной поверхности оболочки перемещение $u_3(\alpha_1, \alpha_2)$ и повороты относительно нормальных линий $\alpha_3 - \omega_3(\alpha_1, \alpha_2)$ не зависят от координаты α_3 .
- Касательные напряжения σ_{11} и σ_{22} по толщине оболочки меняются по заданному закону
- Силовые $-\sigma_{33}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ и моментные $-\mu_{33}, \mu_{13}, \mu_{23}$ напряжения пренебрежимо малы по сравнению с другими родственными напряжениями.

В последующем, в силу принятых предположений и гипотез, там где это очевидно, принимается, что $1 \pm k_i \alpha_i \approx 1$. Полагая, что координаты α_1 и α_2 являются абсолютными, для коэффициентов первой квадратичной формы примем $B_1 = 1, B_2 = 1$.

2. Согласно принятым предположениям исходные уравнения и соотношения несимметричной теории в случае рассматриваемой задачи запишутся следующим образом [1-2]:

обобщенный закон термоупругости

$$\sigma_{\mu\nu} = (\mu + \alpha)\gamma_{\mu\nu} + (\mu - \alpha)\gamma_{\nu\mu} + (\lambda\gamma_{kk} - \beta_1 T)\delta_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

$$\mu_{\mu\nu} = (\gamma + \varepsilon)\chi_{\mu\nu} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{\nu\mu} + \beta_2 \chi_{kk} T \delta_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

где $\sigma_{\mu\nu}$ — силовые напряжения, $\mu_{\mu\nu}$ — моментные напряжения, $\mu = E/2(1 + \nu)$, $\lambda = E\nu/(1 + \nu)(1 - 2\nu)$ — постоянные Ламе, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — четыре новые упругие постоянные, $\beta_1 = \alpha, (2\mu + 3\lambda)$ — обобщенный коэффициент теплового расширения, α_1 — коэффициент линейного теплового расширения, $\gamma_{\mu\nu}$ и $\chi_{\mu\nu}$ — компоненты несимметричных тензоров деформаций и изгиба-кручения соответственно, которые имеют вид

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{\partial u_\nu}{\partial \alpha_\mu} + \delta_{\mu\nu} u_k k_j - \varepsilon_{\mu\nu} \omega_k \quad (2.3)$$

$$\chi_{\mu\nu} = \frac{\partial \omega_\nu}{\partial \alpha_\mu} + \delta_{\mu\nu} \omega_k k_j \quad (2.4)$$

где u_i — компоненты вектора перемещения, ω_i — компоненты вектора поворота, в целом независимого от u_i , $\varepsilon_{\mu\nu}$ — тензор Леви-Чевиты.

Уравнения равновесия (движения)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial \alpha_3} + (k_1 + k_2)\sigma_{31} + k_1\sigma_{13} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial \alpha_3} + (k_1 + k_2)\sigma_{32} + k_2\sigma_{23} &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \alpha_2} + (k_1 + k_2)\sigma_{33} - k_1\sigma_{11} - k_2\sigma_{22} &= \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

и далее

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \mu_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \mu_{31}}{\partial \alpha_3} + (k_1 + k_2)\mu_{31} + k_1\mu_{13} + \sigma_{23} - \sigma_{32} &= J \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \mu_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \mu_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \mu_{32}}{\partial \alpha_3} + (k_1 + k_2)\mu_{32} + k_2\mu_{23} + \sigma_{31} - \sigma_{13} &= J \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \mu_{33}}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial \mu_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial \alpha_2} + (k_1 + k_2)\mu_{33} - k_2\mu_{22} - k_1\mu_{11} + \sigma_{12} - \sigma_{21} &= J \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

где ρ — плотность, J — мера инерции при вращении, равная произведению момента инерции частицы вещества вокруг любой оси, проходящей через ее центр тяжести, на число частиц в единице объема.

Из (2.1), пренебрегая σ_{33} , получим

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= B\gamma_{11} + B_{12}\gamma_{22} - B(1+\nu)\alpha_1 T, \quad B = E/(1-\nu^2) \\ \sigma_{22} &= B\gamma_{22} + B_{12}\gamma_{11} - B(1+\nu)\alpha_2 T, \quad B_{12} = \nu E/(1-\nu^2)\end{aligned}\quad (2.7)$$

которые не отличаются от соответствующих соотношений классической теории [8].

А для остальных силовых напряжений получим

$$\sigma_{ij} = (\mu + \alpha)\gamma_{ij} + (\mu - \alpha)\gamma_{ji} \quad (2.8)$$

которые, как и следовало ожидать, аналогично моментным напряжениям не содержат температурные члены в явном виде.

3. Согласно гипотезе а) из (2.3) и (2.4) получим

$$\gamma_{31} = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} \approx 0, \quad u_1 = u(\alpha_1, \alpha_2) \quad (3.1)$$

$$\chi_{33} = \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_1} \approx 0, \quad \omega_3 = \psi_1(\alpha_1, \alpha_2) \quad (3.2)$$

где $u(\alpha_1, \alpha_2)$ — искомое нормальное перемещение, $\psi_1(\alpha_1, \alpha_2)$ — искомый поворот вокруг координатных линий α_1 .

Согласно гипотезе б) для напряжений σ_{13} , σ_{23} имеем [2.3]

$$\sigma_{13} = \alpha f(\alpha_1)\psi_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad \sigma_{23} = \alpha f(\alpha_1)\psi_2(\alpha_1, \alpha_2) \quad (3.3)$$

где $f(\alpha_1)$ — заданная функция, характеризующая закон изменения напряжений σ_{ij} по толщине оболочки, и имеет вид

$$f(\alpha_1) = (h^2/4 - \alpha_1^2)/2 \quad (3.4)$$

$\psi_1(\alpha_1, \alpha_2)$ — искомые функции.

Разрешив (2.8) относительно компонент тензора деформаций γ_{ij} и γ_{ji} , получим

$$\gamma_{13} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{13} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{31}, \quad \gamma_{23} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{23} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{32} \quad (3.5)$$

Согласно гипотезе в) из (2.3) с учетом (3.3) и (3.5) имеем

$$\begin{aligned}\gamma_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1 + \omega_2 = \frac{\mu + \alpha}{4\mu} f(\alpha_1)\psi_1 \\ \gamma_{23} &= \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - k_2 u_2 - \omega_1 = \frac{\mu + \alpha}{4\mu} f(\alpha_1)\psi_2\end{aligned}\quad (3.6)$$

откуда с учетом (3.1) для двух компонент тензора поворота ω_i получим

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - k_2 u_2 - \frac{\mu + \alpha}{4\mu} f(\alpha_3) \psi_2, \\ \omega_2 &= -\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + k_1 u_1 + \frac{\mu + \alpha}{4\mu} f(\alpha_3) \psi_1.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Далее, согласно гипотезе в) из (2.3) с учетом (3.3), (3.5) и (3.7) имеем

$$\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} - k_j u_i = -\frac{\partial w}{\partial \alpha_j} + \frac{\alpha}{2\mu} f(\alpha_3) \psi_i.\quad (3.8)$$

Полагая, что при $\alpha_3 = 0$ $u_i = u(\alpha_1, \alpha_2)$, $u_2 = v(\alpha_1, \alpha_2)$ из (3.8) с принятой здесь точностью, т.е. $1 \pm k_j \alpha_j \approx 1$, для тангенциальных перемещений получим

$$u_1 = u - \alpha_1 \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{\alpha}{2\mu} I_0(\alpha_3) \psi_1\quad (3.9)$$

$$u_2 = v - \alpha_2 \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{\alpha}{2\mu} I_0(\alpha_3) \psi_2\quad (3.10)$$

где

$$I_0(\alpha_3) = \int_0^{\alpha_3} f(\alpha) d\alpha = \frac{\alpha_3}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\alpha_3^2}{3} \right)\quad (3.11)$$

$u(\alpha_1, \alpha_2)$, $v(\alpha_1, \alpha_2)$ — искомые тангенциальные перемещения срединной поверхности.

Рассматривая формулы компонент вектора перемещения какой-либо точки оболочки u_i (3.1), (3.9), (3.10), замечаем полную аналогию стрессий этих формул со строениями соответствующих формул уточненной теории полых оболочек в классической постановке [3].

Подставляя значения перемещений u_i и поворотов ω_j соответственно в (2.3) и (2.4) и далее эти результаты в (2.1), (2.3), (2.7) для расчетных силовых и моментных напряжений получим следующие представления

$$\begin{aligned}\sigma_{\{11,22\}} &= B \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + k_1 w \right) + B_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + k_2 w \right) - B(1 + \nu) \alpha_3 T - \\ &- \alpha_3 B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \right) + I_0 \frac{\alpha B}{2\mu} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} \right)\end{aligned}\quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\{12,21\}} &= (\mu + \alpha) \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_1} + \frac{\mu - \alpha}{\mu + \alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right) - 2\alpha_3 \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \\ &+ I_0 \frac{\alpha(\mu + \alpha)}{2\mu} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\mu - \alpha}{\mu + \alpha} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} \right) \left\{ \dots \right\} + 2\alpha \psi_3\end{aligned}\quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}\{\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2, u \leftrightarrow v, \psi_1 \leftrightarrow \psi_2\} \\ \sigma_{13} = \alpha f(\alpha_3) \psi_1, \quad \sigma_{23} = \alpha f(\alpha_3) \psi_2\end{aligned}\quad (3.14)$$

и далее

$$\mu_{\{1,2\}} = \{+, -\} 2\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \{+, -\} \left[(2\gamma + \beta) k_2 \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \beta k_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} \right] + \{2\gamma k_1 + \beta(k_1 + k_2)\} \psi_3 \{+, -\} f(\alpha_3) \frac{\mu + \alpha}{4\mu} \left[(2\gamma + \beta) \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} - \beta \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} \right] + \frac{\alpha \beta}{2\mu} I_0 \left(k_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} - k_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} \right) \quad (3.15)$$

$$\mu_{\{2,2\}} = \{+, -\} (\gamma + \varepsilon) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} - \eta \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \right) \{+, -\} (\gamma + \varepsilon) \left(k_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} - \eta k_2 \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} \right) \{+, -\} K f(\alpha_3) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} - \eta \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} \right) \{+, -\} \frac{\alpha (\gamma + \varepsilon)}{2\mu} I_0 \left(k_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} - \eta k_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} \right) \quad (3.16)$$

$$\mu_{\{3,2\}} = (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \psi_3}{\partial \alpha_1} \{+, -\} (\gamma + \varepsilon) (k_1 - \eta k_2) \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \{+, -\} \quad (3.17)$$

$$\{+, -\} K \left(k_1 - 2\eta k_2, \frac{\alpha}{\mu + \alpha} \right) f(\alpha_3) w, \{+, -\} K \eta \alpha, v$$

$$\{\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2, u \leftrightarrow v, \psi_1 \leftrightarrow \psi_2, k_1 \leftrightarrow k_2\}$$

где

$$K = \frac{(\gamma + \varepsilon)(\mu + \alpha)}{4\mu}, \quad \eta = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \quad (3.18)$$

Отметим, что все напряжения по толщине оболочки изменяются линейно.

4. Из условий статической эквивалентности для внутренних тангенциальных $(T_{12}, T_{21}, S_{12}, S_{21})$ и поперечных (N_{13}, N_{31}) усилий, изгибающих (M_{11}, M_{22}) и крутящих (H_{12}, H_{21}) моментов от силовых напряжений, изгибающих (R_{12}, R_{21}) , крутящих (P_{12}, P_{21}) и планарных (Q_{12}, Q_{21}) моментов от моментных напряжений на единицу длины торцевых сечений имеем

$$T_{\{1,2\}} = Bh \left[\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + k_1 w + v \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + k_2 w \right) \right] - B(1 + \nu) \alpha T, \quad (4.1)$$

$$S_{\{2,1\}} = (\mu + \alpha) h \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_1} + \frac{\mu - \alpha}{\mu + \alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right) \{+, -\} + 2\alpha h \psi_3, \quad (4.2)$$

$$N_{13} = \alpha \frac{h^3}{12} \psi_1, \quad N_{31} = \alpha \frac{h^3}{12} \psi_2 \quad (4.3)$$

$$M_{\{1,2\}} = - \frac{Bh^3}{12} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} - \frac{\alpha h^2}{20\mu} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + v \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} \right) \right] - B(1 + \nu) \alpha M, \quad (4.4)$$

$$H_{\{2,1\}} = -2\mu \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{\alpha(\mu + \alpha)h^3}{240\mu} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\mu - \alpha}{\mu + \alpha} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} \right) \quad (4.5)$$

$$\{\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2, u \leftrightarrow v, \psi_1 \leftrightarrow \psi_2, k_1 \leftrightarrow k_2\}$$

где

$$T_i = \int_{-h/2}^{h/2} T d\alpha_i, \quad M_i = \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_i T d\alpha_i, \quad (4.6)$$

Рассматривая эти формулы, замечаем, что они во многом повторяют соответствующие формулы уточненной теории оболочек.

Далее имеем совершенно новые представления — моменты от моментальных напряжений, которые не содержат температурных членов.

$$P_{[1,2]} = -2\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \{-,+\} h \left[(2\gamma - \beta) k_2 \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \beta k_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right] + \\ + [2\gamma k_1 + \beta(k_1 + k_2)] h \psi_2 \{-,+\} \frac{h^3 (\mu + \alpha)}{12 \cdot 4\mu} \left[(2\gamma + \beta) \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} - \beta \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} \right] \quad (4.7)$$

$$R_{[1,2]} = \{-,+\} (\gamma + \varepsilon) h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} - \eta \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \right) \{-,-\} (\gamma + \varepsilon) h \left(k_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} - \eta k_2 \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} \right) \{+,-\} \\ \{+,-\} K \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} - \eta \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} \right) \quad (4.8)$$

$$Q_{[1,2]} = (\gamma - \varepsilon) h \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} \{-,+\} (\gamma + \varepsilon) h (k_1 - \eta k_2) \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \{+,-\} K \frac{h^3}{12} \left(k_1 - 2\eta k_2 \frac{\alpha}{\mu + \sigma} \right) \psi_2 \quad (4.9) \\ \{\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2, u \leftrightarrow v, \psi_1 \leftrightarrow \psi_2, k_1 \leftrightarrow k_2\}$$

Из [2.5], после некоторых очевидных преобразований, приходим к следующим уравнениям движения в усилиях и моментах [2]:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial S_{21}}{\partial \alpha_2} + k_1 N_{13} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial S_{12}}{\partial \alpha_1} + k_2 N_{23} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial \alpha_2} - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial (P_{11} - H_{11})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (R_{11} - M_{11})}{\partial \alpha_2} + k_1 Q_{13} + N_{23} = h R_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial t^2} - h R_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial (P_{22} + H_{22})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial (R_{12} + M_{11})}{\partial \alpha_1} + k_2 Q_{23} - N_{13} = -h R_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2 \partial t^2} + h R_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial Q_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_{23}}{\partial \alpha_2} - k_2 P_{22} - k_1 P_{11} + S_{12} - S_{21} = J \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \quad (4.13)$$

где

$$R_1 = J + \frac{h^2}{12} \rho, \quad R_2 = \frac{h^2}{12} \left(\frac{\mu + \alpha}{4\mu} J + \frac{\alpha h^2}{20\mu} \rho \right) \quad (4.14)$$

Занедем эти уравнения в основных искомых функциях $u(\alpha_1, \alpha_2)$, $v(\alpha_1, \alpha_2)$, $w(\alpha_1, \alpha_2)$, $\psi_1(\alpha_1, \alpha_2)$. Подставляя значения внутренних условий и моментов из (4.1)-(4.9) в (4.10)-(4.13), получим следующие уравнения:

$$B \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} + (\mu + \alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2} + (B_{12} + \mu - \alpha) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + B(k_1 + \nu k_2) \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} +$$

$$+ \alpha k_1 \frac{h^2}{12} \psi_1 \{+, -\} 2\alpha \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} = \frac{B(1 + \nu)\alpha}{h} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(4.15)

$$\{\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2, u \leftrightarrow v, \psi_1 \leftrightarrow \psi_2, k_1 \leftrightarrow k_2\}$$

$$B(k_1 + \nu k_2) \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + B(k_2 + \nu k_1) \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + B(k_1^2 + k_2^2 + 2\nu k_1 k_2) w -$$

$$- \frac{\alpha h^2}{12} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} \right) = \frac{B(1 + \nu)\alpha}{h} (k_1 + k_2) T_1 - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(4.17)

$$\bar{A} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \Delta w - \frac{h^2}{48\mu} \left(A_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1^2} + A_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_2^2} + A_3 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right) + \frac{\alpha h^2}{12} \psi_1 - [k_2(3\gamma + \beta + \varepsilon) +$$

$$+ k_1\beta] \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} - k_1 \left[(\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} + (2\gamma + \beta) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2} \right] + k_2(\gamma + \beta - \varepsilon) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} =$$

$$= - \frac{B(1 + \nu)\alpha}{h} \frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1} + R_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial t^2} - \frac{h^2}{12} R_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + k_1 J \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(4.18)

$$\{\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2, u \leftrightarrow v, \psi_1 \leftrightarrow \psi_2, k_1 \leftrightarrow k_2\}$$

$$2\alpha \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right) - 4\gamma(k_1 - k_2) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + (\gamma + \varepsilon) \Delta \psi_3 - 4\alpha \psi_3 +$$

$$+ \frac{h^2}{48\mu} \left(D_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} - D_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} \right) = J \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}$$

(4.20)

где

$$D_{1,2} = (\mu + \alpha)(3\gamma + \beta + \varepsilon)k_1 - [2\alpha(\gamma + \varepsilon) - \beta(\alpha + \mu)]k_2, \{k_1 \leftrightarrow k_2\}$$

(4.21)

$$\bar{A} = \frac{h^2}{12} B + \gamma + \varepsilon, \quad A_1 = (\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon) + \frac{h^2}{5} B\alpha$$

$$A_2 = \frac{h^2}{5} (B_{12} + \mu - \alpha)\alpha - (\mu + \alpha)(\beta + \gamma + \varepsilon)$$

(4.22)

$$A_3 = (\mu + \alpha)(2\gamma + \beta) - \frac{h^2}{5} (\mu + \alpha)\alpha, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}$$

Мы получили систему из шести дифференциальных уравнений относительно шести искомых функций. К этим уравнениям должны быть

присоединены граничные и начальные условия, которые имеют обычную структуру, естественно при этом граничные условия будут содержать элементы термоупругого содержания. Приведем некоторые граничные условия для края $\alpha_1 = \text{const}$ [2]

а) Свободный край

$$T_{11} = 0, S_{12} = 0, M_{11} + R_{12} = 0, H_{12} + P_{11} = 0, N_{13} = 0, Q_{13} = 0 \quad (4.23)$$

б) Шарнирно опертый край

$$T_{11} = 0, v = 0, M_{11} + R_{12} = 0, \psi_2 = 0, Q_{13} = 0, w = 0 \quad (4.24)$$

в) Жестко заделанный край

$$u = 0, v = 0, w = 0, \psi_2 = 0, \left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_1=0} = 0, \left. \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_1=0} = 0 \quad (4.25)$$

Очевидно, что возможны и другие варианты непротиворечивых граничных условий.

Таким образом, основные уравнения и соотношения, а также все расчетные формулы задачи термоупругости весьма пологих оболочек по несимметричной теории упругости получены.

Построенная здесь теория термоупругости оболочек применима не только для решения задач весьма пологих оболочек. Она корректно может быть использована при рассмотрении задач краевого эффекта и локальной устойчивости различных типов оболочек, при исследовании задач колебаний (в частности, высокочастотных) и динамической устойчивости, для эффективного решения прикладных задач цилиндрических оболочек и др.

5. Для иллюстрации рассмотрим некоторые модельные задачи.

а) Шарнирно опертая по всему контуру весьма пологая сферическая оболочка ($k_1 = k_2 = k = R^{-2}$) с квадратным контуром ($0 \leq \alpha_1 \leq b, 0 \leq \alpha_2 \leq b$) под действием температуры распределенной по закону [7,8]

$$T = (T_0 + \alpha_2 T_1) \sin \frac{\pi \alpha_1}{b} \sin \frac{\pi \alpha_2}{b}$$

$$T_1 = T_0 h \sin \frac{\pi \alpha_1}{b} \sin \frac{\pi \alpha_2}{b}, \quad M_1 = \frac{h^2}{12} T_1 \sin \frac{\pi \alpha_1}{b} \sin \frac{\pi \alpha_2}{b} \quad (5.1)$$

Из (4.15)–(4.20) и согласно (4.6) имеем следующие исходные уравнения:

$$B \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} + (\mu + \alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2} + (B_{12} + \mu - \alpha) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{B(1 + \nu)}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} +$$

$$+ \frac{\alpha h^2}{12R} \psi_1 + 2\alpha \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} = \frac{B(1 + \nu) \alpha_2 T_0 \pi}{b} \cos \frac{\pi \alpha_1}{b} \sin \frac{\pi \alpha_2}{b}$$

$$B \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_2^2} + (\mu + \alpha) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1^2} + (B_{12} + \mu - \alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{B(1 - \nu)}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\alpha h^2}{12R} \psi_2 - 2\alpha \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} = \frac{B(1+\nu)\alpha T_1 \pi}{b} \sin \frac{\pi \alpha_1}{b} \cos \frac{\pi \alpha_2}{b} \\
 & \frac{B(1+\nu)}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} \right) + 2 \frac{B(1+\nu)}{R^2} w - \frac{\alpha h^2}{12} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} \right) = \\
 & = 2 \frac{B(1+\nu)\alpha T_1}{R} \sin \frac{\pi \alpha_1}{b} \sin \frac{\pi \alpha_2}{b}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
 & A \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \Delta w - \frac{h^2}{48\mu} \left(A_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1^2} + A_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_2^2} + A_3 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right) + \frac{\alpha h^2}{12} \psi_1 - \\
 & - \frac{3\gamma + 2\beta + \varepsilon}{R} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{R} \left[(\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} + (2\gamma + \beta) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2} - (\gamma + \beta - \varepsilon) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right] = \\
 & = - \frac{B(1+\nu)\alpha T_1 h \pi}{12b} \cos \frac{\pi \alpha_1}{b} \sin \frac{\pi \alpha_2}{b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \Delta w - \frac{h^2}{48\mu} \left(A_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_2^2} + A_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1^2} + A_3 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right) + \frac{\alpha h^2}{12} \psi_2 - \\
 & - \frac{3\gamma - 2\beta + \varepsilon}{R} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{R} \left[(\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_2^2} + (2\gamma + \beta) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1^2} - (\gamma + \beta - \varepsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right] = \\
 & = - \frac{B(1+\nu)\alpha T_1 h \pi}{12b} \sin \frac{\pi \alpha_1}{b} \cos \frac{\pi \alpha_2}{b}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
 & 2\alpha \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right) + (\gamma + \varepsilon) \Delta \psi_3 - 4\alpha \psi_3 + \\
 & + \frac{h^2 \left[(\mu + \alpha)(3\gamma + 2\beta + \varepsilon) - 2\alpha(\gamma - \varepsilon) \right]}{48\mu R} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Граничные условия

при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = b$, $T_{11} = 0$, $v = 0$, $M_{11} + R_{12} = 0$, $\psi_1 = 0$, $Q_{11} = 0$, $w = 0$
 при $\alpha_2 = 0$, $\alpha_2 = b$, $T_{22} = 0$, $u = 0$, $M_{22} + R_{21} = 0$, $\psi_2 = 0$, $Q_{22} = 0$, $w = 0$ (5.6)

Пологая

$$\begin{aligned}
 w &= W \sin \frac{\pi \alpha_1}{b} \sin \frac{\pi \alpha_2}{b}, & \psi_3 &= \Psi_3 \cos \frac{\pi \alpha_1}{b} \cos \frac{\pi \alpha_2}{b} \\
 \{u, \psi_1\} &= \{U, \Psi_1\} \cos \frac{\pi \alpha_1}{b} \sin \frac{\pi \alpha_2}{b}, & \{v, \psi_2\} &= \{V, \Psi_2\} \sin \frac{\pi \alpha_1}{b} \cos \frac{\pi \alpha_2}{b}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Удовлетворим граничным условиям ширинного опирания (5.6), а из системы уравнений (5.2)-(5.5) для коэффициентов искомых функций точностью $1 \pm l^2/b^2 \approx 1$ получим

$$W = \frac{B(1+\nu)h}{24A\lambda^2 a_4} \alpha, T_1 + \frac{AB(1+\nu)\alpha_2}{2A\lambda^4 R a_4} \alpha, T_0, \quad \Psi_1 = 0 \quad (5.8)$$

$$U - V = \frac{B(1+\nu)^2 a_1 h}{48A\lambda^3 R a_4} \alpha, T_1 + \frac{AB(1+\nu)^2 a_1 a_2}{4A\lambda^5 R^2 a_4} \alpha, T_0 - \frac{(1+\nu)\alpha_1}{2\lambda} \alpha, T_0 \quad (5.9)$$

$$\bar{\Psi}_1 - \Psi_1 = -\frac{12}{\alpha h^2} \left[\frac{B^2(1+\nu)^2 h a_1}{24A\lambda^3 R^2 a_4} \alpha, T_1 + \frac{B(1-\nu)\alpha_2}{R\lambda} \alpha, T_0 - \frac{AB^2(1+\nu)^2 a_2^2}{2A\lambda^3 R^2 a_4} \alpha, T_0 \right] \quad (5.10)$$

где

$$a_1 = \frac{1 - \frac{1}{R^2 \lambda^2}}{1 + \nu}, \quad a_2 = 1 - \frac{(1+\nu)\alpha_1}{2}, \quad a_4 = 1 + \frac{AB(1+\nu)}{2AR^2 \lambda^4} \left[1 - \frac{(1+\nu)\alpha_1}{2\lambda R} \right] \quad (5.11)$$

$$\bar{A} = \frac{Bh^2}{12} + (\gamma + \varepsilon) = \frac{Bh^2}{12} \left[1 + 24(1-\nu) \frac{\alpha}{\alpha + \mu} \frac{l^2}{h^2} \right] \quad (5.12)$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 1 + \frac{\lambda^2 h^2}{5(1-\nu)} \left[1 + 10(1-\nu) \frac{l^2}{h^2} \right] \quad (5.13)$$

и, наконец, новое обобщающее постоянное упругости l , которое имеет размерность длины и записывается следующим образом [2]

$$l^2 = \frac{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}{4\mu\alpha} \quad (5.14)$$

Подставляя (5.8)-(5.10) в (5.7) и используя (3.3), (3.12)-(3.17) а также в (4.1)-(4.9), при этом полагая $k_1 = k_2 = k = R^{-1}$, получим значения всех расчетных напряжений, усилий и моментов, как традиционных, так и совершенно новых. В частности, мы имеем изгибающие и крутящие моменты, которые происходят вследствие учета моментных напряжений (P_1, R_2) , которые перекликаются с классическими моментами, а также совершенно новые планарные моменты (Q_3) , которые в классической теории вовсе отсутствуют и существенно зависят как от новых упругих постоянных, так и от кривизны оболочки. В рассматриваемой температурной задаче, в случае пластинки ($R = \infty$) они отсутствуют.

б) Изгиб свободно опертой по всему контуру, квадратной пластинки $(h \times b \times h)$ под действием температуры T , которая изменяется во времени и распределена по закону

$$T = \frac{\alpha_1}{h} T_1 e^{-\lambda_1 z} \sin \lambda \alpha_1 \sin \lambda \alpha_2, \quad \lambda = \frac{\pi}{b} \quad (5.15)$$

где a — температуропроводность [6], и согласно (4.6)

$$M_c = T_1 \frac{h^3}{12} e^{-\lambda_1^2 z} \sin \lambda \alpha_1 \sin \lambda \alpha_2 \quad (5.16)$$

Из (4.17)-(4.19) при $k_1 = k_2 = 0$ получим следующие исходные уравнения:

$$A \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \Delta w - \frac{h^2}{48\mu} \left(A_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1^2} + A_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_2^2} + A_3 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right) + \frac{\alpha h^2}{12} \psi_1 =$$

$$= -\frac{B(1+\nu)\alpha_1}{h} \frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1} + R_1 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha_1 \partial t^2} - R_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}$$

$$A \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \Delta w - \frac{h^2}{48\mu} \left(A_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_2^2} + A_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1^2} + A_3 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right) + \frac{\alpha h^2}{12} \psi_2 =$$

$$= -\frac{B(1+\nu)\alpha_2}{h} \frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2} + R_1 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha_2 \partial t^2} - R_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}$$

$$\frac{\alpha h^2}{12} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5.19)$$

Полагая

$$w = We^{-2\lambda a t} \sin \lambda \alpha_1 \sin \lambda \alpha_2, \quad \psi_2 = \Psi_2 e^{-2\lambda a t} \sin \lambda \alpha_1 \cos \lambda \alpha_2 \quad (5.20)$$

$$\psi_1 = \Psi_1 e^{-2\lambda a t} \cos \lambda \alpha_1 \sin \lambda \alpha_2$$

удовлетворим граничным условиям свободного опирания по всему контуру ($\alpha_1 = 0, \alpha_1 = h, \alpha_2 = 0, \alpha_2 = h$), а из системы дифференциальных уравнений, для постоянных интегрирования получим

$$\Psi_1 = \Psi_2 = -\frac{24\lambda^2 \rho a^2}{\alpha h^2} W, \quad W = \frac{B(1+\nu)\alpha_1 h T_1}{24\lambda^2} \{ \} \quad (5.21)$$

где

$$\{ \} = A + \left(1 + \frac{A\lambda^2}{4\mu\alpha} \right) a^2 \rho + 2R_1 \lambda^2 a^2 + \frac{48R_2 \lambda^2}{\alpha h^2} a^2 \rho \quad (5.22)$$

Полагая, что динамическая характеристика среды J пропорциональна плотности ρ , т.е. $J = \rho h^2 r$ где r — постоянный коэффициент пропорциональности, введя безразмерный параметр $k = a^2 \rho / \mu h^2$, согласно (4.14), (5.12), (5.13) и (5.15) для (5.22) в развернутой форме получим

$$\{ \} = \frac{Bh^2}{12} \left[1 + 24(1-\nu) \frac{\alpha}{\mu + \alpha} \frac{l^2}{h^2} + \left[1 + \frac{\pi^2}{5(1-\nu)} \frac{h^2}{h^2} \left(1 + 10(1-\nu) \frac{l^2}{h^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\pi^2}{6} \frac{h^2}{b^2} (1 + 12r) \right] 6(1-\nu)k + \left(\frac{\alpha}{\mu} + 5 \frac{\alpha + \mu}{\alpha} r \right) \frac{6\pi^4 \mu (1-\nu) h^4}{5\alpha b^4} k \right] = \frac{Bh^2}{12} Q \quad (5.23)$$

Теперь, окончательно для искомых функций получим

$$w = \frac{(1+\nu)\alpha_1 T_1 b^2}{2\pi^2 h Q} e^{-2\lambda a t} \sin \frac{\pi \alpha_1}{b} \sin \frac{\pi \alpha_2}{h} \quad (5.24)$$

$$\psi_1 = -\frac{12\pi(1+\nu)\alpha_1 T_1 \rho a^2}{\alpha b h^2 Q} e^{-2\lambda a t} \cos \frac{\pi \alpha_1}{b} \sin \frac{\pi \alpha_2}{h} \quad (5.25)$$

$$v_2 = -\frac{12\pi(1+\nu)\alpha_1 T_1 \rho a^4}{\alpha b h^3 Q} e^{-2\alpha_1 a} \sin \frac{\pi \alpha_1}{b} \cos \frac{\pi \alpha_2}{b} \quad (5.26)$$

Отбрасывая инерционные члены, получим

$$w_0 = \frac{(1+\nu)\alpha_1 T_1 b^2 e^{-2\alpha_1 a}}{2\pi^2 h \left[1 + 24(1-\nu) \frac{\alpha}{\mu + \alpha} \frac{l^2}{h^2} \right]} \sin \frac{\pi \alpha_1}{b} \sin \frac{\pi \alpha_2}{b}, \quad \psi_1 = 0 \quad (5.27)$$

Согласно (5.24) и (5.27) для отношения w/w_0 имеем

$$\frac{w}{w_0} = \frac{1 + 24(1-\nu) \frac{\alpha}{\mu + \alpha} \frac{l^2}{h^2}}{Q} \quad (5.28)$$

Отсюда легко заметить, что учет инерционных членов характеризуется всеми геометрическими (h, b) и термомеханическими ($\mu, \nu, \rho, \alpha, r$) параметрами пластинки.

На примерах оценим значение учета инерционных сил. Пусть $\nu = 0.2$, $\alpha = 0.1 \mu$, $r = 0.1$, $h/b = 0.1$, $l^2/h^2 = 0.1$, тогда получим

$$= 1.1746(1.1746 + 5.1869k + 0.5237k^2)^{-1}$$

Увеличим относительную толщину пластинки вдвое путем уменьшения планарных размеров, т.е. пусть теперь $h/b = 0.2$, тогда получим

$$\frac{w}{w_0} = 1.1746(1.1746 + 6.3476k + 8.3787k^2)^{-1}$$

т.е. при заданных k увеличивается удельный вес учета сдвиговых инерционных членов и тем самым новых упругих постоянных. Ту же самую картину, менее ярко выраженную, наблюдаем при увеличении параметра r , т.е. удельного веса динамической характеристики J . В частности полагая $r = 0.2$, получим

$$\frac{w}{w_0} = 1.1746(1.1746 + 5.2816k + 1.0379k^2)^{-1}$$

в) Осесимметричная форма потери устойчивости круговой цилиндрической оболочки (R, h), под действием равномерно распределенной по оболочке температуры T_0 , при неподвижных торцах ($\alpha_1 = 0, \alpha_2 = b$). Оболочка имеет или идеально правильную цилиндрическую форму, а ее начальное напряженное состояние безмоментное [9]. В начальном состоянии в оболочке появляется лишь осевое сжимающее усилие T_{11} , равное [2,3]

$$T_{11}^0 = -Eh\alpha_1 T_0 \quad (5.29)$$

тогда, для фиктивной радиальной нагрузки Z_2^* получим [2,9]

$$Z_1^* = -Eh\alpha_1 T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} \quad (5.1)$$

В этом случае, из системы уравнений (4.15)-(4.20) приходим к следующей системе однородных линейизованных уравнений:

$$E \frac{w}{R^2} - \frac{\alpha h^2}{12} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} = -E\alpha_1 T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2}, \quad A \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} - \frac{h^2 A}{48\mu} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1^2} + \alpha \frac{h^2}{12} \psi_1 = 0 \quad (5.11)$$

Решение этой системы представим в виде:

$$w_m = W_m \sin \frac{m\pi \alpha_1}{b}, \quad \psi_{1,m} = \Psi_m \cos \frac{m\pi \alpha_1}{b} \quad (5.12)$$

что будет удовлетворять условиям шарнирного опирания по торам оболочки, а m будет представлять число полуволн, по которым изгибается образующая оболочки.

После очевидных подстановок, с использованием представлений (4.22), (5.12), (5.14), для собственных значений интенсивности температуры получим

$$E\alpha_1 T_{cm} = \frac{E}{R^2} \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} + \frac{Bh^2}{12} \frac{\left[1 + 24(1-\nu) \frac{\alpha}{\mu + \alpha} \frac{l^2}{h^2} \right] \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}{1 + \frac{h^2}{10(1-\nu)} \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \left[1 + 10(1-\nu) \frac{l^2}{h^2}\right]} \quad (5.13)$$

Отсюда, при заданных значениях параметров оболочки, численным анализом можно определить, как критическое значение m_{cr} , так и величину критической температуры $T_{кр}$, при которой оболочка теряет устойчивость.

В случае существенно тонких оболочек и при небольших m формула (5.13) можно переписать следующим образом:

$$E\alpha_1 T_{cm} = \frac{E}{R^2} \frac{1}{(m\pi/b)^2} + \frac{Bh^2}{12} \left[1 + 24(1-\nu) \frac{\alpha}{\mu + \alpha} \frac{l^2}{h^2}\right] \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad (5.14)$$

Полагая, что величина $(m\pi/b)^2 = \eta$ непрерывно изменяется, из условия минимума $\frac{\partial(E\alpha_1 T_{cm})}{\partial \eta} = -\frac{E}{R^2} \frac{1}{\eta^3} + \frac{Bh^2}{12} \left[1 + 24(1-\nu) \frac{\alpha}{\mu + \alpha} \frac{l^2}{h^2}\right] = 0$

для m_{cr} получим

$$m_{cr} = \frac{b}{\pi R} \sqrt{\frac{R}{h}} \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)}{1 + 24(1-\nu) \frac{\alpha}{\mu + \alpha} \frac{l^2}{h^2}}} \quad (5.15)$$

а из (5.14) найдем следующую формулу для определения критической температуры:

$$E\alpha_1 T_{cr} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{h}{R} \sqrt{1 + 24(1-\nu) \frac{\alpha}{\mu + \alpha} \frac{l^2}{h^2}} \quad (5.16)$$

т.е. известную формулу с поправкой на моментные напряжения.

Например: при $\nu = 0$, $\alpha = 0.1\mu$, $l^2/h^2 = 0.2$, без поправки имеем $[9] \sim 0.6Eh/R$, а с поправкой $\sim 0.7Eh/R$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Наука, 1975.
2. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: ИАН Армении, 1999.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961.
4. Амбарцумян С.А. Температурная задача микрополярной пластинки. // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2000. №3
5. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976.
6. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые плагионарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958.
7. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964.
8. Амбарцумян С.А. Температурные напряжения в слоистых анизотропных оболочках. // Известия АН Армении. ФМЕТ науки. 1952. Т.5, №6
9. Амротов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машинное строительство, 1978.

Институт механики
ИАН Армении

Поступила в редакцию
30.08.2002

УДК 539.3

К ВОПРОСУ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПО
 ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИНКИ

Белубекян М.В.

Մ.Վ. Բելուբեկյան

Ըստ հաստության անհամասեռ սալի տատանումների խնդրի վերաբերյալ
 ենթադրվում է, որ սալի անհամասեռությունը ըստ հաստության ուղիղանոթիկ է և տեղի ունի
 Կլորիտի վարկածը: Արդյունքում են ձգվում, սահման և ծածան կոշտության արդյունավետ
 մոդուլները Հաստատվում է սալի հարկածային ծովափ վիճակի անկախության
 հնարավորությունը, որը էական կախված է Գուսսոնի գործակիցի ըստ հաստության
 փոփոխության վարկածից:

M.V. Belubekyan

On the Problem of Vibrations of the Plate with Nonhomogeneity along Thickness.

Впервые задача исследования пластин, симметрично неоднородных по толщине, была
 поставлена С.Г. Лехницким [1, 2] и в работе [3] рассмотрена задача колебаний пластины неод-
 нородной по толщине при условии постоянства коэффициента Пуассона и с учетом
 поперечных сдвигов.

В настоящей работе исследуются задачи несимметрично неоднородных по толщине
 пластин на основе гипотезы Кирхгофа и без условия постоянства коэффициента Пуассона.

Несимметричность понимается в смысле, что если функции механических характери-
 стик материала пластинки непрерывны по толщинной координате, то они несимметричны
 относительно срединной плоскости. Если же они кусочно-непрерывны (слоистая пластинка),
 то задача несимметрична относительно любой плоскости раздела слоев и срединной
 поверхности.

Вводятся преобразование относительно функций планарных перемещений, позволяю-
 щее установить классы задач, для которых отделяются задачи определения обобщенного
 плоского напряженного состояния и изгиба. Устанавливается возможность потери
 устойчивости пластинки при действии по краям изгибающих моментов и при действии
 нормальной нагрузки.

1. Упругая пластинка в прямоугольной декартовой системе координат
 (x, y, z) занимает область $0 < x < a$, $0 < y < b$, $-h_1 \leq z \leq h_2$. Модуль Юнга E ,
 коэффициент Пуассона ν и плотность материала пластинки ρ являются
 функциями координаты z . Принимаются допущения гипотезы Кирхгофа:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{11} + \nu \epsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{22} + \nu \epsilon_{11}), \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{12} \quad (1.1)$$

$$u_x = u - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = v - z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_z = w, \quad u, v, w \sim (x, y, z) \quad (1.2)$$

$$\int_{-h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dz = 0, \quad (i=1,2,3), \quad \int_{-h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) z dz = 0 \quad (i=1,2) \quad (1.3)$$

и пренебрегаются моменты инерции вращения.

Выражения для усилий и моментов, согласно (1.1), (1.2) получаются в

$$\begin{aligned}
 T_1 &= C \frac{\partial u}{\partial x} + (C - 2B_0) \frac{\partial v}{\partial y} - \left[K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (K - 2B_1) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\
 T_2 &= C \frac{\partial v}{\partial y} + (C - 2B_0) \frac{\partial u}{\partial x} - \left[K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (K - 2B_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\
 S &= B_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2B_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 M_1 &= K \frac{\partial u}{\partial x} + (K - 2B_1) \frac{\partial v}{\partial y} - \left[D_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (D_0 - 2B_2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\
 M_2 &= K \frac{\partial v}{\partial y} + (K - 2B_1) \frac{\partial u}{\partial x} - \left[D_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (D_0 - 2B_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\
 H &= B_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2B_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 C &= \int_{-h_1}^{h_1} \frac{E}{1-\nu^2} dz \\
 K &= \int_{-h_1}^{h_1} \frac{z^2 E}{1-\nu^2} dz, \quad D_0 = \int_{-h_1}^{h_1} \frac{z^4 E}{1-\nu^2} dz, \quad B_k = \frac{1}{2} \int_{-h_1}^{h_1} \frac{z^k E}{1+\nu} dz, \quad k = 0, 1, 2
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Подстановка (1.4) в осредненные уравнения движения (1.3) приводит к уравнениям относительно перемещений u, v, w

$$\begin{aligned}
 B_1 \Delta u + (C - B_0) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - K \frac{\partial}{\partial x} \Delta w &= m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2 \partial x} \\
 B_1 \Delta v + (C - B_0) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - K \frac{\partial}{\partial y} \Delta w &= m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2 \partial y} \\
 D_0 \Delta^2 w - r \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K \Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + p \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= q
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

где q — нормальная нагрузка.

$$m = \int_{-h_1}^{h_1} \rho dz, \quad p = \int_{-h_1}^{h_1} \rho z dz, \quad r = \int_{-h_1}^{h_1} \rho z^2 dz \tag{1.7}$$

Условия $K = 0, p = 0$ являются достаточными для отделения уравнений обобщенного плоского напряженного состояния и изгиба. Можно показать, что члены уравнения (1.6) с множителем p имеют порядок моментов инерции вращения, поэтому они в дальнейшем пренебрегаются в соответствии с теорией пластин Кирхгофа.

2. Для системы уравнений (1.6) вводится следующее преобразование [4]:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{K}{C} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{K}{C} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.1)$$

При помощи (2.1) система уравнений с учетом $p = 0$ приводится к виду

$$C\Delta\varphi = m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{mK}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad B_0 \Delta\psi - m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

$$D\Delta^2 w - r \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K\Delta^2 \varphi = q \quad (2.3)$$

$$D = D_0 - C^{-1}K^2 \quad (2.4)$$

Преобразование (2.1) аналогично введению функций Ламе для частного случая задачи плоской деформации. И здесь очевидно, что решения системы (2.2) (2.3) удовлетворяют уравнениям (1.6). Однако обратное утверждение требует доказательства, аналогичное доказательству полноты функций Ламе [5].

Уравнение относительно ψ отделяется от системы уравнений относительно φ и w . Однако, в общем случае, они связаны граничными условиями на краях пластинки.

В случае статических задач для каждой из искомых функций φ , ψ , w получаются автономные уравнения. Поэтому можно условно считать, что формула (2.4) определяет эффективную жесткость пластинки на изгиб. В этом же смысле C будет эффективной жесткостью на растяжение (сжатие), B_0 — эффективной жесткостью на сдвиг, m — приведенной массой.

Анализ задачи собственных колебаний бесконечной пластинки на основе системы уравнений (2.2), (2.3) показывает, что члены с коэффициентами mKc^{-1} , r имеют тот же порядок, что и моменты инерции вращения. Поэтому для задач колебаний тонких пластин, в согласии с теорией Кирхгофа, предлагается вместо системы (2.2), (2.3) использовать следующую систему:

$$C\Delta\varphi = m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad B_0 \Delta\psi = m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

$$D\Delta^2 w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K\Delta^2 \varphi = q$$

Необходимо отметить, что эффективная жесткость D всегда положительна.

Если ввести обозначения

$$f(z) = \frac{z^2 E}{1 - \nu^2} > 0, \quad g(z) = \frac{E}{1 - \nu^2} > 0$$

то условие $D > 0$ согласно (2.4) приводится к неравенству Коши-Буняковского

$$\left(\int_{-h_2}^{h_1} f dz \right) \left(\int_{-h_2}^{h_1} g dz \right) > \left(\int_{-h_2}^{h_1} \sqrt{f} \sqrt{g} dz \right)^2$$

Граничные условия относительно функций φ , ψ , w на краях пластинки получаются обычным способом осреднения и использования преобразования

(2.1) Для частных случаев указанные граничные условия для кромки $x = \text{const}$ приводятся ниже

Жесткая заделка —

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

Шарнирное закрепление —

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.7)$$

Скользящий контакт —

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - K \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

3. Для задач статики, при действии поперечной нагрузки $q(x, y)$ на нижней поверхности пластинки, функции φ и ψ , согласно (2.5), должны удовлетворять однородным уравнениям Лапласа и однородным граничным условиям вида (2.6)-(2.8). Отсюда следует, что в этом случае $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Тогда для определения прогиба w получается обычная задача теории изгиба пластин с эффективной жесткостью D определяемой по формуле (2.4). При этом перемещения u, v определяются согласно (2.1) следующим образом:

$$u = \frac{K}{C} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = \frac{K}{C} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.1)$$

Подстановка (3.1) в (1.4) приводит к определению усилий и моментов через функцию прогиба w

$$\begin{aligned} T_1 = A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad T_2 = A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad S = -A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ M_1 = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (D - A_2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad M_2 = -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (D - A_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$H = -A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad N_1 = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w, \quad N_2 = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w$$

где

$$A_1 = 2(B_1 - B_0 K C^{-1}), \quad A_2 = 2(B_2 - B_1 K C^{-1}) \quad (3.3)$$

Легко проверить, что $A_1 = 0$ при $v = \text{const}$ и, следовательно,

$$T_1 = T_2 = S = 0 \quad (3.4)$$

В общем случае $A_1 \neq 0$. В частности, для двухслойной пластинки [4.6]

$$A_1 = \frac{v_2 - v_1}{2} \frac{h_1 h_2 (h_1 + h_2) E_1 E_2}{E_1 h_1 (1 - v_2^2) + E_2 h_2 (1 - v_1^2)} \quad (3.1)$$

Знак коэффициента A_1 определяет, являются ли усилия T_1, T_2 растягивающими или сжимающими.

Очевидно, что в случае, когда T_1, T_2 сжимающие, возможна постановка вопроса устойчивости пластинки под действием поперечной нагрузки.

Пусть пластинка-полоса (цилиндрический изгиб) с жестко заделанными краями $x = 0, a$ изгибается при действии поперечной нагрузки $q = q_0 = \text{const}$.

Усилия и моменты согласно (3.2) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} T_1 = 0, T_2 = \frac{q_0 a^2}{2D} A_1 f(x), S = 0, M_1 = -\frac{q_0 a^2}{2} f(x) \\ M_2 = -\left(1 - \frac{A_2}{D}\right) \frac{q_0 a^2}{2} f(x), N_1 = -\frac{q_0 a^2}{2} f(x), N_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \xi = \frac{x}{a}, \xi_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \xi_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ f(x) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Функция $f(x)$ - знакопеременная. Она отрицательна в интервале (ξ_1, ξ_2) и положительна вне этого интервала. Отсюда следует, что усилия T_2 также является знакопеременной функцией от x и его знак определяется знаком коэффициента A_1 и знаком функции $f(x)$. Поскольку всегда существует интервал, для которого T_2 является отрицательной функцией (сжимающее усилие), то возможна потеря устойчивости рассматриваемой пластинки [7,8].

4 На основе полученных уравнений (2.5) и граничных условий (2.6)-(2.8) рассмотрены частные задачи свободных колебаний пластинки. Для прямоугольной пластинки с четырьмя шарнирно закрепленными краями решение имеет вид

$$\begin{aligned} \psi = \sum_{p,q=1}^{\infty} \psi_{pq} e^{i\omega_{pq} t} \sin \mu_p x \sin \lambda_q y, \varphi = \sum_{p,q=1}^{\infty} \varphi_{pq} e^{i\omega_{pq} t} \sin \mu_p x \sin \lambda_q y \\ w = \sum_{p,q=1}^{\infty} (w_{pq} e^{i\Omega_{pq} t} + A_{pq} e^{i\omega_{pq} t}) \sin \mu_p x \sin \lambda_q y \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{pq}^2 = m^{-1} C (\mu_p^2 + \lambda_q^2) \zeta_{pq} = m^{-1} B_0 (\mu_p^2 + \lambda_q^2) \Omega_{pq}^2 = m^{-1} D (\mu_p^2 + \lambda_q^2)^2 \\ \mu_p = \frac{p\pi}{a}, \lambda_q = \frac{q\pi}{b}, A_{pq} = m^{-1} K (\mu_p^2 + \lambda_q^2)^2 (\Omega_{pq}^2 - \omega_{pq}^2)^{-1} \varphi_{pq} \end{aligned} \quad (4.2)$$

В случае свободных колебаний пластинки-полосы с шарнирно закрепленным краем $x = 0$ и скользящим краем $x = a$ получаются следующие результаты:

$$w = \sum_{p=1}^{\infty} (w_p e^{i\omega_p t} + A_p e^{i\omega_p t}) \sin \chi_p x, \varphi = \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p e^{i\omega_p t} \sin \chi_p x \quad (4.3)$$

$$A_p = \frac{K \chi_p^2}{\Omega_p^2 - \omega_p^2} \varphi_p, \chi_k = \frac{(2p-1)\pi}{2a}, \omega_p^2 = \frac{c}{m} \chi_p^2, \Omega_p^2 = \frac{D}{m} \chi_p^2 \quad (4.4)$$

Наконец, для задачи свободных колебаний пластинки с граничными условиями шарнирного закрепления краев $x = 0, a$, и скользящего контакта краев $y = 0, b$

$$\varphi = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \varphi_{pq} e^{i\omega_{pq} t} \sin \mu_p x \cos \lambda_q y, \psi = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \psi_{pq} e^{i\omega_{pq} t} \cos \mu_p x \sin \lambda_q y \quad (4.5)$$

$$w = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (w_{pq} e^{i\omega_{pq} t} + A_{pq} e^{i\omega_{pq} t}) \sin \mu_p x \cos \lambda_q y$$

Принятые здесь обозначения совпадают с обозначениями (4.2).

5. Рассмотрим напряженно деформированное состояние неоднородной пластинки при действии изгибающих моментов на краях. Пусть по шарнирно-закрепленным краям пластинки $x = 0, a$ приложены нагрузки $\sigma_{11} = \sigma_c(z)$ такие, что

$$T_1 = \int_{-h_1}^{h_1} \sigma_c(z) dz = 0, M_1 = \int_{-h_1}^{h_1} z \sigma_c(z) dz = M_0 \quad (5.1)$$

В том случае граничные условия шарнирного закрепления имеют вид

$$T_1 = 0, v = 0, w = 0, M_1 = M_0 \quad \text{при } x = 0, a \quad (5.2)$$

или же в перемещениях

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{KM_0}{CD}, v = 0, w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M_0}{D} \quad (5.3)$$

Принимается, что на краях пластинки $y = 0, b$ имеют место условия скользящего контакта, аналогичные (2.8). После введения преобразования (2.1) указанные граничные условия приведутся к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M_0}{D} \quad \text{при } x = 0, a \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, b \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D \frac{\partial w}{\partial y} - K \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] = 0$$

Для приведенной задачи пластинка изгибается по цилиндрической поверхности и искомые функции определяются следующим образом:

$$w_1 = M_0 a^2 (2CD)^{-1} \xi (1 - \xi^2), \quad \varphi = \psi = 0 \quad (5.6)$$

$$u_x = \frac{M_0 K a}{2CD} (1 - 2\xi), \quad T_2 = -\frac{A_1 M_0}{D}, \quad T_1 = S = 0 \quad (5.7)$$

При изгибе моментами появляется усилие T_2 , знак которого зависит от знака коэффициента A_1 . Условие $A_1 > 0$ для двухслойной пластинки (3.5) означает, что $v_2 > v_1$ и усилие T_2 будет сжимающим. Поэтому возможна потеря устойчивости пластинки. Если начальному состоянию пластинки, определяемому по выражениям (5.6), (5.7), придать возмущение $w = w(x, y)$, то задача устойчивости приведет к решению уравнения

$$D\Delta^2 w - T_2 \partial^2 w / \partial y^2 = 0 \quad (5.8)$$

с граничными условиями

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, a, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \quad \text{при } y = 0, b \quad (5.9)$$

Представление решения задачи в виде

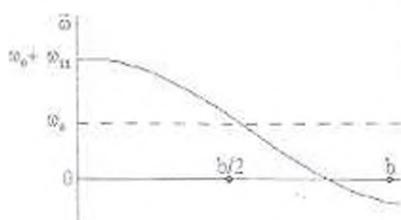
$$w = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} w_{ps} \sin \mu_p x \cos \lambda_s y \quad (5.10)$$

приводит к определению критического значения изгибающего момента из равенства

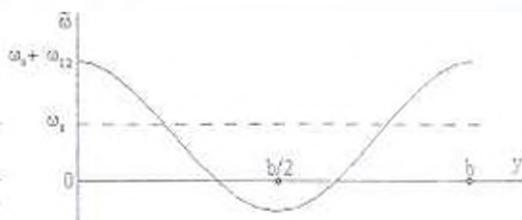
$$A_1 D^{-1} M_0 = \lambda_s^{-2} (\mu_p^2 + \lambda_s^2)^2 D \quad (5.11)$$

Из (5.11) следует, что минимальное критическое значение изгибающего момента M_0 , при котором имеет место неустойчивость, достигается при $p = 1, s = E(b/a) = k$, где $E(b/a)$ означает целую часть отношения b/a к целой единице

$$M_0 = A_1^{-2} \lambda_k^{-2} (\mu_1^2 + \lambda_k^2)^2 D^2 \quad (5.12)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В частности, для квадратной пластинки

$$M_0 = A_1^{-2} a^{-2} 4\pi^2 D^2 \quad (5.13)$$

На фиг. 1 приводится форма потери устойчивости квадратной пластинки для сечения $x = a/2$

На фиг. 2 приводится форма потери устойчивости прямоугольной пластинки с размерами $b = 2a$ для сечения $x = a/2$

Автор благодарит Р.М. Киракосяна за содержательное обсуждение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахницкий С.Г. Изгиб неоднородных анизотропных плит симметричного строения// ПММ. 1941. Т.V. Вып 1.
2. Ахницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеориздат, 1957. 464с.
3. Мовсисян А.А. К свободным колебаниям неоднородных пластин//Изв НАН Армении. Механика. 1997. Т.50. №3-4.С.42-48.
4. Амбарцумян С.А. Белубекян М.В. Об одном подходе к определению эффективных модулей несимметрично собранных многослойных пластин.// Проблемы прочности и пластичности. Межвуз сб. Нижегородский ун-т. 2000. вып.61, с. 26-30.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.872с.
6. Белубекян М.В. Неустойчивость двухслойной пластинки при действии изгибающего момента// Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т.54 №1.С 26-31.
7. Гнуви В.Ц., Микаелян Н.З. Выпучивание длинной эксцентрично закрепленной пластинки под действием поперечной нагрузки.// Докл АН Арм.ССР. 1970.Т. 11. №3, С. 140-143.
8. Гнуви В.Ц. Микаелян Н.З. Выпучивание длинных слоистых пластин и цилиндрических панелей// Изв АН Арм.ССР. Механика. 1971. Т.24 №2. С.39-45.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
26.04.2002

УДК 537.2 : 539.3

ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ ОТ
ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА РОМБИЧЕСКОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИ-
ЧЕСКОГО КРИСТАЛЛА КЛАССА 222 И ВАКУУМА

Багдасарյան Գ.Ե., Берберյան Ա.Մ., Դանոյան Յ.Ն.

Գ.Ե. Բաղդասարյան, Ա.Մ. Բերբերյան, Յ.Ն. Դանոյան

Մասերի էլեկտրատառձգական ալիքի անդրադարձումը շեղանկյուն սլեզոկելեկտրիկ 222 դասի բյուրեղի և վակուումի բաժանման սահմանից

Պիտարվում է առաջի էլեկտրատառձգական խարք ալիքի անցյալայությունը շեղանկյուն սլեզոկելեկտրիկ 222 դասի բյուրեղի և վակուումի բաժանման սահմանից: Գտնվում են ալիքային դաշտից ալեզոկելեկտրիկ բյուրեղում և վակուումում, որովհետև նմ առաջացող ալիքների լայնությունը գործակիցները հնույց և տրվում, ոչ բացի անկյան որոշ դեպքերից, բյուրեղում առաջանում է ուղեկցող մակերևութային ալիք, որի սլառոնառով անդրադարձումը ունի ցլիվ ներքին անդրադարձման բնույթ

G. Y. Bagdasaryan, A. Kh. Berberyan, Z. N. Danoyan

Reflection of an electroelastic shear wave at the interface between a piezoelectric rhombic crystal of 222 class and vacuum

Рассмотрено отражение плоской электроупругой сдвиговой волны от границы раздела пьезоэлектрического ромбического кристалла класса 222 и вакуума. Найдены волновые поля в пьезоэлектрическом кристалле и в вакууме, определены амплитудные коэффициенты возникающих волн. Показано, что, кроме некоторых случаев падения, в кристалле возникает сопутствующая поверхностная волна, вследствие чего отражение имеет характер полного внутреннего отражения.

Введение. Как известно [1-4], наличие пьезоэлектрических свойств у кристалла может существенно менять поведение волновых процессов, хотя коэффициент электромеханической связи для известных пьезокристаллов мал по сравнению с единицей. Такая ситуация возникает, например, при отражении электроупругих волн от свободной границы пьезоэлектрика. В работе [5] для пьезокристаллов кубической симметрии показано, что наличие пьезоэффекта приводит к возникновению в кристалле дополнительных электроупругих колебаний, которые не являются собственными колебаниями кристалла и возникают только в присутствии падающей на границу раздела электроупругой волны. Такое колебание локализуется у границы кристалла и называется сопутствующим поверхностным колебанием (СПК) или сопутствующей поверхностной волной (СПВ) [1,5]. Вследствие возникновения СПВ отражение электроупругой волны имеет характер полного внутреннего отражения (за исключением некоторых углов падения).

В настоящей работе рассматривается задача отражения сдвиговой электроупругой волны от свободной границы пьезоэлектрического ромбического кристалла класса 222.

1. Постановка задачи. Пусть пьезоэлектрический ромбический кристалл класса 222 в прямоугольной декартовой системе координат Ox_1x_2 занимает полубесконечную область $x_1 > 0$ и граничит с вакуумом вдоль плоскости $x_2 = 0$. Координатные оси совпадают с главными осями

зеркальной \bar{L}_z . Далее, пусть кристалл находится в антиплоском деформированном состоянии, так что упругие и электрические поля в среде и электрическое поле в вакууме имеют вид:

$$\begin{aligned} x_2 > 0: \quad \bar{u} &= \{0, 0, u_3(x_1, x_2, t)\}; \quad \varphi = \Phi(x_1, x_2, t) \\ x_2 < 0: \quad \varphi &= \Phi_0(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где \bar{u} - вектор упругого перемещения точек среды, φ и Φ_0 - потенциалы электрических полей в среде и в вакууме. Предположим, что граница среды свободна от механических напряжений.

При сделанных предположениях из соотношений линейной теории электроупругости и квазистатического электрического поля получаются следующие уравнения и граничные условия для рассматриваемой задачи [14]:

1. в области $x_2 > 0$:

$$\begin{aligned} c_{44} \left(\alpha \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) + e_{14} (1 + \beta) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \\ e_{14} (1 + \beta) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} - e_{22} \left(\gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

2 в области $x_2 < 0$:

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_2^2} = 0 \quad (1.3)$$

Граничные условия при $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + e_{14} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= 0 \\ \beta e_{14} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - e_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\varphi = \varphi_0$$

Здесь приняты обозначения:

$$\alpha = \frac{c_{11}}{c_{44}}, \quad \beta = \frac{e_{21}}{e_{14}}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} \quad (1.5)$$

В (1.2) - (1.4): c_{44} , c_{55} - упругие постоянные, e_{14} , e_{23} - пьезоэлектрические модули, ε_{11} , ε_{22} - диэлектрические проницаемости, ρ - плотность пьезокристалла, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0$ - электрическая постоянная. В работе используется система международных единиц СИ.

Для простоты в дальнейшем примем следующие обозначения:

$$u_3 = u, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad c_{44} = c, \quad e_{14} = e, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon \quad (1.6)$$

2 Однородные и неоднородные плоские волны. Сначала рассмотрим решения уравнений (1.2) электроупругости, представляющих собой плоские гармонические волны.

$$u = Ue^{i(\rho x + qy - \omega t)}, \quad \varphi = \Phi e^{i(\rho x + qy - \omega t)} \quad (2.1)$$

где U и Φ — амплитуды перемещения и потенциала в волне, p и q — продольное и поперечное волновые числа относительно оси Ox , ω — частота колебаний. Подставляя решение (2.1) в систему уравнений (1.3), из условия разрешимости этой системы получаем дисперсионное уравнение для поперечного волнового числа q и соотношение между амплитудами смещения U и потенциала Φ .

$$(\gamma p^2 + q^2)(\alpha p^2 + q^2 - S_0^2 \omega^2) + 4\chi^2 p^2 q^2 = 0 \quad (2.2)$$

$$[c(\alpha p^2 + q^2) - \rho \omega^2]U + (1 + \beta)\epsilon p q \Phi = 0 \quad (2.3)$$

или $(1 + \beta)\epsilon p q U - \epsilon(\gamma p^2 + q^2)\Phi = 0 \quad (2.4)$

где $S_0^2 = \frac{c}{\rho}$, $\chi^2 = \frac{(1 + \beta)^2 e^2}{4\epsilon\epsilon}$ (2.5)

Здесь S_0 — скорость объемной упругой волны в направлении оси Oy , χ — коэффициент электромеханической связи.

Как известно [7], при вещественных p и q волны (2.1) называются однородными, а при комплексных — неоднородными.

Для однородных волн p и q можно представить в виде (фиг. 1):

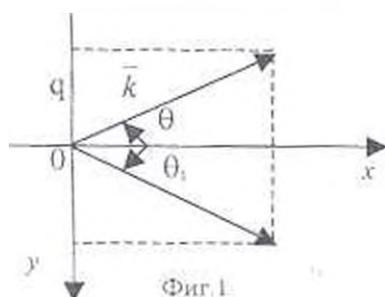
$$p = k \cos \theta, \quad q = -k \sin \theta \quad (2.6)$$

где θ — угол скольжения, т.е. угол между волновым вектором $\vec{k} = \{p, q\}$ и положительным направлением оси Ox , причем

$$k^2 = p^2 + q^2, \quad \operatorname{tg} \theta = -\frac{q}{p} \quad (2.7)$$

При обозначениях (2.6) и (2.7) дисперсионное уравнение (2.2) принимает форму [6]:

$$k = \omega/S_0 \sqrt{1 + (\alpha - 1)\cos^2 \theta + \frac{\chi^2 \sin^2 2\theta}{1 + (\gamma - 1)\cos^2 \theta}} \quad (2.8)$$



Фиг. 1

Отметим, что k принимает действительные значения для любого θ . Этот факт следует из того, что средняя во времени потенциальная энергия волны положительна [1,2]. Отсюда следует, что плоская однородная волна распространяется в любом направлении, заданном волновым вектором \vec{k} .

Из (2.8) находим фазовую скорость волны в зависимости от угла скольжения θ .

$$v^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = S_0^2 \left[1 + (\alpha - 1)\cos^2 \theta + \frac{\chi^2 \sin^2 2\theta}{1 + (\gamma - 1)\cos^2 \theta} \right] \quad (2.9)$$

В частности, когда $\theta = 0$ и $\theta = -\pi/2$, получаем (согласно (1.5), (2.5))

$$v_1^2 = S_0^2 \alpha = \frac{c_{44}}{\rho} \cdot \frac{c_{55}}{c_{44}} = \frac{c_{55}}{\rho}, \quad v_2^2 = S_0^2 = \frac{c_{44}}{\rho} \quad (2.10)$$

ге. по направлениям осей Ox и Oy скорость волны не зависит от пьезо-симметрического эффекта. Таким образом, дисперсионное уравнение (2.2) при любом вещественном значении $p = k \cos \theta$, где k определяется по (2.8), имеет пару вещественных корней для q , которые определяются формулами:

$$q_1 = \pm q_0, \quad q_0 = k \sin \theta = p \operatorname{tg} \theta \quad (2.11)$$

и отвечают зеркально-симметричным волнам относительно оси Ox (на фиг.1 $\theta_1 = -\theta$). Другую пару корней уравнения (2.2) можно определить, используя теорему Виета. Получим $q_2 = \pm ir$, где

$$r = \frac{\omega \sqrt{\gamma} |\cos \theta| \sqrt{1 + (\gamma - 1 + 4\chi^2) \cos^2 \theta}}{S_0 \sqrt{1 + \chi^2 \sin^2 2\theta} + [(\alpha\gamma - 1) \cos^2 \theta + (\alpha + \gamma - 2) \sin^2 \theta] \cdot \cos^2 \theta} \quad (2.12)$$

Для r можно получить также выражение:

$$r = k \sqrt{\gamma} |\cos \theta| \sqrt{\frac{1 + (\gamma - 1 + 4\chi^2) \cos^2 \theta}{1 + (\gamma - 1) \cos^2 \theta}} \quad (2.13)$$

Таким образом, уравнения пьезокристалла (1.2) имеют решения вида (2.1), представляющие неоднородные плоские волны:

$$\begin{aligned} u &= U e^{i(x + (p - iq)y - \omega t)} \\ \varphi &= \Phi e^{i(x - (p - iq)y - \omega t)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

которые распространяются в направлении оси Ox и убывают в направлении оси Oy (при знаке "+") или $-Oy$ (при знаке "-"). Ясно, что для безграничного кристалла они не имеют физического смысла и могут описывать физический процесс только в ограниченных кристаллах.

Перейдем к уравнению (1.3), описывающему квазистатическое поле в вакууме

Ищем решение в виде:

$$\varphi_0 = \Phi_0 e^{i(p \cdot x + qy - \omega t)} \quad (2.15)$$

В этом случае получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$q^2 + p^2 = 0 \quad (2.16)$$

откуда следует $q = \pm i|p|$.

Следовательно, получаем решения в виде неоднородных плоских волн:

$$\varphi_0 = \Phi_0 e^{i(p \cdot x + (p - iq)y - \omega t)} \quad (2.17)$$

3. Решение задачи. Пусть из пьезокристалла на границу раздела падает плоская сдвиговая электроупругая волна вида (2.1) с амплитудами U_0 , Φ_0 , частотой ω , волновым числом k , продольными и поперечными волновыми числами $p = k \cos \theta$, $q = -k \sin \theta = -q_0$, углом скольжения θ (фиг. 1). Вследствие взаимодействия падающей волны с границей раздела возникают отраженные электроупругие плоские волны в пьезоэлектрике, неоднородные плоские электрические волны в вакууме, сопутствующие поверхностные электроупругие (неоднородные) волны в пьезоэлектрике.

Вследствие удовлетворения граничным условиям, все волны имеют одинаковую частоту ω и продольное волновое число p (т. е. волны вдоль границы распространяются с одинаковой скоростью), совпадающую с соответствующими характеристиками падающей волны. Отраженная, сопутствующая поверхностная и электрическая волны имеют соответственно следующие волновые числа:

$$q = q_0 = k \sin \theta, \quad q = ir, \quad q = i|p| \quad (3.1)$$

где r определяется по (2.12) или (2.13).

Связь между амплитудами упругого перемещения и электрического потенциала дается по (2.3) или (2.4).

Таким образом, волновые поля в пьезоэлектрике и в вакууме будут иметь вид:

$$\begin{aligned} u &= [U_0 e^{-iq_0 y} + U_1 e^{iq_0 y} + iB \Phi_2 e^{-q_2 y}] e^{i(pz - \omega t)} \\ \varphi &= [-U_0 A e^{-iq_0 y} + A U_1 e^{iq_0 y} + \Phi_2 e^{-q_2 y}] e^{i(pz - \omega t)} \\ \varphi_1 &= \Phi_1 e^{i p x} e^{i(pz - \omega t)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\text{где } A = \frac{(1 + \beta) e \sin 2\theta}{2\epsilon [1 + (\gamma - 1) \cos^2 \theta]}, \quad B = \frac{\gamma(1 + \beta) e p \cos^2 \theta}{c p [1 + (\gamma - 1) \cos^2 \theta]} \quad (3.3)$$

Здесь U_0, U_1 — амплитуды смещения падающей и отраженной волн, Φ_2 — амплитуда потенциала СПВ, Φ_1 — амплитуда электрической волны в вакууме. Заметим, что амплитуда смещения СПВ U_2 выражена через амплитуду потенциала Φ_2 , подчеркивая тот факт, что при $e = 0$ СПВ имеет чисто электрический характер.

Подставляя решения (3.2) в граничные условия (1.4), после некоторых, но громоздких вычислений найдем неизвестные амплитуды U_1, Φ_2, Φ_1 .

$$U_1 = R_1 U_0, \quad \Phi_2 = Q_2 U_0, \quad \Phi_1 = Q_1 U_0, \quad R_1 = \frac{M \sin \theta - i \chi^2 N |\cos \theta|}{M \sin \theta + i \chi^2 N |\cos \theta|}$$

$$Q_2 = \frac{\pm 2i \sin \theta (1 + c) e_1 r_1 P_1}{M \sin \theta + i \chi^2 N |\cos \theta|}, \quad Q_1 = \frac{\pm 2i (1 + \beta)^2 e r_1 \sin \theta P_1}{[1 + (\gamma - 1) \cos^2 \theta] [M \sin \theta + i \chi^2 N |\cos \theta|]}$$

$$M = \epsilon_1 (1 + \beta)^2 r_1 \{ [M \sin \theta + i \chi^2 N |\cos \theta|]^2 + 4\gamma \chi^2 \cos^2 \theta \} + \epsilon_1 [1 + \beta + \{ (1 - \beta)(\gamma - 1) + 4\chi^2 \} \cos^2 \theta]$$

$$N = 4\epsilon_1 r_1 [1 - (1 + \gamma\beta) \cos^2 \theta]^2$$

$$P_1 = \{ 1 + \beta + \{ (1 + \beta)(\gamma - 1) + 4\chi^2 \} \cos^2 \theta \} [1 - (1 + \gamma\beta) \cos^2 \theta]$$

$$P_2 = \{ [1 + (\gamma - 1) \cos^2 \theta]^2 + 4\gamma \chi^2 \cos^2 \theta \} [1 - (1 + \gamma\beta) \cos^2 \theta]$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{1 + (\gamma - 1 + 4\chi^2) \cos^2 \theta}{1 + (\gamma - 1) \cos^2 \theta}}, \quad r = k |\cos \theta| r_1 \quad (3.4)$$

В случае кубических кристаллов, полагая $\alpha = \beta = \gamma = 1$, получаем:

$$U_1 = R_1 U_0, \quad \Phi_2 = Q_2 U_0, \quad \Phi_1 = Q_1 U_0$$

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{M \sin \theta - i \chi^2 N |\cos \theta|}{M \sin \theta + i \chi^2 N |\cos \theta|}, & Q_1 &= \frac{\pm 4 i \epsilon_r \sin \theta P_1}{M \sin \theta + i \chi^2 N |\cos \theta|} \\
 Q_2 &= \frac{\pm 8 i \epsilon_r \sin \theta P_2}{[M \sin \theta + i \chi^2 N |\cos \theta|]}, & M &= 4 \epsilon_r r_1 \{1 + \chi^2 \cos^2 \theta\} + 4 \epsilon_r \{1 - 2 \chi^2 \cos^2 \theta\}^2 \\
 P_1 &= 4 \epsilon_r \cos^2 2\theta, & P_2 &= -2(1 + 2 \chi^2 \cos^2 \theta) \cos 2\theta. \\
 P_3 &= -(1 + 4 \chi^2 \cos^2 \theta) \cos 2\theta, & r_1 &= \sqrt{1 + 4 \chi^2 \cos^2 \theta}, \quad r = k |\cos \theta| r_1. \\
 k &= \frac{\omega}{S_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \chi^2 \sin^2 2\theta}}, & \chi^2 &= \frac{e^2}{c \epsilon}, \quad S_0 = \frac{c}{\rho}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Сравнивая полученные выражения с результатами работы [1], видим, что в выражение ФВ (стр.47 формула (1.15)) в числителе участвует лишний множитель $-2 \cos \theta$, а в выражении B_1 во второй круглой скобке должно быть $\cos^4 \theta$ вместо $\cos^2 \theta$.

Как видно из (3.4), амплитуда отраженной волны U_1 комплексна и ее модуль равен единице. Как известно [1,2,7], такая ситуация соответствует полному внутреннему отражению, возникающему при определенных углах и определенных соотношениях между параметрами граничных сред. В нашей задаче, как и при кубических кристаллах, отражение электроупругой волны, вследствие возникновения СПВ, имеет характер полного внутреннего отражения при любом угле скольжения, за исключением случаев нормального падения ($\theta = \pi/2$) и скольжения под углом, которые определяются из уравнения:

$$1 - (1 + \gamma \beta) \cos^2 \theta = 0 \tag{3.6}$$

В случае кубических кристаллов уравнение (3.6) сводится к уравнению $\cos 2\chi = 0$, которое дает корни $\theta = \pi/4$ и $\theta = 3\pi/4$. В случае падения под указанными углами, когда СПВ не возникает, имеет место обычное отражение сдвиговых волн с $R_1 = 1$.

Обратим внимание на следующие важные обстоятельства. Если $\chi \ll \chi^*$, то $\Phi_2 \rightarrow 0$ и $U_1 \rightarrow -U_0$, т.е. сдвиговые электроупругие волны полностью поверхности пьезокристалла рассматриваемой симметрии не распространяются. Между тем, без пьезоэффекта такое распространение возможно (при $\chi^2 = 0, R_1 = 1$). Такая особенность характерна полному внутреннему отражению. Далее, при $\theta \sim \chi^2$ амплитуда потенциала СПВ существенно превосходит амплитуду потенциала отраженной волны, что может приводить к эффективному взаимодействию падающих электроупругих волн с плазмой полупроводника, расположенного вблизи поверхности пьезоэлектрика [1,2].

В заключение приведем численные данные поля для пьезокристалла $\alpha\text{-NiO}_2$ (подповатая кислота), которые принадлежат классу 222 с инверсионной симметрией [8].

$$\rho = 4629 \text{ кг/м}^3, \quad c_{44} = 1,835 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{55} = 1,106 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2.$$

$$\epsilon_{14} = 29,36 \cdot 10^{-2} \text{ Кл/м}^2, \epsilon_{23} = 22,26 \cdot 10^{-2} \text{ Кл/м}^2, \epsilon_{11} = 66,375 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Нм}^2, \\ \epsilon_{33} = 109,74 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Нм}^2, \epsilon_1 = \epsilon_3 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Нм}^2.$$

Заключение. Рассмотрено отражение плоской электроупругой сдвиговой волны от свободной границы раздела ромбического кристалла класса 222 и вакуума.

Определены волновые поля в пьезокристалле и в вакууме. Показано, что электрическое поле падающей волны частично просачивается в вакуум, вследствие чего в вакууме около границы раздела возникает волна электрического поля, распространяющаяся вдоль границы с той же фазовой скоростью, что и электроупругие волны. Такая волна порождает дополнительную поверхностную электрическую волну в пьезокристалле, а следовательно, и сопутствующую ей упругую волну. Формально этот результат следует из существования двух независимых граничных условий для электрического потенциала, тогда как потенциал поля в вакууме дает одну новую постоянную. Существование сопутствующей электроупругой поверхностной волны приводит к тому, что отражение приобретает характер полного внутреннего отражения. Отметим, что, в отличие от обычно рассматриваемых случаев, сопутствующая поверхностная волна, возникающая при полном внутреннем отражении, распространяется в той же среде, что и падающая и отраженная волны. Далее, сдвиговые волны, параллельно поверхности кристалла (при малых углах скольжения $0 < \chi \ll \pi$) не могут распространяться. А при падении $\theta \sim \chi^2$, отражение может привести к эффективному взаимодействию электроупругих волн с плазмой близлежащего полупроводника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Изд. Наука, сибирское отделение, 1982. 240 с.
2. Дьелосан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424 с.
3. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А. Поведение мод сдвиговых поверхностных электроупругих волн Лива в пьезоэлектрических подложках с диэлектрическим слоем. // В кн. "Актуальные проблемы неоднородной механики". Материалы Всесоюзного научного семинара. Ереван, 1991. 23–26 июня. С. 49–54.
4. Белубекян М.В., Белубекян В.М. О сдвиговой волне, локализованной вдоль движущейся границы раздела пьезоэлектриков // Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т. 47. №3–4. С. 78–82.
5. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Отражение упругой волны от границы раздела пьезокристалл-вакуум // ФТТ. 1969. Т. 11. Вып. 4. С. 1027–1029.
6. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1985. Т. 38. №1. С. 12–19.
7. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
8. Акустические кристаллы. Справочник под ред. М.П. Шаскольской, М.: Наука, 1982. 632 с. (с. 361–365).

УДК 531.9

ДИФРАКЦИЯ МАГНИТОГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОКОЛО ТУПОГО КЛИНА ПРИ НАЧАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ ПЛОСКОСТИ ОСНОВНОГО ДВИЖЕНИЯ

Азатян Л.Д.

Լ.Գ.Ազատյան

Մագնիտոգազոդինամիկական ճարվածային աղբյուրի դիֆրակցիան բուր սեպի շրջակայքում, շարժումը հարթական ուղղությամբ սկզբնական մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում

Քննարկվում է բուր սեպի անդրադարձում ճարվածային աղբյուրի ետևում առկայությամբ: հեղուկի շարժման պարամետրերի որպեսզան լսնելիսը հեկոկրր րոճվում է րոճվածաճար անցուման եղանակով: Վատարված են բվային հաշվարկները, որոնք բնորոշում են արձագանքի արգելաբարյունը կենտրոնադրոդից հեկոկի փրճակի վրա:

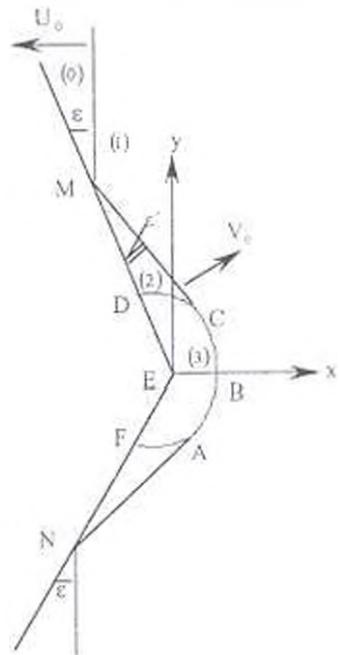
L.D. Azatian

The diffraction of magnetogasdynamic shock wave near the blunt wedge for initial magnetic field perpendicular to plane of main motion

В работе рассматривается задача определения параметров течения электропроводящей среды около ударной волны при ее отражении от тупого клина. Задача решается методом переменных. Проведены численные расчеты, определяющие влияние магнитного поля на состояние электропроводящей жидкости.

Рассматривается задача об отражении плоской магнитогазодинамической ударной волны, распространяющейся в идеальном проводящем газе, от тупого клина при заданном магнитном поле \vec{B} , параллельном линии пересечения граней клина, выбираемой в качестве оси Oz . Начало координат помещаем в вершине угла, ось Ox направим по оси клина вправо, а ось Oy - перпендикулярно ей. Направление движения ударной волны совпадает с отрицательным направлением оси Oz . Падающая ударная волна предположена прямой, так как при $B_n = 0$ (n - нормаль к падающей волне) медленная ударная волна отсутствует, что следует из уравнения Эндрикса [1]. Задача плоская, поэтому цилиндрическая волна также отсутствует.

Пусть фронт плоской ударной волны движется со скоростью U_0 и в момент $t = 0$ совпадает с углом, стороны которого



Փյգ. 1

образуют тупой угол $(\pi - 2\varepsilon)$. Для некоторого значения $t \neq 0$ картина движения показана на фиг. 1.

Определим течение за падающей ударной волной. Параметры потока за падающим скачком постоянны и определяются из условия динамической совместности [2]

$$\rho_1 = -\frac{\rho_0 U_0}{(q_1 - U_0)}, \quad B_1 = -\frac{B_0 U_0}{(q_1 - U_0)}, \quad P_1 = P_0 + \rho_0 q_1 U_0 + \frac{B_0^2 q_1 (q_1 - 2U_0)}{8\pi (q_1 - U_0)^2} \quad (1.1)$$

Здесь скорость q_1 частиц плазмы за падающим скачком определяется из уравнения

$$q_1^2 + \frac{2\gamma P_0 + \gamma a_0^2 \rho_0 - (\gamma + 3)\rho_0 U_0^2}{(\gamma + 1)\rho_0 U_0} q_1 - \frac{2(\gamma P_0 + a_0^2 \rho_0 - \rho_0 U_0^2)}{(\gamma + 1)\rho_0} = 0 \quad (1.2)$$

$$a_0^2 = \frac{B_0^2}{4\pi \rho_0}$$

Обозначения параметров общепринятые, индекс параметров соответствует индексу зоны.

Определим течение за отраженным скачком. Параметры потока в зоне (2) определяются из соотношений для косого скачка уплотнения [2] и с точностью до малых первого порядка относительно ε равны

$$\rho_2 = \frac{(q_1 + V_0)}{V_0} \rho_1, \quad P_2 = P_1 + \rho_1 q_1 (q_1 + V_0) - \frac{B_1^2 q_1 (q_1 + 2V_0)}{8\pi V_0^2}$$

$$B_2 = \frac{(q_1 + V_0)}{V_0} B_1, \quad q_2 \approx q_2' = q_1 (\varepsilon + \varepsilon') \quad (1.3)$$

Здесь V_0 — скорость отраженного скачка, определяемая из уравнения

$$V_0^3 - \frac{(\gamma - 3)q_1}{2} V_0^2 - \left[\frac{(\gamma - 1)}{2} q_1^2 + \frac{\gamma P_1}{\rho_1} + a_1^2 \right] V_0 - \frac{(2 - \gamma)a_1^2}{2} q_1 = 0 \quad (1.4)$$

где $a_1^2 = \frac{B_1^2}{4\pi \rho_1}$. ε' — угол отражения ударной волны от клина, который определяется из условия неострыности в точке M падающей и отраженной ударных волн $\varepsilon' = \frac{\varepsilon V_0}{U_0}$.

Используя условия динамической совместности для падающей и отраженной ударных волн, можно показать, что векторы магнитного поля \vec{B}_1 и \vec{B}_2 параллельны оси Oz . Так как \vec{B}_2 параллелен оси Oz , то его проекция на нормаль к стенке равна нулю, то есть силовые линии магнитного поля в области постоянного течения за отраженным скачком не проникают в клин.

Областью неравномерного течения в этой задаче является область ABCDEF (фиг. 1), заключенная между стенкой DEF, скачком ABC и дугами DC и FA, представляющими фронт быстрой магнитозвуковой волны, порожденной вершиной угла. DC и FA являются дугами окружности $x^2 + y^2 = c_f^2 t^2$, где c_f — скорость распространения быстрой

магнитной волны, определяемая формулой

$$c_1 = \sqrt{c_2^2 + a^2}, \quad a^2 = \frac{B_2^2}{4\pi\rho_2}$$

Участок границы ABC представляет собой криволинейную часть возмущенной ударной волны, которая является результатом дифракции от вершины клина. Задача состоит в определении параметров течения в зоне. Ввиду малости параметра ε величины

$$P = P_1 - P_2, \quad \rho = \rho_1 - \rho_2, \quad \bar{q} = \bar{q}_1(u, v), \quad \bar{h} = \bar{B}_1 - \bar{B}_2$$

будут порядка ε , и для нахождения этих малых величин может быть применена теория возмущений.

В области возмущенного течения ABCDEF уравнения магнитной гидродинамики [2] после их линеаризации по ε имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_z}{\partial t} &= -B_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{B_2}{4\pi\rho_2} \frac{\partial b_z}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{B_2}{4\pi\rho_2} \frac{\partial b_z}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial t} + c_1^2 \rho_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Так как отсутствует характерный размер длины, то задачу можно свести к автомодельной. Вводя конические координаты $\xi = \frac{x}{c_1 t}$, $\eta = \frac{y}{c_1 t}$,

вариацию давления $P^* = \frac{P_1 - P_2}{c_1 \rho_2}$ и вариацию магнитного поля

$b_z = \varepsilon \bar{b}_z$, имеющие размерность скорости, мы можем уравнения (1.5) записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial \bar{b}_z}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \bar{b}_z}{\partial \eta} &= \frac{B_2}{c_1 \rho_2^{1/2}} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \right), \quad \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial P^*}{\partial \xi} + \frac{a}{c_1} \frac{\partial \bar{b}_z}{\partial \xi} \\ \xi \frac{\partial w}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial w}{\partial \eta} &= \frac{\partial P^*}{\partial \eta} + \frac{a}{c_1} \frac{\partial \bar{b}_z}{\partial \eta}, \quad \xi \frac{\partial P^*}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial P^*}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из (1.5) следует, что возмущения магнитного поля в направлении осей Ox и Oy отсутствуют, то есть вектор возмущенного магнитного поля \bar{h} параллелен оси Oz , следовательно проекция полного магнитного поля $\bar{h}_z = \bar{B}_2 - \bar{h}$ на нормаль к клину будет равняться нулю, и задачу об определении давления P_2 в области неравномерного течения можно решить независимо от поля внутри клина.

На плоскости (ξ, η) область неравномерного течения заключена между дугами DC и FA единичной окружности и прямолинейными

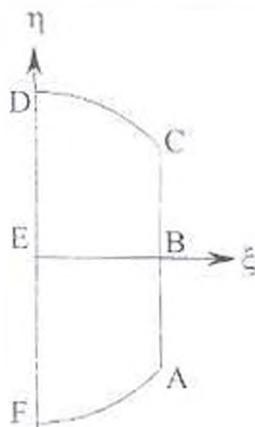
отрезками DEF и ABC, которыми заменяются стенка и искривленная часть ударной волны (фиг.2). При этом значение ξ на ABC равно

$$\xi = \frac{V_2}{c_1} = k_0 \quad (1.7)$$

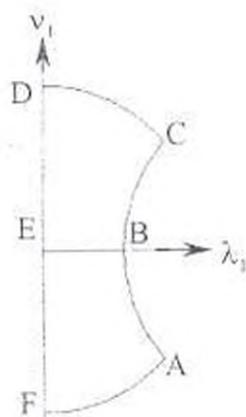
а значение ξ на стенке равно нулю.

Система (1.6) может быть сведена к одному уравнению для возмущенного давления

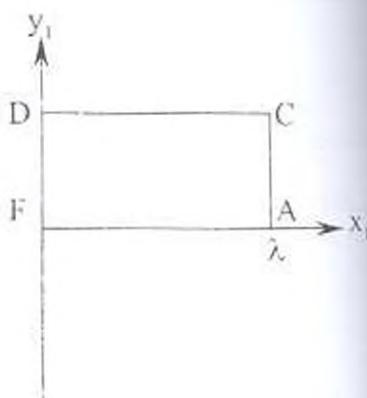
$$(1 - \xi^2) \frac{\partial^2 P^*}{\partial \xi^2} - 2\xi\eta \frac{\partial^2 P^*}{\partial \xi \partial \eta} + (1 - \eta^2) \frac{\partial^2 P^*}{\partial \eta^2} - 2 \left(\xi \frac{\partial P^*}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial P^*}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (1.8)$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Определим граничные условия для P^* . На дугах DC и FA $P^* = 0$. Для того, чтобы получить условие для P^* на стенке, используем систему уравнений (1.5). Из первого и четвертого уравнений (1.5) имеем

$$\frac{\partial h_x}{\partial t} = \frac{B_1}{\rho_2 c_1^2} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1.9)$$

Дифференцируя (1.9) по x_1 , а второе уравнение (1.5) по t исключая

$\frac{\partial^2 h_x}{\partial t \partial x}$, получим

$$\frac{4\pi\rho_2 c_1^2}{4\pi\rho_1 c_1^2 + B_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} \quad (1.10)$$

Так как в порядке ϵ на стенке $u = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, то как следует из

(1.10) на стенке можно полагать $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0$.

Если считать, что невозмущенная часть отраженной ударной волны соответствует прямой $\xi = k_0$, то возмущенную ее часть можно задать уравнением $\xi = k_0 + f(\eta)$.

Для выполнения граничного условия для P^* на $\xi = k_0$ записываются условия динамической совместности для искривленной ударной волны ABC, линейризация которых относительно постоянного потока за выраженным плоским скачком даст систему уравнений, решение которой имеет вид

$$u = AP^*, \quad \eta \frac{\partial w}{\partial \eta} = E \frac{\partial P^*}{\partial \eta}, \quad b_{0z} = CP^* \quad \text{на } \xi = k_0, \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned} A &= [4\pi(\gamma-1)q_1\rho_2^2V_0 - (\rho_2 - \rho_1)(4\pi\gamma\rho_2V_0^2 + 4\pi\gamma P_2 + B_2^2)]c_1Q \\ E &= -\rho_2q_1(B_2^2 + 4\pi\gamma P_2 - 4\pi\rho_2V_0^2)Q \\ C &= 4\pi\rho_2^2c_1B_2[q_1\rho_2(\gamma-1) - (\gamma+1)(\rho_2 - \rho_1)V_0]Q \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$Q = \frac{1}{(\gamma-1)(4\pi\rho_2V_0^2 - B_2^2)\rho_2q_1 - V_0(\rho_2 - \rho_1)[4\pi(\gamma-1)\rho_2V_0^2 + 8\pi\gamma P_2 - (\gamma-1)B_2^2]}$$

Для $\gamma = 7/5$ и $B = 0$ значения A и E даны в [3]. Исключая из уравнений (1.11) u, w, b_{0z} при помощи уравнений (1.6), получим условие на скачке ABC для P^*

$$\frac{\partial P^* / \partial \xi}{\partial P^* / \partial \eta} = \frac{M_1\eta - Ek_0\eta^{-2}}{M_3} \quad (1.13)$$

где $M_1 = A + k_0 + \frac{B_2C}{4\pi\rho_2^{1/2}c_1k_0} - \frac{B_2^2}{4\pi\rho_2c_1^2k_0}$, $M_3 = 1 - k_0^2 + \frac{B_2^2}{4\pi\rho_2c_1^2}$

Наряду с условием (1.13) берется интегральное условие

$$\int_0^{\sqrt{1-k_0^2}} \frac{\partial w}{\partial \eta} \partial \eta = \int_0^{\sqrt{1-k_0^2}} \frac{E}{\eta} \frac{\partial P^*}{\partial \eta} \partial \eta = \int_0^{\sqrt{1-k_0^2}} \frac{E}{\eta} dP^* = q_1 \quad (1.14)$$

Лайтхилл [3] предложил следующий способ решения этой задачи. Преобразование Чаплыгина-Буземана [4]

$$\xi = \frac{2\rho}{1+\rho^2} \cos\theta, \quad \eta = \frac{2\rho}{1+\rho^2} \sin\theta, \quad r = \frac{2\rho}{1+\rho^2} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg}\theta \quad (1.15)$$

переводит уравнение (1.8) в уравнение Лапласа. В плоскости (ρ, θ) дуги DC и FA переходят в дуги окружности $\rho = 1$, отрезок ABC преобразуется в дугу окружности (фиг.3)

$$2\rho \cos\theta = k_0(1+\rho^2)$$

При преобразовании (1.15) граничное условие (1.13) преобразуется в условие

$$\frac{\partial P^* / \partial \eta}{\partial P^* / \partial s} = \frac{(M_1k_0^2 - M_3k_0)k_0 \operatorname{tg}\theta - Ek_0^2 \operatorname{ctg}\theta}{M_3(1 - k_0^2 \sec^2 \theta)^2} \quad (1.16)$$

На дугах DC и FA $\frac{\partial P^*}{\partial s} = 0$, а на стенке DEF $-\frac{\partial P^*}{\partial n} = 0$, что завершает формулировку задачи в плоскости Буземана.

Далее применяется дополнительное конформное отображение

$$z_1 = \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + \frac{1}{2} \pi i, \text{ где } z = \bar{\lambda}_1 + i v_1 = r e^{i\theta}, \quad z_1 = x_1 + i y_1 \quad (1.17)$$

Функция (1.17) переводит область дифракции ABCDEF в прямоугольник (фиг.4)

$$0 < x_1 < \lambda, \quad 0 < y_1 < \pi, \quad (1.18)$$

где $\lambda = \frac{1}{2} \ln \frac{1+k_0}{1-k_0}$

Условие (1.16) в плоскости (x_1, y_1) имеет вид

$$-\frac{\partial P^*}{\partial x_1} \sin y_1 \cos y_1 = \frac{\partial P^*}{\partial y_1} \left[\left(\frac{M_1 k_0'^2}{M_3} - k_0 \right) \cos^2 y_1 - \frac{E k_0}{M_3} \right] \quad (1.19)$$

а на DC, FA и DEF имеем

$$\frac{\partial P^*}{\partial x_1} = 0 \quad (1.20)$$

Далее Лайтхилл образует функцию $\omega(z_1) = \partial P^* / \partial x_1 - i \partial P^* / \partial y_1$ и находит ее подбором [3]

§2. Решение граничной задачи методом разделения переменных

Пологая $P^* = X(x_1)Y(y_1)$ и подставляя в уравнение Лапласа $\Delta P^* = 0$ получим

$$X''Y + Y''X = 0$$

$$X = C_1 e^{kx_1} + C_2 e^{-kx_1}, \quad Y = C_3 \sin \lambda y_1 + C_4 \cos \lambda y_1$$

Удовлетворяя условиям (1.20), получим

$$P^* = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \operatorname{ch} k x_1 \sin k y_1 \quad (2.1)$$

Условие (1.19) с учетом (2.1) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} k C_k \left\{ \operatorname{sh} k \lambda \sin k y_1 \sin 2 y_1 + \operatorname{ch} k \lambda \cos k y_1 \left[\left(\frac{M_1 k_0'^2}{M_3} - k_0 \right) \cos^2 y_1 + \left(\frac{M_1 k_0'^2}{M_3} - k_0 \right) \cos 2 y_1 - \frac{2 E k_0}{M_3} \right] \right\} = 0 \quad (2.2)$$

Умножая (2.2) на $\cos l y_1$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) и интегрируя от $-\pi$ до π , получим следующую систему уравнений для определения C_k

$$l = 0 \quad C_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
 l=1 \quad & C_1 \left\{ \operatorname{sh} \lambda + \left(\frac{M_1 k_0'^2}{M_3} - k_0 \right) \operatorname{ch} \lambda + \frac{\pi}{2} \left(\frac{M_1 k_0'^2}{M_3} - k_0 - \frac{2Ek_0}{k_0'^2} \right) \operatorname{ch} \lambda \right\} + \\
 & + 3C_3 \left\{ \operatorname{sh} 3\lambda + \left(\frac{M_1 k_0'^2}{M_3} - k_0 \right) \operatorname{ch} 3\lambda \right\} = 0 \\
 l=2 \quad & 2C_2 \left\{ 2\operatorname{ch} 2\lambda \left(\frac{M_1 k_0'^2}{M_3} - k_0 - \frac{2Ek_0}{k_0'^2} \right) \right\} + \\
 & + 4C_4 \left\{ \operatorname{sh} 4\lambda + \left(\frac{M_1 k_0'^2}{M_3} - k_0 \right) \operatorname{ch} 4\lambda \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

.....

$l = n$

$$\begin{aligned}
 & (n-2)C_{n-2} \left\{ -\operatorname{sh}(n-2)\lambda + \left(\frac{M_1 k_0'^2}{M_3} - k_0 \right) \operatorname{ch}(n-2)\lambda \right\} + \\
 & + nC_n \left\{ 2\operatorname{ch} n\lambda \left(\frac{M_1 k_0'^2}{M_3} - k_0 - \frac{2Ek_0}{M_3} \right) \right\} + \\
 & + (n+2)C_{n+2} \left\{ \operatorname{sh}(n+2)\lambda + \left(\frac{M_1 k_0'^2}{M_3} - k_0 \right) \operatorname{ch}(n+2)\lambda \right\} = 0
 \end{aligned}$$

Из формулы (2.3) следует, что коэффициенты C_k при четном k равны нулю, а при нечетном k будут определяться из

$$\begin{aligned}
 C_{n+2} = & \frac{-2nC_n \operatorname{ch} n\lambda \left(\frac{M_1 k_0'^2}{M_3} - k_0 - \frac{2Ek_0}{M_3} \right)}{(n-2) \left\{ \operatorname{sh}(n+2)\lambda + \left(\frac{M_1 k_0'^2}{M_3} - k_0 \right) \operatorname{ch}(n+2)\lambda \right\} -} \\
 & - \frac{(n-2)C_{n-2} \left\{ -\operatorname{sh}(n-2)\lambda + \left(\frac{M_1 k_0'^2}{M_3} - k_0 \right) \operatorname{ch}(n-2)\lambda \right\}}{(n+2) \left\{ \operatorname{sh}(n+2)\lambda + \left(\frac{M_1 k_0'^2}{M_3} - k_0 \right) \operatorname{ch}(n+2)\lambda \right\}}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что все коэффициенты C_k определяются через C_1 . Для нахождения C_1 используется условие (1.14)

§3. Определение параметров течения в области дифракции:

Запишем выражение для возмущенного давления (2.1) в переменных ξ, η

Из формулы (1.15) и (1.17) имеем

$$x_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}, \quad y_1 = \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} + \frac{\pi}{2} \quad (3.1)$$

С использованием (3.1) выражение (2.1) запишется в виде

$$P^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} C_{2n+1} \left[\left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right)^{\frac{2n+1}{2}} + \left(\frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^{\frac{2n+1}{2}} \right] \times \\ \times \sin \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} + (2n+1) \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} \right] \quad (3.2)$$

Остальные параметры в области дифракции могут быть определены из уравнений (1.6).

Для определения компоненты T_{α} Максвелловского тензора напряжений в плазме необходимо найти компоненту b_z индуцированного в плазме в направлении оси Oz магнитного поля $T_{\alpha} = -\frac{B_z}{4\pi} b_z$.

Из уравнения (1.9) $b_z = \frac{B_z}{\rho_2 c_f^2} P^*$, или, используя вариации давления P^* и магнитного поля b_0 , получим

$$b_{0z} = \frac{B_z}{\rho_2^{1/2} c_f} P^* \quad (3.3)$$

Вводя $T_{\alpha}^* = \frac{T_{\alpha}}{\rho_2 c_f}$ и, используя (3.3), получим

$$T_{\alpha}^* = -\frac{B_z^2}{4\pi \rho_2 c_f^2} P^* = -\frac{a^2}{c_f^2} P^* \quad (3.4)$$

С использованием (3.2), окончательно получим

$$T_{\alpha}^* = -\frac{a^2}{c_f^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} C_{2n+1} \left[\left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right)^{\frac{2n+1}{2}} + \left(\frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^{\frac{2n+1}{2}} \right] \times \\ \times \sin \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} + (2n+1) \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} \right] \quad (3.5)$$

Окончательно для нормальной составляющей поверхностной нагрузки будем иметь

$$Z = P_2 + \rho_2 c_f (P^* - T_{\alpha}^*) \quad (3.6)$$

Перейдем к определению коэффициента C_{2n+1} . Для этого найдем компоненту w скорости u_1 вдоль $\theta = \frac{\pi}{2}$ ($\xi = 0$). Используя (3.3), из третьего уравнения (1.6) найдем w на $\xi = 0$.

$$w = \left(1 + \frac{a^2}{c_f^2}\right) \int \frac{1}{\eta} \frac{\partial p^*}{\partial \eta} d\eta$$

$$w = \left(1 + \frac{a^2}{c_f^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n+1) C_{2n+1} \left[\arcsin \eta + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin(2k \arcsin \eta) \right]$$

Величина w при $\xi = 0$, $\eta = 1$ равна значению q_2 . Следовательно,

$$C_1 \left(1 + \frac{a^2}{c_f^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n+1) C_{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2} = q_2, \text{ где}$$

q_2 определяется по формуле (1.3), $C_2 = C_1 + C_3$.

$$C_1 = \frac{2q_2}{\pi \left(1 + \frac{a^2}{c_f^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n+1) C_{2n+1}} \quad (3.7)$$

§4 Результаты численных расчетов

Для выяснения качественной картины рассматриваемого явления проведены численные расчеты для значений числа Маха $M = 1,5; 3$ и $\bar{a} = 0; 0,1; 0,3; 0,5$, где $\bar{a} = B_0^2 / 4\pi\rho_0 U_0^2$. Результаты расчетов приведены в таблице.

Таблица

	$M = 1,5$				$M = 3$			
	$\bar{a} = 0$	$\bar{a} = 0,1$	$\bar{a} = 0,3$	$\bar{a} = 0,5$	$\bar{a} = 0$	$\bar{a} = 0,1$	$\bar{a} = 0,3$	$\bar{a} = 0,5$
$\bar{P}(0)$	0,417	0,408	0,336	0,218	0,428	0,450	0,313	0,322
$\bar{P}(0,2)$	0,403	0,393	0,320	0,206	0,392	0,415	0,266	0,280
$\bar{P}(0,4)$	0,362	0,353	0,285	0,183	0,309	0,349	0,220	0,246
$\bar{P}(0,6)$	0,302	0,296	0,243	0,158	0,246	0,286	0,193	0,214
$\bar{P}(0,8)$	0,223	0,220	0,189	0,129	0,215	0,231	0,173	0,183
$\bar{P}(1)$	0	0	0	0	0	0	0	0
$P_3(0)$	1,606	1,520	1,053	0,622	3,763	3,084	1,206	0,400
$P_3(0,2)$	1,611	1,524	1,056	0,624	3,791	3,110	1,230	0,406
$P_3(0,4)$	1,621	1,535	1,064	0,628	3,856	3,159	1,253	0,420
$P_3(0,6)$	1,638	1,551	1,074	0,632	3,907	3,206	1,267	0,430
$P_3(0,8)$	1,660	1,571	1,086	0,637	3,931	3,247	1,278	0,440
$P_3(1)$	1,722	1,631	1,129	0,658	4,101	3,420	1,367	0,499

Расчеты для распределения безразмерного давления $\bar{P} = -(P^* - T_{\alpha}^*) / \varepsilon U_0^2$ на стенке показывают, что качественно сохраняется

картина, имеющая место в газовой динамике [3], и, кроме того, имеет место уменьшение давления \bar{P} при увеличении параметра \bar{a} . По формуле

$$P_1 = P_2 + \varepsilon \rho_2 c_f (P^* - T_{11}^*)$$

рассчитано также для $\varepsilon = 0,1$ распределение полного давления P_1 на стенке, причем с увеличением \bar{a} давление P_1 уменьшается. Из таблицы также видно, что \bar{P} и P_2 на стенке увеличиваются с ростом числа Маха при фиксированном значении параметра \bar{a} . Эффект уменьшения давления P_2 на стенке по сравнению с его газодинамическим значением может быть использован для ослабления воздействия ударной волны на объекты, находящиеся в электропроводящей жидкости (например, в сильно ионизованной морской воде).

Автор выражает благодарность член-корр. НАН РА А.Г. Багдоеву за ценные советы, а также благодарит ассистента факультета Прикладной математики Ергу С.А. Саакяна за численные расчеты.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Баум Ф.А., Каплан С.А., Станюкович К.П. Введение в космическую газодинамику. М.: Физматгиз, 1968. 424с.
2. Калихман А.Е. Элементы магнитной газодинамики. М.: Атомиздат, 1964. 423с.
3. Lighthill M.J. Proc. Roy. Soc. London, A200, 554-566, 1950. 584с.
4. Кочин И.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Т.2. М.: Физматгиз, 1963. 621с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
11.06.2002

К ФЛАТТЕРУ МЕМБРАНЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ
 ПОТОКЕ ГАЗА

Ванян Л.А., Минасян М.М.

Լ.Ա. Վանյան, Մ.Մ. Մինասյան

Գազի զերձայնային հոսանքում մեմբրանի ֆլատերի վերաբերյալ

Իսկապես ուսումնասիրվում է անվերջ մեմբրանի կայունությունը գազի զերձայնային հոսանքում: Երբ մեմբրանը, երբ անողիմամիկական ճնշման կախվածությունը մեմբրանի շարժումից կրում է անվերջ առօրյա ճնշում: Մեմբրանի ծածան առատանունների հաճախությունը բերվում է անվերջ առօրյա առաջին կարգի երեք երկարությունների համակարգի, որը այնուհետև սերվարագվել է մեմբրանի կայունությանը: Ուսումնասիրվել է անկայունության ծեր ձևերը է ազված, որ այն ունի անվերջ ճնշում: Արդյունք են բայ կառուցված ախրների սինքրոնիզմի կետեր:

L.A. Vanyan, M.M. Minasyan

On The Flutter of Membrane in Supersonic Gas Flow

Исследуется устойчивость бесконечной мембраны в сверхзвуковом потоке газа при больших когда зависимость аэродинамического давления от движения мембраны имеет нелинейный характер дифференциального типа. Уравнение изгибных колебаний мембраны задано в гиперболической системе уравнений первого порядка, которая имеет также и резонансные инварианты. Исследован тип неустойчивости. Показано, что в простейшем случае характер. Определены точки синхронизма слабовязанных волн

Изгибные колебания мембраны в двухмерном потоке газа исследовались уравнением

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p = 0 \quad (1)$$

где w , ρ , h – прогиб, плотность и толщина мембраны, ε – коэффициент структурного демпфирования, p – избыточное аэродинамическое давление, N – мембранное усилие. Давление p определяется решением внешней среды с учетом граничных условий. Для линеаризованного потенциального потока идеального газа зависимость давления от продольных прогибов представляется интегральным оператором с весьма сложным ядром [1,2] и точное исследование задачи об устойчивости мембраны связано с большими трудностями. При больших скоростях потока газа задача существенно упрощается применением известной "поршневой" теории [2]

$$p = \rho_0 a_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2)$$

где ρ_0 , a_0 , U – невозмущенные плотность, скорость звука и скорость потока газа.

Значит о флаттере и бесконечной и конечной мембраны в "поршневом" приближении допускает точное решение [2]. Однако при больших сверхзвуковых числах Маха потока "поршневое" приближение становится непригодным и приходится иметь дело с интегродифференци-

циальным уравнением для прогиба.

В работе [3] построено новое приближение для давления, позволяющее эффективно исследовать флаттер пластинки и мембраны при малых числах Маха $M = U/a_0$. Это приближение в виде дифференциальной зависимости (ее можно представить и в интегральной форме [4]) следующее:

$$\frac{Dp}{Dt} = \rho_0 a_0 \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \chi \rho_0 a_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (U - a_0) \frac{\partial}{\partial x} \quad (3)$$

где χ — поправочный коэффициент. Заметим, что при $\chi = 0$ (3) переходит в (2).

Главной особенностью (3) является его нелокальный характер зависимости давления от движения мембраны, вследствие чего для прогиба получается дифференциальное уравнение повышенного порядка по сравнению с "поршневой" теорией. Ниже исследуется это уравнение.

1. Рассмотрим систему уравнений (1) и (3). Введя новые функции

$$v = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \theta = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4)$$

(v — нормальная скорость, θ — наклон мембраны) систему представим в вектор-матричной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = b \quad (5)$$

где векторы u и b суть

$$u = (\rho, v, \theta), \quad b = (-\varepsilon_0(\varepsilon v + p/\rho h), -(\varepsilon v + p/\rho h), 0), \quad (\varepsilon_0 = \rho_0 a_0 / \rho h) \quad (6)$$

а ненулевые элементы матрицы A —

$$\begin{aligned} a_{11} &= U - a_0, & a_{12} &= -\varepsilon_0(2U - a_0), & a_{13} &= -\varepsilon_0[c_0^2 + U(u - a_0) + \chi a_0^2] \\ a_{21} &= -c_0^2, & a_{22} &= -1, & (c_0^2 &= N/\rho h) \end{aligned} \quad (7)$$

Вычислив собственные значения матрицы A из уравнения $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$, находим

$$\lambda_1 = U - a_0, \quad \lambda_2 = c_0, \quad \lambda_3 = -c_0 \quad (8)$$

Пусть $U = a_0 + c_0$. Тогда трем различным собственным значениям λ_k соответствуют три семейства характеристик

$$\Gamma_k: \frac{dx}{dt} = \lambda_k, \quad (k = 1, 2, 3) \quad (9)$$

и три левые собственные векторы

$$\begin{aligned} l^{(1)} &= \left[(U - a_0)^2 - c_0^2, \rho_0 a_0 (c_0^2 + \chi a_0^2 + 2a_0(U - a_0)), \rho_0 a_0 (\chi a_0^2 (U - a_0) \cdot U' (2c_0 - U)) \right] \\ l^{(2)} &= (0, 1, -c_0), \quad l^{(3)} = (0, 1, c_0) \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку собственные значения матрицы A различны и в силу

$$\text{Det}(l_i^{(k)}) = \text{Det} A = 2c_0 \left((U - a_0)^2 - c_0^2 \right) \neq 0 \quad (11)$$

собственные векторы составляют базис в E^3 , то по определению [5] система (5) при $U \neq a_0 + c_0$ гиперболическая в строгом смысле для которой задача Коши корректна. Одним из эффективных методов

численного решения таких систем является метод характеристик, использующий минимальные операторы интерполирования. В характеристической форме система (5) запишется в виде

$$t^{(k)} \left(\frac{du}{dt} \right)_k = f_k, \quad k=1,2,3 \quad \left(\frac{d}{dt} \right)_k = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial}{\partial x} \quad (12)$$

$$f_1 = -\chi \rho_0 a_0 (\varepsilon v + p / \rho h), \quad f_2 = f_3 = -(\varepsilon v + p / \rho h)$$

Введя римановы инварианты $r(r_1, r_2, r_3)$

$$r = \Lambda u, \quad u = \Lambda^{-1} r \quad (13)$$

получим

$$r_1 = P - \varepsilon_0 (1 - \beta) v - \varepsilon_0 [U + \beta(U - a_0)] \theta$$

$$r_2 = v - c_0 \theta, \quad r_3 = v + c_0 \theta \quad (\beta = \chi a_0^2 / (U - a_0)^2 - c_0^2) \quad (14)$$

$$P = r_1 + \frac{\varepsilon_0 (c_0 - U - a_1)}{2c_0} r_2 + \frac{\varepsilon_0 (c_0 + U + a_2)}{2c_0} r_3$$

$$2v = r_2 + r_3, \quad 2c_0 \theta = r_3 - r_2 \quad \left(a_1 = \frac{\chi a_0^2}{U - a_0 - c_0}, \quad a_2 = \frac{\chi a_0^2}{U - a_0 + c_0} \right) \quad (15)$$

В инвариантной форме система (5) преобразуется в систему из трех обыкновенных уравнений, действующих по различным характеристическим направлениям: $x = \lambda_k t + \text{const}$

$$\left(\frac{dr_k}{dt} \right)_k = \mu_k \quad (k=1,2,3) \quad \mu_1 = -\varepsilon_0 \beta K, \quad \mu_2 = \mu_3 = -K \quad (16)$$

$$K = r_1 + \frac{r_2}{2} \left[\varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{c_0} (c_0 - U - a_1) \right] + \frac{r_3}{2} \left[\varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{c_0} (c_0 + U - a_2) \right]$$

Если $U = a_0 + c_0$, то система (5) имеет кратные характеристики $\lambda_1 = \lambda_2 = c_0$ и поскольку в этом случае $\text{Det} \Lambda = 0$, то вопрос гиперболичности и связанная с ним задача Коши требует отдельного рассмотрения. Здесь только отметим, что имеем вырождение системы (5).

2. Рассмотрим вопрос устойчивости бесконечной мембраны на базе системы (5). Представив решение в виде бегущих волн $u = u_0 \exp i(\omega t - kx)$, получим следующее дисперсионное уравнение

$$D(\omega, k) = \left[\omega - (U - a_0) k \right] \left[\omega^2 - c_0^2 k^2 - \gamma \omega + i \varepsilon_0 U k \right] - i \delta k^2 = 0 \quad (17)$$

$$(\gamma = \varepsilon + \varepsilon_0, \quad \delta = \chi \varepsilon_0 a_0^2)$$

Система будет неустойчивой, если $\text{Im} \omega(k) < 0$ при некоторых вещественных k . Граница устойчивости определяется условиями $\text{Im} \omega = 0, \text{Im} k = 0$. Тогда из (17) получим, что на границе устойчивости выполняется условие

$$[c_0 - (U - a_0)] [c_0 \gamma - \varepsilon_0 U] + \delta = 0 \quad (18)$$

В работе [6] уравнение, выведенное для пластинки, подробно исследовано. Полученные результаты сравнены с результатами, полученными по "точной" постановке. В частности, получены весьма

хорошие совпадения как для области устойчивости, так и для действительных и мнимых частей трех фазовых скоростей (по "поршневой" теории имеются только две волны). Поскольку уравнение (18) для мембраны отличается от пластинки лишь представлением скорости "собственных" изгибных волн c_0 , то все результаты работы [6] в равной степени пригодны и здесь.

На фиг.1 представлена область устойчивости в плоскости параметров $U, \lambda = \varepsilon/\varepsilon_0$. Наклонная асимптота $U = c_0(1 + \lambda)$ соответствует "поршневой" теории. Ниже этой линии эта теория определяет устойчивость.

Выясним характер неустойчивости (конвективной или абсолютной) [7]. Будем пользоваться критериями, изложенными в книге [8] (см. также [9]). В работе [10] показано, что неустойчивость бесконечной мембраны по ПТ носит конвективный характер. В работе [11], в которой дисперсионное уравнение отличается от (17) первым множителем $|\omega - Uk$ вместо $\omega - (U - a_0)$, также выявлен конвективный характер неустойчивости. Однако из-за указанного отличия множителей следует считать верным результат лишь выше наклонной асимптоты $U = c_0(1 + \lambda)$. Ниже этой асимптоты и нижней границы области устойчивости (область малых чисел Маха) необходимо провести новое исследование.

Для применения критерия, в первую очередь определим точки ветвления решений $\omega_s = \omega_s(k)$, $s = 1, 2, 3$ уравнения (17). Они определяются из системы

$$D(\omega, k) = 0, \quad D'_k(\omega, k) = 0 \quad (D'_\omega \neq 0) \quad (19)$$

Для упрощения вычислений воспользуемся относительной малостью величины δ в (17). Считая $\delta = 0$ и решая систему (19), определяем точки синхронизма, затем методом итераций можно получить поправки к этим точкам, при этом одни точки синхронизма будут порождать пару точек ветвления, положения которых будут мало отличаться от положений точек синхронизма, другие же будут смещаться незначительно.

При $\delta = 0$ система (19) распадается на две подсистемы

$$\begin{aligned} \omega - (U - a_0)k &= 0 \\ \omega^2 - c_0^2 k^2 - i\gamma\omega + i\varepsilon_0 U k &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} 2c_0^2 k - i\varepsilon_0 U &= 0 \\ \omega^2 - c_0^2 k^2 - i\gamma\omega - i\varepsilon_0 U k &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Решение (20) даст одну точку синхронизма

$$\omega_1 = \frac{i(U - a_0)[\gamma(U - a_0) - \varepsilon_0 U]}{(U - a_0)^2 - c_0^2}, \quad k_1 = \frac{\omega_1}{U - a_0} \quad (22)$$

а решение (21) определяет две точки ветвления в нулевом приближении

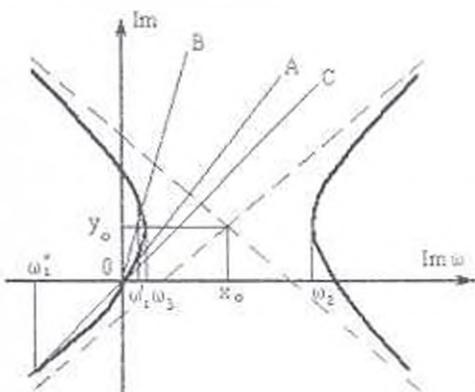
$$\omega_{2,3} = \frac{i\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_0^2 U^2}{4c_0^2} - \frac{\gamma^2}{4}}, \quad k_{2,3} = \frac{i\varepsilon_0 U}{2c_0^2} \quad (23)$$

Как видно из (22) и (23), в интересующем нас случае $U < c_0(1 + \lambda)$ все точки ветвления чисто мнимые. Согласно критерию о характере неустойчивости [8,9] следует определить знак $\text{Im}\omega$, и выяснить какие

противоположные или попутные пересекаются в этих точках. Для выяснения этого воспользуемся методом, изложенным в [8]. Если нанести график зависимость $y = \text{Im} k$ от $x = \text{Im} \omega$ при $\delta = 0$, то получим картину, представленную на фиг. 2. Здесь попутные волны определяются условиями $x \rightarrow \pm\infty$, $y \rightarrow \pm\infty$, а встречные волны — условиями $x \rightarrow \pm\infty$, $y \rightarrow \pm\infty$. Как видно из фиг. 2, в точках ω_2 и ω_1 пересекаются противоположные волны и, поскольку эти точки в комплексной плоскости лежат в верхней полуплоскости, то согласно критерию [8], неустойчивость, если она есть, носит конвективный характер. По сути эти точки соответствуют поршневому приближению.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для точки синхронизма ω_1 согласно (22) возможны оба случая, как $\text{Im} \omega_1' > 0$, так и $\text{Im} \omega_1' < 0$. Наклон касательной к гиперболе

$$\left(x - \frac{\gamma}{2}\right)^2 - c_0^2 \left(y - \frac{\varepsilon_0 U}{2c_0^2}\right)^2 = \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\varepsilon_0^2 U^2}{4c_0^2} \quad (24)$$

равен $\gamma/\varepsilon_0 U$ в линии попутной волны — $1/U - a_0$. Если (OA)

$$1/U - a_0 > \gamma/\varepsilon_0 U \text{ или то же } \gamma(U - a_0) < \varepsilon_0 U \quad (25)$$

то $\text{Im} \omega_1' > 0$ и в точке ω_1' встречаются противоположные волны, а если (OX)

$$\frac{1}{c_0} < \frac{1}{U - a_0} < \frac{\gamma}{\varepsilon_0 U} \text{ или то же } \gamma(U - a_0) > \varepsilon_0 U, U < a_0 + c_0 \quad (26)$$

то $\text{Im} \omega_1' < 0$ и в точке ω_1' встречаются попутные волны. В обоих случаях неустойчивость конвективная. Из (26) также следует неравенство $U > a_0(1 + \lambda)$ и поскольку было принято $U < c_0(1 + \lambda)$, то этот случай возможен лишь при $a_0 < c_0$.

Таким образом, неустойчивость бесконечной мембраны при малых сверхзвуковых числах Маха всегда конвективна.

Что касается конечной мембраны, то как принято считать, она неустойчива при любом сверхзвуковом режиме обтекания [1]. По ПТ этот

результат абсолютно точен. В точной постановке задача впервые рассмотрена в работе [12], на которую обычно ссылаются другие авторы. В этой работе показано, что для достаточно больших скоростей потока конечная мембрана устойчива, что по сути следует из ПТ. Для малых сверхзвуковых скоростей вопрос остается открытым. Думается, что решение системы (5) при надлежащих краевых условиях может разрешить этот вопрос.

ЛИТЕРАТУРА

1. Майс Дж У. Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. М: Физматгиз, 1961. 272с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М: Физматгиз, 1961. 340с.
3. Минасян Д.М., Минасян М.М. Новое приближение в задаче о флаттере пластинки в сверхзвуковом потоке газа. // Доклады НАН РА, 2001, Т.101, №1. С.49-54.
4. Минасян Д.М. Флаттер пластинки при малых сверхзвуковых скоростях потока газа. Ереван: Канд. диссертация, 2002. 115с.
5. Курант Р. Уравнения в частных производных. Москва: Мир, 1963. 830с.
6. Минасян Д.М. Флаттер упругой пластинки при малых сверхзвуковых скоростях газа. Сравнительный анализ. // Изв. НАН РА. Механика, 2001, Т.54, №3 С.65-72.
7. Ландау А.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Теоретическая физика том IV. Москва: Наука, 1988. 736 с.
8. Фельдман А.А., Комаровский М.Н. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. Москва: Наука, 1981. 175с.
9. Куликовский А.Г. Об устойчивости однородных состояний. // ПММ 1966 Т.30. В.1. 1966. С.148-153.
10. Белубекян М.В., Минасян М.М. Об усилении волны при обтекании мембраны сверхзвуковым потоком газа // Межвуз. сб. ЕГУ. Механика. 1982 С.44-50.
11. Белубекян М.В., Минасян М.М. О характере неустойчивости бесконечной мембраны в сверхзвуковом потоке газа // Изв. НАН РА. Механика. 2001, Т.53, №3. С.29-35.
12. Coland M, Luke YL. An exact solution for two-dimensional linear flutter at supersonic speeds. // J. Aeronaut. Sci., 1954, vol.21, №4, pp.275-276.

Ереванский государственный
Университет

Поступила в редакцию
21.09.2002

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ГАРАНТИРОВАННОГО ПРИВЕДЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЦЕЛЕВУЮ ТОЧКУ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Аветисян В.В.

Վ.Վ. Ավետիսյան

Գրեմատիկական եզրանկարը օպտիմալ երաշխավորված ձևով սահմանափակ տիրույթում նպատակային կետ բերելու խնդիրը ոչ լրիվ ինֆորմացիայի պայմաններում:

Դիստրիբուցիոն և սահմանափակ տիրույթում դինամիկական համակարգը օպտիմալ երաշխավորված ձևով նպատակային կետ՝ անշարժ կետային օբյեկտ բերելու խնդիրը, վերջինիս կոորդինատների ոչ լրիվ ինֆորմացիայի պայմաններում: Գրված խնդրի ուսումնասիրման համար զարգացվում է հիմնավորվում է երաշխավորող կոմբինացված ղեկավարման եղանակը [1,2] Կոմբինացված ղեկավարման նպատակն է՝ նպատակային անշարժ օբյեկտը ղեկավարվող շարժական խնդրանշանի տիրույթի միջոցով, իսկ այնուհետև տրեւմ ճշտությամբ մոտենալ նրան: Գիտարկվել է ուսումնասիրվել է փնտրման տիրույթը ստիված օբյեկտը ժամկետ հետագծելու, որոնցով շարժվելիս ապահովվում է վնասուտար վերջավոր մասնահատված ճանաչողական տրեւմ սկզբնական դիրքի համար գոյություն ունեն անկերջ բազմությամբ ժամկետ հետագծելու լրիվ ճանաչողական սկզբնական խնդիրը բերվել է օպտիմալ կոմբինացված ղեկավարման որոշման խնդիրը, որտեղ նյութագրվել է հասնում անշարժ որոնելի օբյեկտը փնտրելու է նրան ստանալու գնահատական ժամանակը: Ավտոմատը [3] - ուս սկզբված ուսումնասիրությունների շարունակությունն է:

V.V. Avetisyan

On the Optimal Guaranteed Bringing Problem of the Dynamic Systems to Goal Point in a Limited Domain with Incomplete Information.

Рассматривается задача оптимального гарантированного приведения динамической системы в целевую точку в ограниченной области при неполной информации о ее взаимодействиях. Развивается и обосновывается методика комбинированного гарантирующего управления [1,2]. Цель комбинированного управления — обнаружение искомой целевой точки с помощью управляемой информационной области движущейся вместе с фазовым пространством системы (этап поиска), а затем приведение в эту точку (этап приведения). Выводится в результате покрывающие с заданной точностью область поиска траектории оптимальных движений по которым обеспечивает успешный поиск — конечное гарантирующее время. Для заданного начального положения динамической системы существует бесчисленное множество покрывающих траекторий. Вследствие чего исходная задача сводится к задаче определения оптимального комбинированного управления доминирующего минимальное значение суммарному времени гарантированного поиска и приведения. Работа является продолжением исследований, начатых в [3].

1. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве задано некоторое выпуклое компактное связанное множество $D \subset R^3, D = D' + D''$, где $D' \subset R^3$ и $D'' \subset R^3$ — взаимно ортогональные выпуклые компактные подмножества соответственно.

Рассмотрим систему из двух точечных объектов: движущегося во множестве $D \subset R^3$ управляемого объекта X и неподвижного в пределах подмножества $D' \subset D, D' \subset R^3$ объекта Y . Динамика системы задается следующими дифференциальными уравнениями и ограничениями:

$$\begin{aligned}
 X: \quad \dot{x} &= f(x, u, t), & Y: \quad y(t) &\equiv y(t_0) = y^0, \\
 x(t_0) &= x^0, \quad x(t) \in D \subset R^1, & y(t) &\in D' \subset R^2, \quad t \geq t_0 \\
 u(t) &\in U \subset R^1, \quad t \geq t_0
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь x, y — фазовые векторы объектов X и Y соответственно, u — управляющий вектор объектом X , f — заданная функция, U — заданное множество значений управления u .

Пусть проекции $x' = (x_1, x_2) \in D'$ и $x'' \in D''$ фазового вектора $x \in D$ управляются с помощью управлений $u' \in U'$ и $u'' \in U''$ соответственно, где U', U'' — взаимно ортогональные выпуклые компактные подмножества множества $U: U' + U'' = U$. При таком предположении, вследствие возможности однозначного представления фазового и управляющего вектора объекта X на сумму векторов меньшей размерности, система уравнений движения объекта X расщепляется на подсистемы и динамика описанной системы на фиксированном интервале времени $[t_0, T]$ задается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 X: \quad \dot{x}' &= f'(x', u', t), & \dot{x}'' &= f''(x'', u'', t); & Y: \quad y(t) &\equiv y(t_0) = y^0 \\
 x'(t_0) &= x'^0, & x''(t_0) &= x''^0, & y(t) &\in D' \subset R^2, \quad t \geq t_0 \\
 x'(t) &\in D' \subset R^2, & x''(t) &\in D'' \subset R \\
 u'(t) &\in U' \subset R^2, \quad t \geq t_0, & u''(t) &\in U'' \subset R, \quad t \geq t_0 \\
 x &= x' + x'', \quad D = D' + D'', \quad U = U' + U''
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Предположим, что управляемому объекту X в процессе движения доступна полная информация о соотношениях (1.2), за исключением начального состояния объекта $Y - y(t_0) = y^0$. Однако, имеется некоторое подвижное и изменяющееся информационное множество $G(x(t))$, связанное с текущим значением фазового вектора $x(t)$, позволяющее уточнить информацию о координатах местоположения объекта Y , в случае попадания последнего в это множество.

Определим область $G(x)$ для любого $x \in D \subset R^2$ следующим образом:

$$G(x(t), C) = G(x'(t), x''(t), C) = \left\{ \xi' \in R^2 : \begin{aligned} &|\xi' - x'| \leq \rho' = C |x''|, \\ &x' \in D', \quad x'' \in D'', \quad C > 0 \end{aligned} \right\} \tag{1.3}$$

Область $G(x(t), C)$ (1.3) представляет собой круг с центром в точке $x'(t) \in D' \subset D$ и с радиусом $\rho' = C |x''|$, где $|x''|$ — расстояние объекта X до подмножества D' , а $C > 0$ — такое число, при котором имеет место включение $G(x', \rho'_{\max}) \subset D'$, $\rho'_{\max} = C \max_{x'' \in D''} |x''|$ хотя бы для одной точки $x' \in D'$. Такой выбор постоянной C позволяет обходить случай тривиального решения задачи, т.е. случай, когда $D' \subset G$.

При фиксированном параметре C (1.3), эволюция круговой области

$G(x', x'', C) = G(x', \rho')$ (с учетом $\rho' = C|x''|$) во множестве D' , согласно (1.2), определяется движением ее центра x' в подмножестве D' , с помощью вектор управления u' и расширением или сужением области $G(x', x'', C)$ путем изменения фазового вектора x'' или, что то же самое, изменением ее радиуса $\rho' = C|x''|$ в подмножестве D' , с помощью скалярного управления Cu'' .

Пусть управляемый процесс начинается в момент $t = t_0$ из начальной точки $x^0 = (x'^0, x''^0) \in D$ и заканчивается в момент $t = T$, когда выполняется условие

$$\begin{aligned} x(T) &= x^1 \\ x^1 &= (x'^1, x''^1), \quad x'^1 = y, \quad x''^1 = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Целью объекта X является выполнение условия (1.4) за возможно минимальное время T .

2. Разобьем процесс управляемого движения объекта X на два этапа — этапы поиска и приведения на искомый точечный объект Y . В связи с этим допустимыми будем считать комбинированные управляющие функции вида

$$u = \begin{cases} u_0(x^0; t), & t_0 \leq t \leq t_1 \\ u_1(x^*, t_1, x^1; t), & t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (2.1)$$

принимая значения из области U . Здесь величины x^0, x^*, x^1, t_1, T являются параметрами, $x^0, x^*, x^1 \in D$, $T \geq t_1 \geq t_0$. Управлению u_0 соответствует этап поиска, а управлению u_1 — этап приведения на искомый объект.

На каждом из этих этапов решаются качественно разные задачи. Перейдем к описанию этих задач.

Этап поиска. На этапе поиска требуется управлять движением объекта X так, чтобы в некоторый момент времени $t = t_1$ из некоторой точки $x^* = x(t_1)$ был наблюдаем искомый объект Y , т.е. выполнялось условие

$$y = x^1 \in G(x(t_1)) \Leftrightarrow \begin{cases} |x'(t_1) - x''^1| \leq \rho'(t_1) = \rho'' \\ |x''(t_1)| \leq \rho'(t_1)C^1 \end{cases} \quad (2.2)$$

Учитывая, что движения (1.2) разделяются по переменным x' и x'' , управление u_0 зададим в виде пары кусочно-непрерывных функций

$$\begin{aligned} u_0 &= \{u_0'(x'^0; t), u_0''(x''^0; t)\} \\ (x'^0, x''^0) &= x^0 \in D, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

где u_0' осуществляет движение объекта X по координате x' , а u_0'' — по координате x'' . t_1 — момент обнаружения объекта Y , точнее — момент первого попадания вектора y на границу множества G . Вопрос существования конечного момента $t_1 \geq t_0$ является основным в задаче поиска и

ее решение зависит от способа управления объектом X

Пусть $x(t; t_0, x^0, u_0) = (x'(t; t_0, x'^0, u'_0), x''(t; t_0, x''^0, u''_0))$ — траектория движения объекта X , стартующего из заданного начального положения (t_0, x^0) , $x^0 = (x'^0, x''^0) \in D$ с управлением $u_0(x^0; t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$. (2.3) Через $L_{\rho(t; t_0)}\{x'; x'', x'''\}$ обозначим целиком лежащую в D' незамкнутую и не имеющую точек самопересечения конечную кривую с крайними точками $x'^0, x''^0 \in D'$, по которой происходит движение объекта X по переменной x' на интервале $[t_0, t_1]$ с управлением $u'_0(x'^0; t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$. В каждой точке $x'(t)$ этой кривой определен круг обнаружения с центром в этой точке и с радиусом ρ' , изменяющимся по закону $\rho'(t; t_0, \rho'^0, u'_0) = C|x''(t; t_0, x''^0, u''_0)|$ с управлением $u''_0(x''^0; t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

Определение. Конечную кривую $L_{\rho(t; t_0)}\{x'; x'', x'''\}$, порожденную управлением $u_0(x^0; t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, назовем покрывающей область D' кривой, если для любой точки $x' \in D'$ существуют точка $x'_0 \in L_{\rho(t; t_0)}\{x'; x'', x'''\}$ и значение радиуса $\rho'_0(x'_0)$, $\rho'_0 \in [\rho^1, \rho^m]$ такие, что $x' \in G(x'_0, \rho'_0)$ для всех $\rho'_0 \in [\rho^1, \rho^m]$.

Через $U_{\text{обл}} = (U'_{\text{обл}}, U''_{\text{обл}}) \subseteq U$ обозначим множество допустимых управлений, при которых движение фазового вектора объекта X по переменной x' происходит по покрывающей траектории. Множество покрывающих кривых $L_{\rho(t; t_0)}\{x'; x'', x'''\}$ однозначным образом определяемые допустимыми управлениями $u_{\text{обл}} \in U_{\text{обл}}$, обозначим через Λ .

Лемма 1. Движение объекта X по покрывающей траектории $L_{\rho(t; t_0)}\{x'; x'', x'''\}$ при любом управлении $u_{\text{обл}} \in U_{\text{обл}}$ гарантирует обнаружение объекта Y за конечное время.

Действительно, где бы ни находился в начальный момент Y в D' — $y \in D'$, согласно конструкции траектории $L_{\rho(t; t_0)}\{x'; x'', x'''\}$ найдутся точка $x'' \in L_{\rho}$ и момент времени t , такие, что при перемещении объекта X из начальной точки (t_0, x^0) , $x^0 = (x'^0, x''^0) \in D$, $x'' \in L_{\rho}$ с начальным радиусом обнаружения $\rho^0 = C|x''^0|$ вдоль кривой L_{ρ} по законам $x'(t; t_0, x'^0, u'_0)$, $\rho'(t; t_0, \rho^0, u'_0) = C|x''(t; t_0, x''^0, u''_0)|$ (1.2) с управлениями $u'_0(x'^0; t)$, $u''_0(x''^0; t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, соответственно, момент времени $t = t_1$ в точке $x'(t_1) = (x''^1(t_1), x''^m(t_1))$ произойдет обнаружение $y \in G(x'(t_1), \rho'(t_1))$, $\rho'(t_1) = \rho^m \in [\rho^1, \rho^m]$.

Утверждение. Пусть $L_{\rho(t; t_0)}\{x'; x'', x'''\} \in \Lambda$, $\rho'(x')$, $0 < \rho^1(x') < \rho^m_{\text{max}}$.

$x' \in L_p$. Тогда кривая $L_{\rho'}$, для которой $\bar{\rho}'(x') \geq \rho'(x')$, $x' \in L_p, L_p$ – также покрывающая.

Действительно, так как кривая $L_{\rho'(x'(t))}\{x'; x''', x''\} \in \Lambda$, то для любой точки $x'_2 \in D'$ существует точка $x''_2 \in L_{\rho'(x'(t))}\{x'; x''', x''\}$ такая, что $x'_2 \in G(x''_2, \rho')$. Поскольку $G(x''_2, \rho') \subset G(x''_2, \bar{\rho}') \subset D'$, где $\rho'(x') \leq \bar{\rho}'(x')$, то $x'_2 \in G(x''_2, \bar{\rho}')$. Значит кривая $L_{\rho'(x'(t))}\{x'; x''', x''\}$ также покрывающая.

Теорема 1. Пусть $L_{\rho'(x'(t))}\{x'; x''', x''\} \in \Lambda$, $\rho'(x'), 0 < \rho'(x') < \rho'_{\max}$, $x' \in L_p$. Тогда существует покрывающая кривая $\bar{L}_{\rho'(x'(t))}\{x'; x''', x''\}$, $0 < \bar{\rho}'(x') < \rho'_{\max}$, $x' \in \bar{L}_p$ минимальной длины d_1 .

Действительно, Пусть d_2 – нижняя грань длин покрывающих кривых, соединяющих x''' и x'' . Пусть длины кривых $\bar{L}_1^{(1)}, \bar{L}_2^{(2)}, \dots, \bar{L}_n^{(n)}, \dots$, соединяющих x''' и x'' , стремятся к d_2 . Так как из последовательности $\bar{L}_n^{(n)}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность [4], то предельная кривая \bar{L}_2 этой последовательности не может иметь длину больше d_2 .

Доказанная теорема устанавливает существование кривой минимальной длины во множестве покрывающих кривых.

Теорема 2. Пусть $\bar{L}_{\rho'(x'(t))}\{x'; x''', x''\}$ – покрывающая кривая минимальной длины d_1 с постоянной функцией радиуса обнаружения $\bar{\rho}'$, $0 < \bar{\rho}' \leq \rho'_{\max}$. Тогда существует покрывающая кривая $L_{\rho'(x'(t))}\{x'; x''', x''\}$ минимальной длины d_2 с постоянным радиусом ρ' , $\bar{\rho}' < \rho' \leq \rho'_{\max}$, такая, что $d_1 < d_2$.

Действительно, пусть имеет место обратное неравенство $d_1 > d_2$. Тогда, поскольку, согласно утверждению, кривая $\bar{L}_{\rho'(x'(t))}\{x'; x''', x''\}$ с радиусом обнаружения $\bar{\rho}'$, $\bar{\rho}' < \rho' \leq \rho'_{\max}$ также покрывающая, то она имеет длину меньше, чем кривая $L_{\rho'(x'(t))}\{x'; x''', x''\}$. Но это противоречит тому, что $L_{\rho'(x'(t))}\{x'; x''', x''\}$ – покрывающая кривая минимальной длины.

Отсюда следует, что чем больше радиус обнаружения покрывающей траектории минимальной длины, по которой осуществляется "просмотр" области D' , тем меньше время завершения поиска искомого объекта.

Время $t_1, t_2 \geq t_0$, при котором обнаружение происходит в крайней точке покрывающей траектории x'' , назовем гарантированным временем поиска.

При начальном положении $x^0 = (x^{00}, x^{*0})$ с фиксированной координатой $x^{00} \in D'$ гарантированное время поиска зависит от геометрических параметров множества D' , управлений u_{1c}^0, u_{2c}^0 , определяющие покрываю-

щую траекторию l_{ρ} , а также от начальной координаты x^0 (определяющей начальную величину радиуса обнаружения ρ^0). Таким образом, $t_1 = t_1(D', u_{0L}^*, u_{0L}^*, x^{*0})$.

Этап приведения с момента обнаружения объекта Y начинается этап приведения на него. Движение на этапе приведения происходит в интервале $[t_1, T]$ и соответствует приведению объекта X из точки наблюдения $x^* = x(t_1)$ в обнаруженную точку $x(T) = x^1$ [14] с помощью управления $u_1(x^*, x^1; t)$, $t_1 \leq t \leq T$. Так как уравнения движения (1.2) по переменным x^1 и x^* независимы, то задачи управления по этим координатам решаются отдельно. Время $t_1 = T - t_*$ в этой двухточечной задаче управления с полной информацией о краевых точках зависит от расстояния $\rho^* = \rho(x^*(t_1), x^1) = |x^* - x^1|$, соединяющего точку x^* в момент времени $t = t_1$ с точкой x^1 в момент времени $t = T$, а также от управления приведения u_1 и не зависит от параметров области D' , т.е. $t_1 = t_1(\rho^*, u_1)$.

Так как D' и D'' ортогональны, то имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \rho^* &= \sqrt{(\rho^{**})^2 + |x^{**}|^2} = \sqrt{C|x^{**}|^2 + |x^{**}|^2} = |x^{**}| \sqrt{1 + C^2} = \\ &= \sqrt{1 + C^2} |x^{**}(x^{*0}, u_{0L}^*)| = \rho^*(x^{*0}, u_{0L}^*) \end{aligned}$$

Следовательно, $t_1 = t_1(x^{*0}, u_{0L}^*, u_1)$, и полное время процесса управления, складывающееся из времени, прошедшего до обнаружения и оставшегося времени $t_1 = T - t_*$, $= t_1(x^{*0}, u_{0L}^*, u_1)$ приведения в x^1 , равно

$$T(D', x^{*0}, u) = T(D', x^{*0}, u_{0L}^*, u_{0L}^*, u_1) = t_*(D', x^{*0}, u_{0L}^*, u_{0L}^*) + t_1(x^{*0}, u_{0L}^*, u_1) \quad (2.4)$$

Пусть $\Delta = \{D'\}$ — некоторое множество областей D' таких, что $\bigcap \{D'\} \neq \emptyset$ и $x^{*0} \in (\bigcap \{D'\})$. Пусть область $D' \in \Delta$ и начальная координата $x^{*0} \in D'$ заданы. Тогда каждому значению координаты x^{*0} и каждому допустимому управлению $u = \{u_{0L}^*, u_1\}$ соответствует некоторое время гарантированного поиска и приведения $T = T(D', x^{*0}, u)$.

Задача. Найти минимальное суммарное время гарантированного поиска и приведения $T^*(D)$, управление $u^* = \{u_{0L}^*, u_1^*\}$ и начальную координату $(x^{*0})^*$, доставляющие минимум

$$T^*(D) = \min_{D' \in \Delta} \min_{u \in U(D', x^{*0})} T(D', x^{*0}, u), \quad D' \in \Delta \quad (2.5)$$

В (2.5) второй минимум по компоненту u_1 является задачей оптимального по быстродействию управления по заданным краевым точкам x^* и x^1 . В силу того, что уравнения движения (1.2) по переменным

t и x^* разделяются, то оптимальное быстродействие из точки обнаружения (x'', x^{**}) в целевую точку $(x^*, x^{*1} = 0)$ осуществляется при одновременных реализациях оптимальных по быстродействию управлений u_1'' и u_1^{**} , осуществляющие прямолинейные перемещения из точек x'' и x^* в точки x^* и $x^{*1} = 0$ соответственно и зависящие, в конечном итоге, от расстояний ρ'' и $|x^{**}|$ соответственно. Таким образом,

$$u_1^*(\rho''; t) = (u_1''(\rho''; t), u_1^{**}(|x^{**}|; t)),$$

$$u_1^* = \begin{cases} u_1''(\rho''; t), & t_0 \leq t \leq T' \\ u_1^* = 0, & T' \leq t \leq t_1 \end{cases}, \quad u_1^{**} = \begin{cases} u_1^{**}(\rho''; t), & t_0 \leq t \leq T'' \\ u_1^{**} = 0, & T'' \leq t \leq t_1 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$t_1 = \max(T', T''),$$

где $T'(\rho'')$ – оптимальное время перемещения из x'' в x^* , соответствующее управлению u_1'' , а T'' – оптимальное время вертикального перемещения из x^{**} в $x^{*1} = 0$, соответствующее управлению u_1^{**} .

Учитывая вышесказанное, из (2.4)-(2.6) получаем

$$T^*(D') = \min_{\substack{\theta \in D_1^* \cup \dots \cup D_n^* \\ u = \{u_{\theta 1}, u_{\theta 2}\}}} \min T(D', x^{*0}, u) =$$

$$= \min_{\substack{\theta \in D_1^* \cup \dots \cup D_n^* \\ u = \{u_{\theta 1}, u_{\theta 2}\}}} (t_0(D', x^0, u_{\theta 1}, u_{\theta 2}) + t_1(x^{*0}, u_{\theta 1}, u_{\theta 2})) \quad D' \in \Delta \quad (2.7)$$

где u_{θ} и соответствующее время $t_1(x^{*0}, u_{\theta 1}, u_{\theta 2})$ определяются согласно (2.6).

Отметим, что соотношения (2.7) упрощаются в случае, когда поиск осуществляется во множестве покрывающих траекторий с постоянным радиусом обнаружения, что соответствует нулевым значениям управления $u_{\theta 1}$ по координате x^* на этапе поиска.

ЛИТЕРАТУРА

1. Меликян А. А. Оптимальное гарантирующее управление динамической системой с поиском целевой точки. // ДАН СССР. 1991. Т. 316. № 4. С. 815-819.
2. Adams S., Melikyan A.A. Optimal trajectory planning for manipulators with goal point uncertainty. // 6-th International Conference on CAD/CAM, Robotics and Factories of the Future. 1991. London. Proceedings. pp. 3-8.
3. Аветисян В.В. Оптимальный по минимальному гарантированному поиску неподвижного объекта в прямоугольной области. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 1. С. 61-69.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1983. 542с.

УДК 62.50

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
 СБЛИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПРИ
 СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Барсегян В. Р., Варданян С. В.

Վ.Ր. Բարսեղյան, Ս.Վ. Վարդանյան

Տիեզերական սարքերի ճոռնցման օպտիմալ դեկավարման մի օճոկի պատասխան
 ազդեցությունների անկայտրյանը

Դիտարկվում է արտարին պատահական ազդեցությունների առկայությամբ տիեզերական սարքերի
 ճոռնցման հարաբերական շարժման զծային հավասարումները Օպտիմալի ստրատեգիկ սկզբունքով
 բացահայտ տեսքով կառուցված են իրականացնելի դեկավարմ ազդեցությունները

V.R. Barseghyan, S.V. Vardanyan

About One Model of Optimal Control by Space
 Aircraft Approachment in presence of casual perturbation

Рассматривается линеаризованное уравнение относительного движения космических
 аппаратов при внешних случайных возмущениях. С помощью стохастического принципа
 максимума в явном виде построены реализуемые управляющие воздействия

1. Рассмотрим процесс сближения космического аппарата на орбите с
 пеманеврирующим объектом, условно называемыми перехватчиком и
 целью [1]. Для описания относительного движения перехватчика и цели
 считаем их материальными точками и пренебрегаем возмущениями от
 несферичности Земли, атмосферными сопротивлениями и притяжением
 других небесных тел. Считая орбиту цели круговой, линеаризованные
 уравнения относительного движения перехватчика в орбитальной системе
 координат с началом, помещенным в центре масс цели, имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} &= u_1 + v_1 \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y &= u_2 + v_2 \\ \ddot{z} + \omega^2 z &= u_3 + v_3 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где x, y, z – проекции вектора дальности от цели до перехватчика,
 u_1, u_2, u_3 – проекции управляющего ускорения, v_1, v_2, v_3 – проекции внеш-
 него случайного возмущения (являются компонентами трехмерного
 векторного белого шума) на соответствующие оси орбитальной системы,
 ω – орбитальная угловая скорость цели, $\omega^2 = \mu / r_{cp}^3$, r_{cp} – средний радиус
 сферического слоя.

Вводя обозначения

$$x = x_1, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad y = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad z = x_5, \quad \dot{x}_5 = x_6$$

систему уравнений (1.1) можно написать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_2, \quad \dot{x}_4 = 2\omega x_4 + u_1 + v_1, \quad \dot{x}_6 = x_6, \\ \dot{x}_3 &= -2\omega x_3 + 3\omega^2 x_3 + u_2 + v_2, \quad \dot{x}_5 = x_6, \quad \dot{x}_6 = -\omega^2 x_6 + u_3 + v_3 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Требуется построить физическую реализуемую управляющую вектор-функцию $u(t)$, осуществляющую переход системы (1.2) из начального состояния $x(t_0) = x^0$ в конечное состояние $x(t_1) = x^k$, так, чтобы значение функционала

$$J_{0k}(u, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} [u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau) + u_3^2(\tau)] d\tau \quad (1.3)$$

принимало минимальное значение. Решение стохастической системы (1.2) с заданными начальными условиями будет [2]

$$\begin{aligned} x_1(t) = & x_1^0 + \left(\frac{4}{\omega} \sin \omega(t-t_0) - 3(t-t_0) \right) x_2^0 + 6(-\sin \omega(t-t_0) + \omega(t-t_0)) x_3^0 + \\ & + \frac{2}{\omega} (1 - \cos \omega(t-t_0)) x_4^0 + \int_{t_0}^t \left(\frac{4}{\omega} \sin \omega(t-\tau) - 3(t-\tau) \right) u_1(\tau) d\tau + \\ & + \frac{2}{\omega} \int_{t_0}^t (1 - \cos \omega(t-\tau)) u_2(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \left(\frac{4}{\omega} \sin \omega(t-\tau) - 3(t-\tau) \right) v_1(\tau) d\tau + \\ & + \frac{2}{\omega} \int_{t_0}^t (1 - \cos \omega(t-\tau)) v_2(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = & (4 \cos \omega(t-t_0) - 3) x_2^0 + 6\omega(1 - \cos \omega(t-t_0)) x_3^0 + 2 \sin \omega(t-t_0) x_4^0 + \\ & + \int_{t_0}^t (4 \cos \omega(t-\tau) - 3) u_1(\tau) d\tau + 2 \int_{t_0}^t \sin \omega(t-\tau) u_2(\tau) d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t (4 \cos \omega(t-\tau) - 3) v_1(\tau) d\tau + 2 \int_{t_0}^t \sin \omega(t-\tau) v_2(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3(t) = & \frac{2}{\omega} (\cos \omega(t-t_0) - 1) x_2^0 + (4 - 3 \cos \omega(t-t_0)) x_3^0 + \frac{1}{\omega} \sin \omega(t-t_0) x_4^0 + \\ & + \frac{2}{\omega} \int_{t_0}^t (\cos \omega(t-\tau) - 1) u_1(\tau) d\tau + \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^t \sin \omega(t-\tau) u_2(\tau) d\tau + \\ & + \frac{2}{\omega} \int_{t_0}^t (\cos \omega(t-\tau) - 1) v_1(\tau) d\tau + \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^t \sin \omega(t-\tau) v_2(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4(t) = & -2 \sin \omega(t-t_0) x_2^0 + 3\omega \sin \omega(t-t_0) x_3^0 + \cos \omega(t-t_0) x_4^0 + \\ & - 2 \int_{t_0}^t \sin \omega(t-\tau) u_1(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \cos \omega(t-\tau) u_2(\tau) d\tau - 2 \int_{t_0}^t \sin \omega(t-\tau) v_1(\tau) d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t \cos \omega(t-\tau) v_2(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$x_5(t) = \cos \omega(t-t_0) x_5^0 + \frac{1}{\omega} \sin \omega(t-t_0) x_6^0 + \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^t \sin \omega(t-\tau) u_3(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^t \sin \omega(t-\tau) v_2(\tau) d\tau$$

$$x_2(t) = -\omega \sin \omega(t-t_0) x_5^0 + \cos \omega(t-t_0) x_6^0 + \int_{t_0}^t \cos \omega(t-\tau) u_1(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^t \cos \omega(t-\tau) v_3(\tau) d\tau$$

2. С помощью стохастического принципа максимума [3] определим вектор оптимального управления для стохастической системы (1.2) с функционалом (1.3). Для этой цели рассмотрим вектор состояния, вводя координату

$$x_7 = J_{0t} = \int_{t_0}^t [u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau) + u_3^2(\tau)] d\tau \quad (2.1)$$

определяемую управлением

$$\dot{x}_7 = \sum_{i=1}^3 u_i^2(t) \quad (2.2)$$

Наложенные ограничения на конечное состояние системы представим в виде следующих уравнений связи:

$$P_i(x(t_k)) = x_i(t_k) - x_i^k \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (2.3)$$

Задача оптимального управления состоит в минимизации (2.1) (нахождение оптимального значения $x_7(t_k)$ в момент времени t_k при условиях (2.3). Нахождение условного экстремума сводится к отысканию экстремума функционала вида

$$\Pi(t_k) = x_7(t_k) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i P_i(x(t_k)) \quad (2.4)$$

где λ_i — неопределенные множители, определяемые из условий (2.3).

Дифференцируя $\Pi(t)$ из (2.4) по $u_i(t)$, согласно (2.3) и (1.1), из системы уравнений

$$\frac{\partial \Pi(t)}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

получим

$$u_1(t) = -\frac{\lambda_1}{2} \left(\frac{4}{\omega} \sin \omega(t-t_0) - 3(t-t_0) \right) - \frac{\lambda_2}{2} (4 \cos \omega(t-t_0) - 3) -$$

$$- \frac{\lambda_3}{\omega} (\cos \omega(t-t_0) - 1) + \lambda_4 \sin \omega(t-t_0)$$

$$u_2(t) = \frac{\lambda_1}{\omega} (\cos \omega(t-t_0) - 1) - \lambda_2 \sin \omega(t-t_0) - \frac{\lambda_3}{2\omega} \sin \omega(t-t_0) - \quad (2.5)$$

$$-\frac{\lambda_2}{2}(2 - \cos \omega(t - t_0))$$

$$u_i(t) = -\frac{\lambda_1}{2\omega} \sin \omega(t - t_0) - \frac{\lambda_2}{2} \cos \omega(t - t_0)$$

Подставляя $u_i(t)$ из (2.5) в (1.4) и учитывая уравнения связи (2.3) получим следующие алгебраические уравнения относительно λ_i

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 a_{ij} \lambda_j &= -b_i - F_i \quad (i=1, \dots, 4) \\ a_{11} \lambda_1 + a_{12} \lambda_2 &= -b_1 - F_1 \\ a_{31} \lambda_1 + a_{32} \lambda_2 &= -b_3 - F_3 \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$a_{11} = -\frac{14}{\omega^2} m + \frac{l}{\omega^2} (3n + 10) - \frac{3}{4} l h, \quad a_{12} = \frac{7}{\omega} m - 3nl - \frac{9}{2} l$$

$$a_{31} = \frac{11}{4\omega^2} m - \frac{3}{4\omega^2} nl - \frac{2}{\omega^2} l, \quad a_{32} = \frac{3}{4} nl - \frac{5}{4\omega} m, \quad a_{33} = -\frac{1}{4\omega^2} m - \frac{1}{4\omega^2} nl$$

$$a_{22} = -\frac{1}{4\omega} m - \frac{1}{4} nl, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{10}{\omega^2} (1-n) - \frac{3}{\omega} ml - \frac{9}{4} l^2$$

$$a_{41} = a_{14} = a_{32} = a_{23} = \frac{9}{2\omega^2} m - \frac{3}{\omega} l - \frac{3}{2\omega} nl$$

$$a_{31} = a_{13} = \frac{6}{\omega^2} (1-n) + \frac{3}{2\omega^2} ml - \frac{3}{2\omega} l^2, \quad a_{42} = a_{24} = \frac{3}{2} ml - \frac{3}{\omega} (1-n)$$

$$a_{34} = a_{43} = \frac{3}{4\omega} ml - \frac{2}{\omega^2} (1-n), \quad a_{44} = a_{33} = -\frac{1}{4\omega} ml$$

$$b_1 = x_1^0 + \left(\frac{4}{\omega} m - 3l \right) x_2^0 + 6(\omega l - m) x_3^0 - \frac{2}{\omega} (1-n) x_4^0 - x_1^1$$

$$b_3 = (4n - 3) x_1^0 + 6(\omega - n) x_2^0 + 2m x_3^0 - x_3^1$$

$$b_2 = \frac{2}{\omega} (n-1) x_1^0 + (4-3n) x_2^0 + \frac{1}{\omega} m x_3^0 - x_2^1, \quad b_4 = -2m x_3^0 + 3\omega m x_4^0 + n x_1^0 - x_4^1$$

$$b_5 = n x_5^0 + \frac{1}{\omega} m x_6^0 - x_5^1, \quad b_6 = -\omega m x_5^0 + n x_6^0 - x_6^1$$

$$F_1 = \int_0^t \left(\frac{4}{\omega} \sin \omega(t-\tau) - 3(t-\tau) \right) v_1(\tau) d\tau + \frac{2}{\omega} \int_0^t (1 - \cos \omega(t-\tau)) v_2(\tau) d\tau$$

$$F_3 = \int_0^t (4 \cos \omega(t-\tau) - 3) v_1(\tau) d\tau + 2 \int_0^t \sin \omega(t-\tau) v_2(\tau) d\tau$$

$$F_1 = \frac{2}{\omega} \int_0^t (\cos \omega(t-\tau) - 1) v_1(\tau) d\tau + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-\tau) v_2(\tau) d\tau$$

$$F_3 = -2 \int_{t_0}^{t_1} \sin \omega(t - \tau) v_1(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t_1} \cos \omega(t - \tau) v_2(\tau) d\tau$$

$$F_5 = \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^{t_1} \sin \omega(t - \tau) v_1(\tau) d\tau \quad F_6 = \int_{t_0}^{t_1} \cos \omega(t - \tau) v_2(\tau) d\tau$$

$$m = \sin \omega(t_1 - t_0), \quad l = (t_1 - t_0), \quad n = \cos \omega(t_1 - t_0), \quad h = t_1^2 - 2t_1 t_0 - 5t_0^2$$

Решая систему (2.6), будем иметь

$$\lambda_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i = 1, \dots, 4), \quad \lambda_j = \frac{\bar{\Delta}_j}{\bar{\Delta}} \quad (j = 5, 6), \quad (\Delta \neq 0, \bar{\Delta} \neq 0) \quad (2.7)$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \bar{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{55} & a_{66} \\ a_{65} & a_{56} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -b_1 - F_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -b_2 - F_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ -b_3 - F_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ -b_4 - F_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & -b_1 - F_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & -b_2 - F_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & -b_3 - F_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & -b_4 - F_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -b_1 - F_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & -b_2 - F_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & -b_3 - F_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & -b_4 - F_4 & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & -b_1 - F_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & -b_2 - F_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & -b_3 - F_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & -b_4 - F_4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} -b_5 - F_5 & a_{66} \\ -b_6 - F_6 & a_{55} \end{vmatrix}, \quad \Delta_6 = \begin{vmatrix} a_{55} & -b_5 - F_5 \\ a_{66} & -b_6 - F_6 \end{vmatrix}$$

Стохастическая функция Гамильтона имеет вид

$$H(x, u, \psi, v, t) = \sum_{i=1}^6 \psi_i f_i \quad (2.8)$$

где функции f_i — правые части уравнений (1.2) и (2.2), а функции ψ_i удовлетворяют сопряженным уравнениям

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, 6)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + 2\omega\psi_4, \quad \dot{\psi}_3 = -3\omega^2\psi_4, \quad \dot{\psi}_4 = -2\omega\psi_2 - \psi_3, \\ \dot{\psi}_5 &= \omega^2\psi_6, \quad \dot{\psi}_6 = -\psi_5, \quad \dot{\psi}_7 = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для (2.9) имеем конечные условия

$$\psi_i(t_k) = -\sum_{j=1}^6 \lambda_{ij} \frac{\partial P_j(x(t_k))}{\partial x_i} \quad (i=1, \dots, 6), \quad \psi_7(t_k) = -1 \quad (2.10)$$

Решая (2.9) с условиями (2.10), будем иметь

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= -\lambda_1 \\ \psi_2(t) &= -2 \left(2\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{\omega} \right) \cos \omega(t-t_k) + 2 \left(\frac{2\lambda_4}{\omega} - \lambda_5 \right) \sin \omega(t-t_k) - 3\lambda_6(t-t_k) + \\ &\quad + 3\lambda_7 + \frac{2}{\omega} \lambda_8 \\ \psi_3(t) &= 3\omega \left(2\lambda_7 + \frac{\lambda_8}{\omega} \right) \cos \omega(t-t_k) - 3\omega \left(\frac{2\lambda_9}{\omega} - \lambda_{10} \right) \sin \omega(t-t_k) + 6\omega \lambda_{11}(t-t_k) - \\ &\quad - 2\omega \left(3\lambda_{12} + \frac{2}{\omega} \lambda_{13} \right) \\ \psi_4(t) &= \left(\frac{2\lambda_{14}}{\omega} - \lambda_{15} \right) \cos \omega(t-t_k) + \left(2\lambda_{16} + \frac{\lambda_{17}}{\omega} \right) \sin \omega(t-t_k) - \frac{2\lambda_{18}}{\omega} \\ \psi_5(t) &= -\lambda_{19} \cos \omega(t-t_k) - \lambda_{20} \omega \sin \omega(t-t_k) \\ \psi_6(t) &= -\lambda_{20} \cos \omega(t-t_k) + \frac{\lambda_{21}}{\omega} \sin \omega(t-t_k) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Подставляя значения функции $\psi_i(t)$ из (2.11) в (2.8), вычисленное математическое ожидание функции Гамильтона обозначим

$$\bar{H} = M \{ H(x, u, \psi, v, t) \}$$

Максимальное значение функции \bar{H} в соответствии с принципом максимума достигается за счет членов, зависящих от u . Поэтому для определения u_i потребуем, чтобы

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial u_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

и для оптимальных управлений получим

$$\begin{aligned} u_1^0(t) &= \left(\frac{2\bar{\lambda}_7}{\omega} - \bar{\lambda}_8 \right) \sin \omega(t-t_k) - \left(2\bar{\lambda}_2 + \frac{\bar{\lambda}_3}{\omega} \right) \cos \omega(t-t_k) + \frac{3}{2} \bar{\lambda}_7(t_k-t) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(3\bar{\lambda}_2 + \frac{2\bar{\lambda}_1}{\omega} \right) \\ u_2^0(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{2\bar{\lambda}_4}{\omega} - \bar{\lambda}_5 \right) \cos \omega(t-t_k) + \frac{1}{2} \left(2\bar{\lambda}_2 + \frac{\bar{\lambda}_3}{\omega} \right) \sin \omega(t-t_k) - \frac{\bar{\lambda}_1}{\omega} \\ u_3^0(t) &= \frac{\bar{\lambda}_9}{2\omega} \sin \omega(t-t_k) - \frac{\bar{\lambda}_{10}}{2} \cos \omega(t-t_k) \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$\bar{\lambda}_i = M \{ \lambda_i \} \quad (i=1, \dots, 6)$$

Подставляя значения $u^*(t)$, ($i=1,2,3$) из (2.15) и (12) и интегрируя, получим оптимальное стохастическое движение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев А.А., Соколов В.Б. Встреча на орбите. М.: Машиностроение, 1969. 367с.
2. Барсегян В.Р. Оптимальное стохастическое управление сближением космических аппаратов// Изв. НАН и ГИУ Армении (сер.ТН) 1999. Т. III. №1, С.94-100.
3. Казаков И.Е., Гладков Д.И. Методы оптимизации стохастических систем. М.: Наука, 1987. 304с.

Ереванский государственный
Университет

Поступила в редакцию
30.05.2002

УДК 621.38

КИНЕМАТИКА МНОГОЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА С
 УПРУГИМ ПОСЛЕДНИМ ЗВЕНОМ

Гукасян А. А.

Ա. Ա. Դուկասյան

Վերջին աստիճանական օղակով բազմօղակ մանիպուլյատորի կինեմատիկան

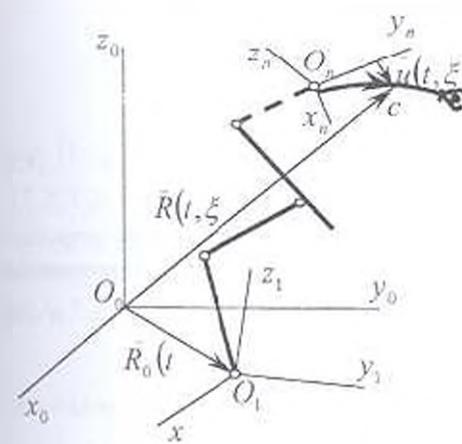
Առաձգականորյուն զգալի տեսության սահմաններում ուսումնասիրվում է բազմօղակ մանիպուլյատորի կինեմատիկան Օտապված են կինեմատիկական արեչուրյունների վրա առաձգական օղակի ազդեցությունները

A. A. Ghukasyan

The Kinematics of Multilink Manipulator with a Flexible Last Link

Методом линейной теории упругости нерастяжимых стержней исследуется кинематика пространственного движения многозвенового манипулятора. Определено влияние упругости последнего звена на кинематику движения

Исследуется кинематика пространственного движения многозвенового манипулятора, последнее звено которого моделируется как упругий нерастяжимый стержень (фиг.1). В конце упругого звена расположен хват с грузом. Не ограничивая общности, предполагается, что манипулятор находится на подвижном основании и все соединительные шарниры идеально-цилиндрические. Система координат $O_n X_n Y_n Z_n$



Փիգ.1

является инерциальной. $O_n X_n Y_n Z_n$ связана с основанием и $O_n X_n Y_n Z_n$ — с последним упругим звеном. Ось $O_n Y_n$ совпадает с недеформированным состоянием упругого звена.

Кинематика движения манипулятора с абсолютно твердыми звеньями и идеальными цилиндрическими шарнирами достаточно подробно исследована [1,2]. Считая, что в пространстве известно движение основания последнего упругого звена манипулятора, для определенности исследуется влияние упругой податливости последнего звена на кинематику движе-

ния манипулятора

1. Положение точек упругого звена. Радиус-вектор произвольной точки упругого звена манипулятора в инерциальной системе координат $O_n X_n Y_n Z_n$ можно представить следующим образом:

$$R(t, \xi) = R_0(t) + R_1(t) + R_2(t, \xi) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{R}_0(t) = (x_0(t), y_0(t), z_0(t))^T$ — радиус-вектор точки O_1 (основания) относительно начала координат инерциальной системы $O_0 X_0 Y_0 Z_0$.

$\mathbf{R}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))^T$ — радиус-вектор основания упругого звена (точки O_2) относительно точки O_1 системы координат $O_1 X_1 Y_1 Z_1$. $\mathbf{R}_2(t, \xi)$ — радиус-вектор точки C нейтральной линии упругого звена в момент времени t ($\xi \in [0, l]$) относительно точки O_2 в системе координат $O_2 X_2 Y_2 Z_2$. l — длина упругого звена.

Обозначая через $\mathbf{u}(t, \xi)$ вектор упругой деформации нейтральной линии звена манипулятора в системе координат $O_2 X_2 Y_2 Z_2$, $\mathbf{R}_2(t, \xi)$ можно представить в виде

$$\mathbf{R}_2(t, \xi) = (u_1(t, \xi), \xi + u_2(t, \xi), u_3(t, \xi))^T \quad (1.2)$$

Условие нерастяжимости упругого звена манипулятора приводит к некоторому соотношению между функциями $u_1(t, \xi), u_2(t, \xi), u_3(t, \xi)$, представляющими здесь уравнение связи [3]. Эту связь мы получим, предполагая, что длина $d\xi$ элемента упругого звена остается неизменной после деформации.

$$(d\xi)' = \sqrt{\left[\frac{\partial u_1(t, \xi)}{\partial \xi}\right]^2 + \left[1 + \frac{\partial u_2(t, \xi)}{\partial \xi}\right]^2 + \left[\frac{\partial u_3(t, \xi)}{\partial \xi}\right]^2} d\xi \quad (1.3)$$

Так как $(d\xi)' = d\xi$, то

$$\left[\frac{\partial u_1(t, \xi)}{\partial \xi}\right]^2 + \left[1 + \frac{\partial u_2(t, \xi)}{\partial \xi}\right]^2 + \left[\frac{\partial u_3(t, \xi)}{\partial \xi}\right]^2 = 1$$

или

$$\frac{\partial u_2(t, \xi)}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1(t, \xi)}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3(t, \xi)}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3(t, \xi)}{\partial \xi}\right)^2 \right] \quad (1.4)$$

Ограничиваясь рассмотрением только малых отклонений упругого звена от недеформированного состояния, будем считать, что компоненты вектора упругой деформации $\mathbf{u}(t, \xi) = (u_1(t, \xi), u_2(t, \xi), u_3(t, \xi))^T$ и их производные по ξ и по t — малые величины.

Считая $u_1(t, \xi), u_2(t, \xi), u_1'(t, \xi), \dot{u}_1(t, \xi), u_1''(t, \xi), \dot{u}_1'(t, \xi)$ малыми величинами первого порядка относительно длины упругого звена

$$u_i(t, \xi) \sim \varepsilon, \quad u_i'(t, \xi) \sim \varepsilon, \quad \dot{u}_i(t, \xi) \sim \varepsilon \quad (\varepsilon \ll 1) \quad (i = 1, 3) \quad (1.5)$$

следует на основании (1.4) принять, что $u_2(t, \xi), u_2'(t, \xi)$ и $\dot{u}_2(t, \xi)$ имеют второй порядок малости

$$u_2(t, \xi) \sim \varepsilon^2, \quad u_2'(t, \xi) \sim \varepsilon^2, \quad \dot{u}_2(t, \xi) \sim \varepsilon^2 \quad (1.6)$$

Следовательно, пренебрегая величиной $(u_2'(t, \xi))^2$, как четвертого порядка малости (ε^4), можно условия нерастяжимости [1.4] записать в

виде

$$u'_2(t, \xi) = -\frac{1}{2} \left[(u'_1(t, \xi))^2 + (u'_3(t, \xi))^2 \right] \quad (1.7)$$

(производные по ξ обозначены штрихом, а по t - точкой)

Оставляя в выражениях (1.1), (1.2) величины, порядок которых не превышает ε , вектор $R_2(t, \xi)$ в системе координат $O_n X_n Y_n Z_n$ можно представить в виде

$$R_2(t, \xi) = (u_1(t, \xi), \xi, u_3(t, \xi))^T \quad (1.8)$$

то есть вектор упругой деформации $u(t, \xi)$ перпендикулярен к недеформированному состоянию последнего звена [4].

Направляющие косинусы углов между осями систем координат $O_n X_n Y_n Z_n$ и $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ зададим при помощи табл. 1.

Таблица 1

	X_1	Y_1	Z_1
x_n	$\alpha_{11}^{(1)}$	$\alpha_{12}^{(1)}$	$\alpha_{13}^{(1)}$
y_n	$\alpha_{21}^{(1)}$	$\alpha_{22}^{(1)}$	$\alpha_{23}^{(1)}$
z_n	$\alpha_{31}^{(1)}$	$\alpha_{32}^{(1)}$	$\alpha_{33}^{(1)}$

Здесь через $\alpha_{ij}^{(1)}$ ($i, j = 1, 2, 3$) обозначены

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{(1)} &= \cos(O_n X_n, O_1 X_1) = (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_n) \\ \alpha_{12}^{(1)} &= \cos(O_n X_n, O_1 Y_1) = (\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_n) \\ \alpha_{13}^{(1)} &= \cos(O_n X_n, O_1 Z_1) = (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_n) \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{33}^{(1)} &= \cos(O_n Z_n, O_1 Z_1) = (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_n) \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$ и $(\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n, \mathbf{k}_n)$ - единичные векторы осей системы координат $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ и $O_n X_n Y_n Z_n$, соответственно.

В соответствии с (1.1) и (1.9), положение точек упругого звена манипулятора относительно связанной с основанием системы координат $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ ($R_1(t, \xi) = R_1(t) + R_2(t, \xi)$), можно представить в виде

$$R_1(t, \xi) = \Gamma_{(1)}^{-T} R_2(t, \xi) + R_1(t) \quad (1.10)$$

где

$$\Gamma_{(1)}^{-T} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(1)} & \alpha_{21}^{(1)} & \alpha_{31}^{(1)} \\ \alpha_{12}^{(1)} & \alpha_{22}^{(1)} & \alpha_{32}^{(1)} \\ \alpha_{13}^{(1)} & \alpha_{23}^{(1)} & \alpha_{33}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

В однородных координатах преобразование (1.10) имеет вид [5]

$$R_1(t, \xi) = T_{(1)} R_2(t, \xi) \quad (1.12)$$

где матрица $T_{(1)}$ размера (4×4) имеет следующую структуру:

$$\mathbf{T}_{(0)} = \begin{pmatrix} \Gamma_{00}^T & \vdots & \mathbf{R}_1(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Для определения положения точек упругого звена относительно инерциальной системы координат $O_0 X_0 Y_0 Z_0$, составим таблицу направляющих косинусов углов между осями координат $O_0 X_1 Y_1 Z_1$ и $O_0 X_0 Y_0 Z_0$.

Таблица 2

	x_0	y_0	z_0
x_1	$\alpha_{11}^{(2)}$	$\alpha_{12}^{(2)}$	$\alpha_{13}^{(2)}$
y_1	$\alpha_{21}^{(2)}$	$\alpha_{22}^{(2)}$	$\alpha_{23}^{(2)}$
z_1	$\alpha_{31}^{(2)}$	$\alpha_{32}^{(2)}$	$\alpha_{33}^{(2)}$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{(2)} &= \cos(O_0 X_1, O_0 X_0) = (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_0) \\ \alpha_{12}^{(2)} &= \cos(O_0 X_1, O_0 Y_0) = (\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_0) \\ \alpha_{13}^{(2)} &= \cos(O_0 X_1, O_0 Z_0) = (\mathbf{i}_1, \mathbf{k}_0) \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha_{33}^{(2)} &= \cos(O_0 Z_1, O_0 Z_0) = (\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0) \end{aligned} \quad (1.14)$$

$(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$ — единичные векторы осей системы координат $O_0 X_0 Y_0 Z_0$, соответственно.

Вектор $\mathbf{R}_1(t, \xi)$ (1.10) в системе $O_0 X_1 Y_1 Z_1$ имеет вид

$$\mathbf{R}(t, \xi) = \Gamma_{(2)}^T \mathbf{R}_1(t, \xi) + \mathbf{R}_0(t) \quad (1.15)$$

где

$$\Gamma_{(2)}^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(2)} & \alpha_{21}^{(2)} & \alpha_{31}^{(2)} \\ \alpha_{12}^{(2)} & \alpha_{22}^{(2)} & \alpha_{32}^{(2)} \\ \alpha_{13}^{(2)} & \alpha_{23}^{(2)} & \alpha_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Подставляя (1.12) в (1.15), получим

$$\mathbf{R}(t, \xi) = \Gamma_{(2)}^T \Gamma_{(1)}^T \mathbf{R}_2(t, \xi) + \Gamma_{(2)}^T \mathbf{R}_1(t) + \mathbf{R}_0(t) \quad (1.17)$$

или в однородных координатах

$$\mathbf{R}(t, \xi) = \mathbf{T}_{(2)} \cdot \mathbf{T}_{(1)} \mathbf{R}(t, \xi) \quad (1.18)$$

Здесь

$$\mathbf{T}_{(2)} = \begin{pmatrix} \Gamma_{(2)}^T & \vdots & \mathbf{R}_0(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{(1)} = \begin{pmatrix} \Gamma_{(1)}^T & \vdots & \mathbf{R}_1(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}(t, \xi) = (x(t, \xi), y(t, \xi), z(t, \xi), 1)^T$$

$$\mathbf{R}_1(t, \xi) = (u_1(t, \xi), \xi, u_2(t, \xi), 1)^T$$

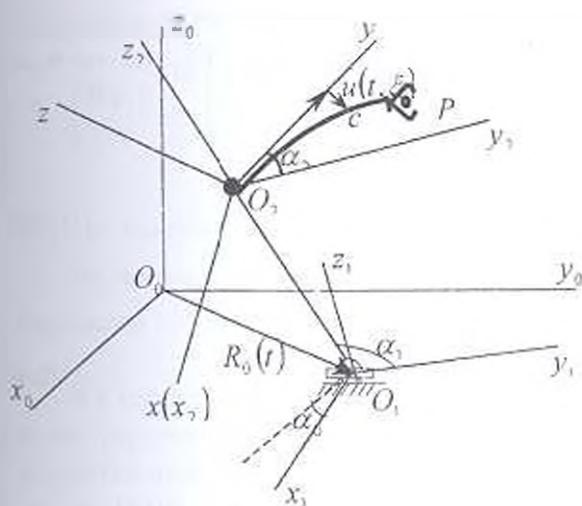
Поскольку в линейной теории упругости $\mathbf{R}_1(t, \xi)$ определяется согласно (1.8) то выражения (1.17) или (1.18), позволяют положение точек упругого звена манипулятора в инерциальной системе координат представить в рамках жесткой модели, путем добавления малых величин порядка ε ($\varepsilon \ll 1$), то есть

$$\mathbf{R}(t, \xi) = \Gamma_{(2)}^T \cdot \Gamma_{(1)}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \\ 0 \end{pmatrix} + \Gamma_{(2)}^T \cdot \mathbf{R}_1(t) + \mathbf{R}_0 + \Gamma_{(2)}^T \cdot \Gamma_{(1)}^T \cdot \begin{pmatrix} u_1(t, \xi) \\ 0 \\ u_2(t, \xi) \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

или

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}(t, \xi) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{(2)}^T & \vdots & \mathbf{R}_c(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{(1)}^T & \vdots & \mathbf{R}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1(t, \xi) \\ 0 \\ u_2(t, \xi) \end{pmatrix} \right\} \quad (1.20)$$

2. Моделирование движений двухзвенного упругого манипулятора на подвижном основании. Механическая модель манипулятора состоит из



Фиг. 2.

подвижной платформы и механической руки со схватом (фиг.2). Рука состоит из двух звеньев, соединенных шарниром O_2 . Первое звено соединено шарниром с платформой и является абсолютно твердым телом. Второе звено манипулятора является упругим перестяжимым стержнем, на конце которого расположен схват с грузом. Соединительные шарниры — идеально цилиндрические. Основания механической руки может перемещаться в горизонтальной плоскости $O_0X_0Y_0$.

Манипулятор имеет пять степеней свободы, движение по которым осуществляется посредством электромеханических приводов [6].

Для описания движений манипулятора введем инерциальную $O_0X_0Y_0Z_0$ и неинерциальные $O_1X_1Y_1Z_1$, $O_2X_2Y_2Z_2$ системы координат.

Введем обозначения: l_1 — длина первого звена; l_2 — длина второго звена;

$\mathbf{R}(t) = (x_0(t), y_0(t), 0)^T$ — радиус-вектор основания относительно системы

координат $O_1 X_1 Y_1 Z_1$: α_0 — угол между осями $O_0 X_0$ и $O_1 Y_1$; α_0 — угол поворота манипулятора относительно оси $O_1 Z_1$; α_1 — угол поворота первого звена относительно платформы; α_2 — угол поворота второго упругого звена относительно оси $O_2 Y_2$ (α_2 — угол между касательной $O_2 X$ к упругому звену $O_2 P$ в точке O_2 и осью $O_2 Y_2$); $u(t, \xi)$ — вектор упругой деформации второго звена в системе $O_2 X_2 Y_2 Z_2$; $R_1(t, \xi)$ — радиус-вектор точки нейтральной линии второго звена с координатой ξ ($0 \leq \xi \leq l_2$) в момент времени t относительно точки O_2 в системе $O_2 X_2 Y_2 Z_2$; а $R(t, \xi)$ — радиус-вектор той же точки относительно точки O_1 в инерциальной системе координат $O_0 X_0 Y_0 Z_0$.

$$R(t, \xi) = R_0(t) + R_1(t, \xi) \quad (2.1)$$

Предполагается, что вектор упругих смещений второго звена мал по сравнению с его длиной $|u(t, \xi)|/l_2 = o(\varepsilon)$, $\varepsilon \ll 1$ и перпендикулярен к недеформированному состоянию.

Радиус-вектор точки C ($R_1(t, \xi)$) в системе координат $O_2 X_2 Y_2 Z_2$ имеет вид

$$R_1(t, \xi) = \Gamma_{(1)}^{-1} R_2(t, \xi) \quad (2.2)$$

где $R_2(t, \xi) = (u_1(t, \xi), \xi, u_2(t, \xi))^T$, а матрица перехода $\Gamma_{(1)}^{-1}$ от системы $O_2 XYZ$ к системе $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ является

$$\Gamma_{(1)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$R_1(t, \xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t, \xi) \\ \xi \\ u_2(t, \xi) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} (R_1(t, \xi))_{x_2} &= u_1(t, \xi) \\ (R_1(t, \xi))_{y_2} &= \xi \cos \alpha_2 - u_2(t, \xi) \sin \alpha_2 \\ (R_1(t, \xi))_{z_2} &= \xi \sin \alpha_2 + u_2(t, \xi) \cos \alpha_2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Поскольку оси систем координат $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ и $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ параллельны, то радиус-вектор точки C относительно точки O_1 имеет вид

$$R_1(t, \xi) = \begin{pmatrix} u_1(t, \xi) \\ l_1 \cos \alpha_1 + \xi \cos \alpha_2 - u_2(t, \xi) \sin \alpha_2 \\ l_1 \sin \alpha_1 + \xi \sin \alpha_2 + u_2(t, \xi) \cos \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Проекция радиус-вектора $\mathbf{R}(t, \xi)$ точки C в инерциальной системе координат O, X, Y, Z_0 определяются выражением

$$\mathbf{R}(t, \xi) = \Gamma_{(2)}^T \mathbf{R}_1(t, \xi) + \mathbf{R}_0(t) \quad (2.7)$$

где $\mathbf{R}_1(t, \xi)$ определяется из (2.5), а матрица поворота $\Gamma_{(2)}^T$ имеет вид

$$\Gamma_{(2)}^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 & -\sin \alpha_0 & 0 \\ \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}(t, \xi) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 & -\sin \alpha_0 & 0 \\ \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t, \xi) \\ l_1 \cos \alpha_1 + \xi \cos \alpha_2 - u_3 \sin \alpha_2 \\ l_1 \sin \alpha_1 + \xi \sin \alpha_2 + u_3 \cos \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X(t, \xi) &= x_0(t) + u_1(t, \xi) \cos \alpha_0 - [l_1 \cos \alpha_1 + \xi \cos \alpha_2 - u_3(t, \xi) \sin \alpha_2] \sin \alpha_0 \\ Y(t, \xi) &= y_0(t) + u_1(t, \xi) \sin \alpha_0 + [l_1 \cos \alpha_1 + \xi \cos \alpha_2 - u_3(t, \xi) \sin \alpha_2] \cos \alpha_0 \\ Z(t, \xi) &= l_1 \sin \alpha_1 + \xi \sin \alpha_2 + u_3(t, \xi) \cos \alpha_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

В однородных координатах положение точек упругого звена манипулятора в инерциальной системе координат определяется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}(t, \xi) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{(2)}^T & \vdots & \mathbf{R}_0(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{(2)}^T & \vdots & \mathbf{R}_0(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_2(t, \xi) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$\mathbf{R}_0(t)$ — радиус-вектор основания упругого звена относительно точки O_1

Из приведенных выражений (2.8), (2.9) следует, что все слагаемые, зависящие от упругих смещений, имеют порядок ε ($\varepsilon \ll 1$).

3. Скорость и ускорения движения упругого манипулятора. Движение точек упругого последнего звена манипулятора и схвата (фиг.1) имеет колебательный характер относительно движения абсолютно жесткой модели (1.19), (1.20). Вычисляя производные по времени радиус-вектора $\mathbf{R}(t, \xi)$ (1.19), определяем скорость и ускорения движения произвольной точки упругого звена манипулятора и схвата. Для удобства записи в (1.19), (1.20) введем обозначения

$$\Gamma_{(2)}^T \Gamma_{(0)}^T = \Gamma_{(20)}^T; \quad T_{(2)} T_{(0)} = T_{(20)} \quad (3.1)$$

и радиус-вектор $\mathbf{R}(t, \xi)$ представим в виде

$$\mathbf{R}(t, \xi) = \Gamma_{(21)}^T \xi + \Gamma_{(2)}^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_0 + \Gamma_{(21)}^T \mathbf{u}(t, \xi) \quad (3.2)$$

или

$$\mathbf{R}(t, \xi) = \mathbf{T}_{(21)} \xi + \mathbf{T}_{(21)} \mathbf{u}(t, \xi) \quad (3.3)$$

где $\xi = (0, \xi, 0)^T$.

Вектор скорости и ускорения произвольной точки упругого звена определяются выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t, \xi) &= \frac{d}{dt} \mathbf{R}(t, \xi) \\ \mathbf{w}(t, \xi) &= \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t, \xi) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{R}(t, \xi) \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\frac{d}{dt} \mathbf{R}(t, \xi) = \bar{\Gamma}_{(21)}^T \xi + \bar{\Gamma}_{(2)}^T \mathbf{R}_1(t) + \Gamma_{(2)}^T \dot{\mathbf{R}}_1(t) + \mathbf{R}_v(t) + \bar{\Gamma}_{(23)}^T \mathbf{u}(t, \xi) + \Gamma_{(21)}^T \dot{\mathbf{u}}(t, \xi)$$

или

$$\frac{d}{dt} \mathbf{R}(t, \xi) = \mathbf{T}_{(21)} \xi + \mathbf{T}_{(21)} \mathbf{u}(t, \xi) + \mathbf{T}_{(21)} \dot{\mathbf{u}}(t, \xi)$$

Из определения производных следует, что вектор скорости движения можно представить в виде суммы двух слагаемых, первое из которых определяет скорость движения абсолютно жесткой модели, а второе зависит от упругости последнего звена

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_1(t) + \mathbf{v}_2(t, \mathbf{u}(t, \xi), \dot{\mathbf{u}}(t, \xi)) \quad (3.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(t) &= \bar{\Gamma}_{(21)}^T \xi + \bar{\Gamma}_{(2)}^T \mathbf{R}_1(t) + \Gamma_{(2)}^T \dot{\mathbf{R}}_1(t) + \mathbf{R}_v(t) \\ \mathbf{v}_2(t, \mathbf{u}(t, \xi), \dot{\mathbf{u}}(t, \xi)) &= \bar{\Gamma}_{(21)}^T \mathbf{u}(t, \xi) + \Gamma_{(21)}^T \dot{\mathbf{u}}(t, \xi) \end{aligned} \quad (3.6)$$

или в однородных координатах

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(t) &= \bar{\mathbf{T}}_{(21)} \xi \\ \mathbf{v}_2(t, \mathbf{u}(t, \xi), \dot{\mathbf{u}}(t, \xi)) &= \bar{\mathbf{T}}_{(21)} \mathbf{u}(t, \xi) + \mathbf{T}_{(21)} \dot{\mathbf{u}}(t, \xi) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Выведенные в (1.5), (1.6) порядки величин позволяют оценить также вектор скорости $\mathbf{v}_2(t, \mathbf{u}(t, \xi), \dot{\mathbf{u}}(t, \xi))$. Поскольку $u_1(t, \xi)$, $u_2(t, \xi)$, $\dot{u}_1(t, \xi)$ и $\dot{u}_2(t, \xi)$ имеют порядок ε , то, как следует из (3.6) и (3.7), дополнительный вектор скорости \mathbf{v}_2 , зависящий от упругости второго звена, также имеет порядок ε . В (3.7) производные по времени от $\bar{\mathbf{T}}_{(21)}$ определяются следующим образом

$$\dot{\bar{\mathbf{T}}}_{(21)} = \begin{pmatrix} \bar{\Gamma}_{(2)}^T & \vdots & \mathbf{R}_v \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Gamma}_{(1)}^T & \vdots & \mathbf{R}_1 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\Gamma}_{(2)}^T & \vdots & \mathbf{R}_v \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Gamma}_{(21)}^T & \vdots & \mathbf{R}_1 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Аналогично определяя вторые производные по времени радиус-вектора $\mathbf{R}(t, \xi)$, определяем ускорение движения произвольной точки упругого звена манипулятора и схвата. Вектор ускорения \mathbf{w} также представляется в виде суммы двух векторов ускорения

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1(t) + \mathbf{w}_2(t, \mathbf{u}(t, \xi), \dot{\mathbf{u}}(t, \xi), \ddot{\mathbf{u}}(t, \xi)), \quad \text{где } \mathbf{w}_2 \sim \varepsilon \quad (\varepsilon \ll 1).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. А., Градецкий В. Г., Болотник Н. Н. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989.
2. Динамика управления роботами. / Под редакцией Е. И. Юрсича, М. Наука, 1984.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Наука, 1961.
4. Акуленко А. Д., Гукасян А. А. Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора. // Изв. РАН. МТГ. № 5. С. 33-41. 1983.
5. Робототехника и гибкие автоматизированные производства. / Под редакцией И. М. Макарова. М.: Высшая школа, 1986.
6. Чидикин М.Г., Ключев В.И., Сандлер А.С. Теория автоматизированного электропривода. М.: Энергия, 1979.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
16.03.2002