ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2002

СЕРГЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ АМБАРЦУМЯН

(К восьмидесятилетию со дня рождения)

Выдающемуся ученому современности, создателю новых научных направлений в механике деформируемого твердого тела, одному из основоположников армянской научной школы механики, академику НАН РА Сергею Амбарцумяну исполнилось 80 лет.

Сергей Александрович Амбарцумян родился 17-ого марта 1922г. в Александрополе (Гюмри) в семье юриста. В 1942г. с отличием окончил факультет строительной механики Ереванского Политехнического института и был назначен на преподавательскую работу в этом же институте. В 1945-1946гг. учился в аспирантуре. В 1946г. С. Амбарцумян уже кандидат наук. В 1952г. в Москве в Институте проблем механики защитил докторскую диссертацию и ему была присвоена ученая степень доктора технических наук. В 1953г. ему присвоено звание профессора. В 1956г. С. Амбарцумян избран членом-корреспондентом АН Армении, а в 1965г. — академиком Академии наук. В 1946-55гг. С. Амбарцумян работал в Институте сооружений Академии наук старшим научным сотрудником, заведующим сектором, зам. директора института.

В 1955г. при активном содействии видного ученого основан Институт математики и механики Академии наук, директором которого он был в 1959-71гг. В эти и последующие годы С. Амбарцумян приложил огромные усилия для развития математики и механики в Армении. Доказательством этого является создание в 1971 году двух независимых институтов.

В 1971-77гг. С. Амбарцумян был директором Института механики Академии наук. Благодаря ученому, в академии создается отделение физико-технических наук и механики, академиком-секретарем которого он был в 1971-74гг. В 1974-1977г. С. Амбарцумян — вице-президент АН Арм.ССР, а в 1977-1991гг. — ректор Ереванского государственного университета.

С 1971г. С. Амбарцумян является членом Президиума Академии наук, а с 1992г. почетным директором Института механики НАН РА.

Уже первые работы С. Амбарцумяна привлекли внимание мирового научного сообщества, что послужило предпосылкой для признания армянской Школы механики. С. Амбарцумян построил классическую теорию анизотропных слоистых пластин и оболочек. Эта теория получила большое применение в расчетах подводных лодок и ракетной техники.

Опубликованные в Москве в Издательстве "Наука" монографии "Теория анизотропных оболочек" (1961г.) и "Теория анизотропных пластин" (М.: Наука, 1967, 2-ое изд. М.: Наука, 1988) получили широкое признание. Эти монографии стали настольными книгами в проектных организациях и конструкторско-технологических бюро по новой технике. Они были переведены на английский и опубликованы в США соответственно в 1964, 1979гг., а также в Японии в 1975г.

С. Амбарцумян предложил уточненные теории пластин и оболочек, которые, в частности, дали возможность рассчитать тонкостенные конструкции, изготовленные из современных композиционных материалов. Они послужили стимулом для новых теоретических разработок. Полученные результаты обобщены в монографии "Общая теория анизотропных оболочек", которая опубликована Издательством "Наука" в 1974г. и переведена на английский и опубликована в США в 1991г.

Известному ученому свойственно острое восприятие нового, что ярко продемонстрировано в работах, посвященных теории электромагнитоупругости тонких тел, теории упругости тел, разносопротивляющихся сжатию и растяжению, несимметричной теории упругости тонких тел.

Монографии "Магнитоупругость тонких пластин и оболочек" (М. Наука, 1977г., соавторы Г.Багдасарян, М.Белубекян), "Разномодульная теория упругости"(М. Наука 1982г.), "Микрополярная теория оболочек и пластин" (Ереван, НАН РА, 1999г.) предвосхитили дальнейшее развитие этих направлений во всем мире.

С. Амбарцумяном получены очень интересные результаты в области нелинейной теории вязкоупругости.

Многочисленные результаты С.А. Амбарцумяна, имеющие большое значение для новейшей техники, включены в справочники.

Научная деятельность видного ученого тесно связана с воспитанием нескольких поколений высококвалифицированных научно-педагогических кадров. Под его непосредственным руководством более сорока молодых ученых защитили докторскую и кандидатскую диссертации.

В 1943-46гг. С. Амбарцумян преподавал в Ереванском Политехническом институте, а с 1948г. по сей день — в Ереванском госуниверситете. Будучи ректором ЕГУ и вице-президентом Академии, он уделял особое внимание развитию арменоведения. По инициативе выдающегося ученого были опубликованы многовековые шедевры армянской истории и литературы.

Являясь депутатом Верховного Совета СССР и членом его Президиума, С. Амбарцумян-гражданин блеснул своим патриотизмом. В памяти нашего народа навсегда останется его известная полемика с Михаилом Сергеевичем Горбачевым. Она воодушевила и вселила уверенность воинам-освободителям Нагорного Карабаха (Арцаха).

С. Амбарцумян является академиком Международной Академии Астронавтики, почетным академиком Международной Инженерной Академии, действительным членом Международной Академии наук, образования, промышленности и искусства (США), почетным академиком Академии философии Армении, академиком Инженерной академии Армении, членом Президиума Национального комитета прикладной и теоретической механики России, почетным членом Союза механиков Словацкой АН, почетным доктором Братиславского университета, почетным профессором Института Пеннисуеля по информатике, технологии и бизнесу (США), основателем и почетным председателем общества механиков Республики Армения, главным редактором журнала ДАН Армении, членом ряда научных и специализированных советов. Он был членом комитета Ленинской и Государственной премий.

Видный деятель науки С.Амбарцумян был награжден орденом Ленина, орденом Почета, орденом Трудового Красного Знамени, орденом Яна Коменского, орденом "Октябрьской революции". За заслуги в пропаганде знаний он был награжден медалью им. С.И.Вавилова, а за заслуги в области науки и образования — медалью Ереванского государственного университета и "Большой серебряной медалью и призом" Международной Инженерной Академии.

Поздравляем Сергея Александровича Амбарцумяна с юбилеем! Ученому-гражданину, общественному деятелю желаем крепкого здоровья, долгих лет жизни, новых творческих успехов, неиссякаемой энергии и сил для продолжения большого, неоценимо важного дела.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №1, 2002 Механика

УДК 539.3

ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ КРЕСТООБРАЗНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ

Григорян Э.Х., Торосян Д.Р., Шагинян С.С.

Է.Խ.Գրիգորյան, Դ.Ռ.Թորոսյան, Ս.Ս.Շահինյան

Խնդիր առաձգական հարթության համար, որը պարունակում է խաչաձև ներդիր

Դիտարկվում է խնդիր առաձգական հարթության համար, որը պարունակում է խաչաձև վերջավոր ներդիր: Խնդիրը մոդելավորվում է որպես կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ խաչաձև ներդիր պարունակող առաձգական հարթության խնդիր: Խնդիրը բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման, որը թույլ է տալիս լուծում հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով:

E.K.Grigoryan, D.R.Torosyan, S.S.Shahinyan

Problem for Elastic Plane Weakened by Cruciform Insertion

Рассматривается задача для упругой плоскости, содержащей крестообразное упругое конечное включение. Упругая плоскость деформируется под действием напряжений, приложенных на бесконечности по взаимно-перпендикулярным направлениям (по x и по y). Задача моделируется в виде задачи для упругой плоскости, содержащей бесконечное крестообразное включение, состоящее из двух кусочно-однородных бесконечных включений. Далее задача сводится к решению фредгольмовского интегрального уравнения второго рода, допускающее решение методом последовательных приближений.

Пусть упругая плоскость содержит две одинаковые взаимно-перпендикулярные включения одинаковой длины, которые вместе образуют крест, т.е. упругая плоскость содержит крестообразное включение. Упругая плоскость деформируется под действием напряжений p и q, приложенных на бесконечности по направлениям Ox и Oy, соответственно. Относительно включения полагается, что оно по линиям x и y находится в одноосном напряженном состоянии, т.е. она совпадает с крестообразной линией $|x| \le a, \;\; y = 0$ и $|y| \le a, \;\; x = 0$, с жесткостью $E_1 h$, где E_1 – модуль упругости включения, а h – его толщина. С другой стороны, поскольку вышеуказанная линия имеет конечную жесткость, то в концах $x = \pm a, \;\; y = \pm a$ оно не может быть в контакте с линиями нулевой жесткости. Поэтому, чтобы учитывать контактные условия на концах включения ($x = \pm a$ и $y = \pm a$), поступим, как в [1], мысленно продолжим включение по направлениям x и y материалом упругой плоскости до бесконечности. Далее допустим, что полученное кусочно-однородное бесконечное крестообразное включение находится в двухосном напряженном состоянии, т.е. совпадает с крестообразной линией, имеющая конечную жесткость (при $|x| < a, \; |y| < a$ – жесткость $E_1 h$, а при $|x| > a, \; |y| > a$ – жесткость $E_2 h$, где E_2 – модуль упругости материала плоскости). Из вышесказанного следует, что задача для упругой плоскости с конечным крестообразным включением, можно моделировать, как задачу для плоскости с бесконечным кусочно-однородным крестообразным включением, конечная часть которого – вышеуказанное включение, а полубесконечная часть состоит из материала упругой плоскости.

Приступив к решению модельной задачи, запишем уравнения равновесия включения

$$
\begin{aligned}
&hE_2\frac{d^2u^{(1)}(x)}{dx^2}+2\tau^{(1)}(x)=0; \quad (-\infty<x<-a)\\
&hE_1\frac{d^2u^{(1)}(x)}{dx^2}+2\tau^{(1)}(x)=0; \quad (-a<x<a) \qquad (1)\\
&hE_2\frac{d^2u^{(1)}(x)}{dx^2}+2\tau^{(1)}(x)=0; \quad (a<x<\infty)
\end{aligned}
$$

а при $-\infty<y<\infty$

$$
\begin{aligned}
&hE_2\frac{d^2v^{(1)}(y)}{dy^2}+2\tau^{(2)}(y)=0; \quad (-\infty<y<-a)\\
&hE_1\frac{d^2v^{(1)}(y)}{dy^2}+2\tau^{(2)}(y)=0; \quad (-a<y<a) \qquad (2)\\
&hE_2\frac{d^2v^{(1)}(y)}{dy^2}+2\tau^{(2)}(y)=0; \quad (a<y<\infty)
\end{aligned}
$$

где $\tau^{(1)}(x)$, $\tau^{(2)}(y)$ – контактные касательные напряжения, $u^{(1)}(x)$, $v^{(1)}(y)$ – перемещения включения по Ox и Oy соответственно.

В начале рассмотрим уравнения (1) и запишем их одним уравнением. Из (1) будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\frac{du^{(1)}(x)}{dx}=-\frac{2}{hE_2}\int_{-\infty}^{x}\tau^{(1)}(s)ds+\frac{P}{E_2}; \qquad (-\infty<x<-a)\\
&\frac{du^{(1)}(x)}{dx}=-\frac{2}{hE_1}\int_{-a}^{x}\tau^{(1)}(s)ds+C; \qquad (-a<x<a)\\
&\frac{du^{(1)}(x)}{dx}=\frac{2}{hE_2}\int_{x}^{\infty}\tau^{(1)}(s)ds+\frac{P}{E_2}; \qquad (a<x<\infty)
\end{aligned}
$$

Выше имеется в виду, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{(1)}(s)ds=0.$$

Теперь, имея в виду, что $\tau^{(1)}(-s)=-\tau^{(1)}(s)$, получим

$$\int_{-a}^{x}\tau^{(1)}(s)ds=-\int_{0}^{a}\theta(s-x)\tau^{(1)}(s)ds; \qquad (0<x<a)$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

Итак, будем иметь

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx}=\frac{2}{hE_1}\int_0^a \theta(s-x)\tau^{(1)}(s)ds+C, \qquad (0<x<a) \tag{3}$$

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx}=\frac{2}{hE_2}\int_0^\infty \theta(s-x)\tau^{(1)}(s)ds+\frac{p}{E_2}, \qquad (a<x<\infty) \tag{4}$$

Далее, удовлетворив условию контакта

$$E_1\frac{du^{(1)}(x)}{dx}\bigg|_{x=a-0}=E_2\frac{du^{(1)}(x)}{dx}\bigg|_{x=a+0}$$

Тогда C определяется в виде

$$C=\frac{2}{hE_1}\int_a^\infty \tau^{(1)}(s)ds+\frac{p}{E_1}; \qquad \int_{-a}^a \tau^{(1)}(s)ds=0;$$

(3) и (4) можно записать одним уравнением

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx}=\left(\frac{2}{hE_1}\int_0^a \theta(s-x)\tau^{(1)}(s)ds+C\right)(1-\theta(x-a))+$$

$$+\left(\frac{2}{hE_2}\int_0^\infty \theta(s-x)\tau^{(1)}(s)ds+\frac{p}{E_2}\right)\theta(x-a), \qquad (0<x<\infty)$$

Для дальнейшего, после замены x на ae^v, s на ae^u, получим

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx}=\left(\frac{2a}{hE_1}\int_{-\infty}^0 \theta(u-v)\tau_1(u)e^u du+C_1\right)\theta(-v)+$$

$$+\frac{2a}{hE_2}\int_0^\infty \theta(u-v)\tau_1(u)e^u du\,\theta(v)+\frac{p}{E_2} \qquad (-\infty<v<\infty) \tag{5}$$

где

$$\tau_1(u)=\tau^{(1)}(ae^u); \qquad C_1=\frac{2a}{hE_1}\int_0^\infty \tau_1(u)e^u du+p\left(\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_2}\right)$$

Далее, продифференцировав (5) по v, получим

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{du^{(1)}(x)}{dx}\right)=-\frac{2a}{hE_1}\tau_1^-(v)e^v-\frac{2a}{hE_2}\tau_1^+(v)e^v+A\delta(v) \tag{6}$$

где

$$\tau_1^-(v)=\theta(-v)\tau_1(v); \qquad \tau_1^+(v)=\theta(v)\tau_1(v)$$

$$A=\left(\frac{1}{E_2}-\frac{1}{E_1}\right)\left(p+\frac{2a}{h}\int_0^\infty \tau_1(u)e^u du\right)$$

Поступая аналогичным образом, получим

$$\frac{d}{dw}\left(\frac{dv^{(1)}(y)}{dy}\right)=-\frac{2a}{hE_1}\tau_2^-(w)e^w-\frac{2a}{hE_2}\tau_2^+(w)e^w+B\delta(w) \quad (-\infty<w<\infty) \tag{7}$$

где

$$B=\left(\frac{1}{E_2}-\frac{1}{E_1}\right)\left(q+\frac{2a}{h}\int_0^{\infty}\tau_2(w)e^{w}dw\right)$$

$$\tau_2(w)=\tau^{(2)}(ae^{w});\;\; \tau_2^{-}(w)=\theta(-w)\tau_2(w);\;\; \tau_2^{+}(w)=\theta(w)\tau_2(w)$$

С другой стороны, разрешив уравнения Ламе при условиях

$$\tau_{yx}(x;+0)-\tau_{yx}(x;-0)=2\tau^{(1)}(x)$$

$$\tau_{xy}(+0;y)-\tau_{xy}(-0;y)=2\tau^{(2)}(y)$$

и ввиду того, что $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(y)$ нечетные функции, будем иметь [2]

$$\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx}=-\frac{A_0}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\xi-x}+\frac{1}{\xi+x}\right)\tau^{(1)}(\xi)d\xi+\frac{B_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\eta(\eta^2-x^2)}{(\eta^2+x^2)^2}\tau^{(2)}(\eta)d\eta+$$

$$+\frac{(1-\nu^2)p}{E_2}-\frac{\nu(1+\nu)q}{E_2}$$

$$\frac{dv^{(2)}(0,y)}{dy}=-\frac{A_0}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\eta-y}+\frac{1}{\eta+y}\right)\tau^{(2)}(\eta)d\eta+\frac{B_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\xi(\xi^2-y^2)}{(\xi^2+y^2)^2}\tau^{(1)}(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{(1-\nu^2)q}{E_2}-\frac{\nu(1+\nu)p}{E_2}$$

где $u^{(2)}(x,0)$ – перемещения плоскости по линии $y=0$, $v^{(2)}(0,y)$ – перемещения плоскости по линии $x=0$, $A_0=\dfrac{(1+\nu)(3-4\nu)}{2(1-\nu)E_2}$, $B_0=\dfrac{1-\nu}{E_2(1-\nu)}$,

ν – коэффициент Пуассона материала плоскости.

Отметим, что искомые $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(y)$ ищутся в классе функций

$$\tau^{(1)}(x)\sim A_1x^{-1-\delta};\qquad \tau^{(2)}(y)\sim B_1y^{-1-\delta}\quad \text{при}\quad x\to\infty,\; y\to\infty$$

$$\tau^{(1)}(x)\sim A_2x^{\beta};\; \tau^{(2)}(y)\sim B_2y^{\beta}\quad \text{при}\quad x\to 0,\; y\to 0$$

где $\delta>0$, $\beta>0$.

Далее, после замены $\xi=ae^{u}$, $\eta=ae^{u}$, $x=ae^{v}$, $y=ae^{w}$ для $\dfrac{d}{dv}\left(\dfrac{du^{(2)}(x,0)}{dx}\right)$; $\dfrac{d}{dw}\left(\dfrac{dv^{(2)}(0,y)}{dy}\right)$ получим

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx}\right)=$$

$$=\frac{d}{dv}\left[-\frac{A_0}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1-e^{v-u}}+\frac{1}{1+e^{v-u}}\right)\tau_1(u)du+\frac{B_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-e^{2(v-u)}}{(1+e^{2(v-u)})^2}\tau_2(u)du\right] \tag{8}$$

$$\frac{d}{dw}\left(\frac{dv^{(2)}(0,y)}{dy}\right)=\frac{d}{dw}\left[-\frac{A_0}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1-e^{w-u}}+\frac{1}{1+e^{w-u}}\right)\tau_2(u)du+\right.$$

$$
+\frac{B_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-e^{2(w-u)}}{(1+e^{2(w-u)})^2}\tau_1(u)du\Bigg] \tag{9}
$$

где $\tau_1(u)=\tau^{(1)}(ae^u)$, $\tau_2(u)=\tau^{(2)}(ae^u)$.

Теперь, применив комплексное преобразование Фурье к (6) – (9), получим

$$
F\left[\frac{d}{dv}\left(\frac{du^{(1)}(x)}{dx}\right)\right]=-\frac{2a}{hE_1}\tau_1^-(\alpha-i)-\frac{2a}{hE_1}\bar{\tau}_1^+(\alpha-i)+A
$$

$$
F\left[\frac{d}{dw}\left(\frac{dv^{(1)}(y)}{dy}\right)\right]=-\frac{2a}{hE_1}\tau_2^-(\alpha-i)-\frac{2a}{hE_2}\bar{\tau}_2^+(\alpha-i)+B \tag{10}
$$

$$
(-\delta<\operatorname{Im}\alpha<1+\beta)
$$

$$
F\left[\frac{d}{dv}\left(\frac{du^{(2)}(x)}{dx}\right)\right]=A_0\alpha\operatorname{cth}\frac{\pi\alpha}{2}\bar{\tau}_1(\alpha)+\frac{B_0 i\alpha(\alpha+i)}{2\operatorname{sh}(\pi\alpha/2)}\bar{\tau}_2(\alpha)
$$

$$
F\left[\frac{d}{dw}\left(\frac{dv^{(2)}(y)}{dy}\right)\right]=A_0\alpha\operatorname{cth}\frac{\pi\alpha}{2}\bar{\tau}_2(\alpha)+\frac{B_0 i\alpha(\alpha+i)}{2\operatorname{sh}(\pi\alpha/2)}\bar{\tau}_1(\alpha) \tag{11}
$$

$$
(-1<\operatorname{Im}\alpha<0)
$$

где

$$
F[T(x)]=\bar{T}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}T(x)e^{i\alpha x}dx;\qquad \alpha=\sigma+i\tau\quad(-\infty<\sigma<\infty)
$$

Выше имелось в виду, что $\bar{\tau}_k(\alpha)$ регулярна при $\operatorname{Im}\alpha<\beta$, $\bar{\tau}_k^+(\alpha)$ регулярна при $\operatorname{Im}\alpha>-1-\delta$, $\bar{\tau}_k^-(\alpha-i)$ регулярна при $\operatorname{Im}\alpha<1+\beta$, $\bar{\tau}_k^+(\alpha-i)$ регулярна при $-\delta<\operatorname{Im}\alpha$, $\bar{\tau}_k(\alpha)$ регулярна при $-1-\delta<\operatorname{Im}\alpha<\beta$, $\bar{\tau}_k(\alpha-i)$ регулярна при $-\delta<\operatorname{Im}\alpha<1+\beta$ $(k=1,2)$.

$$
\frac{1}{\pi}F\left[\frac{1}{1-e^x}\right]=-i\operatorname{cth}\pi\alpha\qquad(-1<\operatorname{Im}\alpha<0)
$$

$$
\frac{1}{\pi}F\left[\frac{1}{1+e^x}\right]=-\frac{i}{\operatorname{sh}\pi\alpha}\qquad(-1<\operatorname{Im}\alpha<0)
$$

$$
\frac{1}{\pi}F\left[\frac{1-e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}\right]=\frac{\alpha+i}{2\operatorname{sh}(\pi\alpha/2)}\qquad(-2<\operatorname{Im}\alpha<0)
$$

Далее, имея в виду условия контакта

$$
\frac{du^{(1)}(x)}{dx}=\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx}\qquad(0<x<\infty)
$$

$$\frac{dv^{(2)}(y)}{dy}=\frac{dv^{(2)}(0,y)}{dy} \qquad (0<y<\infty)$$

из (10) и (11) получим функциональное уравнение

$$\alpha\operatorname{cth}\frac{\pi\alpha}{2}\overline{\tau}_1(\alpha)+\frac{i\alpha(\alpha+i)}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/2)}A_1\overline{\tau}_2(\alpha)+\lambda_1\overline{\tau}_2^-(\alpha-i)+\lambda_2\overline{\tau}_1^-(\alpha-i)=$$
$$=(\lambda_2-\lambda_1)(p+X)\frac{h}{2a} \qquad (-1<\operatorname{Im}\alpha<0) \tag{12}$$

$$\alpha\operatorname{cth}\frac{\pi\alpha}{2}\overline{\tau}_2(\alpha)+\frac{i\alpha(\alpha+i)}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/2)}A_1\overline{\tau}_1(\alpha)+\lambda_1\overline{\tau}_2(\alpha-i)+\lambda_2\overline{\tau}_1^-(\alpha-i)=$$
$$=(\lambda_2-\lambda_1)(q+Y)\frac{h}{2a} \qquad (-1<\operatorname{Im}\alpha<0) \tag{13}$$

Здесь δ фиксировалось в области $\delta\geq 1$, где

$$A_1=\frac{B}{2A_0}=\frac{1}{3-4\nu}; \qquad \lambda_1=\frac{2a}{hE_1A_0}; \qquad \lambda_2=\frac{2a}{hE_2A_0}$$
$$X=\frac{2a}{h}\overline{\tau}_1(-i); \qquad Y=\frac{2a}{h}\overline{\tau}_2(-i). \tag{14}$$

Теперь заметим, что (12) и (13) можно представить в виде

$$\overline{K}_1(\alpha)\overline{\varphi}(\alpha)+\lambda_2\overline{\varphi}(\alpha-i)=(\lambda_2-\lambda_1)\overline{\varphi}^-(\alpha-i)+(\lambda_2-\lambda_1)d_1 \tag{15}$$
$$\overline{K}_2(\alpha)\overline{\psi}(\alpha)+\lambda_2\overline{\psi}(\alpha-i)=(\lambda_2-\lambda_1)\overline{\psi}^-(\alpha-i)+(\lambda_2-\lambda_1)d_2 \tag{16}$$

где

$$\overline{K}_1(\alpha)=\frac{\alpha\left(\operatorname{ch}(\pi\alpha/2)+i(\alpha+i)A_1\right)}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/2)}; \ \overline{K}_2(\alpha)=\frac{\alpha\left(\operatorname{ch}(\pi\alpha/2)-i(\alpha+i)A_1\right)}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/2)}$$
$$(-1<\operatorname{Im}\alpha<0)$$

$$d_1=h(X+Y+p+q)/2a; \qquad d_2=h(X-Y+p-q)/2a$$

$$\overline{\varphi}(\alpha)=\overline{\tau}_1(\alpha)+\overline{\tau}_2(\alpha); \quad \overline{\psi}(\alpha)=\overline{\tau}_1(\alpha)-\overline{\tau}_2(\alpha)$$

$$\overline{\varphi}^-(\alpha-i)=\overline{\tau}_1^-(\alpha-i)+\overline{\tau}_2^-(\alpha-i); \quad \overline{\psi}^-(\alpha-i)=\overline{\tau}_1^-(\alpha-i)-\overline{\tau}_2^-(\alpha-i)$$

В случае $p=q$

$$\overline{\varphi}(\alpha)=2\overline{\tau}_1(\alpha); \qquad \overline{\psi}(\alpha)=0.$$

Итак, задача свелась к решению функциональных уравнений (15) и (16), поскольку

$$\overline{\tau}_1(\alpha)=\frac{\overline{\varphi}(\alpha)+\overline{\psi}(\alpha)}{2}; \ \overline{\tau}_2(\alpha)=\frac{\overline{\varphi}(\alpha)-\overline{\psi}(\alpha)}{2}.$$

До того, как перейти к решению функциональных уравнений (15), (16), определим значения постоянных δ и β, т.е. определим поведение функций $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(y)$ в окрестности точек нуля и бесконечности. Для этого рассмотрим уравнение (15). Поскольку $\overline{\varphi}(-i)$ конечное число (14), а $\overline{K}_1(-i)=0$, то из (15) следует, что $\overline{\varphi}(-2i)$ – конечное число. Далее, поскольку $\overline{\varphi}(-2i)$ – конечное число, то из (15) следует, что $\alpha=-3i$ является первым простым полюсом аналитического продолжения функции $\overline{\sigma}(\alpha)$ при $\operatorname{Im}\alpha < 0$. Аналогичным образом можно показать, что для аналитического продолжения функции $\overline{\psi}(\alpha)$ первым полюсом при $\operatorname{Im}\alpha < 0$ является опять точка $\alpha = -3i$. Из сказанного следует, что $\delta = 2$, т.е. $\tau^{(1)}(x) \sim A_1 x^{-3}$, $\tau^{(1)}(y) \sim A_2 y^{-3}$ при $x \to \infty$, $y \to \infty$. Теперь приступим к определению поведения функции $\tau^{(1)}(x)$, $\tau^{(2)}(y)$ при $x \to 0$, $y \to 0$ соответственно. Для этого опять рассмотрим уравнение (15). Пусть β такова, что первый положительный корень $K_1(\alpha)$ попадает в область регулярности $-2 < \operatorname{Im}\alpha_1 < 1+\beta$ функции $\overline{\varphi}(\alpha - i)$. В таком случае, как нетрудно видеть, $\alpha = \alpha_1$ может быть первым простым полюсом аналитического продолжения функции $\overline{\varphi}(\alpha)$, при $\operatorname{Im}\alpha > 0$. Отсюда можно заключить, что $\beta = \operatorname{Im}\alpha_1$, так как $\overline{\varphi}(\alpha) = 2\overline{\tau}_1(\alpha) = 2\overline{\tau}_2(\alpha)$ при $p = q$, а показатель β не зависит от нагрузки. Итак, при $x \to 0$, $y \to 0$ имеем

$$\tau^{(1)}(x) \sim A_2 x^{\omega},\ \tau^{(2)}(y) \sim B_2 y^{\omega},\ \operatorname{Im}\alpha_1 = \omega .$$

Теперь перейдем сначала к решению уравнения (15). Полагая правую часть уравнения (15) известной, разрешим функциональные уравнения (15) относительно $\varphi(\alpha)$. Для этого $\overline{\varphi}(\alpha)$ ищем в виде [2]

$$\overline{\varphi}(\alpha) = \frac{i\Gamma(i\alpha)}{\operatorname{ch}(\pi\alpha/2)} \overline{T}_1(\alpha) \qquad (-1 < \operatorname{Im}\alpha < 0) \tag{17}$$

где $\overline{T}_1(-i) = 0$, $\Gamma(z)$ – известная гамма-функция.

Подставив $\varphi(\alpha)$ в уравнение (15), для $\overline{T}_1(\alpha)$ получим функциональное уравнение

$$\overline{B}_1(\alpha)\overline{T}_1(\alpha) - \lambda_2 \overline{T}_1(\alpha - i) = \frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi\alpha}{2}}{\Gamma(1 - i\alpha)} \bar{f}_1(\alpha) \quad (-1 < \operatorname{Im}\alpha < 0) \tag{18}$$

при условии

$$\overline{T}_1(-i) = 0$$

Здесь

$$\overline{B}_1(\alpha) = \frac{\operatorname{ch}(\pi\alpha/2) + i(\alpha + i)A_1}{\operatorname{ch}(\pi\alpha/2)},\quad \bar{f}_1(\alpha) = (\lambda_2 - \lambda_1)\left(\overline{\varphi}^{-}(\alpha - i) + d_1\right)$$

Теперь функциональное уравнение (18) решим методом, изложенным в [1]. Поэтому, необходимо $\overline{B}_1(\alpha)$ представить в виде [1]

$$\overline{B}_1(\alpha) = \frac{Y_1(\alpha)}{Y_1(\alpha - i)}, \qquad (-1 < \operatorname{Im}\alpha < 0) \tag{19}$$

где

$$Y_1(\alpha) = \exp\left[-\frac{i}{2}\int_{t-i\infty}^{t+i\infty}\left(\operatorname{cth}\pi(\alpha - s) + \operatorname{cth}\pi s\right)\ln B_1(s)\,ds\right]$$

$$Y_1(-i) = 1 \qquad\qquad (-1 < \operatorname{Im}\alpha < t < 0)$$

Причем, при $|\alpha| \to \infty$ $(-1 < \operatorname{Im}\alpha < 0)$ $Y_1(\alpha)$ принимает конечное значение.

Заметим, что согласно формуле Стирлинга

$\Gamma(\alpha) \sim e^{-\alpha}\alpha^{\alpha-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\left[1+(12\alpha)^{-1}+\dots\right]$ при $\alpha \to \infty$, $|\arg\alpha| < \pi$, можно получить оценку

$$\left|\frac{\mathrm{sh}(\pi\alpha/2)}{\Gamma(1+i\alpha)}\right| \sim \frac{e^{\pi\sigma}}{2\sqrt{2\pi}|\sigma|^{1/2-t}} \quad \text{при} \quad |\sigma| \to \infty, \; t = \mathrm{Im}\,\alpha .$$

Это говорит о том, что к (18) нет смысла применить обратное преобразование Фурье. Поэтому, разделив обе части равенства на $\mathrm{sh}\pi\alpha$ и использовав (19), будем иметь

$$\frac{Y_1(\alpha)\overline{T}_1(\alpha)}{\mathrm{sh}\pi\alpha} + \lambda_2\frac{Y_1(\alpha-i)\overline{T}_1(\alpha-i)}{\mathrm{sh}\pi(\alpha-i)} = \frac{f_1(\alpha)Y_1(\alpha-i)}{2\Gamma(1+i\alpha)\mathrm{ch}(\pi\alpha/2)} \tag{20}$$

Применив к (20) обратное преобразование Фурье и потребовав, чтобы

$\dfrac{Y_1(\alpha)\overline{T}_1(\alpha)}{\mathrm{sh}\pi\alpha} \to 0$ в полосе $-2 < \mathrm{Im}\,\alpha < 0$, при $\sigma \to \pm\infty$ получим

$$F^{-1}\left[\frac{Y_1(\alpha)\overline{T}_1(\alpha)}{\mathrm{sh}\pi\alpha}\right] = \frac{1}{1+\lambda_2 e^u}F^{-1}\left[\frac{Y_1(\alpha-i)}{2\Gamma(1+i\alpha)\mathrm{ch}(\pi\alpha/2)}f_1(\alpha)\right] \tag{21}$$

Применив к (21) преобразования Фурье, получим

$$\frac{Y_1(\alpha)\overline{T}_1(\alpha)}{\mathrm{sh}\pi\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ell(u)e^{i\alpha u}}{1+\lambda_2 e^u}du \qquad -1 < \mathrm{Im}\,\alpha < 0 \tag{22}$$

где

$$\ell(u) = F^{-1}\left[\frac{Y_1(\alpha-i)}{2\Gamma(1+i\alpha)\mathrm{ch}(\pi\alpha/2)}f_1(\alpha)\right] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\ell_1(u-w)f_1(w)dw$$

$$\ell_1(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{t-i\infty}^{t+i\infty}\frac{Y_1(\alpha-i)}{\Gamma(1+i\alpha)\mathrm{ch}(\pi\alpha/2)}e^{-i\alpha u}d\alpha \qquad (-1 < t < 0) \tag{23}$$

Определив из (22) $\overline{T}_1(\alpha)$ и подставив в (17), для $\overline{\varphi}(\alpha)$ будем иметь

$$\overline{\varphi}(\alpha) = \frac{i\Gamma(i\alpha)\mathrm{sh}\dfrac{\pi\alpha}{2}}{Y_1(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ell(u)e^{i\alpha u}}{1+\lambda_2 e^u}du \qquad -1 < \mathrm{Im}\,\alpha < 0$$

Теперь применив к $\overline{\varphi}(\alpha)$ обратное преобразование Фурье и использовав теорему о свертке, получим

$$\varphi(v) = 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ell_2(v-u)\ell(u)}{1+\lambda_2 e^u}du$$

где

$$\ell_2(v-u) = \frac{1}{2\pi}\int_{t-i\infty}^{t+i\infty}\frac{i\Gamma(i\alpha)\mathrm{sh}(\pi\alpha/2)}{Y_1(\alpha)}e^{-i\alpha(v-u)}d\alpha \qquad (-1 < t < 0)$$

Если теперь иметь в виду (23)

$$\ell(u) = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\ell_1(u-w)\varphi(w)e^w dw + (\lambda_2-\lambda_1)d_1\ell_1(u)$$

получим

$$\varphi(v)=(\lambda_2-\lambda_1)\int_{-\infty}^{0}e^{w}\varphi(w)dw\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ell_2(v-u)\ell_1(u-w)}{1+\lambda_2e^{u}}du+$$

$$+(\lambda_2-\lambda_1)d_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ell_2(v-u)\ell_1(u)}{1+\lambda_2e^{u}}du$$

Таким образом, получили равенства

$$\varphi(v)=(\lambda_2-\lambda_1)\int_{-\infty}^{0}K_1(v,w)e^{w}\varphi(w)dw+(\lambda_2-\lambda_1)d_1\varphi_0(v)\qquad(-\infty<v<\infty)$$

где

$$\varphi_0(v)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ell_2(v-u)\ell_1(u)}{1+\lambda_2e^{u}}du$$

$$K_1(v,w)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ell_2(v-u)\ell_1(u-w)}{1+\lambda_2e^{u}}du$$

Переходя к переменным $x=e^{v}$, $s=e^{w}$, $y=e^{-u}$, получим

$$\varphi(ax)=(\lambda_2-\lambda_1)\int_{0}^{1}K_1(x,s)\varphi(as)ds+(\lambda_2-\lambda_1)d_1K_1(x,1)\quad 0<x<\infty \tag{24}$$

где

$$K_1(x,s)=\int_{0}^{\infty}\frac{\ell_2(\ln xy)\ell_1(-\ln ys)}{\lambda_2+y}dy \tag{25}$$

Теперь, потребовав в (24), чтобы $0<x<1$, для определения искомого $\varphi(ax)$ получим Фредгольмовское интегральное уравнение второго рода

$$\varphi(ax)=(\lambda_2-\lambda_1)\int_{0}^{1}K_1(x,s)\varphi(as)ds+(\lambda_2-\lambda_1)d_1K_1(x,1) \tag{26}$$

Отметим, что неизвестные постоянные X, Y определяются из (14)

После определения $\tau(ax)$ при $0<x<1$ ее значения при $x>1$ определяются из (24). Отметим также, что $K_1(x,1)$ является решением задачи для бесконечного крестообразного включения, когда в точках $x=\pm a$, $y=\pm a$ приложена сила с единичной интенсивностью [2]

Исследуем свойства ядра $K_1(x,s)$. Для этого запишем его в виде

$$K_1(x,s)=\int_{0}^{\infty}\frac{\ell_2(\ln xy)\ell_1(-\ln sy)}{y}dy-\lambda_2\int_{0}^{\infty}\frac{\ell_2(\ln xy)\ell_1(-\ln sy)}{y(\lambda_2+y)}dy$$

Далее, в силу теоремы о свертке, получим

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\ell_2(\ln xy)\ell_1(-\ln sy)}{y}dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{th}(\pi\sigma/2)}{\sigma}\left(\frac{x}{s}\right)^{-i\sigma}d\sigma+R_1(x,s)$$

где

$$R_1(x,s)=\frac{A_1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sigma+i}{\sigma}\right)\frac{\mathrm{th}(\pi\sigma/2)}{\mathrm{ch}(\pi\sigma/2)+i(\sigma+i)A_1}\left(\frac{x}{s}\right)^{-i\sigma}d\sigma$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^\infty\frac{\ell_1(\ln xy)\ell_1(-\ln sy)}{y}dy=\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{x+s}{x-s}\right|+R_1(x,s)$$

где $R_1(x,s)$, в силу абсолютной интегрируемости подынтегрального выражения при $(x/s)^{i\sigma}$, равняется нулю при $x=0$ и $s=0$, а при $x=s$ принимает конечное значение. Теперь, если учесть, что

$$\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{x+s}{x-s}\right|=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin(xy)\sin(sy)}{y}dy$$

то $K_1(x,s)$ можно записать в виде

$$K_1(x,s)=\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{x+s}{x-s}\right|-\frac{2\lambda_2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin(xy)\sin(sy)}{y(\lambda_2+y)}dy+\int_0^\infty\frac{A(x,s,y)}{\lambda_2+y}dy \qquad (27)$$

где

$$A(x,s,y)=\ell_2(xy)\ell_1(sy)-\sin(xy)\sin(sy)$$

$$\int_0^\infty\frac{A(x,s,y)}{y}dy=R_1(x,s)$$

Из представления (27) следует, что $K_1(x,s)$ при $x=s$ имеет логарифмическую особенность, а в остальном – непрерывная функция. Отсюда следует, что $K_1(x,s)$ при $x=1$ имеет логарифмическую особенность, а из (26) следует, что искомые $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(1)}(y)$ при $x=a$ и $y=a$ имеют логарифмическую особенность. Из вышеуказанного следует, что интегральное уравнение (26) можно решать методом последовательных приближений в $L_1(0,1)$ при

$$|\lambda_2-\lambda_1|\max_{0\le s\le 1}\int_0^1|K_1(x,s)|dx<1$$

В случае одного конечного включения $(Y_1(\alpha)\equiv 1)$

$$K_1(x,s)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin(xy)\sin(sx)}{\lambda_2+y}dy$$

поскольку в силу того, что [3]

$$\frac{1}{2\pi}\int_{it-\infty}^{it+\infty}\frac{1}{\Gamma(1+i\alpha)\mathrm{ch}(\pi\alpha/2)}(sy)^{i\alpha}d\alpha=\frac{2}{\pi}\sin(sy), \qquad -1<t<0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{it-\infty}^{it+\infty}i\Gamma(i\alpha)\mathrm{sh}(\pi\alpha/2)(xy)^{-i\alpha}d\alpha=\sin(xy), \qquad -1<t<0$$

$$A(x,s,y)=0$$

Аналогичным образом получается решение функционального уравнения (16).

Следует отметить, что $\tau^{(1)}(x) \equiv 0$, $\tau^{(2)}(y) \equiv 0$ при $\lambda_1 = \lambda_2$, которое

соответствует решению задачи без включения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э.Х. Решение задачи упругого конечного включения, входящего на границу полуплоскости. // Уч. записки ЕГУ, Ест. н. 1981. №3.
2. Григорян Э.Х., Торосян Д.Р. Задача для упругой бесконечной пластины, усиленной крестообразным бесконечным стрингером. // Изв. НАН РА. Механика. 1994. Т. 47. №1-2. С. 3-13.
3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.:. Наука, 1984. 799с.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию 22.05.2001

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա . 55, №1, 2002 Механика

УДК 539.3

О ВЛИЯНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА МАЛОНАПРЯЖЕННОСТЬ АНТИПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ПРЯМОЛИНЕЙНО-АНИЗОТРОПНОГО КЛИНА

Саргсян А.М.

Ա.Մ. Սարգսյան
Կտոր առ կտոր համասեռ ուղղագծային-անիզոտրոպ սեպի հակահարթ խնդրում թերլարվածության վրա եզրային պայմանների ազդեցության մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրված է առաձգական լարումների վարքը երկայնական սահքի պայմաններում գտնվող բաղադրյալ ուղղագծային-անիզոտրոպ սեպի միացման մակերևույթի եզրի շրջակայքում՝ տարբեր եզրային պայմանների դեպքում։

Ցույց է տրված, որ միացված մարմինների անիզոտրոպ հատկությունները էապես ազդում են թերլարվածային և կոնցենտրացիոն տիրույթների վրա։

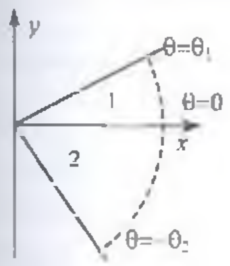
A.M. Sargsyan
On Influence of Boundary Conditions of Small-stress of Antiplane Problem for Piece-wise-homogeneous Linear-anizotropic Wedge

В работе исследовано поведение упругих напряжений в окрестности края поверхности контакта составного прямолинейно-анизотропного клина, находящегося в состоянии продольного сдвига при различных граничных условиях.

Установлено, что анизотропные свойства соединенных тел существенно влияют на размеры областей малонапряженности и концентрации.

Распределение установившихся плоских физических полей (механических, тепловых, диффузионных, фильтрационных, электрических, магнитных и т.д.) и поведение их характеристик (упругие напряжения, поток тепла и вещества, плотность расхода жидкости, напряженность электрических и магнитных полей и т.д.) в кусочно-однородном изотропном клине рассмотрены в работах [1-3].

В работе [4] эти вопросы изучены для кусочно-однородного цилиндрически-анизотропного клина.



Фиг. 1

В настоящей работе на примере антиплоской задачи теории упругости исследуется характер распределения установившихся плоских физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного прямолинейно-анизотропного клина (фиг.1). Неоднородный анизотропный клин в каждой точке имеет плоскость материальной симметрии совпадающую с плоскостью Oxy. Ось z перпендикулярна к этой плоскости. На боковых гранях составного клина задаются либо касательные напряжения, либо упругие перемещения, либо на одной грани $(\theta = -\theta_2)$ приложено касательное напряжение, а на другой грани $(\theta = \theta_1)$ задано перемещение.

Антиплоская задача для прямолинейно-анизотропного тела впервые была поставлена в работе [5], где из условий $u_x = u_y = 0$ и существования плоскости упругой симметрии получено определяющее уравнение для перемещения $u_z(x,y)$. В дальнейшем, используя результаты работы [5], получены решения ряд задач для анизотропных клиньев [9,10]. Здесь же вводится функция напряжений $\Psi(x,y)$, призводные которой по x и y определяют упругие напряжения τ_{yz} и τ_{xz}. При этом уравнение равновесия удовлетворяется тождественно, а из условия совместности деформации получается уравнение для определения $\Psi(x,y)$.

При отсутствии объемных сил функция напряжений $\Psi(x,y)$ в соответствующих областях удовлетворяет уравнению

$$a_{44}^{(j)}\frac{\partial^2\Psi_j}{\partial x^2}-2a_{45}^{(j)}\frac{\partial^2\Psi_j}{\partial x\partial y}+a_{55}\frac{\partial^2\Psi_j}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

$$j=1,\ 0<\theta<\theta_1;\ j=2,\ -\theta_2<\theta<0;\ \theta_1+\theta_2\le 2\pi,\ \theta_j\le 2\pi$$

условиям сопряжения на поверхности разрыва свойств материалов $(y=0)$

$$\tau_{yz}^{(1)}=\tau_{yz}^{(2)},\ u_z^{(1)}=u_z^{(2)} \tag{2}$$

и граничным условиям, заданным в одном из видов

$$(\tau_{yz}^{(1)}\cos\theta_1-\tau_{xz}^{(1)}\sin\theta_1)\big|_{\substack{x=r\cos\theta_1\\ y=r\sin\theta_1}}=(\tau_{yz}^{(2)}\cos\theta_2+\tau_{xz}^{(2)}\sin\theta_2)\big|_{\substack{x=r\cos\theta_2\\ y=-r\sin\theta_2}}=0 \tag{3}$$

$$u_z^{(1)}\big|_{\substack{x=r\cos\theta_1\\ y=r\sin\theta_1}}=u_z^{(2)}\big|_{\substack{x=r\cos\theta_2\\ y=-r\sin\theta_2}}=0 \tag{4}$$

$$u_z^{(1)}\big|_{\substack{x=r\cos\theta_1\\ y=r\sin\theta_1}}=(\tau_{yz}^{(2)}\cos\theta_2+\tau_{xz}^{(2)}\sin\theta_2)\big|_{\substack{x=r\cos\theta_2\\ y=-r\sin\theta_2}}=0 \tag{5}$$

где a_{44}, a_{45}, a_{55} – коэффициенты деформации.

То же уравнение (1) и аналогичные гранично-контактные условия с незначительным изменением обозначений имеют место и для других плоских физических полей [6-8]. Поэтому, методы решения поставленных выше задач и полученные основные выводы применимы и к этим полям.

Представим решение уравнений (1) в виде [11]

$$\Psi_j(x,y)=A_j(x+\mu_j y)^\lambda+B_j(x+\bar{\mu}_j y)^\lambda,\ (j=1,2) \tag{6}$$

где A_j, B_j – неизвестные постоянные, λ – произвольный параметр, μ_j и $\bar{\mu}_j$ – корни квадратного уравнения

$$a_{55}^{(j)}\mu_j^2-2a_{45}^{(j)}\mu_j+a_{44}=0,\quad \mu_j=\sigma_j+i\tau_j,\ \bar{\mu}_j=\sigma_j-i\tau_j,\ \tau_j>0$$

$$\sigma_j=\frac{a_{45}^{(j)}}{a_{55}^{(j)}},\ \tau_j=\frac{\sqrt{a_{44}^{(j)}a_{55}^{(j)}-a_{45}^{(j)}a_{45}^{(j)}}}{a_{55}^{(j)}} \tag{7}$$

Используя уравнения состояний и условие совместности деформаций [5] для перемещения $u_z^{(j)}(x,y)$ будем иметь

$$u_z^{(j)}(x,y)=A_j m_j(x+\mu_j y)^\lambda+B_j\bar{m}_j(x+\bar{\mu}_j y)^\lambda+C$$

$$m_j=a_{55}^{(j)}\mu_j-a_{45}^{(j)},\ \bar{m}_j=a_{55}^{(j)}\bar{\mu}_j-a_{45}^{(j)} \tag{8}$$

Удовлетворяя гранично-контактным условиям (2) – (5), для определения A_i, B_i получим системы линейных алгебраических уравнений. Из условий существования нетривиальных решений этих систем получим следующие уравнения относительно λ :

$$\Delta_3(\lambda) = (\chi + 1)\sin\lambda(\varphi_1 + \varphi_2) + (\chi - 1)\sin\lambda(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \qquad (9)$$

$$\Delta_4(\lambda) = (\chi + 1)\sin\lambda(\varphi_1 + \varphi_2) - (\chi - 1)\sin\lambda(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \qquad (10)$$

$$\Delta_5(\lambda) = (\chi + 1)\cos\lambda(\varphi_1 + \varphi_2) + (\chi - 1)\cos\lambda(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \qquad (11)$$

где
$$\chi = \frac{\chi_2}{\chi_1} = \sqrt{\frac{a_{44}^{(2)}a_{55}^{(2)} - a_{45}^{(2)}a_{45}^{(2)}}{a_{44}^{(1)}a_{55}^{(1)} - a_{45}^{(1)}a_{45}^{(1)}}}$$

$$\varphi_1 = \arg(\cos\theta_1 + \mu_1\sin\theta_1),\ \varphi_2 = \arg(\cos\theta_2 - \bar{\mu}_2\sin\theta_1),\ 0 < \varphi_i < 2\pi$$

Сравнивая (9)-(11) с соответствующими уравнениями, относящимися к антиплоской задаче составного изотропного клина, замечаем, что решения поставленных задач свелись к решениям соответствующих задач для составного изотропного клина [2]. При этом составляющим клин изотропным материалам нужно приписать модули сдвига χ_1, χ_2 и приведенные углы φ_1, φ_2 соответственно.

В работах [1,2] показано, что корни (9)—(11) действительны и просты.

Как следует из (6), напряжения $\tau_{yz}^{(j)} = -\partial\psi_j(x,y)/\partial x$ и $\tau_{xz}^{(j)} = \partial\psi_j(x,y)/\partial y$ затухают вблизи угловой точки составного клина, если первый положительный корень уравнений (9)-(11) $\lambda_1 > 1$. При $\lambda_1 < 1$ эти напряжения неограниченно возрастают при приближении к угловой точке. В предельном случае, когда $\lambda_1 = 1$, при приближении к краю поверхности контакта, напряжения конечны и вообще отличны от нуля.

В уравнения (9)-(11), кроме углов θ_1 и θ_2, входят еще пять независимых между собой параметров $\chi, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1$ и τ_2. Поэтому исчерпывающее общее аналитическое исследование зависимости искомого корня λ_1 от параметров задачи здесь, по-видимому, невозможно.

Для выявления влияния анизотропии материалов на поведение упругих напряжений в окрестности угловой точки составного клина воспользуемся понятием предельной кривой, впервые введенным в [1].

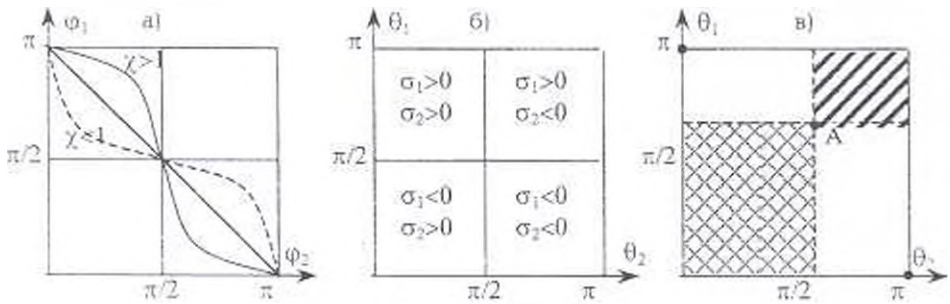
Хорошо известно [1,2], что на плоскости приведенных углов $\varphi_1\varphi_2$ предельные кривые, описываемые уравнениями (9)—(10) при $\lambda = 1$ и разделяющие области, где компоненты напряжений τ_{xz} и τ_{yz} стремятся к нулю (область малонапряженности) или бесконечности (область концентрации), проходят через три характерные точки [1,2]. Это — точки с координатами $(\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \pi)$, $(\varphi_1 = \pi/2,\ \varphi_2 = \pi/2)$, $(\varphi_1 = \pi,\ \varphi_2 = 0)$ (фиг.2а).

С помощью формул определения аргумента комплексных чисел z_1, z_2

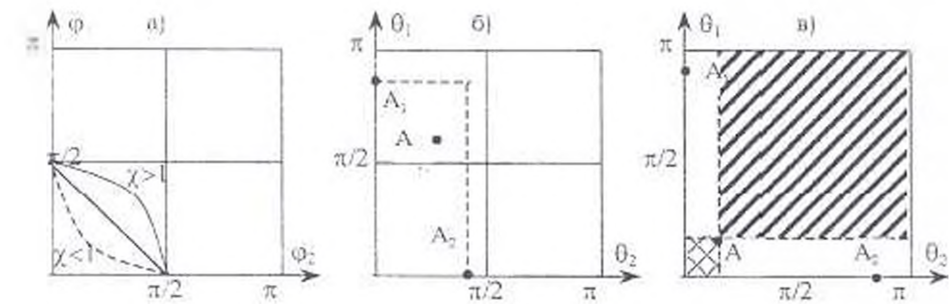
$$R_j\cdot\cos\varphi_j = \cos\theta_j - (-1)^j\sigma_j\sin\theta_j,\quad R_j\cdot\sin\varphi_j = \tau_j\sin\theta_j \qquad (12)$$

легко показать, что этим трем точкам на плоскости реальных углов растворов однородных клиньев $\theta_1\theta_2$ соответствуют точки с координатами $(\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi)$, $(\theta_1 = \mathrm{arctg}(-\sigma_1)$ $\theta_2 = \mathrm{arcctg}(\sigma_2))$ и $(\theta_1 = \pi, \theta_2 = 0)$. Вторая из них в зависимости от σ_1 и σ_2 может находиться внутри квадрата со стороной π в любом месте (фиг.2б). В частном случае $\sigma_j = 0$, эта точка занимает место в центре квадрата.

Известно также [1,2], что внутри области $0 < \varphi_1 < \pi/2$, $0 < \varphi_2 < \pi/2$ напряжения стремятся к нулю при приближении к угловой точке, а внутри области $\pi/2 < \varphi_1 < \pi$, $\pi/2 < \varphi_2 < \pi$ они неограниченно возрастают в окрестности этой точки. Соответствующие области в плоскости $\theta_1\theta_2$ заштрихованы двойной и простой штриховкой (положение второй точки A на фиг.2в определено для случая $\sigma_1 = 0.5$, $\sigma_2 = -0.25$).



Фиг. 2



Фиг. 3

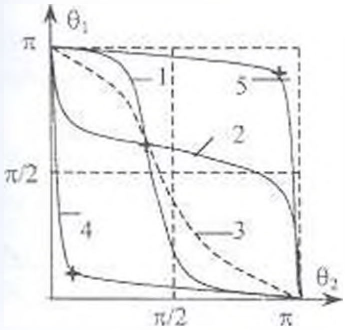
Следовательно, предельные кривые проходят через незаштрихованные фиг.2в области, что и подтверждается численными расчетами уравнения (9), приведенные на фиг.4.

Предельная кривая 1 соответствует случаю $\chi = 7$, $\sigma_j = 0.5$, $\tau_j = 2.0$; кривая 2 – $\chi = 1/7$, $\sigma_j = 0.5$, $\tau_j = 2.0$; кривая 3 – $\chi = 3$, $\sigma_j = 0.5$, $\tau_j = 2.0$; кривая 4 – $\chi = 7$, $\sigma_j = 5.7(-1)^j$, $\tau_j = 1.7$; кривая 5 – $\chi = 7$, $\sigma_j = -5.7(-1)^j$, $\tau_j = 1.7$. На этих кривых звездочками обозначены положения второй характерной точки.

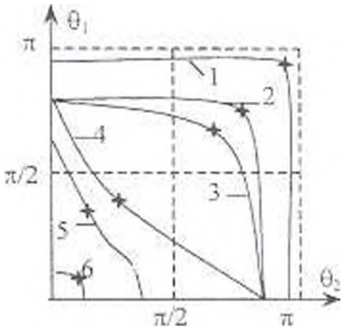
На основании фиг.4 заключаем, что напряжения $\tau_{1\theta}$ и τ_{12} на краю поверхности контакта неоднородного анизотропного клина могут неограниченно возрастать при весьма малом значении суммы углов $\theta_1 - \theta_2$. В случае же, когда θ_1 и θ_2 близки к π, вблизи этого края, являющегося вершиной весьма близкого к трещине выреза, эти напряжения могут затухать.

Аналогичный результат несколько иным путем был получен в работе [11] при изучении упругих напряжений, возникающих в составном прямолинейно-анизотропном стержне при кручении.

Уравнение (10) совпадает с уравнением (9) при замене χ по $1/\chi$, поэтому вышеприведенный анализ относится и к случаю граничных условий (3).



Фиг. 4



Фиг. 5

Из фиг.4 видно также, что при граничных условиях (3) и (4) область малонапряженности увеличивается в два раза по сравнению с таковым для составного изотропного клина.

В случае граничных условий (5), характерные точки, через которые проходят предельные кривые, описываемые уравнением (11) при $\lambda_1 = 1$, несколько иные.

В данном случае точки пересечения предельных кривых с координатными осями φ_1 и φ_2 (фиг.3а) переходят на плоскость $\theta_1\theta_2$ в точки A_1 и A_2 с координатами $(\mathrm{arcctg}(-\sigma_1), 0)$ и $(0, \mathrm{arcctg}\sigma_2)$ соответственно, причем $0 < \mathrm{arcctg}(-1)\sigma_2 < \pi$. В качестве третьей характерной точки берется точка пересечения предельной кривой (при заданном значении χ) с линией $\varphi_1 = \varphi_2$ (фиг.3а). Далее из (14) определяется положение этой точки на плоскости $\theta_1\theta_2$ в зависимости от σ_2 и τ_2. При этом третья точка при заданных σ_2 и τ_2 должна находиться ниже линии $\theta_1 = \mathrm{arcctg}(-\sigma_1)$ и левее линии $\theta_2 = \mathrm{arcctg}\sigma_2$ (фиг.3б). Например, из (11) для $\chi = 0.2$ находим, что $\varphi_1 = \varphi_2 = 2\pi/15$. И в случае $\sigma_2 = -5.671(-1)$, $\tau_2 = 1.685$ из (12) получим координаты всех трех характерных точек на плоскости $\theta_1\theta_2$ (фиг.3в): $A_1(0,17\pi/18)$, $A_2(17\pi/18,0)$, $A(1.6\pi/18, 1{,}6\pi/18)$.

На фиг.5 представлены результаты численных расчетов. Предельная кривая 1 построена для случая $\chi = 14$, $\sigma_2 = -5.671(-1)$, $\tau_2 = 1.685$;

кривая $2-\chi=4, \sigma_j=\sqrt{3}(-1)^{j+1}, \tau_1=1$, $\tau_2=1.5$; кривая $3-\chi=1$, $\sigma_j=\sqrt{3}(-1)^{j+1}$, $\tau_1=1$, $\tau_2=1.5$; кривая $4-\chi=0.25$, $\tau_1=1$, $\tau_2=1.5$, $\sigma_j=\sqrt{3}(-1)^{j+1}$; кривая $5-\chi=1$, $\sigma_j=0.5$, $\tau_j=j$; кривая $6-\chi=14$, $\tau_j=1.685$ $\sigma_j=5.671(-1)^j$. В отличие от составного изотропного клина, для которого область малонапряженности в предельном случае $\chi \to \infty$ становится квадратом со стороной $\pi/2$, в случае граничных условий (5) в зависимости от σ_j эта область может увеличиваться в 4 раза.

Таким образом, анизотропия соединенных тел существенно влияет на размеры области малонапряженности или концентрации и дает возможность регулирования поведения упругих напряжений в окрестности края поверхности контакта составного анизотропного тела в нужном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван.: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338с.
2. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Поведение некоторых физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела. // Докл. АН АрмССР. 1988. Т.86. №4. С.161-166.
3. Sinclair G.B. On the singular Eigenfunction for plane Harmonic Problems in Composite Regions. // J. of Appl. Mech. 1980. vol.47. №1. P.87-92.
4. Саргсян А.М. Поведение плоских стационарных физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного цилиндрически-анизотропного клина//В сб. Механика деформируемого тела. Ереван: Изд. АН Армении. 1993. С.157-162.
5. Саркисян В.С., Айрапетян В.Ж. Новые классы задач теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд. Ереванского ун-та. 1997. С.241.
6. Вековищева И.А. Плоская задача теории электроупругости для пьезоэлектрической пластинки. ПМ. 1975. Т.XI, вып.2. С.85-89.
7. Прусов И.А. Двумерные краевые задачи фильтрации. Минск: Изд. "Университетское". 1987. 182с.
8. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука. 1964. 488с.
9. Айрапетян В.Ж., Кутузян Н.А., Овсепян Д.А. Антиплоские задачи для анизотропных неоднородных клиньев.//Уч. записки ЕГУ. 1999. №2. С.30-37.
10. Саркисян В.С., Мелкумян С.А., Мелкумян А.С. О некоторых задачах теории упругости анизотропного тела. Донецк: Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела. 2001.
11. Алексанян Р.К., Чобанян К.С. Характер напряжений вблизи края поверхности контакта скручиваемого анизотропного составного стержня // ПМ. 1977. Т.XIII. №6. С.90-96.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
25.07.2001

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №1, 2002 Механика

УДК 539.1

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

Сафарян Ю. С.

Յու. Ս. Սաֆարյան

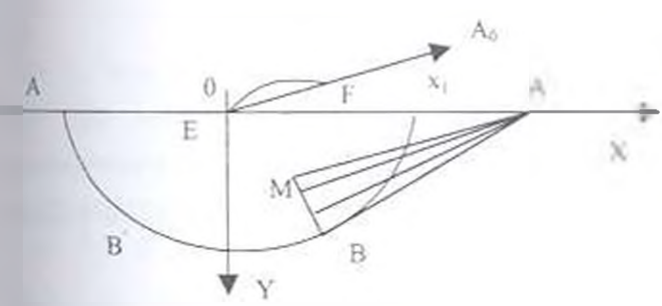
Անհամասեռ առաձգական միջավայրի համար ոչ գծային դիֆրակցիոն խնդրի լուծումը

Դիտարկված է էկրանի վրա կամայական ալիքի դիֆրակցիայի ոչ գծային խնդիրը, կամ անհամասեռ միջավայրում սեպի ծայրից անդրադարձված առաձգական ալիքի համապատասխան խնդիրը: Ստացվել է հարվածային ալիքների վրա լուծումների գրաֆիկները: Դիտարկվել են սեղման և լիցքաթափման ալիքները:

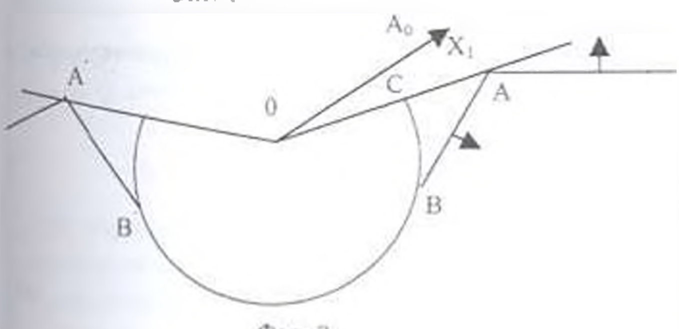
Ju. S. Safaryan

Solution of non-linear diffraction problem for inhomogeneous elastic media

Рассмотрена нелинейная задача дифракции произвольной волны на экране или соответствующая задача отражения упругой волны от вершины клина в неоднородной среде. Получены графики решения на ударных волнах. Рассмотрены волны сжатия и разрежения.



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 3

Рассматривается ряд граничных задач нестационарной теории упругости для неоднородной и однородной среды, приводящих к волновой картине фиг. 1, для которых следует определить линейное и нелинейные решения в окрестности точки B касания волны AB с точечной или дифракционной волной BB'. Эти задачи возникают при проникании в глубь полуплоскости $y\geq 0$ фронта давления, заданного на ее поверхности, причем его скорость вдоль оси x превосходит скорость продольных волн[1], в задаче отражения волны от клина, для которой картина волн дается фиг. 2, при прохождении фронта упругой продольной волны около края твердого экрана. Во всех рассмотренных задачах требуется найти линейное и нелинейное решения вблизи B. Эта нелинейная постановка в соответствующей задаче сверхзвукового конического течения около плоского крыла для однородной среды решалась в [2,3], однако полученные там результаты не имели физического смысла, ибо приводили к возрастанию скачком давления на ударной волне AB при переходе к волне BB_1. Соответствующее нелинейное решение для однородной среды и плоской волны AB в задаче газовой динамики найдено в [4,5] сращиванием с линейным решением. В [6] сделаны ссылки на [5] и было дано дальнейшее усовершенствование метода с определением постоянной из условия соединения с одномерным нелинейным решением на BB'. В [7,8] дано для произвольной неоднородной среды, описываемой гиперболической системой квазилинейных уравнений, к которой относится и нелинейная неоднородная упругая среда, определение линейного и нелинейного решения в окрестности точки B касания волн. Как показывают исследования граничных задач [1], при определении решения в окрестности точки B можно заменять граничную задачу на задачу о начальных условиях, заданных на начальной волне OA_0 фиг. 1-3, представляющей формальное продолжение волны AB к моменту $t=0$. При этом, согласно теории Кирхгоффа [8, 9], следует интегрировать в линейном решении по освещенной части начальной волны, т. е. волне OA_0, где $x_1 \geq 0$. Пусть линеаризированная система уравнений среды есть [10]

$$a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + T_{ij}^j u_j = 0 \tag{1}$$

где по повторяющимся индексам проводится суммирование, $a_{ij}^{(k)}$ есть функции x_k. Тогда, в окрестности волны можно считать [1] $u_i = s_i u$, где s_i есть собственный вектор матрицы $a_{ij}^{(k)}$, и задавать начальное условие в виде

$$t = 0,\ u = a^0(\zeta)_+^{\mu}(x_1)_+^{\lambda} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \tag{2}$$

где λ, μ, a^0 – постоянные, x_1 – координаты вдоль OA_0, ζ – время пробега от точки интегрирования до OA_0, $x_+^n = \begin{cases} x^n, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

При этом, решение в окрестности B системы (1) будет [1]

$$u = -\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \iint \Phi(\varphi)_+^{-\frac{1}{2}} \frac{a^0(\zeta)_+^{\mu}(x_1)_+^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)} dx_1 d\zeta \tag{3}$$

c_n – есть нормальная скорость волны в 0, Φ – лучевое решение, которое находится из закона сохранения энергии волны [1]

$$\Phi = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho c_n \sigma}} \tag{4}$$

σ — площадь волны внутри лучевой трубки, ρ_0 — начальная плотность среды в О. Тогда, (3) дает

$$u = -\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \iint \Phi(t) a^0 (\varphi)_+^{-\frac{3}{2}} (\zeta)_+^{\lambda} (x_1)_+^{\mu} \, \Gamma^{-1}(\lambda+1) dx_1 d\zeta \tag{5}$$

Значение лучевого решения можно брать в точке B. Вычисляя интегралы в (5), можно найти линейное решение для произвольной среды [1] в форме двух гипергеометрических функций, дающих решение позади CBB' и впереди нее. В практически важном случае скачкообразной волны AB имеет место $\lambda = 0, \mu = 0$ и (5) дает после вычисления интегралов

$$u = \frac{\Phi(t) a^0}{\pi\sqrt{k_1 - k_2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2c_0}\sqrt{k_1 - k_2}\sqrt{-\tau}}{\theta - \theta_0}, \quad \tau < 0 \tag{6}$$

$$u = \frac{\Phi(t) a^0}{\sqrt{k_1 - k_2}}, \quad \tau > 0 \tag{7}$$

При получении (6), (7) из (5) выбрана формула для эйконала φ, обобщающая результат [11] на двумерную окрестность точки B, причем

$$\varphi = t - t_0 - \frac{k_1 - k_2}{2c_0}(x_1 - s)^2 - \zeta \tag{8}$$

$t = t_0$ есть уравнение волны AB, x_1 — координата точки интегрирования, s есть значение x_1 в рассматриваемой точке, θ, τ есть лучевые координаты, $\tau = \mathrm{const}$ дает фронты точечных волн, $\theta = \mathrm{const}$ – лучи, k_1 есть кривизна обращенной точечной волны EF фиг. 1, k_2 – кривизна OA, $s = (\theta_0 - \theta)/(k_1 - k_2)$ [1, 11].

Из (8) обозначая $\delta = t - t_0$, $-\tau = t - t_*$ (где $\tau = 0$ дает волну BB'), учитывая, что когда точка (x, y) принадлежит точечной волне $t = t_*$, обращенная точечная волна или квазиокружность EF проходит через точку 0, можно получить, полагая в (8) $\varphi = 0$, $x_1 = 0$, $\zeta = 0$

$$t_* - t_0 = \frac{k_1 - k_2}{2c_0} s^2, \qquad -\tau = \delta - \frac{1}{2c_0} \frac{(\theta_0 - \theta)^2}{k_1 - k_2} \tag{9}$$

Для определения нелинейного решения сначала получим эволюционное уравнение для u в окрестности точки B.

Уравнение волны AB в линейной задаче согласно (9) имеет вид $\delta = 0$,

$$\tau = \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2c_0(k_1 - k_2)} \tag{10}$$

Отсюда видно, что дифференциальные уравнения характеристик линейной задачи вблизи точки В имеют вид

$$\Gamma_1 = \frac{c_0}{2} \frac{d(k_1 - k_2)}{dt}, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\Gamma_1 \left(\frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right)^2 \tag{11}$$

Но дифференциальное уравнение характеристики имеет вид [1]

$$-\frac{\partial F}{\partial t} = \left(C_n + V_n\right)\left|\mathrm{grad}F\right| \tag{12}$$

где C_n — нормальная скорость нелинейной характеристики относительно частиц среды, $V_n = u$ — нормальная к волне скорость частицы.

Как будет показано ниже, для упругой, впрочем, как и для произвольной среды, в первом порядке относительно возмущений имеет место

$$C_n + u = c_n + \Gamma u \tag{13}$$

где c_n — линейная скорость волны, коэффициент Γ будет определен. Из (12), записанного в лучевых координатах, следует, что уравнение одномерной нелинейной характеристики будет $\frac{\partial \tau}{\partial t} = \Gamma \frac{u}{c_n}$, и после сравнения с (11) можно убедиться, что уравнение двухмерных нелинейных характеристик вблизи B имеет вид

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \Gamma_1\left(\frac{\partial \tau}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{\Gamma}{C_n}u \tag{14}$$

при этом дифференциальное уравнение, имеющее (14) своим уравнением характеристик, запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \tau} - \Gamma_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\Gamma}{c_n} u \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - u\frac{d \ln \Phi}{dt} = 0 \tag{15}$$

Здесь в силу произвола выбора ψ можно полагать $u = \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$ и добавлено слагаемое $-u\frac{d \ln \Phi}{dt}$ [12], не влияющее на уравнение характеристик, дающее одномерное по τ линейное или лучевое решение. Вводя функцию $V_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$, можно из (15) найти

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Gamma_1 \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \Gamma c_n^{-1} u \frac{\partial u}{\partial \tau} - u\frac{d \ln \Phi}{dt} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial V_\theta}{\partial \tau} \tag{16}$$

V_θ пропорционально касательной к волне [1] скорости частиц среды.

Можно с помощью (6) найти из (16) V_θ в линейной задаче, затем выразить его как функцию от переменных μ, t, θ, где введены обозначения

$$u\sqrt{k_1 - k_2} = a''\Phi\mu, \qquad V_\theta\sqrt{k_1 - k_2} = a''\Phi\nu \tag{17}$$

Тогда получится

$$\nu = \frac{\theta - \theta_0}{\pi(k_1 - k_2)c_0}\,\mathrm{tg}\mu\pi - \frac{\theta - \theta_0}{k_1 - k_2}\frac{\mu}{c_0} \tag{18}$$

Далее считается, что (18) имеет место и в нелинейной задаче. Тогда из первого уравнения (16) получится

$$\tau = -\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2(k_1-k_2)C_0}\operatorname{tg}^2\mu\pi + \int_0^t \frac{\Gamma}{c_n}\frac{a^0\Phi\mu}{\sqrt{k_1-k_2}}\,dt + C_1(C) \tag{19}$$

$$C = \frac{\sin\mu\pi}{\sqrt{k_1-k_2}}$$

где C_1 – произвольная функция. Решение (19), (18) есть точное решение уравнений (16), удовлетворяющее условию на ударной волне BB' в точке B (для случая $\Gamma a^0 > 0$), т.е. на ударной волне сжатия для жидкой среды, где $\Gamma > 0$, или ударной волне разрежения в упругой среде, где $\Gamma < 0$, что показано далее.

В случае задачи, в которой волна ABB' есть волна сжатия в упругой среде, т. е. $a^0>0$, $\Gamma < 0$, имеет место центрированная волна сжатия ABM фиг. 1 с непрерывным переходом к невозмущенному состоянию впереди ABB' и с условием в точке B

$$\theta = \theta_0, \quad \tau = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0 \tag{20}$$

На нижней характеристике AM имеет место $\mu = 1$. Впереди дифрагированной волны BC имеется ударная волна BM (фиг. 1) [1,3]. Позади нее решение можно взять в виде (19), где согласно [6] из сращивания с одномерным решением на волне BB' получится $C_1 = 0$. Решение впереди BM дается центрированной волной сжатия с центром в A, которое можно искать, решая систему (16), причем можно считать для решения $\mu = \mu_1$, $\nu = \nu_1$ впереди BM

$$\mu_1 = B(t)\left\{\tau - \frac{(\theta-\theta_0)^2}{2(k_1-k_2)k_0}\right\} \tag{21}$$

При этом $\mu_1 = \text{const}$ вдоль нелинейных характеристик в волне ABM. Подставляя μ_1 во второе уравнение (16), можно найти

$$\nu_1 = -B(t)\frac{\theta-\theta_0}{(k_1-k_2)c_0}\tau + f(\theta,t) \tag{22}$$

Подставляя (21), (22) в первое уравнение (16), которое можно записать в виде

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial t} - \frac{1}{2(k_1-k_2)}\frac{d(k_1-k_2)}{dt}\mu_1 - \frac{c_0}{2}\frac{d(k_1-k_2)}{dt}\frac{\partial\nu_1}{\partial\theta} + \frac{\Gamma a^0\Phi}{c_n\sqrt{k_1-k_2}}\mu_1\frac{\partial\mu_1}{\partial t} = 0 \tag{23}$$

и приравняв слагаемые с τ и без него, можно получить

$$B(t) = \frac{1}{I(t)}, \quad I = \int_0^t \frac{\Gamma a^0\Phi}{c_1\sqrt{k_1-k_2}}\,dt \tag{24}$$

$$f(\theta,t) = \frac{(\theta-\theta_0)^3}{2(k_1-k_2)^2 c_0^2 I}$$

Таким образом, нелинейное решение впереди BM имееет вид:

$$\mu_1 = \frac{1}{I}\left[\tau - \frac{(\theta-\theta_0)^2}{2(k_1-k_2)c_0}\right], \ \nu_1 = \frac{(\theta-\theta_0)\tau}{(k_1-k_2)c_0 I} + \frac{(\theta-\theta_0)^3}{2(k_1-k_2)^2 c_1^2 I} \tag{25}$$

Следует решать уравнение ударной волны BM

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{c_0}{2}\frac{d(k_1-k_2)}{dt}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)^2 = \frac{\Gamma a^0 \Phi}{2c_n\sqrt{k_1-k_2}}(\mu+\mu_1) \tag{26}$$

взяв за решения позади нее (19), где $C_1 = 0$, а впереди нее (25) с начальными условиями (20).

Для упрощения задачи о численных расчетах перейдем в полученных решениях (19) и (25) к случаю однородной среды и плоской волны AB, для которых можно полагать

$$\begin{gathered}\frac{\Phi}{c_n\sqrt{k_1-k_2}} = \gamma,\ c_n = c_0,\ \Gamma = \text{const},\ \gamma = \frac{a^0}{c_0},\ \tau = \Gamma t\gamma\delta',\ k_1 = \frac{1}{c_0 t} \\ k_2 = 0,\ \Phi = \frac{1}{\sqrt{c_0 t}},\ \theta-\theta_0 = \sqrt{\Gamma}\sqrt{\gamma}\,y,\ u = \gamma\mu c_0,\ \nu = \sqrt{\Gamma\gamma t}\,\nu'\end{gathered} \tag{27}$$

Здесь предположено $\Gamma a^0 > 0$. Тогда, учитывая, что в интегралах (19)

$$C = -\frac{\sin\mu\pi}{\sqrt{k_1-k_2}},\ \mu = \tilde{\mu},\ C = \text{const},\ k_1 - k_2 = \frac{1}{c_0 t}$$

можно получить $t' = \dfrac{1}{c_0}\dfrac{C^2}{\sin^2\mu\pi}$

под знаком интеграла по t' и после интегрирования получится

$$\delta' = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\mu\pi y^2 + \mu + \frac{1}{2\pi}\sin 2\mu\pi + B\sin^2\mu\pi \tag{28}$$

где согласно [6] $B' = 0$

Уравнение (18) запишется в виде

$$\nu' = \frac{y}{\pi}\,tg\mu\pi - \mu y \tag{29}$$

Подставляем (28) в уравнение ударной волны BB'

$$\frac{d\delta'}{dy} = -\sqrt{2\delta' - \mu} \tag{30}$$

Начальное условие в точке B получается совместным решением уравнения ударной волны AB, $\delta' = y^2/2 + 1/2$ и звуковой волны BC $\delta' = \mu$ в виде

$$y = -1, \quad \mu = 1 \tag{31}$$

Результаты расчетов дают график $\mu = \mu(y)$ вдоль BB', что приведено на фиг. 4.

Условие на ударной волне равенства касательной к волне скорости частицы $æ = 0$, $æ = \nu' - \mu\sqrt{2\delta' - \mu}$ удовлетворяется в точке B и на всей волне BB', $æ$ [6] не превосходит 6%. Вблизи точки B асимптотика решения (28), (29)

$$\mu-1=-(y+1)/2,\quad x=-(y+1)/4$$

Полученное решение верно для волны сжатия ABB' в жидкости, где $\Gamma>0, a^0>0$ и для ударной волны разрежения ABB' в упругой среде, где $\Gamma<0, a^0<0$.

В случае $\Gamma\gamma<0$ вместо (27) следует взять

$$\theta-\theta_0=\sqrt{-\Gamma\gamma}\,y,\ u=-\gamma\mu c_0,\ V_0=-\gamma_0\nu,\ \nu=\sqrt{-\Gamma\gamma}\,\nu',\ \tau=-\Gamma\gamma t\delta' \qquad (32)$$

При этом решение (18), (19) в новых переменных имеет место, а решение (25) примет вид

$$\delta'-y^2/2=\mu_1,\quad \nu_1=-y\delta'+y^3/2 \qquad (33)$$

Записав еще уравнение ударной волны BC

$$\frac{d\delta'}{dy}=\sqrt{2\delta'-\mu-\mu_1} \qquad (34)$$

подставляя сюда (28), (33), можно найти μ вдоль BC, используя условия (20) в точке B.

Поскольку решение (28), (33), (34) имеет особенность в точке $\mu=-1/2$, используем его только для малых μ и y.

Вдоль ударной волны BM при $y\approx 0$

$$\mu=cy^2,\quad 4c=-\sqrt{c+1/2},\qquad c\approx-0{,}15 \qquad (35)$$

При этом решение (33), (34) дает $\delta\approx 2cy^2$, $\mu_1=2cy^2-y^2/2$, $\nu\approx 0$, $\nu_1\approx-2cy^2+y^2/2$.

Условие непрерывности касательной составляющей скорости частиц на BM $æ'=0$, где $æ'=\nu-\nu_1+(\mu-\mu_1)\sqrt{2\delta-\mu-\mu_1}$.

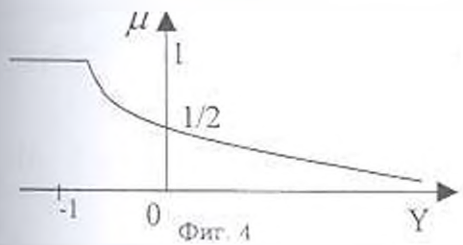
Вычисление дает $æ'\approx-1.2y^3$, т. е. $æ'$ достаточно мала. Вдали от точки B имеет место на ударной волне BC одномерное решение [4]

$$\delta=1+2\mu-\pi^2y^2(1+\mu)^2/2,\quad -y>>1,\ 2\delta-\mu+1=0$$

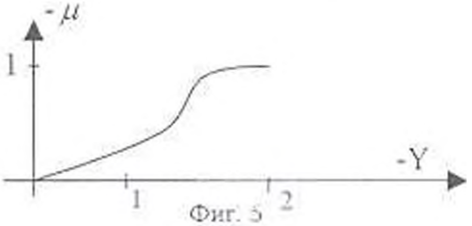
Отсюда получится на BC вдали от B

$$\mu=-1+\frac{3}{\pi^2y^2} \qquad (36)$$

Имея асимтотики (35), (36), можно начертить кривую $\mu=\mu(y)$ на ударной волне BC фиг. 5.



Фиг. 4



Фиг. 5

Найдем теперь коэффициент Γ для упругой среды. Нелинейный тензор упругих напряжений найдется по [1]

$$\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \left(K - \frac{2\mu}{3}\right)\frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \left(\mu + \frac{A}{4}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right) +$$

$$+ \frac{K - 2\mu - B/3}{2}\left[\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2 \delta_{ik} + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right] + \frac{A}{4}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial u_l}{\partial x_i} +$$

$$+ \frac{B}{2}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_l}\delta_{ik} + 2\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right) + C\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2 \delta_{ik} \qquad (37)$$

где $\delta_{ik} = 1$, $i = k$, $\delta_{ik} = 0$, $i \neq k$ по повторяющимся индексам проводится суммирование: $K = \lambda + 2\mu/3$; λ, μ — линейные упругие модули; A, B, C — нелинейные упругие модули.

Уравнения движения имеют вид

$$\rho\frac{\partial V_i}{\partial t} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_l \partial x_i} + \mu\Delta u_i + F_i, \quad V_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \qquad (38)$$

где согласно (37) $F_i = \dfrac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$

$$F_i = \left(\mu + \frac{A}{4}\right)\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}\frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k^2}\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + 2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) +$$

$$+ \left(K + \frac{\mu}{3} + \frac{1}{4}A + B\right)\left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right) + \left(K - \frac{2}{3}\mu + B\right)\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}\frac{\partial u_l}{\partial x_l} +$$

$$+ \left(\frac{A}{4} + B\right)\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right) + (B + 2C)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_l} \qquad (39)$$

Для получения формулы для нормальной скорости C_n нелинейной волны следует записать для (38), (39) условия совместности на характеристике и полагать

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c_n\delta, \quad \frac{\partial}{\partial x_k} n_k\delta$$

где n_i — единичный вектор нормали к волне, $\delta = \partial/\partial f$ есть производная по нормали к волне. Рассматривается плоская задача. Выберем ось x по нормали, y по касательной волне. Тогда уравнения (38), (39) дадут

$$-\left(C_n^2 - a^2\right)\delta u_x = \frac{c_n}{\rho_0}F_x, \quad -\left(C_n^2 - b^2\right)\delta u y = \frac{c_n}{\rho_0}F_y \qquad (40)$$

$$F_x = \frac{2}{c_n^2}\rho_0 A_1 u_x \delta, \; F_y = 0, \quad A_1 = \frac{1}{\rho_0}\left(2\mu + A + 3B + \frac{3}{2}K + C\right) \qquad (41)$$

Здесь c_n — скорость линейной волны, причем (41) дает для продольной упругой волны $c_n = a$. Из первого уравнения (38) для нелинейной волны в первом порядке

$$C_n = a + \Gamma V_x\ ,\ \Gamma = -\frac{A_1}{a^2} \qquad (42)$$

Таким образом, найден нелинейный коэффициент Γ для упругой среды Для жидкой следы [1] следует, что $A_1 < 0$, $\Gamma > 0$, а для типичной геометрически, как и физически нелинейной упругой среды по [41] – $A_1 > 0$, $\Gamma < 0$.

Автор благодарит член-корр. НАН Армении А.Г. Багдоева за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А. Г. Распространение волн в сплошных средах. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1981. 307 с.
2. M. Jean Legras Ecoulement conique au voisinage d'un point de jonction C. R. Acad. Sci. Paris. V. 234 (1952), p.181-185.
3. Булах Б. М. Нелинейные конические течения газа. М.: Наука,1970.
4. Багдоев А. Г., Гургенян А. А. Приближенное решение ряда нелинейных задач определения ударных волн в сжимаемой жидкости.// Изв. АН Арм ССР. Механика. 1968. Т. 21. №1. С. 39-56.
5. Багдоев А. Г. Некоторые нелинейные задачи движения сжимаемой жидкости. Ереван: Изд. АН Арм ССР, 1967. 263с.
6. Zahalak G. J. and M. K. Myers. Conical flow near singular rays. Journal of Fluid Mechanics, 1974, V. 63. №3. p. 537-56.
7. Багдоев А. Г. Даноян З. Н. Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке.//Ж. вычис. матем. и матем. физики. 1972. Т. 12. №6. С.512-529.
8. Багдоев А. Г. Решение линейной и нелинейной задач в окрестности точек касания фронтов волн. // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т.52. №3. с.45-54.
9. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. М. Теория волн. М.: Наука, 1979. 383с.
10. Багдоев А. Г. Саакян С. Г. Определение нелинейного решения в дифракционной волновой области для неоднородной упругой среды. Информационные технологии и управление, Ереван. 1999. №4. С.29-35.
11. Бабич В. М. Распространение линейных волн и каустики. //Уч. записки ЛГУ. 1958. №32. С.228-260.
12. Минасян М. М. О распространении слабых возмущений в магнитной газодинамике. // Докл. АН Арм ССР. 1972. 55. 123. С.273-280.

Горисский филиал Армянского государственного инженерного университета (АГИУ)

Поступила в редакцию 19.10.2001

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №1, 2002 Механика

УДК 550.341

О ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ПОДГОТОВКИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Хачикян А.С.

Ա. Ս. Խաչիկյան
Երկրաշարժի նախապատրաստության ֆենոմենոլոգիական մոդելների մասին

Երկրաշարժի առաջացման մասին գոյություն ունեցող տեսությունների և վարկածների քննարկման հիման վրա ներկայացված է երկրաշարժի նախապատրաստության պրոցեսի ֆենոմենոլոգիական մոդել: Չնայած հետազոտողները չունեն միասնական կարծիք երկրաշարժի առաջացման ֆիզիկայի, շարժիչ ուժերի, նախապատրաստության գործընթացի դինամիկայի և փուլերի վերաբերյալ, կատարված անալիզը ցույց է տալիս, որ առաջարկվող վարկածները ունեն բավականաչափ ընդհանուր հիմնական հատկություններ մեկ միասնական ֆենոմենոլոգիական մոդելով նկարագրելու համար: Ներկայացված մոդելում որպես ընդհանրական հատկություն ընդունված է նախապատրաստության պրոցեսում դեֆորմացիայի աճը և դեֆորմացիայի խտացման տեղամասերի (երկրաշարժի ապագա օջախի) առկայության գաղափարը:

Քննարկված են տարբեր ֆիզիկական բնույթի կանխանշանների առաջացման հնարավոր մեխանիզմները և նշված են դիտարկվող փուլերում սպասվող կանխանշանները նախապատրաստության յուրաքանչյուր փուլում: Առաջարկվող մոդելի ընձեռնած հնարավորությունները և հետագա զարգացման ուղղությունները ցուցադրված են օրինակներով:

A. S. Khachikyan
On Phenomenological models for earthquakes preparations

На основании анализа существующих теорий и гипотез о возникновении землетрясений представлена феноменологическая модель процесса подготовки землетрясений. Хотя нет единого мнения исследователей о физике, движущих силах, динамике и этапов процесса подготовки землетрясений, проведенный анализ показывает, что известные гипотезы обладают достаточно общими характерными чертами для их описания в рамках единой феноменологической модели. Предложенная модель основана на содержащемся во всех гипотезах предположении о росте деформации и образовании участков концентрации деформаций (прообраза будущего очага землетрясения) в процессе подготовки землетрясений. Обсуждены возможные механизмы возникновения предвестников разной физической природы и отмечены предвестники, ожидаемые на каждом этапе подготовки. Направление дальнейшего развития и открываемые моделью возможности иллюстрированы на примерах.

Процессы подготовки (ПП) землетрясений обсуждены многими исследователями в их связи с возможным прогнозом землетрясений при помощи наблюдаемых предвестников [1,2]. Высказаны разные идеи о сущности физических процессов, происходящих при подготовке землетрясений и их связи с наблюдаемыми при этом вблизи поверхности земли явлениями - предвестниками. Здесь делается попытка обобщенного феноменологического описания этих процессов.

1. Предположим что в некоторой области Ω земной коры протекает ПП, интенсивность которого можно описать функцией $f(x,t)$. Вследствие этого в любой точке земной коры, а также вблизи ее поверхности меняется значение параметра (характеристики) наблюдаемого физического поля $\Pi(x,t)$, который принято называть предвестником. Очевидно, что нам желательно иметь функциональную связь [3]

$$\Pi(x,t) = \int_{\Omega}\int_{0}^{t} f(\xi,\tau)\mathrm{K}(x,t,\xi,\tau)\,d\omega\, d\tau \qquad (1)$$

где $\mathrm{K}(x,t,\xi,\tau)$ - функция влияния (функция Грина) применительно к каждому предвестниковому явлению и к каждой гипотезе о физике ПП.

Даже неполное описание предложенных гипотез и их модификаций о ПП говорит об их большом количестве и многообразии. Количество и многообразие по их физической сущности наблюдаемых предвестников еще больше. Поэтому, как отмечено в [3], при построении модели и количественного описания ПП возникает необходимость построения многих сотен функционалов типа (1), что нецелесообразно по многим причинам. Особенно важно, что при этом не существует надежной базы для сравнения результатов, полученных согласно расчетам по разным гипотезам. Преодоление (уменьшение) этих трудностей и составляет цель настоящей работы.

2. Приведем краткое описание некоторых наиболее известных гипотез о ПП , особо выделяя те происходящие, по мнению авторов гипотез, процессы, которые могут быть связаны с возникновением наблюдаемых предвестников.

2.1. Гипотеза лавинно-неустойчивого трещинообразования (ЛНТ) [4]. Согласно представлениям авторов, очаг – сдвиговой разрыв, подготавливается развитием и взаимодействием большого числа сдвиговых трещин.

На первой стадии происходит однородное растрескивание по большому объему. Трещины далеки друг от друга. Среда статистически однородна. Имеет место внешнее однородное нагружение. Для больших магнитуд (M) процесс длится сотни или тысячи лет.

На второй стадии имеет место лавинное взаимодействие трещин. При достижении критической плотности разрывов взаимодействие трещин лавинно ускоряется. Поле напряжений неоднородно. Развивается сильнее только часть трещин согласно полям напряжений. Процесс может длиться десятки лет.

Третья стадия считается авторами стадией неустойчивости. Увеличение деформаций приводит к падению напряжений. Вследствие неоднородности свойств среды деформации стягиваются в узкую полосу (зону), где развиваются несколько крупных трещин. В остальной части трещины не развиваются (заживают). В узкой зоне большая плотность разрывов приводит к образованию магистрального разрыва. Время стадии не уточняется, однако ясно, что оно отождествляется со временем возможных форшоков - порядка одного года.

Из описания ясно, что причинами зарождения предвестников могут быть деформации (ε_g) и трещинообразование (C_r). В научной литературе именно с деформациями и трещинообразованием связывается появление почти всех предвестников. В первой стадии предвестники могут появляться в виде общего однородного тренда. Во второй стадии появление предвестников должно усиливаться и иметь неоднородный характер. В третьей же стадии появление предвестников должно выражать стягивание процессов в узкую очаговую зону.

2.2. Дилатантно-диффузионная модель землетрясения (ДД) [5].

Представления об очаге по этой гипотезе совпадают с представлениями модели ЛНТ. На первой длительной стадии происходит рост упругих напряжений, особо касательных $(\sigma_1 - \sigma_3)$, среда не меняется. На второй стадии из-за больших напряжений $(\sigma_1 - \sigma_3)$ возникают трещины отрыва. Имеет место объемная деформация — дилатансия. Поровое давление падает, идет осушение пород, прочность пород возрастает.

На третьей, диффузионной стадии вследствие падения порового давления вызывается диффузия воды в зону подготовки. Поровое давление увеличивается, прочность пород падает. Процесс заканчивается магистральным разрывом.

Представления этой гипотезы приведут, с точки зрения причин образования предвестников, к аналогичной гипотезе ЛНТ результатам. Разница состоит в предположении об изменениях флюидного режима, что может выражаться в вариациях электрического сопротивления пород и отношения скоростей продольных и поперечных волн.

2.3. Модель консолидации [6]. Согласно представлениям автора в конце длительного, регулярного состояния вследствие движения иерархической системы блоков происходит консолидация в некоторой очаговой зоне. В консолидированной области увеличивается жесткость среды. При критическом увеличении напряжений начинается распад — разрушение.

Таким образом, по представлениям модели длительный процесс затишья заменяется образованием зоны концентрации напряженний — прообраза будущего очага землетрясения. Постепенное увеличение напряжений — деформаций приводит сначала к частичному, потом и к катастрофическому разрушению. Причиной предвестников являются деформации и частичные разрушения, концентрированные в консолидированной зоне.

2.4 Модель упругой отдачи Рейда [2]. По известной теории Рейда, в несколько свободном изложении, вследствие действия внешних сил плиты земной коры движутся и сцепляются. В местах сцепления, препятствий или отличий жесткости пород растет напряжение, накопляется потенциальная (упругая) энергия. По исчерпании запаса прочности пород происходит разрушение — землетрясение. После землетрясения плиты возвращаются в менее напряженное состояние.

Причинами предвестников здесь могут быть усмотрены деформации (ε_{ij}), постепенно концентрирующиеся в очаговой области. Всегда можно предполагать, что деформации сопровождаются мелкими разрушениями — трещинами.

В эту схему, с небольшими изменениями можно включить многие модели: Лобковского Л.И. [7], скачкообразного движения [8], Мишина С.В. [9] и др.

Сюда же можно было бы включить и модель консолидации, которая была рассмотрена отдельно ввиду ее более подробной разработанности.

2.5. Модель подготовки землетрясения Уломова В.И. [10]. По представлениям Уломова В.И. первый этап подготовки землетрясения протекает в виде длительных упруго-пластических деформаций, сопровождающихся уплотнением большого объема (закрытие пор, трещин, деформация менее твердых включений). На втором этапе происходит относительно быстрая упругая деформация с уменьшением объема. На третьем этапе происходит пластическая деформация без изменения объема, которая завершается резким сдвиговым перемещением — землетрясением. К четвертому этапу автор относит процессы релаксации напряжений.

Причинами предвестниковых явлений в этом случае могут быть на первом, длительном этапе упруго-пластические деформации (ε_{ij}^{e}), закрытие пор и трещин (C_{cr}), неоднородные по большому объему деформации $(\varepsilon_{ij}(t,x))$ вследствие деформации менее твердых включений. На втором этапе эту роль выполняет упругое уменьшение объема (ε_{u}). На третьем, завершающем этапе процесс характеризуется пластическими деформациями (ε_{ij}^{p}).

2.6. Теплогазодинамические модели подготовки землетрясений. В эту группу, несмотря на значительные отличия, можно включить модель Осика Д.Г. [11] импульсивного газового дыхания Земли, модель Ризниченко Ю.В. [12] и теплогазодинамическую модель Пономарева А.С. [13].

По представлениям этих авторов образуются зоны повышенных напряжений (давлений) от вертикального движения земной коры и астеносферы или от проникновения в верхние слои коры флюидов повышенного давления и температуры от нижних слоев. Происходит расширение зоны повышенного давления, растут напряжения и при исчерпании запаса прочности окружающих зону пород происходит разрушение - землетрясение.

Предвестники в этих случаях могут образоваться вследствие деформаций (ε_{ij}), повышения температуры и давления, мелких разрушений при расширении зоны высокого давления (C_{cr}), изменений флюидного режима (L).

2.7. Модели, предполагающие фазовые или полиморфные превращения [14]. Эти процессы могут быть как основными, так и сопутствующими другим процессам подготовки. При фазовых или полиморфных превращениях породы претерпевают объемные деформации (ε_{ij}). Этапы и скорости всего процесса подробно не описаны, предполагается изменение температуры и давления. Основной причиной образования предвестников в этом случае могут быть деформации.

3. Анализируя описанные выше гипотезы, можно заметить много общего между ними. Все они на первом, длительном этапе (до 10^{3} лет) подготовки предполагают медленное нарастание деформаций — однородных или неоднородных, упругих или пластических, сопровождающиеся трещинообразованием или без этого. На втором этапе предполагается концентрация происходящих процессов в относительно небольшой области — очаге будущего землетрясения. Нарастание процессов приводит к разрушению. В некоторых гипотезах считаются принципиальными изменения в флюидном режиме пород, или других процессов, например, фазовых превращений. Описанные по разным гипотезам ход процессов подготовки землетрясения представим в виде таблицы 1.

Отвлекаясь от подробностей типа рода деформаций, отличия предполагаемых изменений флюидного режима и других, можно построить объединенную таблицу 2.

Таким образом, приходим к следующему общему, феноменологическому описанию процессов подготовки землятрясений.

На первом, длительном (сотни и более лет) этапе подготовки происходит однородное деформирование в большом объеме с возможным сопровождением однородного же трещинообразования. На втором, относительно коротком этапе (десятки лет), кроме того, возможно неоднородное изменение флюидного режима. На третьем этапе (от года до первых нескольких десятков лет) происходит усиление этих процессов непосредственно в очаговой зоне, что и в конечном итоге может привести к неустойчивости – образованию магистрального разрыва, землетрясения.

Таблица 1

Время до события (годы)	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}
ДНТ	$\varepsilon_{ij}(t), C_{cr}(t)$		$\varepsilon_{ij}(t,x), C_{cr}(t,x)$		$\varepsilon_{ij}(t,x), C_{cr}(t,x)$
ДД	$\varepsilon_{ij}(t)$,		$\varepsilon_{ij}(t,x), C_{cr}(t,x), L(t)$		$\varepsilon_{ii}(t,x)$
Консолидации	$\varepsilon_{ij}(t)$	$\varepsilon_{ij}(t,x)$		$\varepsilon_{ij}(t,x), C_{cr}(t,x)$	$\varepsilon_{ij}(t,x)$
Рейд и др.	$\varepsilon_{ij}(t)$		$\varepsilon_{ij}(t,x)$		$\varepsilon_{ij}(t,x), C_{cr}(t,x)$
Уломов	$\varepsilon_{ij}^{p}(t)$		$\varepsilon_{ij}(t,x)$.	$\varepsilon^{p}(t,x)$	
Теплогаз. модели	$\varepsilon(t), \varepsilon_{ii}(t)$		$\varepsilon_{ii}(t,x), \varepsilon_{ii}(t,x), L(t,x)$		$\varepsilon_{ii}(t,x), C_{cr}(t,x), L(t,x)$
Фазовые превр.	$\varepsilon_{ii}(t)$		$\varepsilon_{ii}(t,x)$		$\varepsilon_{ii}(t,x), C_{cr}(t,x)$

Таблица 2

Время до события (годы)	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}
Процессы подготовки	$\varepsilon_{ij}(t)$ $C_{cr}(t)$	$\varepsilon_{ij}(t,x)$ $C_{cr}(t,x)$ $L(t,x)$		$\varepsilon_{ij}(t,x)$ $C_{cr}(t,x)$ $L(t,x)$	

Согласно этому описанию основными предвестникообразующими факторами являются деформации, трещинообразование и изменение флюидного режима пород.

Хотя представления исследователей о механизмах образования предвестников очень разнообразны, большинство из них с деформациями связывают всю гамму предвестников, от геохимических до электромагнитных. С трещинообразованием связываются обычно (кроме деформаций) звуковые и электромагнитные эмиссии, а также изменения электропроводимости пород. Влияние изменений флюидного режима усматривается, в основном, на геохимические предвестники, теллурические токи, изменения скорости распространения волн.

4. Возвращаясь к функциональной связи (1), согласно выводам предыдущего пункта мы видим, что интенсивность $f(x,t)$ можно представить в виде трехмерного вектора. Компонентами этого вектора являются деформации, трещинообразование и вариации флюидного режима. Не касаясь здесь вопроса описания этих компонентов, отметим, что деформации являются тензорами второго ранга и поэтому запись (1) нужно воспринимать как чисто символическую. Приведенные ниже частные примеры иллюстрируют реальные формы функциональной связи (1).

4.1. Модель консолидации [6]. Эта модель является количественно наиболее разработанной. Для перемещений земной поверхности автором модели выведена формула

$$W = -\alpha\tau \iiint_{V} \left(v^{r}_{1,2} + v^{r}_{2,1}\right) dv_{\xi} \qquad (2)$$

где α – относительное изменение модуля сдвига по основному предположению модели, τ – напряжение на бесконечности, $v^{r}_{i,j}$ – функции Грина.

Исходя из формулы (2), с единых позиций исследованы перемещения поверхности земли и наклоны по глубине как предвестники. Поставлена и решена одна обратная задача сейсмического просвечивания для конкретного землетрясения. Знаменательно определение изменений вектора магнитной индукции. Кратко изложим ее суть.

Известно [15], что горные породы обладают некоторой начальной намагниченностью и свойством пьезомагнетизма. Вследствие этого происходящие деформации во время подготовки землетрясений приводят к изменению намагниченности пород. Это обнаруживается на поверхности Земли в виде изменения вектора магнитной индукции, рассматриваемое как предвестник.

Принимая закон пьезомагнетизма

$$\Delta \bar{I}_{i} = -\frac{3}{2} C \bar{I}_{j} S_{ij}$$

где C – пьезомагнитный коэффициент пород, $\bar{I}$ – вектор намагниченности, S_{ij} – девиатор деформаций, в [6] выведено приближенное соотношение

$$\Delta \bar{B} = \nabla \times \iiint \frac{\Delta \bar{I} \times \bar{R}}{R^{3}} dV$$

Здесь $\bar{B}$ – вектор магнитной индукции, ∇ – набла-оператор, R – расстояние наблюдаемой точки от элемента объема, где происходит процесс подготовки.

Это соотношение позволило в рамках модели консолидации произвести вычисления изменений вектора магнитной индукции и сравнивать их с действительно наблюдаемыми данными.

4.2. Модель дополнительной деформации. Для случая статических объемных деформаций в [16] для перемещений полупространства получено

$$
\begin{aligned}
U_x &= A\int_\Omega (x-\alpha)\left[R_1^{-3} + (3-4\nu)R_2^{-3} - 6z(z+\gamma)R_2^{-5}\right]\varepsilon_0 d\omega \\
U_y &= A\int_\Omega (y-\beta)\left[R_1^{-3} + (3-4\nu)R_2^{-3} - 6z(z+\gamma)R_2^{-5}\right]\varepsilon_0 d\omega \qquad (3) \\
U_z &= A\int_\Omega \left[(z-\gamma)R_1^{-3} - (3-4\nu)(z+\gamma)R_2^{-3} - 6z(z+\gamma)^2 R_2^{-5} + 2R_2^{-3}\right]\varepsilon_0 d\omega
\end{aligned}
$$

где $A = \dfrac{1+\nu}{4\pi(1-\nu)}$, $R_{1,2} = \left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z \mp \gamma)^2\right]^{\frac{1}{2}}$, $d\omega = d\alpha d\beta d\gamma$

ν – коэффициент Пуассона.

Там же приведены примеры вычислений перемещений по формулам (3) для дневной поверхности ($z = 0$), при $\varepsilon_0 = \mathrm{const}$ в заданной области.

На основании этих уравнений сделаны вычисления деформаций земной поверхности. Далее, принимая определенные простые формы активной области, получены упрощенные уравнения относительно конечного числа неизвестных – характеристик очаговой области. Сформирована обратная задача и сделан анализ одного частного решения [17].

Более подробное ознакомление с приведенными примерами, особенно хорошо разработанной моделью консолидации, показывает, насколько плодотворно определение полей деформаций при анализе гипотез процессов подготовки землетрясений.

Обобщая вышеизложенное, можно констатировать, что подавляющее большинство наиболее известных гипотез о физических процессах подготовки землетрясений допускает феноменологическое описание функциональным соотношением (1) физических процессов и их связи с наблюдаемыми предвестниками с представлением всех процессов в виде некоторых деформаций. Таким образом, феноменологическая модель подготовки землетрясений, основанная на функционале (1), имеет достаточную широту объятия идей. Примеры постановки и решения в рамках этой модели, прямой (определение величин предвестников при известном месте и интенсивности процессов подготовки) и обратной (определение места и интенсивности процессов подготовки при известных величинах предвестников) задач приведены в [3, 6, 17]. Очевидна также принципиальная возможность осуществления физической экспериментальной модели на этой основе.

Концепция предложенной модели также созвучна с нарастающей ролью механики сплошной среды в исследованиях землетрясений и других проблем геофизики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рикитаке Т. Предсказание землетрясений. М.: Мир, 1979. 388 с.
2. Касахара К. Механика землетрясений. М.: Мир, 1985. 264 с.
3. Хачикян А.С., Мкртчян М.С. Определение активной области подготовки землетрясений.// Изв. НАН Армении. Механика. 1995., Т.48. №1. С. 16-23.
4. Мячкин В.И. Процессы подготовки землетрясений. М.: Наука, 1978. 232 с.
5. Sholz C.H., Sykes L.R., Aggarwal Y.P. Earthquake Prediction: a Physical Basis. Science. 1973. V. 181, N 4102. P. 803-810.
6. Добровольский И.П. Механика подготовки тектонического землетрясения. Институт физики Земли АН СССР, М.: Наука, 1984. 189 с.
7. Лобковский Л.И. Геодинамика зон спрединга, субдукции. М.: Наука, 1988. 251 с.
8. Nur A. Nonuniform Friction as a Physical Basis for Earthquake Mechanics. a Review. // In: Proc. of Conference 2 Experimental Studies of Rock Friction Prediction. Menlo Park. California, 1977, p. 241.
9. Мишин С.В. Модель процесса землетрясения.//В кн.: Физические процессы в очагах землетрясений. М.: Наука, 1980. 166с.
10. Уломов В.И., Мавашев Б.З. О предвестнике сильного тектонического землетрясения. // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 2. С. 319-321
11. Осика Д.Г. О некоторых теоретических и практических следствиях изучения генетической сущности геохимических и гидрогеологических процессов в связи с сейсмичностью недр. // В кн.: Геодинамика и сейсмичность территории Дагестана, № 3 (21). Махачкала: ФАН. 1979. 97с.
12. Ризвиченко Ю.В. Энергетическая модель сейсмического режима.// Изв. АН СССР. Физика Земли. 1968. № 5. С. 3-19.
13. Пономарев А.С. Теплогазодинамическая модель коровых землетрясений. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 10. С. 100-112.
14. Калинин В.А. и др. Геодинамические эффекты физико-химических превращений в твердой среде. М.: Наука, 1989. 157 с.
15. Соболев Г.А. Основы прогноза землетрясений. М.: Наука, 1993. 314 с.
16. Хачикян А.С. О проблеме прогноза тектонических землетрясений.// Докл. АН Армении. 1991. Т. 92. № 5. С. 201-205.
17. Хачикян А.С., Казарян А.С. Об обратной задаче подготовки землетрясений.//Тр. конференции, посвященной 90-летию академика А.Г. Назарова, 1-4 июня, 1998, Гюмри. С. 314-318.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
14.12.2001

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №1, 2002 Механика

УДК 537.3

ОПТИМАЛЬНЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ НАГРЕВ ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ И ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА СТЕКЛЯННОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СОПРЯЖЕННОЙ С КОНИЧЕСКОЙ

Гачкевич А.Р., Гачкевич Н. Г., Казарян К.Б., Касперский З.И

Ա.Ռ. Գաչկևիչ, Ն.Գ. Գաչկևիչ, Կ.Բ. Ղազարյան, Զ.Ի. Կասպերսկի

Արտաքին միջավայրով և ջերմության աղբյուրներով կոնական թաղանթի և նրան համակցված կտոր առ կտոր համասեռ ապակե գլանային թաղանթի օպտիմալ տեխնոլոգիական տաքացումը

Աշխատանքում առաջարկված է գլանային և կոնական մասերով բաղադրյալ ապակե թաղանթի, ըստ լարումների օպտիմալ տեխնոլոգիական տաքացման ռեժիմի պարամետրերի հաշվարկի անալիտիկ հաշվարկային մեթոդաբանություն:

Տաքացումը պայմանավորված է արտաքին միջավայրով և անընդհատորեն բաշխված ջերմության ներքին աղբյուրներով:

A.R. Gachkevich, N.G. Gachkevich, K.B. Ghazaryan, Z.I. Kasperski

Optimal technological heating by external media and heat sources of piece-wise homogeneous glass cylindrical shell conjugated with conical one

В работе предложена численно-аналитическая методика расчета параметров оптимального по напряжениям режима технологического нагрева внешней средой и внутренними непрерывно распределенными источниками тепла составной стеклянной оболочки, состоящей из цилиндрической и конической частей.

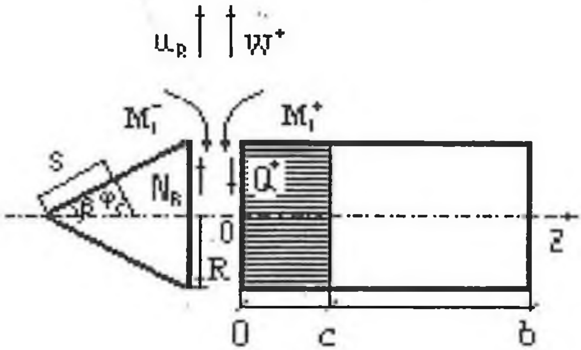
Во многих технологических процессах широко используется технологический нагрев, в частности, при изготовлении электровакуумных приборов. Основными элементами таких приборов являются, как правило, элементы из стекла. Низкие прочностные характеристики стекла особенно в условиях градиентного распределения температуры приводят к необходимости прогнозирования уровня напряжений в процессе термообработки с целью обеспечения значений напряжений, меньших от допустимых.

Рассмотрим задачу об определении оптимальных по напряжениям режимов осесимметричного нагрева свободной от внешнего силового нагружения конечной оболочки, состоящей из кусочно-однородной цилиндрической оболочки (которая имеет две однородные части длины l_1 и l_2) радиуса R, постоянной толщины $2h$, непрерывно сопряженной с круговой конической оболочкой той же толщины (фиг.1). Все три части рассматриваемой составной оболочки изготовлены из разных типов стекла (с различными теплофизическими и механическими характеристиками).

Точки вдоль меридиана конической оболочки описываем расстоянием s от вершины конуса, а положение точки вдоль меридиана цилиндрической части–осевой координатой z (которая отсчитывается от сечения $z = 0$ сопряжения с конической оболочкой). Для конической части оболочки

$z = (R / \sin\beta - s)\cos\beta$.

Оболочка нагревается конвективным способом со стороны внешней поверхности и непрерывно распределенными источниками тепла, которые вызваны внешним воздействием (в частности, электромагнитным излучением [3, 8]). На внутренней поверхности оболочки $\gamma_{(k)} = -h$ имеет место или конвективный теплообмен со средой $\gamma_{(k)} < R - h$, или теплоизоляция. Здесь индекс k введен для обозначения величин, которые относятся к однородным



Фиг. 1

составным частям оболочки: $k = 1$ для $-R\mathrm{ctg}\beta \le z < 0$, $k = 2$ для $0 \le z \le c$ и $k = 3$ для $c < z \le b$, а $\gamma_{(k)}$ – координата, которая определяет положение точки вдоль нормали к срединной поверхности ($-h \le \gamma_{(k)} \le h$).

Необходимо осуществить технологический целевой нагрев заданными источниками тепла и конвективным способом внешней поверхности $\gamma_{(k)} = h$ оболочки в выбранном сечении z_0 от постоянной начальной температуры T_{in} (при $t = 0$) до заданной максимальной T_0 за время t_0, выдержать эту температуру некоторый промежуток времени t_*, а потом охладить поверхность до конечной температуры $T_*(T_* \le T_0)$ за время t_* при некоторых ограничениях на параметры термонапряженного состояния и скорость нагрева. Такой режим нагрева является типичным для многих видов термообработки [2]. Функцией управления (искомой функцией) является температура $T^+(z_0,t) = T(z_0,h,t)$ внешней поверхности оболочки, которая удовлетворяет в соответствии с целью нагрева таким условиям:

$$T^+(z,0) = T_{in}; \quad T^+(z_0,t) = T_0 \text{ при } t_0 \le t \le t_{01}; \quad T^+(z_0,t_*) = T_*$$

$$V_{T1} \le \frac{dT^+(z_0,t)}{dt} \le V_{T2}; \left(\frac{dT^+(z_0,t)}{dt}\right)_{t=t_0} = 0; \left(\frac{dT^+(z_0,t)}{dt}\right)_{t=t_{01}} = 0 \qquad (1)$$

которые отображают цель нагрева и специфику технологии термообработки стеклянных изделий [1,2], а также заданные условия на функцию управления в определенные моменты времени. В условиях (1) V_{T1}, V_{T2} – заданные допустимые скорости нагрева, а $t_{01} = t_0 + t_u$.

Примем, что на всем промежутке нагрева $[0, t_*]$ параметры напряженного состояния (меридиональные $\sigma_{1,k}$ и кольцевые $\sigma_{2,k}$ температурные напряжения на внешней $(\sigma^+_{1,k}, \sigma^+_{2,k})$ и внутренней $(\sigma^-_{1,k}, \sigma^-_{2,k})$ поверхностях) являются меньшими от допустимых, т.е. выполняются ограничения:

$$\sigma^{\pm}_{01,k} \le \sigma^{\pm}_{1,k} \le \sigma^{\pm}_{*1,k}, \sigma^{\pm}_{02,k} \le \sigma^{\pm}_{2,k} \le \sigma^{\pm}_{*2,k} \text{ при } T_{i*} \le T \le T_0 \quad (2)$$

где $\sigma^{\pm}_{01,k} \le 0, \sigma^{\pm}_{02,k} \le 0, \sigma^{\pm}_{*1,k} \ge 0, \sigma^{\pm}_{*2,k} \ge 0$.

Сформулированная задача при приведенных ограничениях является задачей оптимального управления, которая имеет множество решений [4]. Для выбора нужного решения за критерий оптимальности принимаем условие минимума функционала максимальных нормальних напряжений

$$\begin{gathered} F = \max\left[\sigma_{1,k}\left(z, \gamma_{(k)}, t\right), \sigma_{2,k}\left(z, \gamma_{(k)}, t\right)\right] \\ -R\text{ctg}\beta \le z \le b, h \le \gamma_{(k)} \le h, 0 \le t \le t_* \end{gathered} \quad (3)$$

(который для стеклянных оболочек (или изготовленных из материалов с механическими свойствами, близкими к стеклу) обеспечивает ведение процесса нагрева при минимальном уровне напряженного состояния в каждый момент времени [11]).

Приведенная задача оптимизации сводится к нахождению экстремалей функционала (3) на множестве допустимых функций T^*, $\sigma_{1,k}$, $\sigma_{2,k}$, которые удовлетворяют условиям (1), (2), а также соответствующим уравнениям термомеханики (связывающим механические напряжения с температурным полем) и заданным начальным и граничным тепловым и механическим условиям.

Методику решения такой оптимизационной задачи строим на основе обобщения известной методики оптимизации режимов нагрева для кусочно-однородной оболочки [5], которая состоит из частей одинаковой геометрии. В упомянутой методике для реализации этапа поиска условного минимума функционала (3) используем метод локальных вариаций [15] в пространстве состояний функции управления. Такой способ оптимизации состоит из двух итерационных процессов: процесса варьирования значения функции управления $T^* \equiv \{f(t_i)\}$ в дискретные моменты времени при фиксированном шаге варьирования δ и процесса дробления этого шага.

В приближениях искомую функцию управления $f_{n-1}(t_i)$ выбираем так, чтобы выполнялись условия (1) и ограничения (2). При этом необходимо иметь решение прямой задачи, т.е. иметь значение температуры и напряжений при заданных условиях теплообмена. Выполнение ограничений (2) осуществляется путем сравнения компонент напряжений, определенных численно-аналитическим методом с прямой задачи, с заданными. Для определения последующего приближения функции управления $f_n(t_i)$ необходимо для трех значений $f_{n-1}(t_i) \pm \delta_{n-1}$, $f_{n-1}(t_i)$ этой функции (полученной в предыдущем приближении) вычислить с использованием решения прямой задачи значения критерия оптимальности (3). Шаг δ_{n-1} варьирования (достаточно малое положительное число, постоянное для конкретного n) при $n = 2$ принимаем практически равным максимальному градиенту функции управления в начальном приближении. За искомую функцию $f_n(t_i)$ выбираем ту, для которой значение критерия (3) является минимальным и выполняются условия (1), (2).

Последующие приближения функции управления получаются с использованием предыдущего алгоритма с делением шага $\delta_n = \delta_{n-1}/2$, $n = 2,3,4,...$ Итерационный процесс продолжается до выполнения следующего условия:

$$\{f_{n+1}(t_i)\} - \{f_n(t_i)\} \leq \varepsilon \tag{4}$$

где ε –заданная малая величина, $\varepsilon << \delta_0$.

Поиск условного минимума функционала (3) минимума максимальных нормальних напряжений осуществляем путем сравнения напряжений в области изменения γ, z (у фиксированных сечениях по оси z с выбранным шагом $\Delta z = 0{,}001$ м и шагом $\Delta\gamma = 0{,}002$ м по координате γ), которые вычисляем при известном температурном поле. Сечение $z = z_* = \text{const}$, в котором напряжения являются максимальными, назовем рассчетным.

Область поиска условного минимума функционала (3) существенно сужается (т.е. значительно уменьшаем необходимое количество решений прямых задач в области изменений γ, z) при использовании в алгоритме оптимизации упомянутого рассчетного сечения, значение координаты которого находим численно, анализируя распределение напряжений в составных частях оболочки при нулевом приближении функции управления. Его принимаем фиксированным для конкретного δ при всех последующих вариациях и уточняем при изменении δ (дроблении шага по δ) на основании уже известной функции управления для предыдущего δ.

Для предложенного итерационного алгоритма оптимизации существенным является выбор начального приближения значений функции управления, который определяет сходимость итерационного процесса. Для построения такого приближения разработан итерационный алгоритм, в котором в качестве исходной функции управления использована оптимальная (по напряжениям) температура внешней поверхности при конвективном нагреве однородной сферической оболочки [6] с последующим ее уточнением методом локальных вариаций.

В приведенном алгоритме оптимизации для определения начального и k-го приближения функции управления используется решение прямой задачи. Отметим, что такая задача может быть сформулирована на основании произвольной термомеханической теории. Известно [16], что с изменением температуры в границах, рассматриваемых в работе температур ($0^\circ C - 460^\circ C$), коэффициенты линейного теплового расширения (КЛТР) разных технических стеклянных материалов, что используются в электровакуумном производстве, значительно изменяются, а коэффициенты температуропроводности, Пуассона и модуль Юнга практически являются постоянными [1]. Изменение КЛТР значительно влияет на термоупругое состояние [1] кусочно-однородных стеклянных конструкций. Поэтому в рассматриваемой задаче для описания полей температуры и напряжений будем исходить из теории несвязанной термоупругости при зависимых от температуры КЛТР [12]. При этом, температурное поле в оболочке описывается следующим уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 T_k}{\partial \gamma_{(k)}^2} + P_k^2 T_k = -\frac{Q_{*k}}{\lambda_k} \tag{5}$$

при начальном условии

$$T_k\left(z,\gamma_{(k)},0\right) = T_{in}\left(z,\gamma_{(k)}\right) \equiv \mathrm{const} \tag{6}$$

и тепловых условиях на внешней и внутренней поверхностях оболочки соответственно

$$\begin{gathered} T_k\left(z,\gamma_{(k)},t\right) = T_k^+(z,t) \quad \text{при } \gamma_{(k)} = h \\ \frac{\partial T_k}{\partial \gamma_{(k)}} + H_k^-(T_k - T_c) = 0 \quad \text{при } \gamma_{(k)} = -h \end{gathered} \tag{7}$$

где $P_k^2 = \Delta_k - \frac{1}{a_k}\frac{\partial}{\partial t}, \Delta_1 = \frac{1}{s\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(s\cos\varphi\frac{\partial}{\partial s}\right)\right], \quad \Delta_2 = \Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (8)

$z = \left(\frac{R}{\sin\beta} - s\right)\cos\beta$ (для конической части оболочки), $Q_{*k}\left(z,\gamma_{(k)},t\right)$ – плотность источников тепла, a_k, λ_k – коэффициенты температуропроводности и теплопроводности составных частей, H_k^- – относительный коэффициент теплоотдачи поверхности $\gamma_{(k)} = -h$, $T_c(t)$ – температура внутри среды $\gamma_{(k)} < R - h$. Отметим, что плотность источников является заданной функцией.

Примем, что в областях контакта разнородных частей оболочки выполняются условия идеального теплового и механического сопряжения [13]:

$$T_k = T_{k+1}; \lambda_k \frac{\partial T_k}{\partial \xi} = \lambda_{k+1}\frac{\partial T_{k+1}}{\partial \xi} \quad \text{при } z = 0, z = c \tag{9}$$

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{k+1}; \bar{\sigma}_{\xi,k} = \bar{\sigma}_{\xi,k+1} \quad \text{при } z = 0, z = c \tag{10}$$

где $\bar{u}$ – вектор перемещения; $\bar{\sigma}_{\xi,k}$ – вектор напряжений, ξ – внешняя нормаль к плоскости сечения одной из контактирующих оболочек.

Механические граничные условия могут соответствовать как заданным напряжениям, так и перемещениям или иметь смешанный характер [6, 12, 13].

Для получения приближенного решения задачи теплопроводности, удобного для использования в используемом алгоритме оптимизации, аппроксимируем распределение температуры по толщинной координате $\gamma_{(k)}$ кубическим полиномом вида

$$T_{(k)}\left(z,\gamma_{(k)},t\right)=\sum_{i=1}^{4} b_{i-1,k}(z,t)\gamma_{(k)}^{i-1} \qquad (11)$$

Функции $b_{i-1,k}(z,t)$ выразим через усредненные характеристики температурного поля по толщине оболочки [14]

$$T_{p,k}=\frac{2p-1}{2h^{p}}\int_{-h}^{h}T_k\gamma_{(k)}^{p-1}d\gamma_{(k)},\quad p=1,2 \qquad (12)$$

и заданные граничные условия. Уравнение для определения усредненных характеристик $T_{p,k}$ получим, умножив уравнение теплопроводности (5) на $\gamma_{(k)}^{p-1}$ и проинтегрировав по этой координате с учетом соотношений (12). При этом для усредненных характеристик $T_{1,k}$, $T_{2,k}$ получаем следующие системы уравнений при конвективном теплообмене:

$$\begin{aligned}&\left(\Delta_k-\frac{1}{a_k}\frac{\partial}{\partial t}\right)T_{1,k}-2R^{*}_{1,k}T_{1,k}-2R^{*}_{2,k}T_{2,k}=-W_{1,k}-3\left(R^{*}_{4,k}T^{+}+R^{*}_{5,k}T^{-}_{c}\right)\\&\left(\Delta_k-\frac{1}{a_k}\frac{\partial}{\partial t}\right)T_{2,k}-6R^{*}_{3,k}T_{2,k}-6R^{*}_{2,k}T_{1,k}=-W_{2,k}-15\left(R^{*}_{7,k}T^{+}-R^{*}_{6,k}T^{-}_{c}\right)\end{aligned} \qquad (13)$$

и теплоизоляции:

$$\begin{aligned}&\left(\Delta_k-\frac{1}{a_k}\frac{\partial}{\partial t}\right)T_{1,k}-2/h^{2}T_{1,k}-5/\left(3h^{2}\right)T_{2,k}=-W_{1,k}-2/h^{2}T^{+}\\&\left(\Delta_k-\frac{1}{a_k}\frac{\partial}{\partial t}\right)T_{2,k}-5/h^{2}T_{1,k}-20/\left(3h^{2}\right)T_{2,k}=-W_{2,k}-5/h^{2}T^{+}\end{aligned} \qquad (14)$$

где

$$R^{*}_{1,k}=3\frac{\left(3+Bi^{-}_{k}\right)}{h^{2}R^{*}_{8,k}};\ R^{*}_{2,k}=\frac{15}{2h^{2}R^{*}_{8,k}};\ R^{*}_{3,k}=-5\frac{\left(2+Bi^{-}_{k}\right)}{h^{2}R^{*}_{8,k}};\ R^{*}_{4,k}=\frac{\left(6+Bi^{-}_{k}\right)}{h^{2}R^{*}_{8,k}}$$

$$R^{*}_{5,k}=\frac{Bi^{-}_{k}}{h^{2}R^{*}_{8,k}};\ R^{*}_{6,k}=R^{*}_{5,k};\ R^{*}_{7,k}=\frac{\left(6+Bi^{-}_{k}\right)}{h^{2}R^{*}_{8,k}};\ R^{*}_{8,k}=9+2Bi^{-}_{k}$$

$Bi^{-}_{k}=H^{-1}_{k}h$ – коэффициент Био, H^{-}_{k} – относительный коэффициент теплоотдачи с боковой поверхности $\gamma_{(k)}=-h$,

$$W_{1,k}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}W_k\left(z,\gamma_{(k)},t\right)d\gamma_{(k)},\quad W_k=\lambda_k^{-1}Q_{*k}\left(z,\gamma_{(k)},t\right)$$

$$W_{2,k}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}W_k\left(z,\gamma_{(k)},t\right)d\gamma_{(k)}$$

Неизвестные коэффициенты $b_{i-1,k}$ аппроксимирующего полинома (11) определяем из системы уравнений, которую получаем непосредственно подстановкой представлений (11) в существующие граничные условия и соотношения (12). Эти коэффициенты имеют следующий вид соответственно для конвективного теплообмена и теплоизоляции:

$$\begin{aligned}
b_{0,k}&=\left[1+\frac{h^2}{3}R^*_{1,k}\right]T_{1,k}+\frac{h^2}{3}R^*_{2,k}T_{2,k}-\frac{h^2}{2}\left(R^*_{4,k}T^++R^*_{5,k}T_c^-\right)\\
b_{1,k}&=\frac{3h}{5}R^*_{2,k}T_{1,k}+\left[\frac{1}{h}-\frac{3h}{5}R^*_{3,k}\right]T_{2,k}-\frac{3h}{2}\left(R^*_{7,k}T^+-R^*_{6,k}T_c^-\right)\\
b_{2,k}&=-R^*_{1,k}T_{1,k}-R^*_{2,k}T_{2,k}+\frac{3}{2}\left(R^*_{4,k}T^++R^*_{5,k}T_c^-\right)\\
b_{3,k}&=-\frac{1}{h}R^*_{2,k}T_{1,k}+\frac{1}{h}R^*_{3,k}T_{2,k}+\frac{5}{2h}\left(R^*_{7,k}T^+-R^*_{6,k}T_c^-\right)
\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}
b_{0,k}&=\frac{4}{3}T_{1,k}+\frac{5}{18}T_{2,k}-\frac{1}{3}T^+,\ b_{1,k}=\frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}T_{1,k}+\frac{5}{3}T_{2,k}-\frac{1}{2}T^+\right]\\
b_{2,k}&=\frac{1}{h^2}\left[T^+-T_{1,k}-\frac{5}{6}T_{2,k}\right],\ b_{3,k}=\frac{1}{h^3}\left[\frac{5}{6}T^++\frac{5}{6}T_{1,k}-\frac{10}{9}\right]
\end{aligned}\tag{16}$$

Используя выражения (11), (12), начальные условия (6) и условия сопряжения (9), получаем, что условия (6), (9) эквивалентны следующим условиям на функции $T_{1,k}$, $T_{2,k}$:

$$T_{1,k}=T_{in},\ T_{2,k}=0,\ \frac{\partial T_{1,k}}{\partial t}=0,\ \frac{\partial T_{2,k}}{\partial t}=0\ \text{при}\ t=0\tag{17}$$

$$\begin{aligned}
&T_{1,k}=T_{1,k+1},\ T_{2,k}=T_{2,k+1},\ \lambda_k\frac{\partial T_{1,k}}{\partial\xi}=\lambda_{k+1}\frac{\partial T_{1,k+1}}{\partial\xi}\\
&\lambda_k\frac{\partial T_{2,k}}{\partial\xi}=\lambda_{k+1}\frac{\partial T_{2,k+1}}{\partial\xi}\ \text{при}\ t=0
\end{aligned}\tag{18}$$

где $\vec{\xi}$ – внешняя нормаль к поверхности сечения одной из контактирующих оболочек.

В рассматриваемых осесимметричных задачах уравнения теплопроводности и термомеханики удобно записать в канонических координатах [6]. Тогда $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=\Delta\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial s}\left(r\frac{\partial}{\partial s}\right)$, $A_1=1$, $A_2=r(s)$, где $r(s)$ – радиус поперечного сечения оболочки, т.е. радиус паралелли; s – длина меридиана, что отсчитывается от вершины конической оболочки, причем $0\le s\le R/\sin\beta$ для конической части, а $s=R/\sin\beta+z$ для цилиндрической. Здесь A_1, A_2–коэффициенты первой квадратической формы срединной поверхности. Выражение для $\Delta_k (k=\overline{1,3})$ получим, подставляя $r(s)=s\cos\varphi$ для конической части оболочки и $r(s)=R$ –для цилиндрической.

Система уравнений (13), (14) в канонических координатах r, s будет системой дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Для определения ее решения используем метод сеток при безусловно устойчивой неявной разностной схеме [7]. Пространственно-временную область изменения независимых величин s, t разобьем сеткой на прямоугольники с шагом Δs по меридиональной координате s и шагом Δt по времени t. Непрерывное распределение функций $T_{1,k}$, $T_{2,k}$ в этой области заменим дискретными значениями в узлах сетки. Система дифференциальных уравнений в частных производных аппроксимируется конечно-разностными выражениями с порядком ошибки $O(\Delta s^2+\Delta t)$, а начальные и граничные условия – с порядком погрешности $O(\Delta s)$. Эти выражения для всех точек дискретизации составляют систему алгебраических уравнений для определения величин $T_{1,k}(s_n,t_m)$, $T_{2,k}(s_n,t_m)$ на каждом временном слое. Сетка описана следующими зависимостями: $s_n=n\cdot\Delta s$, $t_m=m\cdot\Delta t$, $0\le n\le N$, $0\le m\le M$, где N,M – избранное количество узлов соответственно по координате s с шагом Δs и времени t с шагом Δt.

Используя дискретные значения интегральных характеристик, на основании соотношений (11), (15), (16) определяем температуру в узлах сетки. Потом, исходя из структуры общих решений ключевых уравнений механики для конической и цилиндрической оболочек [6, 12, 13], а также аппроксимаций температурной зависимости коэффициента температурного расширения при помощи кусочно-линейных функций [7], определяем дискретные значения ключевых функций, усилий, моментов и напряжений для каждого узла s_n, t_m.

Во многих случаях кусочно-однородные стеклянные оболочки изготавливаются из материалов с близкими теплофизическими характеристиками. Для одинаковой толщины оболочек при независимых от координаты s источниках тепла могут буть построены эффективные режимы целевого нагрева однородной температурой внешней среды (которая зависит только от времени t). В этом случае изменение температуры внешней среды, и как следствие температуры внешней поверхности, вдоль меридиональной координаты s незначительно и им можно пренебречь. Поэтому можно принять, что температура в каждой составной части оболочки является функцией толщины $\gamma_{(k)}$ и времени t, а перемещения и напряжения - функциями времени и координат $\gamma_{(k)}$, s. При этом, значительно упрощается решение прямых задач при незначительной погрешности значений оптимальной температуры внешней поверхности. В этом случае системы дифференциальных уравнений (13), (14) будут системами обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, т.е.:

$$\begin{aligned}
&\frac{dT_{1,k}}{dt}+2a_k R^*_{1,k}T_{1,k}+2a_k R^*_{2,k}T_{2,k}=a_kW_{1,k}+3a_k(R^*_{4,k}T^+ + R^*_{5,k}T^-_c)\\
&\frac{dT_{2,k}}{dt}+6a_k R^*_{2,k}T_{1,k}+6a_k R^*_{3,k}T_{2,k}=a_kW_{2,k}+15a_k(R^*_{7,k}T^+ - R^*_{6,k}T^-_c)
\end{aligned} \qquad (19)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{dT_{1,k}}{dt}+\frac{2a_k}{h^2}T_{1,k}+\frac{5a_k}{3h^2}T_{2,k}=a_kW_{1,k}+\frac{2a_k}{h^2}T^+\\
&\frac{dT_{2,k}}{dt}+\frac{5a_k}{h^2}T_{1,k}+\frac{20a_k}{3h^2}T_{2,k}=a_kW_{2,k}+\frac{5a_k}{h^2}T^+
\end{aligned} \qquad (20)$$

Решение такой системы можно найти более эффективно методом наименьших квадратов [10] при конечно-элементной аппроксимации функции $T^+(t)$ (в сравнении с вышеизложенным разностным относительно затрат машинного времени и оперативной памяти компьютера). При этом существенно упрощается процедура численного определения параметров термонапряженного состояния составной оболочки (процедура получения решения прямой задачи), которая используется в предложенном алгоритме оптимизации. В данном случае системы дифференциалных уравнений (19), (20) для определения температуры в операторном виде запишутся:

$$Au=f \qquad (21)$$

где $u=(T_{1,k},T_{2,k})^T$, $f=(f_{1,k},f_{2,k})^T$, $A-$соответствующий дифференциальный оператор, $f_{1,k}$, $f_{2,k}$ –правые части систем (19), (20), символом "T" обозначены транспонированные матрицы. Тогда нахождение решения систем сводится к минимизации функционала

$$I(u)=\int_0^{t_*}(Au-f)^T(Au-f)\,dt \qquad (22)$$

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений функций $T^i_{1,k}$, $T^i_{2,k}$ в узлах разбиения интервала $0\le t\le t_*$ точками $t_i=it_*/N$, $i=\overline{1,N-1}$ на $N-1$ элемент, которую решаем методом Гаусса в модификации Холесского. Имея значения усредненной температуры $T^i_{1,k}$ и температурного момента $T^i_{2,k}$, с помощью соотношений (11), (15), (16) вычисляем температуру для момента времени t_i в произвольной точке оболочки.

В рассматриваемой осесимметричной задаче для свободной от внешней силовой нагрузки составной оболочки напряженное состояние характеризуется осевыми $\sigma_{1,k}$ и кольцевыми $\sigma_{2,k}$ температурными напряжениями, которые связаны с усилиями $N_{1,k}$, $N_{2,k}$ и изгибающими моментами $M_{1,k}$, $M_{2,k}$ соотношениями [6]:

$$\sigma_{1,k}=\frac{1}{2h}\left(N_{1,k}+3M_{1,k}\frac{\gamma_{(k)}}{h^2}\right)+\frac{E_k}{1-\nu}\left(e_{t,k}+\frac{\gamma_{(k)}}{h}e_{t,k}-\Phi_k\right)$$

$$\sigma_{2,k}=\frac{1}{2h}\left(N_{2,k}+3M_{2,k}\frac{\gamma_{(k)}}{h^2}\right)+\frac{E_k}{1-\nu}\left(e_{t,k}+\frac{\gamma_{(k)}}{h}e_{t,k}-\Phi_k\right) \qquad (23)$$

где $e_{t,k}=\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}\Phi_k d\gamma_{(k)}$, $e_{t,k}=\frac{3}{2h^2}\int\limits_{-h}^{h}\gamma_{(k)}\Phi_k d\gamma_{(k)}$, $\Phi_k(t)=\int\limits_{T_{in}}^{T_k}\alpha_{t,k}(\xi)d\xi$ – суммарные чисто тепловые деформации; E_k –модуль упругости составных частей.

Для конической части оболочки эти усилия и моменты определяем с известного ключевого уравнения [9]. При этом они имеют следующий вид:

$$N_1^{(1)}=c_1(\tau)\frac{4}{\xi^2}\left(\mathrm{ber}\ \xi-\frac{2}{\xi}\mathrm{bei}'\ \xi\right)+c_2(\tau)\frac{4}{\xi^2}\left(-\mathrm{bei}\ \xi-\frac{2}{\xi}\mathrm{ber}'\ \xi\right)$$

$$N_2^{(1)}=c_1(\tau)\left(\frac{2}{\xi}\mathrm{ber}'\ \xi-\frac{4}{\xi^2}\mathrm{ber}\ \xi+\frac{8}{\xi^3}\mathrm{bei}'\ \xi\right)+$$

$$+c_2(\tau)\left(-\frac{2}{\xi}\mathrm{bei}'\ \xi+\frac{4}{\xi^2}\mathrm{bei}\ \xi+\frac{8}{\xi^3}\mathrm{ber}'\ \xi\right)$$

$$M_1^{(1)}=c_1(\tau)\left\{-\frac{2h}{c_0}\left[(\nu-1)\left(-\frac{4}{\xi^2}\mathrm{bei}\ \xi-\frac{8}{\xi^3}\mathrm{ber}'\ \xi\right)-\frac{2}{\xi}\mathrm{bei}'\ \xi\right]\right\}+$$

$$+c_2(\tau)\left\{\frac{2h}{c_0}\left[(\nu-1)\left(\frac{4}{\xi^2}\mathrm{ber}\ \xi-\frac{8}{\xi^3}\mathrm{bei}'\ \xi\right)+\frac{2}{\xi}\mathrm{ber}'\ \xi\right]\right\}-\frac{(1+\nu)}{h}D_1^{(1)}e_{t}^{(1)} \qquad (24)$$

$$M_2^{(1)}=c_1(\tau)\left\{-\frac{2h}{c_0}\left[(1-\nu)\left(-\frac{4}{\xi^2}\mathrm{bei}\ \xi-\frac{8}{\xi^3}\mathrm{ber}'\ \xi\right)-\frac{2\nu}{\xi}\mathrm{bei}'\ \xi\right]\right\}+$$

$$+c_2(\tau)\left\{\frac{2h}{c_0}\left[(1-\nu)\left(\frac{4}{\xi^2}\mathrm{ber}\ \xi-\frac{8}{\xi^3}\mathrm{bei}'\ \xi\right)+\frac{2\nu}{\xi}\mathrm{ber}'\ \xi\right]\right\}-\frac{(1+\nu)}{h}D_1^{(1)}e_{t}^{(1)}$$

$$Q_1^{(1)}=N_1^{(1)}\mathrm{tg}\varphi$$

где $\xi=\sqrt{\frac{c_0\mathrm{ctg}\beta}{2h}s}$; $D_1^{(k)}=\frac{2E^{(k)}h^3}{3(1-\nu^2)}$ - изгибная жесткость, φ – угол между нормалью и осью вращения, $\beta=\pi/2-\varphi$; $\mathrm{ber}\xi$, $\mathrm{bei}\xi$, $\mathrm{ber}'\xi$, $\mathrm{bei}'\xi$ – функции Кельвина и их производные; $c_1(t)$, $c_2(t)$ – постоянные интегрирования (функции времени); $\mu = \sqrt{\frac{c_0^2 R^2}{4h^2} - \nu^2} \approx \frac{c_0 R}{2h}$; $c_0^2 = 12\left(1 - \nu^2\right)$; ν – коэффициент Пуассона.

Примем, что на краю цилиндрической оболочки $z = l_1 + l_2$ выполняются условия жесткого защемления

$$N_{1,3} = 0, \ \frac{\partial W_{0,3}}{\partial x} = 0, \ W_{0,3} = e_{t,3} \qquad (25)$$

а в сечениях сопряжения разнородных частей составной оболочки–условия идеального механического сопряжения , которые в усилиях и моментах запишутся [9]:

$$\begin{aligned} N_R &= N_{1,1}\cos\varphi + Q_{1,1}\sin\varphi = Q^{(2)}; M_{1,1} = M_{1,2}; \theta^{(1)} = \theta^{(2)}; Q^{(2)} = Q^{(3)} \\ u_R &= R\left\{\frac{N_{2,1} - \nu N_{1,1}}{2E_1 h}\right\} = W^{(2)}; M_{1,2} = M_{1,3}; \theta^{(2)} = \theta^{(3)}; W^{(2)} = W^{(3)} \end{aligned} \qquad (26)$$

где N_R, u_R – радиальные усилия и перемещения в конической оболочке: $\theta^{(k)}$ – угол поворота нормали к срединной поверхности; $x = a_1 z / R$, $a_1^4 = 3\left(1 - \nu^2\right)/4h^2$, $W_{0,k} = W^{(k)} \ / \ R$ – прогиб цилиндрической оболочки.

Напряженное состояние цилиндрической части характеризуется отличным от нуля усилием $N_{2,k}$, изгибающими моментами $M_{1,k}$, $M_{2,k}$ и перерезывающими силами $Q^{(k)}$, где

$$\begin{aligned} N_{2,k} &= D_{0,k}\left(W_{0,k} - e_{t,k}\right) \\ M_{1,k} &= -\frac{D_{1,k}}{h}\left[\frac{a_1^2 h}{R}\frac{\partial^2 W_{0,k}}{\partial x^2} + (1+\nu)e_{t,k}\right] \\ M_{2,k} &= -\frac{D_{1,k}}{h}\left[\frac{\nu a_1^2 h}{R}\frac{\partial^2 W_{0,k}}{\partial x^2} + (1+\nu)e_{t,k}\right] \\ Q^{(k)} &= -D_{1,k}\frac{a_1^3}{R^2}\frac{\partial^3 W_{0,k}}{\partial x^3} \end{aligned} \qquad (27)$$

Здесь $k = 2,3$; $D_{0,k} = 2E_k h$ – жесткость на растяжение. $W_{0,k}$ – функция прогибов, что удовлетворяет известному дифференциальному уравнению [6,13]

$$\frac{\partial^4 W_{0,k}}{\partial x^4} + 4\left(W_{0,k} - e_{t,k}\right) = 0 \qquad (28)$$

При известных $e_{t,k}$ решение этого уравнения запишется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
W_{0,k}(x,t) &= K_{1,k}(t)e^{x}\cos x + K_{2,k}(t)e^{x}\sin x + K_{3,k}(t)e^{-x}\cos x \\
&+ K_{4,k}(t)e^{-x}\sin x + e_{t,k}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Неизвестные функции времени $K_{i,k}\left(i=\overline{1,4}\right)$ и $c_j(j=1,2)$, которые входят в (29) и выражения для усилий и моментов конической оболочки (24), определяются в каждый момент времени из условий механического сопряжения (26) и граничных условий (25).

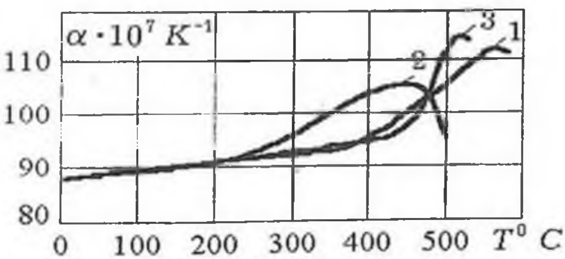
В качестве примеров найдены оптимальные по напряжениям режимы однородного нагрева внешней средой и заданными источниками тепла (постоянной плотности) свободной от силового нагружения оболочки длиной $2R$, состоящей из кусочно-однородной цилиндрической части с радиусом $R=0{,}125$" и толщиной $0{,}007$", гладко сопряженной с круговой конической оболочкой (фиг. 1). Оболочка изготовлена из материала со следующими физико-механическими характеристиками [1]:

$E_1 = 65{,}4\ ГПа$; $E_2 = 75{,}6\ ГПа$; $E_3 = 63{,}3\ ГПа$

$\lambda_1 = 1{,}63$ Вт/(мK); $\lambda_2 = 0{,}065$ Вт/(мK); $\lambda_3 = 0{,}74$ Вт/(мK)

$c_1 = 795$ Дж/(кгK); $c_2 = 339$ Дж/(кгK); $c_3 = 736$ Дж/(кгK)

$\rho_1 = 2560$ кг/м^3, $\rho_2 = 4080$ кг/м^3; $\rho_3 = 2800$ кг/м^3, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu = 0{,}215$

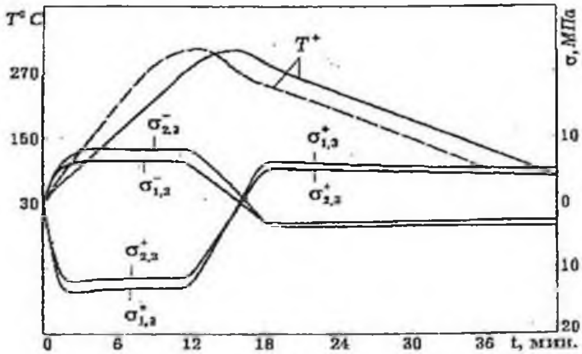


Фиг. 2

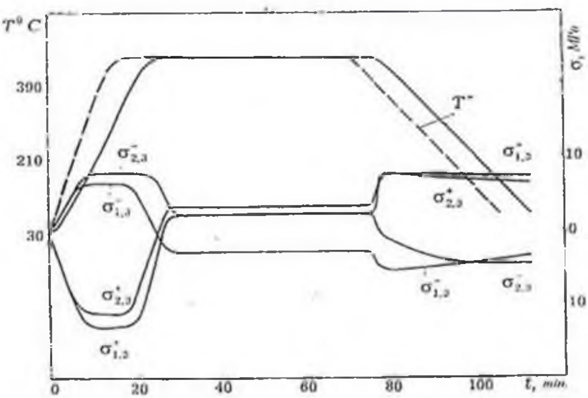
Зависимость коэффициентов линейного теплового расширения от температуры для составных частей оболочки 1-3 приведена на фиг. 2.

На основании проведенных численных исследований путем сравнения величин напряжений в сечениях оболочки установлено, что максимальные температурные напряжения в этом случае возникают в зоне сопряжения разнородных частей цилиндрической оболочки и расчетным является сечение с координатой $x = 0{,}551$.

Изменение во времени оптимальной температуры такой составной оболочки при теплоизоляции на внутренней поверхности (вычислена по допустимым растягивающим напряжениям на внутренней и внешней поверхностях, соответственно, равным 9Мпа и 7 Мпа) показано на фиг. 3, а при конвективном теплообмене (определена по допустимым растягивающим напряжениям на внутренней и внешней поверхностях, равным 9Мпа) на фиг.4.



Фиг.3



Фиг. 4

Сплошными линиями изображено изменение во времени оптимальной температуры $T^+(t)$ и температурных напряжений на внешней σ^+ и внутренней σ^- поверхностях оболочки при отсутствии источников тепла. При нагреве от начальной температуры до максимальной растягивающие температурные напряжения возникают на внутренней поверхности оболочки, а при охлаждении - на внешней. При этом на внутренней поверхности расчетными являются кольцевые, а на внешней –меридиональные температурные напряжения. На фигуре штриховой линией изображено изменение оптимальной температуры в том же сечении при воздействии постоянных источников тепла мощностью 10^5 вт/м^3 (при тех же допустимых растягивающих температурных напряжениях на поверхностях равных соответственно 9Мпа и 7Мпа , а при конвективном теплообмене 9Мпа).

Исследования показали, что использование дополнительного подогрева указанными источниками тепла в рассматриваемом случае позволяет сократить на 25% -30% продолжительность режима нагрева в сравнении с режимом, в котором используется только конвективный нагрев, при той же максимальной температуре нагрева и тех же допустимых максимальных значениях компонент тензора напряжений. Для значений угла $30^\circ \leq \varphi_* \leq 90^\circ$ (через φ_* обозначен угол между осью вращения и нормалью к внешней основе, проведенной через крайнее сечение конической части оболочки) оптимальные режимы толщинного нагрева такой оболочки практически не отличаются от режимов нагрева составной оболочки, где коническая часть заменена цилиндрической длиной $R\mathrm{ctg}\beta$.

Разработаная методика позволяет определить и исследовать оптимальные режимы нагрева конкретных оболочек, что состоят из элементов разной геометрической формы, выбрать рациональные параметры дополнительных источников подогрева, которые позволяют значительно сократить продолжительность термообработки. Отметим, что режимы термообработки, изображенные на фиг. 3, 4, могут использоваться соответственно при общей термообработке, отжиге (с целью понижения уровня остаточных напряжений), склейке с использованием ситаллоцемента и дегазации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барановський В.И., Гусев Б.Н., Иванов В.Н. и др. Производство цветных кинескопов/ Под ред. В.И. Барановского. М.: Энергия, 1978. 368 с.
2. Будз С.Ф., Гачкевич Н.Г. Оптимизация термообработки кусочно-однородных оболочек ЭЛП с учетом температурной зависимости характеристик материала// Физ.-хим. механика материалов. 1987. № 5. С. 111-113.
3. Бурак Я.Й, Гачкевич О.Р., Терлецький Р.Ф. Термомеханіка тіл низької електропровідності при дії електромагнітного випромінювання інфрачервоного діапазону// Доп. АН УРСР. Сер. А. 1990. № 6. С. 31-42.
4. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400с.

5. Гачкевич А.Р., Гачкевич Н.Г. Оптимальный нагрев внешней средой кусочно-однородных оболочек вращения при наличии внутренних источников тепла// Прикладная механика. 1995. 31. № 11. С. 51-57.
6. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. Киев: Наук. думка, 1979. 364 с.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
8. Казарян К.Б., Казарян Р.А. Напряженное состояние упругой токонесущей оболочки, создающей мультипольное магнитное поле.// Сб. Инженерно-физические проблемы новой техники. Изд. МГТУ, 1990. С. 161-162.
9. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наук. думка, 1965. 204 с.
10. Норр Д., Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир,1981. 304 с.
11. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.А. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Наук. думка, 1988. 736 с.
12. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Семерак М.М. Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. Киев: Наук. думка, 1981. 344 с.
13. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наук. думка, 1978. 320 с.
14. Подстригач Я.С., Чернуха Ю.А. Об уравнениях теплопроводности для тонкостенных элементов конструкций// Мат. методы и физ.-мех. поля. 1975. Вып. 2. С. 54-59.
15. Черноусько Ф.М., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 225 с.
16. Эспе В. Технология электровакумных приборов. М.: Энергия,1968. Т. 2. 448 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики НАН Украины,
Институт механики НАН Армении,
Политехника Опольская (Польша).

Поступила в редакцию
21.01.2002

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №1, 2002 Механика

УДК 539.3

СВОБОДНЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ*[1]

Геворкян Г.З

Գ.Զ. Գևորգյան

Փոփոխական հաստության ուղղանկյուն օրթոտրոպ սալերի ազատ լայնական տատանումների ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ

Հետևելով [1] աշխատանքին, դուրս են բերվել փոփոխական հաստության ուղղանկյուն օրթոտրոպ սալերի շարժման հավասարումները և ձևակերպվել համապատասխան սկզբնական և եզրային պայմանները ընդլայնական սահքի դեֆորմացիաների հաշվառմամբ: Որպես օրինակ դիտարկված է սալերի ազատ լայնական տատանումների խնդիրը, երբ արհամարհվում են միջին հարթության տանգենցիալ տեղափոխությունները և պտտման իներցիան: Սեփական հաճախությունների մոտավոր որոշման համար առաջարկված է Ռիտցի մեթոդի սխեմա, որտեղ լայնական ֆիկտիվ բեռի կատարած աշխատանքի հետ մեկտեղ դիտարկվում է նաև ֆիկտիվ կտրող ուժերի կատարած աշխատանքը: Այդ սխեմայի օգնությամբ լուծված է փոփոխական հաստության ուղղանկյուն սալերի ազատ տատանումների խնդիրը եզրերի հոդակապորեն հենման դեպքում: Կատարվել է ստացված արդյունքների վերլուծություն

G.Z. Gevorgyan

On Free Transversal Vibrations of Rectangular Orthotropic Plates of Variable Thickness with taking into Account the Transversal Shears

По аналогии с [1] выводятся уравнения движения прямоугольных ортотропных пластин переменной толщины и формулируются соответствующие начальные и краевые условия при учете влияния деформаций поперечных сдвигов. В качестве примера рассматривается задача свободных поперечных колебаний пластин при пренебрежении тангенциальных перемещений срединной плоскости и инерции вращения. Для приближенного определения собственных частот пластинки предлагается схема применения метода Ритца, где наряду с работой фиктивной поперечной нагрузки рассматривается также работа фиктивных перерезывающих сил. По этой схеме решается задача о свободных поперечных колебаниях шарнирно опертой пластинки линейно-переменной толщины.

1. Рассмотрим прямоугольную пластинку переменной толщины h из прямолинейно-ортотропного линейно-упругого материала. Пластинку отнесем к системе декартовых координат x, y, z, оси которых параллельны главным направлениям ортотропии материала. Координатную плоскость xy совместим со срединной плоскостью пластинки, а ось z направим вертикально вниз. Пусть на пластинку действуют поверхностные нагрузки, проекции интенсивности которых на координатные оси, приведенные к единице площади срединной плоскости, составляют $X^{\pm}, Y^{\pm}, Z^{\pm}$. Здесь и в дальнейшем знаками «+» и «−» будем отмечать величины, относящиеся к лицевым поверхностям

*[1] Работа доложена на VIII всероссийском съезде по прикладной и теоретической механике. (Пермь, 23-29 августа 2001г.)

пластинки $z = h/2$ и $z = -h/2$ соответственно. Условия опирания краев пластинки произвольны.

По аналогии с [2] для поперечных касательных напряжений положим

$$\tau_{xz} = \varphi_1 + z\varphi_2 + z^2\varphi_3, \qquad \tau_{yz} = \psi_1 + z\psi_2 + z^2\psi_3 \tag{1.1}$$

где φ_i и ψ_i – искомые функции только координат x, y.

Дифференциальные уравнения движения сплошной среды имеют вид [1]:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\sigma y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \qquad (x, y, z) \tag{1.2}$$

где $\sigma_x, \tau_{xy}, ...$ – напряжения, $u_x, ...$ – перемещения, ρ – плотность материала, t – время, а символ (x, y, z) означает круговую перестановку букв. Ограничиваясь линейностью распределения перемещений по толщине пластинки, можно написать:

$$u_x = u - z\left(\frac{\partial w}{\partial x} - a_{55}\varphi_1\right), \quad u_y = v - z\left(\frac{\partial w}{\partial y} - a_{44}\psi_1\right), \quad u_z = w \tag{1.3}$$

Здесь u, v, w – перемещения срединной плоскости пластинки, a_{ij} – упругие постоянные материала. Компоненты деформации и основных напряжений пластинки определятся с учетом (1.3) из геометрически линейных соотношений и соотношений обобщенного закона Гука [1] соответственно. Выражения этих величин, а также внутренних усилий и моментов пластинки совпадают со своими статическими аналогами, в силу чего здесь не приводятся. Если считать, что окружающая среда не оказывает сопротивления на движение пластинки, то со своими статическими аналогами будут совпадать также и условия на лицевых поверхностях пластинки $z = \pm h/2$ [2].

Имея в виду вышесказанное и поступая как обычно, из дифференциальных уравнений движения сплошной среды (1.1) приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} = -X_2 + \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} = -Y_2 + \rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = -Z_2 + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = N_x - hX_1 - \frac{\rho h^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2} - a_{55}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}\right)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = N_y - hY_1 - \frac{\rho h^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial t^2} - a_{44}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right)$$

Здесь $T_x, T_y, S_{xy}, N_x, N_y$ и M_x, M_y, M_{xy} – внутренние усилия и моменты пластинки

$$X_1 = (X^+ - X^-)/2, \quad Y_1 = (Y^+ - Y^-)/2, \quad X_2 = X^+ + X^-$$

$$Y_2 = Y^+ + Y^-, \quad Z_2 = Z^+ + Z^- \tag{1.5}$$

Из условий на лицевых поверхностях пластинки $z = h/2$ для функций φ_2, ψ_2 и φ_3, ψ_3 получаются известные выражения [2].

Используя формулы внутренних усилий и моментов и имея в виду выражения функций $\varphi_2, \psi_2, \varphi_3, \psi_3$, из уравнения (1.4) получим систему движения дифференциального элемента срединной плоскости:

$$h\left[B_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(B_{12}+B_{66}\right)\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x\partial y}+B_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]+\left(B_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+B_{12}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial x}+$$

$$+B_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial y}-\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-X_2$$

$$h\left[B_{22}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2}+\left(B_{12}+B_{66}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+B_{66}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}\right]+\left(B_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+B_{22}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial y}+$$

$$+B_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial x}-\rho h\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2}=-Y_2$$

$$h^2\left[\left(B_{11}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+B_{22}\frac{\partial h^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+4B_{66}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]-$$

$$-h\left\{\left[8+a_{55}h\left(B_{11}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\left[8+a_{44}h\left(B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+B_{22}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right\}-$$

$$-2B_{66}h^2\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\left(a_{55}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}+a_{44}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)-16\left(\frac{\partial h}{\partial x}\varphi_1+\frac{\partial h}{\partial y}\psi_1\right)+ \qquad (1.6)$$

$$+\rho h\left\{12\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+h\left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}-a_{55}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right)\frac{\partial h}{\partial x}+\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial t^2}-a_{44}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}\right)\frac{\partial h}{\partial y}\right]\right\}=$$

$$=4\left[3Z_2+h\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}+\frac{\partial Y_1}{\partial y}\right)-X_1\frac{\partial h}{\partial x}-Y_1\frac{\partial h}{\partial y}\right]$$

$$h^2\left[B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]+2h\left[\left(B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial h}{\partial x}+2B_{66}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]-$$

$$-h^2\left[a_{55}\left(B_{11}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}+B_{66}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}\right)+a_{44}\left(B_{12}+B_{66}\right)\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x\partial y}\right]-$$

$$-2h\left[a_{55}\left(B_{11}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+B_{66}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)+a_{44}\left(B_{12}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial \psi_1}{\partial y}+B_{66}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)\right]+$$

$$+8\varphi_1-\rho h^2\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}-a_{55}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right)=8X_1$$

$$h^2\left[B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]+2h\left[\left(B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial h}{\partial y}+2B_{66}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]-$$

$$-h^3\left[a_{44}\left(B_{22}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}+B_{66}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}\right)+a_{55}(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y}\right]-$$

$$-2h\left[a_{44}\left(B_{22}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+B_{66}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)+a_{55}\left(B_{12}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+B_{66}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)\right]+$$

$$-8\psi_1-\rho h^2\left(\frac{\partial w^3}{\partial y\partial t^2}-a_{44}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right)=8Y_1$$

К уравнениям движения пластинки (1.6) нужно присоединить граничные и начальные условия. При отсутствии сопротивления среды граничные условия совпадают со своими статическими аналогами [2] Начальные же условия можно представить в виде [1]:

при $t=0$ $\quad u=u_0(x,y),\ \ v=v_0(x,y),\ w=w_0(x,y)$

$$\partial u/\partial t=u_1(x,y),\ \partial v/\partial t=v_1(x,y),\ \partial w/\partial t=w_1(x,y) \qquad (1.7)$$

Здесь u_0, v_0, w_0 и u_1, v_1, w_1 – заданные компоненты начального перемещения и начальной скорости точек срединной плоскости пластинки соответственно.

2 Рассмотрим задачу о свободных колебаниях пластинки. Задача существенно упрощается в случае поперечных колебаний, когда пренебрегаются как тангенциальные перемещения срединной плоскости пластинки, так и влияние инерции вращения. Положив $X^{\pm}=Y^{\pm}=0$, из (1.6) для отмеченного случая получим систему свободных колебаний пластинки [3]. Рассмотрим случай, когда толщина пластинки от координат x, y зависит линейно – $h=h_0+h_1x+h_2y$

Здесь h_0, h_1, h_2 – заданные постоянные.

Примем обозначения:

$x=\bar{x}a,\ y=\bar{y}b=\bar{y}am,\ (b=am),\ h=h_0H, B_{ij}=\alpha_{ij}B_{11}, a_{44}=\beta a_{55}$

$$a_{55}B_{11}=\chi,\quad \omega^2=B_{11}\Omega^2/\rho a^2,\ \varphi_1=B_{11}\varphi\cos\omega t,\ w=h_0 f\cos\omega t \qquad (2.1)$$

$\psi_1=B_{11}\psi\cos\omega t,\ \ h_0/a=s,\ \ \gamma_1=h_1/s,\ \gamma_2=h_2/s$

Имея в виду (2.1), уравнения свободных поперечных колебаний пластинки (1.6) можно представить в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}+\frac{1}{m}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{y}}+\frac{2}{H}(\gamma_1\varphi+\gamma_2\psi)+\frac{3}{2}s\Omega^2 f=L_1(f,\varphi,\psi)=0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial\bar{x}^3}+\frac{\alpha_{12}+2\alpha_{66}}{m^2}\frac{\partial^3 f}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}^2}+\frac{2}{H}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\alpha_{12}}{m^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{y}^2}\right)\gamma_1+2\frac{\alpha_{66}\gamma_2}{m}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\right]-$$

$$-\frac{\chi}{s}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\alpha_{66}}{m^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{y}^2}+\frac{\beta}{m}(\alpha_{12}+\alpha_{66})\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\right]-\frac{2\chi}{Hs}\left[\gamma_1\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}+\alpha_{66}\frac{\gamma_2}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{y}}+\right.$$

$$+\beta\left(\alpha_{12}\frac{\gamma_1}{m}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{y}}+\alpha_{66}\gamma_2\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}\right)\Bigg]+\frac{8}{H^2s^3}\varphi=L_2(f,\varphi,\psi)=0$$

$$\frac{\alpha_{22}}{m^3}\frac{\partial^3 f}{\partial\bar{y}^3}+\frac{\alpha_{12}+2\alpha_{66}}{m}\frac{\partial^3 f}{\partial\bar{x}^2\partial\bar{y}}+\frac{2}{H}\left[\left(\alpha_{12}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\alpha_{22}}{m^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{y}^2}\right)\gamma_2+2\frac{\alpha_{66}\gamma_1}{m}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\right]-$$

$$-\frac{\chi}{s}\left[\beta\left(\frac{\alpha_{22}}{m^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{y}^2}+\alpha_{66}\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{x}^2}\right)+\frac{\alpha_{12}+\alpha_{66}}{m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\right]-\frac{2\chi}{Hs}\Bigg[\alpha_{12}\gamma_2\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}+\alpha_{66}\frac{\gamma_1}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{y}}+$$

$$+\beta\left(\alpha_{22}\frac{\gamma_2}{m}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{y}}+\alpha_{66}\gamma_1\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}\right)\Bigg]+\frac{8}{H^2s^3}\psi=L_3(f,\varphi,\psi)=0 \qquad (2.2)$$

Безразмерная толщина $H=1+\gamma_1\bar{x}+\gamma_2 m\bar{y}$.

3. Рассмотрим одну схему приближенного определения собственных частот прямоугольных пластин переменной толщины при учете деформации поперечных сдвигов. Будем пользоваться методом Ритца [4]. Пусть каждая тройка соотвестствующих членов рядов

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}A_{ij}f_{ij}(\bar{x},\bar{y}),\ \varphi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}B_{ij}\varphi_{ij}(\bar{x},\bar{y}),\ \psi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}C_{ij}\psi_{ij}(\bar{x},\bar{y}) \qquad (3.1)$$

удовлетворяет данным краевым условиям пластинки, но не удовлетворяет дифференциальным уравнениям (2.2). Здесь A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} – произвольные постоянные. Имея в виду (1.3) и (2.1), нетрудно убедиться, что функции $A_{ij}f_{ij}$ представляют собой амплитудные значения безразмерных виртуальных прогибов, а функции $B_{ij}\varphi_{ij}$, $C_{ij}\psi_{ij}$ пропорциональны соответствующим амплитудным значениям виртуальных деформаций поперечных сдвигов пластинки. После подстановки (3.1) в левые части уравнений (2.2) получаются величины, отличные от нуля. Эти величины можно рассмотреть как некоторую распределенную нагрузку $\bar{Z}_2$ и перерезывающие силы $\bar{N}_x, \bar{N}_y$. Нагрузка $\bar{Z}_2$ может совершать работу на виртуальных прогибах, а перерезывающие силы $\bar{N}_x$ и $\bar{N}_y$ – на соответствующих виртуальных деформациях поперечных сдвигов.

Следуя методу Ритца, приравним нулю работу $\bar{Z}_2$ и $\bar{N}_x, \bar{N}_y$ на соответствующих виртуальных прогибах и деформациях:

$$\int_0^1\int_0^1\left[L_1(f,\varphi,\psi)\delta f_{ij}+L_2(f,\varphi,\psi)\delta\varphi_{ij}+L_3(f,\varphi,\psi)\delta\psi_{ij}\right]d\bar{x}d\bar{y}=0 \qquad (3.2)$$

Так как вариации δf_{ij}, $\delta\varphi_{ij}$, $\delta\psi_{ij}$ произвольны и независимы друг от друга, то из (3.2) следует:

$$\int_0^1\int_0^1 L_1(f,\varphi,\psi)f_{ij}d\bar{x}d\bar{y}=0,\qquad \int_0^1\int_0^1 L_2(f,\varphi,\psi)\varphi_{ij}d\bar{x}d\bar{y}=0$$

$$\int_0^1\int_0^1 L_3(f,\varphi,\psi)\psi_{ij}d\bar{x}d\bar{y}=0,\qquad i=1,2,\dots n,\quad j=1,2,\dots k \qquad (3.3)$$

Уравнения (3.3) образуют систему однородных алгебраических линейных уравнений относительно A_{ij}, B_{ij} и C_{ij}. Значения собственных частот поперечных колебаний пластинки можно определить из условия существования нетривиальных решений этой системы, т.е. из условия равенства нулю ее определителя. Конечность числа членов выражения (3.1) накладывает определенные ограничения на возможные формы изогнутой пластинки. Это равносильно искусственному повышению жесткости пластинки, в силу чего найденные приближенные значения собственных частот будут выше соответствующих точных значений.

4. В качестве примера рассмотрим задачу о свободных поперечных колебаниях ортотропной пластинки линейно-переменной толщины при шарнирном опирании ее кромок. Граничные условия берем в виде:

$$\text{при } x = 0, 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - a_{13}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \ (M_x = 0) \quad \psi = 0 \ (u_y = 0), \ f = 0 \ (w = 0)$$

$$\text{при } y = 0, 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - a_{14}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \ (M_y = 0) \quad \psi = 0 \ (u_x = 0), \ f = 0 \ (w = 0) \quad (4.1)$$

Функции

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} A_{ij} \sin i\pi x \sin j\pi y, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} B_{ij} \cos i\pi x \sin j\pi y$$

$$\psi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} C_{ij} \sin i\pi x \cos j\pi y \quad (4.2)$$

удовлетворяют граничным условиям (4.1).

В табл.1 приведены значения первой безразмерной частоты при $n = k = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$, $\beta = 2$, $\alpha_{12} = 0.3$, $\alpha_{22} = 2$, $\alpha_{66} = 0.4$, $s = 0.125$ для различных значений m и χ. В предпоследней строке приведены значения безразмерной частоты для полосы, когда в рядах удерживается один член и получена приближенная аналитическая формула, а в последней строке – точные значения безразмерной частоты для полосы [3].

Таблица 1

	χ					
m	0	1	2	5	10	20
1	1.235	1.128	1.047	0.8852	0.7355	0.5837
5	0.5628	0.5496	0.5373	0.5049	0.4622	0.4019
10	0.5442	0.5323	0.5212	0.4916	0.4519	0.3948
20	0.5396	0.5280	0.5172	0.4883	0.4493	0.3930
100	0.5381	0.5267	0.5159	0.4872	0.4484	0.3924
∞	0.5381	0.5267	0.5159	0.4872	0.4484	0.3924
Точн. реш для пол.	0.5140	0.5040	0.4945	0.4690	0.4341	0.3827

В табл. 2 приведены значения ω_{11} при $n = k = 1$ для различных значений m, χ и $\gamma_1 = 0;1$, $\gamma_2 = 0;1$.

Таблица2

	χ	0	1	2	5	10	20
$m = 1$	$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$	0.8121	0.7790	0.7499	0.6806	0.6010	0.5046
	$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$	1.235	1.128	1.046	0.8852	0.7355	0.5836
	$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1$	1.235	1.128	1.046	0.8852	0.7355	0.5836
	$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$	1.650	1.419	1.270	1.0162	0.8122	0.6242
$m = 2$	$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$	0.4609	0.4534	0.4463	0.4271	0.4003	0.3600
	$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$	0.7001	0.6746	0.6519	0.5967	0.5311	0.4485
	$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1$	0.9477	0.8871	0.8378	0.7309	0.6214	0.5010
	$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$	1.178	1.068	0.9864	0.8261	0.6790	0.5312

Данные таблиц приводят к следующим заключениям:

1. Учет поперечных сдвигов приводит к уменьшению частоты.
2. Поправка, вносимая учетом поперечных сдвигов, уменьшается с увеличением m и наименьшая для полосы.
3. Для пластинки постоянной толщины поправка, вносимая учетом поперечных сдвигов, меньше чем для пластинки переменной толщины. Наибольшая поправка получается при $m = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$, $\chi = 20$ и равна 62%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1987. 360с.
2. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван: Изд. "Гитутюн" НАН РА. 2000. 122с.
3. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. Свободные колебания ортотропных пластин переменной толщины с учетом поперечных сдвигов. // Докл. НАН РА. 1999. Т. 99. С.116-122.
4. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз. 1959. 439с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
26.11.2001

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №1, 2002 Механика

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН РАСШИРЕНИЯ И КРУЧЕНИЯ В УПРУГОМ КРУГОВОМ СТЕРЖНЕ

Минасян М.М.

Մ.Մ.Մինասյան
Երկայնական և ոլորման ալիքների ոչ գծային փոխազդեցությունը առաձգական կլոր ձողում

Աշխատանքում ուսումնասիրվել է առաձգական ձողում բարձր հաճախության ուժեղ երկայնական ալիքի տրոհումը ցածր հաճախության ոլորման երկու ալիքների: Ուսումնասիրության հիմքում դրված է ոչ գծային ալիքների սինքրոն փոխազդեցության ռադիոֆիզիկայում և օպտիկայում կիրառվող կարճեցված հավասարումների հայտնի մեթոդը: Որոշված են տրոհման ներքին և վերին շեմերը, ինչպես նաև պարամետրական ուժեղացման գործակիցը և պարբերությունը: Կատարված են հաշվարկներ պղնձից և պողպատից պատրաստված ձողերի համար, և արդյունքները տրված են աղյուսակների տեսքով

M.M.Minasyan
Nonlinear Interaction of the Longitudinal and Torsional Waves in Elastic Circular Bar

В работе исследована распадная неустойчивость сильной высокочастотной продольной волны при ее нелинейном взаимодействии с низкочастотными волнами кручения в упругом стержне кругового поперечного сечения. Для поля перемещения приняты приближения Миндлина-Германа. Укороченные нелинейные уравнения выведены методом синхронизма для нормальных колебаний. Определены нижний и верхний пороги параметрического усиления, а также коэффициент и период взаимодействия. Для стержня, изготовленного из меди и стали, проведен численный анализ, результаты которого представлены таблицами

Как показали Похгаммер и Кри [1,2], в точной линейной постановке в бесконечном упругом стержне кругового поперечного сечения могут распространяться бегущие по осевому направлению гармонические волны трех типов: расширения, изгиба и кручения. Дисперсионное уравнение для осесимметричных волн представляется в виде произведения

$$G_L(\omega,k)G_T(\omega,k)G_{\text{и}}(\omega,k)=0 \tag{1}$$

что указывает на то, что волны разделяются. Однако в нелинейной постановке эти волны взаимодействуют, усиливая или ослабляя друг друга. Одним из механизмов обмена энергий разных волн является фазовый синхронизм (согласованность частот и волновых чисел). Это явление широко исследовано в физике плазмы, оптике и акустике [4,5,6,7]. В [7] исследовано взаимодействие упругих волн расширения и изгиба по их элементарной теории с учетом квадратичной нелинейности. В данной работе рассматривается трехволновое нелинейное синхронное взаимодействие продольной и крутильной колебаний в упругом круговом стержне

В случае волн расширения ($G_L(\omega,k)=0$) и кручения ($G_T(\omega,k)=0$) точные уравнения частот имеют кратные корни и дисперсионные кривые состоят из ряда ветвей, соответствующих основным и более высоким модам [2]. Основные ветви этих мод схематично представлены на фиг. 1 (а и б).

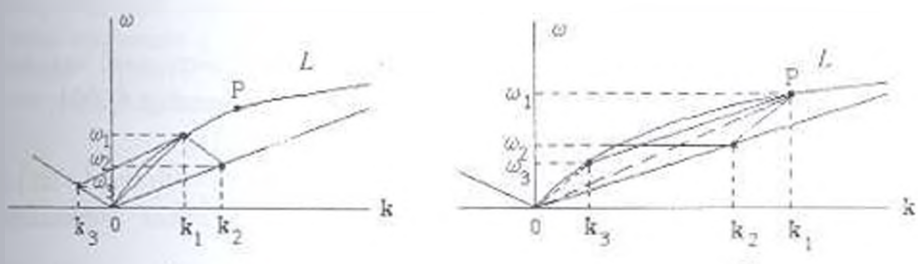
Укажем некоторые характерные черты этих кривых.

Кривая L имеет касательную $\omega = c_{\text{п}}k$ при $k=0$ и асимптоту

$\omega = c_1 k$, где c_0, c_1 — "стержневая" скорость ($c_0 = \sqrt{E/\rho}$) и скорость поверхностных волн Рэлея, соответственно. В отличие от дисперсной кривой L кривая θ не дисперсная. Уравнение кривой θ имеет вид $\omega = c_2 k$, где $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость сдвиговых волн. Для ветви, выше некоторой точки P на кривой L, групповая скорость волны расширения меньше c_2. Это приводит к тому, что ниже этой точки в трехволновом синхронизме:

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$$
$$k_1 = k_2 - k_3 \qquad (2)$$

могут участвовать одна высокочастотная волна расширения и две низкочастотные волны кручения, а выше этой точки — также две волны расширения и одна низкочастотная волна кручения. В первом случае будем говорить о резонансной тройке $(L\theta\theta)$, а во втором случае — о тройке $(LL\theta)$.



а) б)

Фиг.1

Для вывода нелинейных уравнений, следуя Миндлину-Герману [1], представим перемещения точек стержня в цилиндрических координатах в виде:

$$u_z = w(z,t), \quad u_r = ru(z,t)/a, \quad u_\theta(z,t) = r\theta(z,t) \qquad (3)$$

где z — осевое направление, a — радиус цилиндра.

Вычислив функцию Лагранжа, осредненную по поперечному сечению стержня, получим:

$$L = \frac{\rho}{2}\left(w_t^2 + \frac{u_t^2}{2} + \frac{a^2\theta_t^2}{2}\right) - \left[\frac{\lambda+2\mu}{2}w_z^2 + \frac{\mu u_z^2}{4} + \frac{\mu a^2\theta_z^2}{4} + \frac{2\lambda u w_z}{a} + \right.$$
$$\left. + \frac{2(\lambda+\mu)u^2}{a^2}\right] - \theta_z^2\left[\frac{\lambda+\mu}{2}au + \frac{\lambda+2\mu}{4}a^2 w_z\right] + (\ldots) \qquad (4)$$

где приведены нелинейные кубические члены, участвующие в синхронном взаимодействии. В дальнейшем будем ограничиваться только этими нелинейностями. Из принципа Гамильтона получим нелинейные уравнения движения стержня в принятом приближении

$$\rho w_{tt} - (\lambda+2\mu)w_{zz} - 2\lambda u_z/a = (\lambda+2\mu)a^2(\theta_z^2)_z/4$$
$$\rho u_{tt} - \mu u_{zz} + 4\lambda w_z/a + 8(\lambda+\mu)u/a^2 = -(\lambda+\mu)a\theta_z^2 \qquad (5)$$
$$\rho\theta_{tt} - \mu\theta_{zz} = 2(\lambda+\mu)u\theta_z/a + (\lambda+2\mu)(w_z\theta_z)_z$$

Отметим, что левые части первых двух уравнений системы (5) соответствуют уравнениям Миндлина-Германа [1] с заменой поправочных коэффициентов на единицу.

Низшие дисперсионные ветви имеют вид:

$$G_L(\omega,k)=\left[\rho\omega^2-(\lambda+2\mu)k^2\right]\left[\rho\omega^2-\mu k^2-8(\lambda+\mu)/a^2\right]-8\lambda^2k^2/a^2 \quad (6)$$

$$G_0=\rho\omega^2-\mu k^2 \quad (7)$$

где знак минус при G_L означает, что выбрана нижняя ветвь дисперсионной кривой L. Отметим, что эта ветвь весьма мало отличается от точной по форме, лишь только в пределе $k\to\infty$ вместо c_t получается c_t. Безразмерные фазовые скорости получаются в виде:

$$\bar{c}^2=c^2/c_0^2=\frac{1}{4m}\left[3-4\nu+\frac{8}{a^2k^2}-\sqrt{\left(1-\frac{8}{a^2k^2}\right)^2+\frac{128}{a^2k^2}}\right]$$

$$\bar{c}_t^2=c_t^2/c_0^2=\frac{1}{2(1+\nu)},\qquad m=(1+\nu)(1-2\nu) \quad (8)$$

ν – коэффициент Пуассона. Дальше будем следовать методике, изложенной в работах [4,5]. Сначала рассмотрим резонансную тройку $(L00)$.

Представим решение системы (5) в форме:

$$w(x,t)=\bar{w}(t)\exp(-ikx),\quad u(x,t)=u(t)\exp(-ikx),\quad \theta(x,t)=\theta(t)\exp(-ikx) \quad (9)$$

Приняв условие согласований волновых чисел и введя нормальные колебания:

$$a_L=\frac{2}{\sqrt{2+\beta^2}}\left(\bar{w}-\frac{i\beta}{2}\bar{u}\right),\quad a_\theta=a\bar{\theta},\quad \left(\beta=\frac{2(1-\nu)-(1-2\nu)\bar{c}^2/\bar{c}_t^2}{4\nu}ak\right) \quad (10)$$

получим систему укороченных уравнений:

$$\frac{d^2a_1}{dt^2}+\omega_1^2a_1=2nia_2a_3,\ \frac{d^2a_2}{dt^2}+\omega_2^2a_2=-2nia_1a_3^*\ \ \frac{d^2a_3}{dt^2}+\omega_3^2a_3=-2nia_1a_2^*$$

$$n=\frac{-k_1k_2k_3}{2\sqrt{2+\beta^2}}\gamma,\quad \gamma=\frac{(1+\nu)\bar{c}^2-(1-\nu)}{\nu}\bar{c}_t^2 \quad (11)$$

Здесь и далее индексы соответствуют порядку резонансных троек.

Отметим, что при $\bar{c}^2>\bar{c}_*^2=(1-\nu)/(1+\nu)$ $\gamma>0$, а при $\bar{c}^2<0$ $\gamma<0$.

Введя "медленное время" $T=\varepsilon t$, $\varepsilon=A_{01}/\lambda_1$ где $\varepsilon<<1$, A_0 – характерная амплитуда, а λ_1 – длина продольной волны и представив решение системы в виде $a_j=A_j(T)\exp(i\omega t)$, для медленно меняющихся амплитуд A_j получим систему уравнений:

$$\frac{dA_1}{dt}=\frac{n}{\varepsilon\omega_1}A_2A_3\exp(-i\Delta\omega t)\ \ \frac{dA_2}{dt}=-\frac{n}{\varepsilon\omega_2}A_1A_3^*\exp(i\Delta\omega t)$$

$$\frac{dA_3}{dt}=-\frac{n}{\varepsilon\omega_3}A_1A_2^*\exp(i\Delta\omega t)\ \ \Delta\omega=\omega_1-(\omega_2+\omega_3) \quad (12)$$

Из (12) следует закон сохранения энергии и соотношения Мэнли-Роу [6]

$$\sum_{j=1}^{3}\omega_j^2\left|A_j(T)\right|^2 = \text{const}$$

$$\omega_1\left(\left|A_1(0)\right|^2-\left|A_1(T)\right|^2\right)=\omega_2\left(\left|A_2(T)\right|^2-\left|A_2(0)\right|^2\right)=\omega_3\left(\left|A_3(T)\right|^2-\left|A_3(0)\right|^2\right) \qquad (13)$$

Из этих соотношений следует, что поскольку в рассматриваемой резонансной тройке $n<0\,(k_1>0, k_2<0, k_3>0)$, то при $\gamma>0$ (область длинных волн) возникает распадная неустойчивость [6] и энергия сильной высокочастотной продольной волны перекачивается в две другие волны, параметрически усиливая их. При $\gamma<0$ высокочастотная волна устойчива и в этом случае происходит только слабое биение колебаний – слабые волны не усиливаются. Рассмотрим распадную неустойчивость подробнее.

Пусть в начальный момент возбуждены сильная высокочастотная продольная волна и одна из низкочастотных крутильных волн с начальными амплитудами $\left|A_1(0)\right|=A_{01}$, $\left|A_2(0)\right|=A_{02}$, $\left|A_3(0)\right|=0$, причем $A_{02}/A_{01}<<1$. Для определения порога параметрического усиления [6] волн кручения в начальной стадии распада амплитуду продольной волны будем считать постоянной. Тогда, решив два последних уравнения системы (12), получим:

$$A_2(T)=A_{02}\exp(-i\Delta\omega T/2)(\operatorname{ch}\alpha T+i\Delta\omega\operatorname{sh}\alpha T/2\alpha)$$

$$A_3(T)=\frac{nA_{01}A_{02}}{\varepsilon\alpha\omega_3}\exp(-i\Delta\omega T/2)\operatorname{sh}\alpha T \qquad (14)$$

где α – коэффициент параметрического усиления:

$$\alpha^2=\frac{n^2A_{01}^2}{\varepsilon^2\omega_2\omega_3}-\frac{(\Delta\omega)^2}{4} \qquad (15)$$

Из (15) для порога усиления получим оценку:

$$A_{01}>\frac{\varepsilon\Delta\omega\sqrt{\omega_2\omega_3}}{4n} \qquad (16)$$

При полной фазовой синхронности $(\Delta\omega=0)$ распадная неустойчивость становится безусловной. Дальше будем считать $\Delta\omega=0$.

При тех же начальных условиях решение системы (12) в эллиптических функциях Якоби [8,9] имеет вид:

$$\left|A_1(T)\right|^2=A_{01}^2\operatorname{sn}^2(\varsigma,s),\quad \left|A_2(T)\right|^2=\frac{A_{01}^2}{s^2}\frac{\omega_1}{\omega_2}\operatorname{dn}^2(\varsigma,s),\quad \left|A_3(T)\right|^2=A_{01}^2\frac{\omega_1}{\omega_3}\operatorname{cn}^2(\varsigma,s) \qquad (17)$$

где $\varsigma=K(s)+A_{01}nT/s\varepsilon\sqrt{\omega_1\omega_2}$, $\quad s^{-1}=\sqrt{1+\frac{\omega_1}{\omega_2}\left(\frac{A_{02}}{A_{01}}\right)^2}$

и $K(s)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Решения (17) описывают колебания с периодом:

$$\Pi=\frac{2sK(s)\sqrt{\omega_1\omega_2}}{nA_{01}} \qquad (18)$$

После некоторых упрощений, запишем (18) в форме

$$\frac{\Pi}{\Pi_0}=\frac{2sK(s)\nu_1\sqrt{2+\beta^2}}{\pi^2\left[(1+\nu)\bar{c}^2-(1-\nu)\right]}\sqrt{\left(1-\frac{\bar{c}_2^2}{\bar{c}^2}\right)^{-1}}\left(\frac{\lambda_2}{A_{01}}\right)^2 \tag{19}$$

где $\Pi_0 = 2\pi/\omega_1$ – период продольных колебаний. Учитывая, что из оценок $A_{02}/A_{01} << 1$, $\omega_2/\omega_1 = O(1)$ следует оценка $1-s^2 \approx 1$, то при вычислении полного эллиптического интеграла можно пользоваться асимптотической формулой [9]:

$$2K(s) = \ln 16/\left(1-s^2\right) \tag{20}$$

Определим коэффициент распадной неустойчивости как отношение максимального осевого напряжения к максимальному касательному напряжению в волне кручения при $r = a$.

Учитывая, что

$$\sigma_{zz} = (\lambda+2\mu)w_{,z} + 2\lambda u/a, \quad \sigma_{z\theta} = \mu a\theta_{,z} \tag{21}$$

этот коэффициент принимает значение:

$$\Gamma = \frac{\max|\sigma_{z\theta}|}{\max|\sigma_{zz}|} = \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}}\left(\sqrt{1-\frac{\bar{c}_2}{\bar{c}}}+\frac{1}{s}\sqrt{1+\frac{\bar{c}_2}{\bar{c}}}\right)\sqrt{1+\beta^2/2} \tag{22}$$

В табл. 1 и 2 для меди ($\nu = 0.35$) и стали ($\nu = 0.28$) на основе формул (8), (19) и (22) приведены числовые данные для безразмерной фазовой скорости продольной волны $\bar{c}$, коэффициента усиления (Γ) и величины $\xi = \Pi/\Pi_0 (\lambda_2/A_{01})^2$. Из данных таблиц видно, что параметры взаимодействия существенно зависят от ak. В частности, при фиксированном радиусе стержня интенсивность (Γ) распадной неустойчивости возрастает в сторону коротких волн, одновременно увеличивается и период взаимодействия. Однако, при этом убывает коэффициент нелинейной связи. При достижении точки P (фиг. 1) нелинейная связь в квадратичном приближении обрывается. При дальнейшем увеличении k коэффициент нелинейности меняет знак и, как было отмечено выше, сильная высокочастотная продольная волна становится устойчивой, а низкочастотные слабые крутильные волны не усиливаются.

В случае резонансной тройки $(LL0)$, как показывает анализ, распадная неустойчивость не проявляется, т. е. сильная высокочастотная продольная волна не усиливает низкочастотную продольную или низкочастотную крутильную волны.

В работе рассмотрена временная эволюция при пространственной однородности. Аналогично можно рассмотреть пространственную эволюцию в стационарном состоянии. В общем случае необходимо учитывать как временную, так и пространственную эволюцию, как это сделано при взаимодействии продольной и изгибной волн [8]. Здесь наиболее интересное явление связано с существованием солитонов разных "цветов" – "светлых" и "темных". Однако, это предмет отдельного исследования.

Следует отметить, что усиления будет тем больше, чем больше длина стержня. Увеличение ее длины можно имитировать соответствующими способами закрепления концов, превратив стержень в резонатор.

Таблица 1 (медь)

ak	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	3	4
$\bar{c}$	1.000	0.999	0.999	0.995	0.980	0.924	0.948	0.782
Γ	1.556	1.156	1.158	1.170	1.216	1.452	1.960	2.689
ξ	0.684	0.685	0.687	0.704	0.772	1.177	2.495	2.688

Таблица 2 (сталь)

ak	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	3	4
$\bar{c}$	1.000	0.999	0.999	0.997	0.987	0.944	0.870	0.800
Γ	1.182	1.183	1.184	1.191	1.223	1.418	1.982	2.925
ξ	0.692	0.695	0.696	0.709	0.759	1.097	1.982	2.925

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйбрамсон Х.Н., Пласс Х.Дж., Рипперґер Э.А. Распространение волн напряжения в стержнях и балках. // "Проблемы механики", сб. статей. М.: Иностр. лит., 1961. с.24-90.
2. Дейвис Р.М. Волны напряжений в твердых телах. М.: Иностр. лит., 1961. 93с.
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. 712с.
4. Луиселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. М.: Иностр. лит., 1974. 523с.
5. Вильхельмссон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. М.: Энергоиздат, 1981. 222с.
6. Виноградов М.В., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 282с.
7. Сухоруков А.П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М.: Наука. 1988. 230с.
8. Kovnguine D.A., Potapov A.I. On nonlinear oscillations of a thin bar. // Arc. Apl. Mech. 66, 1966, pp.168-176.
9. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука. 1964 830с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 24.12.2001

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №1, 2002 Механика

УДК 62-50

УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМ МАНИПУЛЯТОРОМ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА НАПРЯЖЕНИЕ И ТОК

Аветисян В.В.

Վ.Վ. Ավետիսյան
Էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի ղեկավարումը լարման և հոսանքի վրա դրված սահմանափակումների դեպքում

Դիտարկվում է ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգով նկարագրվող էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի ղեկավարման խնդիրը լարման և հոսանքի ուժի վրա դրված սահմանափակումների դեպքում

V.V. Avetisyan
The control of electromechanical manipulators with restrictions on tension and current

Решается задача управления электромеханическим манипулятором, движения которого описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений при ограничениях на напряжение и ток.

1. Рассматривается электромеханическая модель плоского двузвенного манипулятора, управляемого с помощью двух независимых приводов, содержащих электродвигатели постоянного тока с независимым возбуждением и редукторы. Движения такого манипулятора в безразмерных единицах описываются системой механических уравнений Лагранжа и уравнений баланса электрических напряжений в цепях якорей электродвигателей [1]

$$
\begin{gathered}
(1 - 2MaLA_{11}^{-1}\cos\varphi_2)\ddot{\varphi}_1 + (A_{12} + MaL\cos\varphi_2)A_{11}^{-1}\ddot{\varphi}_2 - \\
- MaLA_{11}^{-1}\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2(2\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = k_1^{1/2} j_1 \\
\ddot{\varphi}_2 + (A_{12} + MaL\cos\varphi_2)A_{22}^{-1}\ddot{\varphi}_1 + MaLA_{22}^{-1}\sin\varphi_2\cdot\dot{\varphi}_1^2 = k_2^{1/2} j_2 \qquad (1.1) \\
L_i dj_i/dt + R_i j_i + k_i^{1/2}\dot{\varphi}_i = k_i^{1/2}u_i, \qquad i = 1,2
\end{gathered}
$$

В (1.1) φ_1, φ_2 – обобщенные углы поворотов звеньев манипулятора; a – длина первого звена; L – расстояние от шарнира, соединяющего первое и второе звенья, до центра масс второго звена; M – масса второго звена; m – масса ротора электродвигателя, управляющего вторым звеном; A_{11}, A_{12}, A_{22} – коэффициенты, содержащие инерционные и геометрические параметры манипулятора [1]; L_i, R_i – коэффициенты индуктивности и электрическое сопротивление обмотки роторов электродвигателей; k_i – постоянный коэффициент; j_i – ток в обмотке якоря i-го двигателя; u_i – управляющее напряжение, подаваемое на вход i-го двигателя.

Для системы (1.1) ставится задача управления. Требуется найти управляющие напряжения $u_1(t), u_2(t)$, осуществляющие приведение манипулятора из заданного начального состояния покоя

$$\varphi_i(0) = 0, \quad \dot\varphi_i(0) = 0, \quad j_i(0) = 0, \quad i = 1,2 \tag{1.2}$$

в заданное конечное состояние в момент времени $t = T$

$$\varphi_i(T) = \varphi_i^1, \quad \dot\varphi_i(T) = 0, \quad i = 1,2 \tag{1.3}$$

В течение всего процесса управления должны выполняться ограничения на напряжения и токи в цепях электродвигателей

$$|u_i| \le 1, \quad |j_i| \le j_i^0, \quad i = 1,2 \tag{1.4}$$

где j_i^0 – максимальная величина тока в цепи i-го электродвигателя.

Наряду с полной (1.1), рассмотрим упрощенную модель манипулятора, которая соответствует случаю, когда электромагнитные постоянные времени $\tau_i = L_i / R_i$ весьма малы по сравнению со временем транспортной операции, совершаемой роботом, а второе звено манипулятора статически уравновешено. В этом случае выполняются соотношения $L_i << 1$, $L = 0$ и в первом приближении члены, содержащие L_i, L в уравнениях (1.1) можно опустить [2]. Тогда уравнения движения (1.1), после исключения из них переменных j_i, и ограничения (1.4) упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} &R_1\ddot\varphi_1 + R_1 A_{12} A_{11}^{-1}\ddot\varphi_2 + k_1\dot\varphi_1 = u_1 \\ &R_2 A_{12} A_{22}^{-1}\ddot\varphi_1 + R_2\ddot\varphi_2 + k_2\dot\varphi_2 = u_2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$|u_i| \le 1, \qquad |u_i - k_i\dot\varphi_i| \le j_i^0 k_i^{1/2} R_i = \eta_i, \qquad i = 1,2 \tag{1.6}$$

В (1.5),(1.6), (1.2),(1.3) перейдем к новым переменным

$$v_i = u_i - k_i\dot\varphi_i, \; i = 1,2,$$

$$\psi_1 = R_1\varphi_1 + R_1 A_{12} A_{11}^{-1}\varphi_2, \qquad \psi_2 = R_2 A_{12} A_{22}^{-1}\varphi_1 + R_2\varphi_2 \tag{1.7}$$

$$x_1 = \psi_1, \quad x_2 = \dot\psi_1, \quad x_3 = \psi_2, \quad x_4 = \dot\psi_2$$

В переменных (1.7) задача (1.5),(1.6), (1.2),(1.3) примет вид

$$\dot x_1 = x_2, \; \dot x_2 = v_1, \; \dot x_3 = x_4, \; \dot x_4 = v_2 \tag{1.8}$$

$$\left| v_i + \sum_{j=1}^{4} c_{ij}\dot x_j \right| \le 1, \qquad |v_i| \le \eta_i = j_i^0 k_i^{1/2} R_i, \; i = 1,2 \tag{1.9}$$

$$c_{11} = k_1 R_1^{-1} A_{11} A_{22} (A_{11}A_{22} - A_{12}^2)^{-1}, \; c_{13} = k_1 R_2^{-1} A_{12} A_{22} (A_{12}^2 - A_{11}A_{22})^{-1}$$

$$c_{21} = k_2 R_1^{-1} A_{12} A_{11} (A_{12}^2 - A_{11}A_{22})^{-1}, \; c_{23} = k_2 R_2^{-1} A_{11} A_{22} (A_{11}A_{22} - A_{12}^2)^{-1}$$

$$c_{12} = c_{14} = c_{22} = c_{24} = 0$$

$$\begin{aligned} &x_i(0) = x_i^0 = 0, \quad i = 1,\dots,4 \\ &x_1(T) = x_1^1 = \alpha_1\varphi_1^1 + \beta_1\varphi_2^1, \; x_2(T) = x_2^1 = 0 \\ &x_3(T) = x_3^1 = \alpha_2\varphi_1^1 + \beta_2\varphi_2^1, \; x_4(T) = x_4^1 = 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\alpha_1 = R_1, \quad \alpha_2 = R_2 A_{12} A_{22}^{-1}, \quad \beta_1 = R_1 A_{12} A_{11}^{-1}, \quad \beta_2 = R_2$$

2. Обозначим через $x = (x_1, \dots, x_4)^T$ и $v = (v_1, v_2)^T$ фазовый вектор и вектор управления системы (1.8) и перепишем систему в векторной форме

$$\dot{x} = Ax + Bv \qquad (2.1)$$

с постоянными матрицами A, B размеров 4x4, 4x2 и фундаментальной матрицей размера 4x4 соответственно

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

Начальные и конечные условия представим следующим образом

$$x(0) = 0, \qquad x(T) = x^1 \qquad (2.3)$$

Запишем решение системы (2.1) с начальным условием (2.3)

$$x(t) = \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)B(\tau)v(\tau)d\tau \qquad (2.4)$$

С учетом (2.3) и (2.4), задача (1.8)-(1.10) сводится к отысканию такого управления $v(t)$, при котором удовлетворяются условие

$$\int_0^T \Phi^{-1}(t)B(t)v(t)dt = \Phi^{-1}(T)x^1 \qquad (2.5)$$

и ограничения (1.9) для всех $t \in [0,T]$.

Воспользуемся известным подходом [3] построения управления, который в [4,5] был распространен на случай наличия ограничения на управление, а в [6] – на фазовые координаты в задачах успокоения скалярно управляемых многочастотных систем линейных осцилляторов (маятников).

Управление, решающее задачу без учета ограничений (1.9), ищем в виде

$$v(t) = Q^T(t)C, \qquad Q(t) = \Phi^{-1}(t)B(t) \qquad (2.6)$$

Здесь C – постоянный вектор, определяемый единственным образом (так как (1.8) вполне управляема [7,8])

$$C = R^{-1}(T)\cdot\Phi^{-1}(T)x^1 \qquad (2.7)$$

из системы линейных алгебраических уравнений

$$R(T)\cdot C = \Phi^{-1}(T)x^1, \qquad R(T) = \int_0^T Q(t)Q^T(t)dt \qquad (2.8)$$

Подставляя (2.7),(2.8) в (2.6), а затем (2.6)-(2.8) в (2.1), управление $v(t)$ и фазовую скорость $\dot{x}(t)$ можно представить следующим образом

$$v(t) = F^1(t,T)\cdot(x^1)^T, \quad \dot{x}(t) = G^1(t,T)\cdot(x^1)^T, \; x^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1) \qquad (2.9)$$

где матрицы $F^1 = \|f_{iq}^1\|$, $f_{iq}^1, i = 1,2;\ q = 1,\dots,4$ и $G^1 = \|g_{jq}^1\|$, $g_{jq}^1, j,q = 1,\dots,4$ определяются таким образом:

$$F^1(t,T) = (\Phi^{-1}(t)B(t))^T R^{-1}(T)\Phi^{-1}(T) \qquad (2.10)$$

$$G^1(t,T) = A(t)\Phi(t)R(t)R^{-1}(T)\Phi^{-1}(T) + B(t)B'(t)(\Phi^{-1}(t))' R^{-1}(T)\Phi^{-1}(T)$$

С учетом (2.9), (2.10), искомое управление и соответствующую ему фазовую скорость представим в следующих координатных формах

$$v_i(t) = \sum_{q=1}^{4} f_{iq}(t,T)\,x_q^1,\quad i = 1,2;\quad \dot{x}_i(t) = \sum_{q=1}^{4} g_{iq}(t,T)\,x_q^1,\quad j = 1,\dots,4 \qquad (2.11)$$

Ограничения (1.9) после подстановки в них (2.11), принимают вид

$$|v_i(t)| = \left|\sum_{q=1}^{4} f_{iq}(t,T)\,x_q^1\right| \le \eta_i,\ i = 1,2 \qquad (2.12)$$

$$\left|v_i(t) + \sum_{j=1}^{4} c_{ij}\dot{x}_j(t)\right| = \left|\sum_{q=1}^{4} (f_{iq}(t,T) + h_{iq}(t,T))\,x_q^1\right| \le 1,\ i = 1,2$$

$$h_{ij}(t,T) = \sum_{j=1}^{4} c_{ij}\,g_{jq}(t,T),\quad i = 1,2;\ q = 1,\dots,4 \qquad (2.13)$$

Выберем время T так, чтобы удовлетворялись ограничения (2.12) и (2.13). Для этого введем следующие функции

$$S_i(T) = \left[\max_{0\le t\le T} K_i(t,T)\right]^{-1/2},\quad i = 1,2$$

$$M_i(T) = \left\{\left[\max_{0\le t\le T} K_i(t,T)\right]^{1/2} + \left[\max_{0\le t\le T} L_i(t,T)\right]^{1/2}\right\}^{-1},\quad i = 1,2 \qquad (2.14)$$

где $K_i(t,T)$, $L_i(t,T)$ определяются из (2.10) и имеют вид

$$K_i(t,T) = \sum_{q=1}^{4} f_{iq}^2(t,T),\ i = 1,2;\qquad L_i(t,T) = \sum_{q=1}^{4} h_{iq}^2(t,T),\quad i = 1,2 \qquad (2.15)$$

К соотношениям (2.12),(2.13) применим неравенство Коши-Буняковского

$$|v_i| \le \left(\sum_{q=1}^{4} {x_q^1}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{q=1}^{4} f_{iq}^2(t,T)\right)^{1/2},\qquad i = 1,2;$$

$$\left|v_i + \sum_{j=1}^{4} c_{ij}\dot{x}_j\right| \le \left(\sum_{q=1}^{4} {x_q^1}^2\right)^{1/2}\left\{\left(\sum_{q=1}^{4} f_{iq}^2(t,T)\right)^{1/2} + \left(\sum_{q=1}^{4} h_{iq}^2(t,T)\right)^{1/2}\right\},\ i = 1,2 \qquad (2.16)$$

Тогда с учетом (2.14),(2.15) неравенства (2.16) перепишутся в виде

$$|v_i| \le |x^1|\left[K_i(t,T)\right]^{1/2} \le |x^1|\,S_i^{-1}(T),\qquad i = 1,2$$

$$\left|v_i + \sum_{j=1}^{4} c_{ij}\dot{x}_j\right| \le |x^1|\left(\left[K_i(t,T)\right]^{1/2} + \left[L_i(t,T)\right]^{1/2}\right) \le |x^1|\,M_i^{-1}(T),\qquad i = 1,2 \qquad (2.17)$$

Из (2.17) следует, что наложенные ограничения (2.12) и (2.13) будут удовлетворены для всех $t \in [0,T]$, если время $T > 0$ выбирать из следующего условия:

$$|x^1| = \min_{i=1,2}\left[\min[\eta_i S_i(T),\ M_i(T)]\right] \qquad (2.18)$$

Таким образом, для любого заданного x^1 из условия (2.18) можно найти время T, а затем определить управление v_i, $i=1,2$ из (2.11).

3. С помощью (2.10),(2.6)-(2.8),(2.1)-(2.4) определим элементы матриц F^1, G^1

$$F^1 = \left\|f^1_{iq}\right\|, \quad i=1,2; \quad q=1,...,4 \qquad (3.1)$$

$$f^1_{11} = f^1_{23} = -12T^{-3}t + 6T^{-2},\ f^1_{12} = f^1_{24} = 6T^{-2}t - 2T^{-1},\ f^1_{13} = f^1_{14} = f^1_{21} = f^1_{22} = 0$$

$$G^1 = \left\|g^1_{jq}\right\|, \quad j=1,...,4; \quad q=1,...,4$$

$$g^1_{11} = g^1_{33} = -6T^{-3}t^2 + 6T^{-2}t, \quad g^1_{12} = g^1_{34} = 3T^{-2}t^2 - 2T^{-1}t$$

$$g^1_{21} = g^1_{43} = -12T^{-3}t + 6T^{-2},\ g^1_{22} = g^1_{44} = 6T^{-2}t - 2T^{-1} \qquad (3.2)$$

$$g^1_{13} = g^1_{14} = g^1_{23} = g^1_{24} = g^1_{31} = g^1_{32} = g^1_{41} = g^1_{42} = 0$$

С учетом (3.1)-(3.2) для функции S_i, M_i, $i=1,2$ из (2.14) будем иметь

$$S_1(T) = S_2(T) = T^2/6,\quad M_i(T) = \left[6/T^2 + 3(c^2_{i1} + c^2_{i3})^{1/2}/2T\right]^{-1},\quad i=1,2 \qquad (3.3)$$

Подставим S_i, M_i, $i=1,2$ в условие (2.18), в котором, согласно (1.10), положим $\left|x^1\right| = \sqrt{(x^1_1)^2 + (x^1_3)^2}$. Из (2.18) получим уравнения для нахождения T

$$\left|x^1\right| = \min_{i=1,2}\min\left\{\eta_i T^2/6,\ \left[6/T^2 + 3(c^2_{i1} + c^2_{i3})^{1/2}/2T\right]^{-1}\right\} \qquad (3.4)$$

При нахождении T из (3.4) возможны несколько случаев в зависимости от соотношений между параметрами задачи $\eta_1, \eta_2, c_{i1}, c_{i2}$, $i=1,2$.Для конкретной модели манипулятора со следующими значениями безразмерных параметров, входящих в (1.8)-(1.10),

$$L_1 \approx 0.001,\ L_2 \approx 0.003,\ R_1 \approx 0.39,\ R_2 \approx 0.09,\ k_1 \approx 1.5,\ k_2 \approx 1,\ \eta_1 \approx 0.1 \qquad (3.5)$$

$$\eta_2 \approx 0.09,\ c_{11} \approx 4.0302,\quad c_{13} \approx -1.3216,\quad c_{21} \approx -1.2930,\quad c_{23} \approx 11.5351$$

$$A_{12}/A_{11} \approx 0.08,\quad A_{12}/A_{22} \approx 0.48,\quad MaL/A_{11} \approx 0.03,\quad MaL/A_{22} \approx 0.21$$

имеют место соотношения $\eta_1 > \eta_2$, $c^2_{11} + c^2_{13} < c^2_{21} + c^2_{23}$. С учетом этих неравенств, из (3.4) найдем

$$\left|x^1\right| = \begin{cases} \eta_2 S_2(T), & T \in [0, T'] \\ M_2(T), & T \in [T', \infty] \end{cases} \qquad (3.6)$$

где T' определяется из равенства $\eta_2 S_2(T) = M_2(T)$

$$T' = 4(1-\eta_2)/\eta_2(c^2_{21} + c^2_{23})^{1/2} \qquad (3.7)$$

Поскольку функции S_2, M_2 (3.6) монотонно возрастающие, то из уравнений (3.6) искомое время T определяется единственным образом. Разобьем весь полубесконечный интервал времени T на две части: $[0, T']$, $[T', \infty]$, которым соответствуют два интервала изменения $\left|x^1\right| : \left[0, \left|x^1\right|^*\right], \left[\left|x^1\right|^*, \infty\right]$. Здесь

$$\left|x^1\right|^* = 8(1-\eta_2)^2 / 3\eta_2(c_{21}^2 + c_{23}^2) \qquad (3.8)$$

определяется подстановкой $T = T^*$ (3.7) в правую часть одного из уравнений (3.6). Далее, для фиксированного начального состояния (2.3) по заданному конечному состоянию x^1, путем сравнения $\left|x^1\right|$ с $\left|x^1\right|^*$ определяем, в каком из двух отрезков лежит искомое T. Если $T \in \left[0, T^*\right]$, то T определяется из первого уравнения (3.6)

$$T = (6\left|x^1\right| / \eta_2)^{1/2}, \qquad 0 < \left|x^1\right| \le \left|x^1\right|^* \qquad (3.9)$$

Если $T \in \left[T^*, \infty\right]$, то T определяется из второго уравнения (3.6)

$$T = \left(3(c_{21}^2 + c_{23}^2)^{1/2}\left|x^1\right| + \left(9\left|x^1\right|^2(c_{21}^2 + c_{23}^2) + 96\left|x^1\right|\right)^{1/2}\right)/4, \quad \left|x^1\right|^* < \left|x^1\right| < \infty \qquad (3.10)$$

Соответственно, подставляя (3.1) в (2.11), получаем выражения, по которым можно подсчитать компоненты управления в любой момент времени, а именно:

$$\mathrm{v}_1(t) = 6T^{-2}(1 - 2T^{-1}t)x_1^1, \qquad \mathrm{v}_2(t) = 6T^{-2}(1 - 2T^{-1}t)x_3^1 \qquad (3.11)$$

где момент времени T определяется согласно (3.9),(3.10).

Из (3.11) следует, что чем больше время движения до терминального состояния, тем меньше максимальные величины управляющих функций.

Согласно (1.7) перейдем в (3.11) к исходным переменным

$$u_1(t) = \left\{6k_1\left[R_1^{-1}(A_{12}^2 A_{11}^{-1} A_{22}^{-1} - 1)^{-1} x_1^1 - R_2^{-1} A_{12} A_{11}^{-1}(A_{12}^2 A_{11}^{-1} A_{22}^{-1} - 1)^{-1} x_3^1\right] / T^{-3}\right\} t^2 +$$
$$+ \left\{-12x_1^1 / T^3 + 6k_1(A_{12}^2 A_{11}^{-1} A_{22}^{-1} - 1)^{-1}(R_2^{-1} A_{12} A_{11}^{-1} x_3^1 - R_1^{-1} x_1^1) / T^2\right\} t + 6x_1^1 / T^2$$
$$u_2(t) = \left\{6k_2\left[R_2^{-1}(A_{12}^2 A_{11}^{-1} A_{22}^{-1} - 1)^{-1} x_3^1 - R_1^{-1} A_{12} A_{22}^{-1}(A_{12}^2 A_{11}^{-1} A_{22}^{-1} - 1)^{-1} x_1^1\right] / T^{-3}\right\} t^2 +$$
$$+ \left\{-12x_3^1 / T^3 + 6k_2(A_{12}^2 A_{11}^{-1} A_{22}^{-1} - 1)^{-1}(R_1^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} x_1^1 - R_2^{-1} x_3^1) / T^2\right\} t + 6x_3^1 / T^2$$
$$(3.12)$$

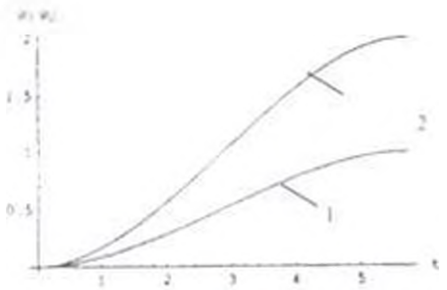
где

$$x_1^1 = R_1\varphi_1^1 + R_1 A_{12} A_{11}^{-1}\varphi_2^1, \qquad x_3^1 = R_2 A_{12} A_{22}^{-1}\varphi_1^1 + R_2\varphi_2^1$$

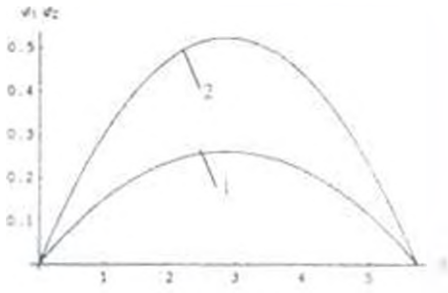
4. Законы управления (3.12), полученные для упрощенной модели системы четвертого порядка (1.5), использовались при моделировании транспортных движений двузвенного манипуляционного робота с числовыми значениями безразмерных параметров (3.5). Фигурирующие в выражениях (3.12) конечные значения фазовых координат принимались равными $\varphi_1^1(T) = 1$ рад.; $\varphi_2^1(T) = 2$ рад. В соответствии с этими значениями и с учетом (3.8), (3.5) время окончания процесса было рассчитано по формуле (3.10) при значениях (3.5) – $T \approx 5.7368$. Управления (3.12) при указанных значениях параметров были подставлены в полные уравнения (1.1) и путем численного моделирования проинтегрированы с начальными условиями (1.2) на интервале $\left[0, T\right]$. На фиг.1 представлены зависимости $\varphi_1(t) - (1)$, $\varphi_2(t) - (2)$ для полной системы (1.1). Соответствующим образом представлены также зависимости $\dot\varphi_1(t) - (1)$, $\dot\varphi_2(t) - (2)$ на фиг.2. Вычисления показали, что значения фазовых координат и угловых скоростей системы (1.1) в момент

окончания управляемого процесса равны соответственно

$$\varphi_1(T) \approx 1.0072, \quad \varphi_2(T) \approx 1.9923, \quad \dot{\varphi}_1(T) \approx -0.0018, \quad \dot{\varphi}_2(T) \approx -0.0008$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Равенства свидетельствуют о том, что управления, рассчитанные для упрощенной модели, обеспечивают приведение манипулятора в заданное терминальное состояние с приемлемой точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В. Оптимизация транспортных движений промышленных роботов с ограничением на мощность тепловыделения.// Изв. АН СССР. Техн. Кибернет.1987. № 4. С. 200-207.
2. Аветисян В.В. Оптимальные по энергозатратам перемещения электромеханического манипуляционного робота.// Изв. РАН. Теория и Системы Управления. 1996. №4. С. 186-192.
3. Калман Р. Об общей теории систем управления. // Тр. 1-го конгр. Междунар. федерации по автомат. управ-ю. (IFAC). М.: АН СССР. 1961. Т.2. С.521-547.
4. Черноусько Ф. Л. О построении ограниченного управления в колебательных системах. // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 549-558.
5. Добрынина И. С., Черноусько Ф. Л. Ограниченное управление линейной системой четвертого порядка. // РАН. Техн. Кибернет. 1992. № 6. С. 94-100.
6. Ананьевский И.М. Управление линейной системой четвертого порядка при смешанных ограничениях. // ПММ. 2000. Т.64. Вып.6. С. 901-908.
7. Аветисян В.В. Ограниченное векторное управление линейной динамической системой. // Сб. науч. Тр. Конф. "Вопросы оптимальные управления, устойчивости и прочности механических систем". Ереван. 1997. С. 13-17.
8. Аветисян В.В. Ограниченное управление линейной динамической системой с ограничением на фазовую скорость. // Изв. НАН РА. Механика. 2000. Т. 53. № 4. С. 48-56.

Институт механики
НАН РА

Поступила в редакцию
19. 11. 2001

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №1, 2002 Механика

УДК 62-50

ОБ УПРАВЛЯЕМОМ ДВИЖЕНИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ С НЕФИКСИРОВАННОЙ МАССОЙ

А.А.Гукасян, А.Г.Матевосян

Ա.Ա. Ղուկասյան, Ա.Գ. Մաթևոսյան
Չֆիքսված զանգվածով նյութական կետի ղեկավարվող շարժման մասին

Դիտարկված է չֆիքսված զանգվածով նյութական կետի ղեկավարվող շարժումը ղեկավարող ֆունկցիայի սահմանափակության դեպքում: Կառուցված է ղեկավարող ֆունկցիան սինթեզի տեսքով, ֆիքսած նշանափոխության կորի դեպքում, որը ապահովում է նյութական կետի բերումը ֆազային հարթության սկզբնակետ զանգվածի բոլոր թույլատրելի արժեքների դեպքում մեկ նշանափոխության կետով: Բերված է ղեկավարման կիբեռնետիկ սխեման և ստացված են վերջնական դիրքի բերման ժամանակի գնահատականները նյութական կետի զանգվածների տարբեր արժեքների դեպքում

A.A. Ghukasyan, A.G. Matevosyan
About of controlled movement of a material point of unset mass

Рассматривается управляемое движение материальной точки с нефиксированной массой с ограничением на управляющую функцию. Построена управляющая функция в форме синтеза при фиксированной линии переключения, которая обеспечивает приведение материальной точки в начало координат фазовой плоскости для всех допустимых значений масс с одной точкой переключения. Приводится кибернетическая схема управления и получены оценки времен приведения в терминальное состояние для различных значений масс материальной точки

1. Постановка задачи управления. Рассмотрим управляемое движение материальной точки с одной степенью свободы. Уравнение движения точки имеет вид

$$m\ddot{x} = u \tag{1.1}$$

где x — обобщенная координата точки, u — управляющая сила.

Предполагается, что масса m точки нефиксирована, но находится в заданных пределах

$$m_0 \le m \le M \tag{1.2}$$

На управляющую силу наложено следующее ограничение:

$$|u| \le 1 + \eta\,,\ \text{где}\ \max \eta = \frac{M - m_0}{M + m_0} \tag{1.3}$$

Требуется построить оптимальное управление в форме синтеза $u(x, \dot{x})$ такое, что при любом значении массы m, удовлетворяющем ограничениям (1.2), всякая траектория движения точки приводилась в начало координат фазового пространства при фиксированной линии переключения, построенной для массы m' (не нарушая общности, можно считать $m' = (M + m_0)/2$). Требуется также построить управляющую функцию с минимальным числом точек переключений и, при возможности, сохранить ограничение $|u| \le 1$

2. Синтез задачи управления. Исследуем сначала задачу оптимального приведения материальной точки в начало координат при ограничении

$|u| \le 1$ с фиксированной массой m'. Известно [1], что для заданной массы синтез оптимального по быстродействию управления имеет форму

$$u(x,\dot{x}) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad \dot{x} > 0 \text{ и } x \ge -m'\dot{x}^2/2 \\ -1 & \text{при} \quad \dot{x} < 0 \text{ и } x > m'\dot{x}^2/2 \\ 1 & \text{при} \quad \dot{x} > 0 \text{ и } x < -m'\dot{x}^2/2 \\ 1 & \text{при} \quad \dot{x} < 0 \text{ и } x \le m'\dot{x}^2/2 \end{cases} \tag{2.1}$$

Этот закон управления полностью определяется кривой переключений $x = \pm m'\dot{x}^2/2$. Полное время T приведения материальной точки массы m', управляемой по закону (2.1), из начального состояния $(x_0, \dot{x}_0)$ до терминального состояния (0.0) равно

$$T = m'\dot{x}_0 + 2\sqrt{m'C_{m'}} = m'\dot{x}_0 + 2\sqrt{m'x_0 + m'^2\dot{x}_0^2/2}$$

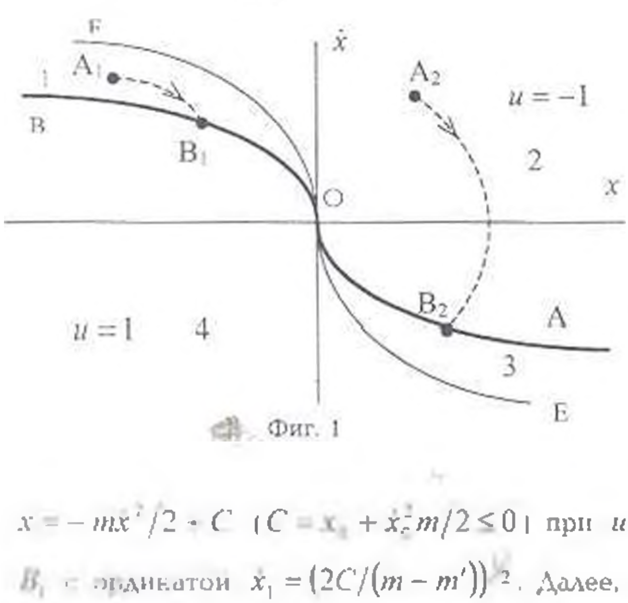
$$\text{при} \quad C_{m'} = x_0 + \dot{x}_0^2 m'/2 \ge 0 \tag{2.2}$$

$$T = -m'\dot{x}_0 + 2\sqrt{-m'C_{m'}} \quad \text{при} \quad C_{m'} = x_0 - \dot{x}_0^2 m'/2 \le 0 \tag{2.3}$$

2.1. Исследуем поведение системы (1.1) в случае, когда масса m точки не совпадает со значением m'. Предположим сначала, что масса точки m меньше параметра кривой переключений, т.е.

$$m_0 \le m < m' \tag{2.4}$$

Фазовыми траекториями движения точки массы m при ограничении $|u| \le 1$ является семейство парабол $x = \pm m\dot{x}^2/2 + C$ [1]. На фиг.1 жирной линией изображена кривая переключений, отвечающая массе m' и ограничению $|u| \le 1$, а тонкой сплошной линией — отвечающая массе m при ограничении $|u| \le 1$.



Фиг. 1

Пусть сначала начальная точка находится выше кривой переключений AOB (фиг.1). Траектория движения здесь состоит из двух ветвей парабол. В первом случае, когда начальная точка $A_1(x_0, \dot{x}_0)$ находится между линиями OB и OF, то при сохранении линии переключения AOB точка должна двигаться по параболе семейства $x = -m\dot{x}^2/2 + C$ $(C = x_0 + \dot{x}_0^2 m/2 \le 0)$ при $u = -1$ до точки пересечения B_1 с ординатой $\dot{x}_1 = (2C/(m - m'))^{1/2}$. Далее, если не изменить величину управляющей функции u, возможности которой мы имеем (1.3), то точка может двигаться до начала координат вдоль линии переключения B_1O при скользящем режиме управления (фиг. 1). Избегая многочисленных точек переключения на участке траектории B_1O, в рамках ограничения (1.3), управляющую функцию определим в виде $u = -1 - \eta$, где $\eta = \dfrac{m - m'}{m'} < 0$.

При этом линия B_1O является траекторией движения точки с массой m (2.4). Аналогично можно построить закон управления и фазовые траектории движения точки, когда начальная точка $(x_0, \dot{x}_0)$ находится в областях 2,3,4 (фиг. 1).

Синтез оптимального по времени управления с одной точкой переключения при сохранении линии переключения AOB имеет вид

$$u(x,\dot{x}) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad \dot{x} > 0 \text{ и } x > -m'\dot{x}^2/2 \\ -1 & \text{при} \quad \dot{x} < 0 \text{ и } x > m'\dot{x}^2/2 \\ -(1+\eta) & \text{при} \quad \dot{x} > 0 \text{ и } x = -m'\dot{x}^2/2 \\ 1 & \text{при} \quad \dot{x} < 0 \text{ и } x < m'\dot{x}^2/2 \\ 1 & \text{при} \quad \dot{x} > 0 \text{ и } x < -m'\dot{x}^2/2 \\ (1+\eta) & \text{при} \quad \dot{x} < 0 \text{ и } x = m'\dot{x}^2/2 \end{cases} \tag{2.5}$$

где $\eta = \dfrac{m - m'}{m'} < 0$.

Так как управление происходит по обратной связи, то предполагается, что связь имеет возможность в каждый момент времени определить как фазовое состояние движения, так и массу материальной точки (фиг. 3). Следовательно, в формуле (2.5) значение η считается известным.

Время движения между точками A_1 и B_1 равно $t_1 = m(\dot{x}_0 - \dot{x}_1) = m\left(\dot{x}_0 - \sqrt{2C/(m - m')}\right)$, а от точки B_1 до начала координат – $t_2 = m'\dot{x}_1 = m'\left(\sqrt{2C/(m - m')}\right)$.

Следовательно, полное время движения материальной точки массы m из начального состояния $(x_0, \dot{x}_0)$ до терминального состояния $(0,0)$ при управлении (2.5) равно

$$T = t_1 + t_2 = m\dot{x}_0 + \sqrt{2(m - m')C}, \qquad C = x_0 + \dot{x}_0^2 m/2 < 0 \tag{2.6}$$

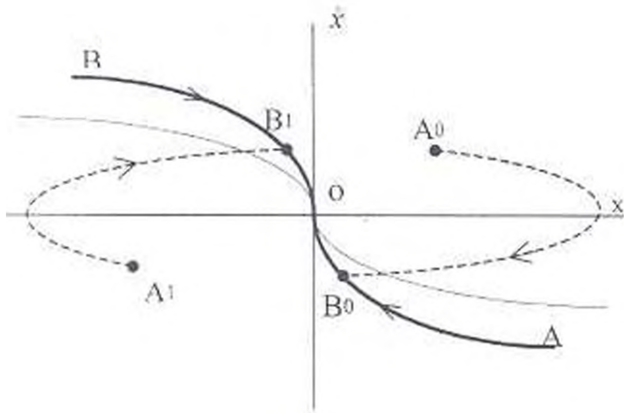
Аналогично определяются полные времена движения материальной точки в случае, когда траектория движения начинается в областях 2,3,4 (фиг. 1), соответственно

$$T = m\dot{x}_0 + \sqrt{2(m + m')C}, \qquad C = x_0 + \dot{x}_0^2 m/2 \geq 0 \tag{2.7}$$

$$T = -m\dot{x}_0 + \sqrt{2(m' - m)C}, \qquad C = x_0 - \dot{x}_0^2 m/2 \geq 0 \tag{2.8}$$

$$T = -m\dot{x}_0 + \sqrt{-2(m + m')C}, \quad C = x_0 - \dot{x}_0^2 m/2 \leq 0 \tag{2.9}$$

2.2. Предположим теперь, что масса материальной точки больше параметра кривой переключений, то есть $m' < m < M$. При ограничении



Фиг. 2

$|u| \le 1$ и законе управления (2.1) траектория движения материальной точки массы m представляет собой спираль, содержащую бесконечное число витков [2]. Чтобы в законе управления переключение происходило не более одного раза, управляющая функция должна принять значения $|u| = 1 + \eta$ (1.3), где $\eta = \dfrac{m - m'}{m'} > 0$, после выхода материальной точки на кривую переключения AOB.

Не нарушая общности, можно считать что начальная точка траектории находится выше линий переключений AOB фиг.2 (жирная линия). Траектория движения точки здесь состоит из двух участков, от начальной точки $A_0(x_0, \dot{x}_0)$ по параболе $x = -m\dot{x}^2/2 + C_0$ (фиг.2, штриховая линия), где $C_0 = x_0 + \dot{x}_0^2 m/2 > 0$ до точки пересечения $B_1(\dot{x}_1 = -(2C_0/(m + m'))^{1/2})$ с кривой переключения AOB, а затем до начала координат — по линии переключения B_1O.

Время движения между точками A_0 и B_0 равно $t_1 = m(\dot{x}_0 - \dot{x}_1) = m\left(\dot{x}_0 + \sqrt{2C_0/(m + m')}\right)$, а от точки B_0 до начала координат равно $t_2 = -m'\dot{x}_1$.

Следовательно, полное время T движения материальной точки массы m, управляемой по закону (2.5), где $\eta = \dfrac{m - m'}{m'} > 0$, из начального состояния $(x_0, \dot{x}_0)$ до терминального состояния $(0,0)$ равно

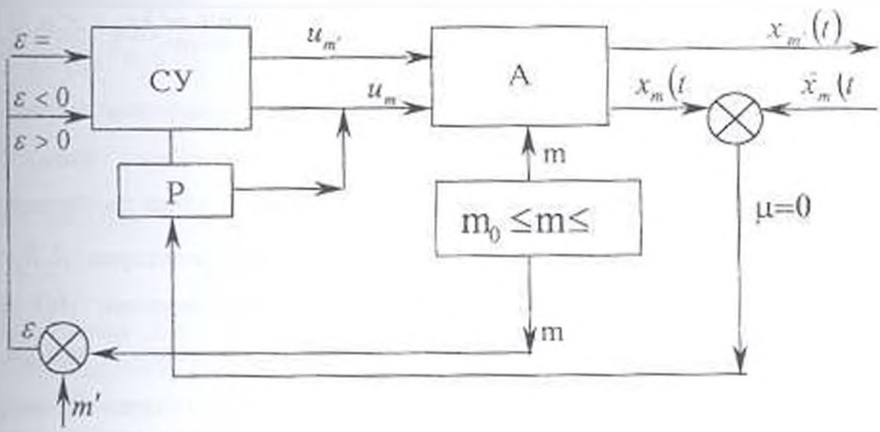
$$T = m\dot{x}_0 + \sqrt{2(m + m')C_0}, \qquad C_0 = x_0 + \dot{x}_0^2 m/2 > 0 \tag{2.10}$$

В случае, когда начальная точка $(x_0, \dot{x}_0)$ находится ниже линии переключений AOB, то время движения определяется следующим образом:

$$T = -m\dot{x}_0 + \sqrt{-2(m + m')C_0}, \; C_0 = x_0 - \dot{x}_0^2 m/2 < 0 \tag{2.11}$$

Кибернетическую схему управления материальной точки с нефиксированной массой по закону (2.5) можно представить в виде (фиг.3).

С практической точки зрения такие задачи могут возникнуть при управлении механических систем, перемещающих грузы, массы которых могут меняться в заданных пределах и система управления которых оптимальна по быстродействию для конкретного значения массы перемещаемого груза. Подобные задачи при разных постановках и методах исследования рассмотрены в таких работах, как [2-4].



$\bar{x}_{m'}(t)$ – кривая переключений, отвечающая параметру m'; $x_m(t)$ – траектория движения, $\mu = \bar{x}_{m'}(t) - x_m(t)$, $\varepsilon = m - m'$

Фиг. 3

3. Сравнение времен движения для различных значений масс материальной точки. Обозначим через $T_m^{m'}$ время движения точки массы m из начального состояния $(x_0, \dot{x}_0)$ до начала координат при законе управления (2.5). Если масса m материальной точки совпадает со значением m', то управление в форме синтеза (2.1) обеспечивает ее приведение в терминальное состояние (0,0) за минимальное время. Время движения в этом случае будет

$$T_{m'}^{m'} = m'\dot{x}_0 + 2\sqrt{m'C_{m'}}, \qquad C_{m'} = x_0 + \dot{x}_0^2 m'/2 \tag{3.1}$$

Если же масса m не совпадает с расчетным значением m', то справедливо следующее утверждение [2]:

$$T_m^{m'} < T_{m'}^{m'} \text{ при } m < m' \tag{3.2}$$

Если масса m материальной точки больше значений m', то справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $m' < m < M$. Тогда

$$T_{m'}^{m'} < T_m^{m'} < T_M^{m'} \tag{3.3}$$

Доказательство. Согласно формуле (2.10), имеем

$$T_M^{m'} = M\dot{x}_0 + \sqrt{2(M + m')C_M}, \qquad C_M = x_0 + \dot{x}_0^2 M/2 > 0$$

$$T_m^{m'} = m\dot{x}_0 + \sqrt{2(m + m')C_m}, \quad C_m = x_0 + \dot{x}_0^2 m/2 > 0$$

Поскольку C_M и C_m неотрицательны, то при $\dot{x}_0 > 0$ справедливы следующие соотношения:

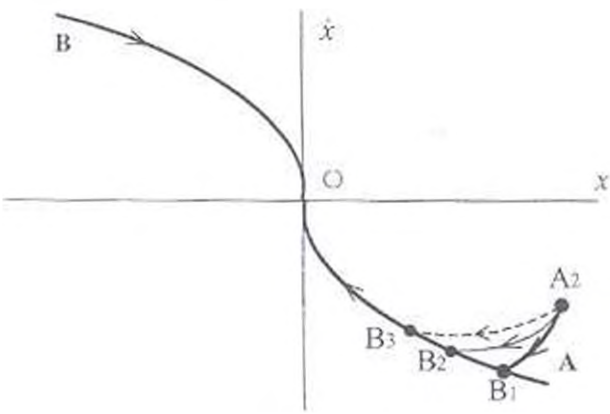
$$T_M^{m} = M\dot{x}_0 + \sqrt{2(M+m')(x_0+\dot{x}_0^2 M/2)} > m\dot{x}_0 + \sqrt{2(M+m')(x_0+\dot{x}_0^2 m/2)} >$$

$$> m\dot{x}_0 + \sqrt{2(m+m')(x_0+\dot{x}_0^2 m/2)} = T_m^{m'} > m'\dot{x}_0 + \sqrt{2(m+m')(x_0+\dot{x}_0^2 m/2)} >$$

$$> m'\dot{x}_0 + 2\sqrt{m'(x_0+\dot{x}_0^2 m'/2)} = T_{m'}^{m'}$$

Следовательно, $T_M^{m} > T_m^{m'} > T_{m'}^{m'}$.

Если $\dot{x}_0 < 0$, то траектория движения каждой из точек разбивается на два участка. Обозначим через B_2 точку, в которой траектория A_2B_2 движения точки массы m выходит на кривую переключений AO фиг.4 (тонкая сплошная линия). От начальной точки A_2 точка с массой m' сначала движется по дуге параболы $x = m'\dot{x}^2/2 + C$ до точки B_1 (жирная линия), а затем по кривой переключений до точки B_2. Так как траектория движения точки массы m' лежит ниже траектории точки массы m, то это означает, что она движется с большей по модулю скоростью и, следовательно, быстрее достигает состояния B_2. Второй участок из состояния B_2 до начала координат обе точки проходят одинаково. Поэтому полное время движения материальной точки массы m' меньше, чем время движения точки массы m. Такая же ситуация справедлива для точек массы m и M (фиг.4—тонкая сплошная и штрихованная линии). Лемма доказана.



Фиг. 4

Лемма 2. Пусть $m' < m'' < M$. Тогда $T_M^{m'} < T_M^{m''}$ (3.4)

Доказательство. Согласно формуле (2.10), имеем

$$T_M^{m'} = M\dot{x}_0 - \sqrt{2(M+m')(x_0+\dot{x}_0^2 M/2)}$$

$$T_M^{m''} = M\dot{x}_0 + \sqrt{2(M+m'')(x_0+\dot{x}_0^2 M/2)}, \quad x_0 + \dot{x}_0^2 M/2 > 0$$

Следовательно, по условию леммы имеет место $T_M^{m'} < T_M^{m''}$. Лемма доказана.

Лемма 3. $T_M^{m_0} = \min\limits_{m_0 \le m' \le M} \max\limits_{m_0 \le m \le M} T_m^{m'}$.

Доказательство. Из утверждений (3.2) и леммы 1 вытекает равенство $T_M^{m'} = \max\limits_{m_0 \le m \le M} T_m^{m'}$, то есть при законе управления (2.5) с любым параметром m', удовлетворяющим ограничению (1.2), дольше всего движется точка наибольшей допустимой массы M. Согласно лемме 2 $\min\limits_{m_0 \le m' \le M} T_M^{m'} = T_M^{m_0}$. Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
2. Ананьевский И.М. Игровая задача управления материальной точкой неизвестной массы. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. №4. С.19-27.
3. Ананьевский И.М. Два подхода к управлению механической системой с неизвестными параметрами.// Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. №2. С.39-47.
4. Ананьевский И.М Управление двухмассовой системой с неизвестными параметрами. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. №2. С.72-82.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 16.07.2001

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №1, 2002 Механика

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПО ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЕ

Шагинян С. Г.

Ս.Գ. Շահինյան
Պարբերական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ըստ ազդող ուժի կայունության մասին

Դիտարկված է պարբերական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ըստ ազդող ուժի կայունության խնդիրը: Կատարելով Լյապունովի ձևափոխություն խնդիրը բերված է հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ըստ ազդող ուժի կայունության խնդրին և ցույց է տրված, որ կատարված ձևափոխության ժամանակ պահպանվում է համակարգերի ըստ ազդող ուժի կայունության խնդիրների համարժեքությունը:

Ստացված են անհրաժեշտ ու բավարար պայմաններ պարբերական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ըստ ազդող ուժի կայունության, ասիմպտոտիկ կայունության և անկայունության համար:

S.G. Shahinyan
On the Stability of Acting Force of the Systems of Differential Equation with Periodical Coeficients

Рассматривается задача устойчивости по действующей силе системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. С помощью преобразования Ляпунова задача приведена к задаче устойчивости по действующей силе систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Показано, что при преобразовании сохраняется эквивалентность задач устойчивости по действующей силе систем с периодическими и с постоянными коэффициентами.

Получены необходимые и достаточные условия, при которых система линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами устойчива, асимптотически устойчива или неустойчива по действующей силе.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $A(t)$ – $(n \times n)$ – матрица, элементы которой непрерывные периодические функции периода ω.

Рассмотрим также систему

$$\dot{x} = A(t)x + \varphi(t) \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям, указанным в [1].

Пусть $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ – корни характеристического уравнения системы (1) с кратностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$ соответственно ($k \le n$, $\sum_{i=1}^{k} p_i = n$).

Известно [2], что всякую систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами можно преобразовать при помощи линейной подстановки с периодическими коэффициентами в систему уравнений с постоянными коэффициентами.

Обозначим через

$$y = B(t)x \tag{3}$$

где $B(t) = \|b_{ij}(t)\|$ – $(n \times n)$-мерная действительная матрица, элементы которой непрерывные, ограниченные, периодические фукции периода 2ω (в общем случае), причем $\det B(t) \neq 0$ при любом значении t, $|b_{ij}(t)| \leq b < \infty$ $(i, j = 1, ..., n)$.

После преобразования (3) система (1) будет

$$\dot{y} = Ay \tag{4}$$

где матрица $A = B(t)A(t)B^{-1}(t)$ – постоянная и имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}$$

Здесь постоянная матрица A_i имеет размерность $p_i \times p_i$:

$$A_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \alpha_i & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \alpha_i \end{pmatrix} \qquad (i = 1, ..., k) \tag{5}$$

а числа $\alpha_i = \dfrac{1}{\omega} \ln \rho_i$ $(i = 1, ..., k)$ – характеристические показатели системы (1) [2].

В общем случае, числа α_i – комплексные. Так как коэффициенты уравнения (1) вещественны, то все комплексные корни характеристического уравнения и все комплексные решения системы (4) распадаются на пары сопряженных. Следовательно, есть возможность привести систему (4) в систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными действительными коэффициентами [3].

Делая преобразование (3), система (2) приводится к виду

$$\dot{y} = Ay + \psi(t) \tag{6}$$

где $\psi(t) = B(t)\varphi(t)$.

Покажем, что вектор-фукция $\psi(t)$ тоже удовлетворяет всем условиям, указанным в [1].

Действительно,

$$1) \quad \left\| \int_{t_0}^{T} \psi(t) dt \right\| = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{t_0}^{T} \psi_i(t) dt \right)^2 \right]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{t_0}^{T} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) \varphi_j(t) dt \right)^2 \right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{t_0}^{T} \sum_{j=1}^{n} b \cdot \varphi_j(t) dt \right)^2 \right]^{1/2} = b \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{T} \varphi_j(t) dt \right)^2 \right]^{1/2}$$

и если

$$\left\| \int_{t_0}^{T} \varphi(t) dt \right\| < \delta, \text{ то } \left\| \int_{t_0}^{T} \psi(t) dt \right\| < b \left(\sum_{i=1}^{n} \delta^2 \right)^{1/2} = b\sqrt{n}\delta = \delta_1;$$

2) так как $\varphi(t) \equiv 0$ при $t \geq T$, то $\psi(t) = B(t) \cdot \varphi(t) \equiv 0$ при $t \geq T$.

Таким образом, задача устойчивости по действующей силе системы (1) приводится к задаче устойчивости по действующей силе системы (4).

Известно [4], что критерии устойчивости по действующей силе системы (4) формулируются следующим образом:

1. Для того, чтобы система (4) была асимптотически устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы корни соответствующего характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части.

2. Для того, чтобы система (4) была устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее характеристическое уравнение имело нулевой корень с кратностью r $(1 \leq r \leq n)$, которому соответствуют простые элементарные делители, а остальные корни имеют отрицательные вещественные части.

Во всех остальных случаях система (4) неустойчива по действующей силе.

Корни характеристического уравнения, соответствующего системе (4), являются характеристическими показателями системы (1) [2]. Следовательно, верны следующие утверждения:

Теорема 1. Для того, чтобы система (1) была устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы характеристические показатели α_i удовлетворяли следующим условиям:

а) существует $\alpha = 0$ с кратностью p_l, которому соответствуют простые элементарные делители;

б) $\operatorname{Re}\alpha_i < 0 \quad (i = 1, \ldots, k; i \neq l)$.

Теорема 2. Для того, чтобы система (1) была асимптотически устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы все характеристические показатели имели отрицательные вещественные части.

Во всех остальных случаях система (1) неустойчива по действующей силе.

Замечание. Вышесформулированные утверждения можно сформулировать также, используя корни ρ_i характеристического уравнения системы (1).

Для того, чтобы система (1) была устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы корни соответствующего характеристического уравнения удовлетворяли следующим условиям:

а) существует корень $\rho_l = 1$ с кратностью p_l, которому соответствуют простые элементарные делители;

б) $|\rho_i| < 1 \quad (i = 1,...,k;\ i \neq l)$.

Для того, чтобы система (1) была устойчива по действующей силе, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения системы (1) были внутри единичного круга.

Во всех остальных случаях система (1) неустойчива по действующей силе.

Автор выражает свою искреннюю благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору Габриеляну М.С. за постоянное внимание к работе, а также за многие полезные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габриелян. М.С., Шагинян С.Г. О построении функции Ляпунова // Уч. записки ЕГУ 1987. №1. С. 39-45.
2. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.:Гостехиздат, 1950. 472с.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 533с.
4. Шагинян С.Г. Об одной задаче теории устойчивости. // Уч. записки ЕГУ. 1986. №2. С.39-46.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 29.11.2001

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №1, 2002 Механика

Письмо в редакцию

Уважаемая редакция, нами в работе "Влияние индуцированного электромагнитного поля и поперечных сдвиговых деформаций на колебание проводящих пластин в поперечном магнитном поле" (Изв. НАН Армении. 2000. Т. 53. №3. С.59-65) была допущена оплошность. Уравнения (2.8) должны быть заменены следующими уравнениями:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial e_1}{\partial x}+\frac{\partial e_2}{\partial y}\right)=\frac{c}{4\pi\sigma}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial h_2}{\partial x}-\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}+\frac{\partial h_2}{\partial y}+\frac{\partial h_3}{\partial z}=0$$

а далее, как в тексте. Следует отметить, что изменение не влияет на характеристическое уравнение (3.3) и на дальнейшие рассуждения.

Отметим также, что в левых частях уравнений (2.6) и (2.7) пропущен оператор $\Box=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

На эту оплошность нам указал кандидат физ.-мат. наук С.А. Джилавян, за что и выражаем ему благодарность.

С уважением

авторы статьи: А.С. Погосян, С.В. Саркисян.