

ԱՍՏՐՈՓԻԶԻԿԱ

ТОМ 67

МАЙ, 2024

ВЫПУСК 2

КЛАССИФИКАЦИЯ БЛАЗАРОВ BLL ПО ТИПАМ ОПТИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ

*А.М.Микаелян, А.В.Абрамян, Г.М.Паронян,
Г.А.Микаелян, А.Г.Сукиасян, В.Х.Мкртчян* 129

BSN: ПЕРВОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВОЙ БЛЕСКА КОНТАКТНОЙ ДВОЙНОЙ СИСТЕМЫ МАЛОЙ МАССЫ V0610 Vir

А.Ализадехсабег, Ф.Ломоз, А.Поро, А.Наримани 139

ПРОЯВЛЕНИЯ АКТИВНОСТИ K2V КАРЛИКА HD 189733 С ЭКЗОПЛАНЕТОЙ ТИПА ГОРЯЧИЙ ЮПИТЕР

И.С.Саванов 151

ФОТОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АСИНХРОННОГО ПОЛЯРА IGR J19552+0044 В 2019-2022гг.

*Ю.В.Бабина, Е.П.Павленко, Н.В.Пить, К.А.Антонюк,
А.А.Сосновский, В.Г.Годунова, И.А.Извекова, Г.И.Кохирова,
Ф.Д.Рахматуллаева, А.О.Симон, М.В.Чупира* 161

ВЯЗКАЯ ПЛОСКО-СИММЕТРИЧНАЯ КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРУНЫ В $f(R)$ ГРАВИТАЦИИ

А.Дабре, П.Макоде 175

(Продолжение на 4-й стр. обложки)

ЕРЕВАН

ԱՍՏՐՈՖԻԶԻԿԱ

ТОМ 67

МАЙ, 2024

ВЫПУСК 2

КЛАССИФИКАЦИЯ БЛАЗАРОВ BLL ПО ТИПАМ ОПТИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ

*А.М.Микаелян, А.В.Абрамян, Г.М.Паронян,
Г.А.Микаелян, А.Г.Сукиасян, В.Х.Мкртчян* 129

BSN: ПЕРВОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВОЙ БЛЕСКА КОНТАКТНОЙ ДВОЙНОЙ СИСТЕМЫ МАЛОЙ МАССЫ V0610 Vir

А.Ализадехсабег, Ф.Ломоз, А.Поро, А.Наримани 139

ПРОЯВЛЕНИЯ АКТИВНОСТИ K2V КАРЛИКА HD 189733 С ЭКЗОПЛАНЕТОЙ ТИПА ГОРЯЧИЙ ЮПИТЕР

И.С.Саванов 151

ФОТОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АСИНХРОННОГО ПОЛЯРА IGR J19552+0044 В 2019-2022гг.

*Ю.В.Бабина, Е.П.Павленко, Н.В.Пить, К.А.Антонюк,
А.А.Сосновский, В.Г.Годунова, И.А.Извекова, Г.И.Кохирова,
Ф.Д.Рахматуллаева, А.О.Симон, М.В.Чупира* 161

ВЯЗКАЯ ПЛОСКО-СИММЕТРИЧНАЯ КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРУНЫ В $f(R)$ ГРАВИТАЦИИ

А.Дабре, П.Макоде 175

(Продолжение на 4-й стр. обложки)

ЕРЕВАН

Выходит с 1965г.
на русском и английском языках

Խմբագրական կոլեգիա

Գլխավոր խմբագիր՝ Ա.Գ.Նիկողոսյան (Հայաստան)
Գլխավոր խմբագրի տեղակալներ՝ Վ.Պ.Գրինին (Ռուսաստան), Հ.Ա.Հարությունյան (Հայաստան)
Պատասխանատու քարտուղար՝ Ա.Ա.Հակոբյան (Հայաստան)
Ժ.Ալեյան (Ֆրանսիա), Գ.Ս.Բխնովատի-Կոզան (Ռուսաստան), Ի.Դ.Կարաչենցև (Ռուսաստան),
Տ.Յու.Մադաքյան (Հայաստան), Ա.Մ.Սիբայելյան (Հայաստան), Բ.Մ.Շուստով (Ռուսաստան),
Յու.Ա.Շչեկինով (Ռուսաստան), Ա.Մ.Չերեպաշչով (Ռուսաստան), Ե.Պ.Պավլենկո (Ռուսաստան),
Է.Ս.Պարսամյան (Հայաստան), Վ.Պ.Ռեշետնիկով (Ռուսաստան), Գ.Ն.Սալուկվաձե (Վրաստան),
Ա.Ա.Սահարյան (Հայաստան), Գ.Տ.Տեր-Ղազարյան (Հայաստան), Մ.Տուրատտո (Իտալիա),
Ս.Դ.Օդինցով (Իսպանիա)

Редакционная коллегия

Главный редактор: А.Г.Никогосян (Армения)
Заместители главного редактора: Г.А.Арутюнян (Армения), В.П.Гринин (Россия)
Ответственный секретарь: А.А.Акопян (Армения)

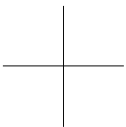
Ж.Алесьян (Франция), Г.С.Бисноватый-Коган (Россия), И.Д.Караченцев (Россия),
Т.Ю.Магакян (Армения), А.М.Микаелян (Армения), С.Д.Одинцов (Испания),
Е.П.Павленко (Россия), Э.С.Парсмян (Армения), В.П.Решетников (Россия),
А.А.Саарян (Армения), Г.Н.Салуквадзе (Грузия), Г.Т.Тер-Казарян (Армения),
М.Туратто (Италия), А.М.Черепашук (Россия), Б.М.Шустов (Россия), Ю.А.Щекинов (Россия)

"АСТРОФИЗИКА" - научный журнал, издаваемый Национальной академией наук Республики Армения. Журнал печатает оригинальные статьи по физике звезд, физике туманностей и межзвездной среды, по звездной и внегалактической астрономии, а также статьи по областям науки, сопредельным с астрофизикой. Журнал предназначается для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

"ԱՍՏՐՈՖԻԶԻԿԱ"-ն գիտական հանդես է, որը հրատարակում է Հայաստանի Հանրապետության Գիտությունների Ազգային Ակադեմիան: Հանդեսը տպագրում է ինքնատիպ հոդվածներ աստղերի ֆիզիկայի, միգամածությունների և միջաստղային միջավայրի ֆիզիկայի, աստղաբաշխության և արտագալակտիկական աստղագիտության, ինչպես նաև աստղաֆիզիկային սահմանակից բնագավառների գծով: Հանդեսը նախատեսված է գիտական աշխատակիցների, ասպիրանտների և բարձր կուրսերի ուսանողների համար:

Адрес редакции: Республика Армения, Ереван 19, пр. Маршала Баграмяна 24^е
Редакция ж. "Астрофизика", тел. 56 81 38
e—mail: astrofiz@sci.am

© Издательство "Гитутюн" НАН Республики Армения, Астрофизика, 2024



CLASSIFICATION OF BLL BLAZARS BY OPTICAL ACTIVITY TYPES

A.M.MICKAELIAN, H.V.ABRAHAMYAN, G.M.PARONYAN,
G.A.MIKAYELYAN, A.G.SUKIASYAN, V.K.MKRTCHYAN

Received 24 March 2024

We have carried out a spectral classification by the Activity Types for a subsample of Blazars from the BZCAT v.5 Catalogue, namely the BL Lac (BLL, Lacertids) candidates, designated in the Catalogue as BZB subtype objects. The classification is based on the Sloan Digital Sky Survey (SDSS) homogeneous medium-resolution optical spectroscopy and along with the standard BPT-type diagnostic diagrams, we have applied our newly introduced fine classification scheme with subtypes of Quasars and considering many more features. Out of 1151 BZB objects, 552 having SDSS spectra were classified. After new classification, 259 (46.1%) of 552 have not changed their optical class, and 293 (53.1%) of these objects have changed their optical class. Having this new information on the optical classification we suggest to change the classification of some objects in BZCAT: for 130 BZB objects to BZG, for 18 BZB objects to BZQ and for 145 BZB objects to BZU.

Keywords: *blazars: BL Lac objects: quasars: radio sources: activity type: classification*

1. *Introduction.* Among the Active Galactic Nuclei (AGN), the most interesting are blazars with combination of two subtypes: a) BL Lac (BLL) objects and b) special types of quasars (QSO): Optically Violent Variable (OVV) and Highly Polarized Quasars (HPQ). A blazar is characterized as a very compact quasar, associated with a presumed Super Massive Black Hole (SMBH) at the center of an active giant elliptical galaxy. Blazars are the most energetic objects in the Universe [1]. The object BL Lac was originally discovered by Hoffmeister [2] as a variable star, and later it was identified by Schmitt [3] as an extragalactic source, and BL Lac type objects were assigned as one of the AGN types. They are characterized by significant optical variability, optical continuous spectrum without or with very weak absorption or emission lines, and they have radio emission, which is typically also variable and polarized.

Massaro et al. [1] presented the blazar catalog BZCAT v.5, where the objects are divided into 4 types: BZB (Lacertids, BL Lac or BLL), BZQ (Quasars, namely Flat Spectrum Radio Quasars, FSRQ), BZG (Galaxies), and BZU (Undetermined class). Table 1 shows the distribution of the types of blazars from the BZCAT catalog.

Table 1

**DISTRIBUTION OF THE TYPES OF BLAZARS FROM
BZCAT CATALOGUE**

N	Type		Number of objects		Number of objects with spectra in SDSS	
			Number	%	Number	%
1	BZB	BL Lac	1151	32.3	552	47.9
2	BZG	Galaxies	274	7.7	150	54.8
3	BZQ	Quasars	1909	53.6	618	32.4
4	BZU	Unclassified	227	6.4	43	18.9
All			3561	100.0	1363	38.3

In our earlier papers we studied and classified BZU, BZG and BZQ objects [4-6]. This paper is devoted to detailed spectral classification of the largest group BZB blazars from the BZCAT catalog. We aim at classifying all objects by activity types, as well as rearranging BZCAT types to have more homogeneous grouping.

2. *Studied data.* For our investigation, we have selected BZB (BL Lac) objects from BZCAT catalog. We have picked out 1151 BL Lac candidates from Table 1, which make up our investigation data. 552 out of the 1151 BZB objects have optical spectra in the SDSS [7]. For these objects we have carried out a detailed classification using the SDSS spectra.

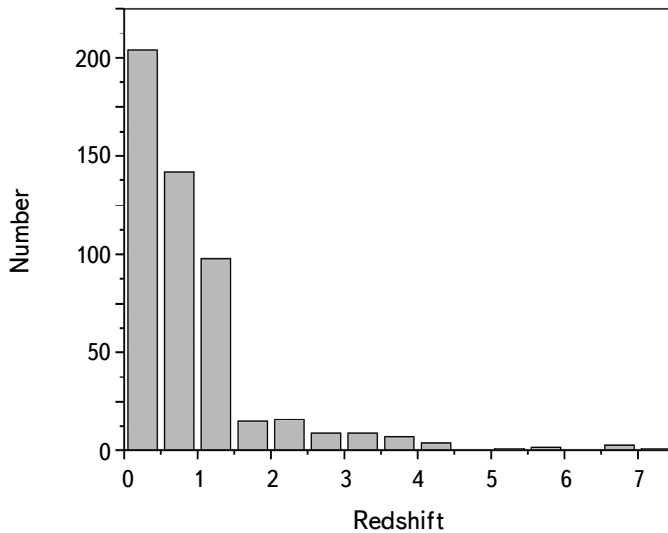


Fig.1. The distribution of BZB objects by redshift.

Table 2

**DISTRIBUTION OF TYPES OF OPTICALLY CLASSIFIED
BZB (BL Lac) OBJECTS FROM BZCAT CATALOGUE**

Classes/Subclasses	SDSS images	VCV-13	NED
BL Lac	-	417	-
QSO	-	28	262
AGN	-	7	-
Galaxy	139	-	145
GClstr	-	-	2
Star	413	-	3
UvES	-	-	3
UvS	-	-	2
VisS	-	-	19
IrS	-	-	7
RadioS	-	-	9
Total	552	452	452

In Fig.1 we give distribution of BZB objects by redshift; this information is taken from SDSS. Most of these objects have redshift smaller than 1.5 (the average is 0.95).

Using the data from various catalogs and data bases VCV-13 [8], NASA/IPAC Extragalactic Database (NED) and SDSS [7], we have clarified the optical classification of these objects prior to our classification. We list these data in Table 2.

As it can be seen from Table 2, some objects do not have detailed optical classification. In this table information on optical classification for all BZB objects from SDSS, VCV-13 catalogues and NED database is given.

The measurements of the SDSS spectra are very often based on lines at the noise level and of low quality. As a result, automatic measurements lead to some misclassification. Thus, it is necessary to carefully check the spectra at all wavelengths and to decide which measurements should be used for further study. The lines which are used in the diagnostic diagrams are especially important ($H\beta$, $[OIII] 5007 \text{ \AA}$, $[OI] 6300 \text{ \AA}$, $H\alpha$, $[NII] 6583 \text{ \AA}$, and $[SII] 6716+6731 \text{ \AA}$) [9].

3. *Optical classification for activity types.* Diagnostic diagrams are useful tools for the galaxies classification based on the emission lines ratio [10-12]. Mickaelian et al. in [10,11] have introduced a new optical classification scheme (<https://www.bao.am/activities/projects/21AG-1C053/mickaelian/>). In this paper we have carried out optical classification using this method. To guarantee the best accuracy and consider all possible details, we classify the objects in several ways and then consider all obtained types and subtypes:

- By the 1st diagnostic diagram (DD1) using line intensity ratios $[\text{OIII}]/\text{H}\beta$ vs. $[\text{OI}]/\text{H}\alpha$.
- By the 2nd diagnostic diagram (DD2) using line intensity ratios $[\text{OIII}]/\text{H}\beta$ vs. $[\text{NII}]/\text{H}\alpha$.
- By the 3rd diagnostic diagram (DD3) using line intensity ratios $[\text{OIII}]/\text{H}\beta$ vs. $[\text{SII}]/\text{H}\alpha$.

Table 3

CLASSIFICATION OF BZB OBJECTS USING THE SDSS SPECTRA

Classification		Number	%
Abs (Absorption galaxy)		100	18.11
BZB	Continual spectra with z	22	3.97
	Continual spectra without z	237	42.85
Em		24	4.32
LINER		2	0.36
NLQ1		1	0.18
NLQ1.5		2	0.36
QSO		16	2.90
SB		2	0.36
Sy2		2	0.36
Unknown		145	26.23
Total		552	100

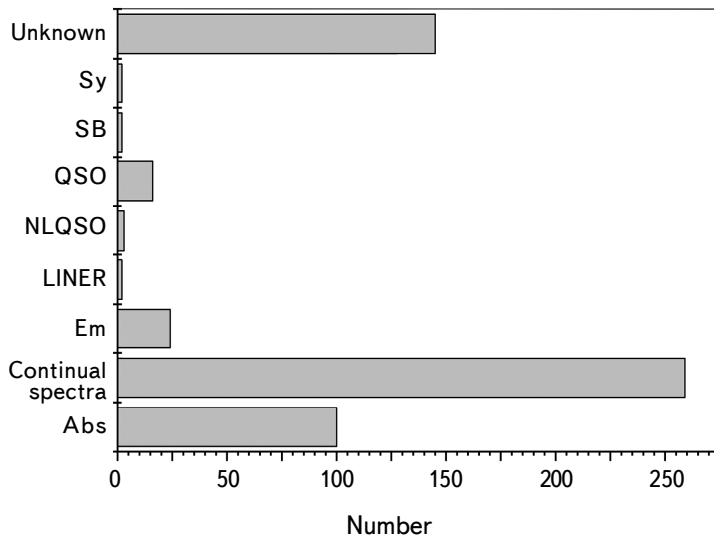


Fig.2. The new classification of the BZB objects using the SDSS spectra.

- By comparison and using the 1st, 2nd and 3rd diagnostic diagrams simultaneously
- By eye (considering all features and effects). Very often, the diagnostic diagrams do not give full understanding for all objects and only eye can reveal some details.

For these objects in the spectra, the lines $H\alpha$ and $H\beta$ were mainly absent (due to redshifts), so we made a classification only by the visual method.

In Table 3 and in Fig.2 we show our spectral classification for 552 BZB objects using the SDSS spectra. It is clear from Table 3 and Fig.2 that these objects mostly have "Continual spectra", which dominated BZB objects (about 46.82%).

After our new classification, 259 (46.1%) out of 552 have not changed their optical class, and 293 (53.1%) out of these objects have changed their optical class.

Table 4 shows our detailed classification of the 10 BZB objects using the SDSS spectra (the full list will be available in electronic form in Vizier). Having this new information on the optical classification we suggest to change the classification of some objects in BZCAT between the groups, given by Massaro et al. [1]: for 130 BZB objects to BZG, for 18 BZB objects to BZQ and for 145 BZB objects to BZU.

Table 4

LIST OF 10 BZB OBJECTS CLASSIFIED USING THE SDSS SPECTRA

BZCAT name	Old class				New class		M	L
	BZCAT	SDSS	VCV-13	NED	Activity type	BZCAT class	SDSS r	$\times 10^{43} L_{\odot}$
5BZB J0110-0415	BL Lac	Star			NLQSO1	BZQ	-22.76	41.82
5BZB J0832+4913	BL Lac	Star	B	QSO	Sy2	BZG	-21.82	17.51
5BZB J1058+4304	BL Lac	Star	B	QSO	QSO	BZQ	-22.96	50.12
5BZB J1337+0035	BL Lac	Galaxy	B	G	LINER	BZG	-21.76	16.52
5BZB J1402+1559	BL Lac	Star	B	QSO	LINER	BZG	-22.02	21.08
5BZB J1417+2543	BL Lac	Galaxy	B	RadioS	Em	BZG	-22.70	39.59
5BZB J1437+3002	BL Lac	Star			QSO	BZQ	-22.88	46.38
5BZB J1617+4106	BL Lac	Galaxy	B	QSO	Sy2	BZG	-22.14	23.51
5BZB J1714+3036	BL Lac	Star	B	G	QSO	BZQ	-22.54	34.03
5BZB J2219+2120	BL Lac	Star			NLQSO1.5	BZQ	-21.83	17.73

4. *Absolute magnitudes and luminosities.* Having information on magnitudes from SDSS, we have calculated absolute magnitudes for BZB objects using Eq. (1).

$$M = m + 5 - 5 \log L - f(z) + \Delta m(z), \quad (1)$$

$$L = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \left[(1+z)^3 \Omega_M + \Omega_{\Lambda} \right]^{-0.5} dz \quad (2)$$

where L is the luminosity distance as defined by Riess et al. [13], z is the redshift, $f = 2.5(1-z)^{1-\alpha}$ the k correction, $\Delta m(z)$ is a correction to k considering that the spectrum of quasars is not strictly a power law of the form $S \propto \nu^{-\alpha}$ ($\alpha = -0.3$, [8]).

The following values were taken for the cosmological constants in the calculations:

$$\Omega_M = 0.29, \quad \Omega_\Lambda = 0.71, \quad H_0 = 71 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}.$$

Having absolute magnitude, we counted luminosities for BZB objects from Blazars catalogue using Eq. (3).

$$L = 2.512^{M_\odot - M} L_\odot \quad (3)$$

where $L_\odot$ and $M_\odot$ are the luminosity and the absolute magnitude of the Sun ($L_\odot = 3.83 \cdot 10^{33} \text{ erg/s}$, $M_\odot = 4.83$). Data on absolute magnitude and luminosity can be found in Table 4.

After the optical classification and change of the subtypes of some objects (for 130 BZB objects to BZG, for 18 BZB objects to BZQ and for 145 BZB objects

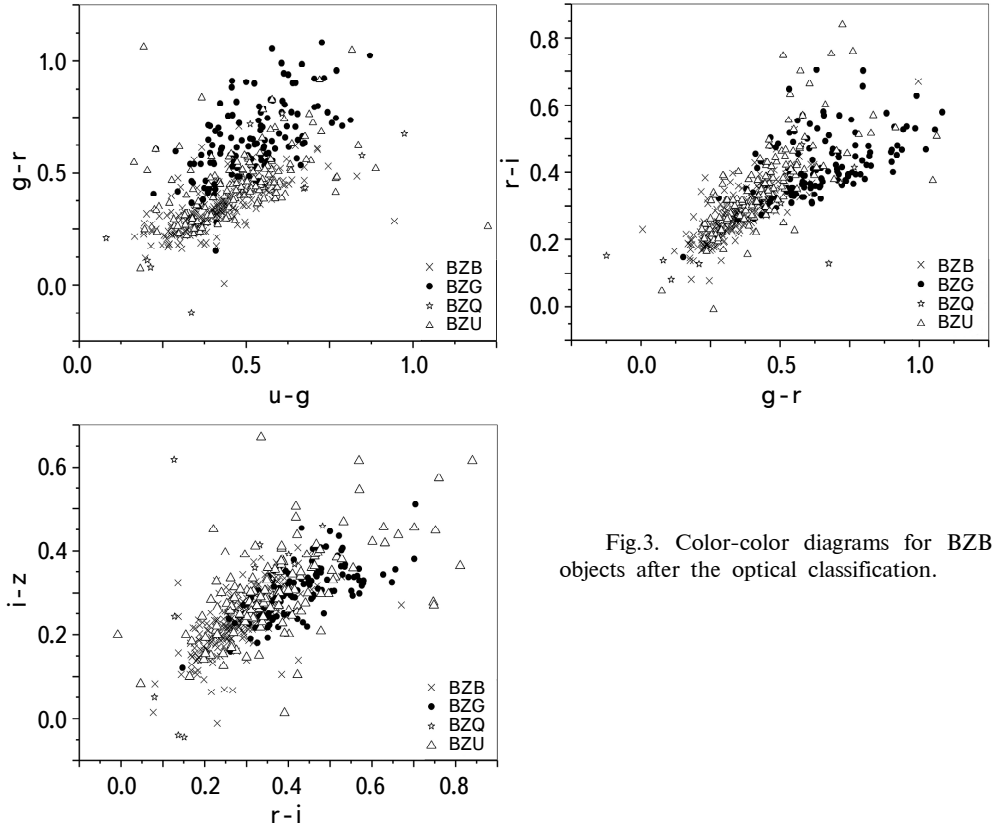


Fig.3. Color-color diagrams for BZB objects after the optical classification.

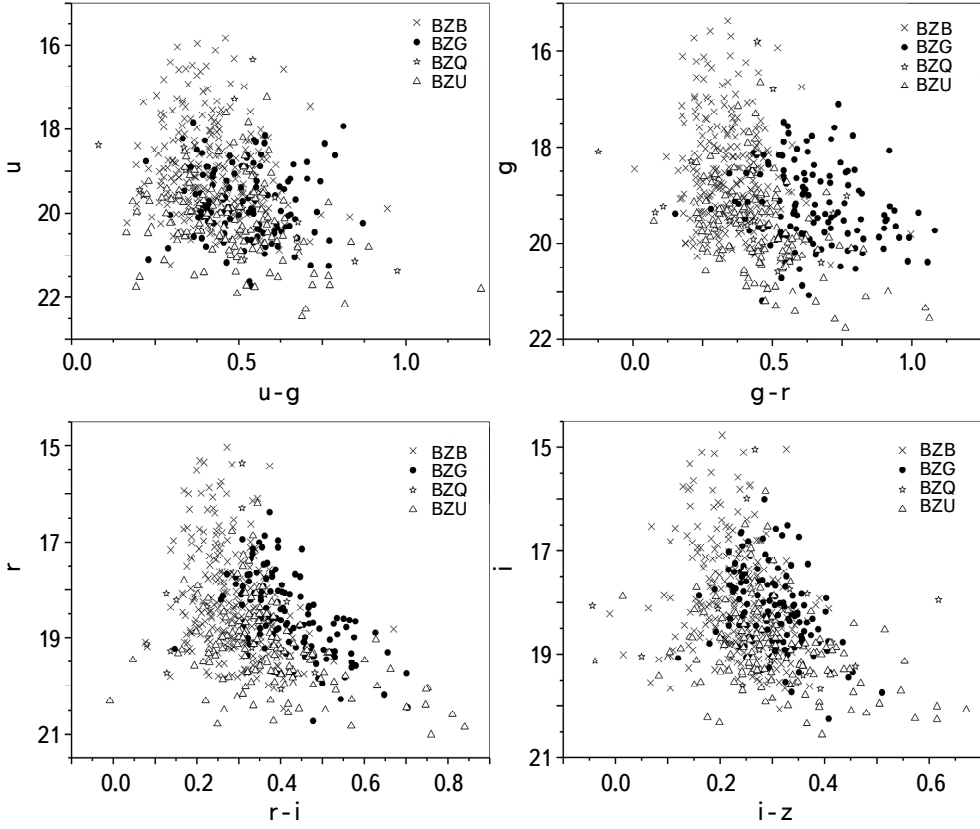


Fig.4. Color-magnitude diagrams for BZB objects after the optical classification.

to BZU), we built color-color and color-magnitude diagram for BL Lac objects (Fig.3 and 4). In most of graphs blazars subtypes are scattered in all area. In color-color and color-magnitude diagrams distribution of BZG objects have a shift from other blazars distribution and is different from others. In color-magnitude diagrams the weakest objects are mainly BZU subtype objects.

5. Results. We selected BZB objects from BZCAT catalog (Table 1). 552 of the 1151 BZB objects have optical spectra in the SDSS. For these objects we have carried out a detailed classification using the SDSS spectra. In this paper we have carried out optical classification using method given by Mickaelian et al. in [10,11]. Our optical classification results are given in Table 3 and 4.

In Table 3 and in Fig.2 we show our spectral classification for 552 BZB objects using the SDSS spectra. It is clear from Table 3 and Fig.2 that these objects are mostly have "Continual spectra", which dominated BZB objects (about 46.82%). After our new classification, 259 (46.1%) of 552 have not changed their optical class, and 293 (53.1%) of these objects have changed their optical class.

Having this new information on the optical classification we suggest to change the classification of some objects in BZCAT between the groups, given by Massaro et al. [1]: for 130 BZB objects to BZG, for 18 BZB objects to BZQ and for 145 BZQ objects to BZU.

Acknowledgements. This work was partially supported by the Republic of Armenia Ministry of Education, Science, Culture and Sports (RA MESCS) Higher Education and Science Committee (HESC), in the frames of the research project 21AG-1C053 (2021-2026).

NAS RA V.Ambartsumian Byurakan Astrophysical Observatory (BAO),
Armenia, e-mail: abrahamyanhayk@gmail.com

КЛАССИФИКАЦИЯ БЛАЗАРОВ BLL ПО ТИПАМ ОПТИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ

А.М.МИКАЕЛЯН, А.В.АБРАМЯН, Г.М.ПАРОНЯН, Г.А.МИКАЕЛЯН,
А.Г.СУКИАСЯН, В.Х.МКРТЧЯН

Проведена спектральная классификация по типам активности для подвыборки блазаров из каталога BZCAT v.5, конкретно для кандидатов в BL Lac (BLL, Лацертиды), обозначенные в каталоге как объекты подтипа BZB. Классификация основана на оптической спектроскопии среднего разрешения Слоановского цифрового обзора неба (SDSS), и наряду со стандартными диагностическими диаграммами ВРТ-типа применена недавно введенная авторами схема тонкой классификации с подтипами квазаров и учетом многих других особенностей. Из 1151 BZB объектов классифицированы 552, которые имеют спектры SDSS. После новой классификации 259 (46.1%) из 552 не изменили свой подтип, а 293 (53.1%) из этих объектов изменили подтип. Имея эту новую информацию об оптической классификации, мы предлагаем изменить классификацию некоторых объектов в BZCAT: для 130 объектов BZB на BZG, для 18 объектов BZB на BZQ и для 145 объектов BZB на BZU.

Ключевые слова: *блазары: объекты BL Lac: квазары: радиоисточники: тип активности: классификация*

REFERENCES

1. *E.Massaro, A.Maselli, C.Leto et al.*, *Astrophys. Space Sci.*, **357**, 1, 2015.
2. *C.Hoffmeister*, *Astron. Nachr.*, **236**, 233, 1929.
3. *J.L.Schmitt*, *Nature*, **218**(5142), 663, 1968.
4. *H.V.Abrahamyan, A.M.Mickaelian, G.M.Paronyan et al.*, *ComBAO*, **66**, 1, 2019.
5. *H.V.Abrahamyan, A.M.Mickaelian, G.M.Paronyan et al.*, *Astrophysics*, **66**, 11, 2023.
6. *H.V.Abrahamyan, A.M.Mickaelian, G.M.Paronyan et al.*, *Astrophysics*, **67**, 1, 2024.
7. *Abdurro'uf, K.Accetta, C.Aerts et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **259**, 35, 2022.
8. *M.P.Véron-Cetty, P.Véron*, *Astron. Astrophys.*, **518**, A10, 2010.
9. *D.E.Osterbrock*, *Proc. Texas Symposium on Relativistic Astrophysics*, 9th, Munich, West Germany, Dec 14-19, 1978, New York, New York Academy of Sciences, 22, 1980.
10. *A.M.Mickaelian, H.V.Abrahamyan, G.A.Mikayelyan et al.*, *ComBAO*, **69**, 10, 2022.
11. *A.M.Mickaelian, H.V.Abrahamyan, G.A.Mikayelyan et al.*, *Astron. Astrophys.*, **682**, id A174, 2024.
12. *D.Privatus, C.Pappalardo, P.V.K.Rao et al.*, *Astrophysics*, **66**, 311, 2023.
13. *A.G.Riess, L.-G.Strolger, J.Tonry et al.*, *Astrophys. J.*, **607**, 665, 2004.

DOI: 10.54503/0571-7132-2024.67.2-139

BSN: FIRST LIGHT CURVE STUDY OF THE LOW
MASS CONTACT BINARY V0610 VirA.ALIZADEHSABEGH¹, F.LOMOZ², A.PORO³, A.NARIMANI⁴

Received 14 February 2024

Accepted 10 June 2024

Photometric data were used to perform the first light curve analysis of the V0610 Vir binary system. Observations and analysis were done in the form of the Binary Systems of South and North (BSN) Project. We extracted the minima from our observations and compiled the literature, which was few. Therefore, we performed computations using the reference ephemeris and presented a new ephemeris and O-C diagram with a linear fit. Light curve analysis was performed using the PHOEBE Python code and the Markov chain Monte Carlo (MCMC) approach. The assumption of a hot starspot was required due to the asymmetry in the light curve's maxima. The analysis shows that V0610 Vir is a contact binary system with a fillout factor of 0.085, a mass ratio of 0.998, and an inclination of $70^{\circ}.65$. The absolute parameters of the system were estimated based on the Gaia DR3 parallax method. The results show that the system is a low-mass contact binary with a total mass lower than $0.8 M_{\odot}$. The location of the stars was shown in the $M-L$ and $M-R$ diagrams.

Keywords: *techniques: photometric* - *stars: binaries: eclipsing* - *stars: individual (V0610 Vir)*

1. Introduction. The W Ursae Majoris (W UMa) binaries include two stars that are typically F, G, or K spectral type stars whose Roche lobes have been fielded, and they share a similar envelope [1-3]. The orbital period of W UMa-type systems is less than one day. Also, the light curves of these binary stars show two equal or almost equal minima, demonstrating that their effective surface temperatures are close to each other [4]. Further investigation of contact systems is important since it can reveal many details about the evolution of stars.

V0610 Vir listed in [5]. According to the AAVSO International Variable Star Index (VSX) and ASAS-SN variable stars' catalogs, V0610 Vir is a W UMa-type binary system with an orbital period of $0^{\text{d}}.3398754$ and $0^{\text{d}}.3398768$, respectively. The coordinates of this system in the Gaia DR3 database are R.A.: $176^{\circ}.7745788$ and Dec.: $1^{\circ}.2447709$ (J2000).

The maximum apparent magnitude V_{max} of the system was reported as $13^{\text{m}}.31$ in the ASAS3 catalog, $13^{\text{m}}.15$ in the GCVS catalog, $13^{\text{m}}.31$ in the AAVSO, and $13^{\text{m}}.15$ in the Kazarovets et al. [5].

This work is a continuation of the BSN¹ project on eclipsing binary systems. The paper's structure is as follows: Section 2 explains observation and data reduction; Section 3 is about extracting minima and obtaining new ephemeris; and Section 4 is related to light curve analysis. The technique used to estimate the absolute parameters is described in Section 5, and the conclusion is in Section 6.

2. Observation and data reduction. The observations in the photometric system of V0610 Vir were carried out one night in March 2020 by a Schmidt-Newton 254mm/1016mm telescope with the G2-8300 CCD camera at a private observatory in the Czech Republic (49.65 N, 14.41 E). During observations, the CCD average temperature was -20°C .

A V -band filter was used, and a total of 279 images were obtained. Each image has an exposure time of 90 seconds. Images were processed using MaxIm DL software, which included dark, bias, and flat-field for basic data reduction.

Fig.1 displays the comparison and check stars that were selected that were close to the target and had a suitable apparent magnitude in comparison to V0610 Vir. So, we considered a comparison star named UCAC4 459-049136 (11 46 55.388, +01 44 51.534) with an apparent magnitude of $V = 14.32$ and nine check stars including UCAC4 457-049442 (11 47 17.678, +01 20 02.553) with a $V = 13^{\text{m}}.20$, UCAC4 458-049431 (11 46 59.259, +01 21 57.295) with a $V = 13^{\text{m}}.72$, UCAC4 457-049428 (11 46 52.883, +01 21 12.000) with a $V = 13^{\text{m}}.29$, UCAC4 457-049456 (11 47 48.705, +01 19 04.569) with a $V = 13^{\text{m}}.90$, UCAC4 457-049455

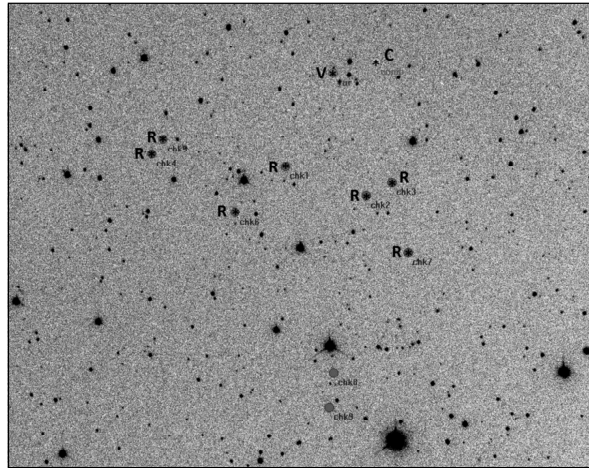


Fig.1. Field-of-view of the V0610 Vir binary system (V), comparison (C), and check stars (R). The field-of-view of the picture is 35×25 arcminutes.

¹ <https://bsnp.info/>

(11 47 46.001, +01 18 14.696) with a $V=14^m.51$, UCAC4 457-049448 (11 47 29.787, +01 22 38.372) with a $V=14^m.13$, UCAC4 458-051054 (11 46 49.701, +01 25 18.116) with a $V=14^m.17$, UCAC4 458-051065 (11 47 07.913, +01 32 12.092) with a $V=13^m.65$ and UCAC4 458-051064 (11 47 07.423, +01 33 47.439) with a $V=15^m.37$. The coordinates and apparent magnitudes of all the comparison and check stars were gathered from the ASAS-SN catalog.

Finally, we used the AstroImageJ program to normalize the flux of all the data [6].

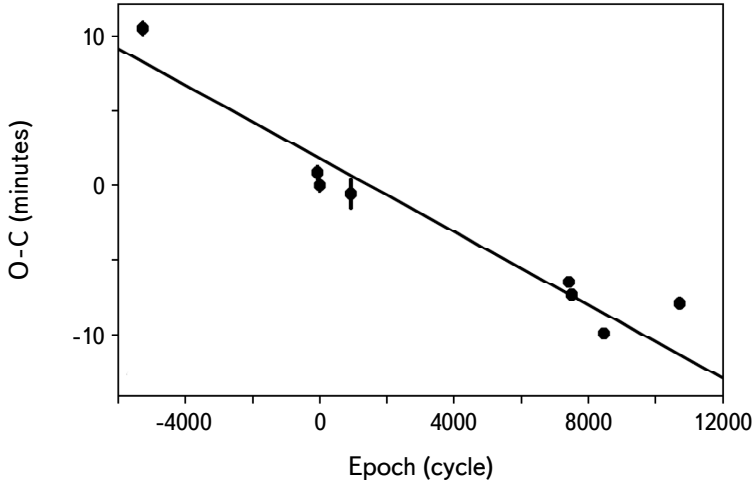


Fig.2. O-C diagram with a linear fit for the V0610 Vir system.

3. New ephemeris. In binary star systems, the O-C diagram is an important tool for finding new ephemeris. The O-C value represents the difference between the predicted and observed times of an eclipse in a binary system. The O-C diagram allows us to visualize the changes in the timing of eclipses over a longer period of time. By analyzing the trends of the O-C diagram, we can study various phenomena, including orbital period variations, eclipse timing variations, and even the presence of additional companions in the system. For this purpose, we extracted one primary and one secondary from our observations and collected them with ten other minima from the literature (Table 1). Also we converted all of the times of minima to the Barycentric Julian Date in Barycentric Dynamical Time (BJD_{TDB}).

To compute Epoch and O-C, we used a reference ephemeris with a time of minima of 2455291.81179(30) from [7] and an orbital period of $0^d.3398768$ that we obtained from the ASAS-SN catalog. Therefore, according to the O-C diagram and considering that the number of observations for this system is limited and

Table 1

AVAILABLE TIMES OF MINIMA FOR V0610 Vir

Min.(BJD_{TDB})	Error	Method	Epoch	O-C (day)	Reference
2453499.64872	0.00030	V	-5273	0.0073	Diethelm [7]
2455267.68109	0.00030	V	-71	0.0006	Diethelm [7]
2455291.81179	0.00030	V	0	0	Diethelm [7]
2455605.85759	0.00070	V	924	-0.0004	Diethelm [8]
2455978.87028	0.00070	V	2021.5	-0.0025	Diethelm [9]
2456038.68868	0.00070	V	2197.5	0.0024	Diethelm [9]
2457811.65388	0.00010	CCD-Clear	7414	-0.0045	Lehkry et al. [10]
2457840.37499	0.00020	CCD-Clear	7498.5	-0.0030	Lehkry et al. [10]
2457840.54279	0.00020	CCD-Clear	7499	-0.0051	Lehkry et al. [10]
2458166.48289	0.00010	CCD-Clear	8458	-0.0069	Lehkry et al. [10]
2458932.39593	0.00047	V	10711.5	-0.0062	This study
2458932.56657	0.00024	V	10712	-0.0055	This study

few minima are available for it, only a least-squares linear fit can be considered (Fig.2). Based on this information, the new ephemeris can be calculated as follows:

$$\text{Min.I}(BJD_{TDB}) = 2455291.81304(13) + 0.339875947(17) \times E, \quad (1)$$

where Min.I is related to the primary minimum, and E is the cycle.

Table 2

PHOTOMETRIC SOLUTION OF V0610 Vir

Parameter	Result
T_1 (K)	5811^{+7}_{-2}
T_2 (K)	5440^{+4}_{-9}
$q = M_2/M_1$	0.998^{+15}_{-9}
$\Omega_1 = \Omega_2$	3.70(5)
i °	70.65^{+12}_{-11}
f	0.085^{+9}_{-9}
I_1/I_{tot} (V)	0.580(2)
I_2/I_{tot} (V)	0.420(2)
r_1 (mean)	0.388(27)
r_2 (mean)	0.388(26)
Phase shift	-0.009(1)
Colatitude _{spot} (deg)	74(1)
Longitude _{spot} (deg)	348(2)
Radius _{spot} (deg)	27(1)
T_{spot}/T_{star}	1.09(1)
Radius _{spot} (deg)	27(1)
Component	Hotter star

4. *Light curve solution.* The PHOEBE 2.4.9 version and the MCMC method were used to analyze the light curve of the V0610 Vir system [11].

We used the $P-T_1$ relationship from [12] to calculate the effective temperature of the hotter star as the input Eq. (2).

$$T_1 = \left(6951.42^{+112.16}_{-112.68}\right)P + \left(3426.01^{+44.12}_{-43.90}\right). \quad (2)$$

The gravity-darkening coefficients was determined $g_1 = g_2 = 0.32$ [13] and the bolometric albedo was assumed to be $A_1 = A_2 = 0.5$ [14]. Additionally, the stellar atmosphere was modeled using the Castelli, Kurucz [15] method, and the limb darkening coefficients were employed in the PHOEBE as a free parameter.

Due to the availability of photometric data, we used q -search to estimate the mass ratio. The obtained mass ratio was used as the MCMC process's initial parameter value.

The maxima of the light curve were asymmetric ($V_{max\ 1} - V_{max\ 2} \neq 0$). So, the light curve solution required the use of a hot starspot on the hotter component [16].

Then, the theoretical fit was improved using PHOEBE's optimization tool. Moreover, taking into account a normal Gaussian distribution in the range of solutions for inclination, mass ratio, fillout factor, and effective temperatures, we

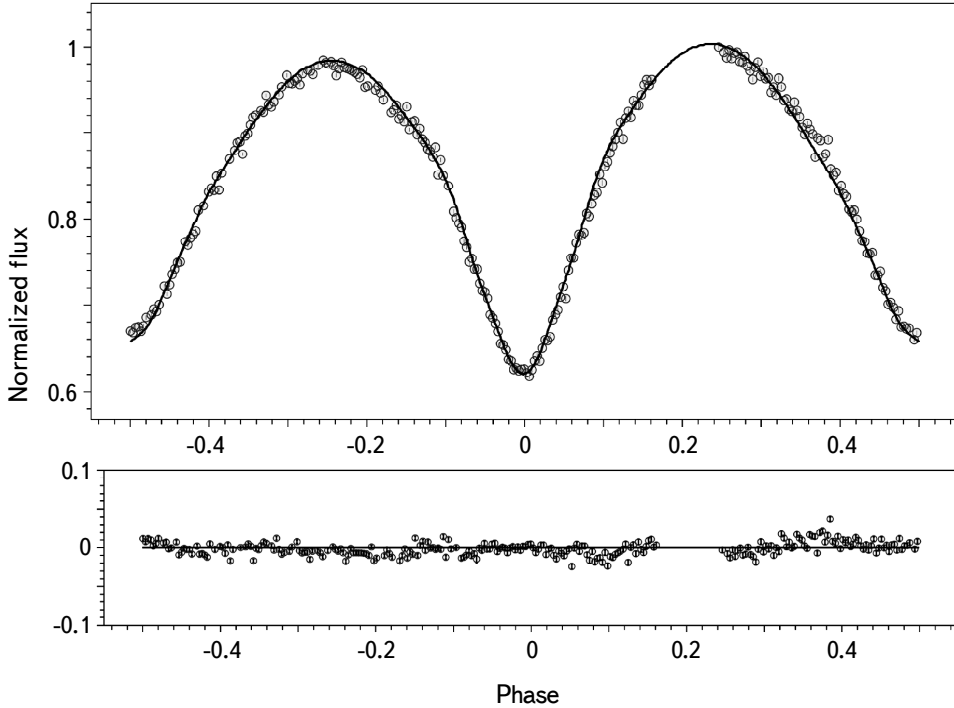


Fig.3. The observed and synthetic light curves of the system in V filter.

estimated the values of the parameters together with their uncertainties using the MCMC approach based on the emcee package in PHOEBE code [17]. We employed 96 walkers and 600 iterations for each walker in the MCMC processing. Table 2 contains the results of the light curve solution. The corner plots and final synthetic light curve are shown in Fig.3 and Fig.4, respectively. The component positions for the four phases of an orbital period are shown in Fig.5.

5. Absolute parameters estimation. The estimation of absolute parameters in contact binary stars typically involves determining quantities such as mass, radius, luminosity, absolute bolometric magnitude, and surface gravity. So, to estimate absolute parameters, the Gaia DR3 parallax method was used in [18,12].

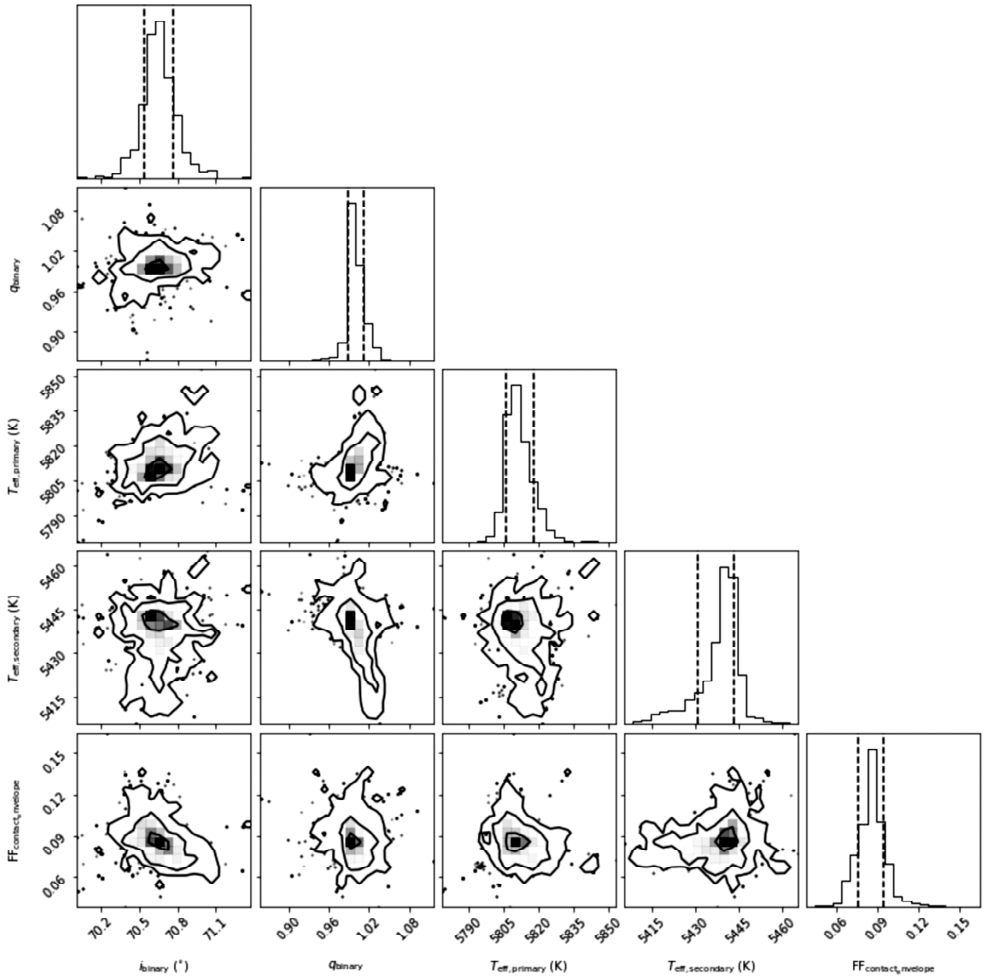


Fig.4. The corner plots of the system from the MCMC modeling.

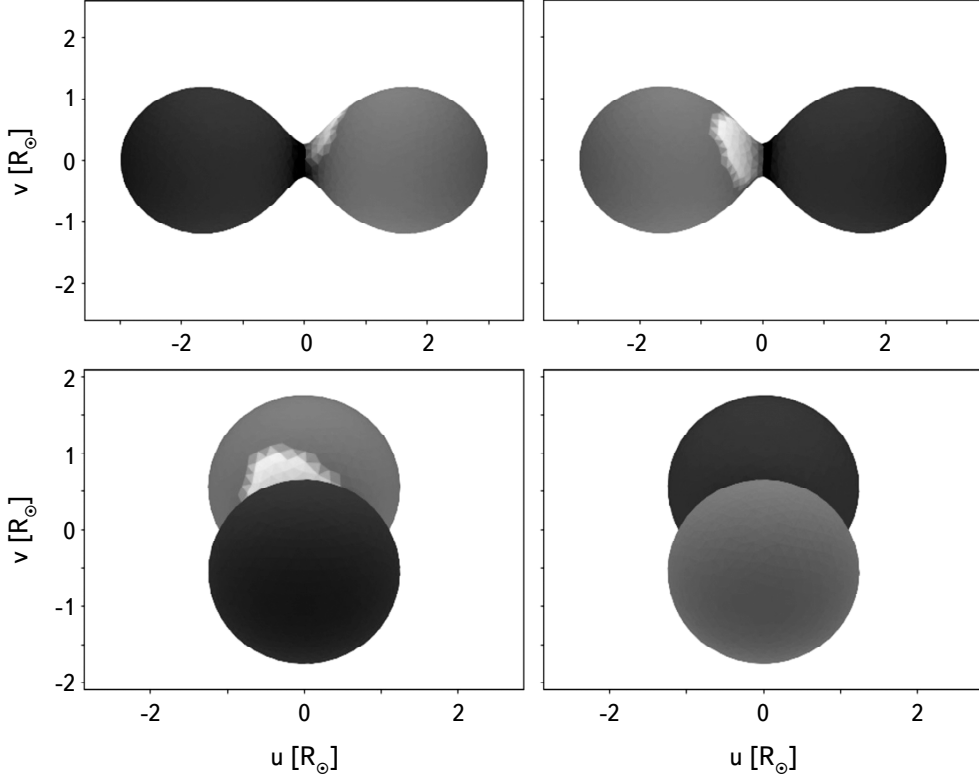


Fig.5. Geometric structure of V0610 Vir with a hot spot on the hotter component.

Therefore, we used $V_{max} = 13.33 \pm 0.09$ from our observations, the extinction coefficient $A_v = 0.063 \pm 0.001$ from the Schlafly, Finkbeiner [19] study, and the Gaia DR3 distance $d(pc) = 479 \pm 3$ for V0610 Vir.

So, we estimated the absolute magnitude M_v of the system, subsequently the absolute magnitude for the components, and the bolometric magnitude M_{bol} of each star, respectively Eqs. (3) to (5).

$$M_v = V - 5 \log d + 5 - A_v \quad (3)$$

$$M_{v(1,2)} = M_{v(system)} = -2.5 \log \frac{l_{(1,2)}}{l_{tot}} \quad (4)$$

$$M_{bol} = M_v + BC. \quad (5)$$

The hotter and cooler components' bolometric correction $BC_1 = -0.073$ and $BC_2 = -0.153$ were derived as a function of the effective temperature of the stars [20].

The following equations were used to determine the luminosity and radius,

and separation between the center of mass of the components (6, 7 and 8):

$$M_{bol} - M_{bol\odot} = -2.5 \log \frac{L}{L_{\odot}} \quad (6)$$

$$R = \left(\frac{L}{4\pi\sigma T^4} \right)^{1/2} \quad (7)$$

$$a = \frac{R}{r_{mean}}. \quad (8)$$

Additionally, using the mass ratio determined by the outcomes of the light curve analysis, each component's mass was determined using the well-known Kepler's third law Eq. (9). Using Eq. (10), the surface gravity was estimated. The estimated parameters using the Gaia DR3 parallax are shown in Table 3.

$$\frac{a^3}{G(M_1 + M_2)} = \frac{P^2}{4\pi^2} \quad (9)$$

$$g = G_{\odot} (M/R^2). \quad (10)$$

Table 3

THE ABSOLUTE PARAMETERS OF THE V0610 Vir BINARY SYSTEM

Parameter	Hotter star	Cooler star
M_v (mag.)	5.457(72)	5.807(70)
M_{bol} (mag.)	5.384(72)	5.654(70)
$L(L_{\odot})$	0.553(35)	0.431(27)
$R(R_{\odot})$	0.735(21)	0.741(21)
$M(M_{\odot})$	0.400(44)	0.399(49)
$\log g$ (cgs)	4.307(20)	4.300(26)
a ($R_{\odot}$)	1.902(71)	

6. *Summary and conclusion.* We observed the V0610 Vir binary system at an observatory in the Czech Republic. We extracted our observed minima in addition to collecting from the literature. Then, we determined the epoch and O-C values using the reference ephemeris. The O-C diagram shows that just a liner fit can be considered, and that is descending.

Light curve analysis was performed using the latest available version of PHOEBE Python code together with the MCMC approach. Moreover, the Gaia DR3 parallax was used to estimate the absolute parameters of the V0610 Vir system.

According to the light curve analysis, the companion stars in this system have

a temperature difference of 371 K. In contact systems, the maximum temperature difference between two stars is around 5%, which is consistent with our light curve

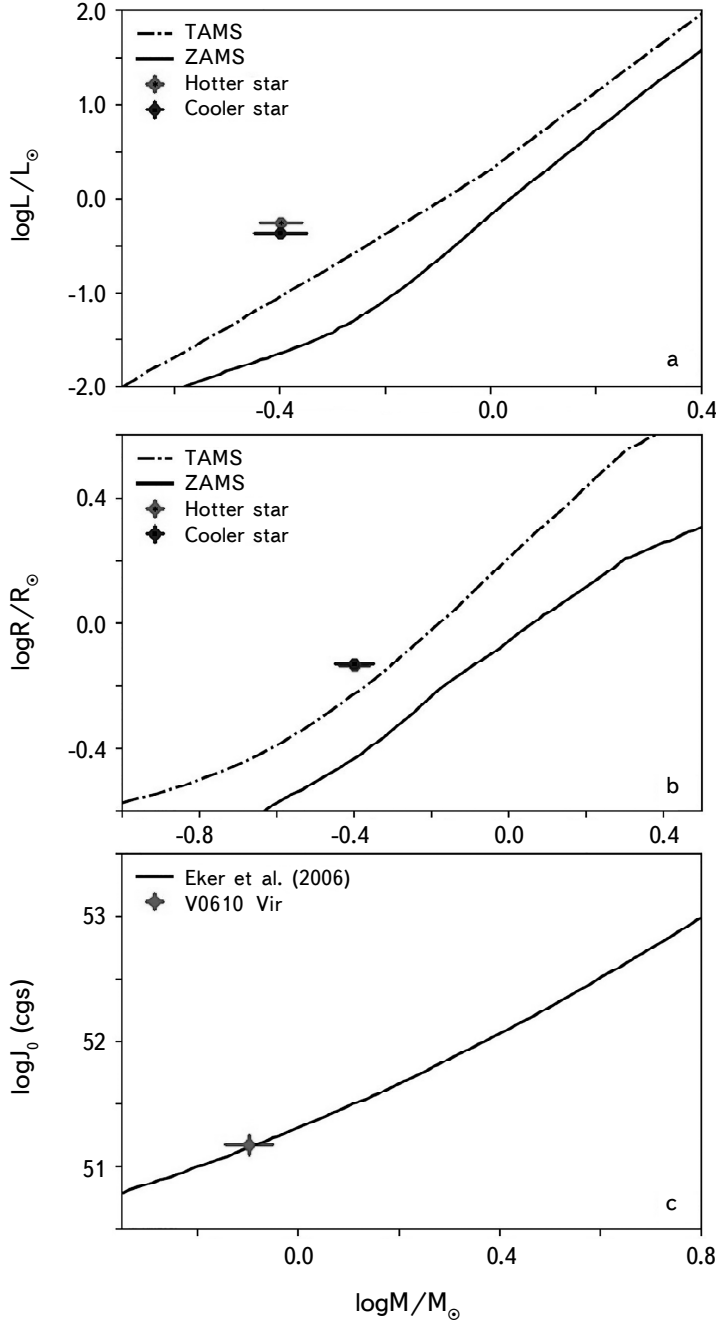


Fig.6. a) $\log M - \log L$ diagram; b) $\log M - \log R$ diagram; c) $\log M_{\text{tot}} - J_0$ diagram.

analysis in this regard [21]. Based on the temperatures of the stars, G3 and G8 are the spectral types of the hotter and cooler stars in this system, respectively Eker et al. [22].

The evolution of V0610 Vir is depicted by the positions of each component on the logarithmic scaled Mass-Luminosity $M-L$ and Mass-Radius $M-R$ diagrams (Fig.6a, b). These diagrams show both the Terminal-Age Main Sequence (TAMS) and the Zero-Age Main Sequence (ZAMS). Due to their very close masses and radii, their position is next to each other and above TAMS.

The orbital angular momentum of the system is 51.173 ± 0.079 . This result is based on the following equation from the Eker et al. [23] study:

$$J_0 = \frac{q}{(1+q)^2} \sqrt[3]{\frac{G^2}{2\pi} M^5 P}, \quad (11)$$

where q is the mass ratio (M_2/M_1), M is the total mass of the system ($M_1 + M_2$), P is the orbital period, and G is the gravitational constant. The units in Eq. (11) are based on CGS. The $\log M_{tot} - J_0$ diagram (Fig.6c) considers the V0610 Vir in a contact binary systems region.

According to the short orbital period, light curve solution, and estimation of the absolute parameters of the V0610 Vir, it can be concluded that this system is a Low-Mass Contact Binary (LMCB) system. The orbital period variation trend in LMCB binary systems is usually decreasing, so the examination of this requires more observations and a parabola on the O-C diagram. It should be noted that the LMCB systems have formed a disc that has the potential to be a place for planet formation with an age considerably shorter than the age of host stars [24]). So, based on the position of this system's stars in Fig.6 diagrams and the low mass of the two stars, we suggest it for future observations and investigations.

Acknowledgements. This manuscript was prepared by the BSN project (<https://bsnp.info/>). We have made use of Gaia DR3 results. The Gaia mission is from the European Space Agency (ESA) (<http://cosmos.esa.int/gaia>), processed by the Gaia Data Processing and Analysis Consortium (DPAC).

¹ Department of Photonics, University of Tabriz, Tabriz, Iran

² Variable Star and Exoplanet Section, Czech Astronomical Society, Prague, Czech Republic

³ Astronomy Department of the Raderon AI Lab., BC., Burnaby, Canada, e-mail: poroatila@gmail.com

⁴ Independent Researcher, Tabriz, Iran

BSN: ПЕРВОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВОЙ
БЛЕСКА КОНТАКТНОЙ ДВОЙНОЙ СИСТЕМЫ
МАЛОЙ МАССЫ V0610 Vir

А.АЛИЗАДЕХСАБЕГ¹, Ф.ЛОМОЗ², А.ПОРО³, А.НАРИМАНИ⁴

Впервые, используя фотометрические данные, выполнен анализ световой кривой двойной системы V0610 Vir. Наблюдения и анализ были проведены в рамках проекта BSN (Binary Systems of South and North). Из наших наблюдений мы извлекли минимумы световой кривой и собрали имеющуюся в литературе небогатую информацию. Вычисления проведены с использованием эталонной эфемериды, и представлена новая эфемерида и диаграмма О-С с линейной аппроксимацией. Анализ световой кривой был выполнен с использованием Python-кода PHOEBE и метода марковских цепей Монте-Карло (MCMC). Предположение о горячем звездном пятне было необходимо из-за асимметрии в максимумах световой кривой. Анализ показывает, что V0610 Vir является контактной двойной системой с коэффициентом заполнения 0.085, отношением масс 0.998 и наклоном $70^{\circ}.65$. Абсолютные параметры системы были оценены на основе метода параллакса Gaia DR3. Результаты показывают, что система представляет собой контактную двойную систему с общей массой менее $0.8 M_{\odot}$. Расположение звезд показано на диаграммах $M-L$ и $M-R$.

Ключевые слова: *методы: фотометрические: звезды: двойные: затменные: звезды: индивидуальные (V0610 Vir)*

REFERENCES

1. D.P.Kjurkchieva, V.A.Popov, D.L.Vasileva et al., RAA, **16**, 135, 2016. doi:10.1088/1674-4527/16/9/135.
2. Y.Zhang, Q.W.Han, J.Z.Liu, Publ. Astron. Soc. Pacif., **128**, 124201, 2016. doi:10.1088/1538-3873/128/970/124201.
3. A.Poro, M.Tanriver, R.Michel et al., Publ. Astron. Soc. Pacif., **136**, 024201, 2024. doi:10.1088/1538-3873/ad1ed3.
4. K.Li, Q.-Q.Xia, S.-M.Hu et al., Publ. Astron. Soc. Pacif., **130**, 074201, 2018. doi:10.1088/1538-3873/aac067.
5. E.V.Kazarovets, N.N.Samus, O.V.Durlevich et al., IBVS, **6151**, 1, 2015.

6. *K.A.Collins, J.F.Kielkopf, K.G.Stassun et al.*, *Astron. J.*, **153**, 77, 2017. doi:10.3847/1538-3881/153/2/77.
7. *R.Diethelm*, *IBVS*, **5945**, 1, 2010.
8. *R.Diethelm*, *IBVS*, **5992**, 1, 2011.
9. *R.Diethelm*, *IBVS*, **6029**, 1, 2012.
10. *M.Lehký, L.Smelcer, M.Souza de Joode et al.*, *OEJV*, **211**, 1, 2021. doi:10.5817/OEJV2021-0211.
11. *K.E.Conroy, A.Kochoska, D.Hey et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **250**, 34, 2020. doi:10.3847/1538-4365/abb4e2
12. *A.Poro, S.Sarabi, S.Zamanpour et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **510**, 5315, 2022. doi:10.1093/mnras/stab3775.
13. *L.B.Lucy*, *ZA*, **65**, 89, 1967.
14. *S.M.Ruciński*, *AcA*, **19**, 245, 1969.
15. *F.Castelli, R.L.Kurucz*, *Astron. Astrophys.*, **419**, 725, 2004. doi:10.1051/0004-6361:20040079.
16. *D.J.K.O'Connell*, *PRCO*, **2**, 85, 1951.
17. *D.W.Hogg, D.Foreman-Mackey*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **236**, 11, 2018. doi:10.3847/1538-4365/aab76e.
18. *K.Li, Q.-Q.Xia, C.-H.Kim et al.*, *Astron. J.*, **162**, 13, 2021. doi:10.3847/1538-3881/abfc53.
19. *E.F.Schlafly, D.P.Finkbeiner*, *Astrophys. J.*, **737**, 103, 2011. doi:10.1088/0004-637X/737/2/103.
20. *P.J.Flower*, *Astrophys. J.*, **469**, 355, 1996. doi:10.1086/177785.
21. *A.Poro, F.Alicavus, E.Fernández-Lajús et al.*, *RAA*, **21**, 203, 2021. doi:10.1088/1674-4527/21/8/203.
22. *Z.Eker, V.Bakiş, S.Bilir et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **479**, 5491, 2018. doi:10.1093/mnras/sty1834.
23. *Z.Eker, O.Demircan, S.Bilir et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **373**, 1483, 2006. doi:10.1111/j.1365-2966.2006.11073.x.
24. *K.Stekpień, K.Gazeas*, *AcA*, **62**, 153, 2012. doi:10.48550/arXiv.1207.3929.

DOI: 10.54503/0571-7132-2024.67.2-151

ПРОЯВЛЕНИЯ АКТИВНОСТИ K2V КАРЛИКА HD 189733 С ЭКЗОПЛАНЕТОЙ ТИПА ГОРЯЧИЙ ЮПИТЕР

И.С.САВАНОВ

Поступила 10 апреля 2024

Принята к печати 10 июня 2024

Представлены результаты анализа проявлений активности карлика спектрального класса K2V HD 189733, обладающего одной из наиболее хорошо изученных экзопланет типа горячий Юпитер. Учет активности звезды существенно усложняет анализ характеристик планеты (в частности, холодные пятна на поверхности звезды вносят дополнительный сигнал в соотношение между глубиной транзита и размером планеты и препятствуют точным определениям радиуса планеты). Проанализированы фотометрические данные для HD 189733 из архива миссии TESS и сделаны заключения о значениях величины периода вращения P_{rot} звезды, которые по нашей оценке составили 12.5 и 11.3 сут для секторов 41 и 54, соответственно. Их сопоставление с выполненными ранее оценками по результатам фотометрических наземных наблюдений позволяет предположить, что имеющиеся различия в определениях величины P_{rot} связаны с тем, что в разные моменты наблюдений доминирующими являлись пятна, расположенные на различных широтах на поверхности дифференциально вращающейся звезды. По данным TESS амплитуда переменности блеска HD 189733 составляет 1.6 и 0.9% от уровня среднего блеска звезды (для секторов 41 и 54, соответственно). По стандартной методике были оценены величины параметра запятненности звезды (2.0 и 1.2% от площади поверхности звезды) и получены величины площади запятненной поверхности A звезды в абсолютной мере (9200 м.д.п. и 5400 м.д.п. для секторов 41 и 54, соответственно). По 771 оценке блеска звезды в фильтре V, представленной в обзоре Kamogata Wide-field Survey, был проведен анализ проявлений долговременной активности HD 189733 и найдены указания на существование возможных циклов активности продолжительностью в 1140 и 4220 сут (3.1 и 11.6 лет, соответственно). Из анализа литературных данных сделан вывод о том, что уровень хромосферной активности HD 189733 превосходит средние величины, характерные для других холодных карликов с аналогичными значениями показателя цвета ($B - V$) и выше солнечного значения. Сделано заключение, что HD 189733 обладает умеренной (или немного выше средней) активностью, присущей аналогичным карликам спектрального класса K, но, тем не менее, требующей при моделировании тщательного учета свойств и эволюции планеты, обращающейся вокруг этой звезды, вне зависимости от того, проводятся ли оценки по упрощенной методике или по точному магнитогидродинамическому моделированию. Также следует принять во внимание, что активность звезды является переменной со временем (на шкале времени, сопоставимой с величиной P_{rot}) и требует оценок, выполняемых одновременно с основными исследованиями атмосферы экзопланеты.

Ключевые слова: *звезды; активность; планетные системы; атмосферы экзопланет*

1. Введение. На сегодняшний день HD 189733 b принадлежит к числу наиболее хорошо изученных экзопланет типа горячий Юпитер [1], благодаря результатам многочисленных наблюдений (как с Земли, так и из космоса)

и теоретическим моделям, построенным для исследования ее атмосферы, влияния родительской звезды и окружающей экзопланеты среды. Обзор результатов многочисленных кампаний по наблюдению транзитов HD 189733 b с использованием уникальных возможностей космического телескопа Хаббла, а также современных оценок параметров звезды и планеты, можно найти, например, в [2-4]. Обзор наземных фотометрических наблюдений транзитов HD 189733 b (в том числе высокоточных измерений, полученных в течение шести лет (2016-2021гг.)) представлен в [2,3].

Особое внимание, уделяемое многими исследовательскими группами к данной системе, связано с тем, что для HD 189733 проводились высокоточные измерения глубины транзитов на многих длинах волн в диапазоне от 0.3 до 24 мкм. Такие измерения позволяют получить представление о структуре и составе атмосферы экзопланеты HD 189733 b. Однако анализ усложняется необходимостью учета проявления активности HD 189733, у которой пятна на поверхности вносят дополнительный сигнал в соотношение между глубиной транзита и размером планеты. Эти проблемы обсуждаются в многочисленных работах (см., например, [4,5]). Очевидно, что простое сравнение данных о прохождении планеты в различных диапазонах длин волн неправомерно, и для получения глобальной оценки спектра пропускания от ультрафиолетового до ИК - диапазонов требуется детальный комбинированный анализ всех наборов данных с учетом проявления активности звезды.

HD 189733 является умеренно активным карликом спектрального класса K2V с холодными пятнами на поверхности, которые модулируют общий блеск звезды на протяжении 12-дневного периода вращения звезды [5]. Амплитуда модуляции блеска HD 189733 в видимом диапазоне может составлять величину порядка 1-2% [2,6]. Как указывалось, наличие звездных пятен нужно учитывать как при расчете трансмиссионного спектра экзопланеты, так и при анализе глубин кривых транзитов. Вопрос о проявлениях пятенной активности звезды остается актуальным и по настоящее время. Например, авторы исследования [5] обратились к нему на основе анализа данных наблюдений миссий HST и TESS.

В настоящей работе представлены наши результаты изучения проявлений активности звезды HD 189733 по имеющимся данным архива космической миссии TESS.

2. Звезда планетной системы - HD 189733. Основные сведения о параметрах HD 189733 можно найти в табл.1 [2] (перечисленные и используемые нами ниже свойства звезды приводятся согласно этим данным).

Общепринято (см., например, [2]), что эффективная температура звезды равна 5050 ± 20 K, ускорение силы тяжести $\log g = 4.563 \pm 0.021$, радиус

$R/R_{\odot} = 0.765 \pm 0.019$, светимость $L/L_{\odot} = 0.355 \pm 0.014$ и масса $M/M_{\odot} = 0.812 \pm 0.041$. Возраст звезды оценивается в 1.2 млрд. лет, она существенно моложе Солнца.

В архиве TESS для HD 189733 имеются данные двух сетов наблюдений - сектора 41 (23 июля 2021г. - 20 августа 2021г.) и сектора 54 (9 июля 2022г. - 5 августа 2022г.). Обработка кривых блеска была аналогична проводимой ранее в случае измерений для других объектов из архивов космического телескопа Кеплер и миссии TESS (см., например, [7]).

Кривые блеска звезды, характеризующиеся переменностью, вызванной вращательной модуляцией вследствие наличия холодных пятен на поверхности, представлены на рис.1. Два сета наблюдений были выполнены с интервалом примерно в 1 год. За это время амплитуды и формы кривых блеска претерпели значительные изменения. Более того, каждый сет по продолжительности примерно соответствует двум периодам вращения звезды, и в каждом случае можно сделать заключение о переменности кривых блеска на временах порядка P_{rot} .

На построенных нами спектрах мощности (средние диаграммы на рис.1) имеются характерные широкие пики, соответствующие величинам периода вращения P_{rot} звезды 12.5 и 11.3 сут для секторов 41 и 54, соответственно. Первые исследования вращения HD 189733 указали на то, что, вероятно, величина P_{rot} лежит в интервале от 11 до 13 сут (их обзор и ссылки см. в [6]). Авторы [6] получили более точную оценку $P_{rot} = 11.953 \pm 0.009$ сут, которая была

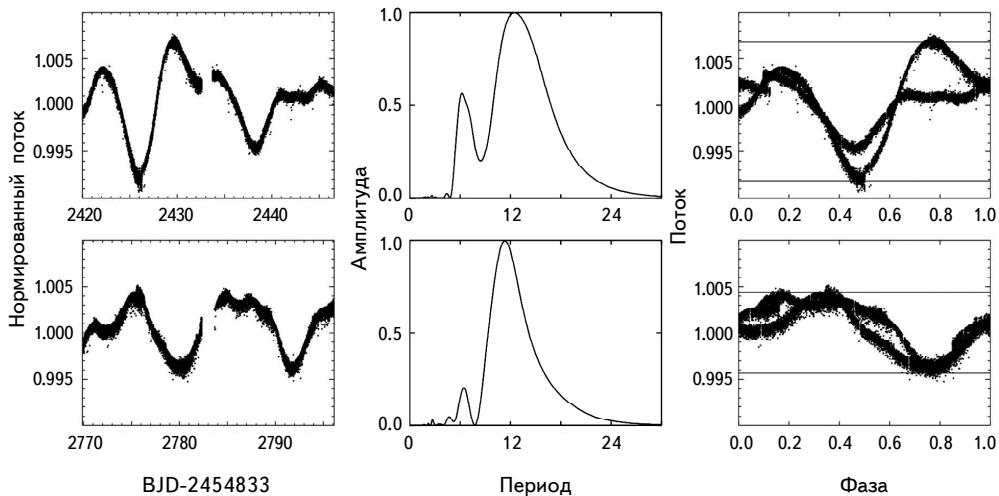


Рис.1. Слева - кривые блеска для HD 189733, в центре - спектры мощности переменности блеска, справа - фазовые диаграммы переменности блеска (горизонтальные линии характеризуют величину амплитуды переменности блеска). Данные приведены для наблюдений в секторах 41 и 54.

установлена по 314 оценкам блеска HD 189733 в интервале от октября 2005 по июль 2007гг. с T10 0.8-м автоматизированным телескопом APT в Fairborn Observatory. Анализ более продолжительного ряда наблюдений (6 лет) с тем же инструментом [3] привел к заключению о величине $P_{rot} = 11.86$ сут, практически совпадающим с результатом из [6]. По выполненным позднее наблюдениям HD 189733 с телескопом T10 APT в 2017г. стало возможным получить оценку $P_{rot} = 12.25 \pm 0.15$ сут [2]. Наконец, анализируя данные миссии TESS, авторы [5] приводят оценку величины периода вращения звезды 11.4 сут.

Наблюдения двух транзитов HD 189733 b были выполнены со спектрографом ESPRESSO 11 и 31 августа 2021г. [8]. Полученные результаты продемонстрировали высокую точность определения лучевых скоростей, наблюдаемых во время транзита. Кроме того, по данным ESPRESSO высокого разрешения был успешно восстановлен трансмиссионный спектр HD 189733 b. Авторы [8] установили, что период экваториального вращения звезды составляет 11.45 ± 0.09 сут, а близкого к полярному - 14.9 ± 2 сут, т.е. впервые нашли указания на дифференциальный характер вращения.

На рис.2 (вверху) представлен спектр мощности для объединенных данных для секторов 41 и 54. Вертикальными линиями отмечены величины P_{rot} , представленные в предыдущих фотометрических исследованиях (см. выше) и найденная нами величина $P_{rot} = 11.80$ сут, которая совпадает с оценками [3,6], установленными по продолжительным наземным наблюдениям. На нижней диаграмме представлены фазовые кривые, полученные при свертке с упомя-

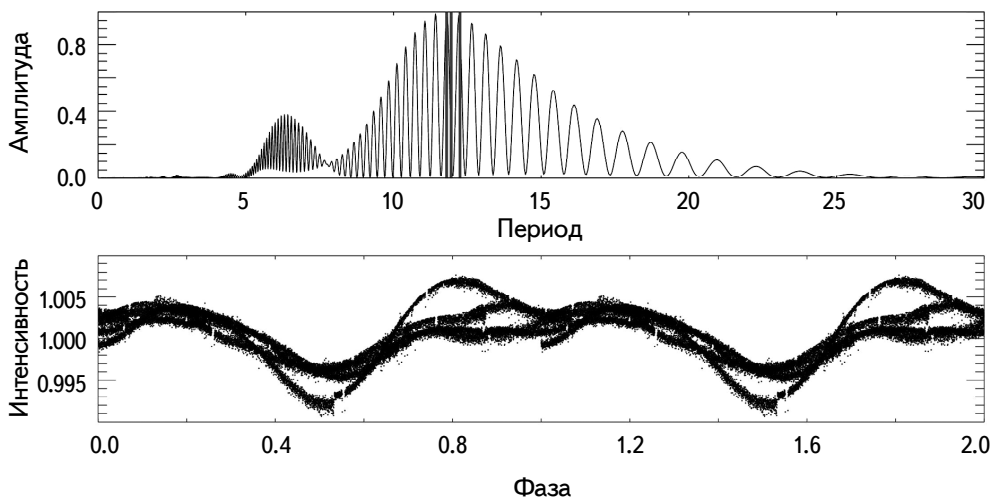


Рис.2. Вверху - спектр мощности для объединенных данных для секторов 41 и 54. Вертикальными линиями отмечены величины P_{rot} , представленные в предыдущих фотометрических исследованиях (см. текст), и найденная нами величина $P_{rot} = 11.80$ сут. На нижней диаграмме представлены фазовые кривые для $P_{rot} = 11.80$ сут.

нутым выше значением *Prot*.

Таким образом, выполненный нами анализ и результаты предыдущих исследований позволяют предположить, что имеющиеся различия в определениях величины *Prot* связаны с тем, что в разные моменты наблюдений доминирующими являются пятна, расположенные на различных широтах на поверхности дифференциально вращающейся звезды.

Амплитуда переменности блеска составляет 1.6 и 0.9% от уровня среднего блеска звезды (для секторов 41 и 54, соответственно). По стандартной методике нами были оценены величины параметра запятненности звезды, которые достигают 2.0 и 1.2% от площади поверхности звезды. Принимая оценку радиуса звезды $R = 0.765 \pm 0.019$ радиусов Солнца из [2], можно получить величину площади поверхности запятненности *A* звезды в абсолютной мере (в миллионных долях видимой полусферы Солнца, м.д.п.). На Солнце средние по размерам пятна имеют площадь 10–200 м.д.п. (детали см. в [9]). Площадь пятен на поверхности HD 189733 составляет величину порядка 9200 м.д.п. и 5400 м.д.п. (для секторов 41 и 54, соответственно). По этим оценкам запятненность звезды становится сопоставимой с максимальной запятненностью Солнца. Так, например, общая площадь солнечных пятен для Гринвичской группы солнечных пятен 14886 по наблюдениям 8 апреля 1947г. составила 6132 м.д.п. [10]. Сравнение с запятненностью звезд других спектральных классов, в том числе К, можно найти в [11].

3. *Циклы активности.* По данным многолетнего обзора Kamogata Wide-field Survey (KWS) (<http://kws.cetus-net.org>) нами был проведен анализ проявлений долговременной активности HD 189733. В обзоре представлены наблюдения звезды в фильтрах V и Ic. В первую очередь мы провели анализ данных для фильтра V, обладающих более длительным интервалом наблюдений в 4486 сут (12.3 лет) (HJD 2455700 – 2460186). Была рассмотрена 771 оценка блеска звезды в фильтре V. Представленные на рис.3 (вверху) данные свидетельствуют о присутствии цикличности в изменении ее блеска. На основе построенного спектра мощности для блеска HD 189733 можно предположить существование возможных циклов активности 1140 сут и 4220 сут (3.1 и 11.6 лет, соответственно) (средняя диаграмма). Вертикальной светлой линией представлен период, соответствующий годичной переменности.

4. *Хромосферная активность HD 189733.* Согласно результатам наблюдений HD 189733 со спектрографом HARPS [12], величины параметра хромосферной активности *S* звезды находятся в интервале 0.461–0.508, а соответствующие им величины параметра хромосферной активности $\log R'_{HK}$ – в диапазоне от –4.55 до –4.50. При этом, для HD 189733 авторы [12] обнаружили избыточное поглощение в линиях CaII H и K во время транзитов,

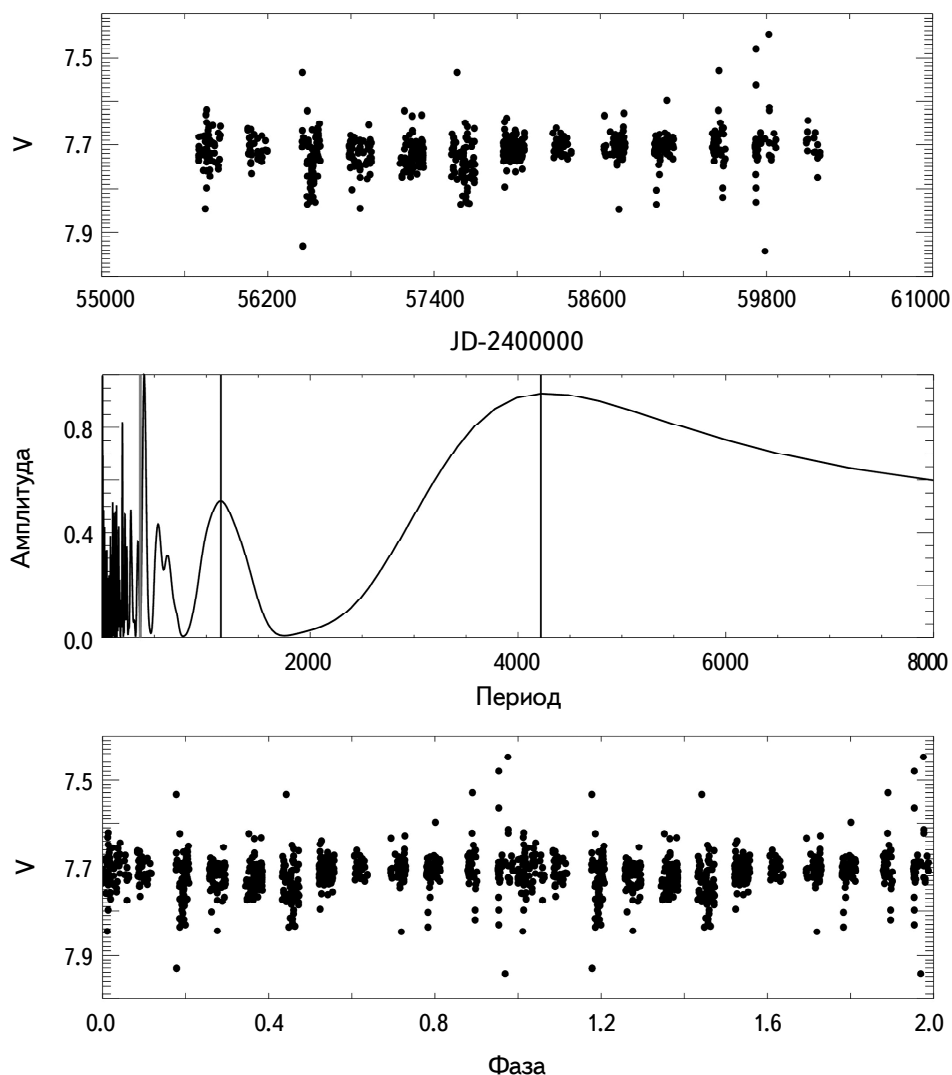


Рис.3. Верхняя панель - фотометрические наблюдения HD 189733 в фильтре V по данным обзора Kamogata Wide-field Survey (KWS). Средняя панель - спектр мощности для этих данных, вертикальные линии относятся к циклам активности 1140 сут и 4220 сут (3.1 и 11.6 лет, соответственно). Светлая линия - пик, соответствующий сезонному (около 365 сут) периоду. Внизу - фазовая диаграмма для цикла в 4220 сут.

а также избыточное поглощение в линии Na . Они изучили поведение временных рядов параметров каждой линии во время трех транзитов и обнаружили, что спектральные детали, соответствующие избыточному поглощению, находятся в звездной системе отсчета. Таким образом, они пришли к предположению, что хромосфера HD 189733 является основным источником

избыточного транзитного поглощения и ответственна за его переменный характер.

На рис.4 приводится диаграмма зависимости параметра $\log R'_{HK}$ от показателя цвета ($B - V$). Черным кружком отмечены данные для HD 189733 ($\log R'_{HK} = (-4.55, -4.50)$), светлыми - данные каталога [13]. Горизонтальная линия соответствует значению параметра $\log R'_{HK}$ для Солнца в спокойном состоянии. Можно сделать вывод о том, что уровень хромосферной активности HD 189733 превосходит среднюю величину, характерную для других холодных карликов с аналогичными значениями показателя цвета ($B - V$) и выше солнечного: для Солнца - $\log R'_{HK} = -5.021$ [13].

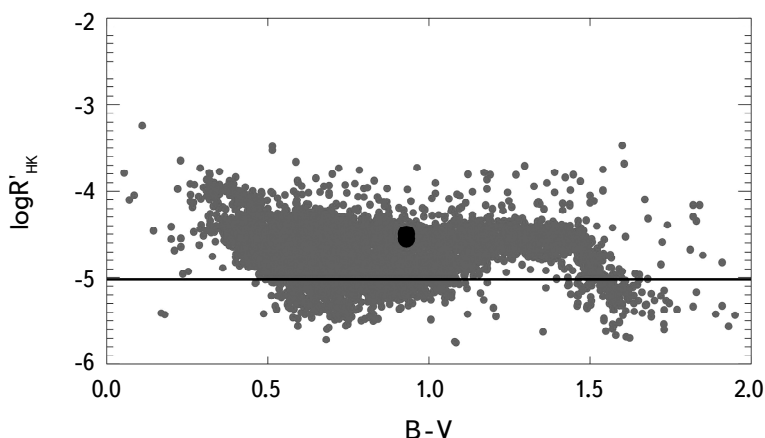


Рис.4. Диаграмма $\log R'_{HK}$ - показатель цвета ($B - V$). Темный символ - данные для HD 189733, светлые символы - данные каталога [13], горизонтальная линия соответствует значению параметра $\log R'_{HK}$ для Солнца в спокойном состоянии (см. текст).

5. Заключение. В статье представлены результаты анализа проявлений активности HD 189733, обладающей одной из наиболее хорошо изученных экзопланет типа горячий Юпитер. Активная природа звезды была отмечена в статьях многочисленных исследований. Ее учет существенно усложняет соответствующий анализ характеристик планеты. Так, например, анализ проявлений активности является необходимым для определения запятненности HD 189733, холодные пятна на поверхности которой вносят дополнительный вклад в соотношение между глубиной транзита и размером планеты и препятствуют точным определениям радиуса планеты.

Нами были проанализированы данные для HD 189733 из архива космической миссии TESS и сделаны заключения о величинах периода вращения звезды P_{rot} , которые по нашей оценке составили 12.5 и 11.3 сут для секторов 41 и 54, соответственно. Их сопоставление с выполненными ранее оценками

по результатам фотометрических наземных наблюдений позволяет предположить, что имеющиеся различия в приводимых в литературе определениях величины P_{rot} связаны с тем, что в разные моменты наблюдений доминирующими являлись пятна, расположенные на различных широтах на поверхности дифференциально вращающейся звезды (указания на дифференциальный характер вращения были получены по наблюдениям со спектрографом ESPRESSO).

По данным TESS, амплитуда переменности блеска HD 189733 составляет 1.6 и 0.9% от уровня среднего блеска звезды (для секторов 41 и 54, соответственно). По стандартной методике нами были оценены величины параметра запятненности звезды, которые достигают 2.0 и 1.2% от площади поверхности звезды и получены величины площади запятненной поверхности A звезды в абсолютной мере, которые составили 9200 м.д.п. и 5400 м.д.п. (для секторов 41 и 54, соответственно) и уже становятся сопоставимыми с данными о максимальной запятненности Солнца.

По 771 оценке блеска звезды в фильтре V , представленной в обзоре Kamogata Wide-field Survey, был проведен анализ проявлений долговременной активности HD 189733 и найдены указания на существование циклов активности продолжительностью в 1140 и 4220 сут (3.1 и 11.6 лет, соответственно).

По литературным данным сделан вывод о том, что уровень хромосферной активности HD 189733 превосходит среднюю величину, характерную для других холодных карликов с аналогичными значениями показателя цвета ($B - V$), и выше солнечной. Можно заключить, что HD 189733 обладает умеренной (или немного выше средней) активностью, характерной для аналогичных карликов спектрального класса K , но тем не менее, требующей при моделировании тщательного учета свойств и эволюции планеты, обращающейся вокруг этой звезды, вне зависимости от того, проводятся ли оценки по упрощенной методике (например, аппроксимационная формула, соответствующая модели потери атмосферы с ограничением по энергии) или по точному магнитогидродинамическому моделированию [14]. К числу возникающих при этом усложняющих обстоятельств, следует отнести тот факт, что активность звезды является переменной и требует оценок, выполняемых одновременно с основными исследованиями атмосферы экзопланеты.

Исследование выполнено в рамках проекта "Исследование звезд с экзопланетами" по гранту Правительства РФ для проведения научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых (соглашение N 075-15-2019-1875, 075-15-2022-1109).

ACTIVITY OF THE HOT JUPITER PLANET
HOSTING K2V DWARF HD 189733

I.S.SAVANOV

The results of the analysis of activity of the K dwarf HD 189733, which has one of the most well-studied exoplanets of the hot Jupiter type, are presented. Stellar activity significantly complicates the analysis of the characteristics of the planet (in particular, cool spots on the surface of the star add an additional signal to the ratio between the depth of transit and the size of the planet and prevent accurate determination of the radius of the planet). We analyzed photometric data for HD 189733 from the TESS mission archive and made conclusions about the values of the rotation period P_{rot} of the star which is about 12.5 and 11.3 days for sectors 41 and 54, respectively. The comparison with previously performed estimates based on the results of photometric ground-based observations suggests that the differences in the values of P_{rot} are due to the fact that during observations cool spots were located at different latitudes on the surface of a differentially rotating star. According to TESS data the amplitude of the brightness variability of HD 189733 is 1.6 and 0.9% of the average brightness level of the star (for sectors 41 and 54, respectively). According to the standard methodology we estimated the values of the star's spottedness parameter (2.0 and 1.2% of the surface area of the star) and obtained the values of the spotted surface area of the star in absolute measure (9200 MSH and 5400 MSH for sectors 41 and 54, respectively). According to 771 estimates of the brightness of the star in the V filter presented in the Kamogata Wide-field Survey the long-term activity of HD 189733 was analyzed and indications were found for the existence of possible activity cycles of 1140 and 4220 days (3.1 and 11.6 years). According to the literature data it is concluded that the level of chromospheric activity of HD 189733 exceeds the average values typical for other cool dwarfs with similar values of the color index ($B - V$) and is above the solar value. It is concluded that HD 189733 has a moderate (or slightly above average) activity characteristic of similar dwarfs of spectral class K, but nevertheless requiring consideration when modeling the properties and evolution of a planet orbiting this star regardless of whether estimates are carried out using a simplified methodology or accurate magnetohydrodynamic modeling. It should also be taken into account that the activity of a star is variable over time (on a time scale comparable to the value of P_{rot}) and requires estimates performed simultaneously with the main studies of the exoplanet's atmosphere.

Keywords: *stars: activity: spots: photometry: variability: planetary systems: exoplanet atmospheres*

ЛИТЕРАТУРА

1. *I.S.Savanov, V.I.Shematovich*, *Astrophys. Bull.*, **76**, 450, 2021.
2. *A.Leonardo Dos Santos et al.*, *Astron. J.*, **166**, 89, 2023.
3. *F.Pont et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **432**, 2917, 2013.
4. *E.Cristo, E.E.Borges, N.C.Santos et al.*, *Astron. Astrophys.*, **682**, A28, 2024.
5. *I.S.Narrett, B.V.Rackham, J. de Wit*, *Astron. J.*, **167**, 107, 2024.
6. *G.W.Henry, J.N.Winn*, *Astron. J.*, **135**, 68, 2008.
7. *I.S.Savanov, E.S.Dmitrienko*, *Astron. Lett.*, **46**, 177, 2020.
8. *E.Cristo, E.E.Borges, N.C.Santos et al.*, *Astron. Astrophys.*, **682**, A28, 2024.
9. *Y.A.Nagovitsyn, A.A.Pevtsov*, *Astrophys. J.*, **906**, 27, 2021.
10. *H.W.Newton*, *Vistas in Astronomy*, **1**, 666, 1955.
11. *I.S.Savanov*, *Astrophysics*, **62**, 177, 2019.
12. *J.R.Barnes, C.A.Haswell, D.Staab et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **462**, 1012, 2016.
13. *S.B.Saikia, C.J.Marvin, S.V.Jeffers et al.*, *Astron. Astrophys.*, **616**, A108, 2018.
14. *E.S.Kalinicheva, V.I.Shematovich, I.S.Savanov*, *Astron. Rep.*, **66**, 1318, 2022.

DOI: 10.54503/0571-7132-2024.67.2-161

ФОТОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АСИНХРОННОГО ПОЛЯРА IGR J19552+0044 В 2019-2022гг.

Ю.В.БАБИНА¹, Е.П.ПАВЛЕНКО¹, Н.В.ПИТЬ¹, К.А.АНТОНЮК¹,
А.А.СОСНОВСКИЙ¹, В.Г.ГОДУНОВА², И.А.ИЗВЕКОВА²,
Г.И.КОХИРОВА³, Ф.Д.РАХМАТУЛЛАЕВА³, А.О.СИМОН⁴, М.В.ЧУПИРА⁴

Поступила 8 мая 2024

В статье приведен анализ данных многоцветных фотометрических наблюдений асинхронного поляра IGR J19552+0044, полученных в течение 59 ночей с 2019 по 2022гг. в Крымской астрофизической обсерватории, а также в обсерваториях Пик Терскол, Санглох, Лесники и данных космического телескопа TESS, полученных в течение 27 сут в 2022г. Показано, что максимальная амплитуда колебаний блеска с периодом вращения белого карлика ($\sim 2^m.5$ - 3^m) наблюдается в полосе Ic и практически близка к нулю в полосе В. Уточнен период вращения белого карлика, составляющий 0.05645350(14) сут. Обнаружена зависимость амплитуды кривой блеска периода вращения от фазы синодического периода.

Ключевые слова: *катаклизмические переменные: асинхронный поляр: IGR J19552+0044*

1. *Введение.* Катаклизмические переменные - это тесные двойные системы на поздней стадии эволюции [1]. В них звезда позднего спектрального класса теряет через внутреннюю точку Лагранжа вещество на компактный компонент - белый карлик. Если магнитное поле белого карлика пренебрежимо мало, вокруг него образуется аккреционный диск. В противном случае, если напряженность магнитного поля порядка 10^7 - 10^8 Гс, аккреция на белый карлик осуществляется непосредственно на его магнитные полюса, такие объекты называются полярами. Если напряженность магнитного поля меньше этой величины, в системе может образоваться аккреционный диск на расстоянии, где давление в аккреционной струе уравнивается давлением магнитного поля (промежуточные поляры). Поляры - синхронные системы, в то время как промежуточные поляры - асинхронные, в них орбитальный период в среднем более, чем в 10 раз превосходит период вращения белого карлика. Существует малочисленная группа полярных, в которых период вращения белого карлика отличается от периода вращения всей системы, такие объекты называют асинхронными полярами. Это V1500 Cyg [2]; BY Cam [3], CD Ind [4], V1432 Aql [5], SDSS J134441.83+204408.3 [6], Swift

J05037-2819 [7], Paloma (RX J0524+42) [8], IGR J19552+0044 [9], 1RXS J0838-2827 [10,11] и SDSS J085414.02+390537.3 [12]. Причина асинхронизма до сих пор остается неизвестной у всех этих объектов, кроме V1500 Cyg, у которого принято считать, что синхронное орбитально-вращательное движение этой системы было разрушено взрывом Новой 1975г. [13].

IGR J19552+0044 ($\alpha = 19.55.12.4$, $\delta = +00.45.38$, J2000) - самый коротко-периодический объект из данной группы асинхронных полярных, его орбитальный период составляет 0.058055 сут, а период вращения белого карлика - 0.056451 сут [9], т.е., орбитальный период на 2.8% превосходит период вращения. Соответственно синодический период P_{beat} (т.е., период биений орбитального P_{orb} и вращательного P_{rot} периодов) есть $(P_{orb} - P_{rot}) / P_{orb} P_{rot}$. Товмасын и др. [9] обнаружили у IGR J19552+0044 этот период (2.04 сут). Бернардини и др. [14] указали на большую переменность объекта в жестком рентгене и инфракрасном диапазоне спектра. Они обнаружили периоды 0.070 и 0.050 сут, которые отсутствуют в оптическом диапазоне. Природа их пока неизвестна. Спектральные и многоцветные наблюдения Товмасына и др. [9] показали, что основным источником излучения IGR J19552+0044 является циклотронное излучение белого карлика, обеспечивающее в оптике переменность блеска с периодом вращения. Максимальная амплитуда колебаний с периодом вращения регистрируется в полосе I, где она достигает $\sim 2^m$. Согласно фотометрии с высоким разрешением, в длинноволновой области спектра наблюдается быстрая переменность с большой амплитудой. Авторы связывают ее с "блотовой" аккрецией на белый карлик. Авторы сделали вывод о массе белого карлика $0.77 M_{\odot}$ и низком темпе аккреции. Они также пришли к заключению об относительно низкой напряженности магнитного поля (< 20 МГ) белого карлика и аккреции на один магнитный полюс.

Мы предприняли фотометрические исследования IGR J19552+0044 спустя 8 лет после фотометрии Товмасына и др. [9], выполненные как по наземным наблюдениям, так и по данным космического телескопа TESS с целью исследования особенностей геометрии аккреции в течение синодического периода.

2. Наземные и космические наблюдения. Наземные наблюдения IGR J19552+0044 (далее IGR1955) проводились с 2019 по 2022гг. в Крымской астрофизической обсерватории (КрАО) на телескопах АЗТ-11 (1.25-м) с ПЗС ProLine PL230 и ЗТШ (2.6-м) с ПЗС Apogee Alta E47, в Международной Астрономической обсерватории Санглов на телескопе Цейсс-1000 с ПЗС FLI 16803 Proline, в обсерватории на пике Терскол Международного центра астрономических и медико-экологических исследований НАН Украины на телескопах Цейсс-600 и Цейсс-2000 с ПЗС SBIG STL-1001 и FLI PL 4301,

соответственно и на наблюдательной станции в с. Лесники Киевского национального университета им. Тараса Шевченко с ПЗС ProLine PL4710 (см. табл.1). В таблице приведены: дата, продолжительность и место наблюдений, телескоп и фотометрическая система. В качестве звезды сравнения использовалась звезда с координатами USNO-B1.0 0907-0488682 (19 55 17.497, +00 44 13.75, J2000). Наблюдения выполнялись в одной или нескольких полосах фотометрической системы Джонсона-Кузинса BVRcIc, иногда - без светофильтров с максимумом чувствительности в красной области спектра. Экспозиция подбиралась такой, чтобы обеспечивать точность не хуже $0^m.1$ и, в зависимости от телескопа, фотометрической системы и погодных условий, колебалась в пределах от 30 до 180 с. В целом весь массив данных охватил ~3-летний интервал и составил 155 ч в течение 59 ночей наблюдений.

Таблица 1

ЖУРНАЛ НАЗЕМНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ IGR J19552+0044 (2019-2022гг.)

№	Дата	HJD 2400000+...	ΔT (часы)	Место наблюдений, телескоп	Фотометрическая система
1	2	3	4	5	6
1	31.05.2019	58635	1.85	КраО, АЗТ-11	Ic, V
2	05.06.2019	58640	3.45	КраО, АЗТ-11	Ic, V
3	12.06.2019	58647	2.4	КраО, АЗТ-11	Ic, V
4	18.06.2019	58653	1.6	КраО, АЗТ-11	Ic, V
5	20.06.2019	58655	4.7	Санглох, Цейсс-1000	Ic, V
6	20.06.2019	58655	2.5	КраО, АЗТ-11	Ic, V
7	21.06.2019	58656	3	КраО, АЗТ-11	Ic, V
8	21.06.2019	58656	5	Санглох, Цейсс-1000	Ic, V
9	22.06.2019	58657	3.8	Санглох, Цейсс-1000	Ic, V
10	23.06.2019	58658	1.6	КраО, АЗТ-11	Ic, V
11	24.06.2019	58659	4.1	КраО, АЗТ-11	Ic, V
12	25.06.2019	58660	3.84	КраО, АЗТ-11	Ic, V
13	26.06.2019	58661	3.72	КраО, АЗТ-11	Ic, V
14	27.06.2019	58662	2.4	КраО, АЗТ-11	Ic, V
15	01.07.2019	58666	3.6	КраО, АЗТ-11	Ic, V
16	02.07.2019	58667	3.7	КраО, АЗТ-11	Ic, V
17	14.07.2019	58679	0.6	Терскол, Цейсс-600	B, V, Rc, Ic
18	16.07.2019	58681	0.4	Терскол, Цейсс-600	B, V, Rc, Ic
19	20.07.2019	58685	0.4	Терскол, Цейсс-600	B, V, Rc, Ic
20	29.07.2019	58694	2.4	Терскол, Цейсс-600	Rc
21	07.08.2019	58703	2.5	КраО, АЗТ-11	Ic, V
22	08.08.2019	58704	4	КраО, АЗТ-11	Ic, V
23	09.08.2019	58705	1.8	КраО, АЗТ-11	Ic, V
24	10.08.2019	58706	2.5	КраО, АЗТ-11	Ic, V
25	11.08.2019	58707	3	КраО, АЗТ-11	Ic, V
26	12.08.2019	58708	2.2	КраО, АЗТ-11	Ic, V

Таблица 1 (Окончание)

1	2	3	4	5	6
27	14.08.2019	58710	1.8	КрАО, АЗТ-11	Ic, V
28	29.04.2020	58969	0.7	Терскол, Цейсс-600	B, V, Rc, Ic
29	13.05.2020	58983	1.4	Терскол, Цейсс-600	B, V, Rc, Ic
30	03.06.2020	59004	3	КрАО, АЗТ-11	Ic, V
31	04.06.2020	59005	3	КрАО, АЗТ-11	Ic, V
32	08.06.2020	59009	2.2	КрАО, АЗТ-11	Ic, V
33	08.08.2020	59070	3.8	КрАО, ЗТШ 2.6-м	B, V, Rc, Ic
34	09.08.2020	59071	4.5	КрАО, ЗТШ 2.6-м	B, V, Rc, Ic
35	19.08.2020	59081	1.5	Терскол, 2-м	B, V, Rc, Ic
36	20.08.2020	59082	2.6	Терскол, 2-м	B, V, Rc, Ic
37	21.08.2020	59083	1.3	Лесники, 0.7-м	Ic, Rc
38	20.05.2021	59355	2	Терскол, Цейсс-600	V
39	07.06.2021	59373	0.8	КрАО, АЗТ-11	Ic, V, без ф.
40	08.06.2021	59374	1	КрАО, АЗТ-11	Ic, V
41	09.06.2021	59375	4.2	КрАО, АЗТ-11	Ic, V, без ф.
42	10.06.2021	59376	2	КрАО, АЗТ-11	Ic
43	11.06.2021	59377	3	КрАО, АЗТ-11	Без ф.
44	13.06.2021	59379	3	КрАО, АЗТ-11	Без ф.
45	17.06.2021	59383	2.8	Терскол, Цейсс-600	Ic
46	18.06.2021	59384	2.8	Терскол, Цейсс-600	Ic
47	20.06.2021	59386	1	Терскол, Цейсс-600	Ic
48	01.07.2021	59397	3.4	КрАО, АЗТ-11	Ic
49	22.10.2021	59510	3	Терскол, Цейсс-600	Ic
50	23.10.2021	59511	7	Терскол, Цейсс-600	Ic
51	21.06.2022	59752	1.8	КрАО, АЗТ-11	Без ф.
52	04.07.2022	59765	2.88	КрАО, АЗТ-11	Ic, V
53	05.07.2022	59766	3.1	КрАО, АЗТ-11	Ic, V
54	06.07.2022	59767	3.3	КрАО, АЗТ-11	Ic, V
55	07.07.2022	59768	3.2	КрАО, АЗТ-11	Ic, V
56	11.07.2022	59772	1.5	КрАО, АЗТ-11	Ic, V
57	13.07.2022	59774	1.1	КрАО, АЗТ-11	Ic, V
58	14.07.2022	59775	2.6	КрАО, АЗТ-11	Ic, V
59	16.07.2022	59777	3.1	КрАО, АЗТ-11	Ic, V

Космические наблюдения были выполнены с помощью телескопа TESS (NASA Transiting Exoplanet Survey Satellite) [15] в 2022г. на протяжении 27 сут в широкой спектральной полосе 600-1000 нм с экспозицией 120 с.

3. *Анализ наблюдений TESS.* Данные TESS представляют собой четыре фрагмента в интервалах BJD 59769-59777, 59780-59782, 59783-59791, 59793-59796 (см. рис.1).

Обращает на себя внимание сильная модуляция интенсивности с ~1-суточным периодом, что хорошо видно на рис.2, где приведена перио-

дограмма, построенная с использованием метода Стеллингверфа, реализованного в пакете программ ISDA [16]. Наиболее значимые пики периододограммы

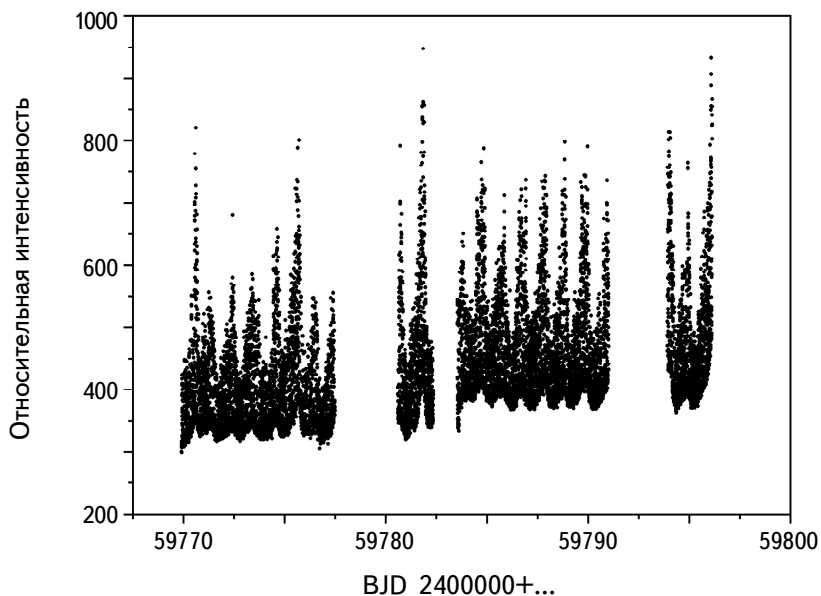


Рис.1. Долговременная кривая блеска IGR 1955 в 2022г. по данным TESS.

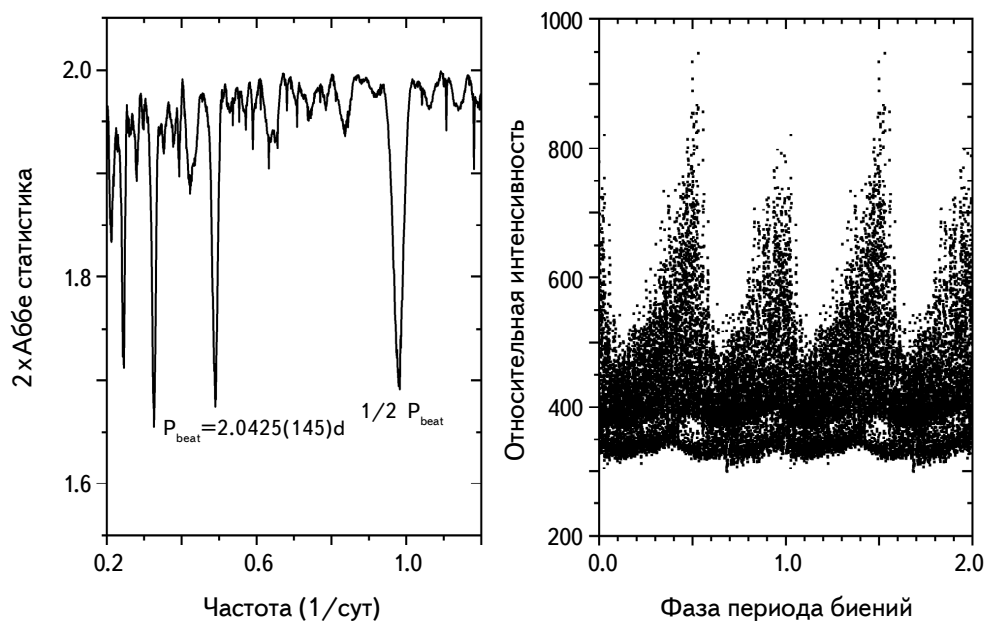


Рис.2. Периододграмма по данным TESS в окрестности периода биений (слева) и свертка данных с периодом биений 2.0425 сут (справа). Для удобства данные воспроизведены дважды (на рисунке справа).

указывают на период биений 2.0425 сут и его вторую гармонику. На этом же рисунке показана фазовая кривая блеска, построенная согласно эфемериде

$$\text{Max HJD} = 2455740.7035 + 2.0425E, \quad (1)$$

где начальная эпоха соответствует нижнему соединению вторичного компонента [9]. Индивидуальные "столбцы" кривой - это колебания блеска с периодом вращения белого карлика, а верхняя огибающая (т.е., амплитуда колебаний, связанных с периодом вращения) в среднем достигает максимальных величин дважды в течение периода биений на фазах ~ 0.0 и ~ 0.5 , соответствующих нижнему и верхнему соединению красного карлика. Отметим особенность профиля верхней огибающей: медленное возрастание яркости и быстрый ее спад.

На рис.3 для двух наиболее длинных рядов наблюдений TESS приведены кривые блеска, связанные с периодом вращения белого карлика, в зависимости от фазы периода биений. Показаны кривые для шести синодических циклов. Профиль кривых периода вращения, как правило, одногорбый (за редкими исключениями) и на фазах максимального блеска испещрен быстрыми квазипериодическими колебаниями. Видно, что амплитуда кривых периода

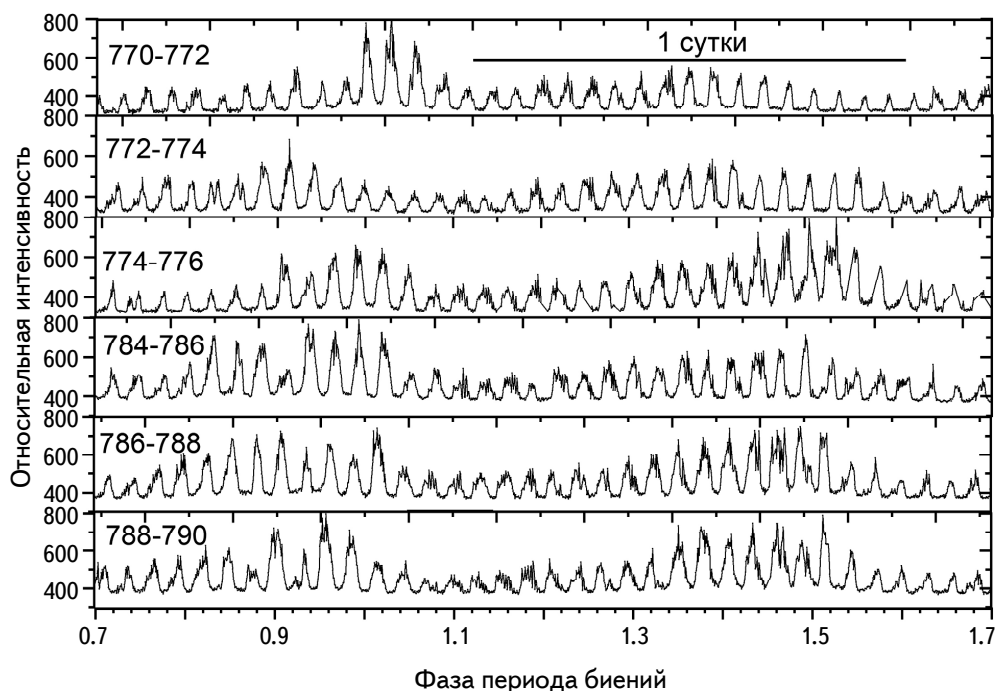


Рис.3. Кривые блеска периода вращения IGR 1955 по данным TESS в зависимости от фазы синодического периода для шести синодических циклов. Для каждого синодического цикла указан интервал Юлианских дат (последние три цифры).

вращения систематически изменяется в течение каждого синодического цикла и достигает максимального значения в интервале фаз ~ 0.9 -1.0 и ~ 0.4 -0.5.

4. *Анализ наземных наблюдений.* На рис.4 дана фазовая кривая блеска данных наземных наблюдений с синодическим периодом в полосах V и Ic. Фазы периода вычислялись согласно эфемериде (1). Сравнивая эту кривую, построенную по трехлетнему ряду наблюдений с кривой TESS по месячному ряду наблюдений, можно отметить их сходство, несмотря на различие в длине охваченных наблюдениями временных интервалов и неравномерное покрытие фаз наземными наблюдениями. Кривые синодического периода наземных наблюдений имеют два максимума за период на фазах 0.9-1.0 и 0.35-0.5.

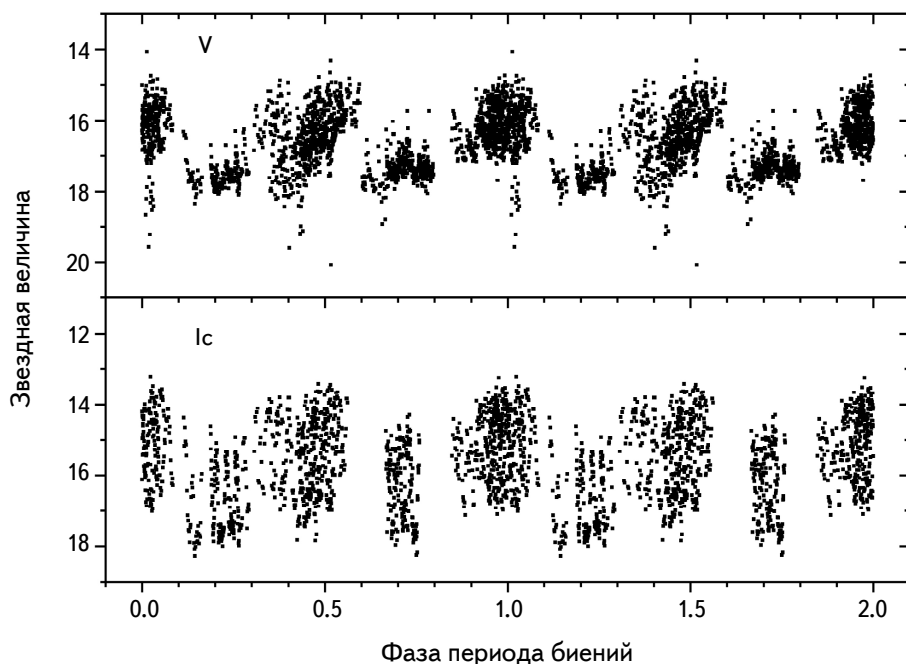


Рис.4. Фазовая кривая блеска наземных наблюдений IGR 1955 с периодом биений 2.0425 сут в полосе V и Ic, построенная по данным наземных наблюдений 2019-2022гг. Для удобства кривая воспроизведена дважды.

На рис.5 приведены кривые блеска IGR 1955 в полосах Ic и V для некоторых ночей и для различных фаз синодического периода.

Кривые показывают быстрые изменения профиля на коротких временных шкалах в обеих полосах. Каждая индивидуальная кривая на рисунке охватывает от двух до четырех периодов вращения белого карлика. На кривой блеска для JD 2458655 видны три полных цикла вращения. В полосе Ic кривые

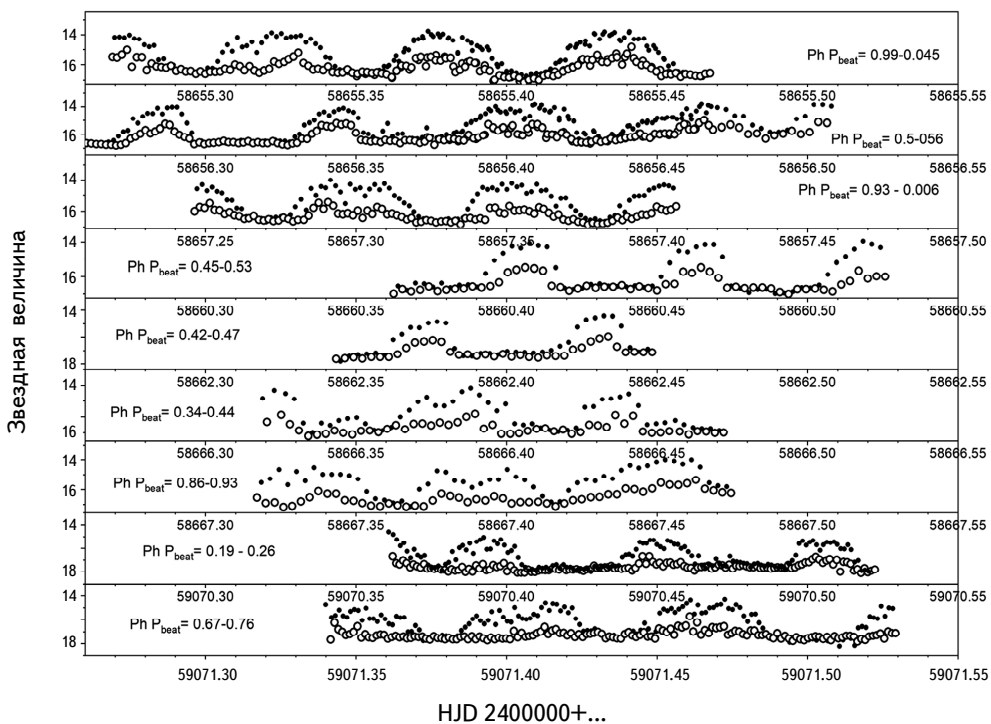


Рис.5. Некоторые кривые блеска IGR 1955 в полосах V и Ic. Заполненными кружками обозначены данные в полосе Ic, открытыми - в V. Для данных каждой ночи указан интервал фаз синодического цикла $Ph P_{beat}$.

блеска в каждом цикле имеют похожий одногорбый вид, длительность каждого горба (ширина горба) составляет практически весь период. В полосе V кривая блеска каждого цикла разделяется на два горба разной амплитуды. Амплитуда горбов в этой полосе изменяется от цикла к циклу. Следующая кривая блеска для JD 2458656 за период наблюдений охватывает 4 полных цикла вращения. Она демонстрирует кардинальные изменения профиля, происходящие в соседних циклах. Кривая блеска в течение первого цикла представляет собой узкий горб, длящийся всего половину периода и минимум блеска в виде ровного плато в течение остальной половины. Профиль второго цикла напоминает профиль первого, в третьем и четвертом цикле ширина горба стремительно увеличивается вдвое, а его профиль становится двухпиковым. Кривая блеска в ночь JD 2458657 содержит широкие горбы, длящиеся практически в течение всего периода вращения, а в ночь JD 2458660 вновь наблюдается профиль типа "узкий горб + плоское плато", как и в ночь JD 2458656. Подобная картина зарегистрирована и для JD 2459070, однако, на месте плато угадывается растущий горб небольшой амплитуды. В ночь JD 2459071 профиль кривых вращения опять широкий и двухпиковый.

В течение половины первого цикла видна одногорбая кривая, а в остальную половину - ровное плато в обеих полосах на уровне 16^m . В ночь JD 2458660 в течение трех орбитальных циклов видна одногорбая кривая, где горб имеет протяженность в половину орбитального цикла. Форма горба несимметричная, везде наблюдается резкий спад блеска, который может указывать на затмевающую составляющую области аккреции.

Кривые блеска по квазиодновременным наблюдениям в полосах BVRcIc представлены на рис.6. Они хорошо демонстрируют увеличение амплитуды колебаний с длиной волны вплоть до $2^m.5 - 3^m$ в полосе Ic и наличие быстрых колебаний блеска, также растущих с длиной волны и с амплитудой, превосходящей одну звездную величину. По кривым блеска в разных полосах видна существенная разница в значениях минимума блеска, достигающая до $\sim 1^m$. В полосе В значимые колебания блеска практически отсутствуют.

По всем данным 2019-2022гг., полученным в полосах V и Ic, были построены периодограммы в окрестности орбитального периода и периода

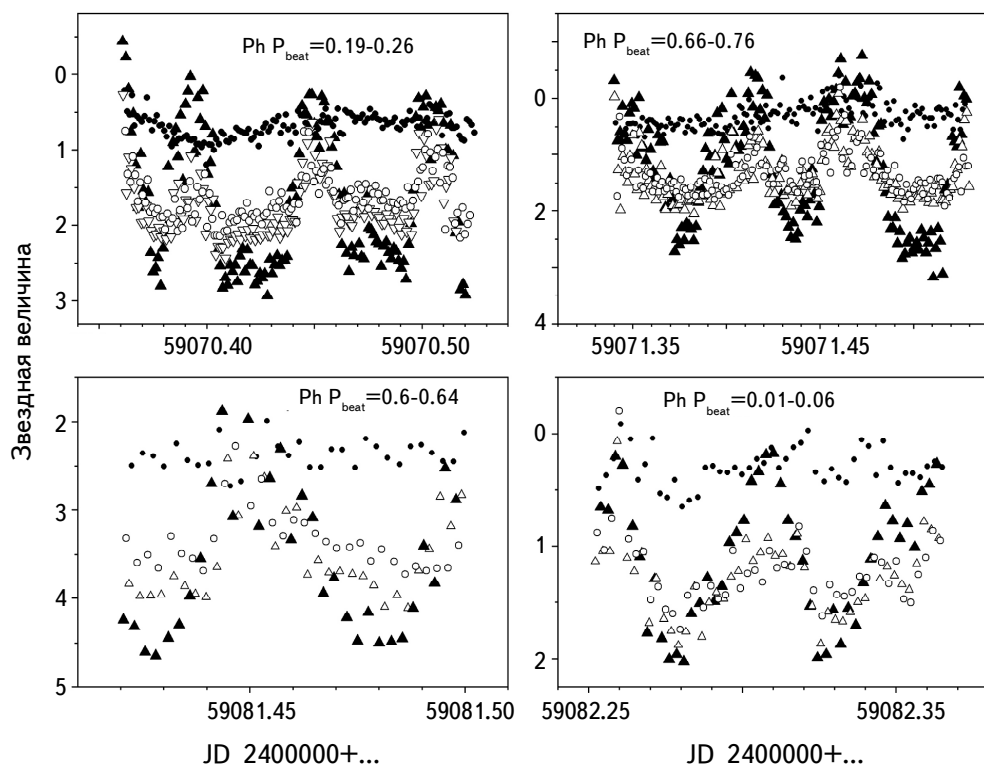


Рис.6. Кривые блеска в полосах BVRcIc, полученные на ЗТШ и на Терсколе. Заполненными кружками обозначены данные в полосе В, открытыми кружками - V, заполненными треугольниками - Ic, открытыми треугольниками - Rc. Указаны фазы периода биений ($Ph P_{beat}$).

вращения. Результат представлен на рис.7 (слева). Как и следовало ожидать, самый значимый пик на обеих периодограммах указывает на период вращения белого карлика 0.05645351(14) сут. Величины периодов, полученные в данной работе и Товмасыном и др. [9] в пределах точности совпадают в шестом знаке после запятой, что не позволяет корректно оценить скорость предполагаемой орбитально-вращательной синхронизации. С учетом погрешностей определения периодов видно, что мы получили более точную его величину 0.05645351(14) сут. Орбитальный период на периодограмме также присутствует, однако

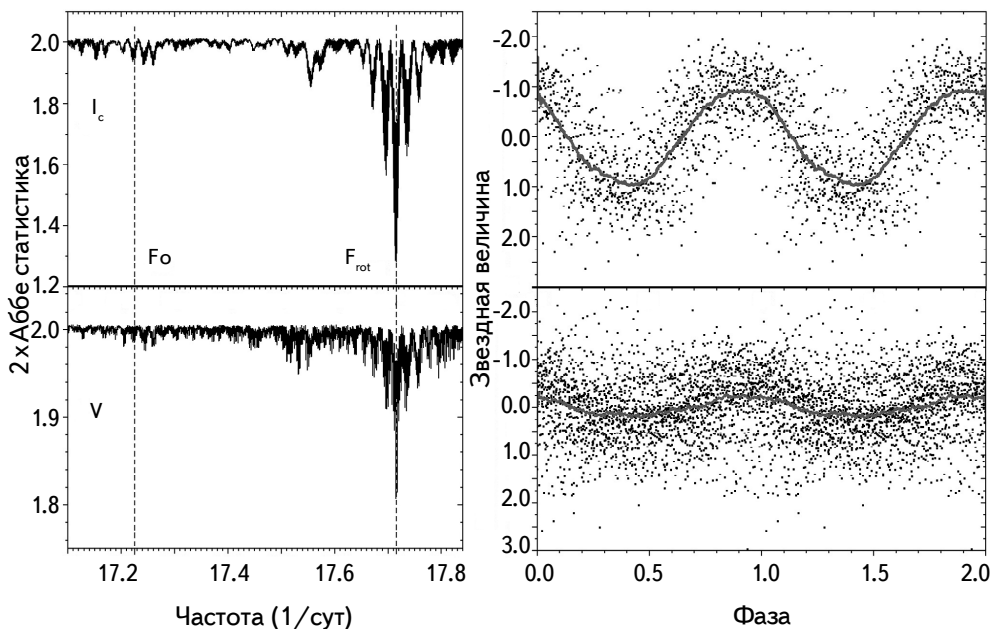


Рис.7. Слева: периодограммы для данных в полосах Ic и V в окрестности периода вращения и орбитального периода, построенные по наземным наблюдениям 2019-2022гг. Пунктирными линиями показаны расчетное положение орбитального периода (соответствующая частота $F_0 = 17.225 \text{ сут}^{-1}$) и периода вращения ($F_{\text{rot}} = 17.715 \text{ сут}^{-1}$). Справа: фазовые кривые блеска с периодом вращения в полосах Ic (вверху) и V (внизу). Для удобства свертки воспроизведены дважды.

значимость его очень мала. На рис.7 (справа) приведены фазовые кривые блеска с периодом вращения, построенные согласно эфемериде

$$\text{Max HJD} = 2455740.7035 + 0.05645351E. \quad (2)$$

5. Обсуждение. Синодический период. Наземные и космические наблюдения показали, что наличие двугорбой модуляции блеска с синодическим периодом и зависимость амплитуды колебаний блеска с периодом вращения белого карлика от фазы синодического цикла - устойчивое явление в системе IGR 1955. Похожий эффект у асинхронного полюра BY Cam был зарегист-

рирован Мэйсоном и др. [17]. Такое поведение ассоциируется с периодическим изменением темпа переноса вещества от вторичного компонента в течение синодического периода. В случае BY Cam авторы описали сложность однозначной интерпретации наблюдаемых эффектов, повторяющихся с фазой синодического цикла, зависящих от изменения ориентации магнитного поля белого карлика. Однако они предложили как наиболее вероятную модель "магнитного клапана" (см. также предположение Андропова [18]) в качестве потенциального объяснения изменений интенсивности, зависящих от фазы биений, где магнитное поле белого карлика препятствует переносу вещества через внутреннюю точку Лагранжа L1, когда поток перпендикулярен оси магнитного поля, что объясняет наличие двугорбного или мультикомпонентного профиля кривой. Напомним, что максимальная амплитуда верхней огибающей кривой синодического периода IGR 1955 (за счет максимальной амплитуды кривых периода вращения) наблюдается, согласно эфемериде (1), во время нижнего соединения красного карлика. Это означает, что магнитное поле белого карлика в этот момент ориентировано наиболее благоприятным образом для максимального темпа аккреции и ориентация магнитной оси близка к ориентации линии, соединяющей центры компонент.

6. *Заключение.* Таким образом, многолетний мониторинг асинхронного поляра IGR 1955 выявил: 1. сильную и устойчивую во времени двугорбую модуляцию блеска с синодическим периодом 2.0425 сут, очевидно, связанную с периодическим колебанием темпа переноса вещества от вторичного компонента; 2. позволил уточнить величину периода вращения белого карлика 0.05645351(14) сут. Полученные данные согласуются с выводом Товмасына и др. [9], что профиль кривых блеска с периодом вращения, как правило, одnogорбый, что указывает на преимущественно однополюсную аккрецию. Дальнейшие исследования должны показать, возможно ли применение модели магнитного клапана для объяснения эффектов, наблюдаемых у IGR 1955.

Авторы благодарят рецензента за внимательное прочтение статьи и ценные замечания.

¹ ФГБУН "Крымская астрофизическая обсерватория РАН",
Республика Крым, e-mail: eppavlenko@gmail.com

² Международный центр астрономических, медицинских и экологических исследований НАН Украины, Киев, Украина

³ Институт Астрофизики Академии Наук Республики Таджикистан,
Душанбе, Таджикистан

⁴ Киевский Национальный университет Тараса Шевченко, Киев, Украина

PHOTOMETRIC STUDIES OF ASYNCHRONOUS
POLAR IGR J19552+0044 IN 2019-2022

Ju.V.BABINA¹, E.P.PAVLENKO¹, N.V.PIT¹, K.A.ANTONYUK¹,
A.A.SOSNOVSKIY¹, V.G.GODUNOVA², I.A.IZVIEKOVA², G.I.KOKHIROVA³,
F.D.RAKHMATULLAEVA³, A.O.SIMON⁴, M.V.CHUPIRA⁴

The paper presents an analysis of multicolor photometric observations of the asynchronous polar IGR J19552+0044, obtained over 59 nights from 2019 to 2022 at the Crimean Astrophysical Observatory, as well as at the Terskol Peak, Sanglokh and Lesniky observatories and from TESS data. It is shown that the maximum amplitude of brightness variations ($\sim 2^m.5$ - 3^m) is observed in the Ic band and is practically close to zero in the B band. The rotation period of the white dwarf has been refined to be 0.05645351(14) days. A dependence of the amplitude of the rotation period curve on the phase of synodic period was discovered.

Keywords: *cataclysmic variables: asynchronous polar: IGR J19552+0044*

ЛИТЕРАТУРА

1. B.Warner, *Astrophys. Space Sci.*, **226**, 187, 1995.
2. E.P.Pavlenko, P.A.Mason, A.A.Sosnovskij *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **479**, 341, 2018.
3. A.D.Silber, D.Andrew, P.Szkody *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **290**, 25, 1997.
4. P.A.Mason, J.F.Morales, C.Littlefield *et al.*, *Advances in Space Research*, **66**, 1123, 2020.
5. I.L.Andronov, A.V.Baklanov, V.Burwitz, *Astron. Astrophys.*, **452**, 941, 2006.
6. C.Littlefield, P.Mason, P.Garnavich *et al.*, *Astrophys. J. Lett.*, **943**, 24, 2023.
7. J.P.Halpern, *Astrophys. J.*, **934**, 8, 2022.
8. R.Schwarz, A.D.Schwope, A.Staude *et al.*, *ASP Conference Proc.*, San Francisco: Astron. Soc. Pacif., **315**, 230, 2004.
9. G.Tovmassian, D.González-Buitrago, J.Thorstensen *et al.*, *Astron. Astrophys.*, **608**, 9, 2017.
10. N.Rea, F.Coti Zelati, P.Esposito *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **471**, 2902, 2017.
11. J.P.Halpern, *Astrophys. J.*, **963**, 11, 2024.
12. A.I.Kolbin, M.V.Suslikov, V.Yu.Kochkina *et al.*, *Astron. Lett.*, **49**, 475, 2023.

13. *H.S.Stockman, G.D.Schmidt, D.Q.Lamb*, *Astrophys. J.*, **332**, 282, 1988.
14. *F.Bernardini, D. de Martino, K.Mukai et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **435**, 2822, 2013.
15. *R.J.Ricker*, *Proceedings of the SPIE*, **9143**, 15, 2014.
16. *J.Pelt*, *Irregularity Spaced Data Analysis, User Manual* - Helsinki, 1992.
17. *P.A.Mason et al.*, *Astrophys. J.*, **938**, 142, 2022.
18. *И.Л.Андронов*, *Природа*, **5**, 26, 1987.

VISCOUS PLANE SYMMETRIC STRING COSMOLOGICAL
MODEL IN $f(R)$ GRAVITYA.DABRE¹, PALLAVI MAKODE²

Received 1 January 2024

Accepted 10 June 2024

In this paper, we have used the Plane Symmetric LRS Bianchi type I metric to study bulk viscous fluid coupled to a string of clouds within the framework of the $f(R)$ theory of gravity. To obtain the deterministic solutions, some physically plausible conditions like the weak field limit for a point-like source $f(R) = R^{3/2}$, the very well known expansion-shear scalar proportionality relation and the special form of an average scale factor are taken into account. Furthermore, we have calculated some physical and kinematical parameters along with the energy conditions to study the astrophysical implications of the constructed model and discussed their graphical behaviour, which shows good similarity with recent observational data.

Keywords: *Bianchi type I metric: bulk viscous fluid: cosmic string: energy conditions: $f(R)$ gravity*

1. *Introduction.* To explain the phase transition of the universe theoretically from decelerating to accelerating phase, generally, two approaches are being adopted: one of these methods is to investigate various dark energy candidates playing major roles due to the modification of energy-momentum tensor in the Einstein field equations, and the other is to modify the space-time geometry in the Einstein's equation called modified gravity. Many models of the universe have been introduced to study and explain the accelerating expansion of the universe. In recent years, several probable candidates for dark energy have been proposed and accordingly, the cosmological models are being constructed. As a second approach to explaining accelerating cosmic expansion, many modified theories of gravity have been developed. The modified theories of gravity, generally known as f -theories, are those where the gravitational action integral is defined to be a function f of specific geometric invariants. The main characteristic of f -theories is that the modified field equations explain the cosmological evolution and also recover general relativity.

In recent years, there has been a significant interest in modified theories of gravity. Among various gravitational theories that have been amended, one of the earliest is $f(R)$ theory of gravity, which was first put out by Buchdahl [1].

Numerous scholars have examined and investigated the numerous kinds of cosmological models in $f(R)$ gravity. Baibosunov et al. [2] discussed model of the early universe in $f(R)$ gravity. Nojiri et al. [3] studied unifying inflation with early and late-time dark energy in $f(R)$ gravity. Again Nojiri, Odintsov [4] discussed unified cosmic history in modified gravity from $f(R)$ theory to Lorentz non-invariant models. Dynamics of some cosmological solutions in modified $f(R)$ gravity were examined by Malik, Shamir [5]. Pawar et al. [6] investigated plane symmetric string cosmological model with zero mass scalar field in $f(R)$ gravity. Cognola et al. [7] investigated the class of viable modified $f(R)$ gravities describing inflation and the onset of accelerated expansion. Nojiri, Odintsov [8] studied unifying inflation with Λ CDM epoch in modified gravity consistent with solar system tests. Again modified $f(R)$ gravity unifying R^m inflation with Λ CDM epoch were examined by Nojiri, Odintsov [9].

We have known with the fact that bulk viscosity as well as cosmic strings performs a significant role in cosmology and presents cosmic accelerated expansion popularly known as the inflationary phase. The theoretical development of the universe and the effects of bulk viscosity and/or cosmic strings on cosmic evolution have been examined by numerous cosmologists using the source as a bulk viscous fluid and/or string cloud fluid. Recently, Pawar, Dabre [10,11] studied bulk viscous string cosmological models using power-law volumetric expansion of the universe and constant deceleration parameters in teleparallel gravity. Again, Pawar et al. [12-14] have conducted several string-inspired cosmological investigations. Considering the Kantowski-Sachs metric Reddy et al., [15] have constructed an isotropic bulk viscous string cosmological model showing the special case for the non-validating cosmic strings. Hegazy [16] developed the formula for calculating cosmic entropy in terms of viscosity and tried it to examine the entropy, enthalpy, Gibbs energy, and Helmholtz energy of the constructed model in the presence of viscosity. Nojiri et al. [17] studied string-inspired models, inflation, bounce, and late-time evolution in reference to modified gravity. Freidel et al. [18] discussed the formulation and dynamics of string theory and looked for string solutions. Mishra et al. [19] investigated the string cosmological model using spatially homogeneous and anisotropic Bianchi type V space-time. The viscous string cosmological model explaining the cosmic accelerated expansion has been investigated by Vinutha et al. [20]. Darabi et al. [21] obtained string cosmological solutions via Hojman symmetry using FRW line element. Some recent and important investigations of bulk viscous fluid in the presence of cloud strings have been obtained by several cosmologists [22-28] in different contexts.

Motivated by the situations cited above in this paper, we have considered plane-symmetric LRS Bianchi type I metric to construct a bulk viscous string cosmological model within the context of $f(R)$ gravity. This paper is divided into

several sections: Sec. 2 presents $f(R)$ gravity formalism in brief. In Sec. 3 considering Bianchi type I metric, we have obtained the corresponding field equations. In Sec. 4, we obtained the exact solution of highly non-linear differential field equations along with the different physical and kinematical parameters including energy conditions and discussed them with graphs. Lastly, in Sec. 5, we have concluded the investigations.

2. $f(R)$ gravity formalism. The $f(R)$ theory of gravitation is a modification of the general theory of relativity. The action for $f(R)$ gravity is given by

$$S = \int \sqrt{-g} (f(R) + L_m) d^4x, \quad (1)$$

where $f(R)$ is a general function of Ricci Scalar R and L_m is the matter Lagrangian. It is worth mentioning that the standard Einstein-Hilbert action can be recovered when $f(R) = R$.

The corresponding field equations are obtained by varying the action with respect to the metric $g_{\mu\nu}$ as

$$F(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla_\mu F(R) = T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

where $F(R) \equiv df(R)/dR$, ∇_μ denotes covariant differentiation, $T_{\mu\nu}$ is the standard matter energy-momentum tensor derived from the matter Lagrangian L_m .

3. Metric and field equations. We consider the plane-symmetric LRS Bianchi type I metric of the form as

$$ds^2 = dt^2 - A^2 dx^2 - B^2 (dy^2 + dz^2), \quad (3)$$

where A and B are metric potential functions of cosmic time t only.

We consider the source as bulk viscous fluid containing one-dimensional cosmic string given by

$$T_\mu^\nu = (\rho + \bar{p}) u_\mu u^\nu + \bar{p} g_\mu^\nu - \lambda x_\mu x^\nu, \quad (4)$$

$$\bar{p} = p - 3\xi H, \quad (5)$$

where $\rho = \rho_p + \lambda$ is the proper energy density with particles attached to them and λ is the strings tension density, ρ_p is the particle energy density, $3\xi H$ is bulk viscous pressure, $\xi(t)$ is the coefficient of bulk viscosity, H is Hubble's parameter, x^ν denotes a unit space-like vector for the cloud string and u^ν denotes four-velocity vector satisfying the conditions, $u^\nu u_\nu = -1 = -x^\nu x_\nu$ and $u_\nu x^\nu = 0$.

In a co-moving coordinate system, we have

$$u^\nu = (0, 0, 0, 1), \quad x^\nu = (A^{-1}, 0, 0, 0). \quad (6)$$

Taking consideration of (4) in the field equations (2) for the metric (3) we obtain,

$$\ddot{F} + 2\left(\frac{\dot{B}}{B}\right)\dot{F} + \left(\frac{\ddot{A}}{A} + 2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}\right)F - \frac{1}{2}f = p - 3\xi H - \lambda, \quad (7)$$

$$\ddot{F} + \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B}\right)\dot{F} + \left(\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}\right)F - \frac{1}{2}f = p - 3\xi H, \quad (8)$$

$$\left(\frac{\dot{A}}{A} + 2\frac{\dot{B}}{B}\right)\dot{F} + \left(\frac{\ddot{A}}{A} + 2\frac{\ddot{B}}{B}\right)F - \frac{1}{2}f = -\rho, \quad (9)$$

where the overhead dot ($\cdot$) denotes the derivative with respect to cosmic time t .

Here we have three non-linear differential field equations with seven unknowns, namely; f , A , B , ρ , λ , p and ξ . The solution of these unknowns is discussed in the next section.

Also, we define some kinematical space-time quantities of physical interest in cosmology, as follows.

The average scale factor a and the spatial volume V are respectively defined as

$$a = \sqrt[3]{AB^2} \quad \text{and} \quad V = a^3. \quad (10)$$

The volumetric cosmic expansion rate is described by the generalized mean Hubble's parameter H given by

$$H = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 H_i = \frac{1}{3} (H_1 + H_2 + H_3), \quad (11)$$

in which $H_1 = \dot{A}/A$, and $H_2 = H_3 = \dot{B}/B$ denotes the directional Hubble's parameters.

Using (10) and (11), we have obtained the expansion scalar Θ , the mean anisotropy parameter Δ , the shear scalar σ^2 , and the deceleration parameter q respectively as

$$\Theta = \frac{\dot{A}}{A} + 2\frac{\dot{B}}{B} = 3H, \quad (12)$$

$$\Delta = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{H_i - H}{H} \right)^2, \quad (13)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 H_i^2 - \Theta^2 \right), \quad (14)$$

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -1 + \frac{d}{dt} \frac{1}{H}. \quad (15)$$

4. Solution of field equations. To solve the non-linear differential field Eqs. (7)-(9) completely in order to obtain exact solutions, we consider some physically plausible conditions.

Firstly, we consider the weak field limit for a point-like source of $f(R)$ gravity formalism given by

$$f(R) = R^{3/2}. \quad (16)$$

Using the weak field limit for a point-like source of $f(R)$ gravity model Capozziello et al., [29] briefly reviewed and tested an exact $f(R)$ gravity model at Galactic and local scales. Bisabr [30] investigated local gravity constraints and power law $f(R)$ theories in which he obtained $f(R) = \alpha R^{1+1/n}$ power law gravity model. Lazarov et al. [31] presented the calculations of orbits and periods in R^n gravity in their research geodesic equations in the weak field limit of general $f(R)$ gravity theory. Again Capozziello et al., [32] assumed R^m model and discussed the energy conditions in $f(R)$ gravity.

For the deterministic solutions, we consider the expansion scalar Θ is proportional to the shear scalar σ^2 which leads to the following analytic relation

$$A = B^\gamma, \quad (17)$$

where γ is a constant.

Finally, we consider the special form of an average scale factor in the form

$$a(t) = \left(t^2 + \frac{\delta}{\mu} \right)^{1/2\mu}, \quad (18)$$

where δ and μ are constant.

We obtained the metric coefficients A and B as

$$A = \left(t^2 + \frac{\delta}{\mu} \right)^{3\gamma/2\mu(\gamma+2)} \quad \text{and} \quad B = \left(t^2 + \frac{\delta}{\mu} \right)^{3/2\mu(\gamma+2)}. \quad (19)$$

Substituting values of A and B from (19) in (3), we get

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{\mu t^2 + \delta}{\mu} \right)^{3\gamma/\mu(\gamma+2)} dx^2 - \left(\frac{\mu t^2 + \delta}{\mu} \right)^{3/\mu(\gamma+2)} (dy^2 + dz^2). \quad (20)$$

The metric potential functions of the derived model in (20) are constant for any type of finite t , and hence it is free from any type of singularity in cosmic evolution until $t \rightarrow \infty$.

The spatial volume V becomes

$$V = \left(t^2 + \frac{\delta}{\mu} \right)^{3/2\mu}. \quad (21)$$

The spatial volume V of the universe is a time-dependent function, and its graphical behaviour has been shown in Fig.1, which depicts the exponential expansion of the universe according to the increasing time t .

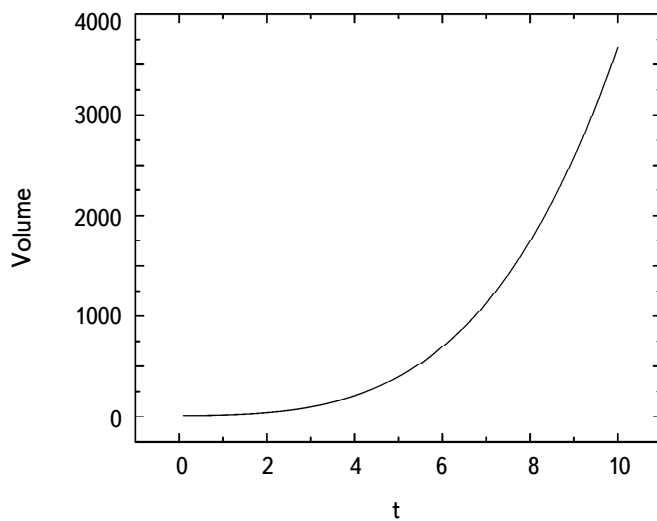


Fig.1. Variation of volume V vs. time t for $\delta = 4$, $\mu = 0.85$.

The mean Hubble's parameter H and the expansion scalar Θ are obtained as

$$H = \frac{t}{\mu t^2 + \delta}, \quad (22)$$

$$\Theta = \frac{3t}{\mu t^2 + \delta}. \quad (23)$$

The graphical behaviour of mean Hubble's parameter and expansion scalar vs.

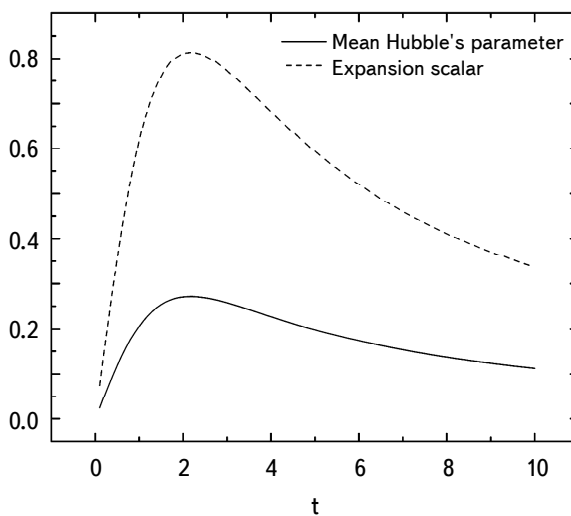


Fig.2. Variation of mean Hubble's parameter H and expansion scalar Θ vs. time t for $\delta = 4$, $\mu = 0.85$.

cosmic time t is shown in Fig.2, where it can be seen that both parameters steadily decline with increasing time after first growing to a minor amount. It demonstrates how the cosmos expands faster at first before slowing down as time passes.

The mean anisotropy parameter Δ and the shear scalar σ^2 are obtained as

$$\Delta = \frac{2(\gamma-1)^2}{(\gamma+2)^2}, \quad (24)$$

$$\sigma^2 = \frac{3t^2(\gamma-1)^2}{(\gamma+2)^2(\mu t^2 + \delta)^2}. \quad (25)$$

The ratio of shear scalar to expansion scalar turns out to be

$$\frac{\sigma^2}{\Theta^2} = \frac{(\gamma-1)^2}{3(\gamma+2)^2}. \quad (26)$$

From the expressions (24)-(26), it is been observed that the mean anisotropy parameter, the shear scalar and its ratio are non-zero throughout the universe's evolution except for $\gamma=1$ which describes that the cosmos is anisotropic and holds shear.

The deceleration parameter is obtained as

$$q = (\mu-1) - \frac{\delta}{t^2}. \quad (27)$$

We are well known with the fact that the deceleration parameter symbolizes the inflation for $q < 0$, deflation for $q > 0$ and constant rate expansion for $q=0$. The expression (27) demonstrates the value of the deceleration parameter whose

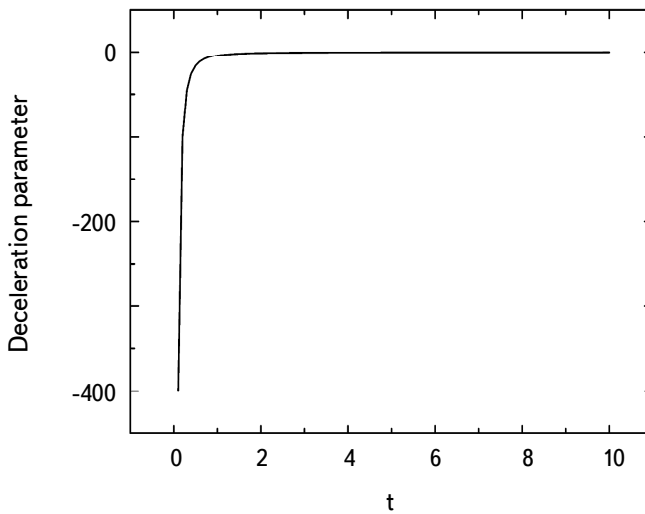


Fig.3. Variation of deceleration parameter q vs. time t for $\delta = 4$, $\mu = 0.85$.

graphical behaviour has been depicted in Fig.3 for the appropriate choice of constants. As can be seen from the figure, the deceleration parameter q rapidly increases in negative during the brief time interval $0 < t < 1$ providing $q < -1$ indicating the super-exponential cosmic expansion leading to the occurrence of Big Rip. However, later on, q develops with time continuously to approach -0.15 . It confirms the inflationary cosmic accelerating phase. This observations are supported with [33].

The energy density

$$\rho = - \frac{6\sqrt{6} \left\{ \mu^2(\gamma+2)^4 t^4 - \frac{15}{4} \mu(\gamma+2)^2 t^2 \left[\frac{11}{15} \delta(\gamma+2)^2 + \frac{t^2}{5} (5\gamma^2 + 4\gamma + 12) \right] + \frac{1}{4} \delta^2 (\gamma+2)^4 + \frac{3}{4} \delta(\gamma+2)^2 t^2 (5\gamma^2 + 4\gamma + 12) + \frac{9}{4} \gamma(\gamma-4) t^4 (\gamma^2 + 2\gamma + 3) \right\}}{(\gamma+2)^3 (\mu t^2 + \delta)^3 \sqrt{\delta(\gamma+2)^2 - [\mu(\gamma+2)^2 - 3\gamma(\gamma+2) - 9] t^2}}. \quad (28)$$

The energy density is determined to be negative in an initial epoch during $0 < t < 1$, but it thereafter develops in positive gradually to some amount and then drops with increasing time and diminishes when $t \rightarrow \infty$ (Fig.4). A similar type of behaviour has been observed by Baro et al. [34].

We assume that the coefficient of viscosity should vary with the expansion scalar in such a way that

$$\xi\theta = \xi_0 = \text{constant}. \quad (29)$$

From (29) we have obtained the coefficient of bulk viscosity as

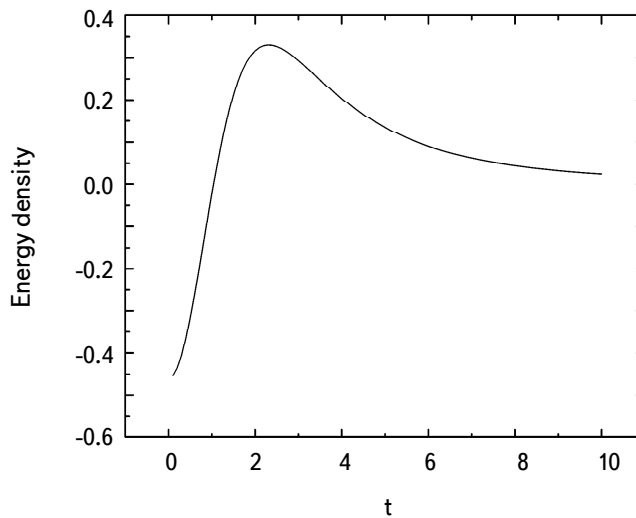


Fig.4. Variation of energy density vs. time t for $\delta = 4$, $\gamma = 0.9$ and $\mu = 0.85$.

$$\xi = \frac{\xi_0(\mu t^2 + \delta)}{3t}. \quad (30)$$

The pressure can be obtained as

$$p = - \left\{ \xi_0(\gamma+2)^3(\mu t^2 + \delta)^3 \left\{ \left[\frac{(\mu-3)\gamma^2}{+2(2\mu-3)\gamma} \right] t^2 - \delta(\gamma+2)^2 \right\} \sqrt{\frac{\delta(\gamma+2)^2}{-[\mu(\gamma+2)^2 - 3\gamma(\gamma+2) - 9]} t^2} \right. \\ \left. - 3\sqrt{6} \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2}[(2\mu+3)\gamma + 4\mu][(\mu-2)\gamma + 2\mu - 1][(\mu-3)\gamma^2 + 2(2\mu-3)\gamma + 4\mu - 9]^2 t^6 \\ &- \frac{3}{2}\delta \left[\frac{(5\mu^2 - 8\mu - 3)\gamma^2}{+ \mu(20\mu - 19)\gamma} \right] [(\mu-3)\gamma^2 + 2(2\mu-3)\gamma + 4\mu - 9](\gamma+2)^2 t^4 \\ &+ \frac{6}{4}\delta^2(\gamma+2)^3 t^2 \left[\frac{(4\mu^2 - 7\mu - 3)\gamma^3 + 3(8\mu^2 - 10\mu - 2)\gamma^2}{+ (48\mu^2 - 52\mu - 3)\gamma + 4\mu(8\mu - 11) + 3} \right] \\ &- \frac{1}{2}\delta^3(\gamma+2)^4 [3\mu - 1]\gamma^2 + (12\mu - 1)\gamma + 12\mu - 7 \end{aligned} \right\} \right\} \\ \left. (\gamma+2)^3(\mu t^2 + \delta)^3 \left\{ \delta(\gamma+2)^2 - [\mu(\gamma+2)^2 - 3\gamma(\gamma+2) - 9] t^2 \right\}^{3/2} \right\} \quad (31)$$

Fig.5 depicts the graph of the coefficient of bulk viscosity, which rapidly decreases in the beginning but then gradually begins to increase, whereas the pressure of the universe increases asymptotically in positive and approaches constant with the time elevation (Fig.6).

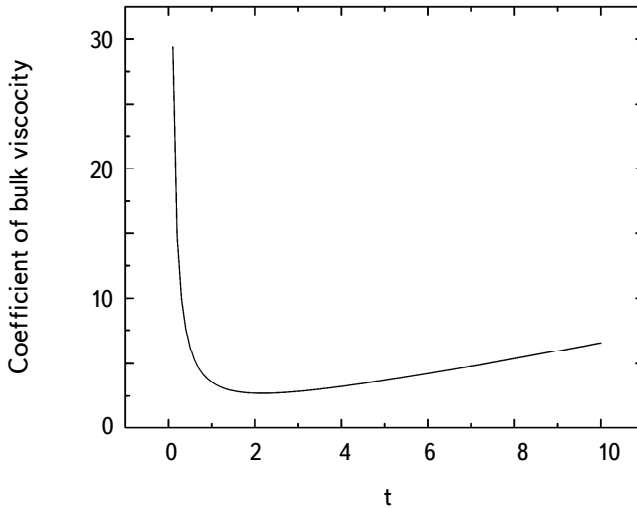


Fig.5. Variation of coefficient of bulk viscosity vs. time t for $\delta = 4$, $\xi_0 = 2.2$ and $\mu = 0.85$.

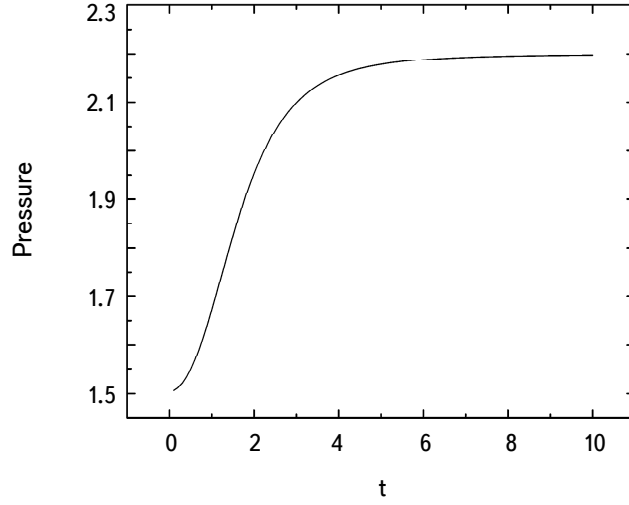


Fig.6. Variation of pressure vs. time t for $\delta = 4$, $\gamma = 0.9$, $\xi_0 = 2.2$ and $\mu = 0.85$.

The string's tension density can be obtained as

$$\lambda = \frac{27\sqrt{6}(\gamma-1) \left\{ \left[(\mu-3)\gamma^2 + 2(2\mu-3)\gamma + 4\mu-9 \right] t^4 - \frac{1}{3}\delta(\mu+3)(\gamma+2)^2 t^2 - \frac{1}{3}\delta^2(\gamma+2)^2 \right\}}{2(\gamma+2)^2 (\mu t^2 + \delta)^3 \sqrt{\delta(\gamma+2)^2 - [\mu(\gamma+2)^2 - 3\gamma(\gamma+2) - 9]} t^2}. \quad (32)$$

The particle density turn out to be

$$\rho_p = -\frac{6\sqrt{6} \left\{ \frac{1}{4} [2(2\mu+3)\gamma^2 + (16\mu+21)\gamma + 16\mu-18] [(\mu-3)\gamma^2 + 2(2\mu-3)\gamma + 4\mu-9] t^4 - \frac{1}{4}\delta(\gamma+2)^2 [2(7\mu-3)\gamma^2 + (47\mu-3)\gamma + 38\mu-54] t^2 - \frac{1}{4}\delta^2(\gamma+2)^3 (2\gamma-5) \right\}}{(\gamma+2)^3 (\mu t^2 + \delta)^3 \sqrt{\delta(\gamma+2)^2 - [\mu(\gamma+2)^2 - 3\gamma(\gamma+2) - 9]} t^2}. \quad (33)$$

A positive value of string tension density shows the existence of the universe's string phase, whereas a negative value of λ suggests the disappearance of the universe's string phase, meaning that the universe is dominated by the cosmological constant [35]. Fig.7 presents the graphical representation of particle and tension density vs. time. As can be seen from Fig.7 the tension density is entirely positive and gradually lowers and diminishes, so our constructed model supports the existence of the universe's string phase. However, the particle density rapidly switches from negative to positive in the beginning to some amount and subsequently decreases and diminishes with infinite time. This leads to the observation

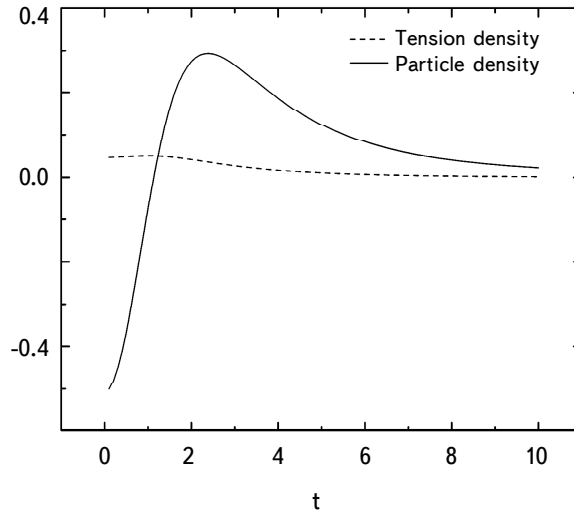


Fig.7. Variation of particle and tension density vs. time t for $\delta = 4$, $\gamma = 0.9$, $\xi_0 = 2.2$ and $\mu = 0.85$.

that the cosmos first appears to be string-dominated, but that later on, the string-dominated phase vanishes and the particle-dominated era begins and rests to end.

The energy conditions:

Energy conditions are mathematically enforced boundaries that strive to claim positive energy. There are several energy conditions associated with physical situations; the most prevalent one is the impact of DE which defies the strong energy condition. The characteristics shared by all non-gravitational fields and states of matter are described by the energy conditions. It eliminates Einstein's field equations' irrational solutions. In this section, we discuss the energy conditions that are respectively defined by Capozziello et al., [32] in which the authors have discussed the role of energy conditions in $f(R)$ cosmology.

The energy conditions are given by

- (i) Null Energy Condition (NEC) $\rho + p \geq 0$
- (ii) Weak Energy Condition (WEC) $\rho \geq 0$ and $\rho + p \geq 0$
- (iii) Strong Energy Condition (SEC) $\rho + 3p \geq 0$ and $\rho + p \geq 0$
- (iv) Dominant Energy Condition (DEC) $\rho \geq 0$ and $\rho \pm p \geq 0$.

From (28) and (31) we can express the conditions as

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \xi_0(\gamma+2)^3(\mu t^2+\delta)^3 \left\{ \left[\begin{array}{l} (\mu-3)\gamma^2 \\ +2(2\mu-3)\gamma \\ +4\mu-9 \end{array} \right] t^2 - \delta(\gamma+2)^2 \right\} \sqrt{\frac{\delta(\gamma+2)^2}{-\left[\mu(\gamma+2)^2-3\gamma(\gamma+2)-9\right]t^2}} \right. \\
 & \left. -3\sqrt{6} \left\{ \begin{array}{l} \left[(\gamma+2)^2\mu-3\gamma^2-6\gamma-9 \right]^2 \left[(\gamma+2)^2\mu^2+\frac{3}{2}(\gamma+2)^2\mu-\frac{9}{2}\gamma^2+\frac{9}{2}\gamma \right] t^6 \\ -\frac{3}{2}\delta(\gamma+2)^2 t^4 \left[(\gamma+2)^2\mu-3\gamma^2-6\gamma-9 \right] \left[\begin{array}{l} 5(\gamma+2)^2\mu^2-(3\gamma^2-\gamma+4)\mu \\ -9\gamma^2-9 \end{array} \right] \\ +6\delta^2(\gamma+2)^3 t^2 \left\{ \begin{array}{l} (\gamma+2)^3\mu^2-\frac{3}{4}(\gamma+2)(\gamma^2+2)\mu \\ -\frac{3}{4}[\gamma^2(3\gamma+8)+10\gamma+9] \end{array} \right\} \\ -\frac{3}{2}\delta^3(\gamma+2)^4 \left[(\gamma+2)^2\mu+\gamma-1 \right] \end{array} \right\} \right\} \quad (34) \\
 & \rho+p=-\frac{\left[\begin{array}{l} \xi_0(\gamma+2)^3(\mu t^2+\delta)^3 \left\{ \left[\begin{array}{l} (\mu-3)\gamma^2 \\ +2(2\mu-3)\gamma \\ +4\mu-9 \end{array} \right] t^2 - \delta(\gamma+2)^2 \right\} \sqrt{\frac{\delta(\gamma+2)^2}{-\left[\mu(\gamma+2)^2-3\gamma(\gamma+2)-9\right]t^2}} \\ -3\sqrt{6} \left\{ \begin{array}{l} \left[(\gamma+2)^2\mu-3\gamma^2-6\gamma-9 \right]^2 \left[(\gamma+2)^2\mu^2+\frac{3}{2}(\gamma+2)^2\mu-\frac{9}{2}\gamma^2+\frac{9}{2}\gamma \right] t^6 \\ -\frac{3}{2}\delta(\gamma+2)^2 t^4 \left[(\gamma+2)^2\mu-3\gamma^2-6\gamma-9 \right] \left[\begin{array}{l} 5(\gamma+2)^2\mu^2-(3\gamma^2-\gamma+4)\mu \\ -9\gamma^2-9 \end{array} \right] \\ +6\delta^2(\gamma+2)^3 t^2 \left\{ \begin{array}{l} (\gamma+2)^3\mu^2-\frac{3}{4}(\gamma+2)(\gamma^2+2)\mu \\ -\frac{3}{4}[\gamma^2(3\gamma+8)+10\gamma+9] \end{array} \right\} \\ -\frac{3}{2}\delta^3(\gamma+2)^4 \left[(\gamma+2)^2\mu+\gamma-1 \right] \end{array} \right\} \end{array} \right]}{(\gamma+2)^3(\mu t^2+\delta)^3 \left\{ \delta(\gamma+2)^2 - \left[\mu(\gamma+2)^2-3\gamma(\gamma+2)-9\right]t^2 \right\}^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \xi_0(\gamma+2)^3(\mu t^2+\delta)^3 \left\{ \left[\begin{array}{l} (\mu-3)\gamma^2 \\ +2(2\mu-3)\gamma \\ +4\mu-9 \end{array} \right] t^2 - \delta(\gamma+2)^2 \right\} \sqrt{\frac{\delta(\gamma+2)^2}{-\left[\mu(\gamma+2)^2-3\gamma(\gamma+2)-9\right]t^2}} \right. \\
 & \left. -3\sqrt{6} \left\{ \begin{array}{l} \left[(\gamma+2)^2\mu-3\gamma^2-6\gamma-9 \right]^2 \left[(\gamma+2)^2\mu^2+\frac{1}{6}(\gamma+2)^2\mu-\frac{7}{2}\gamma^2+\frac{1}{2}\gamma \right] t^6 \\ -\frac{1}{2}\delta(\gamma+2)^2 t^4 \left[(\gamma+2)^2\mu-3\gamma^2-6\gamma-9 \right] \\ \times \left[15(\gamma+2)^2\mu^2-(19\gamma^2+37\gamma+52)\mu-15\gamma^2-3 \right] \\ +6\delta^2(\gamma+2)^3 t^2 \left\{ \begin{array}{l} (\gamma+2)^3\mu^2-\left[\gamma^2\left(\frac{17}{12}\gamma+\frac{11}{2}\right)+\frac{19}{2}\gamma+\frac{25}{3} \right] \mu \\ -\left[\gamma^2\left(\frac{5}{4}\gamma+3\right)+3\gamma+\frac{7}{4} \right] \end{array} \right\} \\ -\frac{1}{6}\delta^3(\gamma+2)^4 \left[9\mu-2 \right] \gamma^2 + (36\mu+1)\gamma + 36\mu-17 \end{array} \right\} \right\} \quad (35) \\
 & \rho+3p=-\frac{\left[\begin{array}{l} \xi_0(\gamma+2)^3(\mu t^2+\delta)^3 \left\{ \left[\begin{array}{l} (\mu-3)\gamma^2 \\ +2(2\mu-3)\gamma \\ +4\mu-9 \end{array} \right] t^2 - \delta(\gamma+2)^2 \right\} \sqrt{\frac{\delta(\gamma+2)^2}{-\left[\mu(\gamma+2)^2-3\gamma(\gamma+2)-9\right]t^2}} \\ -3\sqrt{6} \left\{ \begin{array}{l} \left[(\gamma+2)^2\mu-3\gamma^2-6\gamma-9 \right]^2 \left[(\gamma+2)^2\mu^2+\frac{1}{6}(\gamma+2)^2\mu-\frac{7}{2}\gamma^2+\frac{1}{2}\gamma \right] t^6 \\ -\frac{1}{2}\delta(\gamma+2)^2 t^4 \left[(\gamma+2)^2\mu-3\gamma^2-6\gamma-9 \right] \\ \times \left[15(\gamma+2)^2\mu^2-(19\gamma^2+37\gamma+52)\mu-15\gamma^2-3 \right] \\ +6\delta^2(\gamma+2)^3 t^2 \left\{ \begin{array}{l} (\gamma+2)^3\mu^2-\left[\gamma^2\left(\frac{17}{12}\gamma+\frac{11}{2}\right)+\frac{19}{2}\gamma+\frac{25}{3} \right] \mu \\ -\left[\gamma^2\left(\frac{5}{4}\gamma+3\right)+3\gamma+\frac{7}{4} \right] \end{array} \right\} \\ -\frac{1}{6}\delta^3(\gamma+2)^4 \left[9\mu-2 \right] \gamma^2 + (36\mu+1)\gamma + 36\mu-17 \end{array} \right\} \end{array} \right]}{(\gamma+2)^3(\mu t^2+\delta)^3 \left\{ \delta(\gamma+2)^2 - \left[\mu(\gamma+2)^2-3\gamma(\gamma+2)-9\right]t^2 \right\}^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

$$\rho - p = \frac{\left\{ \xi_0 (\gamma+2)^3 (\mu t^2 + \delta)^3 \left\{ \left[\frac{(\mu-3)\gamma^2}{+2(2\mu-3)\gamma} t^2 - \delta(\gamma+2)^2 \right] \sqrt{\frac{\delta(\gamma+2)^2}{-[\mu(\gamma+2)^2 - 3\gamma(\gamma+2) - 9] t^2}} \right. \right.}{-3\sqrt{6} \left\{ \begin{aligned} & \left[(\gamma+2)^2 \mu - 3\gamma^2 - 6\gamma - 9 \right]^2 \left[(\gamma+2)^2 \mu^2 - \frac{5}{2}(\gamma+2)^2 \mu - \frac{3}{2}\gamma(\gamma+5) \right] t^6 \\ & - \frac{3}{2} \delta(\gamma+2)^2 t^4 \left[(\gamma+2)^2 \mu - 3\gamma(\gamma+2) - 9 \right] \left[\frac{5(\gamma+2)^2 \mu^2}{-(13\gamma(\gamma+3) + 44)\mu} \right. \\ & \left. \left. + 3\gamma^2 + 15 \right] \right. \\ & + 6\delta^2 (\gamma+2)^3 t^2 \left\{ \left[(\gamma+2)^3 \mu^2 - \frac{1}{4}(\gamma^2(11\gamma+54) + 102\gamma + 76)\mu \right] \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{4}[\gamma^2(\gamma+4) + 8\gamma + 11] \right\} \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \delta^3 (\gamma+2)^4 \left[(\gamma+2)^2 \mu - \frac{1}{3}(\gamma(2\gamma+5) + 11) \right] \right\}}{(\gamma+2)^3 (\mu t^2 + \delta)^3 \left\{ \delta(\gamma+2)^2 - [\mu(\gamma+2)^2 - 3\gamma(\gamma+2) - 9] t^2 \right\}^{3/2}}. \quad (36) \end{aligned} \right.$$

The graphical behaviour of energy conditions is depicted in Fig.8. From the figure, it is been observed that SEC and NEC are completely satisfied, DEC is completely violated, and because energy density is initially negative i.e. $\rho < 0$ for this amount, WEC is violated, but as soon as energy density becomes positive i.e. $\rho \geq 0$, WEC is perfectly satisfied. In the cosmological context, recent research highlights the significance of violating the DEC (i.e. violation of the Phantom Matter field). Naturally, the violation of DEC raises the concerns about causality and stability of the system. While the DEC satisfying matter guarantees the system's causality and stability, but violation of DEC does not always mean that the system is unstable or violates causality [36].

5. Concluding remarks. In this paper, we have investigated the plane symmetric LRS Bianchi type I metric in the presence of bulk viscous fluid coupled to a string of cloud fluid in the context of $f(R)$ gravity. The exact solutions to the field equations have been obtained by using some physically plausible situations like the weak field limit for a point-like source $f(R) = R^{3/2}$, the very well known expansion-shear scalar proportionality relation and the special form of an average scale factor. A discussion of the energy conditions and the values of several geometrical and physical parameters has been conducted utilising their time-varying graphs.

It is been observed that the constructed cosmos is singularity-free for any type

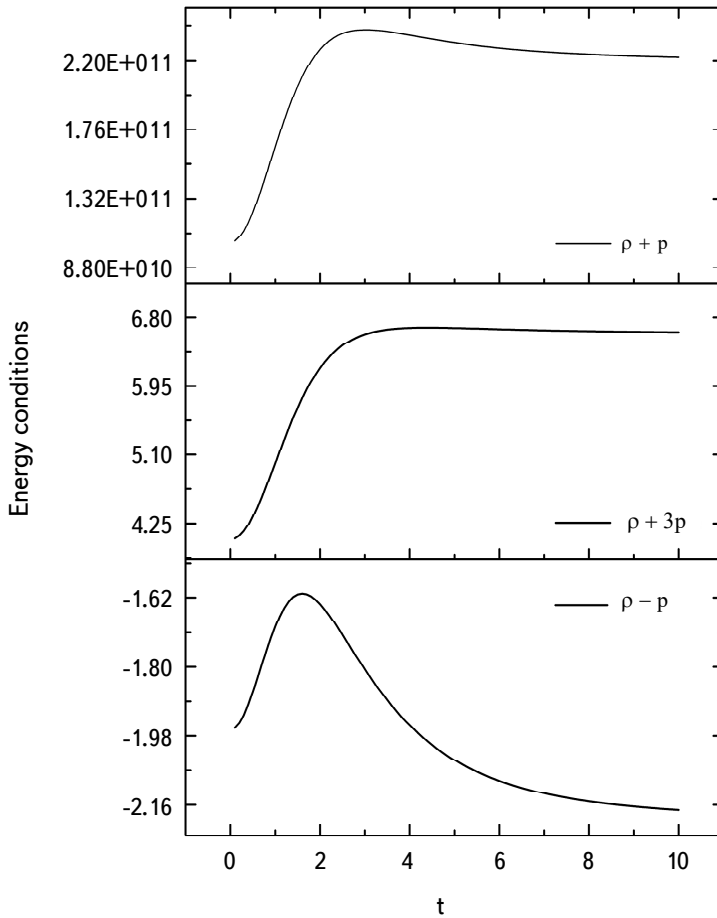


Fig.8. Variation of energy conditions vs. time t for $\delta = 4$, $\gamma = 0.9$, $\xi_0 = 2.2$ and $\mu = 0.85$.

of finite t until $t \rightarrow \infty$. The derived cosmos is expanding, but not at the same rate as before, it began expanding more quickly in the beginning and slowed down later time. The cosmos is anisotropic and has held shear throughout its existence, with the exception of $\gamma = 1$. It is also discovered that the cosmic model is accelerating for the appropriate choice of constants showing inflationary phase. Hence the investigations resemble the recent observations of an accelerating, anisotropic and expanding universe.

The energy density is found to be negative during the first epoch, but it later shifts to positive and grows for a while before decreasing and diminishing. Baro et al. [34] have noted a similar kind of behaviour. The universe's pressure grows asymptotically in a positive direction and approaches constantly with time elevation, in contrast to the bulk viscosity coefficient, which first declines quickly before gradually continuing to climb. The constructed model supports the existence of

the universe's string phase. Furthermore, the behaviour of particle density and string density leads to the observation that the cosmos first appears to be string-dominated, but that later on, the string-dominated phase vanishes and the particle-dominated era begins and rests to end. It is been observed that SEC and NEC are completely satisfied, DEC is completely violated, and because energy density is initially negative i.e. $\rho < 0$ for this amount, WEC is violated, but as soon as energy density becomes positive i.e. $\rho \geq 0$, WEC is perfectly satisfied.

Acknowledgements. The authors would like to express their heartfelt gratitude to the Editor and anonymous Referee for their constructive suggestions for the improvement and upgradation of the manuscript.

¹ Department of Mathematics, Shri R. R. Lahoti Science College, Morshi, Dist. Amravati (M.S.), India, e-mail: ankitdabre@live.com

² Department of Mathematics, Government Polytechnic College, Murtizapur, Dist. Amravati (M.S.), India, e-mail: pallavimakode@hotmail.com

ВЯЗКАЯ ПЛОСКО-СИММЕТРИЧНАЯ КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРУНЫ В $f(R)$ ГРАВИТАЦИИ

А.ДАБРЕ¹, П.МАКОДЕ²

В данной работе мы использовали метрику плоско-симметричной LRS типа Бьянки I для изучения объемной вязкой жидкости, связанной с облаком струн в рамках теории гравитации $f(R)$. Для получения детерминированных решений учтены некоторые физически обоснованные условия, такие как: предел слабого поля для точечного источника $f(R) = R^{3/2}$ и хорошо известное соотношение пропорциональности между расширением и сдвигом скаляра, а также специальная форма среднего масштабного коэффициента. Кроме того, вычислены некоторые физические и кинематические параметры, а также энергетические условия для изучения астрофизических последствий построенной модели и обсудили их графическое поведение, которое хорошо согласуется с недавними наблюдательными данными.

Ключевые слова: метрика Бьянки типа I: объемная вязкая жидкость: космическая струна: энергетические условия: гравитация $f(R)$

REFERENCES

1. *H.A.Buchdahl*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **150**, 1, 1970.
2. *M.B.Baibosunov, V.T.Gurovich, U.M.Imanaliyev*, JETP, **71**, 636, 1990.
3. *S.Noijiri, S.D.Odintsov, V.K.Oikonomou*, Phys. Dark Universe, **29**, 100602, 2020.
4. *S.Noijiri, S.D.Odintsov*, Phys. Rep., **505**, 59, 2011.
5. *A.Malik, M.F.Shamir*, New Astron., **82**, 101460, 2021.
6. *K.Pawar, A.K.Dabre, P.Makode*, Astrophys., **66**, 353, 2023.
7. *G.Cognola et al.*, Phys. Rev. D - Part. Fields, Gravit. Cosmol., **77**, 2008.
8. *S.Noijiri, S.D.Odintsov*, Phys. Lett. B, **657**, 238, 2007.
9. *S.Noijiri, S.D.Odintsov*, Phys. Rev. D, **77**, 026007, 2008.
10. *K.Pawar, A.K.Dabre*, Astrophys., **66**, 114, 2023.
11. *K.Pawar, A.K.Dabre*, Int. J. Sci. Res. Phys. Appl. Sci., **10**, 8, 2022.
12. *K.Pawar, A.K.Dabre*, J. Sci. Res., **15**, 695, 2023.
13. *K.Pawar, N.T.Katre, A.K.Dabre*, Int. J. Sci. Res. Phys. Appl. Sci., **11**, 1, 2023.
14. *K.Pawar, A.K.Dabre, N.T.Katre*, Int. J. Sci. Res. Phys. Appl. Sci., **10**, 1, 2022.
15. *D.R.K.Reddy, S.Anitha, S.Umadevi*, Eur. Phys. J. Plus, **129**, 96, 2014.
16. *E.A.Hegazy*, Astrophys. Space Sci., **365**, 33, 2020.
17. *S.Noijiri, S.D.Odintsov, V.K.Oikonomou*, Phys. Rep., **692**, 1-104, 2017.
18. *L.Freidel, R.G.Leigh, D.Minic*, Int. J. Mod. Phys. D, **23**, 1442006, 2014.
19. *B.Mishra, S.K.Tripathy, P.P.Ray*, Astrophys. Space Sci., **363**, 86, 2018.
20. *T.Vinutha, V.U.M.Rao, G.Bekele et al.*, Indian J. Phys., **95**, 1933, 2021.
21. *F.Darabi, M.Golmohammadi, A.R.Aghdam*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., **17**, 2050175, 2020.
22. *R.K.Mishra, H.Dua*, Astrophys. Space Sci., **364**, 195, 2019.
23. *A.K.Sethi, B.Nayak, R.Patra*, J. Phys. Conf. Ser., **1344**, 012001, 2019.
24. *M.R.Mollah, K.P.Singh*, New Astron., **88**, 101611, 2021.
25. *R.Bali, S.Dave*, Astrophys. Space Sci., **282**, 461, 2002.
26. *A.Dixit, R.Zia, A.Pradhan*, Pramana J. Phys., **94**, 25, 2020.
27. *P.K.Sahoo, A.Nath, S.K.Sahu*, Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci., **41**, 243, 2017.
28. *M.V.Santhi, V.U.M.Rao, Y.Aditya*, J. Dyn. Syst. Geom. Theor., **17**, 23, 2019.
29. *S.Capozziello, E.Piedipalumbo, C.Rubano et al.*, Astron. Astrophys., **505**, 21, 2009.
30. *Y.Bisabr*, Gravit. Cosmol., **16**, 239, 2010.
31. *N.D.Lazarov, V.B.Jovanović, D.Borka et al.*, Filomat, **37**, 2023.
32. *S.Capozziello, S.Noijiri, S.D.Odintsov*, Phys. Lett. B, **781**, 99, 2018.
33. *A.Shaikh, S.V.Gore, S.D.Katore*, Bulg. J. Phys., **49**, 2022.
34. *J.Baro*, Indian J. Sci. Technol., **14**, 46, 2021.
35. *H.Martínez, C.Peralta*, Rev. Mex. Fis., **51**, 2005.
36. *G.M.Hossain*, Class. Quantum Gravity, **22**, 2653, 2005.

DOI: 10.54503/0571-7132-2024.67.2-191

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ЗВЕЗДНОГО ВЕЩЕСТВА. I. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ГОРЯЧЕЙ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ С ОБИЛЬНЫМ РОЖДЕНИЕМ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР

Г.С.АДЖЯН, А.С.АРУТЮНЯН

Поступила 6 февраля 2024

Принята к печати 10 июня 2024

Используя уравнения Власова, определены поперечная и продольная диэлектрические проницаемости горячей разреженной ультрарелятивистской электрон-позитронной плазмы. В качестве невозмущенной функции распределения электронов и позитронов использовано распределение Ферми. Показано, что из-за обильного рождения электрон-позитронных пар плазменная частота ультрарелятивистской плазмы с ростом температуры линейно растет. При этом отношение частоты, на которой спектральная плотность равновесного излучения максимальна к плазменной частоте, остается неизменным и равно 28. Показано, что в такой плазме, в частности в веществе ранней Вселенной в ультрарелятивистскую электрон-позитронную эпоху, спектр излучения отличается от чернотельного излучения весьма незначительно.

*Ключевые слова: ультрарелятивистская электрон-позитронная плазма:
диэлектрическая проницаемость*

1. Введение. При определении термодинамических характеристик горячего звездного вещества считается, что излучение в нем является планковским [1]. А в кварковом веществе, ссылаясь на дисперсионные свойства этой среды, принято считать, что электромагнитное излучение практически отсутствует [2]. Если для решения многих задач это справедливо, то для понимания некоторых явлений учет дисперсии необходим. В [3], в частности, рассматривается вопрос влияния дисперсии в веществе ранней Вселенной (до образования нейтральных атомов) на спектр излучения. Вопросам распространения линейных и нелинейных волн в астрофизической плазме посвящено много работ. В частности, в [4] на основе известных выражений для поперечной и продольной диэлектрических проницаемостей ультрарелятивистского вырожденного электронного газа, рассмотрены волны различного характера в электронно-ядерном веществе (вещество белых карликов и внешних слоев нейтронных звезд).

В предлагаемой работе исследуются диэлектрические свойства горячей

разреженной плазмы, когда концентрация электрон-позитронных пар намного превосходит концентрацию атомных ядер. Расчеты проведены согласно теории бесстолкновительной плазмы, предложенной Власовым [5].

2. Основные уравнения и соотношения. Кинетические уравнения Больцмана без столкновительного члена для функции распределения i -того типа частиц по импульсам $f_i(\vec{p}_i, \vec{r}_i, t)$, уравнения для плотностей заряда ρ и тока $\vec{j}$

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum q_i \int f_i d^3 \vec{p} dV, \quad (1)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum q_i \int \vec{v}_i f_i d^3 \vec{p} dV, \quad (2)$$

где $f_i d^3 \vec{p} dV$ - число частиц в фазовом объеме $d^3 \vec{p} dV$ в точке $\vec{r}$, в момент времени t , q_i и $\vec{v}_i$ - заряд и скорость i -того типа частиц соответственно, называются уравнениями Власова [4,6,7]. Согласно этой модели, частицы фактически движутся без столкновений под воздействием внешних сил в усредненном электромагнитном поле, созданном ими. Выбор функции распределения частиц по импульсам, а не по скоростям, удобен тем, что кинетические уравнения Больцмана для $f_i(\vec{p}_i, \vec{r}_i, t)$ справедливы и при релятивистских скоростях [6]. Для таких частиц достаточно лишь использовать релятивистские соотношения между физическими величинами, в частности, связь между импульсом и энергией частицы. В рассматриваемых нами случаях плазма при отсутствии магнитного поля и электромагнитной волны является изотропной и равновесной. Все функции распределения по импульсам изотропной плазмы зависят только от величины импульса соответствующей частицы.

Электромагнитная волна, распространяясь в изотропной плазме, нарушает ее равновесное состояние f_{0i} , а также ее изотропность [6,7]. Последнее обстоятельство вызывает пространственную дисперсию в изначально изотропной плазме. Если электромагнитная волна монохроматическая и достаточно слабая, то возмущения функций распределения $\delta f_i = f_i - f_{0i}$ легко находятся. Тензор диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\alpha\beta}$ выражается через δf_i и зависит как от частоты ω , так и от волнового вектора $\vec{k}$ [6,7]. В общем случае этот тензор имеет вид [6,7]

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \vec{k}) = \epsilon_t(\omega, k)(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) + \epsilon_l(\omega, k)n_\alpha n_\beta, \quad \vec{n} = \vec{k}/k. \quad (3)$$

Согласно $D_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta$, первое слагаемое выделяет поперечную $\vec{D}_\perp = \epsilon_t \vec{E}_\perp$ (по отношению к волновому вектору $\vec{k}$) часть индукции, а второе слагаемое - продольную $\vec{D}_\parallel = \epsilon_l \vec{E}_\parallel$. Функции ϵ_t и ϵ_l называются поперечными и продольными диэлектрическими проницаемостями, соответственно. Они выражаются через невозмущенные функции распределения [6,7]

$$\varepsilon_i(\omega, k) = 1 - \frac{2\pi}{\omega} \sum q_i^2 \int \bar{v}_{i\perp} \frac{df_{0i}}{d\bar{p}_{i\perp}} \frac{d^3\bar{p}}{\bar{k}\bar{v}_i - \omega}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 - \frac{4\pi}{k^2} \sum q_i^2 \int \bar{k} \frac{df_{0i}}{d\bar{p}_i} \frac{d^3\bar{p}}{\bar{k}\bar{v}_i - \omega}, \quad (5)$$

где q_i , $\bar{v}_i$ и $\bar{p}_i$ - заряд, скорость и импульс i -того типа частицы, соответственно. Знаком $\perp$ у вектора обозначена поперечная к волновому вектору составляющая этого вектора. Интегралы вычисляются, обходя полюс $\bar{k}\bar{v}_i = \omega$ снизу - по правилу Ландау. Для волн $\omega > kc$ полюс отсутствует. Отметим, что эти формулы верны как для любых скоростей частиц, так и для изначально анизотропной плазмы.

В квазивыврожденном веществе число заполнений энергетических уровней фермионов близко к единице. Поэтому классические уравнения Больцмана в уравнениях Власова заменяются соответствующими квантовыми уравнениями [6,7]. Соответственно меняются и выражения для поперечной и продольной проницаемостей (4) и (5).

Волновое число k и частота ω связаны законами дисперсии [6,7]

$$k^2 c^2 = \omega^2 \varepsilon_l(\omega, k) \quad \text{и} \quad \varepsilon_l(\omega, k) = 0. \quad (6)$$

Плотность энергии равновесного теплового излучения как плотность энергии Бозе газа безмассовых частиц равна [8]

$$w(T) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \hbar\omega \frac{d^3\bar{p}}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}, \quad (7)$$

где $d^3\bar{p} = \hbar^3 d^3\bar{k}$, а связь энергии частиц (фотонов) $\hbar\omega$ с импульсом $\bar{p} = \hbar\bar{k}$ определяется законом дисперсии поперечных волн (6). Коэффициент 2 в (7) обусловлен наличием двух независимых поляризаций электромагнитной волны. Давление излучения равно 1/3 плотности энергии (7).

Области изменений температуры и концентраций частиц, а также химический состав звездного вещества настолько огромны и разнообразны, что описать диэлектрические проницаемости ε_r и ε_l этого вещества единой формулой невозможно. Поэтому рассмотрим отдельные частные случаи.

3. Волны в разреженной плазме с обильным рождением электрон-позитронных пар.

3.1. Поперечные волны. Когда плотность полностью ионизированной плазмы достаточно низка, а температура высока, то в ней обильно рождаются электрон-позитронные пары (e^-e^+ -пары), число которых намного превосходит число тех электронов, которые нейтрализуют положительный заряд атомных ядер [9]. Концентрации электронов n_e и позитронов n_{pos} почти равны ($n_e \approx n_{pos}$).

Поэтому они имеют нулевые химические потенциалы ($\mu_e = \mu_{pos} = 0$). В таком состоянии термодинамические характеристики плазмы зависят только от температуры и являются суммами соответствующих характеристик горячего электрон-позитронного газа и электромагнитного излучения. Более подробно такое состояние рассмотрено в [9], где влияние дисперсии на характеристику излучения не учтено. Считается, что излучение чернотельное.

Ниже мы определяем закон дисперсии горячей ультрарелятивистской ($k_B T \gg m_e c^2$) электрон-позитронной плазмы при отсутствии магнитного поля. Тензор диэлектрической проницаемости ультрарелятивистской горячей электронной плазмы с максвелловским распределением без учета рождения $e^- e^+$ пар вычислен в [10]. Поперечная диэлектрическая проницаемость такой плазмы имеет следующий вид [6,7]

$$\varepsilon_{Ml} = 1 + \frac{\pi e^2 n_e c}{k \omega k_B T} \Phi\left(\frac{\omega}{kc}\right), \quad \omega > kc, \quad \Phi(x) = (1 - x^2) \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 2x. \quad (8)$$

Физические характеристики плазмы с фермиевским распределением электронов обозначим дополнительным индексом F , а с максвелловским - индексом M .

Волны с $\omega < kc$ в плазме затухают так как диэлектрические проницаемости для этих частот становятся комплексными [6,7]. В представленной работе рассматриваются только незатухающие волны, т.е. волны с $\omega > kc$. Конечно, и для этих частот столкновения приводят к затуханию, однако, когда частота столкновений частиц намного меньше частоты волны, то этим затуханием можно пренебречь [7]. Вопрос о применимости бесстолкновительной модели плазмы и отсутствии затухания Ландау рассмотрен в 5.1.

На первый взгляд может показаться, что для учета рождения $e^- e^+$ пар достаточно в (8) концентрацию электронов n_e заменить на $n_e + n_{pos} = 2n_e$ как концентрации ультрарелятивистских Ферми газов с нулевыми химическими потенциалами [8]

$$2n_e = \frac{4}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{d^3 \vec{p}}{\exp(cp/k_B T) + 1} = \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \zeta(3) = \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{m_e c^2}\right)^3 \zeta(3) / \lambda^3, \quad (9)$$

где $\zeta(x)$ - функция Римана: $\zeta(3) = 1.202 \dots$, а $\lambda = \hbar/m_e c$ - комптоновская длина волны электрона. Выражение для поперечной диэлектрической проницаемости (8) получено для ультрарелятивистской плазмы с максвелловским распределением. Это распределение следует как из Ферми, так и из Бозе распределений при условии $e^{\mu/k_B T} \ll 1$. В нашем же случае $\mu_e = \mu_{pos} = 0$, поэтому вычисление интегралов в (4) следует проводить с функциями

$$f_{0e} = f_{0pos} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp(cp/k_B T) + 1}. \quad (10)$$

В результате для поперечной диэлектрической проницаемости разреженной и

горячей e^-e^+ ультрарелятивистской плазмы для частот $\omega > kc$ получим

$$\varepsilon_{Fi} = 1 + \frac{\pi}{3} \alpha \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^2 \frac{\omega}{kc} \Phi \left(\frac{\omega}{kc} \right), \quad (11)$$

где $\alpha = e^2/\hbar c$ постоянная тонкой структуры. В отличие от $\varepsilon_{Mi} - 1 \sim 1/T$, у ультрарелятивистской e^-e^+ плазмы $\varepsilon_{Fi} - 1 \sim T^2$.

Согласно (6) и (11), в ультрарелятивистской e^-e^+ плазме частота ω и волновое число k электромагнитной волны связаны соотношением

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\pi}{3} \alpha \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^2 \frac{\omega}{kc} \Phi \left(\frac{\omega}{kc} \right). \quad (12)$$

Для заданных значений температуры T и волнового числа k численным решением (12) можно найти значение частоты волны ω , а потом и численное значение диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{Fi}(\omega, k(\omega)) = k^2 c^2 / \omega^2. \quad (13)$$

Разумнее поступить наоборот. Для заданного значения температуры T и разных значений $0 < \varepsilon_{Fi} < 1$ из (11) найти $k_B T / \hbar \omega$, а потом ω и $k = \omega \sqrt{\varepsilon_{Fi}} / c$. Это удобно для построения различных графиков зависимостей характеристик плазмы от частоты. Однако иногда лучше иметь, пусть и приближенное, но аналитическое решение (12) для ε_{Fi} , чем "точные" численные таблицы.

Для волновых чисел $kc \ll \omega$

$$k^2 c^2 = \frac{5}{6} \omega^2 \left(1 - \left(\frac{\Omega_{Fpl}}{\omega} \right)^2 \right) \left(1 + \frac{3}{28} \left(\frac{\Omega_{Fpl}}{\omega} \right)^2 \right), \quad (14)$$

$$\Omega_{Fpl} = \frac{2}{3} \sqrt{\pi \alpha} \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right) \quad (15)$$

является приближенным решением (12), где Ω_{Fpl} - плазменная частота ультрарелятивистской горячей e^-e^+ плазмы. В отличие от [6,7] в (14) учтена следующая поправка по $(\Omega_{Fpl}/\omega)^2$. Для больших волновых чисел ($\Omega_{Fpl} \ll kc < \omega$) [6,7]

$$k^2 c^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\Omega_{Fpl}}{\omega} \right)^2 \right). \quad (16)$$

Плазменная частота ультрарелятивистской электронной плазмы с максвелловским распределением равна [6]

$$\Omega_{Mpl}^2 = 4\pi e^2 n_e c^2 / 3k_B T. \quad (17)$$

Если для вычисления поперечной диэлектрической проницаемости горячей ультрарелятивистской e^-e^+ плазмы ε_{Fi} в соответствующей формуле (8) для

максвелловского ультрарелятивистского электронного газа n_e просто заменить на $2n_e$, согласно (9), то получим

$$\frac{\varepsilon_{Ft} - 1}{\varepsilon_{Mt} - 1} = \frac{9}{\pi^2} \zeta(3) \approx 1.1,$$

т.е. ошиблись бы на 10%.

Комбинируя (14) и (16) для диэлектрической проницаемости ультрарелятивистской e^-e^+ плазмы, получим приближенное выражение

$$\varepsilon_{Ft}(\omega, k(\omega)) - 1 = \begin{cases} \frac{5}{6} \left(1 - \left(\frac{\Omega_{Fpl}}{\omega} \right)^2 \right) \left(1 - \frac{3}{28} \left(\frac{\Omega_{Fpl}}{\omega} \right)^2 \right), & \omega / \Omega_{Fpl} < 2.39, \\ \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\Omega_{Fpl}}{\omega} \right)^2 \right), & \omega / \Omega_{Fpl} > 2.39. \end{cases} \quad (18)$$

На рис.1 для значений температуры $k_B T / m_e c^2 = \{2; 5; 10; 25; 50; 100\}$ показаны зависимости поперечной диэлектрической проницаемости ультрарелятивистской e^-e^+ плазмы ε_{Ft} от частоты. Сплошные кривые соответствуют "точным" численным решениям уравнения (12), а пунктирные кривые

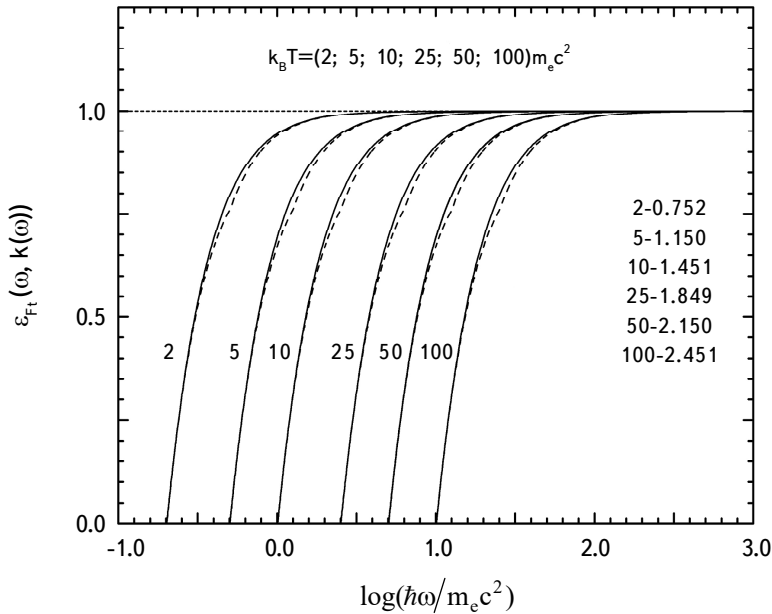


Рис.1. Зависимость поперечной диэлектрической проницаемости ультрарелятивистской e^-e^+ плазмы $\varepsilon_{Ft} = k^2 c^2 / \omega^2$ от частоты для значений температуры $k_B T / m_e c^2 = \{2; 5; 10; 25; 50; 100\}$. Сплошные кривые соответствуют численным решениям уравнения (12), а пунктирные кривые построены по (18). На этом же рисунке справа приведены логарифмы значения частоты $\omega_{max} = 28\Omega_{Fpl}$, на которых тепловое равновесное электромагнитное излучение при указанных температурах имеет максимальную спектральную плотность.

построены по (18). Близость этих кривых показывает, что аппроксимация ε_{Fi} по (18) хорошая. Нетрудно показать, что из-за линейной зависимости плазменной частоты Ω_{Fpl} от температуры частота ω_{max} , на которой плотность энергии излучения максимальна, равна $28\Omega_{Fpl}$.

На рис.1 приведены также значения логарифма этой частоты для указанных значений температуры. Из рис.1 следует, что эти частоты находятся далеко от области, где ε_{Fi} заметно отличается от единицы. В области частот близких к ω_{max} $\varepsilon_{Fi} \approx 0.999$. Поэтому термодинамические характеристики излучения (плотность энергии, давления, энтропия) в ультрарелятивистской e^-e^+ плазме ($k_B T \gg m_e c^2$), где количество e^-e^+ пар гораздо больше атомных ядер, будут отличаться от планковских значений незначительно. Различие от планковского распределения будет только в далекой от ω_{max} "длинноволновой" области частот, где сосредоточена малая часть энергии поля излучения. Следовательно, несмотря на отсутствие волн с частотами $\omega \leq \Omega_{Fpl}$, спектр излучения в такой равновесной плазме можно считать достаточно близким к планковскому.

В плазме или в плазмоподобных средах частотный спектр излучения на плазменной частоте Ω_{pl} обрывается. Электромагнитные волны с частотой меньше этой частоты в плазме не могут распространяться. Чем ближе значение $\hbar\Omega_{pl}$ к $k_B T$, тем сильнее спектр этого излучения отличается от планковского. В работе [3] значение отношения $\hbar\Omega_{pl}/k_B T$ принято количественной мерой отличия равновесного спектра излучения от планковского. Дополнительной количественной мерой отклонения спектра равновесного излучения в какой-либо среде от теплового спектра излучения в вакууме может служить численное значение параметра $\beta = 1 - W_{pl}/W_0$, где W_{pl} и W_0 плотности энергии излучения в плазме и в вакууме, соответственно. На основе выражений (7, 15, 18) можно показать, что в ультрарелятивистской горячей e^-e^+ плазме температурная зависимость плотности энергии излучения W_{pl} такая же, как и у чернотельного излучения. Поэтому параметр β не зависит от температуры и равен $3.6 \cdot 10^{-4}$. Малость этого параметра подтверждает вышесказанное.

3.2. Продольные волны. Продольная диэлектрическая проницаемость ε_l ультрарелятивистской плазмы с максвелловским распределением электронов определена в [10]:

$$\varepsilon_{MI} = 1 + \frac{4\pi n_e^2}{k^2 k_B T} \left[1 + \frac{\omega}{2kc} \ln \frac{\omega - kc}{\omega + kc} \right], \quad \omega > kc. \quad (19)$$

Для вычисления продольной диэлектрической проницаемости ультрарелятивистской разреженной электрон-позитронной плазмы в (5) вместо максвелловской функции распределения нами использовано распределение Ферми (10). После вычисления интеграла в (5) получаем

$$\varepsilon_{Fl} = 1 + \frac{4}{3} \pi \alpha \left(\frac{k_B T}{\hbar k c} \right)^2 \left[1 + \frac{\omega}{2 k c} \ln \frac{\omega - k c}{\omega + k c} \right], \quad \omega > k c. \quad (20)$$

Связь волнового числа k и частоты ω определяется вторым уравнением (6). Приближенные решения этого уравнения в области $k c \ll \omega$ как для ε_{Fl} , так и для ε_{Ml} имеют одинаковый вид $\omega^2 = \Omega_{pl}^2 + 3 k^2 c^2 / 5$. Отличаются лишь плазменные частоты: $\Omega_{pl} = \Omega_{Fpl}$ и $\Omega_{pl} = \Omega_{Mpl}$, соответственно. Они совпадают с соответствующими плазменными частотами поперечных волн.

4. *Спектр излучения в ранней Вселенной в период от ультрарелятивистской e^-e^+ эпохи до эпохи рекомбинации.* В [3], двигаясь в обратном направлении во времени из состояния вещества в ранней Вселенной в эпоху рекомбинации, показано, что при адиабатическом "сжатии" (слово сжатие берется в кавычки, указывая на обратный ход событий в действительности. Ниже кавычки использованы именно в этом смысле) параметр $a = \hbar \Omega_{Mpl} / k_B T$ (мера отклонения спектрального распределения излучения от планковского) только растет. Согласно [3], когда вещество с излучением в ранней Вселенной адиабатически "сжималось" от состояния $T = 3000^\circ \text{K}$ и $n_e = 300 \text{ см}^{-3}$ до состояния "начала" (вернее конца) релятивистской эпохи ($k_B T \approx m_e c^2$), концентрация электронов стала $n_e = 2.3 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$. Для такой концентрации электронов $a = \hbar \Omega_{pl} / k_B T \approx \hbar \Omega_{pl} / m_e c^2 \approx 10^{-6}$ [3]. В дальнейшем, точнее до того, когда электроны были ультрарелятивистскими, в [3] выражение для плазменной частоты нерелятивистской горячей электронной плазмы заменяется на соответствующее выражение ультрарелятивистской максвелловской электронной плазмы (17). Несмотря на то, что плазменная частота такой плазмы с "повышением" температуры уменьшается ($\Omega_{Mpl} \sim 1/T$), однако за счет "увеличения" концентрации электронов при "сжатии" параметр a остается постоянным. А так как "стартовое" значение параметра a этого состояния было близко к 10^{-6} , то авторы [3] заключают, что начиная от ультрарелятивистского состояния электронов до эпохи рекомбинации в ранней Вселенной излучение с большой точностью было планковским.

Как отмечено выше, если в области температур $k_B T \leq m_e c^2$ концентрация протонов n_p достаточно мала, то вещество обильно обогащено e^-e^+ парами и $n_e \gg n_p$. Причем не важно, каким путем вещество пришло в такое состояние. Все термодинамические характеристики вещества [9], в том числе и ее плазменная частота Ω_{Fpl} (15), в таком состоянии зависят только от температуры. Согласно (15), в ультрарелятивистской области $a = 2\sqrt{\alpha\pi}/3 \approx 0.1$. Таким образом, хотя в ранней Вселенной при "переходе" плазмы в ультрарелятивистское e^-e^+ состояние параметр a быстро растет, однако, достигая значения $a \approx 0.1 \ll 1$, он в дальнейшем остается неизменным. Конечно, это значение параметра a в веществе ранней Вселенной в эпоху ультрарелятивистской e^-e^+ плазмы

указывает на более сильное искажение теплового спектра излучения, чем при $k_B T < m_e c^2$. Однако, учитывая еще и малость значения параметра $\beta = 3.6 \cdot 10^{-4}$, его можно считать планковским. Следовательно, вывод в [3], полученный без учета рождения $e^- e^+$ пар о том, что тепловое излучение в ранней Вселенной от эпохи, когда в веществе доминировала $e^- e^+$ плазма, до эпохи рекомбинации, является планковским, остается в силе.

5. Границы справедливости полученных результатов.

5.1. *Условие доминирования количества $e^- e^+$ пар.* Как было сказано выше, в достаточно разреженной и горячей плазме количество $e^+ e^-$ пар намного больше тех электронов, которые нейтрализуют электрический заряд атомных ядер вещества. В такой водородной плазме, согласно вышесказанному, концентрация протонов $n_p \ll n_e$. Согласно требованию локальной нейтральности $n_p - n_e + n_{pos} = 0$, поэтому $n_e \approx n_{pos}$. Такое состояние может реализоваться даже при $k_B T < m_e c^2$, если концентрация протонов достаточно мала [9]. Согласно (9) и требованию $n_p \ll n_e$, при $k_B T \gg m_e c^2$ получим ограничения на концентрацию протонов n_p и на плотность ρ_b

$$n_p \ll \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \zeta(3) \approx 3.2 \cdot 10^{30} \left(\frac{k_B T}{m_e c^2} \right)^3 \text{ см}^{-3},$$

$$\rho_b = m_p n_p \ll \rho_0 = 5.3 \cdot 10^6 \left(\frac{k_B T}{m_e c^2} \right)^3 \text{ г/см}^3.$$

По результатам [3] в ранней Вселенной при $k_B T \approx m_e c^2$ для плотности ρ_b получается значение 0.38 г/см^3 . Когда температура в ранней Вселенной была $k_B T \approx 200 m_e c^2$ ($\approx 100 \text{ МэВ}$), то плотность барионов $\rho_b \approx 10^4 \text{ г/см}^3$ [11]. Так что условие $n_p \ll n_e$ выполняется и учет рождения $e^- e^+$ пар при вычислении диэлектрической проницаемости необходим.

5.2. *Условие идеальности.* В представленной работе все результаты получены с помощью кинетических уравнений Больцмана, которые справедливы, если нарушения идеальности плазмы невелики. В рассмотренном случае это нарушение обусловлено взаимодействием между заряженными частицами [6,7]. Так как $n_p \ll n_e$, то основной вклад в энергию взаимодействия между частицами обусловлен в основном заряженными лептонами: электронами и позитронами. Чем меньше средняя энергия взаимодействия $e^2 n^{1/3}$ между двумя заряженными лептонами от их средней тепловой энергии $k_B T$, тем более оправдано описание $e^- e^+$ плазмы кинетическими уравнениями Больцмана. С учетом (9), для плазмы с обильным рождением $e^- e^+$ пар при $k_B T \gg m_e c^2$ для отношения этих энергий, которое называется газовым параметром, получим

$$\frac{e^2 n^{1/3}}{k_B T} = \sqrt[3]{3\zeta(3)/\pi^2} \alpha \approx 5 \cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, эту плазму можно считать идеальной.

5.3. Отсутствие затухания Ландау. Электроны плазмы, скорость которых близка, но чуть меньше фазовой скорости электромагнитной волны, отбирают от волны энергию. А те электроны, скорость которых чуть больше фазовой скорости электромагнитной волны, отдают свою энергию волне. Если волна отдает электронам больше энергии, чем получает от них, то она затухает [7]. Это поглощение не связано со столкновениями частиц в плазме и называется затуханием Ландау. В e^+e^- плазме при $k_B T \gg m_e c^2$ скорость лептонов близка к скорости света в вакууме, а фазовая скорость поперечной электромагнитной волны, согласно рис.1, $v_f = c/\sqrt{\varepsilon_{Fl}} > 1$. Поэтому затухание Ландау в такой плазме отсутствует.

5.4. Приближение бесстолкновительной плазмы. Выражения для диэлектрических проницаемостей ε_{Fl} и $\varepsilon_{F\bar{l}}$ (8,11,19) получены согласно уравнениям Власова [5]. Приближение бесстолкновительной плазмы оправдано, если частота электромагнитной волны ω намного больше частоты столкновений ν между частицами плазмы. В ультрарелятивистской e^-e^+ плазме из-за малости концентрации атомных ядер по сравнению с концентрацией e^-e^+ пар, столкновения между заряженными лептонами происходят гораздо чаще, чем между ядрами и лептонами. В ультрарелятивистской e^-e^+ плазме частота столкновений между лептонами определяется сечениями электрон-электрон (e^-e^-), позитрон-позитрон (e^+e^+), и электрон-позитрон (e^-e^+) упругих рассеиваний, а также сечениями тормозного излучения при этих рассеиваниях. Дифференциальные сечения упругих (e^-e^-) и (e^+e^+) процессов равны, а сечение процесса (e^-e^+) отличается от первых множителем меньше единицы [12]. Сечения же тормозного излучения ($e^-e^- \gamma$) и ($e^+e^+ \gamma$) одинаковы, а сечение процесса ($e^-e^+ \gamma$) больше этих сечений на логарифмический множитель [12].

Для оценки частоты столкновений между лептонами $\nu_{ll} = n_e \sigma c$ принято, что соответствующие сечения σ этих процессов между заряженными лептонами приблизительно равны, и использованы транспортные сечения для ультрарелятивистских лептонов σ_{ll} из [7]. До значения температуры $T_0 \approx 8 m_e c^2 / k_B$ частота столкновений между лептонами ν_{ll} определяется упругими процессами, а выше этой температуры, тормозным излучением при столкновении лептонов [7]. Опуская расчеты, приведем конечный результат для отношения плазменной частоты к частоте столкновений между лептонами ν_{ll} ультрарелятивистской e^-e^+ плазмы:

$$\frac{\Omega_{Fpl}}{\nu_{ll}} = \begin{cases} 3 \cdot 10^3, & T < T_0 \\ 4 \cdot 10^5 / (k_B T / m_e c^2)^2 \ln(k_B T / m_e c^2), & T \geq T_0. \end{cases}$$

Для значений температуры $k_B T / m_e c^2 = \{2; 5; 10; 25; 50; 100\}$ получим $\Omega_{Fpl} / \nu_{ll} \approx \{3 \cdot 10^3; 3 \cdot 10^3; 1700; 200; 40; 10\}$. Если же учесть, что в ультрарелятивистской горячей $e^- e^+$ плазме Ω_{Fpl} является нижней границей возможных значений частот электромагнитной волны, а основная часть энергии излучения сосредоточена в области вокруг частоты $\omega_{max} \approx 28 \Omega_{Fpl}$, то эти числа следует увеличить на порядок.

Частоту столкновений электронов с фотонами $\nu_{e\gamma}$ в ультрарелятивистской $e^- e^+$ плазме ($k_B T \gg m_e c^2$) можно оценить по сечению эффекта Комптона [12] и по концентрации фотонов как концентрация Бозе газа [8]. Простые вычисления показывают, что $\omega_{max} / \nu_{e\gamma} = 10^5 m_e c^2 / k_B T$. Для рассмотренных здесь значений температуры этот процесс по сравнению с вышеупомянутыми процессами несущественен.

Таким образом, использованное нами приближение бесстолкновительной плазмы для определения диэлектрической проницаемости ультрарелятивистской $e^- e^+$ плазмы оправдано.

6. Заключение. Если температура водородной плазмы достаточно высока ($k_B T \gg m_e c^2$) и концентрация протонов намного меньше, чем $3 \cdot 10^{30} (k_B T / m_e c^2)^3 \text{ см}^{-3}$, то в термодинамически равновесном состоянии в такой плазме количество $e^- e^+$ пар намного больше количества протонов. В частности, в таком состоянии находилось вещество в ранней Вселенной чуть раньше стадии рекомбинации. Правда, в нем присутствовали всевозможные лептоны и ядра легких элементов [11].

В представленной работе с помощью уравнений Власова, при отсутствии внешнего магнитного поля, получены выражения для поперечной и продольной диэлектрических проницаемостей разреженной, ультрарелятивистской, электрон-позитронной горячей плазмы. Показано, что модель бесстолкновительной идеальной плазмы для определения этих характеристик является хорошим приближением. Ранее эти характеристики горячей плазмы без учета рождения $e^- e^+$ пар с максвелловским распределением ультрарелятивистских электронов получены в [8] и показано, что плазменная частота такой плазмы обратно пропорциональна температуре. В отличие от этого, из-за обильного рождения электронов и позитронов их распределение становится фермиевским, а плазменная частота Ω_{Fpl} - прямо пропорциональной температуре. Показано, что отношение частоты ω_{max} (на которой спектральная плотность теплового излучения максимальна) к плазменной частоте постоянно и равно 28. При наличии в плазме $e^- e^+$ пар спектр теплового излучения искажен сильнее, чем при их отсутствии,

однако, большое значение этого отношения и маленькие значения параметров $a = \hbar\Omega_{Fpl}/k_B T \approx 0.1$ и $\beta = 1 - W_{pl}/W_0 \approx 4 \cdot 10^{-4}$, где W_{pl} и W_0 плотности энергии излучения в плазме и в вакууме, соответственно, указывают на большую близость теплового излучения в ультрарелятивистской электрон-позитронной горячей разреженной плазме к чернотельному. Поэтому, даже с учетом наличия ультрарелятивистских электрон-позитронных пар, в ранней Вселенной в эпоху, предшествовавшую эпохе рекомбинации, спектр теплового излучения можно считать планковским. Следовательно, вывод в [3] (полученный без учета рождения e^-e^+ пар) о том, что тепловое излучение в ранней Вселенной является планковским, остается в силе.

Работа выполнена в научно-исследовательской лаборатории физики сверхплотных звезд института физики ЕГУ, финансируемой комитетом по науке Министерства образования, науки, культуры и спорта Республики Армения.

Ереванский государственный университет, Армения
e-mail: ghajyan@ysu.am hararthur@ysu.am

ELECTROMAGNETIC PROPERTIES OF STELLAR MATTER. I. DIELECTRIC PERMEABILITY OF THE HOT RAREFIED PLASMA WITH ABUNDANT PRODUCTION OF ELECTRON-POSITRON PAIRS

G.S.HAJYAN, A.S.HARUTYUNYAN

Using the Vlasov equations, the transverse and longitudinal dielectric permeabilities of the hot rarefied ultrarelativistic electron-positron plasma are determined. The Fermi distribution was used as the unperturbed distribution function of electrons and positrons. It is shown that due to the abundant production of electron-positron pairs, the plasma frequency of ultrarelativistic plasma increases linearly with increasing temperature. In this case, the ratio of the frequency at which the spectral density of equilibrium radiation is maximum to the plasma frequency remains unchanged and is equal to 28. It is shown that in such plasma, in particular in the matter of the early Universe in the ultrarelativistic electron-positron epoch, the radiation spectrum differs very slightly from the black-body radiation.

Keywords: *ultrarelativistic electron-positron plasma: dielectric permeability*

ЛИТЕРАТУРА

1. *М.Шварцшильд*, Строение и эволюция звезд, М., ИЛ, 1961.
2. *C.Alcock, E.Farhi, A.Olinto*, *Astrophys. J.*, **310**, 261, 1986.
3. *С.А.Тригер, А.Л.Хомкин*, Прикладная физика, No.3, 2009.
4. *Г.П.Алоджани, А.А.Саарян*, *Астрофизика*, **20**, 571, 1984, (*Astrophysics*, **20**, 317, 1984). <https://doi.org/10.1007/BF01005422>.
5. *А.А.Власов*, *ЖЭТФ*, **8**, 291, 1938.
6. *В.П.Силин, А.А.Рухадзе*, Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред, Атомиздат, 1961.
7. *Е.М.Лифшиц, А.П.Питаевский*, Физическая кинетика, М., Наука, 1979.
8. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц*, Статистическая физика, М., Наука, 1964.
9. *Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков*, Релятивистская астрофизика, М., Наука, 1967.
10. *В.П.Силин*, *ЖЭТФ*, **38**, 1577, 1960.
11. *Г.С.Бисноватый-Коган*, Релятивистская астрофизика и физическая космология, Москва, изд. КРАСАНД, 2010.
12. *В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, А.П.Питаевский*, Релятивистская квантовая физика, ч.1., М., Наука, 1968.

DOI: 10.54503/0571-7132-2024.67.2-205

RECONSTRUCTION OF THE QUINTESSENCE DARK ENERGY POTENTIAL FROM A GAUSSIAN PROCESS

E.ELIZALDE¹, M.KHURSHUDYAN¹, K.MYRZAKULOV^{2,3}, S.BEKOV^{2,3}

Received 8 February 2024

Accepted 10 June 2024

This paper presents the reconstruction of the quintessence dark energy potential in a model-independent way. Reconstruction relies on a Gaussian process and on available expansion rate data. Specifically, 40-point values of $H(z)$ are used, consisting of a 30-point sample deduced from a differential age method and an additional 10-point sample obtained from the radial BAO method. Results are obtained for two kernel functions and for three different values of H_0 . This sheds light on the H_0 tension problem indicating that it is not just a numerical problem. The model-independent reconstruction of the potential can serve as a reference to constraint available models and construct new ones. Various possibilities, including $V(\phi) \sim e^{-\lambda\phi}$, are compared with the reconstructions here obtained, which is notably the first truly model-independent reconstruction of the quintessence dark energy potential. This allows the selection of new models that can be interesting for cosmology. The method can be extended to reconstruct the potential of related dark energy models, to be considered in future work.

Keywords: *quintessence dark energy: potential: Gaussian process*

1. *Introduction.* Modern cosmology often clearly reflects how our previous knowledge of the Universe needs to be modified to accommodate new observations. The H_0 tension problem is one of those pointing out a huge difference between the early time and late time measurements of the Hubble constant H_0 [1,2]. Various interesting proposals on how the problem could be solved have appeared in the literature, such as [3-16] (and references therein). In the last several years, we have witnessed significant technological developments helping us to improve the data collection and analysis process by orders of magnitude. But without the possibility of doing direct experiments with the Universe, it is still difficult to deal with some problems. Why could we not make significant progress in solving some long-standing problems? Is it because of an issue with our understanding of what data mean? Eventually, is there a problem with the model-construction strategies to reflect our understanding of what the observational data say? Could this reflect that we cannot avoid a bias when we link a model with the data? There is a solid belief, that Machine Learning (ML) eventually will answer a huge part of the above-mentioned questions. But, what exactly it does and why is it nowadays one of the top research fields? ML tries to do the following: it does not start

from questions but, on the contrary, having the answers finds the questions (the models) explaining what we have in terms of experimental data. It sounds unusual and requires significant effort to understand how and why it works. Recent attempts to use such tools in physics (and not only in physics) have proven to be very promising.

Our paper is aimed to study a specific dark energy model in a model-independent way by using the advantages of a specific ML approach [17-39] (see references therein for additional discussion on different developments concerning dark energy models and related problems). In particular, we will study a quintessence dark energy when a Gaussian Process (GP) is involved (see for instance [40,41] covering some discussion about quintessence dark energy models). GPs provide interesting departures from standard reasoning in various fields. Their recent applications to cosmology showed very interesting departures not reported previously (see [42-52] and references therein). The reconstruction of $f(T)$ gravity from the expansion rate data, allowing us to obtain very tight constraints on the model parameters of some popular $f(T)$ models is among them [42]. Moreover, a recent paper by two of the authors has shown how GPs can be used to tackle the Swampland criteria for dark energy dominated Universe in a model-independent way [43]. In particular, it has been demonstrated there that the expansion rate data can be used, instead of assuming a specific form for the potential describing the quintessence dark energy, to tackle the Swampland criteria. In other words, the whole analysis is based on the expansion rate data allowing the exploration of the features, which in some sense could be biased due to the use of a specific dark energy model. In this way, a hint indicating that the Swampland criteria in its recent form is not suitable for a dark energy-dominated Universe has been found. Among other interesting results, it was found that an effective theory being in the Swampland could (or not) end up there. Moreover, starting out of the Swampland it is possible to end up either inside or outside of it. Having such interesting results in our hands, probably it would be possible in the near future to have unsuspected departures from the standard reasoning about effective field theories (EFT) which is a promising task to be tackled yet. The fact that ML is designed to find the questions from the answers gives hope that, in the near future, some interesting developments in this direction may arise. We would like to mention that there is another interesting approach, known as Bayesian Machine Learning, which we hope can eventually be very efficient in overcoming such limitations too [4,10,11] (see there how it can be used to tackle the H_0 tension problem).

Now, let us come back to [43] where no specific form for the potential has been used. However, it is easy to see that the reconstruction of the quintessence dark energy potential itself is possible too, allowing also to obtain the constraints

on the existing models. Moreover, it can be used to craft new models and gain some hints about how, for instance, the H_0 tension problem can be solved in a quintessence dark-energy dominated Universe. In this way, we can indicate that the results of that paper provide a unique possibility to treat quintessence dark energy models, too, since the most model-independent reconstruction of the general picture has been obtained. Motivated by this possibility, given by the use of GPs, the potential was reconstructed, in a model-independent way from available expansion rate data, and, in addition, a new viable quintessence dark energy model was obtained. In particular, based on the mean of the obtained reconstructions, the potential $V(\phi) \sim \phi^\lambda [1 - \sin^n(\beta\phi)]$ has been proposed as a new form of quintessence dark energy—up to our best knowledge this potential has not been discussed anywhere previously. Other models were also considered, as $V(\phi) \sim \phi^\lambda$, $V(\phi) \sim \phi^\lambda [1 - \cos(\beta\phi^n)]$ and $V(\phi) \sim e^{-\lambda\phi}$ (see for instance [53] and references therein) and values of the model's parameters were estimated, indicating when they could be 1) viable and interesting for cosmology, and 2) used to solve the H_0 tension problem.

To end this section, we would like to mention also that, in our analysis here, we will use two kernels and consider three different cases for the value of the parameter H_0 . In this way, hints are given about the forms and constraints on the quintessence dark energy models that could be very useful in understanding how the H_0 tension problem could be alleviated. We do hope that these new results combined with the results discussed in [43] will lead to new developments in future studies of quintessence dark energy models. It should be mentioned that [43] already contains a discussion about different aspects of the quintessence Universe, therefore, here we will not reproduce them again.

This paper is organized as follows. The description of the GP is discussed in Sect. 2. In the same section, we present the details of the potential reconstruction process. The main results are discussed in Sect. 3, which is followed by an analysis of their implications. The final conclusions of the analysis are given in Sect. 4.

2. The method and the model. The goal of this work is to provide a model-independent reconstruction of the quintessence dark energy potential by using a GP. We will present some details of how this can be achieved. We shall start from the background dynamics demonstrating what are the steps to follow to make the GP work, while some discussion on the GP itself will be presented at the end of this section.

We consider General Relativity (GR) with the standard matter field in the presence of a quintessence field ϕ , given by the following action ($8\pi G = c = 1$)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) + S_m, \quad (1)$$

where ϕ is the field, $V(\phi)$ is the field's potential, S_m corresponds to standard matter, while R is the Ricci scalar. Moreover, it is well known that when we consider an FRWL Universe with

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2, \quad (2)$$

the dynamics of the scalar field's dark energy and dark matter are described by the equations

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + P_\phi) = 0, \quad (3)$$

$$\dot{\rho}_{dm} + 3H\rho_{dm} = 0, \quad (4)$$

with

$$H^2 = \frac{1}{3}(\rho_\phi + \rho_{dm}). \quad (5)$$

In other words, Eqs. (3)-(5) describe the background dynamics. Furthermore, it is well known that ρ_ϕ , ρ_{dm} and $P = P_\phi$ are related to each other through the equation

$$\dot{H} + H = -\frac{1}{6}(\rho_\phi + \rho_{dm} + 3P_\phi). \quad (6)$$

On the other hand, assuming that the scalar field is spatially homogeneous, for the energy density and pressure we will have

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (7)$$

and

$$P_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (8)$$

where the dot means derivative w.r.t. the cosmic time, while $V(\phi)$ is the potential of the scalar field (see for instance [43] and references therein for more discussion). In all equations above $H = \dot{a}/a$ is the Hubble parameter. This is well known, and also the important fact that the analysis of the background dynamics requires assuming the form of the potential $V(\phi)$; various forms for it have been considered in the literature.

Anyway, after some simple algebra, one can see that, starting from Eqs. (7) and (8), it turns out that

$$\dot{\phi}^2 = \rho_\phi + P_\phi, \quad (9)$$

while

$$V(\phi) = \frac{\rho_\phi - P_\phi}{2}. \quad (10)$$

On the other hand, it is easy to see that from Eq. (4) we have $\rho_{dm} = 3H_0^2 \Omega_0 (1+z)^3$, while from Eq. (5) we can determine the energy density of the scalar field

$$\rho_\phi = 3H^2 - 3H_0^2 \Omega_0 (1+z)^3, \quad (11)$$

where H_0 is the value of the Hubble parameter at $z=0$ (e.g., at present; z is the redshift). On the other hand, Ω_0 is the cold dark matter density fraction at $z=0$. Now, we can use Eq. (6) and, after some algebra,

$$P_\phi = 2(1+z)HH' - 3H^2, \quad (12)$$

where the prime denotes derivative w.r.t. the redshift. Coming back to Eqs. (9) and (10), we see that Eqs. (11) and (12) allow us to write down the form of the scalar field potential in terms of H and H' , as follows

$$V(z) = 3H^2 - H'H(z+1) - \frac{3}{2}H_0^2 \Omega_0 (z+1)^3. \quad (13)$$

Moreover, it is possible to see that, for the field itself, we have

$$(\phi(z)')^2 = \frac{2HH' - 3H_0^2 \Omega_0 (z+1)^2}{(1+z)H^2}, \quad (14)$$

what allows to perform an end-to-end reconstruction of $V(\phi)$, provided $H(z)$ and $H'(z)$ are known. It should be noted that in [43] several other further steps have been taken too, in order to study the Swampland criteria; however, the discussion carried out here and the ensuing results, had never been discussed before.

Now, it is time to make more transparent to the reader how can one obtain a model-independent reconstruction of $V(\phi)$, from Eqs. (13) and (14). It is easy to see, to start, that Eqs. (13) and (14) allow doing this, if model-independent reconstructions of $H(z)$ and $H'(z)$ are provided. Namely, following [43], we choose the GP to reconstruct $H(z)$ and $H'(z)$ from available expansion rate data (see Table 1). Therefore the rest of this section is devoted to the presentation of some crucial aspects of GPs. To start, we recall that GPs are Bayesian state-of-the-art tools and that the key ingredient is the covariance function. In a nutshell, it is assumed that a GP prior governs the set of possible latent functions, and the likelihood of the latent function and observations shape this prior and produce posterior probabilistic estimates. The advantage of a GP is providing a full conditional statistical description of the predictions used to establish confidence intervals and to set hyper-parameters. Moreover, GPs should be understood as distributions over functions, characterized by a mean function and a covariance matrix. Unfortunately, one disadvantage of the method is that the choice of the

kernel is not a fixed process. Only well-designed data and the type of task to be tackled can indicate which kernel works better. A number of possible choices for the covariance function exist - as squared exponential, polynomial, spline, etc., to mention a few. In other words, it is always highly recommended to consider several kernels and compare the results obtained, in order to be sure that the reconstruction has not been got by chance. This is very important and not treating this aspect very seriously can lead to misleading results, with bad consequences. In cosmology we deal with relatively small datasets, therefore it is always possible to follow the reconstruction process which significantly reduces the kernel numbers to be considered. This is one of the reasons that in cosmology we usually meet studies involving only two or three kernels. In particular, in cosmology one of the most actively used kernels is the squared exponential function

$$k(x, x') = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{2l^2}\right), \quad (15)$$

where σ_f and l are known as hyperparameters. The l parameter represents the correlation length along which the successive $f(x)$ values are correlated, while to control the variation in $f(x)$ relative to the mean of the process we need the σ_f parameter. Recently, other kernels including the so-called Matern ($\nu = 9/2$) covariance function

$$k_M(x, x') = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{3|x-x'|}{l}\right) \times \left[1 + \frac{3|x-x'|}{l} + \frac{27(x-x')^2}{7l^2} + \frac{18|x-x'|^3}{7l^3} + \frac{27(x-x')^4}{35l^4}\right], \quad (16)$$

have been used for different purposes, too. Following this benchmark, we have also considered the squared exponential, Eq. (15), and the Matern ($\nu = 9/2$), Eq. (16), which allow eventually to understand 1) how they can affect the reconstruction of $V(\phi)$, and 2) how it can affect the constraints on $V(\phi)$ potentials existing in the literature. It should be mentioned that we have considered a number of particular cases, but the reconstructions here presented are well enough to revisit all existing models. We will come back to this in the next section when we discuss the results obtained.

Now, having closed the question of the kernel functions, let us discuss 1) the data and 2) the tools we use. In particular, the data used is the expansion rate values presented in Table 1, consisting of 30-point samples of $H(z)$ deduced from the differential age method in addition to 10-point samples obtained from the radial BAO method. In total, we use 40 data points covering the $z \in [0, 2.4]$ redshift range. One interesting aspect of our analysis concerning the value of H_0

at $z=0$ to be mentioned here is the adopted strategy. To wit, during the reconstruction, we consider three different cases: 1) H_0 is estimated from the expansion rate data during the reconstruction of $H(z)$ and $H'(z)$, 2) H_0 is taken from the Planck mission and the forms of $H(z)$ and $H'(z)$ are reconstructed, and finally, 3) H_0 is the one from the Hubble mission and then the forms of $H(z)$ and $H'(z)$ are reconstructed. The reason for this, as it can be realized, is to see whether or not it is possible to find ways to solve or at least alleviate the H_0 tension problem.

To end this section we need to mention that we use the publicly available package GaPP (Gaussian Processes in Python) developed by Seikel et al. [54]. It is a very easy one to use and a very friendly package allowing to choose different covariance functions (new ones can be added easily, too). Moreover, the squared exponential function, Eq. (15), is used in the code as a default option, while the Matern covariance function given by Eq. (16), is already implemented. On the other hand, the code is very useful to combine different observational datasets,

Table 1

$H(z)$ AND ITS UNCERTAINTY σ_H IN UNITS OF $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$

z	$H(z)$	σ_H	z	$H(z)$	σ_H
0.070	69	19.6	0.4783	80.9	9
0.090	69	12	0.480	97	62
0.120	68.6	26.2	0.593	104	13
0.170	83	8	0.680	92	8
0.179	75	4	0.781	105	12
0.199	75	5	0.875	125	17
0.200	72.9	29.6	0.880	90	40
0.270	77	14	0.900	117	23
0.280	88.8	36.6	1.037	154	20
0.352	83	14	1.300	168	17
0.3802	83	13.5	1.363	160	33.6
0.400	95	17	1.4307	177	18
0.4004	77	10.2	1.530	140	14
0.4247	87.1	11.1	1.750	202	40
0.44497	92.8	12.9	1.965	186.5	50.4
0.24	79.69	2.65	0.60	87.9	6.1
0.35	84.4	7	0.73	97.3	7.0
0.43	86.45	3.68	2.30	224	8
0.44	82.6	7.8	2.34	222	7
0.57	92.4	4.5	2.36	226	8

The upper panel of the Table 1 consists of thirty samples deduced from the differential age method. The lower panel corresponds to ten samples obtained from the radial BAO method. The table is according to [42] (see the references therein to find out how each of the data points has been obtained).

provided the proper relation between them is known. The package has been often used, and more details about it, including a detailed description of the GP, can be found in the references of our paper. In the next section, we will describe our results thoroughly, which together with the discussion in the above section, will surely allow the readers to understand how the scheme of the reconstruction of the potential of the quintessence dark energy can be extended and applied to the other dark energy models, as phantom or tachyonic models.

3. Results and discussion. In this section, we present and discuss our results. They can be split into three different cases, corresponding to the reconstruction when: 1) H_0 is estimated from a GP, 2) H_0 is fixed to the value estimated from the Planck mission results and the reconstruction of $H(z)$ and $H'(z)$ is performed, and 3) H_0 is fixed to the value estimated from the Hubble mission and then the reconstruction of $H(z)$ and $H'(z)$ is performed. In this way, we can get a hint on when the H_0 tension problem could be solved and what are the constraints on some explicitly given model parameters in that case. We are interested in a model-independent reconstruction of the quintessence dark energy potential and we use the expansion rate data and the GP to reconstruct $H(z)$ and $H'(z)$ in Eqs. (13) and (14). The reconstruction of the functions $H(z)$ and $H'(z)$ for the squared exponential function, Eq. (15), assuming that $H_0 = 73.52 \pm 1.62 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ can be found in Fig.1. The functions $H(z)$ and $H'(z)$ corresponding to other cases can be reconstructed similarly. A crucial point, not discussed in the previous section, is how to deal with Eq. (14) since eventually, we will reconstruct $V(\phi)$. This problem is the simplest one since

$$\phi(z_i)' \approx \frac{\phi(z_i + \Delta z) - \phi(z_i)}{\Delta z}, \quad (17)$$

where $\Delta z = z_{i+1} - z_i$ with z_i correspond to the redshifts where $H(z)$ and $H'(z)$ have been reconstructed. It is clear, that Eqs. (13), (14) and (17) allow to perform the model-independent reconstruction of the potential $V(\phi)$ describing quintessence dark energy in our Universe.

3.1. $V(\phi)$ reconstruction when H_0 is not fixed. The first case corresponds to the reconstruction when H_0 is not fixed. In this case, using GP and given data, Table 1, we first estimate H_0 during the reconstruction process. It is $H_0 = 71.286 \pm 3.743 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ when the kernel is given by Eq. (15), while when the kernel is given by Eq. (16), we found that $H_0 = 71.196 \pm 3.867 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Then using the reconstructed $H(z)$ and $H'(z)$ in Eqs. (13) and (14) (combined with Eq. (17)) we can finish the model-independent reconstruction of $V(\phi)$. Omitting other non-relevant technical details, we refer the reader to Fig.5, which depicts the model-independent reconstructed forms of the potential $V(z)$ and field $\phi(z)$. The reader may have already noted that the estimated errors for H_0 are

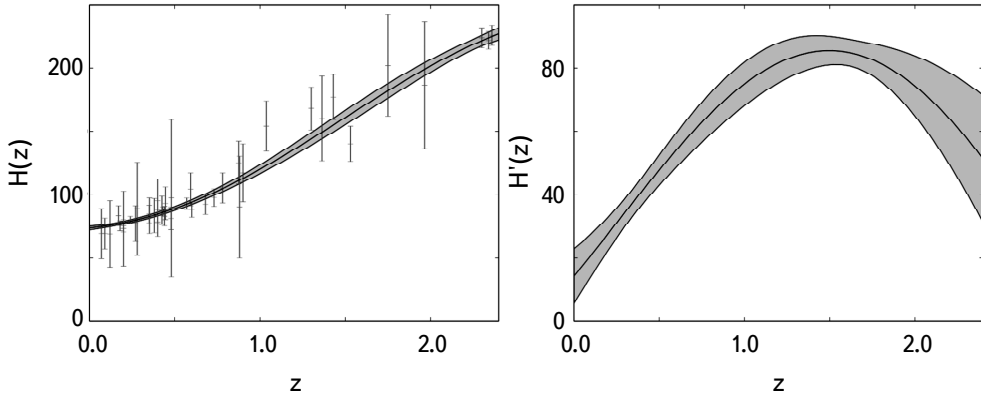


Fig.1. GP reconstruction of $H(z)$ and $H'(z)$ for the 40-point sample deduced from the differential age method, with the additional 10-point sample obtained from the radial BAO method, when $H_0 = 73.52 \pm 1.62 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ reported by the Hubble mission. The ' means derivative with respect to the redshift z .

significantly larger than those from the Planck data and those from the Hubble mission. It should be mentioned that, as a consequence of these upper and lower bounds on $V(\phi)$, this case will significantly differ from the other two cases. In general, this can have a strong impact on the model parameter constraints and affect the viable model selection. Obviously, in general, this can affect the early-time behavior of a given quintessence dark energy model.

We now elaborate on our reconstruction results. At first glance, the reconstruction has been successful. However, to understand and validate the corresponding results, we need to have a look at another physical quantity that has been reconstructed, too. It is important to understand up to what extent we can believe in the model validity in our case. In general, non-validation of the reconstruction results can lead to wrong interpretations and cause misunderstanding of the underlying physics. The physical quantity we choose for this purposes is $\Omega_{de} = \rho_\phi / 3H^2$, which at $z=0$ has actually been used to estimate $\phi(z=0)$, too.

The results of the reconstruction of the Ω_ϕ can be found in Fig.6 for both kernels given by Eqs. (15) and (16), respectively. Indeed, we see that the reconstruction was successful up to a certain redshift, indicating that for higher values the model should be rejected since the lower 2σ bound of Ω_{de} is negative. It is important to mention that the GP gives the statistical explanation of the results, and considering only the means to decide whether or not something is working is not a correct procedure. To have a proper understanding, we need to consider the whole picture, which in our case indicates that the reconstruction of $V(z)$ and $\phi(z)$ is acceptable up to some redshift. Having this in mind, we continued the study and, using the means of the reconstructed $V(z)$ and $\phi(z)$,

we have directly reconstructed the mean of $V(\phi)$.

On the other hand, using the lower and upper 2σ error bounds of both the $V(z)$ and $\phi(z)$ reconstructed functions, we have determined possible maximum errors for $V(\phi)$ allowing to complete our task, which was to obtain a model-independent reconstruction of $V(\phi)$ describing quintessence dark energy as the driving force of our expanding Universe. The result can be found in Fig.2, where the left-hand side plot represents the reconstruction result when the kernel is given by Eq. (15), while the right-hand side one stands for the case with kernel given by Eq. (16), respectively.

Fig.2 shows how different models can be compared and constrained using the reconstruction. In particular, we see why the quintessence dark energy model with $V(\phi) \sim e^{-\lambda\phi}$ (dashed curve, for instance, with $\lambda = 0.854$ in the left-hand side plot of Fig.2, is among the most successful ones. Our analysis explains why this particular model has captured such a lot of attention in the literature. On the other hand, we also see that the quintessence dark energy model with $V(\phi) \sim \phi^\lambda [1 - \cos(\beta\phi^n)]$ (solid curve with $\beta = 1.65$, $n = 0.05$ and $\lambda = 0.2$, for instance) will not work very well and there is a hint that it should be rejected. Additionally, the model with potential $V(\phi) \sim \phi^\lambda$ (dotted curve with $\lambda = 0.125$) should be kept, and it will work better than the model with $V(\phi) \sim \phi^\lambda [1 - \cos(\beta\phi^n)]$. This is inferred from the curves on both plots of Fig.2.

It is made clear from the provided discussion that any given model can be analyzed, and that proper constraints on the parameters can be found. Going one step further, it should be now possible to see why some dark energy models with specific potentials will not work for solving the H_0 tension problem. Moreover,

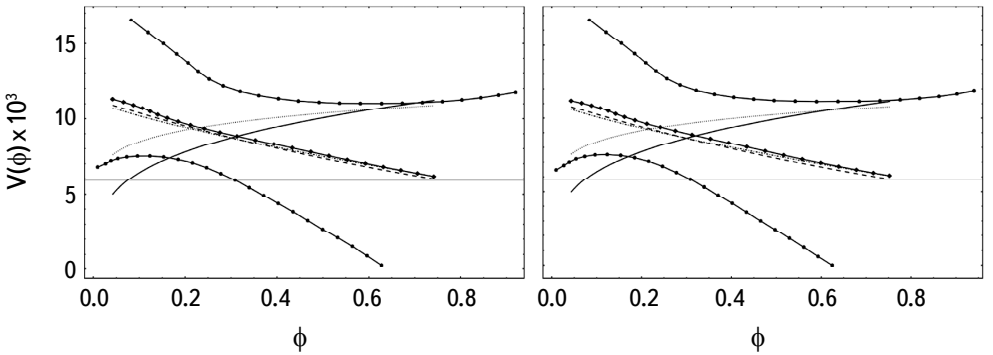


Fig.2. Reconstructed $V(\phi)$ for the case when $H_0 = 71.286 \pm 3.743 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ has been estimated by a GP using the expansion rate data presented in Table 1. The curve with black squares corresponds to the mean of the reconstructed $V(\phi)$ model obtained from the reconstructed means of the functions $V(z)$ and $\phi(z)$. The lower and upper 2σ error bounds of both reconstructed functions $V(z)$ and $\phi(z)$ have been used to determine possible maximum error bounds for $V(\phi)$ (curves with black circles).

in the next subsection, we will discuss how drastically the constraints on the model parameters should be changed to be suitable to solve the H_0 tension problem.

Before ending this one, and based on the reconstructed results, we suggest a new form for the potential to describe a viable quintessence dark energy model. From what we know, this specific model has not been considered before. The potential has the form

$$V(\phi) \sim \phi^\lambda [1 - \sin^n(\beta\phi)], \quad (18)$$

where λ , n , and β are free parameters to be fitted. The dot-dashed black curve of Fig.2 corresponds to this model; it is one-to-one in mimicking the reconstructed mean behavior with $\lambda = 0.001$, $\beta = 0.5$ and $n = 0.5$, when the kernel is given by Eq. (15). To finish, we should mention that the consideration of the kernel, Eq. (16), will introduce changes only slightly affecting the above-discussed numerical values of the parameters. However, the general picture and the conclusions drawn remain unchanged.

3.2. $V(\phi)$ reconstruction when $H_0 = 67.40 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. In this subsection, we discuss the case when a specific value for H_0 has been fixed in advance and used in the reconstruction. Different from the previous case, now the reconstruction is based on 41 data points. We will later see that this can affect our perception of the situation and can be moreover useful to understand why the constraints on quintessence dark energy models discussed in the recent literature may be so different. To be more precise let us indicate that we use the H_0 reported by the Planck mission. Similar to the previous case, $\Omega_{de} = \rho_\phi / 3H^2$ has been considered again allowing us to determine the redshift range where the reconstruction is valid. In particular, we found that when the squared exponent kernel given by Eq. (15) is considered then the $z \in [0, 2)$ redshift range provides a physically acceptable reconstruction of the functions $V(z)$ and $\phi(z)$. Moreover, when we consider the Matern ($\nu = 9/2$) kernel, Eq. (16), then $z \in [0, 1.91)$ is the redshift range providing physically acceptable reconstructions of $V(z)$ and $\phi(z)$ (see Fig.8). On the other hand, from the top panel of Fig.7 we realize the reconstructed forms of the potential $V(z)$ and the field $\phi(z)$, when the kernel is given by Eq. (15). Complementary, the reconstruction results when the kernel is given by Eq. (16) can be found on the bottom panel of Fig.7.

To reconstruct the mean of $V(\phi)$ potential we have used the means of the reconstructed $V(z)$ and $\phi(z)$. Moreover, using the lower and upper 2σ error bounds of both reconstructed functions, $V(z)$ and $\phi(z)$, we have determined possible maximal errors for $V(\phi)$ (Fig.3), what allowed us to complete the model-independent reconstruction of the $V(\phi)$ describing the quintessence dark energy in our expanding Universe. The reconstruction results can be found in Fig.3, where the left-hand side plot represents the reconstruction result when the kernel

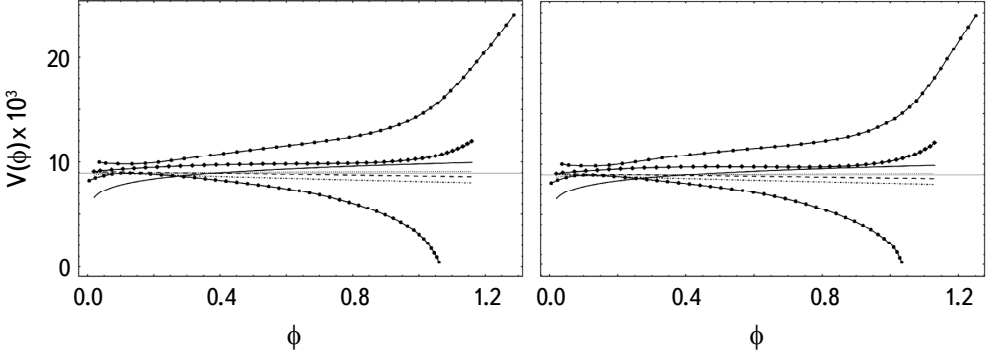


Fig.3. Reconstructed $V(\phi)$ for the expansion rate data in Table 1 with $H_0 = 67.40 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. The curve with black squares corresponds to the mean of the reconstructed $V(\phi)$ model obtained from the reconstructed means of the functions $V(z)$ and $\phi(z)$. The lower and upper 2σ error bounds of both reconstructed functions $V(z)$ and $\phi(z)$ have been used to determine possible maximum error bounds for $V(\phi)$ (curves with black circles). The dashed curve represents the quintessence dark energy model with potential $V(\phi) \sim e^{-\lambda\phi}$. The dotted, dot-dashed, and solid curves correspond to the quintessence dark energy model with $V(\phi) \sim \phi^\lambda$, $V(\phi) \sim \phi^\lambda [1 - \sin^n(\beta\phi)]$ and $V(\phi) \sim \phi^\lambda [1 - \cos(\beta\phi^n)]$, respectively. The left-hand side plot is the result of the reconstruction when the kernel is given by Eq. (15), while the right-hand side one stands for the case with kernel given by Eq. (16).

is given by Eq.(15), while the right-hand side one corresponds to the case with kernel given by Eq.(16).

Visual comparison of the results presented in Fig.2 and Fig.3 already points out huge differences. In particular, just comparing the mean of the reconstruction with $V(\phi) \sim e^{-\lambda\phi}$, we conclude that the model with $\lambda = 0.05$ should be preferred for cosmological applications. On the other hand, with $\lambda = 0.01$ the model with the potential $V(\phi) \sim \phi^\lambda$ may be highly recommended for doing cosmology. Moreover, we also conclude that, with $\beta = 0.05$, $n = 0.75$ and $\lambda = 0.001$, the model with potential $V(\phi) \sim \phi^\lambda [1 - \sin^n(\beta\phi)]$ is favored for doing cosmology. Finally, the model with $V(\phi) \sim \phi^\lambda [1 - \cos(\beta\phi^n)]$ can be recommended too, if $\lambda = 0.02$, $\beta = 1.65$ and $n = 0.05$.

In all these examples, the kernel was given by Eq. (15). Our analysis using the kernel of Eq. (16) shows that similar recommendations can be made. However, we should note that the reconstruction indicates that here we will have tighter constraints on the model parameters than in the previous case. However, the most relevant aspect revealed from the reconstruction is that the early time behavior of the models can change significantly. This is a hint indicating that the H_0 tension is not just a result of playing with numbers. It is more profound than this, namely a problem related to physics and corresponding considerations. This should be made more clear in the next subsection, where we will present the results corresponding to the reconstruction based on the value of H_0 reported by the Hubble mission.

3.3. $V(\phi)$ reconstruction when $H_0 = 73.52 \pm 1.62 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. The last case to be discussed here is when H_0 is fixed to the value $H_0 = 73.52 \pm 1.62 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ reported by the Hubble mission. This means that similarly to the second case, the reconstruction of $H(z)$ and $H'(z)$ will be also based on 41 data points. The reconstructed $V(z)$ and $\phi(z)$ for $z \in [0, 2.4]$ can be found in Fig.9. The reconstruction there has been obtained for the squared exponent kernel given by Eq. (15). The final results of the reconstruction are depicted in Fig.4.

Our analysis based on these reconstructions shows when the resulting potentials can be recommended for cosmology. In particular, we found that according to the mean of the $V(\phi)$ reconstruction, the model with $V(\phi) \sim e^{-\lambda\phi}$ and $\lambda = 1.4$ is expected to be useful for cosmological applications. On the other hand, the model with potential $V(\phi) \sim \phi^\lambda$ can be highly recommended, provided $\lambda = -0.25$. Moreover, we found also that, with $\beta = 0.5$, $n = 0.576$ and $\lambda = 0.005$, the model with potential $V(\phi) \sim \phi^\lambda [1 - \sin^n(\beta\phi)]$ is also favored for cosmological applications. Finally, the model with $V(\phi) \sim \phi^\lambda [1 - \cos(\beta\phi^n)]$ is also useful, provided $\lambda = -0.25$, $\beta = 1.75$ and $n = 0.05$. In all these examples the kernel was given by Eq. (15). An analysis using the kernel of Eq. (16) shows that similar recommendations can be done, too. Moreover, the reconstruction results indicate that here the constraints on the model parameters will not be tighter than in the case discussed in Sect. 3.2. On the other hand, the early time behavior of the models could change significantly. The reconstruction of the $\Omega_{de} = \rho_\phi / 3H^2$ has been considered again allowing us to determine the redshift range where the reconstruction is valid (Fig.10).

To end this subsection let us mention that the values of the parameters for the models presented above give a hint on when the H_0 tension problem can be solved, in a quintessence dark energy-dominated Universe, when one of the forms for the potential discussed above is used. Let us mention again that reconstructions here obtained are model-independent and based on the expansion rate data, and

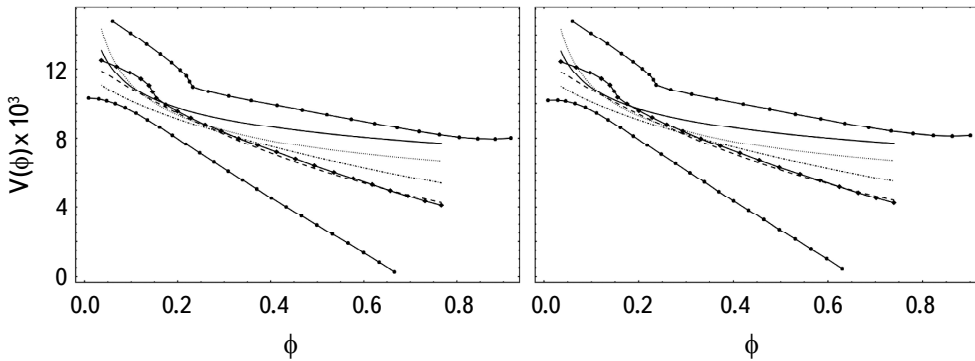


Fig.4. Same as Fig.3, but with $H_0 = 73.52 \pm 1.62 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

that they can be used either to craft new models or to constrain already existing ones.

4. *Conclusions.* In this paper, we have used GPs and available expansion rate data to reconstruct the functional form of the potential better-representing quintessence dark energy. There are various and important open questions about dark energy physics and the challenge of answering them is usually undertaken using model-dependent approaches. The quintessence dark energy paradigm is among the most often discussed models. In there, the form of the potential field is chosen manually, in a sort of phenomenological approach, mainly aimed at reproducing the observational data. We notice that the same is true for other dark energy models and that mainly phenomenology-based motivations have been put forward to craft viable dark energy models.

As an alternative to all these previously carried out studies, we describe in detail the whereabouts of a model-independent reconstruction of the potential. Moreover, the results of the reconstruction can be used to build new potentials and to constrain the free parameters. Starting from very basic assumptions about the background dynamics, we have demonstrated that the potential and the field itself can be expressed in terms of $H(z)$ and $H'(z)$, which can be reconstructed in a model-independent way from the expansion rate data using a GP. GPs are among several very useful Machine Learning tools intensively used in very different areas, among them in cosmology.

The main issue with this approach is to specify the form of the kernel function that needs to be chosen to be able to complete the reconstruction. The literature contains various interesting discussions indicating that it is better to use several kernels and compare the results. This is, in our opinion, an optimal solution that can be time-consuming; however, it is judicious to follow this approach and make sure that the hints and the results obtained have value and have not been obtained by chance.

In our work, the quintessence dark energy potential and the corresponding field have been reconstructed for three different cases: 1) when H_0 has been estimated from the GP reconstruction of the functions $H(z)$ and $H'(z)$, based on an existing 40-point expansion rate dataset; 2) when H_0 is fixed to the value estimated from the Planck mission and then the reconstruction of $H(z)$ and $H'(z)$ is performed; 3) when H_0 is fixed to the value estimated from the Hubble mission results and then the reconstruction of $H(z)$ and $H'(z)$ is performed. In this way, we get a hint on when the H_0 tension problem could be reasonably solved, for instance, when the model with $V(\phi) \sim e^{-\lambda\phi}$ is considered. We have studied other models, too, and also found a new potential, $V(\phi) \sim \phi^\lambda [1 - \sin^n(\beta\phi)]$, which can be recommended to be used in cosmology. This is a genuine discovery made in this paper. An in-depth study of this new potential has been left for future publication.

We need to mention that, in our analysis, we have used the two kernel functions given by Eqs. (15) and (16), and found slight changes (detailed above), as compared with the results discussed before, but those are not so important. However, we would like to discuss another result we have at this point. First, concerning the possible constraints on the λ parameter of the Swampland $V(\phi) \sim e^{-\lambda\phi}$ potential, which was discussed in [55]. Without going deep into the discussion of [55], we learned that, with future surveys, we should expect fundamental observational limitations, λ to $\lambda < 0.1$, supporting the standard model. Now the question is: what we have learned with our method? To understand this, let us summarize what we obtained, namely the preferred values for the parameters: 1) $\lambda = 0.854$ when H_0 is not fixed, 2) $\lambda = 0.01$ when $H_0 = 67.40 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, and finally 3) when $H_0 = 73.52 \pm 1.62 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ we got $\lambda = 1.4$. In all cases, we have just used the reconstruction means, and the last one means that, if we use lower error bounds of the reconstruction, we will reduce the estimated values too.

Anyhow, the important message we wish to transmit to the reader is 1) that the 40 data point expansion rate data already contains the information that can come from future surveys; 2) the great importance of the tool we use to extract information from data. Moreover, our constraints on the parameter λ when $H_0 = 67.40 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ indicate that any other estimation closer to the estimation obtained here definitely supports the Λ CDM standard model. In all other cases, we can claim that the Λ CDM theory might be challenged. This is an indication that the H_0 tension problem is not a game of statistics only.

Of course, there are other various questions to be studied yet, which have been left for further consideration. In particular, to continue using GPs and other Machine Learning algorithms involving other datasets for model-independent reconstruction or pattern learning that can be used for similar estimations and reconstructions. More specifically, it would be interesting to see if the recently discovered constraints would be challenged in those cases, and what the consequences of this could be.

Acknowledgements. The authors would like to thank the referee for valuable comments which helped to improve the manuscript. We thank Eoin O Colgain, Reginald Christian Bernardo, and Carlos Garcia-Garcia for their valuable comments and discussion. Here, we need to mention that we learned about [51] after our recent paper appeared online. This work has been partially supported by MICINN (Spain), project PID2019-104397GB-I00, of the Spanish State Research Agency program AEI/10.13039/501100011033, by the Catalan Government, AGAUR project 2017-SGR-247, and by the program Unidad de Excelencia María de Maeztu CEX2020-001058-M. This work has been supported by the Juan de la

Cierva-incorporación grant (IJC2020-042690-I). This paper was supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, grant AP08052034.

¹ Consejo Superior de Investigaciones Científicas, ICE/CSIC-IEEC, Campus UAB, Carrer de Can Magrans s/n, 08193 Bellaterra (Barcelona), Spain, e-mail: martiros.khurshudyan@csic.es

² Eurasian National University, Nur-Sultan 010008, Kazakhstan

³ Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics, Nur-Sultan 010009, Kazakhstan

APPENDIX

We include here several additional figures, Fig.5-10, to allow the reader to estimate the quality of the reconstructions presented in the paper.

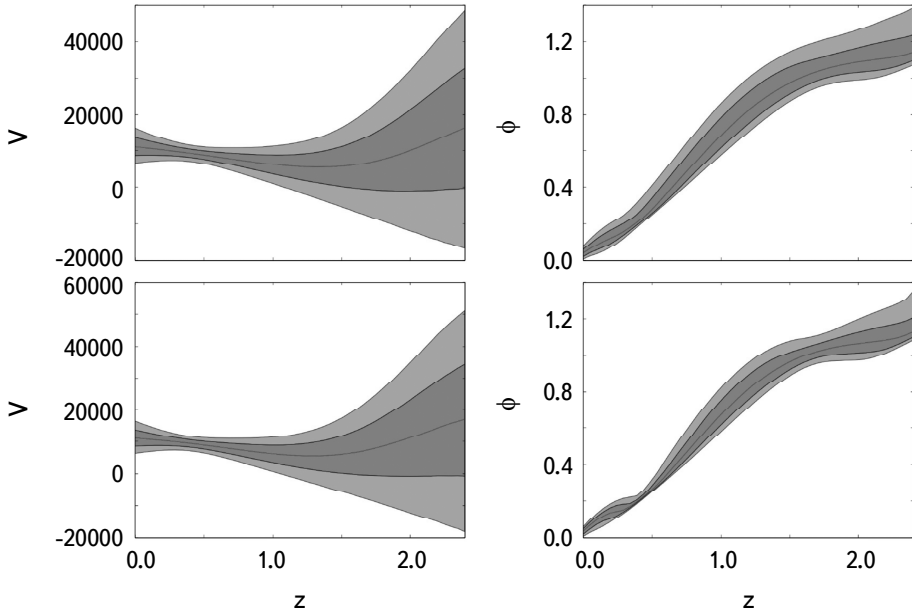


Fig.5. Reconstruction of $V(z)$, Eq. (13), and $\phi(z)$, Eq. (14), from the $H(z)$ data depicted in Table 1. The plots of the top panel correspond to the GP reconstruction for the squared exponent kernel given by Eq. (15). The plots of the bottom panel correspond to the GP reconstruction for Matern ($\nu = 9/2$) kernel given by Eq. (16). The solid line is the mean of the reconstruction and the shaded regions are the 68% and 95% C.L. of the reconstruction, respectively. $H_0 = 71.286 \pm 3.743 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ and $H_0 = 71.196 \pm 3.867 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ estimates for H_0 have been obtained using GP when the kernels are given by Eq. (15) and Eq. (16), respectively.

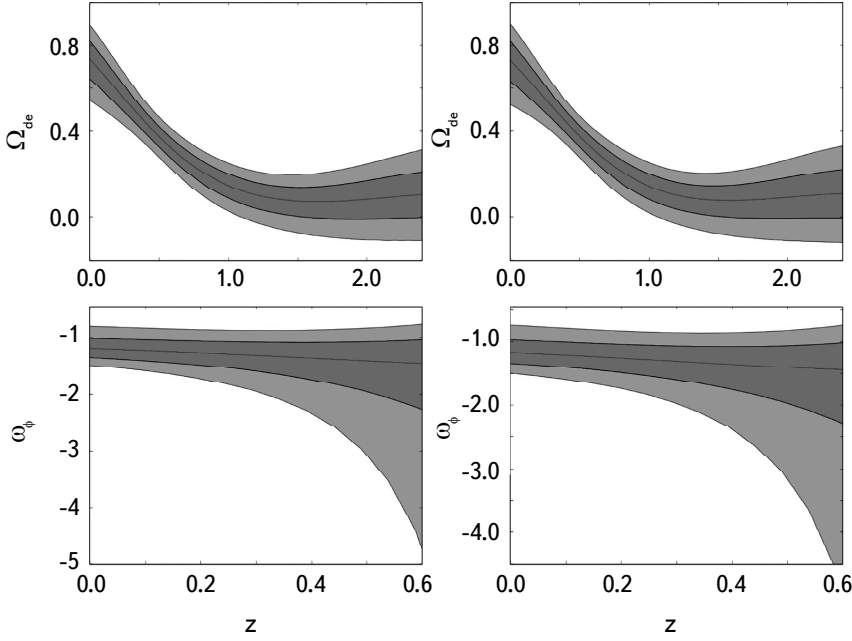


Fig.6. The top panel represents the reconstruction of $\Omega_{de} = \rho_\phi / 3H^2$ from the $H(z)$ data depicted in Table 1. The left-hand side plot corresponds to the GP reconstruction for the squared exponent kernel given by Eq. (15). The right-hand side plot corresponds to the GP reconstruction for the Matern ($\nu = 9/2$) kernel given by Eq. (16). The solid line is the mean of the reconstruction and the shaded regions are the 68% and 95% C.L. of the reconstruction, respectively. $H_0 = 71.286 \pm 3.743 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ has been estimated by GP from the data presented in Table 1 when the squared exponent kernel given by Eq. (15) has been used. On the other hand, $H_0 = 71.196 \pm 3.867 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ has been estimated by GP from the data presented in Table 1 when the Matern ($\nu = 9/2$) kernel given by Eq. (16) has been used. The bottom panel represents the reconstruction of $\omega_\phi = P_\phi / \rho_\phi$ where P_ϕ and ρ_ϕ are given by Eq. (12) and Eq. (11), respectively, while $\Omega_0 = 3.15 \pm 0.007$.

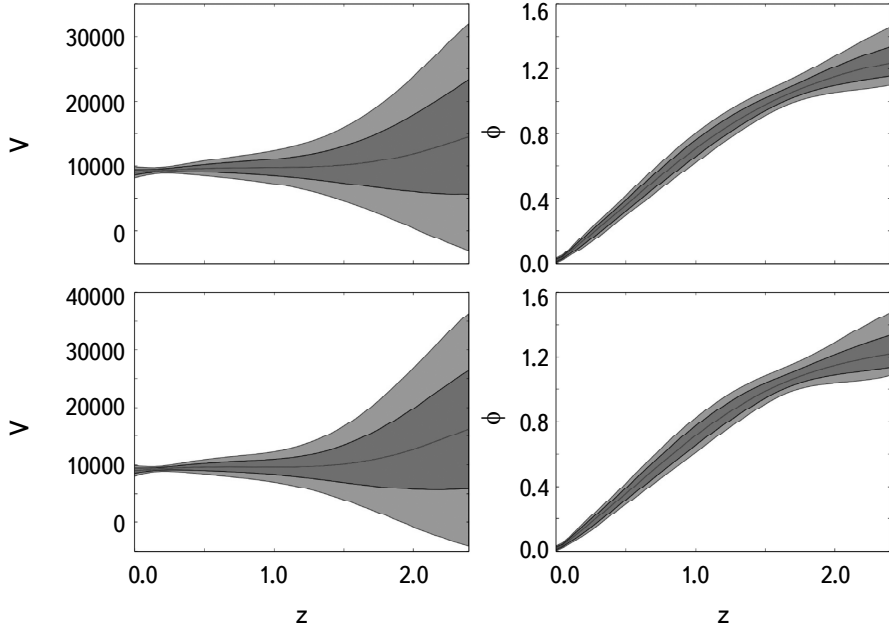


Fig.7. Reconstruction of $V(z)$, Eq. (13), and $\phi(z)$, Eq. (14), from the $H(z)$ data depicted in Table 1 when $H_0 = 67.40 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. The plots of the top panel correspond to the GP reconstruction for the squared exponent kernel, Eq. (15). The plots of the bottom panel correspond to the GP reconstruction for the kernel given by Eq. (15). The solid line is the mean of the reconstruction and the shaded regions are the 68% and 95% C.L. of the reconstruction, respectively.

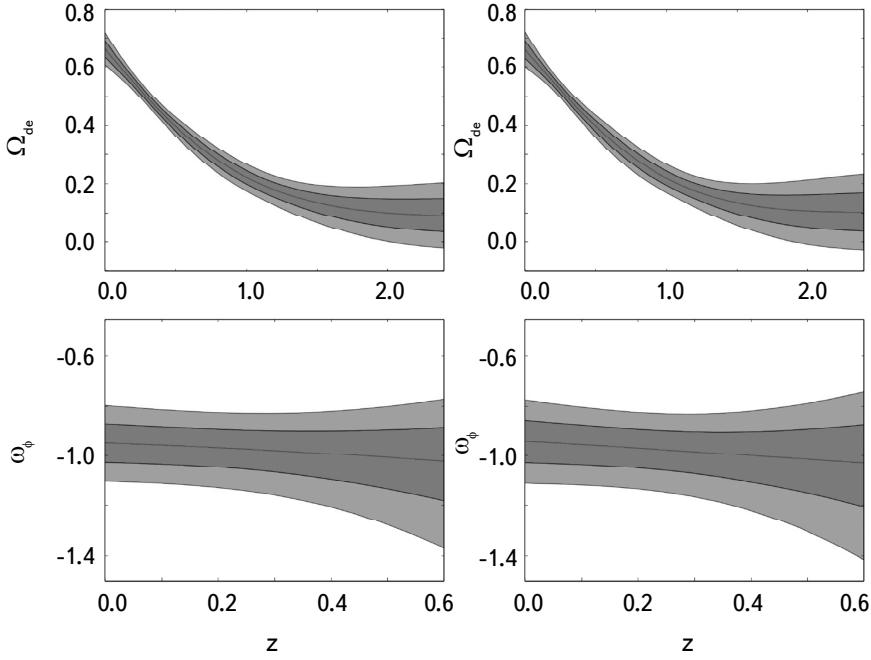


Fig.8. The top panel represents the reconstruction of $\Omega_{de} = \rho_\phi / 3H^2$ from the $H(z)$ data depicted in Table 1 when $H_0 = 67.40 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. The left-hand side plot corresponds to the GP reconstruction for the squared exponent kernel given by Eq. (15). The right-hand side plot corresponds to the GP reconstruction for the Matern ($\nu = 9/2$) kernel given by Eq. (16). The solid line is the mean of the reconstruction and the shaded regions are the 68% and 95% C.L. of the reconstruction, respectively. The bottom panel represents the reconstruction of $\omega_\phi = P_\phi / \rho_\phi$ where P_ϕ and ρ_ϕ are given by Eq. (12) and Eq. (11), respectively, while $\Omega_0 = 3.15 \pm 0.007$.

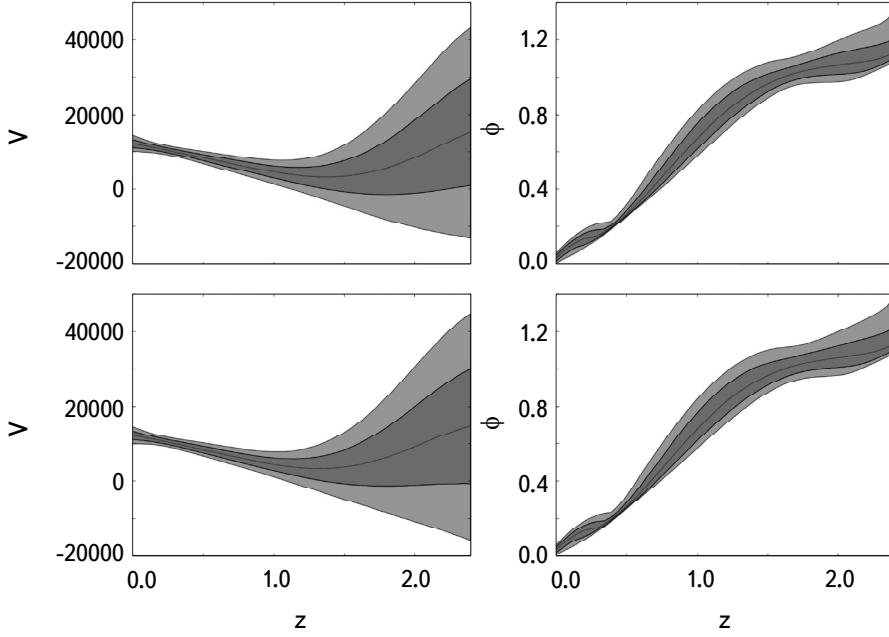


Fig.9. Reconstruction of $V(z)$, Eq. (13), and $\phi(z)$, Eq. (14), from the $H(z)$ data depicted in Table 1 when $H_0 = 73.52 \pm 1.62 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. The plots of the top panel correspond to the GP reconstruction for the squared exponent kernel, Eq. (15). The plots of the bottom panel correspond to the GP reconstruction for the kernel given by Eq. (15). The solid line is the mean of the reconstruction and the shaded regions are the 68% and 95% C.L. of the reconstruction, respectively.

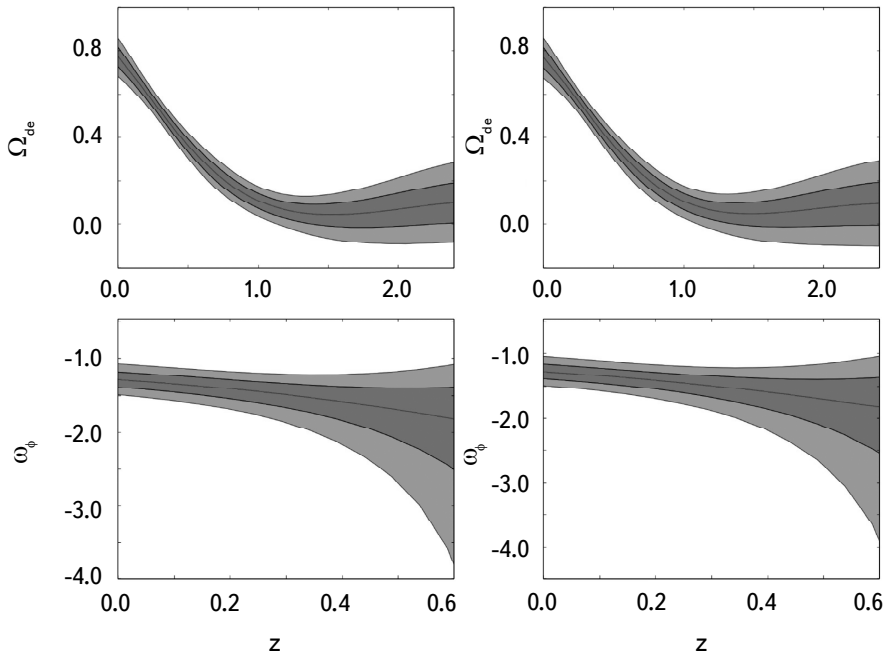


Fig.10. The top panel represents the reconstruction of $\Omega_{de} = \rho_\phi / 3 H^2$ from the $H(z)$ data depicted in Table 1, when $H_0 = 73.52 \pm 1.62 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. The left-hand side plot corresponds to the GP reconstruction for the squared exponent kernel given by Eq. (15). The right-hand side plot corresponds to the GP reconstruction for the Matern ($\nu = 9/2$) kernel given by Eq.(16). The solid line is the mean of the reconstruction and the shaded regions are the 68% and 95% C.L. of the reconstruction, respectively. The bottom panel represents the reconstruction of $\omega_\phi = P_\phi / \rho_\phi$ where P_ϕ and ρ_ϕ are given by Eq. (12) and Eq. (11), respectively, while $\Omega_0 = 3.15 \pm 0.007$.

РЕКОНСТРУКЦИЯ ПОТЕНЦИАЛА КВИНТЭССЕНЦИИ ТЕМНОЙ ЭНЕРГИИ ИЗ ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА

Э.ЭЛИЗАЛДЕ¹, М.ХУРШУДЯН¹, К.МЫРЗАКУЛОВ^{2,3}, С.БЕКОВ^{2,3}

В работе представлена реконструкция потенциала квинтэссенции темной энергии способом, независимым от модели. Реконструкция основана на гауссовом процессе и имеющихся данных о скорости расширения. Конкретно, используются 40 точек значений $H(z)$, включающих в себя 30-точечную выборку, полученную с использованием метода дифференциального возраста, и дополнительную 10-точечную выборку, полученную с помощью метода радиального ВАО. Результаты получены для двух ядерных функций и трех различных значений H_0 . Это проливает свет на проблему напряжения Хаббла, указывая на то, что это не просто числовая проблема. Модельно-независимая

реконструкция потенциала может служить "контрольной" для ограничения имеющихся моделей и создания новых. Различные возможные потенциалы, включая $V(\phi) \sim e^{-\lambda\phi}$, сравниваются с первыми по-настоящему модельно-независимыми реконструкциями потенциала темной энергии квинтэссенции, полученными в данной работе. Это позволяет выбирать новые модели, которые могут быть интересны для космологии. В следующей работе будет представлен расширенный метод для реконструкции потенциала связанных моделей темной энергии.

Ключевые слова: *квинтэссенция темной энергии: потенциал: гауссовский процесс*

REFERENCES

1. *N.Aghanim et al.*, *Astron. Astrophys.*, **641**, A6, 2020.
2. *A.G.Riess et al.*, *Astrophys. J.*, **861**(2), 126, 2018.
3. *G.S.Sharov, E.S.Sinyakov*, arxiv:2002.03599.
4. *E.Elizalde et al.*, arXiv:2104.01077.
5. *M.Braglia et al.*, arxiv:2004.1116.
6. *W.L.Kimmy Wu et al.*, arxiv: 2004.10207.
7. *G.Alesta et al.*, arxiv:2004.08363.
8. *D.Wang, D.Mota*, arxiv:2003.10095.
9. *J.Sakstein, M.Trodden*, *Phys. Rev. Lett.*, **124**, 161301, 2020.
10. *E.Elizalde et al.*, arXiv:2006.12913.
11. *E.Elizalde et al.*, *Phys. Rev. D*, **102**, 123501, 2020.
12. *M.H.P.M. van Putten*, arxiv:1707.02588.
13. *E. Di Valentino et al.*, *Phys. Rev. D*, **101**, 063502, 2020.
14. *M.Khurshudyan*, *Astrophysics*, **66**(3), 423, 2023.
15. *S.Nojiri et al.*, *Astrophysics*, **65**(4), 534, 2022.
16. *R.C.Nunes*, *JCAP*, **05**, 052, 2018.
17. *K.Bamba et al.*, *Astrophys. Space Sci.*, **342**, 155, 2012.
18. *S.D.Odintsov et al.*, *Phys. Rev. D*, **96**, 044022, 2017.
19. *W.Yang et al.*, arXiv:2001.02180.
20. *W.Yang et al.*, *JCAP*, **1911**, 044, 2019.
21. *W.Yang et al.*, *JCAP*, **1911**, 044, 2019.
22. *C.Li et al.*, *Phys. Lett. B*, **80**, 135141, 2020.
23. *M.Khurshudyan, R.Myrzakulov*, *Eur. Phys. J. C*, **77**, 65, 2017.
24. *W.Yang et al.*, *Phys. Rev. D*, **99**, 043543, 2019.
25. *E.Elizalde, M.Khurshudyan*, *Int. J. Mod. Phys. D*, **27**, 1850037, 2018.
26. *E.Sadri et al.*, *Eur. Phys. J. C*, **80**, 393, 2020.

27. *I.Brevik et al.*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys., **14**, 1750185, 2017.
28. *S.Capozziello et al.*, Phys. Rev. D, **73**, 043512, 2006.
29. *S.Capozziello et al.*, Phys. Rev. D, **99**, 023532, 2019.
30. *S.Nojiri, S.D.Odintsov*, Phys. Rev. D, **72**, 023003, 2005.
31. *I.Brevik et al.*, Phys. Rev. D, **86**, 063007, 2012.
32. *I.Brevik et al.*, Int. J. Mod. Phys. D, **26**, 1730024, 2017.
33. *B.Mishra et al.*, Eur. Phys. J. C, **79**, 34, 2019.
34. *S.D.Odintsov et al.*, Annals Phys., **398**, 238, 2018.
35. *K.Yerzhanov et al.*, Mod. Phys. Lett. A, **36**, 2150222, 2021.
36. *M.Aljaf et al.*, arXiv:2010.05278.
37. *M.Khurshudyan*, Symmetry, **10**, 577, 2018.
38. *S.Nojiri et al.*, Phys. Lett. B, **825**, 136844, 2022.
39. *S.D.Odintsov et al.*, Phys. Rev. D, **101**, 044010, 2020.
40. *M.Khurshudyan*, Int. Journal of Theor. Phys., **53**, 2370, 2014.
41. *L.A.Urena-Lopez, N.Roy*, Phys. Rev. D, **102**, 063510, 2020.
42. *YF.Cai et al.*, Astrophys. J., **888**, 62, 2020.
43. *E.Elizalde, M.Khurshudyan*, Phys. Rev. D, **99**, 103533, 2019.
44. *M.Aljaf et al.*, Eur. Phys. J. C, **81**, 544, 2021.
45. *E.Elizalde et al.*, Int. J. Mod. Phys. D, **28**, 1950019, 2018.
46. *X.Rin et al.*, arxiv: 2203.01926.
47. *J.L.Said et al.*, JCAP, **06**, 015, 2021.
48. *A.Gomez-Valent, L.Amendola*, JCAP, **1804**, 051, 2018.
49. *S.Dhawan et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **506**, L1, 2021.
50. *E.O.Colgain, M.M.Sheikh-Jabbari*, arXiv:2101.08565.
51. *R.C.Bernardo, J.L.Said*, JCAP, **09**, 014, 2021.
52. *R.C.Bernardo, J.L.Said*, JCAP, **08**, 027, 2021.
53. *L.O.Tellez-Tovar, T.Matos, J.A.Vázquez*, Phys. Rev. D, **106**, 123501, 2022.
54. *M.Seikel, C.Clarkson, M.Smith*, JCAP, **06**, 036, 2012.
55. *L.Heisenberg et al.*, Phys. Rev. D, **98**, 123502, 2018.

DOI: 10.54503/0571-7132-2024.67.2-229

ИЗОСПИНОВО-АСИММЕТРИЧНАЯ ХОЛОДНАЯ ЯДЕРНАЯ МАТЕРИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ СО СКАЛЯРНО-ИЗОВЕКТОРНЫМ КАНАЛОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Г.Б.АЛАВЕРДЯН, А.Г.АЛАВЕРДЯН

Поступила 10 февраля 2023

Принята к печати 10 июня 2024

В рамках релятивистской теории среднего поля, в которой помимо полей σ , ω , ρ мезонов, учтено также изовекторное, лоренцево-скалярное поле δ -мезона, исследуются свойства изоспиново-асимметричной холодной ядерной материи. Изучаются свойства как чисто нуклонной np материи в зависимости от барионной плотности n_B и параметра асимметрии α , так и свойства электрически нейтральной β -равновесной $npem$ материи в зависимости от барионной плотности n_B . Для разных значений n_B и α определены такие характеристики np вещества, как приходящаяся на один барион энергия, удельная энергия, обусловленная изоспиновой асимметрией, эффективные массы протона и нейтрона, удельная энергия связи. Показано, что обусловленная асимметрией энергия, при фиксированном значении α , является монотонно возрастающей функцией барионной плотности n_B . Для $npem$ материи изучены эффективные массы протона и нейтрона $M_p^{(eff)}$, $M_n^{(eff)}$, удельная энергия связи E_{bind} , энергия симметрии E_{sym} , количественная доля протонов $Y_p = n_p/n_B$, а также средние мезонные поля $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\omega}$, $\tilde{\delta}$, $\tilde{\rho}$ в зависимости от барионной плотности n_B .

Ключевые слова: *Среднее поле: нуклонная материя: материя нейтронной звезды: энергия симметрии: эффективная масса: энергия связи*

1. *Введение.* Термодинамическое описание ядерного вещества является важной задачей на пути к пониманию свойств и структуры ядер, динамики столкновений тяжелых ионов, структуры компактных звезд, динамики взрыва сверхновых, а также процесса слияния нейтронных звезд. При плотностях выше плотности ядерного насыщения n_0 β -равновесная нуклонная материя является изоспиново-асимметричной. Именно этим обстоятельством объясняется большой интерес, который уделяется изучению свойств изоспиново-асимметричной нуклонной материи [1-5]. Изоспиновая зависимость уравнения состояния ядерной материи при заданном значении барионной плотности n_B определяется энергией ядерной симметрии $E_{sym}(n_B)$.

Современные возможности земных ядерных экспериментов и астрофизических наблюдений обеспечили значительный прогресс в изучении зависимости энергии симметрии от плотности [6-8]. В последние годы появились новые

возможности для получения ограничений на физические характеристики асимметричной ядерной материи, используя как данные научных программ NICER и XMM-Newton по одновременному определению массы и радиуса нейтронной звезды (НЗ) [9], так и данные относительно приливной деформации, полученные из анализа гравитационного излучения при слиянии двойной нейтронной звезды GW170817 [10,11].

Теоретические исследования свойств ядерного вещества и конечных ядер как систем сильно взаимодействующих релятивистских барионов и мезонов основаны на квантово-полевого подходе в рамках квантовой адродинамики (QHD). Одной из успешно применяемых моделей такого рода является релятивистская теория среднего поля (RMF). В исходной модели взаимодействие между нуклонами осуществлялось путем обмена изоскалярным, лоренцево-скалярным σ -мезоном и изоскалярным, лоренцево-векторным ω -мезоном [12-14]. Для удовлетворительного воспроизведения ядерной несжимаемости и свойств нестабильных ядер в модель были включены члены самовзаимодействия σ и ω -мезонов, приводящие к появлению нелинейных членов в уравнениях для мезонных полей [15-17]. Для описания толщины нейтронной оболочки тяжелых ядер и характеристик изоспиново-асимметричных ядер был расширен состав обменных мезонов и в схему был включен также изовекторный, лоренцево-векторный ρ -мезон [18].

Для полноты трансформационных свойств мезонных полей нужно было в составе обменных мезонов иметь также изовекторный, лоренцево-скалярный δ -мезон. Это было сделано в работах [19-21]. Такая расширенная модель была применена для исследования процессов рассеяния нейтроноизбыточных тяжелых ионов средних энергий и выяснения возможности образования в процессе столкновения смешанной адронно-кварковой фазы [22,23]. Изучению влияния δ -мезонного поля на характеристики адрон-кваркового фазового перехода и на наблюдаемые параметры гибридных звезд посвящены работы [24,25].

Целью настоящей работы является изучение одночастичных свойств изоспиново-асимметричной ядерной материи в рамках релятивистской теории среднего поля, в которой учтено также изовекторное, лоренцево-скалярное поле δ -мезона. Статья организована следующим образом. В разделе 2 представлено краткое описание модели, в которой приводятся система уравнений для средних мезонных полей и формулы для таких одночастичных характеристик ядерной материи как энергия симметрии, энергия, приходящаяся на один барион, удельная энергия связи, эффективные массы протона и нейтрона, химические потенциалы барионов. Рассматривается как чисто нуклонная *np* материя, так и электрически нейтральная, β -равновесная ядерная материя, состоящая из нуклонов и заряженных e^- , μ^- лептонов (*нпрм* материя). В

последнем разделе подытожены основные результаты работы.

2. Описание модели. В этом разделе дано краткое изложение модели, которую мы использовали для термодинамического описания плотного нуклонного вещества. В рамках релятивистской теории среднего поля [12-14], основанной на квантовой адродинамике, рассмотрим систему частиц состоящей из нуклонов (n, p), сильное взаимодействие между которыми осуществляется путем обмена мезонами $\sigma, \omega, \delta, \rho$.

Плотность Лагранжиана такой системы имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{RMF} = \sum_{i=p,n} \bar{\psi}_i \left[\gamma_\mu \left(i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu - \frac{1}{2} g_\rho \rho^\mu \tau_i \right) - (m_N - g_\sigma \sigma - g_\delta \delta \tau_i) \right] \psi_i \\ - \frac{1}{3} g_{\sigma 3} (g_\sigma \sigma)^3 - \frac{1}{4} g_{\sigma 4} (g_\sigma \sigma)^4 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\ - \frac{1}{4} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \delta \partial^\mu \delta - m_\delta^2 \delta^2) + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_\mu \rho^\mu - \frac{1}{4} \mathcal{R}_{\mu\nu} \mathcal{R}^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ψ_i - спинорное поле нуклонов, τ_i - изоспиновые матрицы Паули, $\sigma, \omega_\mu, \delta, \rho_\mu$ - поля соответствующих мезонов, зависящие от пространственно-временных координат $x_\mu = (t, x, y, z)$, m_N - масса голого нуклона, $m_\sigma, m_\omega, m_\delta, m_\rho$ - массы обменных мезонов, $\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$ и $\mathcal{R}_{\mu\nu} = \partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu$ антисимметричные тензоры векторных полей ω_μ и ρ_μ . Члены в (1) $g_{\sigma 3} (g_\sigma \sigma)^3/3$ и $g_{\sigma 4} (g_\sigma \sigma)^4/4$, приводящие в уравнениях движения к нелинейной зависимости от изоскалярного лоренцево-скалярного поля σ были введены в работе [15] для достижения приемлемого количественного воспроизведения свойств основного состояния симметричной ядерной материи. Константы связи нуклона с соответствующим мезоном обозначены через $g_\sigma, g_\omega, g_\delta$ и g_ρ .

В приближении среднего поля мезонные поля, которые в общем случае зависят от пространственно-временных координат, заменяются на однородные и не меняющиеся во времени средние поля $\bar{\sigma}, \bar{\omega}_\mu, \bar{\delta}, \bar{\rho}_\mu$. Уравнения Эйлера-Лагранжа для нуклонных и мезонных полей приводят к замкнутой системе уравнений при заданном значении плотности барионного числа $n_B = n_n + n_p$ и параметра асимметрии $\alpha = (n_n - n_p)/n_B$. Понятно, что в эти уравнения будут входить также и массы мезонов, однако удобным переобозначением констант связи и средних мезонных полей удастся освободиться от этих параметров (см. напр. [20,24]):

$$\begin{aligned} g_\sigma \bar{\sigma} \rightarrow \tilde{\sigma}, \quad g_\omega \bar{\omega} \rightarrow \tilde{\omega}, \quad g_\delta \bar{\delta}^{(3)} \rightarrow \tilde{\delta}, \quad g_\rho \bar{\rho}^{(3)} \rightarrow \tilde{\rho}, \\ \left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma} \right)^2 \rightarrow \alpha_\sigma, \quad \left(\frac{g_\omega}{m_\omega} \right)^2 \rightarrow \alpha_\omega, \quad \left(\frac{g_\delta}{m_\delta} \right)^2 \rightarrow \alpha_\delta, \quad \left(\frac{g_\rho}{m_\rho} \right)^2 \rightarrow \alpha_\rho. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения для переобозначенных средних мезонных полей $\tilde{\sigma}, \tilde{\omega}_\mu, \tilde{\delta},$

$\tilde{\rho}_\mu$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma} &= \alpha_\sigma \left(n_p^{(s)}(n_B, \alpha) + n_n^{(s)}(n_B, \alpha) - g_{\sigma 3} \tilde{\sigma}^2 - g_{\sigma 4} \tilde{\sigma}^3 \right), \quad \tilde{\omega} = \alpha_\omega n_B, \\ \tilde{\delta} &= \alpha_\delta \left(n_p^{(s)}(n_B, \alpha) - n_n^{(s)}(n_B, \alpha) \right), \quad \tilde{\rho} = -\frac{1}{2} \alpha_\rho n_B \alpha.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь $n_p^{(s)}(n_B, \alpha)$ и $n_n^{(s)}(n_B, \alpha)$ скалярные плотности протонов и нейтронов, которые определяются выражениями [24,25]

$$\begin{aligned}n_p^{(s)}(n_B, \alpha) &= \frac{M_p^{(eff)}(\tilde{\sigma}, \tilde{\delta})^{k_F(n_B)(1-\alpha)^{1/3}}}{\pi^2} \int_0^{k_F(n_B)(1-\alpha)^{1/3}} \frac{1}{\sqrt{k^2 + M_p^{(eff)}(\tilde{\sigma}, \tilde{\delta})^2}} k^2 dk, \\ n_n^{(s)}(n_B, \alpha) &= \frac{M_n^{(eff)}(\tilde{\sigma}, \tilde{\delta})^{k_F(n_B)(1+\alpha)^{1/3}}}{\pi^2} \int_0^{k_F(n_B)(1+\alpha)^{1/3}} \frac{1}{\sqrt{k^2 + M_n^{(eff)}(\tilde{\sigma}, \tilde{\delta})^2}} k^2 dk,\end{aligned}\quad (4)$$

где $k_F(n_B) = (3\pi^2 n_B/2)^{1/3}$, а $M_p^{(eff)}(\tilde{\sigma}, \tilde{\delta})$ и $M_n^{(eff)}(\tilde{\sigma}, \tilde{\delta})$ - эффективные массы нуклонов, которые задаются формулами вида

$$M_p^{(eff)}(\tilde{\sigma}, \tilde{\delta}) = m_N - \tilde{\sigma} - \tilde{\delta}, \quad M_n^{(eff)}(\tilde{\sigma}, \tilde{\delta}) = m_N - \tilde{\sigma} + \tilde{\delta}. \quad (5)$$

В рамках релятивистской теории среднего поля плотность энергии $\varepsilon_{NM}(n_B, \alpha)$ нуклонного (нейтрон-протонного) вещества в зависимости от барионной плотности n_B и параметра асимметрии α определяется выражением

$$\begin{aligned}\varepsilon_{NM}(n_B, \alpha) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_F(n_B)(1-\alpha)^{1/3}} \sqrt{k^2 + M_p^{(eff)}(\tilde{\sigma}, \tilde{\delta})^2} k^2 dk \\ &\quad + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_F(n_B)(1+\alpha)^{1/3}} \sqrt{k^2 + M_n^{(eff)}(\tilde{\sigma}, \tilde{\delta})^2} k^2 dk \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\alpha_\sigma} + \frac{\tilde{\omega}^2}{\alpha_\omega} + \frac{\tilde{\delta}^2}{\alpha_\delta} + \frac{\tilde{\rho}^2}{\alpha_\rho} \right) + \frac{1}{3} g_{\sigma 3} \tilde{\sigma}^3 + \frac{1}{4} g_{\sigma 4} \tilde{\sigma}^4.\end{aligned}\quad (6)$$

В случае электрически нейтральной и β -равновесной холодной адронной материи, состоящей из нейтронов, протонов, а также заряженных лептонов - электронов e и мюонов μ , плотность энергии $\varepsilon_{HM}(n_B)$ определится выражением

$$\varepsilon_{HM}(n_B) = \varepsilon_{NM}(n_B, \alpha) + \sum_{l=e, \mu} \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\sqrt{\mu_l^2 - m_l^2}} \sqrt{k^2 + m_l^2} k^2 dk, \quad (7)$$

где m_l - массы, а μ_l - химические потенциалы соответствующих заряженных лептонов ($l = e, \mu$). Для такой материи должны выполняться условия β -равновесия и электрической нейтральности:

а) при плотности барионов ниже порога рождения мюонов:

$$\mu_n(n_B, \alpha) - \mu_p(n_B, \alpha) = \mu_e(n_e), \quad n_p = n_e. \quad (8)$$

б) при плотности барионов выше порога рождения мюонов:

$$\mu_n(n_B, \alpha) - \mu_p(n_B, \alpha) = \mu_e(n_e) = \mu_\mu(n_\mu), \quad n_p = n_e + n_\mu. \quad (9)$$

Здесь $\mu_p(n_B, \alpha)$ и $\mu_n(n_B, \alpha)$ являются химическими потенциалами соответственно протонов и нейтронов, которые определяются формулами

$$\begin{aligned} \mu_p(n_B, \alpha) &= \sqrt{k_F(n_B)^2(1-\alpha)^{2/3} + M_p^{(eff)^2}} + \tilde{\omega} + \frac{1}{2}\tilde{\rho}, \\ \mu_n(n_B, \alpha) &= \sqrt{k_F(n_B)^2(1+\alpha)^{2/3} + M_n^{(eff)^2}} + \tilde{\omega} - \frac{1}{2}\tilde{\rho}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения (8) и (9) позволяют выразить параметр асимметрии электрически нейтральной и β -равновесной материи через барионную плотность. В этом случае плотность энергии зависит только от барионной плотности n_B .

Энергия, приходящаяся на один барион E_B и удельная энергия связи E_{bind} , как функции барионной плотности n_B и параметра асимметрии α , задаются формулами:

$$E_B(n_B, \alpha) = \frac{\varepsilon_{NM}(n_B, \alpha)}{n_B}; \quad E_{bind}(n_B, \alpha) = E_B(n_B, \alpha) - m_N. \quad (11)$$

Приходящуюся на один барион энергию, обусловленную изоспиновой асимметрией системы, обозначим через $\Delta E_B(n_B, \alpha) = E_B(n_B, \alpha) - E_B(n_B, 0)$.

Энергия симметрии $E_{sym}(n_B)$ определяется из разложения функции $E_B(n_B, \alpha)$ в ряд по параметру асимметрии: $E_B(n_B, \alpha) = E_B(n_B, 0) + E_{sym}(n_B)\alpha^2 + o(\alpha^4)$, так что

$$E_{sym}(n_B) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_B(n_B, \alpha)}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=0}. \quad (12)$$

Пользуясь выражением (6) для плотности энергии $\varepsilon_{NM}(n_B, \alpha)$ и уравнениями (3) для мезонных полей, можно получить выражение для энергии симметрии $E_{sym}(n_B)$. Слагаемые, не содержащие константы связи нуклон-мезонных взаимодействий, будут представлять кинетическую часть энергии симметрии $E_{sym}^{(kin)}$, а слагаемые, содержащие константы связи - потенциальную часть энергии симметрии $E_{sym}^{(pot)}$:

$$E_{sym}^{(kin)}(n_B) = \frac{k_F^2}{6\sqrt{k_F^2 + M_N^{(eff)^2}}}, \quad (13)$$

$$E_{sym}^{(pot)}(n_B) = \frac{n_B}{2} \left\{ \frac{\alpha_p}{4} - \frac{\alpha_\delta M_N^{(eff)^2}}{k_F^2 + M_N^{(eff)^2}} J_{sym} \right\}. \quad (14)$$

Здесь через J_{sym} обозначено выражение

$$J_{sym} = \left[1 + 3\alpha_{\delta} \left(\frac{n_B^{(s)}}{M_N^{(eff)}} - \frac{n_B}{\sqrt{k_F^2 + M_N^{(eff)^2}}} \right) \right]^{-1},$$

$$k_F = (3\pi^2 n_B / 2)^{1/3}, \quad M_N^{(eff)} = M_p^{(eff)}(\tilde{\sigma}, \tilde{\delta} = 0) = M_n^{(eff)}(\tilde{\sigma}, \tilde{\delta} = 0) = m_N - \tilde{\sigma}.$$

Скалярная барионная плотность $n_B^{(s)}$ в (14) является суммой скалярных плотностей протона и нейтрона в симметричной ядерной материи $n_B^{(s)} = n_p^{(s)}(n_B, 0) + n_n^{(s)}(n_B, 0)$:

$$n_B^{(s)} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_F(n_B)} \frac{M_N^{(eff)}}{\sqrt{k^2 + M_N^{(eff)^2}}} k^2 dk. \quad (15)$$

Такое же выражение для энергии симметрии нуклонного вещества можно получить [26,27], основываясь на утверждении теоремы Гугенгольца-Ван Хофа [28,29] о том, что химический потенциал нуклона в асимметричной ядерной материи должен быть равен его энергии Ферми.

Для определения феноменологических констант теории требуется также знание модуля сжимаемости симметричной ядерной материи при плотности насыщения n_0 :

$$K_0 = 9n_0^2 \left. \frac{d^2 E_B(n_B, \alpha)}{dn_B^2} \right|_{\substack{n_B=n_0 \\ \alpha=0}}.$$

Модуль сжимаемости тоже состоит из кинетической и потенциальной частей:

$$K^{(kin)}(n_B) = \frac{3k_F^2}{\sqrt{k_F^2 + M_N^{(eff)^2}}}, \quad (16)$$

$$K^{(pot)}(n_B) = 9n_B \left(\alpha_{\omega} - \frac{\alpha_{\sigma} M_N^{(eff)^2}}{k_F^2 + M_N^{(eff)^2}} J_K \right). \quad (17)$$

Здесь через J_K обозначено выражение

$$J_K = \left[1 + 3\alpha_{\sigma} \left(\frac{n_B^{(s)}}{M_N^{(eff)}} - \frac{n_B}{\sqrt{k_F^2 + M_N^{(eff)^2}}} + \frac{2}{3} g_{\sigma 3} \tilde{\sigma} + g_{\sigma 4} \tilde{\sigma}^2 \right) \right]^{-1}.$$

3. Численные результаты. Для проведения численных расчетов термодинамических величин необходимо определить константы связи, характеризующие взаимодействие нуклонов с мезонными полями. Константы α_{σ} , α_{ω} , $g_{\sigma 3}$ и $g_{\sigma 4}$, соответствующие изоскалярным σ , ω -мезонам, можно определить, используя значения известных параметров симметричного ядерного вещества при насыщении. Мы использовали следующие значения: масса голого

нуклона $m_N = 939.9$ МэВ, плотность ядерного насыщения $n_0 = 0.16$ фм⁻³, эффективная масса нуклона при насыщении $M_0^{(eff)} = 0.78 m_N$, удельная энергия связи $f_0 = -16.3$ МэВ, модуль сжимаемости при насыщении $K_0 = 300$ МэВ. Для определения констант, соответствующих изовекторным δ , ρ -мезонам, нужно использовать значения характеристик асимметричной ядерной материи. Для константы α_δ [20] использовано значение $\alpha_\delta = 2.5$ фм². Для определения константы α_ρ было использовано значение энергии симметрии при насыщении $E_{sym}^{(0)} = 32.5$ МэВ.

Приведенные выше характеристики ядерного вещества воспроизводятся при следующих значениях параметров модели [30]: $\alpha_\sigma = 9.15$ фм², $\alpha_\omega = 4.83$ фм², $\alpha_\delta = 2.5$ фм², $\alpha_\rho = 13.62$ фм², $g_{\sigma 3} = 0.0165$ фм⁻¹ и $g_{\sigma 4} = 0.0132$.

Зная константы связи нуклон-мезонных взаимодействий, а также константы само-взаимодействия σ -поля $g_{\sigma 3}$ и $g_{\sigma 4}$, для разных значений барионной плотности n_B и параметра асимметрии α рассчитаны физические характеристики изотопически-асимметричной ядерной материи, состоящей из протонов и нейтронов.

На рис.1а представлены приходящиеся на один барион энергии $E_B(n_B, \alpha)$ и $E_B(n_B, 0)$, соответственно, для изоспиново-асимметричной и симметричной нуклонной материи в зависимости от барионной плотности n_B и параметра асимметрии α . На рис.1б показана приходящаяся на один барион энергия $\Delta E_B(n_B, \alpha) = E_B(n_B, \alpha) - E_B(n_B, 0)$, обусловленная изоспиновой асимметрией

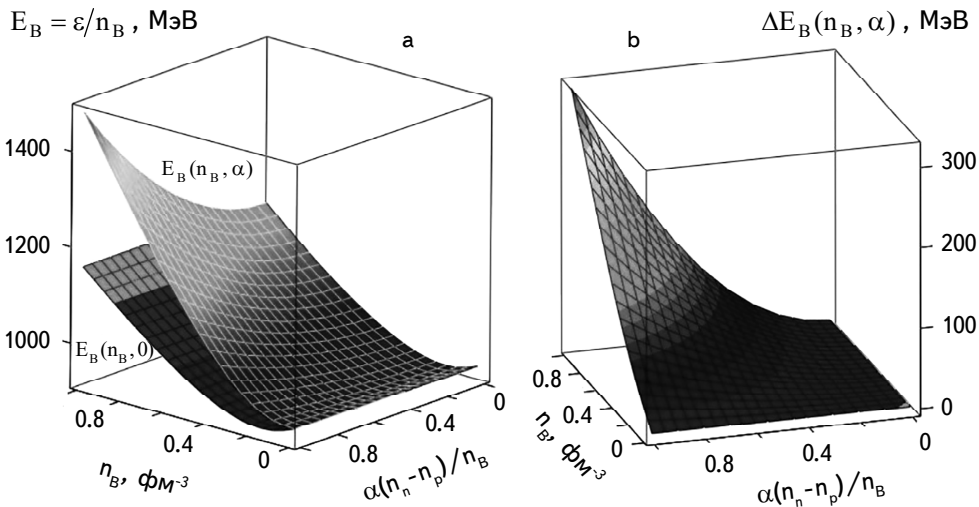


Рис.1. а. Энергия, приходящаяся на один барион $E_B(n_B, \alpha)$ в зависимости от плотности барионного числа n_B и параметра асимметрии α . Нижняя поверхность соответствует функции $E_B(n_B, 0)$. б. Приходящаяся на один барион энергия, обусловленная изоспиновой асимметрией нуклонного вещества $\Delta E_B(n_B, \alpha) = E_B(n_B, \alpha) - E_B(n_B, 0)$ в зависимости от плотности барионного числа n_B и параметра асимметрии α .

нуклонного вещества в зависимости от n_B и α . Как видно из этого рисунка, обусловленная асимметрией энергия $\Delta E_B(n_B, \alpha)$, при фиксированном значении параметра асимметрии α , является монотонно возрастающей функцией барионной плотности n_B .

На рис.2 для значений параметра асимметрии $\alpha = \{0; 0.5; 1\}$ приведены эффективные массы протона и нейтрона в зависимости от плотности барионного числа n_B . Эффективные массы протона и нейтрона, как и следовало ожидать, одинаковы для симметричной нуклонной материи. Расщепление эффективных масс нуклонов обусловлено присутствием поля изовекторного лоренцескалярного δ -мезона. В рассмотренной нами модели эффективная масса протона

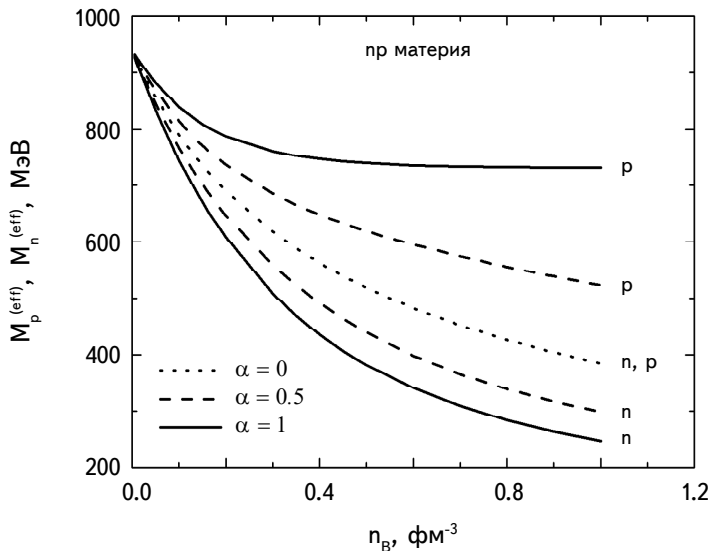


Рис.2. Эффективные массы протона и нейтрона в зависимости от плотности барионного числа n_B при разных значениях параметра асимметрии α .

больше эффективной массы нейтрона. При заданном значении барионной плотности n_B эффективная масса нейтрона уменьшается с увеличением параметра асимметрии, в то время как эффективная масса протона увеличивается. Разность эффективных масс протона и нейтрона при заданном значении барионной плотности n_B растет с ростом параметра асимметрии, достигая своего максимального значения в случае чисто нейтронной материи ($\alpha = 1$).

Зависимость удельной энергии связи $E_{bind}(n_B, \alpha)$ нуклонного вещества от барионной плотности n_B для значений параметра асимметрии $\alpha = \{0; 0.25; 0.5; 0.75; 1\}$ показана на рис.3. Для сравнения на этом же рисунке в виде толстой сплошной линии представлена аналогичная зависимость в случае электрически нейтральной и β -равновесной *прем* материи (материи НЗ). Видно, что в интервале значений барионной плотности $n_B \in [0; 0.8]$,

характерной для материи, имеющей адронную структуру внутри нейтронных звезд, параметр асимметрии α меняется от значения $\alpha \approx 1$ (при $n_B \approx 0$) до значения $\alpha \approx 0.7$ (при $n_B \approx 0.8 \text{ фм}^{-3}$).

На рис.4 приведены эффективные массы протона и нейтрона в зависимости от плотности барионного числа n_B для электрически нейтральной и β -равновесной *прем* материи. Так как с ростом барионной плотности параметр

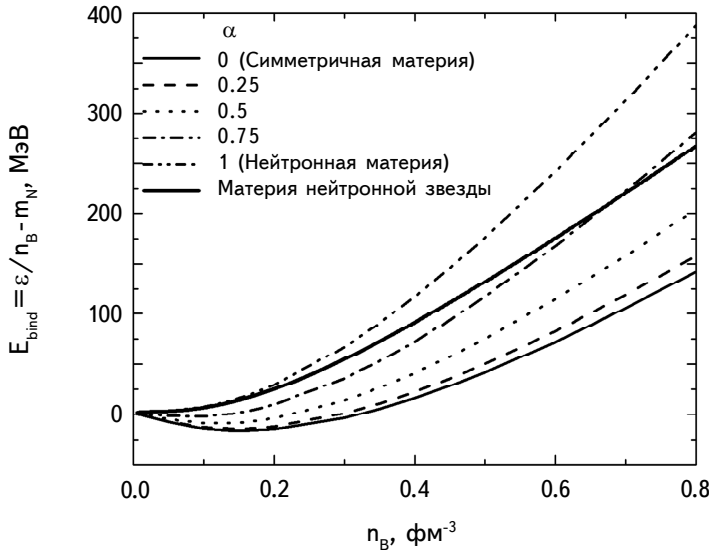


Рис.3. Энергия связи, приходящаяся на один барион в зависимости от плотности барионного числа n_B при разных значениях параметра асимметрии α . Сплошная толстая линия соответствует электрически нейтральной и β -равновесной *прем* материи (материи НЗ).

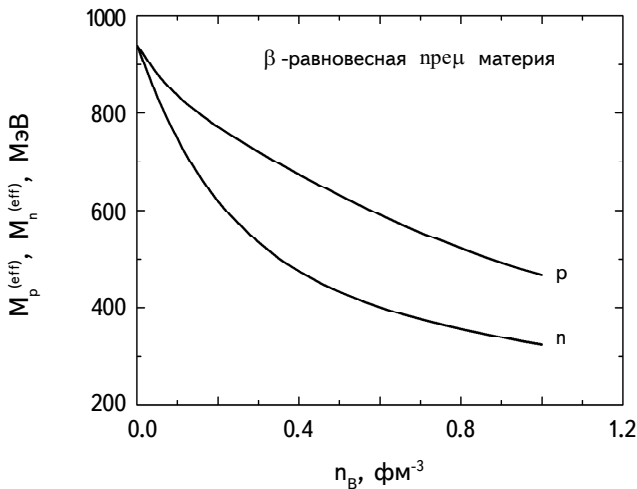


Рис.4. Эффективные массы протона и нейтрона в зависимости от плотности барионного числа n_B для электрически нейтральной и β -равновесной *прем* материи (материи НЗ).

асимметрии в материи НЗ уменьшается (см. рис.3), то при заданном значении барионной плотности n_B разность эффективных масс протона и нейтрона меньше в случае электрически нейтральной и β -равновесной *прем* материи, чем в случае чисто нейтронной материи.

На рис.5а показана зависимость удельной энергии связи E_{bind} от барионной плотности n_B для нейтральной и β -равновесной *прем* материи (материи НЗ). Доля числа протонов $Y_p = n_p/n_B = (1-\alpha)/2$ в зависимости от барионной плотности n_B для материи НЗ представлена на рис.5б. Учитывая, что при больших

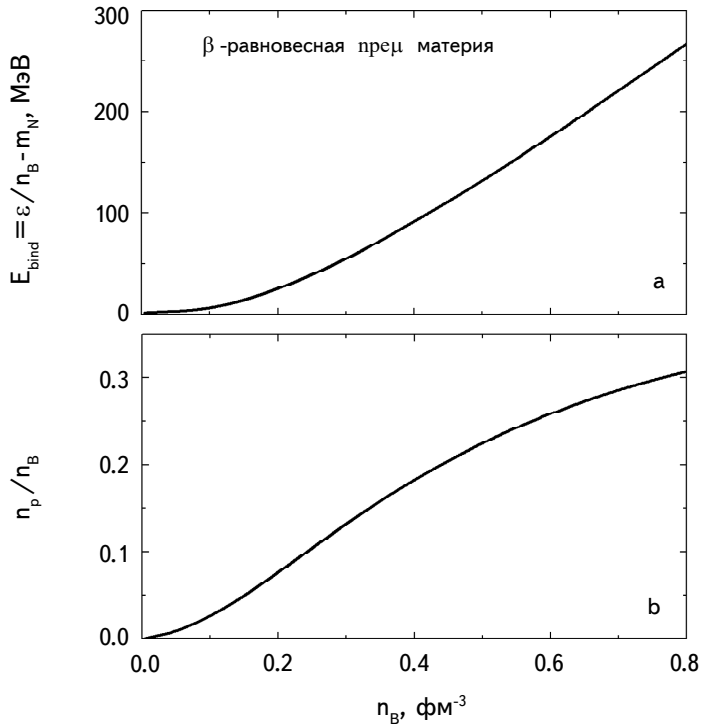


Рис.5. а. Энергия связи, приходящаяся на один барион в зависимости от плотности барионного числа n_B для электрически нейтральной и β -равновесной *прем* материи. б. Доля числа протонов $Y_p = n_p/n_B$ в зависимости от плотности барионного числа n_B для электрически нейтральной и β -равновесной *прем* материи.

плотностях создадутся условия для деконфайнмента кварков и в результате фазового перехода будет образовываться кварковая материя, придем к выводу, что в адронной компоненте нейтронной звезды максимальное значение удельной энергии связи будет порядка 250-300 МэВ. Число протонов в адронной компоненте нейтронной звезды не будет превышать $\sim 30\%$ от числа нуклонов.

На рис.6а представлены зависимости энергии симметрии E_{sym} и ее составляющих $E_{sym}^{(kin)}$ и $E_{sym}^{(pot)}$ от барионной плотности n_B для электрически нейт-

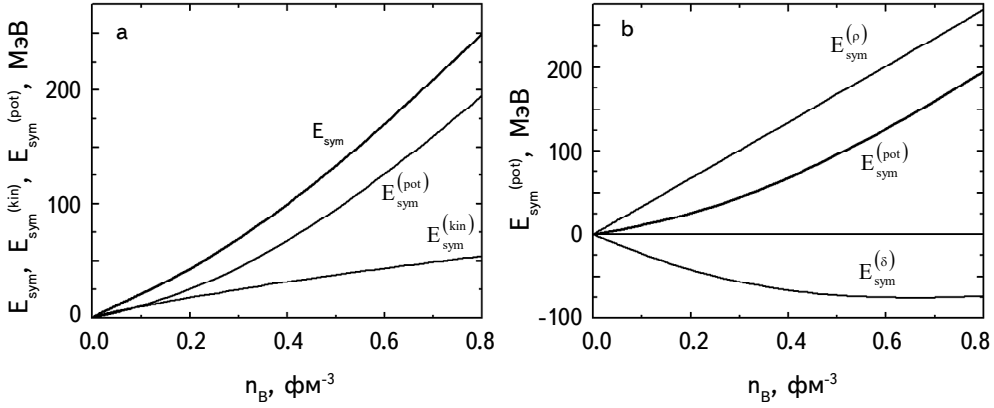


Рис.6. а. Энергия симметрии E_{sym} и ее составляющие $E_{\text{sym}}^{(\text{kin})}$ и $E_{\text{sym}}^{(\text{pot})}$ в зависимости от плотности барионного числа n_B для электрически нейтральной и β -равновесной *нр*м материи. б. Потенциальная часть $E_{\text{sym}}^{(\text{pot})}$ энергии симметрии и ее составляющие $E_{\text{sym}}^{(\delta)}$ и $E_{\text{sym}}^{(\rho)}$ в зависимости от плотности барионного числа n_B для электрически нейтральной и β -равновесной *нр*м материи.

ральной и β -равновесной *нр*м материи. Рис.6б демонстрирует вклады изовекторных δ и ρ -мезонов $E_{\text{sym}}^{(\delta)}$ и $E_{\text{sym}}^{(\rho)}$ в потенциальную часть $E_{\text{sym}}^{(\text{pot})}$ энергии симметрии. Видно, что в области плотностей ниже плотности ядерного насыщения n_0 кинетическая энергия симметрии $E_{\text{sym}}^{(\text{kin})}$ и потенциальная энергия симметрии $E_{\text{sym}}^{(\text{pot})}$ являются величинами одинакового порядка. При больших плотностях потенциальная часть энергии симметрии $E_{\text{sym}}^{(\text{pot})}$ имеет доминирующий вклад в энергию симметрии E_{sym} .

Из рис.6б видно, что изовекторный, лоренцево-векторный ρ -мезон дает положительный вклад $E_{\text{sym}}^{(\rho)}$ в потенциальную часть энергии симметрии $E_{\text{sym}}^{(\text{pot})}$, в то время как аналогичный вклад изовекторного лоренцево-скалярного δ -мезона $E_{\text{sym}}^{(\delta)}$ является отрицательным. При больших плотностях вклад ρ -мезона в потенциальную энергию симметрии $E_{\text{sym}}^{(\rho)}$ становится намного больше абсолютного значения вклада δ -мезона $E_{\text{sym}}^{(\delta)}$.

Как следует из уравнений для средних полей (3), среднее поле $\tilde{\omega}$ при заданном значении барионной плотности n_B не зависит от параметра асимметрии α . Это означает, что среднее поле изоскалярного лоренцево-векторного ω -мезона при заданном значении n_B имеет одну и ту же величину при любом соотношении количеств нейтронов и протонов n_n/n_p . Среднее поле $\tilde{\omega}$ для *нр* материи и электронейтральной и β -равновесной *нр*м материи имеет одинаковую величину при заданном значении n_B . Средние поля $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\delta}$ и $\tilde{\rho}$ из-за зависимости от параметра асимметрии α при заданном значении n_B не будут одинаковыми для *нр* материи и электронейтральной и β -равновесной *нр*м материи (материи НЗ).

На рис.7 представлены средние поля $\tilde{\sigma} = g_{\sigma} \bar{\sigma}$, $\tilde{\omega} = g_{\omega} \bar{\omega}$, $\tilde{\delta} = g_{\delta} \bar{\delta}^{(3)}$ и $\tilde{\rho} = g_{\rho} \bar{\rho}^{(3)}$ обменных мезонов как функции плотности барионного числа n_B для электрически нейтральной и β -равновесной *прем* материи. Средние поля изоскалярных σ и ω -мезонов имеют положительные значения и являются монотонно возрастающими функциями барионной плотности n_B . Средние поля изовекторных δ и ρ -мезонов имеют отрицательные значения. При этом среднее поле изовекторного лоренцево-скалярного δ -мезона является убывающей функцией n_B при значениях $n_B < 0.44 \text{ фм}^{-3}$ и медленно возрастающей функцией n_B при $n_B > 0.44 \text{ фм}^{-3}$. Среднее поле изовекторного, лоренцево-векторного ρ -мезона является монотонно убывающей функцией n_B .

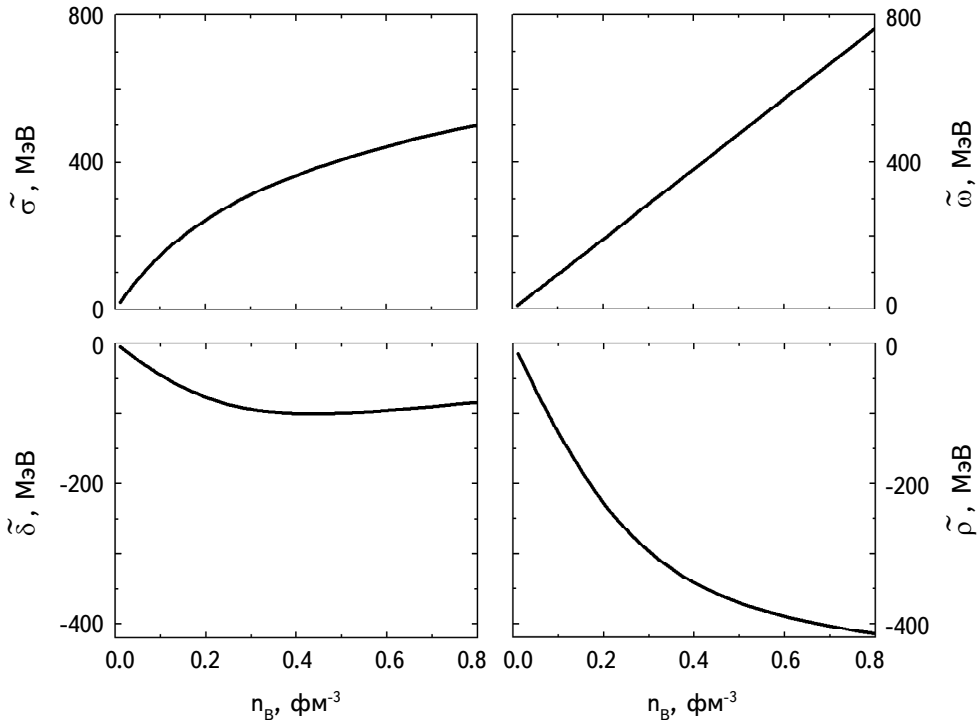


Рис.7. Средние поля обменных мезонов в зависимости от плотности барионного числа n_B для электрически нейтральной и β -равновесной *прем* материи.

4. **Заключение.** В настоящей работе исследованы свойства изоспин-асимметричной холодной нуклонной материи. Была применена релятивистская теория среднего поля, в которой помимо полей σ , ω , ρ обменных мезонов, учтено также изовекторное, лоренцево-скалярное поле δ -мезона. Константы взаимодействия нуклона с мезонами и константы связи $g_{\sigma 3}$ и $g_{\sigma 4}$, характе-

ризующие самовзаимодействие σ -мезона и приводящие в уравнениях движения к нелинейности соответственно второго и третьего порядка выбраны так, чтобы воспроизвести известные значения характеристик симметричного нуклонного вещества при плотности ядерного насыщения n_0 . Модель была применена для изучения свойств как чисто нуклонной np материи, так и электрически нейтральной и β -равновесной ядерной материи, состоящей из нуклонов и заряженных e^- , μ^- лептонов ($npe\mu$ материя). Численно проанализированы зависимости от барионной плотности n_B и параметра асимметрии α таких характеристик np вещества, как приходящаяся на один барион энергия $E_B(n_B, \alpha)$, удельная энергия, обусловленная изоспиновой асимметрией $\Delta E_B(n_B, \alpha)$, эффективные массы протона и нейтрона $M_p^{(eff)}(n_B, \alpha)$, $M_n^{(eff)}(n_B, \alpha)$, удельная энергия связи $E_{bind}(n_B, \alpha)$. Показано, что обусловленная асимметрией энергия $\Delta E_B(n_B, \alpha)$, при фиксированном значении α , является монотонно возрастающей функцией барионной плотности n_B .

Расщепление эффективных масс протона и нейтрона $\Delta M^{(eff)} = M_p^{(eff)} - M_n^{(eff)}$ в рамках нашей модели является положительным и при заданном значении барионной плотности n_B растет с ростом параметра асимметрии. При заданном значении n_B расщепление эффективных масс максимально для чисто нейтронной материи. Заметим, что в настоящее время нет единого мнения относительно того, является ли $\Delta M^{(eff)}$ отрицательным, нулевым или положительным [31].

Для электрически нейтральной и β -равновесной $npe\mu$ материи (материи НЗ) изучены эффективные массы протона и нейтрона $M_p^{(eff)}$, $M_n^{(eff)}$, удельная энергия связи E_{bind} , энергия симметрии E_{sym} , количественная доля протонов $Y_p = n_p/n_B$, а также средние мезонные поля $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\omega}$, $\tilde{\delta}$, $\tilde{\rho}$ в зависимости от барионной плотности n_B . Показано, что при заданном значении n_B расщепление эффективных масс протона и нейтрона $\Delta M^{(eff)}$ у нейтральной и β -равновесной $npe\mu$ материи меньше, чем у чисто нейтронной материи. Имея в виду, что если при больших плотностях будет иметь место фазовый переход от адронной материи к кварковой материи, то максимальное значение удельной энергии связи для адронной компоненты нейтронной звезды будет порядка 250-300 МэВ, число протонов при этом не будет превышать $\sim 30\%$ от числа нуклонов.

Полученные нами результаты для энергии симметрии E_{sym} показывают, что ниже плотности ядерного насыщения кинетическая и потенциальная части энергии симметрии являются величинами одного и того же порядка. При больших плотностях вклад потенциальной энергии симметрии $E_{sym}^{(pot)}$ значительно больше вклада кинетической составляющей $E_{sym}^{(kin)}$. Потенциальная часть энергии симметрии обусловлена обменом изовекторными δ и ρ -мезонами. Вклад δ -мезонов в потенциальную энергию симметрии $E_{sym}^{(\delta)}$ является отрица-

тельным, а вклад ρ -мезонов $E_{sym}^{(\rho)}$ - положительным. При больших плотностях имеет место неравенство $E_{sym}^{(\rho)} > |E_{sym}^{(\delta)}|$.

Работа выполнена в научно-исследовательской лаборатории физики сверхплотных звезд при кафедре прикладной электродинамики и моделирования ЕГУ, финансируемой комитетом по науке Министерства образования, науки, культуры и спорта Республики Армения.

Ереванский государственный университет,
Армения, e-mail: galaverdyan@ysu.am

ISOSPIN-ASYMMETRIC COLD NUCLEAR MATTER IN THE RELATIVISTIC MEAN-FIELD MODEL WITH A SCALAR-ISOVECTOR INTERACTION CHANNEL

G.B.ALAVERDYAN, A.G.ALAVERDYAN

Within the framework of the relativistic mean field theory, in which, in addition to the fields of σ , ω , ρ mesons, the isovector Lorentz scalar field of the δ meson is also taken into account, the properties of isospin-asymmetric cold nuclear matter are studied. The properties of both purely nucleonic np matter depending on the baryon density n_B and the asymmetry parameter α , and the properties of electrically neutral β -equilibrium $npe\mu$ matter depending on the baryon density n_B are studied. For different values of n_B and α , such characteristics of np matter as the energy per baryon, the specific energy due to isospin asymmetry, the effective masses of the proton and neutron, and the specific binding energy are determined. It is shown that the energy caused by the asymmetry, for a fixed value of α , is a monotonically increasing function of the baryon density n_B . For $npe\mu$ matter, the dependences on the baryon density n_B of the effective masses of the proton and neutron $M_p^{(eff)}$, $M_n^{(eff)}$, the specific binding energy E_{bind} , the symmetry energy E_{sym} , the quantitative proton fraction $Y_p = n_p/n_B$, as well as the average meson fields $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\omega}$, $\tilde{\delta}$, $\tilde{\rho}$ are studied.

Keywords: *Mean-field: nucleon matter: neutron star matter: symmetry energy: effective mass: binding energy*

ЛИТЕРАТУРА

1. *A.W.Steiner, M.Prakash, J.M.Lattimer et al.*, Phys. Rep., **411**, 325, 2005.
2. *J.M.Lattimer, M.Prakash*, Phys. Rep, **442**, 109, 2007.
3. *B.-A.Li, P.G.Krastev, D.-H.Wen et al.*, Eur. Phys. J. A, **55**, 117, 2019.
4. *S.Wang, H.Tong, Q.Zhao et al.*, Phys. Rev. C, **106**, 021305, 2022.
5. *S.Choi, T.Miyatsu, M-K.Cheoun et al.*, Astrophys. J., **909**, 156, 2021.
6. *M.Baldo, G.F.Burgio*, Prog. Part. Nucl. Phys., **91**, 203, 2016.
7. *X.Roca-Maza, N.Paar*, Prog. Part. Nucl. Phys., **101**, 96, 2018.
8. *B.-A.Li, B.-J.Cai, W.-J.Xie et al.*, Universe, **7**, 182, 2021.
9. *M.C.Miller, F.K.Lamb, A.J.Dittmann et al.*, Astrophys. J. Lett., **918**, L28, 2021.
10. *B.P.Abbott, R.Abbott, T.D.Abbott et al.*, Phys. Rev. Lett., **121**, 161101, 2018.
11. *B.P.Abbott, R.Abbott, T.D.Abbott et al.*, Phys. Rev. X, **9**, 011001, 2019.
12. *J.D.Walecka*, Ann. Phys., **83**, 491, 1974.
13. *B.D.Serot, J.D.Walecka*, Adv. in Nucl. Phys., **16**, 1, 1986.
14. *B.D.Serot, J.D.Walecka*, Int. J. Mod. Phys. E, **6**, 515, 1997.
15. *J.Boguta, A.R.Bodmer*, Nucl. Phys. A, **292**, 413, 1977.
16. *Y.Sugahara, H.Toki*, Nucl. Phys. A, **579**, 557, 1994.
17. *G.A.Lalazissis, J.Konig, P.Ring*, Phys. Rev. C, **55**, 540, 1997.
18. *H.Mueller, B.D.Serot*, Nucl. Phys. A, **606**, 508, 1996.
19. *S.Kubis, M.Kutschera*, Phys. Lett. B, **399**, 191, 1997.
20. *B.Liu, V.Greco, V.Baran et al.*, Phys. Rev. C, **65**, 045201, 2002.
21. *V.Greco, M.Colonna, M.Di Toro et al.*, Phys. Rev. C, **67**, 015203, 2003.
22. *T.Gaitanos, M.Colonna, M.Di Toro et al.*, Phys. Lett. B, **595**, 209, 2004.
23. *M. Di Toro, A.Drago, T.Gaitanos et al.*, Nucl. Phys. A, **775**, 102, 2006.
24. *G.B.Alaverdyan*, Astrophysics, **52**, 132, 2009.
25. *G.B.Alaverdyan*, Research in Astron. Astrophys., **10**, 1255, 2010.
26. *T.Miyatsu, M.-K.Cheoun, C.Ishizuka et al.*, Phys. Lett. B, **803**, 135282, 2020.
27. *T.Miyatsu, M-K.Cheoun, K.Saito*, Astrophys. J., **929**, 82, 2022.
28. *N.M.Hugenholtz, L. Van Hove*, Physica, **24**, 363, 1958.
29. *P.Czerski, A. De Pace, A.Molinari*, Phys. Rev. C, **65**, 044317, 2002.
30. *G.B.Alaverdyan*, Symmetry, **13**, 124, 2021.
31. *H.-Y.Kong, Y.X.Jun Xu, L.-W.Chen et al.*, Phys. Rev. C, **91**, 047601, 2015.

FERMIONIC VACUUM STRESSES IN MODELS WITH TOROIDAL COMPACT DIMENSIONS

A.A.SAHARIAN^{1,2}, R.M.AVAGYAN^{1,2}, G.H.HARUTYUNYAN¹,
G.H.NIKOGHOSYAN¹

Received 6 March 2024

We investigate vacuum expectation value of the energy-momentum tensor for a massive Dirac field in flat spacetime with a toroidal subspace of a general dimension. Quasiperiodicity conditions with arbitrary phases are imposed on the field operator along compact dimensions. These phases are interpreted in terms of magnetic fluxes enclosed by compact dimensions. The equation of state in the uncompact subspace is of the cosmological constant type. It is shown that, in addition to the diagonal components, the vacuum energy-momentum tensor has nonzero off-diagonal components. In special cases of twisted (antiperiodic) and untwisted (periodic) fields the off diagonal components vanish. For untwisted fields the vacuum energy density is positive and the energy-momentum tensor obeys the strong energy condition. For general values of the phases in the periodicity conditions the energy density and stresses can be either positive or negative. The numerical results are given for a Kaluza-Klein type model with two extra dimensions.

Keywords: *topological Casimir effect: Dirac field: toroidal compactification*

1. Introduction. The field theoretical models in background spacetimes with compact dimensions appear in a number of theories in fundamental physics like string theories, supergravities and Kaluza-Klein theories. The quantum creation of universe with a compact space has been considered in [1-3]. In this type of models the probability of inflation in the early stages of the universe expansion is not exponentially small. The effects caused by the non-trivial topology of the universe on cosmological scales are discussed, for example, in [4,5]. They include the ghost images of galaxies and quasars, cosmological magnetic fields and observable effects on cosmic microwave background. Physical models formulated on background geometries with nontrivial topology also appear in a number of condensed matter physics systems. Examples are topological structures of graphene, like carbon nanotubes and nanoloops. The long wavelength excitations of the electronic subsystem in those structures are described by an effective field theory (Dirac model, see [6,7]) with 2-dimensional spatial topologies $R^1 \times S^1$ and $T^2 = S^1 \times S^1$, respectively.

In quantum field theory the nontrivial spatial topology is a source of a number of interesting effects. In particular, the periodicity conditions along compact dimensions modify the spectrum of quantum fluctuations of fields and, as a

consequence, the expectation values of the physical characteristics are shifted by an amount that depends on the geometry and topology of the compact subspace. This general phenomenon is known as the topological Casimir effect (see [8-12]). The vacuum energy in the topological Casimir effect depends on the size of compact dimensions and this provides a stabilization mechanism for the corresponding moduli fields. The topological Casimir energy may also appear as the source of the accelerated expansion of uncompact subspace playing the role of the dark energy at recent epoch of the Universe expansion (see, for example, [13-18]).

An important physical characteristic for charged fields is the expectation value of the current density. For a relatively simple model of toroidal compactification in flat spacetime (for quantum field theory in models with toroidal spatial dimensions see, for example, [19]), in references [20-23] it has been shown that the nontrivial phases in the periodicity conditions along compact dimensions give rise to nonzero currents along those dimensions. The phases can be interpreted in terms of magnetic fluxes enclosed by those dimensions. The currents in the compact subspace are sources of magnetic fields having components along uncompactified dimensions. The dependence of the vacuum energy density and diagonal stresses for a massive fermionic field in the same model of flat spacetime with a part of spatial dimensions compactified on a torus has been studied in [24]. In the present paper we show that, in addition to the diagonal components, the vacuum expectation value (VEV) of the energy-momentum tensor may have nonzero off-diagonal components (vacuum stresses) in the compact subspace.

The paper is organized as follows. In the next section we present the problem setup and the eigenmodes for a Dirac field obeying the quasiperiodicity conditions along compact dimensions. The general formulas for the vacuum energy density and stresses are obtained in section 3. The asymptotic and numerical analysis of the VEVs in a model with two compact dimensions is presented in section 4. The main results are summarized in section 5.

2. Problem setup. The background geometry we are going to consider is a flat spacetime with topology $M^{p+1} \times T^q$, where M^{p+1} is $(p+1)$ -dimensional Minkowski spacetime covered by the Cartesian coordinates $(z^0 = t, \mathbf{z}_p) = (z^0, z^1, \dots, z^p)$, and $T^q = (S^1)^q$ is a q -dimensional torus with the coordinates $\mathbf{z}_q = (z^{p+1}, \dots, z^D)$. The length of the l th compact dimension will be denoted by L_l and, hence, $0 \leq z^l \leq L_l$, $l = p+1, \dots, D$. The volume of the compact subspace is expressed as $V_q = L_{p+1} \dots L_D$. For the uncompact dimensions, as usual, we have $z^l \in (-\infty, +\infty)$. The line element has the standard Minkowskian form

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - d\mathbf{z}^2, \quad \mathbf{z}^2 = (\mathbf{z}_p, \mathbf{z}_q), \quad (1)$$

and $\eta_{\mu\nu}$ is the Minkowski metric tensor in Cartesian coordinates.

We are interested in the vacuum stresses for a massive Dirac field $\psi(x)$, $x=(t, \mathbf{z})$, induced by compactification of a part of spatial dimensions. The field equation reads

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (2)$$

where γ^μ , $\mu=0, 1, \dots, D$, are $N \times N$ Dirac matrices with N given by $N = 2^{[(D+1)/2]}$ and $[a]$ stands for the integer part of a . The background geometry has non-trivial topology and in order to fix the dynamics uniquely the periodicity conditions along the compact dimensions have to be specified for the field operator. We impose quasiperiodicity conditions

$$\psi(t, \mathbf{z}_p, \dots, z^l + L_l, \dots, z^D) = e^{i\alpha_l} \psi(t, \mathbf{z}_p, \dots, z^l, \dots, z^D), \quad (3)$$

with phases $\alpha_l = \text{const}$ and $l = p+1, \dots, D$. The special cases of periodic and antiperiodic fields correspond to $\alpha_l = 0$ and $\alpha_l = \pi$ (untwisted and twisted fields, respectively).

The VEV of the energy-momentum tensor $T_{\mu\nu}$ for the fermionic field is expressed in terms of the mode sum over a complete set of normal modes $\psi_\beta^{(\pm)}(x)$, where β is the set of quantum numbers specifying the solutions to the field equation and upper/lower signs correspond to the positive/negative energy modes. Denoting the VEV by $\langle T_{\mu\nu} \rangle = \langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle$, with $|0\rangle$ being the vacuum state, the mode sum is expressed as

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = -\frac{i}{4} \sum_\beta \sum_{j=+,-} j [\bar{\psi}_\beta^{(j)}(x) \gamma_{(\mu} \partial_{\nu)} \psi_\beta^{(j)}(x) - (\partial_{(\mu} \bar{\psi}_\beta^{(j)}(x)) \gamma_{\nu)} \psi_\beta^{(j)}(x)], \quad (4)$$

where $\gamma_\mu = \eta_{\mu\nu} \gamma^\nu$, $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma^0$ is the Dirac adjoint and the parentheses including the indices mean symmetrization over those indices. The symbolic notation $\sum_\beta$ stands for the summation over discrete components of the collective index β and the integration over the continuous ones. The problem under consideration has planar symmetry and it is natural to take the normal modes corresponding to plane waves.

Taking the chiral representation of the Dirac matrices,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^l = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_l \\ -\sigma_l^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

the positive and negative energy wave functions with momentum $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_D)$ and energy $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{k^2 + m^2}$ have the form [22]

$$\psi_\beta^{(\pm)}(x) = \left[\frac{1 + m/\varepsilon_{\mathbf{k}}}{2(2\pi)^D V_q} \right]^{1/2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{z} \mp i\varepsilon_{\mathbf{k}} t} \begin{pmatrix} \left(-\frac{\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}}{\varepsilon_{\mathbf{k}} + m} \right)^{(1\mp 1)/2} w_\chi^{(\pm)} \\ \left(\frac{\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}^\dagger}{\varepsilon_{\mathbf{k}} + m} \right)^{(1\pm 1)/2} w_\chi^{(\pm)} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

where $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_D)$. Here, the quantum number $\chi = 1, 2, \dots, N/2$ enumerates the polarization degrees of freedom, $w_\chi^{(\pm)}$ are one-column matrices with $N/2$ rows and l th element $w_{\chi l}^{(\pm)} = \delta_{\chi l}$. We will decompose the momentum into two parts, $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_q)$, where $\mathbf{k}_p = (k_1, \dots, k_p)$ and $\mathbf{k}_q = (k_{p+1}, \dots, k_D)$ are the parts in uncompact and compact subspaces. For the components k_l , $l = 1, 2, \dots, p$, one has $-\infty < k_l < +\infty$. The eigenvalues of the components k_l along compact dimensions are quantized by the periodicity conditions (3):

$$k_l = \frac{2\pi n_l + \alpha_l}{L_l}, \quad n_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (7)$$

for $l = p + 1, \dots, D$.

The phases in the conditions (3) can be interpreted in terms of the magnetic flux for a vector gauge field enclosed by compact dimensions. The representation described above corresponds to the gauge with zero vector potential, $(\psi, A_\mu) = (\psi, 0)$. Let us pass to a new gauge with the fields (ψ', A'_μ) , where A'_μ has nonzero constant components along compact dimensions: $A'_\mu = 0$, $\mu = 0, 1, \dots, p$ and $A'_l = \text{const}$ for $l = p + 1, \dots, D$. The gauge transformation has the form

$$\psi' = \psi e^{-ie\lambda}, \quad A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda, \quad \lambda = b_\mu x^\mu,$$

with constant b_μ and e being the charge of the Dirac field. Choosing $b_\mu = 0$, $\mu = 0, 1, \dots, p$ and $b_l = A'_l$ for $l = p + 1, \dots, D$, for $A_\mu = 0$ in the new gauge we get $(\psi', A'_\mu) = (\psi e^{-ieA'_\mu x^\mu}, A'_\mu)$. Taking $A'_l = \alpha_l / (eL_l)$, we see that the new field obeys the periodicity condition with $\alpha'_l = 0$. Hence, the initial problem with a zero gauge field and quasiperiodicity condition (3) is transformed to a gauge with periodic boundary conditions for the field and with a gauge field having constant components along compact dimensions. In this interpretation the phases can be expressed as $\alpha_l = -2\pi\Phi_l/\Phi_0$, where $\Phi_0 = 2\pi/e$ is the flux quantum and $\Phi_l = -A'_l L_l$ is the formal magnetic flux enclosed by the compact dimension x^l . That flux takes on real meaning in models where the space under consideration is embedded in a space of higher dimension. Examples are the braneworld models and carbon nanotubes. In the latter case the Dirac field describing the electronic subsystem of graphene lives in a 2-dimensional space with topology $R^1 \times S^1$ and that space is embedded in a 3-dimensional Euclidean space. The magnetic flux is located inside the tube.

3. Vacuum energy density and stresses. With the mode functions (6), the VEV of the energy-momentum tensor is evaluated by using the formula (4). The mode sums for the energy density and vacuum stresses are transformed to

$$\langle T_{00} \rangle = -\frac{N}{2V_q} \int \frac{d\mathbf{k}_p}{(2\pi)^p} \sum_{\mathbf{n}_q \in \mathbb{Z}^q} \varepsilon_{\mathbf{k}}, \quad \langle T_{\mu\nu} \rangle = -\frac{N}{2V_q} \int \frac{d\mathbf{k}_p}{(2\pi)^p} \sum_{\mathbf{n}_q \in \mathbb{Z}^q} \frac{k_\mu k_\nu}{\varepsilon_{\mathbf{k}}}, \quad (8)$$

for $\mu, \nu = 1, 2, \dots, D$, and $\mathbf{n} \cdot \langle T_{0\nu} \rangle = 0$. The component $\langle T_{00} \rangle$ corresponds to the energy density and it is presented as the sum of the zero-point energies for elementary oscillators. The expressions (8) for the diagonal components have been considered in [24]. The expressions in (8) are divergent and in [24] two different methods have been used in order to find the expressions for the renormalized VEVs. The first one is based on the Abel-Plana summation formula and the second one uses the zeta function technique [9,25]. We will follow the second approach.

For the regularization of the mode sums we introduce the zeta function of a complex variable s as

$$\zeta(s) = \frac{1}{V_q} \int \frac{d\mathbf{k}_p}{(2\pi)^p} \sum_{\mathbf{n}_q \in \mathbb{Z}^q} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{-2s}, \quad (9)$$

where the term $\mathbf{n}_q = 0$ has to be excluded from the sum in the special case $\alpha_l = 0$, $l = p+1, \dots, D$. After integration over $\mathbf{k}_p$ and by using the generalized Chowla-Selberg formula [26,27] for the resulting series, the zeta function is decomposed as [24] $\zeta(s) = \zeta_M(s) + \zeta_t(s)$, where $\zeta_M(s)$ is the corresponding function for the Minkowski spacetime with trivial topology and the contribution $\zeta_t(s)$ is induced by nontrivial topology. Introducing the vectors $\alpha_q = (\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_D)$ and $\mathbf{L}_q = (L_{p+1}, \dots, L_D)$ in the compact subspace, the topological part is expressed as

$$\zeta_t(s) = \frac{2^{1-s} m^{D-2s}}{(2\pi)^{D/2} \Gamma(s)} \sum'_{\mathbf{n}_q \in \mathbb{Z}^q} \cos(\mathbf{n}_q \alpha_q) f_{D/2-s}(mg(\mathbf{L}_q, \mathbf{n}_q)), \quad (10)$$

where the prime on the summation sign means that the term $\mathbf{n}_q = 0$ should be excluded and we have introduced the functions

$$f_\nu(x) = \frac{K_\nu(x)}{x^\nu}, \quad g(\mathbf{L}_q, \mathbf{n}_q) = \left(\sum_{i=p+1}^D L_i^2 n_i^2 \right)^{1/2}, \quad (11)$$

with $K_\nu(x)$ being the modified Bessel function of the second kind.

An alternative representation for the zeta function, convenient in the asymptotic analysis of the off-diagonal stress, is obtained from (10) by using the formula (2.40) from [22]. It is given by the formula

$$\begin{aligned} \zeta_t(s) = & \zeta_{p+2,q-2}(s) + \frac{2^{1-s} m^{D-2s}}{(2\pi)^{p/2+1} \Gamma(s) V_{q-2}} \sum'_{\mathbf{n}_q \in \mathbb{Z}^q} \cos(n_\mu \alpha_\mu) \\ & \times \cos(n_\nu \alpha_\nu) \varepsilon_{q-2}^{p-2s+2} f_{p/2-s+1} \left(\sqrt{n_\mu^2 L_\mu^2 + n_\nu^2 L_\nu^2} \varepsilon_{\mathbf{n}_{q-2}} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

where $\zeta_{p+2,q-2}(s)$ is the zeta function in the model of topology $M^{p+3} \times T^{q-2}$ with decompactified dimensions x^μ and x^ν . Here, M^{p+3} stands for $(p+3)$ -dimensional Minkowski spacetime with trivial topology. The prime on the summation

sign in (12) means that the term $n_\mu = n_\nu = 0$ is excluded from the summation and we have defined

$$\varepsilon_{\mathbf{n}_{q-2}} = \left(\sum_{l=p+1, \neq \mu, \nu}^D k_l^2 + m^2 \right)^{1/2}. \quad (13)$$

The function $\zeta_{p+2, q-2}(s)$ is given by a formula similar to (10) with the summation over $\mathbf{n}_{q-2} \in \mathbf{Z}^{q-2}$.

The background geometry is flat and the renormalization is reduced to the subtraction of the Minkowskian VEV. The renormalized energy density is expressed as $\langle T_0^0 \rangle_t = -N \zeta_t(-1/2)/2$. For the diagonal components of the vacuum stresses along uncompact dimensions one gets (no summation over μ) $\langle T_\mu^\mu \rangle_t = \langle T_0^0 \rangle_t$, $\mu = 1, 2, \dots, p$. The diagonal vacuum stresses in the compact subspace are found by using the relation (no summation over μ) $\langle T_\mu^\mu \rangle_t = (L_\mu/V_q) \partial_{L_\mu} (V_q \langle T_0^0 \rangle_t)$, $\mu = p+1, \dots, D$. In this way, from (10) for the diagonal component we find [24] (no summation over μ)

$$\langle T_\mu^\mu \rangle_t = \frac{Nm^{D+1}}{(2\pi)^{(D+1)/2}} \sum'_{\mathbf{n}_q \in \mathbf{Z}^q} \cos(\mathbf{n}_q \boldsymbol{\alpha}_q) F_{(\mu)}(mg(\mathbf{L}_q, \mathbf{n}_q)), \quad (14)$$

with the functions

$$F_{(\mu)}(x) = \begin{cases} f_{(D+1)/2}(x), & \mu = 0, 1, 2, \dots, p \\ f_{(D+1)/2}(x) - m^2 L_\mu^2 n_\mu^2 f_{(D+3)/2}(x), & \mu = p+1, \dots, D. \end{cases} \quad (15)$$

The corresponding expressions in the case of periodic conditions, $\alpha_l = 0$, $l = p+1, \dots, D$, are obtained from (14) with $\cos(\mathbf{n}_q \boldsymbol{\alpha}_q) = 1$. In this case the vacuum energy density is positive and for the diagonal stresses one has (no summation over l) $\langle T_l^l \rangle_t < \langle T_0^0 \rangle_t$, $l = p+1, \dots, D$. As it will be shown below, for periodic conditions the off-diagonal components vanish. By using the relation

$$x^2 f_{v+1}(x) = f_{v-1}(x) + 2v f_v(x), \quad (16)$$

it can be seen that $\sum_{l=1}^D \langle T_l^l \rangle_t < \langle T_0^0 \rangle_t$. Hence, the vacuum energy-momentum tensor for a fermionic field with periodic conditions obey the strong energy condition. For twisted fields with $\alpha_l = \pi$, $l = p+1, \dots, D$, one has $\cos(\mathbf{n}_q \boldsymbol{\alpha}_q) = (-1)^{n_{p+1} + \dots + n_D}$.

The result (14) shows that the vacuum stresses in the uncompact subspace are equal to the energy density, $\langle T_\mu^\mu \rangle_t = \langle T_0^0 \rangle_t$, $\mu = 1, \dots, p$ (no summation over μ). Of course, this is a consequence of the Lorentz invariance in that subspace. By taking into account that for the vacuum effective pressure along the direction x^μ one has $P_\mu = -\langle T_\mu^\mu \rangle_t$, we see that the equation of state for the vacuum in the uncompact subspace is of the cosmological constant type. The models with the

topological Casimir energy as the source of the accelerated expansion are based on this property.

For a massless fermionic field the general result (14) is reduced to (no summation over μ)

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_t = \frac{N}{(2\pi)^{(D+1)/2}} \Gamma \frac{D+1}{2} \sum'_{\mathbf{n}_q \in \mathbf{Z}^q} \frac{\cos(\mathbf{n}_q \boldsymbol{\alpha}_q)}{g^{D+1}(\mathbf{L}_q, \mathbf{n}_q)} F_{(\mu)}^{(0)}(\mathbf{L}_q, \mathbf{n}_q), \quad (17)$$

where $F_{(\mu)}^{(0)}(\mathbf{L}_q, \mathbf{n}_q) = 1$ for $\mu = 0, 1, 2, \dots, p$, and

$$F_{(\mu)}^{(0)}(\mathbf{L}_q, \mathbf{n}_q) = 1 - \frac{(D+1)n_{\mu}^2 L_{\mu}^2}{g^2(\mathbf{L}_q, \mathbf{n}_q)}, \quad (18)$$

for $\mu = p+1, \dots, D$. In this special case the vacuum energy-momentum tensor is traceless $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_t = 0$.

Here we are interested in the off-diagonal components. For $\mu = 0, 1, 2, \dots, p$ and $\nu \neq \mu$ one gets $\langle T_{\mu\nu} \rangle_t = 0$. The possible nonzero components $\langle T_{\mu\nu} \rangle_t$ correspond to $\mu, \nu = p+1, \dots, D$. In order to use the zeta function, we note that the following relation takes place

$$\frac{k_{\nu} k_{\mu}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} = \frac{L_{\mu} L_{\nu}}{3(2\pi)^2} \partial_{\alpha_{\mu}} \partial_{\alpha_{\nu}} \varepsilon_{\mathbf{k}}^3. \quad (19)$$

This allows to write the off-diagonal components in the form

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = -\frac{NL_{\mu} L_{\nu}}{6(2\pi)^2} \partial_{\alpha_{\mu}} \partial_{\alpha_{\nu}} \frac{1}{V_q} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^p} \sum_{\mathbf{n}_q \in \mathbf{Z}^q} \varepsilon_{\mathbf{k}}^3 = -\frac{NL_{\mu} L_{\nu}}{6(2\pi)^2} \partial_{\alpha_{\mu}} \partial_{\alpha_{\nu}} \zeta\left(-\frac{3}{2}\right). \quad (20)$$

By using the formula (10), for the topological part we get

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_t = \frac{m^{D+3} NL_{\mu} L_{\nu}}{(2\pi)^{(D+1)/2}} \sum'_{\mathbf{n}_q \in \mathbf{Z}^q} n_{\mu} n_{\nu} \cos(\mathbf{n}_q \boldsymbol{\alpha}_q) f_{(D+3)/2}(mg(\mathbf{L}_q, \mathbf{n}_q)). \quad (21)$$

Note that in this representation we can make the replacement

$$\cos(\mathbf{n}_q \boldsymbol{\alpha}_q) \rightarrow \sin(n_{\mu} \alpha_{\mu}) \sin(n_{\nu} \alpha_{\nu}) \cos(\mathbf{n}_{q-2} \boldsymbol{\alpha}_{q-2}), \quad (22)$$

where $\mathbf{n}_{q-2} \boldsymbol{\alpha}_{q-2} = \sum_{l \neq \mu, \nu} n_l \alpha_l$. This replacement explicitly shows that the off-diagonal component $\langle T_{\mu\nu} \rangle_t$, is an even periodic function of the phases $\alpha_l, l \neq \mu, \nu$, with the period equal to 2π , and an odd periodic function of α_{μ} and α_{ν} with the same period. Hence, without the loss of generality, we can assume that $|\alpha_{\mu}| \leq \pi$. For a massless field, by taking into account that $f_{\nu}(x) = 2^{\nu-1} \Gamma(\nu) x^{-2\nu}$ for $x \ll 1$, one obtains

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_t = \frac{NL_{\mu} L_{\nu}}{\pi^{(D+1)/2}} \Gamma \frac{D+3}{2} \sum'_{\mathbf{n}_q \in \mathbf{Z}^q} n_{\mu} n_{\nu} \frac{\cos(\mathbf{n}_q \boldsymbol{\alpha}_q)}{g^{D+3}(\mathbf{L}_q, \mathbf{n}_q)}. \quad (23)$$

An equivalent expression for the off-diagonal stresses is obtained by using the representation (12) for the zeta function in (20). The first term in the right-hand side of (12) does not depend on α_μ and α_ν and, hence, it does not contribute to the stress. The following expression is obtained:

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle_t = & -\frac{NL_\mu^2 L_\nu^2}{(2\pi)^{(p+3)/2} V_q} \sum'_{\mathbf{n}_q \in \mathbf{Z}^q} n_\mu n_\nu \sin(n_\mu \alpha_\mu) \\ & \times \sin(n_\nu \alpha_\nu) \varepsilon_{\mathbf{n}_{q-2}}^{p+5} f_{(p+5)/2} \left(\sqrt{n_\mu^2 L_\mu^2 + n_\nu^2 L_\nu^2} \varepsilon_{\mathbf{n}_{q-2}} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

For $q = 2$ ($p = D - 2$) one has $\varepsilon_{\mathbf{n}_{q-2}} = m$ and the formula is reduced to

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_t = -\frac{Nm^{D+3} L_\mu L_\nu}{(2\pi)^{(D+1)/2}} \sum'_{n_\mu, n_\nu = -\infty}^{+\infty} n_\mu n_\nu \sin(n_\mu \alpha_\mu) \sin(n_\nu \alpha_\nu) f_{(D+3)/2} \left(m \sqrt{n_\mu^2 L_\mu^2 + n_\nu^2 L_\nu^2} \right). \quad (25)$$

In the special case under consideration this coincides with (21).

The special case of the results corresponding to $D = 2$ describes the properties of the ground state for the electronic subsystem in graphene nanotubes and nanoloops (toroidal nanotubes) described by the effective Dirac model. For nanotubes one has $(p, q) = (1, 1)$ and for nanoloops $(p, q) = (0, 2)$. For metallic nanotubes and in the absence of the threading magnetic flux the phase along the periodic condition is zero, $\alpha_l = 0$. Depending on the chiral vector in semiconductor nanotubes two values of the phases are realized with $\alpha_l = \pi/3$ and $\alpha_l = 2\pi/3$. The corresponding analysis for the diagonal components of the ground state energy-momentum tensor can be found in [24]. The off-diagonal component for nanoloops is obtained from (25) with $D = 2$ and $N = 2$. In this special case one has $f_{5/2} = \sqrt{\pi/2} x^{-5} e^{-x} (3 + 3x + x^2)$.

4. Asymptotic analysis and numerical results. Let us consider some asymptotics of general formulae. For large values of the length of the compact dimension z^l , $l \neq \mu, \nu$, $L_l \gg L_\mu, L_\nu$, the dominant contribution in (21) comes from the term with $n_l = 0$ and the leading order term coincides with the off-diagonal stress in the model where the coordinate z^l is decompactified. In the opposite limit $L_l \ll L_\mu, L_\nu$, it is more convenient to use the representation (24). The behavior of the stress is essentially different depending on whether the phase α_l is zero or not. For $\alpha_l = 0$ the main contribution to the VEV $\langle T_{\mu\nu} \rangle_t$ comes from the modes with $n_l = 0$. To the leading order we get

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_t \approx \frac{N \langle T_{\mu\nu} \rangle_t^{(M^{p+1} \times T^{q-1})}}{N_{D-1} L_l}, \quad (26)$$

where $N_{D-1} = 2^{[D/2]}$ and $\langle T_{\mu\nu} \rangle_t^{(M^{p+1} \times T^{q-1})}$ is the corresponding VEV in D -dimensional spacetime with topology $M^{p+1} \times T^{q-1}$ which is obtained from the geometry

described by (1) excluding the compact dimension x^l . For $\alpha_l \neq 0$ and assuming that $|\alpha_l| < \pi$, again, the dominant contribution give the modes $n_l=0$. The argument of the function $f_{(p+5)/2}(x)$ is large and we can use the corresponding asymptotic of the modified Bessel function. This shows that in the limit under consideration the off-diagonal stress $\langle T_{\mu\nu} \rangle_t$ is suppressed by the factor $\exp\left(-|\alpha_l|\sqrt{L_\mu^2 + L_\nu^2}/L_l\right)$.

For large values of the lengths L_μ and L_ν compared to the other length scales $1/m$ and L_l , $l \neq \mu, \nu$, by using (24) we can see that the topological contribution $\langle T_{\mu\nu} \rangle_t$ is exponentially suppressed by the factor $\exp\left(-\varepsilon_{(0)}\sqrt{L_\mu^2 + L_\nu^2}\right)$, where $\varepsilon_{(0)} = \varepsilon_{\mathbf{n}_{q-2}}|_{\mathbf{n}_{q-2}=0}$ and $0 < |\alpha_l| < \pi$. For small values of L_μ and L_ν the dominant contribution in (24) comes from large values of $|n_l|$ and we can replace the corresponding summations by the integration in accordance with

$$\frac{L_\mu L_\nu}{V_q} \sum'_{\mathbf{n}_{q-2} \in \mathbb{Z}^{q-2}} \varepsilon_{\mathbf{n}_{q-2}}^{p+5} f_{(p+5)/2}(b \varepsilon_{\mathbf{n}_{q-2}}) \rightarrow \int \frac{d^{q-2} \mathbf{y}}{(2\pi)^{q-2}} (\mathbf{y}^2 + m^2)^{(p+5)/2} f_{(p+5)/2}(b \sqrt{\mathbf{y}^2 + m^2}), \quad (27)$$

where $b = \sqrt{n_\mu^2 L_\mu^2 + n_\nu^2 L_\nu^2}$ and $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{q-2})$ with $-\infty < y_l < +\infty$. After integration over the angular part, the integral over $|\mathbf{y}|$ is evaluated by using the formula from [28]. In this way it can be seen that the leading term in the expansion of $\langle T_{\mu\nu} \rangle_t$ coincides with (25). Additionally assuming that $m\sqrt{L_\mu^2 + L_\nu^2} \ll 1$, in the leading approximation we get

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_t \approx -\frac{NL_\mu L_\nu}{\pi^{(D+1)/2}} \Gamma \frac{D+3}{2} \sum_{n_\mu, n_\nu=-\infty}^{+\infty} n_\mu n_\nu \frac{\sin(n_\mu \alpha_\mu) \sin(n_\nu \alpha_\nu)}{(n_\mu^2 L_\mu^2 + n_\nu^2 L_\nu^2)^{(D+3)/2}} \quad (28)$$

Note that the right-hand side presents the off-diagonal component of the vacuum energy-momentum tensor for a massless fermionic field in the model $(p, q) = (D-2, 2)$ with compact dimensions x^μ and x^ν .

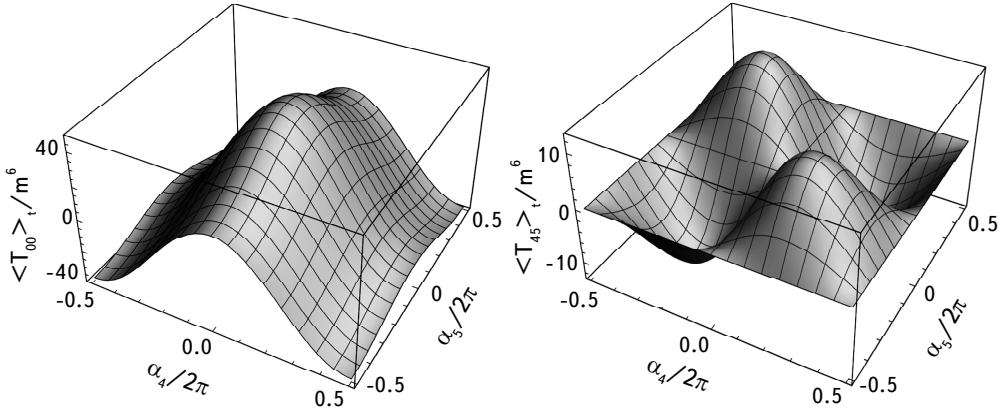


Fig.1. The expectation values of the vacuum energy density and off-diagonal stress on the phases of the periodicity conditions in the model $(p, q) = (3, 2)$ with $mL_4 = 0.5$, $mL_5 = 0.6$.

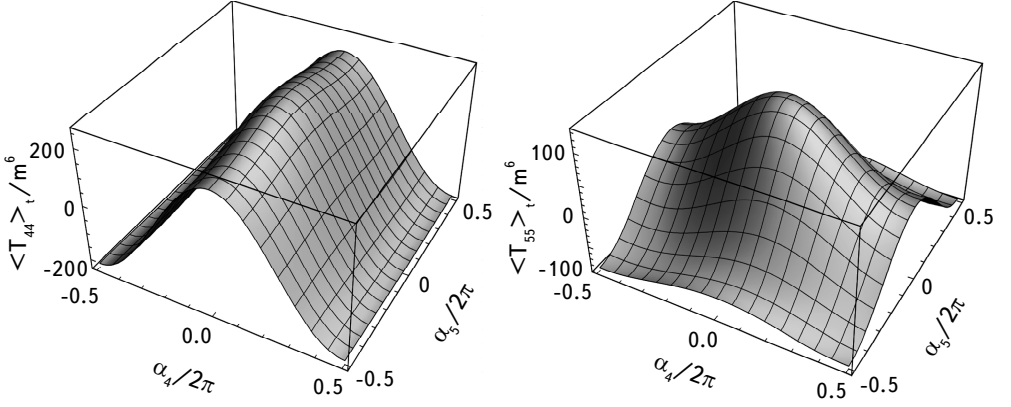


Fig.2. The same as in Fig.1 for the stresses along the compact dimensions x^4 (left panel) and x^5 (right panel).

We will present the numerical analysis for the $D=5$ model with two compact dimensions x^4 and x^5 . This corresponds to the set $(p, q) = (3, 2)$. By taking into account that in [24] the numerical results for the energy density and diagonal stresses are given for the model $D=4$ with a single compact dimension, the analysis will be given for those quantities as well. We start from the dependence of the expectation values on the phases α_4 and α_5 . Fig.1 presents that dependence of the energy density (left panel) and off-diagonal stress $\langle T_{45} \rangle_t$ (right panel) for $mL_4 = 0.5$ and $mL_6 = 0.6$.

The corresponding results for the diagonal stresses along compact dimensions are given in Fig.2. As already mentioned above, the energy density and the diagonal stresses are even periodic functions of α_4 and α_5 , whereas the off-

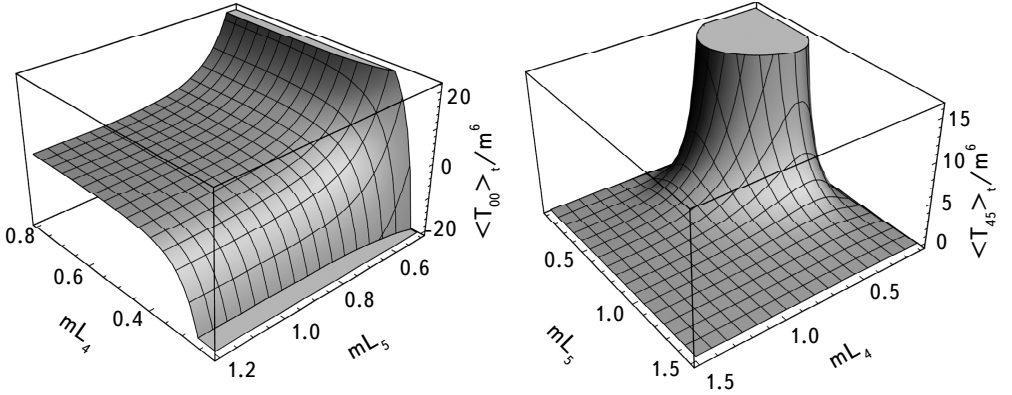


Fig.3. The expectation values of the vacuum energy density and off-diagonal stress on the length of compact dimensions in the model $(p, q) = (3, 2)$. For the left panel we have taken $\alpha_4 = \pi/2$, $\alpha_5 = 0$ and for the right panel $\alpha_4 = \pi/2$, $\alpha_5 = -0.6\pi$.

diagonal component is an odd periodic function of those phases. Depending on the specific values of the phases, all the components can be either positive or negative. The energy density $\langle T_{00} \rangle_t$ and the vacuum pressures $\langle T_{44} \rangle_t$ and $\langle T_{55} \rangle_t$ are positive for the values of the phases near $(\alpha_4, \alpha_5) = (0, 0)$ (periodic conditions) and negative near $(\alpha_4, \alpha_5) = (\pi, \pi)$ (antiperiodic conditions).

The dependence of the VEVs of the components for the energy-momentum tensor on the lengths of compact dimensions is presented in Fig.3 (energy density and off-diagonal component) and Fig.4 (stresses along compact dimensions). For

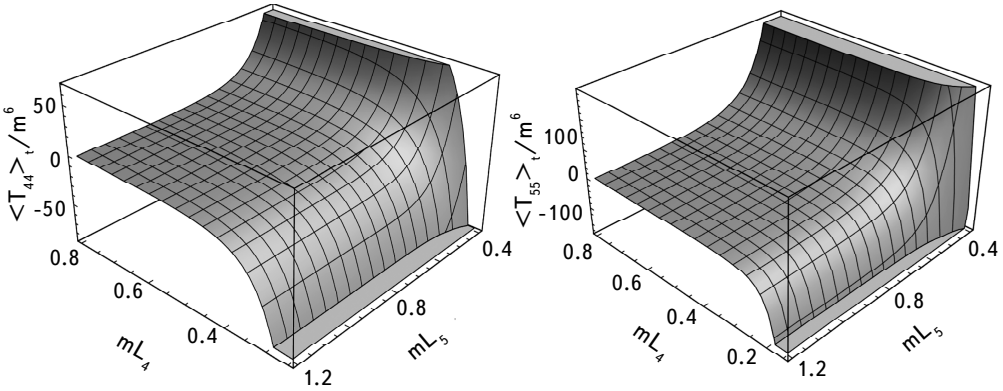


Fig.4. The vacuum stresses along the compact dimensions x^4 (left panel) and x^5 (right panel) versus the lengths of those dimensions. The graphs are plotted for $\alpha_4/2\pi = 0.25$, $\alpha_5/2\pi = 0$.

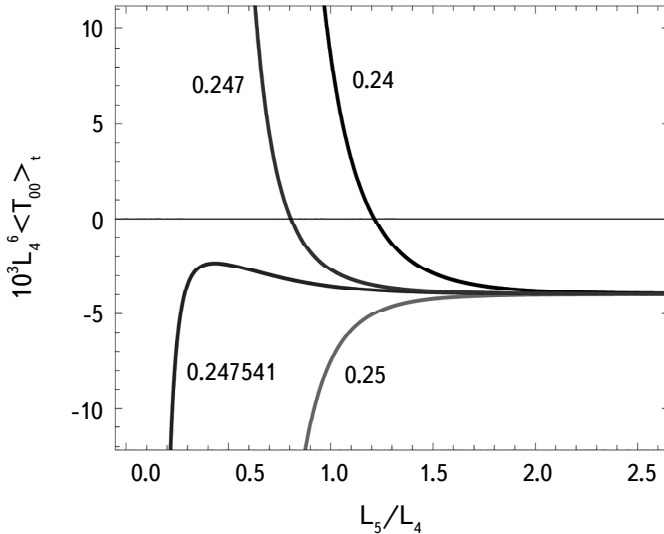


Fig.5. The energy density for a massless fermionic field in the model $(p, q) = (3, 2)$ as a function of the ratio L_5/L_4 for fixed value $\alpha_4 = \pi/2$. The numbers near the graphs are the values of $\alpha_5/2\pi$.

the diagonal components we have taken the phases $\alpha_4 = \pi/2$ and $\alpha_5 = 0$ and the off-diagonal component is plotted for $\alpha_4 = \pi/2$, $\alpha_5 = -0.6\pi$.

From the given graphs, one can get the impression that the energy density is a monotonic function of the lengths of the compact dimensions. However, this is not the case even for a massless field. In order to demonstrate that and by taking into account that the VEVs for a massless field approximate the results for massive fields in the limit of small values of the lengths of compact dimensions, in Fig.5 we have plotted the dimensionless quantity $L_4^6 \langle T_{00} \rangle_t$ as a function of the ratio L_5/L_4 . The corresponding expression is given by the right-hand side of (28). The graphs are plotted for $\alpha_4 = \pi/2$ and the numbers near the curves are the values of the ratio $\alpha_5/2\pi$. For large values of L_5/L_4 all the curves tend to the corresponding result for the energy density in the model where the direction x^5 is decompactified $L_5 \rightarrow \infty$.

5. Conclusions. Continuing the investigations started in [24] we have studied the effects of nontrivial topology on the local characteristics of the fermionic vacuum. A toroidal compactification of a part of spatial dimensions in $(D+1)$ -dimensional flat spacetime is considered. In addition to the diagonal components, studied in [24], the vacuum energy-momentum tensor has an off-diagonal components having indices along compact dimensions. Those components vanish for periodic ($\alpha_l = 0$) and antiperiodic ($\alpha_l = \pi$) conditions. In the first case the vacuum energy-momentum tensor for a fermionic field obeys the strong energy condition. For general values of the phases that is not the case. The phases in the periodicity conditions can be interpreted in terms of magnetic fluxes enclosed by compact dimensions. The VEVs are periodic functions of magnetic fluxes with the period of flux quantum. The diagonal components are even functions of the phases α_l . The off-diagonal component $\langle T_{\mu\nu} \rangle_t$, $\mu \neq \nu$, $\mu, \nu = p+1, \dots, D$, is an even function of α_l with $l \neq \mu, \nu$, and odd function of the phases α_μ and α_ν . The vacuum stresses in the uncompact subspace are isotropic and the corresponding equation of state is of the cosmological constant type. Depending on the values of the phases the components of the vacuum energy-momentum tensor can be either positive or negative. For small values of the lengths L_μ and L_ν , the off-diagonal component is approximated by the corresponding result for a massless field in the model with $q=2$ and compact subspace (x^μ, x^ν) (see (28)). The numerical analysis of the obtained results is presented for the $D=5$ with $(p, q) = (3, 2)$.

We have considered the effects of the nontrivial topology on the local properties of the fermionic vacuum. In the presence of boundaries additional contributions are induced in the VEVs of physical observables (the boundary-induced Casimir effect). The effects of two planar boundaries with the bag boundary conditions on the Dirac field in the geometry under consideration have

been discussed in [29,30]. The results in the special case of 2-dimensional space are applied to finite length carbon nanotubes. The fermionic condensate and the VEV of the energy-momentum tensor in toroidally compactified de Sitter spacetime are studied in [31].

Acknowledgments. The work was supported by the grant No. 21AG-1C047 of the Higher Education and Science Committee of the Ministry of Education, Science, Culture and Sport RA.

¹ Institute of Physics, Yerevan State University, Yerevan, Armenia, e-mail: saharian@ysu.am

² Institute of Applied Problems of Physics NAS RA, Yerevan, Armenia

ФЕРМИОННЫЕ ВАКУУМНЫЕ НАТЯЖЕНИЯ В МОДЕЛЯХ С ТОРОИДАЛЬНО КОМПАКТНЫМИ ИЗМЕРЕНИЯМИ

А.А.СААРЯН^{1,2}, Р.М.АВАКЯН^{1,2}, Г.Г.АРУТЮНЯН¹, Г.Г.НИКОГОСЯН¹

Исследовано вакуумное среднее тензора энергии-импульса массивного поля Дирака в плоском пространстве-времени с тороидальным подпространством произвольной размерности. На оператор поля вдоль компактных измерений накладываются условия квазипериодичности с произвольными фазами. Эти фазы интерпретируются в терминах магнитных потоков, пронизывающих компактные измерения. Уравнение состояния в некомпактном подпространстве имеет тип космологической постоянной. Показано, что вакуумный тензор энергии-импульса помимо диагональных компонентов содержит ненулевые недиагональные компоненты. В частных случаях скрученных (антипериодических) и нескрученных (периодических) полей недиагональные компоненты обращаются в нуль. Для нескрученных полей плотность энергии вакуума положительна, а тензор энергии-импульса удовлетворяет сильному энергетическому условию. При общих значениях фаз в условиях периодичности плотность энергии и натяжения могут быть как положительными, так и отрицательными. Численные результаты приведены для модели типа Калуцы-Клейна с двумя дополнительными измерениями.

Ключевые слова: *топологический эффект Казимира; поле Дирака; тороидальная компактификация*

REFERENCES

1. *Y.B.Zeldovich, A.A.Starobinsky*, Sov. Astron. Lett., **10**, 135, 1984.
2. *Yu.P.Goncharov, A.A.Bytsenko*, Class. Quantum Grav., **4**, 555, 1987.
3. *A.Linde*, J. Cosmol. Astropart. Phys., **10**, 004, 2004.
4. *M.Lachièze-Rey, J.-P.Luminet*, Phys. Rep., **254**, 135, 1995.
5. *J.Levin*, Phys. Rep., **365**, 251, 2002.
6. *V.P.Gusynin, S.G.Sharapov, J.P.Carbotte*, Int. J. Mod. Phys. B, **21**, 4611, 2007.
7. *A.H.Castro Neto, A.H.Castro Neto, N.M.R.Peres et al.*, Rev. Mod. Phys., **81**, 109, 2009.
8. *V.M.Mostepanenko, N.N.Trunov*, The Casimir Effect and Its Applications, Clarendon, Oxford, 1997.
9. *E.Elizalde, S.D.Odintsov, A.Romeo et al.*, Zeta Regularization Techniques with Applications, World Scientific, Singapore, 1994.
10. *K.A.Milton*, The Casimir Effect: Physical Manifestation of Zero-Point Energy, World Scientific, Singapore, 2002.
11. *M.Bordag, G.L.Klimchitskaya, U.Mohideen et al.*, Advances in the Casimir Effect, Oxford University Press, New York, 2009.
12. Casimir Physics, edited by *D.Dalvit, P.Milonni, D.Roberts, F. da Rosa*, Lecture Notes in Physics, Vol. 834, Springer-Verlag, Berlin, 2011.
13. *K.A.Milton*, Gravitation Cosmol., **9**, 66, 2003.
14. *E.Elizalde*, J. Phys. A, **39**, 6299, 2006.
15. *B.Green, J.Levin*, J. High Energy Phys., **11**, 2007, 096.
16. *P.Burikham, A.Chatrabhuti, P.Patcharamaneepakorn et al.*, J. High Energy Phys., **07**, 013, 2008.
17. *A.A.Saharian, A.L.Mkhitarian*, Eur. Phys. J. C, **66**, 295, 2010.
18. *P.Wongjun*, Eur. Phys. J. C, **75**, 6, 2015.
19. *F.C.Khanna, A.P.C.Malbouisson, J.M.C.Malbouisson et al.*, Phys. Rep., **539**, 135, 2014.
20. *S.Bellucci, A.A.Saharian, V.M. Bardeghyan*, Phys. Rev. D, **82**, 065011, 2010.
21. *E.R.Bezerra de Mello, A.A.Saharian*, Phys. Rev. D, **87**, 045015, 2013.
22. *S.Bellucci, E.R.Bezerra de Mello, A.A.Saharian*, Phys. Rev. D, **89**, 085002, 2014.
23. *S.Bellucci, A.A.Saharian, N.A.Saharyan*, Eur. Phys. J. C, **75**, 378, 2015.
24. *S.Bellucci, A.A.Saharian*, Phys. Rev. D, **79**, 085019, 2009.
25. *K.Kirsten*, Spectral Functions in Mathematics and Physics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2001.
26. *E.Elizalde*, Commun. Math. Phys., **198**, 83, 1998.
27. *E.Elizalde*, J. Phys. A, **34**, 3025, 2001.
28. *I.S.GradshTEyn, I.M.Ryzhik*, Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, New York, 2007.
29. *S.Bellucci, A.A.Saharian*, Phys. Rev. D, **80**, 105003, 2009.
30. *E.Elizalde, S.D.Odintsov, A.A.Saharian*, Phys. Rev. D, **83**, 105023, 2011.
31. *A.A.Saharian*, Class. Quantum Grav., **25**, 165012, 2008.

DOI: 10.54503/0571-7132-2024.67.2-259

RE-EXAMINING BERMAN'S PARAMETRIZATION OF THE HUBBLE PARAMETER IN THE CONTEXT OF LATE-TIME ACCELERATION

K.R.MISHRA¹, R.KUMAR¹, S.K.J.PACIF²

Received 27 April 2024

Accepted 10 June 2024

In this paper, we have revisited the Berman's idea of the variation of Hubble parameter. While previously explored in the context of Λ -varying cosmologies, where scale factor variations yield linear universe expansion, this parametrization has undergone extensive scrutiny. Our investigation, however, explores into its implications in the context of late-time cosmic acceleration, within the framework of classical general relativity, adopting the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) spacetime as our background metric. Our analysis offers a precise solution to Einstein's field equations (EFEs) in a model-independent way, affording a thorough assessment of both geometrical and physical model parameters. Additionally, this study supplements its findings with graphical representations of the evolving cosmological parameters across flat, closed, and open universe scenarios, all subject to constraints derived from the model parameters. In synthesizing these results, we shed light on the intricate interplay between cosmic acceleration, dark energy, and the parametrization of the Hubble parameter, thereby providing valuable insights into the fundamental mechanics of our universe.

Keywords: *cosmic acceleration: dark energy: cosmological parametrization: Hubble parameter*

1. Introduction. Before 1916, the prevailing belief was that gravity constituted an intrinsic quality of objects, exerting a consistent, immediate force over extensive distances. Nonetheless, Einstein's theory of general relativity (GR) marked a significant shift in scientific understanding. GR addressed the enigma of Mercury's precise behavior by revealing that gravity was not a mysterious force acting remotely in the backdrop of space and time. Instead, it emerged as a consequence of the curvature of the underlying space-time framework. The fundamental tenet of GR asserts that the shortest distance between any two remote objects in space is invariably curved, forming the basis for GR's framework built upon this curved geometry.

Over the past 100 years, the perspective of scientists about the universe has completely changed as a result of Einstein's theory of gravity. Many phenomena may be described analytically using Einstein's field equations (EFEs), and this theory, that had been a mystery for decades, suddenly fitted the evidence. After

100 years, there are still several problems with Einstein's general relativity, including its failure to explain the Big Bang, the age of the universe, the singularity within black holes, and many others [1]. Understanding the curvature singularity, geodesic incompleteness, and b-incompleteness is one of GR's toughest hurdles. Several individual develops of the universe have generated a great deal of implications and hypothesis in the area of GR. Therefore, developing a better theory is one of the main goals of physics. Throughout the last century, there have been numerous theoretical and observational problems with Einstein's theory. However, new gravitational wave observations and a black hole picture improve GR foundation. So, we are motivated here just to discover late expansion of the universe in the context of GR.

During the previous many years, one of the important problems in theoretical physics and, more broadly, cosmology has been determining the mysterious nature of the universe's two dominant components, dark energy and dark matter. The physical cause of the late-time cosmic acceleration is the greatest open challenge in cosmology today. Explaining the various statistical observational data sets revealed the physical mechanism [2-11]. Many models of dark energy consider the presence of an additional, undetected field that is perhaps responsible for the universe's rapid expansion. However, some reasonable hypotheses also include an infrared modification to the theory of general relativity [12-14]. The evolution of the current cosmos is consequently governed by dark energy, which makes up about two third of the total energy density of the universe.

According to the literature, Einstein's cosmological constant Λ , which was first proposed in 1917, serves as the best and most straightforward candidate among these various research options for dark energy. This implies that the repulsive nature of Λ is responsible for the universe's acceleration with the equation of state $\omega = -1$. This genuine candidate, however, suffers from a long-standing cosmological constant problem as well as the constant equation of state. In Einstein field equations, the term cosmological constant Λ describes the intrinsic energy density of the vacuum, which is the most interesting candidate of dark energy (DE). The mathematical expression Λ , on the other hand, indicates a significant difference between theoretical and observational predictions [15]. As a result of the variety caused by the fine-tuning issue and the cosmic coincidence problem associated with CDM, many DE models [16-18] have been developed.

As is well known, the EoS parameter is the relationship between energy density and pressure i.e. $\omega = p/\rho$. The decelerated and accelerated expansion of the universe are described by the EoS parameter. It classifies the various cosmological phases as follows: If $\omega = 1/3$ the model denotes the radiation-dominated phase, while $\omega = 0$ denotes the matter-dominated phase. The present study makes an effort to address late-time cosmic acceleration on a Friedmann-Lemaitre-Robertson-

Walker (FLRW) background. The Einstein field equations in the FLRW background contain two independent equations with three unknowns (energy density ρ , pressure p , and scale factor a) that can be resolved by assuming the equation of state. The system becomes insecure when DE, an additional degree of freedom, is added. This inconsistency in the literature can be resolved in a variety of ways. Here, we use a model-independent method, also referred to as cosmological parametrization, to find the exact solution of the field equations.

To fit data to the cosmic evolution of the universe, the model-independent technique (or cosmological parametrization) of reconstructing a cosmological model with or without dark energy has been used in the literature. Nowadays, there is a lot of interest in the model-independent approach used in the framework of some DE candidates, which was first discussed by Starobinsky. In the literature, a wide range of parametrization schemes [19] have been suggested to describe the evolution of universe, including the transition from early deceleration to late acceleration. There are also other parametrization schemes, such as density, pressure, deceleration, Hubble and scale factor parametrization and others. As a result, the goal of this paper is to represent a specific parametrization of the Hubble parameter that better explains cosmic dynamics and provides simpler constraints than any other cosmological parameter.

The structure of the work is as follows: In Section 1, a brief introduction is presented, addressing issues related to GTR and dark energy. Section 2 covers the derivation of field equations, solution techniques, and offers a geometric interpretation of the model obtained in the same section. In Section 3, we discuss into the dynamics of the model, analyzing physical parameters and describing the evolution during the RD and MD eras of the universe. Additionally, graphical representations of the evolution of cosmological parameters are provided. In Section 4.1, we also discussed some kinematic properties of model. The work concludes with our findings in Section 5.

2. Field equations and solution. Let us first assume that the universe is homogeneous and isotropic. So, as a background metric, we will use the FLRW spacetime in the following form:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (1)$$

where $a(t)$ denotes the universe's scale factor, k is the curvature parameter assumes the values 0, 1, or -1, which corresponds to flat, closed and open universe respectively, r , θ and ϕ are spherical polar coordinates, t is the cosmic time. Here, we choose units in such a way that $8\pi G = c = 1$.

The matter source in the universe is provided by the total energy-momentum tensor (EMT) given by the equation,

$$T_{\mu\nu}^{Total} = (\rho_{Total} + p_{Total})u_\mu u_\nu + p \rho_{Total} g_{\mu\nu}. \quad (2)$$

The energy momentum tensor $T_{\mu\nu}^{Total}$ represents the combined energy momentum of the two energy components in the universe. These components consist of the total energy density ρ_{Total} , which is the sum of the energy densities ρ and ρ_{de} corresponding to ordinary matter and dark energy, respectively. Additionally, the total pressure p_{Total} is the sum of the pressures p and p_{de} , where p represents the combined pressure of radiation and matter. Again, $\rho = \rho_r + \rho_m$ and $p = p_r + p_m$, where the suffixes r and m denote radiation and matter components, respectively. The suffix de signifies dark energy in these expressions.

The equation that incorporates the total energy-momentum tensor within the framework of Einstein's field theory is,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}^{Total} \quad (3)$$

yield two independent equations as follows,

$$\rho_{Total} = 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3 \frac{k}{a^2}, \quad (4)$$

$$p_{Total} = -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2}, \quad (5)$$

where an overhead dot ($\dot{\cdot}$) represents ordinary derivative with respect to cosmic time t only. We believe that the interaction between two matter components are natural. From equations (4) and (5), one can easily derive the equation of continuity as

$$\dot{\rho}_{Total} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho_{Total} + p_{Total}) = 0. \quad (6)$$

The matter content in the universe is not properly known but it can be categorized with the equation of state. Here, we consider the usual barotropic equation of state for normal (/ordinary) matter

$$p = w\rho, \quad (7)$$

where, $w=1/3$ for radiation component and $w=0$ for pressure-less dust component in the universe.

We address the cosmic history for different phases of evolution by solving these equations, specifically examining the early RD era subsequent to the late MD era. The system of equations presented in equations (4)-(7) yields only three independent equations, while we have four variables in play: a , ρ , ρ_{de} , and p_{de} . To attain a deterministic solution, we require an additional equation. In the scientific literature, numerous methods have been proposed to resolve the field equations and introduce the necessary supplementary equation. One such approach is the

model-independent approach, which entails considering a functional form for any cosmological parameter as a supplementary condition. Within this framework, a wide array of parameterization schemes [19] have been explored in the past few decades.

In the subsequent section, we delve into this approach, highlighting the idea of cosmological parametrization that has been under consideration. We then focus on one well-established parameterization to tackle the field equations and conduct a more in-depth analysis.

2.1. *Berman's law of variation of H* . The issue of the Hubble parameter dependence and its implications for cosmological models is of paramount importance in contemporary cosmology. For example, the problem of Hubble tension underscores the need for novel approaches and theoretical frameworks to reconcile observational data with theoretical predictions. According to Alan Sandage, "cosmology is the search of two parameters H_0 and q_0 ". Also, in a particular model, the Hubble function regulates the dynamics of the universe. Moreover, the complicity of getting exact solution to the complicated field equations can be made simple without violating the background physics is the model-independent way, where any cosmological parameter (e.g. H , q , a , p , ρ) are allowed to consider as functions of time or redshift with some free parameters (model parameters). Detailed idea is discussed in some literature [19-22]. Our research aims to contribute to this ongoing dialogue by providing a simplified yet insightful model that can shed light on potential solutions to this discrepancy. Moreover, the reference to the work of Bisnovatyi-Kogan and Nikishin [23] highlights the diversity of approaches within the field and the richness of possible avenues for exploration. By incorporating their insights and building upon existing research, we aspire to develop a more comprehensive understanding of cosmological phenomena. In literature, numerous physical justifications and incentives exist for exploring the dynamics of dark energy models in a manner independent of specific models [24-30]. Additionally, it aids in investigating dark energy without relying on any specific cosmological model, apart from adhering to the cosmological principle. The scientific literature contains numerous instances and pieces of evidence for examining the behavior of dark energy models in a model-independent way. In this section, we follow the identical concept of cosmological parametrization and explicitly address the field equations while discussing the universe's behavior during different stages of its evolution. Many researchers have explored various parametrizations of cosmological parameters to describe specific phenomena in the universe, such as the transition from early inflation to deceleration and from deceleration to late-time acceleration. These parametrizations allow model parameters to be constrained by observational data. The Hubble

parameter, denoted as H , stands out as one of the most vital cosmic parameters for understanding the rate of cosmic expansion, offering comprehensive insights into cosmic history. In this context, we examine a straightforward parametrization of the Hubble parameter, as referenced in source [31].

$$H(a) = Da^{-n}, \quad (8)$$

where $D > 0$, $n \geq 0$ are constants (call them model parameter).

Using the definition of Hubble parameter $H = \dot{a}/a$, equation (8) yield the scale factor as an explicit time variation as;

$$a(t) = (Dnt + C)^{1/n}, \quad (9)$$

where C is constant of integration. We observe that the scale factor behaves as a linear function and is influenced by two model parameters, namely, n and D , which govern its evolution. As time approaches zero ($t \rightarrow 0$), we can establish that $a(0)$ equals $C^{(1/n)}$. Let us denote this as a^i (where i represents the initial value at $t \rightarrow 0$). This signifies a nonzero initial value for the scale factor.

2.2. Geometrical interpretation of model. In cosmology, the scale factor represents the relative size of the universe at different times. It is a crucial parameter in describing the expansion of the universe in models like the FLRW metric, which is a fundamental solution to Einstein's equations in general relativity. The first derivative of the scale factor, $\dot{a}$ represents the rate at which the universe is expanding at a given time. A positive value for $\dot{a}$ indicates an expanding universe, while a negative value suggests a contracting universe. The second derivative of the scale factor, describes how the rate of expansion (or contraction) is changing with time. This parameter is crucial in understanding the dynamics of the universe. In the context of the standard cosmological model (Λ CDM model), the behavior of $\ddot{a}$ determines the acceleration or deceleration of the cosmic expansion.

The first and second derivatives of scale factor with respect to time are given by

$$\dot{a} = D(Dnt + C)^{1/n-1} \quad (10)$$

and

$$\ddot{a} = (1-n)D^2(Dnt + C)^{1/n-2}. \quad (11)$$

At the initial time, denoted as $t=0$, the universe possesses velocities and accelerations represented by $\dot{a}^{(i)} = D(c)^{1/n-1}$ and $\ddot{a}^{(i)} = (n-1)D^2(c)^{1/n-2}$. These values indicate that the model under consideration begins with a finite volume, a finite velocity, and a finite acceleration. Expressions for the Hubble parameter and deceleration parameter in cosmic time t can be derived from equation (9).

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = D(Dnt + C)^{-1} \quad (12)$$

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = n-1. \quad (13)$$

Equation (13) demonstrates that the deceleration parameter, as cited in [32], remains constant over time, signifying time-independence throughout the evolutionary process. A negative deceleration parameter ($q < 0$) suggests a rapid expansion of the universe, while a positive value ($q > 0$) indicates a slowdown. The acceleration observed in the later stages of the universe aligns with the explanation of SNeIa data, whereas the deceleration phase plays a crucial role in the cosmic evolution responsible for structure formation. In our considered model $q = 0$ implies a coasting universe (an expanding universe without any acceleration and deceleration). This type of model also capable of explaining some observational data to a certain redshift.

From equation (12), we can see that as $t \rightarrow 0$, $H^{(i)} = D/C$, which is constant. Also, $H(t)$ is a decreasing function of time as $t \rightarrow \infty$, $H(t)$ becomes zero.

3. Physical interpretation of model. Equations (4) and (5) with the help of (7) can be written as

$$\rho + \rho_{de} = 3H^2 + 3\frac{k}{a^2}, \quad (14)$$

$$w\rho + p_{de} = (2q-1)H^2 - \frac{k}{a^2}. \quad (15)$$

We can note that the known functions of cosmic time t in the system of equations mentioned above are on the right-hand side, involving time-dependent functions of a , q , H as specified in (9), (12), (13). On the left-hand side, there are three unknown functions, namely ρ , ρ_{de} , p_{de} . The general equation of state for dark energy can be expressed as,

$$\omega_{de} = \frac{p_{de}}{\rho_{de}}. \quad (16)$$

The parameter ω_{de} can either remain constant or, more commonly, vary with time as the universe expands. The time-dependent nature of ω_{de} has led to the development of numerous dark energy (DE) cosmological models. The characteristics of dark energy, where the equation of state parameter ω_{de} is unknown, still lack a comprehensive understanding. Astrophysical observations indicate that the effective equation of state parameter ω_{eff} for scalar field models falls within the range of $-1.48 < \omega_{eff} < -0.72$ [33-35]. Analyzing observational data, we find a slight preference for dark energy (DE) models in which ω_{eff} has recently crossed the value of -1 [36,37]. For detailed investigations into dark energy and its candidates, please refer to references [38-40]. When considering dark energy within the framework of the Λ CDM model, which aligns with observational data, the

parameter ω_{de} remains a constant value of -1. This is why Einstein's cosmological constant serves as a suitable candidate for dark energy. Consequently, we persist in examining the cosmological constant as a potential dark energy candidate. In this scenario, solving equations (14) and (15) yields the expressions for the energy density of matter (including radiation) and the density of dark energy.

$$\rho = \frac{2}{1+w} \left[(1+q)H^2 + \frac{k}{a^2} \right], \quad (17)$$

$$\rho_{de} = \frac{1}{1+w} \left[(1+3w-2q)H^2 + (1+3w)\frac{k}{a^2} \right]. \quad (18)$$

We can now explore the behavior of the acquired model at various stages of the evolution of the universe in two different scenarios within the FLRW geometry: flat ($k=0$), closed ($k=1$), and open ($k=-1$).

3.1. Radiation dominated universe. In this case, we have $\omega=1/3$ and $\rho \approx \rho_r$. Therefore from equation (17) and (18) the expression for radiation energy density and dark energy density can be written as

$$\rho_r = \frac{3}{2} \left[(1+q)H^2 + \frac{k}{a^2} \right] \quad (19)$$

and

$$\rho_{de} = \frac{3}{2} \left[(1-q)H^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (20)$$

In view of equation (9), (12) and (13), the above equations can be written as,

$$\rho_r = \frac{3}{2} \left[\frac{D^2 n}{(Dnt+C)^2} + \frac{k}{(Dnt+C)^{2/n}} \right] \quad (21)$$

$$\rho_{de} = \frac{3}{2} \left[\frac{(2-n)D^2}{(Dnt+C)^2} + \frac{k}{(Dnt+C)^{2/n}} \right]. \quad (22)$$

Equations (21) and (22) describe the progression of energy densities during the radiation-dominated era, but their validity does not extend to the Planck epoch. As the cosmic time approaches zero ($t \rightarrow 0$), the approximations for ρ_r^i and ρ_{de}^i are given by $\rho_r^i \approx \frac{3}{2} \left[\frac{D^2 n}{C^2} + \frac{k}{C^{2/n}} \right]$ and $\rho_{de}^i \approx \frac{3}{2} \left[\frac{(2-n)D^2}{C^2} + \frac{k}{C^{2/n}} \right]$. These expressions imply that $\rho_r^{(i)} > 0$ at the outset, provided $C \neq 0$, and $\rho_{de}^{(i)} > 0$ under the conditions $n < 2$ and $C \neq 0$ for a flat or closed universe.

Examining equations (21) and (22), it becomes evident that the positivity condition for ρ and ρ_{de} holds true for the specified values of n , C , and D in the cases of flat ($k=0$) and closed ($k=1$) geometries. However, for an open geometry ($k=-1$), the positivity condition for ρ and ρ_{de} does not hold with the

given values of n , C , and D . Fig.1, 2 illustrate the dynamic evolution of physical parameters, specifically the radiation energy density ρ_r and dark energy density ρ_{de} , for particular model parameter choices: $n=0.86$, $n=1.23$, $D=0.1$, and an integration constant $C=1.2$. We have chosen some particular values of these model parameters as an exemplification. Although they can be constrained through some data analysis (e.g. [41]), we here try to figure out the early and late evolution of the cosmological parameters graphically.

The correlation between radiation energy density ρ_r and temperature T is given by

$$\rho_r = \frac{\pi^2}{30} N(T) T^4, \quad (23)$$

in the units with $k_B = c = 1$. At a temperature T , the effective quantity of spin degrees of freedom $N(T)$ can be expressed as $N(T) = 7 N_f(T)/8 + N_b(T)$, where $N_f(T)$ and $N_b(T)$ denote the degrees of freedom for fermions and bosons, respectively. It is assumed that the value of $N(T)$ remains constant during this

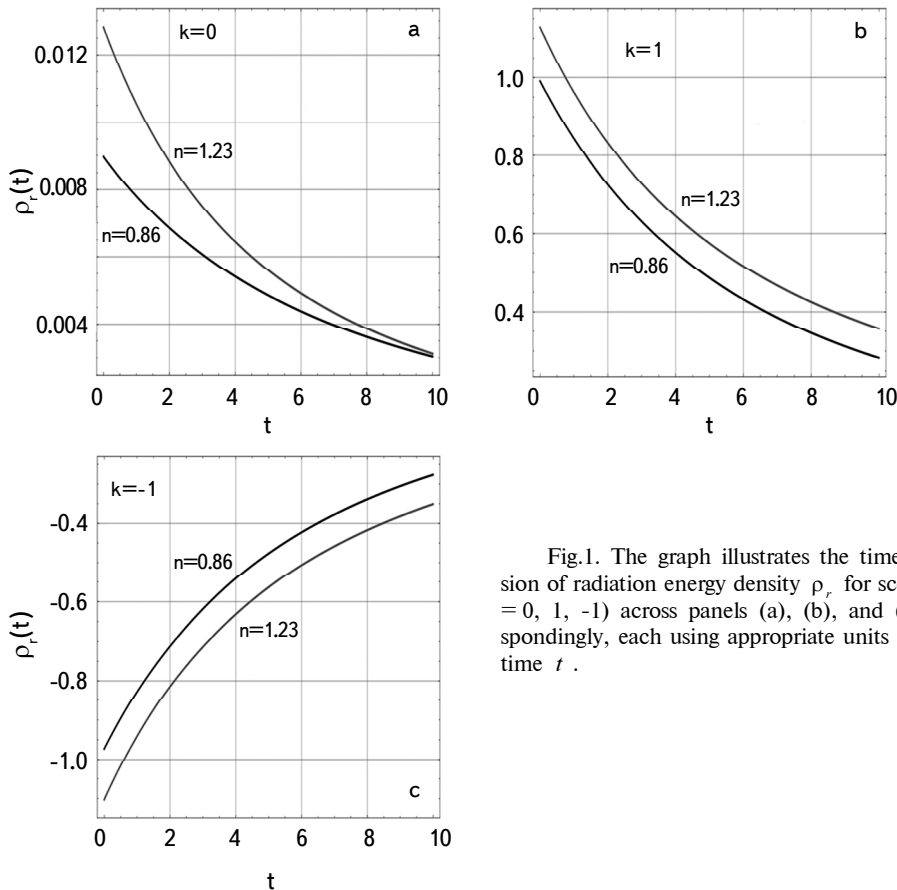


Fig.1. The graph illustrates the time progression of radiation energy density ρ_r for scenarios ($k = 0, 1, -1$) across panels (a), (b), and (c) correspondingly, each using appropriate units of cosmic time t .

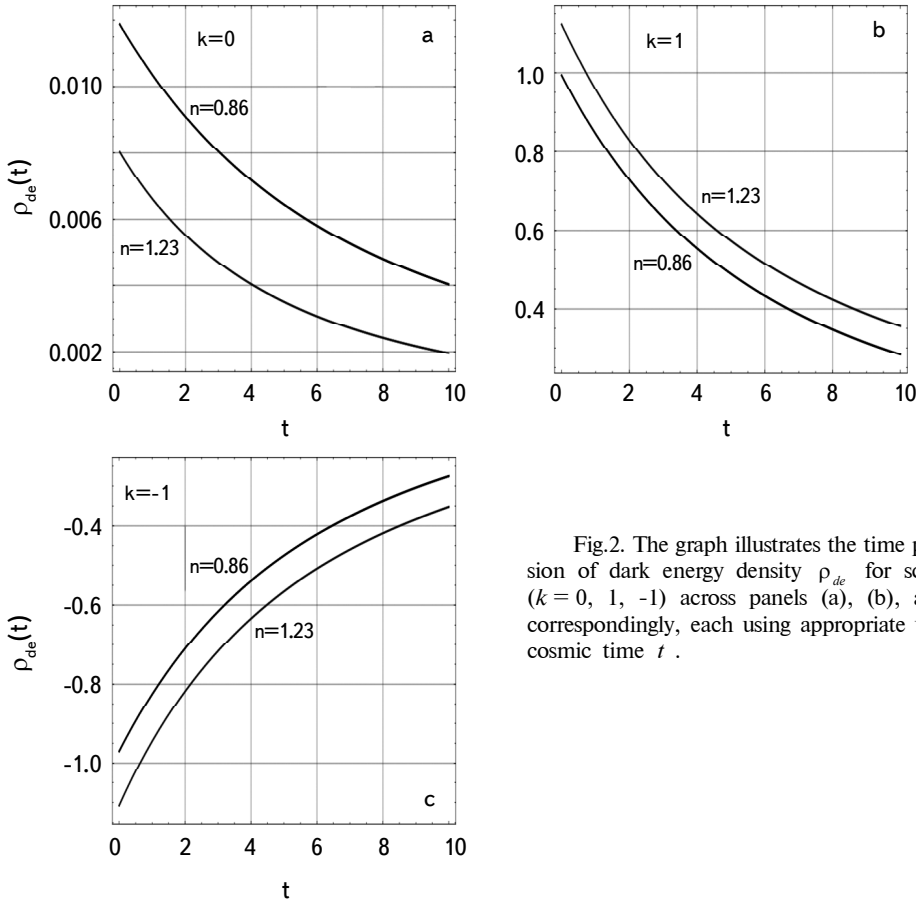


Fig.2. The graph illustrates the time progression of dark energy density ρ_{de} for scenarios ($k = 0, 1, -1$) across panels (a), (b), and (c) correspondingly, each using appropriate units of cosmic time t .

period. By utilizing equations (21) and (23), we derive the following expression;

$$T = \left(\frac{45}{\pi^2 N} \right)^{1/4} \left[\frac{D^2 n}{(Dnt + C)^2} + \frac{k}{(Dnt + C)^{2/n}} \right]^{1/4}. \quad (24)$$

From Eqs (24) we can notice that as $t \rightarrow 0$, we have $T^i \approx \left(\frac{45}{\pi^2 N} \right)^{1/4} \left[\frac{D^2 n}{C^2} + \frac{k}{C^{2/n}} \right]^{1/4}$ showing that radiation temperature also attains a finite value initially. The graphs presented in Fig.3 depict the changes in radiation temperature during the early stages of the universe using the identical set of model parameters. However, it should be noted that these specific numerical model parameters are not appropriate for the open $k = -1$ scenario in this context as well.

3.2. Matter dominated universe. In this case, we have $\omega = 0$ and $\rho \approx \rho_m$. Therefore from equation (17) and (18) the expression for matter and dark energy density can be written as

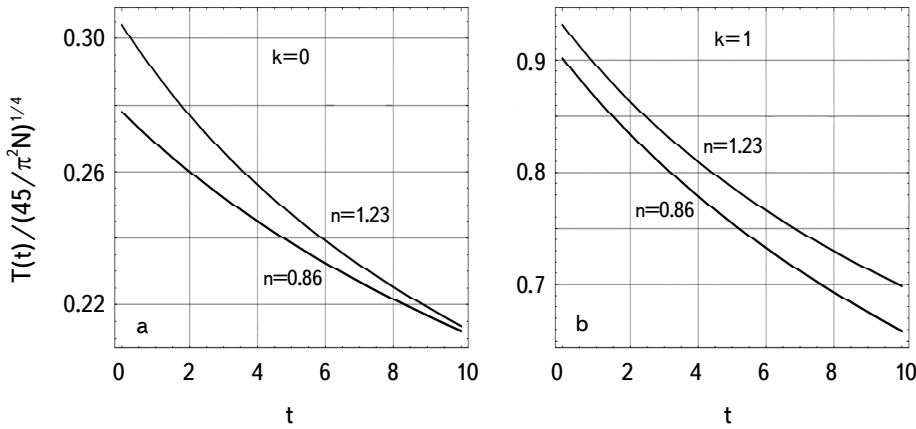


Fig.3. The figure illustrates the variation of radiation temperature T as a function of t for the scenarios corresponding to $(k = 0, 1)$ in panels (a) and (b) respectively.

$$\rho_m = 2 \left[(1+q)H^2 + \frac{k}{a^2} \right] \quad (25)$$

$$\rho_{de} = \left[(1-2q)H^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (26)$$

Now, using the equations (9), (12) and (13) in equations (25) and (26), we get the expression for matter and dark energy density

$$\rho_m = 2 \left[\frac{D^2 n}{(Dnt+C)^2} + \frac{k}{(Dnt+C)^{2/n}} \right] \quad (27)$$

$$\rho_{de} = \left[\frac{(2-n)D^2}{(Dnt+C)^2} + \frac{k}{(Dnt+C)^{2/n}} \right]. \quad (28)$$

In order to understand late-time cosmic acceleration, we can establish the $(t-z)$ relationship for which, we consider the relation between redshift and the scale factor of the universe, with the standardized unit ($a_0 = 1$) and is given by;

$$a(z) = (1+z)^{-1}. \quad (29)$$

Now, the $t-z$ relationship in this case is obtained as;

$$t(z) = \frac{(1+z)^{-n} - C}{Dn}. \quad (30)$$

Now eliminating the integration C with the help of $t-z$ relationship and we write all the parameters in terms of redshift z and model parameter only. The scale factor and Hubble parameter in terms of redshift can be written as

$$H(z) = D(1+z)^n \quad (31)$$

or

$$H(z) = H_0(1+z)^n, \quad (32)$$

where $H_0 = D$ be the present value of Hubble parameter.

Further, in view of Eq. (29), Eqs. (27) and (28) can be written as

$$\rho_m = 2 \left[\frac{D^2 n}{(1+z)^{-2n}} + k \left((1+z)^{-n} \right)^{-2/n} \right] \quad (33)$$

$$\rho_{de} = \left[\frac{D^2 (2-n)}{(1+z)^{-2n}} + k \left((1+z)^{-n} \right)^{-2/n} \right]. \quad (34)$$

From Eqs. (33) and (34), we observe that as $z \rightarrow 0$, $\rho_m(z) \rightarrow 2[nD^2 + k]$ and $\rho_{de}(z) \rightarrow [(2-n)D^2 + k]$, which is constant. The Fig.4 and 5 show the dynamical behaviour of evolution of matter energy density $\rho_m(z)$ and dark energy density $\rho_{de}(z)$ with respect to redshift z with some particular choice of model parameter $n = 0.86$, $n = 1.23$, $D = 0.1$.

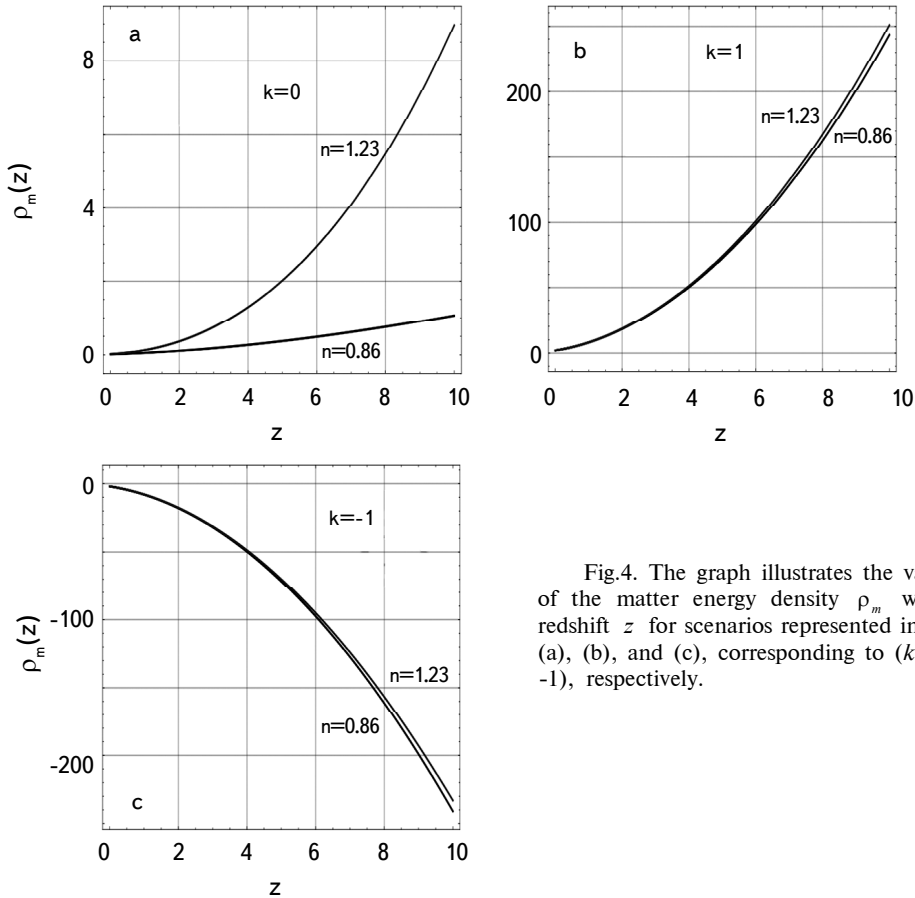


Fig.4. The graph illustrates the variation of the matter energy density ρ_m with the redshift z for scenarios represented in panels (a), (b), and (c), corresponding to $(k = 0, 1, -1)$, respectively.

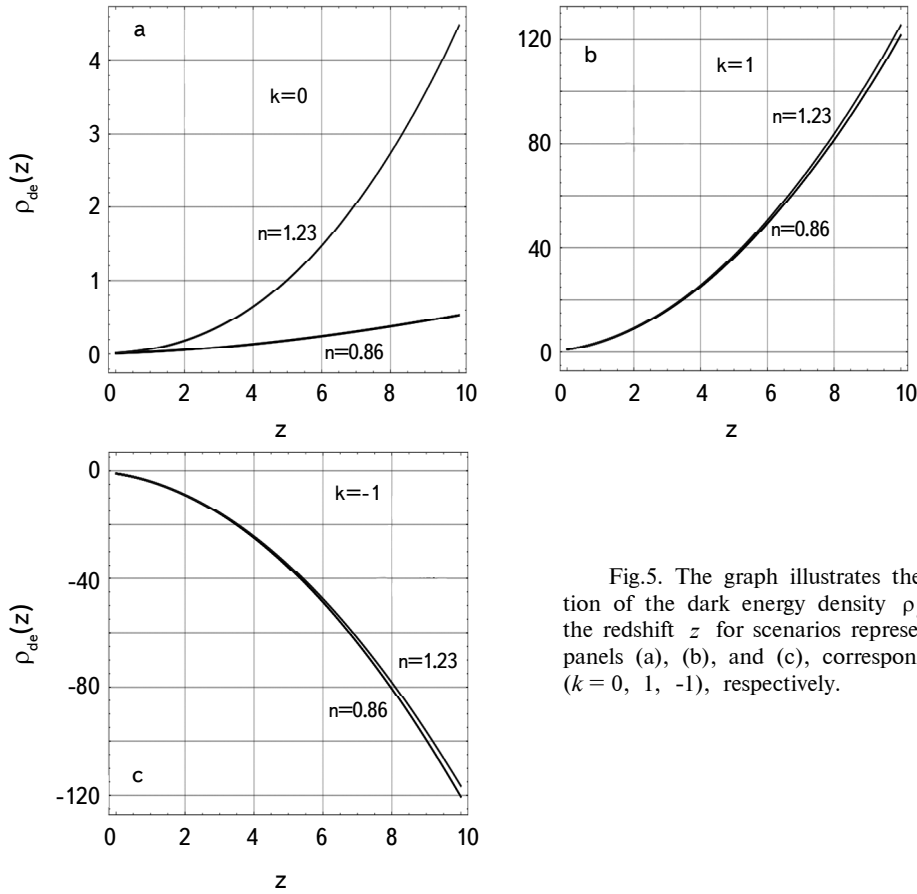


Fig.5. The graph illustrates the variation of the dark energy density ρ_{de} with the redshift z for scenarios represented in panels (a), (b), and (c), corresponding to $(k = 0, 1, -1)$, respectively.

4. Distance measures in this model.

4.1. Lookback time and proper time. There are various approaches to express the separation between two points in cosmology, specifically in cosmography, the study of the universe. This is because, during the expansion of the universe, the distances among comoving objects are in constant flux, and observers on Earth perceive a backward progression in time as they observe distant objects. The common thread among all distance measurements lies in their estimation of the distances between events along radial null trajectories, which are essentially the paths of photons that reach the observer. The lookback time, denoted as t_L , for an object is the duration between the detection of light today (at redshift $z = 0$) and the emission of photons at a specific redshift z .

$$t_L = t_0 - t(z) = \int_a^{a(0)} \frac{dt}{\dot{a}}. \quad (35)$$

The proper distance between two occurrences is determined by measuring it at

the instant of observation, representing the distance within the frame of reference where they occur simultaneously. The proper distance is expressed as $d(z) = a(0)r(z)$, where $r(z)$ denotes the radial distance of the object, which is given by

$$r(z) = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (36)$$

Therefore, the proper distance $d(z)$ can be written as

$$d(z) = a_0 \left[\frac{(c + Dnt)^{(-1+n)/n}}{D(-1+n)} \right]_t^{t_0} = C^{(1/n)} \left[\frac{(1+z)^{1-n}}{D(1-n)} \right].$$

The luminosity distance, denoted as d_l , for a source exhibiting a redshift of z is formally described as follows:

$$d_l^2 = \frac{l}{4\pi L}, \quad (37)$$

where L is the observed flux and l is the intrinsic luminosity of the object. The luminosity distance is given by

$$d_l = (1+z)d(z) = C^{(1/n)} \left[\frac{(1+z)^{2-n}}{D(1-n)} \right]. \quad (38)$$

The angular diameter distance is defined by

$$d_A = \frac{l_1}{\theta}, \quad (39)$$

where l_1 is intrinsic physical size and θ is the observed angular size of an object, the angular diameter distance d_A of an object in terms of redshift z is

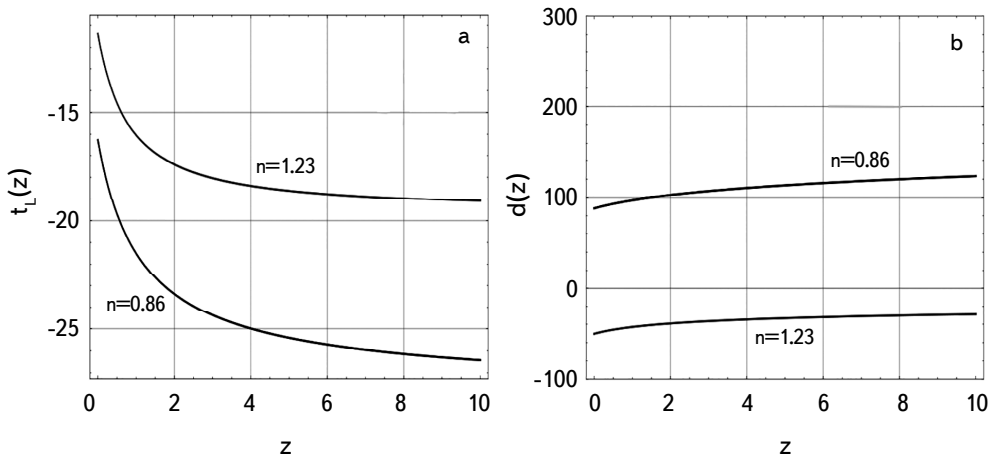


Fig.6. The plots of look back time t_l and proper distance $d(z)$ vs redshift z for the model in the panel (a) and (b) respectively.

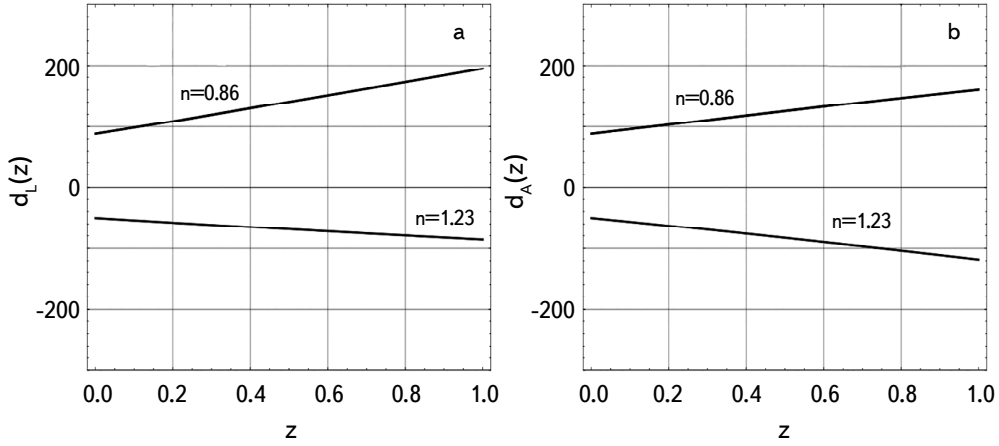


Fig.7. The plots of luminosity distance d_l and angular diameter distance d_A vs redshift z for the model in the panel (a) and (b) respectively.

$$d_A = \frac{d(z)}{1+z} = \frac{d_l}{(1+z)^2} = C^{(1/n)} \left[\frac{(1+z)^n}{D(1-n)} \right]. \quad (40)$$

4.2. Age of the universe. The present age of the universe refers to the current elapsed time since the cosmic event known as the Big Bang, which is considered the starting point of our universe. According to the prevailing scientific understanding, the universe is approximately 13.8 billion years old. This estimation is derived from observations of cosmic phenomena, such as the cosmic microwave background radiation and the redshift of distant galaxies. Over the course of these billions of years, the universe has undergone significant transformations, including the formation of galaxies, stars, and planets. The study of the present age of the universe plays a crucial role in our comprehension of its evolution and helps scientists unravel the mysteries of cosmic processes and phenomena. Age estimations derived from alternate sources such as galaxies and the Hubble constant often exhibit discrepancies, posing a persistent challenge in the field of cosmology. The dynamical age of the universe is indicated by this constant.

$$t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)H(z)} = H_0^{-1} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)^{n+1}} = H_0^{-1} \frac{1}{n}. \quad (41)$$

If n is not equal to zero, the value deviates from the current estimate, denoted as $t_0 = H_0^{-1}$, which is approximately 14 billion years. However, when n is set to 1, the model aligns well with the present age of the universe.

5. Results and conclusion. This work explores a cosmological model grounded in the general theory of relativity within the framework of FLRW space-

time. To derive an exact solution for the cosmological field equations and accommodate the currently observed cosmic acceleration, we introduce a straightforward parametrization for the Hubble parameter, H which results in a time-independent deceleration parameter, $q(t)$, equal to $n - 1$ (as in [32]). This parametrization also leads to a linear-type evolution of the scale factor. The study thoroughly investigates the behavior of various geometrical parameters $a(t)$, $H(t)$, and $q(t)$ and physical parameters, such as energy densities of radiation, matter, and dark energy (including the cosmological constant). In FLRW space-time, Berman's special law for Hubble's parameter variation (as mentioned in reference [31]) yields a constant value of the deceleration parameter, $q(t) = n - 1$, which results in accelerating universe models when $0 \leq n < 1$ and decelerating ones when $n > 1$, offering an explanation for the current universe's acceleration. This model suggests that the universe originated with finite volume, velocity, and acceleration, in contrast to the standard big bang scenario.

In Section 3, we extensively examine the dynamics of the model we have derived. We discuss how the physical parameters have evolved throughout the history of the universe, accounting for the cosmological constant as a dark energy candidate with an equation of state represented by $\omega_{de} = -1$. The requirement for positive energy densities is satisfied only when considering flat and closed universe geometries, as indicated by the expressions for radiation energy density ρ_r and dark energy density ρ_{de} . However, when it comes to an open universe, the selected numerical values for the model parameters n , D , and C do not meet the condition for positive energy densities in both ρ_r and ρ_{de} . In Fig.1 and 2, we depict the profiles of radiation and dark energy energy densities for a range of model parameter values, while keeping the model parameter D constant and varying n . This analysis is conducted for flat, closed, and open universe geometries. For the cases $k = 0$ and $k = 1$, we can clearly see that in Fig.1 and 2 the evolution of radiation and dark energy densities showing similar nature and is decreasing over time, where as for the case ($k = -1$) is incompatible in this scenario. The Fig.3 illustrates how radiation temperature changes over cosmic time t in the early universe for different universe geometries (flat and closed) with specific model parameter values. Radiation temperature follows a pattern similar to radiation energy density, starting with high temperatures and gradually decreasing over time, eventually reaching a constant value in the late stages.

To gain a deeper understanding of how structures form in the universe and the behavior of cosmological parameters in the late universe, we established a relationship between time and redshift ($t-z$) and expressed the physical parameters like matter and dark energy density in terms of redshift. Upon converting these parameters to redshift z , it became apparent that they are all related to

the variable n . We specifically examined the MD era, where dust pressure approaches to minimal value. Fig.4 and 5 depict the red-shift evolution of matter and DE energy densities in various geometries, with n being a variable and D being a constant. In the existing models, both the matter energy density and dark energy density maintain positive values. As a result, the weak and null energy conditions are met, indicating that the resulting models are indeed physically plausible. We have examined the lookback time, proper distance, luminosity distance, and angular diameter distance for our derived model by analyzing the plots presented in Fig.6 and 7.

In this analysis, we present a model designed to address the cosmic acceleration observed in the late-time universe, situated within the framework of an FLRW background. The approach involves adopting a parametrization of H suggested by Berman in 1983. Notably, this model has the flexibility to extend its scope to include anisotropic and inhomogeneous backgrounds. Moreover, it proves versatile in tackling diverse challenges such as big bang nucleosynthesis, structure formation, and inflation within the specified framework. A recent investigation [42] has devised a robust methodology that capitalizes on the redshift dependence of the Alcock-Paczynski test to gauge the expansion history of the universe. This technique harnesses the isotropy of the galaxy density gradient field, leading to more stringent constraints on cosmological parameters with heightened precision. This innovative approach has been extensively explored in a series of papers by Li et al. [43-45]. The proposed model, along with analogous parameterized models [46], holds promise for further scrutiny to refine and augment constraints on model parameters by incorporating additional datasets. However, the detailed examination of these possibilities is reserved for our forthcoming research endeavors.

Acknowledgements. Author SKJP and RK wish to thank IUCAA for it's visiting associateship program, which help them in various ways.

¹ Department of Mathematics and Statistics D.D.U. Gorakhpur University,
Gorakhpur, 273009, Uttar Pradesh,
India, e-mail: krmgkp1995@gmail.com rkmath09@gmail.com

² Pacif Institute of Cosmology and Selfology (PICS), Sagara, Sambalpur 768224,
Odisha, India, e-mail: shibesh.math@gmail.com

ПЕРЕСМОТР ПАРАМЕТРИЗАЦИИ БЕРМАНА ПАРАМЕТРА ХАББЛА В КОНТЕКСТЕ ПОЗДНЕГО УСКОРЕНИЯ

К.Р.МИШРА¹, Р.КУМАР¹, Ш.К.Д.ПАСИФ²

В этой статье мы вернулись к идее Бермана об изменении параметра Хаббла. Ранее эта параметризация подверглась тщательному изучению в рамках Λ -переменных космологий, где изменения масштабного фактора приводят к линейному расширению Вселенной. В данной работе изучены его последствия в контексте космического ускорения позднего времени в рамках классической общей теории относительности, принимая в качестве основы пространство-время Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера (FLRW). Представлено точное решение уравнений поля Эйнштейна (EFE) способом, независимым от модели, обеспечивая тщательную оценку как геометрических, так и физических параметров модели. Кроме того, это исследование дополнено графическими представлениями эволюционирующих космологических параметров в сценариях плоской, закрытой и открытой Вселенной, причем все они подлежат ограничениям, вытекающим из параметров модели. Синтез этих результатов проливает свет на сложное взаимодействие между космическим ускорением, темной энергией и параметризацией параметра Хаббла, тем самым предоставляя ценную информацию о фундаментальной механике нашей Вселенной.

Ключевые слова: *космическое ускорение; темная энергия; космологическая параметризация; параметр Хаббла*

REFERENCES

1. *I.Debono, G.F.Smoot, Universe, 2, 23, 2016.*
2. *A.G.Riess et al., Astron. J., 116, 1009, 1998.*
3. *S.Perlmutter et al., Astrophys. J., 517, 565, 1999.*
4. *M.Tegmark et al., Phys. Rev. D, 69, 103501, 2004.*
5. *G.Hinshaw et al., Astrophys. J. Suppl., 208, 19, 2013.*
6. *B.M.Rose et al., Astrophys. J. Lett., 896(1), L4, 2020.*
7. *A.H.Jaffe et al., Phys. Rev. Lett., 86, 3475, 2001.*
8. *D.N.Spergel et al., Astrophys. J. Suppl., 170, 377, 2007.*
9. *Y.Wang, P.Mukherjee, Astrophys. J., 650, 1, 2006.*

10. *U.Seljak et al.*, Phys. Rev. D, **71**, 103515, 2005.
11. *J.K.Adelman-McCarthy et al.*, Astrophys. J. Suppl., **162**, 38, 2006.
12. *E.J.Copeland, M.Sami, S.Tsujikawa*, Int. J. Mod. Phys. D, **15**, 1753, 2006.
13. *K.Bamba, S.Capozziello, S.Nojiri et al.*, Astrophys. Space Sci., **342**, 155, 2012.
14. *S.Nojiri, S.D.Odintsov*, Phys. Rept., **505**, 59, 2011.
15. *S.Weinberg*, Rev. Mod. Phys., **61**, 1, 1989.
16. *P.J.Steinhardt, L.M.Wang, I.Zlatev*, Phys. Rev. D, **59**, 123504, 1999.
17. *C.Wetterich*, Astron. Astrophys., **301**, 321, 1995.
18. *P.J.Peebles, R.Ratra*, Astrophys. J., **325**, L17, 1988.
19. *S.K.J.Pacif*, Eur. Phys. J. Plus, **135**, 792, 2020.
20. *Amine Bouali et al.*, Fortschritte der Physik, Progress of Physics, **71**(12), 2300086, 2023.
21. *Madhur Khurana et al.*, Physics of the Dark Universe, **43**, 101408, 2024.
22. *D.Arora et al.*, Eur. Phys. J. Plus, **139**, 371, 2024.
23. *G.S.Bisnovatyi-Kogan, A.M.Nikishin*, Astron. Rep., **67**(2), 115, 2023.
24. *S.Capozziello, R.Lazkoz, V.Salzano*, Phys. Rev. D, **84**, 124061, 2011.
25. *S.Arman, A.G.Kim, E.V.Linder*, Phys. Rev. D, **87**, 023520, 2013.
26. *S.Arman, A.G.Kim, E.V.Linder*, Phys. Rev. D, **85**, 123530, 2012.
27. *E.V.Linder*, ASP Conf. Ser., arXiv:0311403 [astro-ph].
28. *J.V.Cunha, J.A.S.Lima*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **390**, 210, 2008.
29. *M.Chevallier, D.Polarski*, Int. J. Mod. Phys. D, **10**, 213, 2001.
30. *H.K.Jassal, J.S.Bagla, T.Padmanabhan*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. Lett., **356**, L11, 2005.
31. *M.S.Berman*, Phys. Rev. D, **43**(1991), 1075, 1078.
32. *M.S.Berman*, Nuovo Cimento B, Series, **74B**, 182, 1983.
33. *S.Hannestad, E.Mortsell*, Phys. Rev. D, **66**, 063508, 2002.
34. *A.Melchiori et al.*, Phys. Rev. D, **68**, 043509, 2003.
35. *H.Jassal, J.Bagla, T.Padmanabhan*, Phys. Rev. D, **72**, 103503, 2005.
36. *L.Perivolaropoulos*, AIP Conf. Proc., **848**, 698, 2006.
37. *E.J.Copeland, M.Sami, S.Tsujikawa*, Int. J. Mod. Phys. D, **15**, 1753, 2006.
38. *M.Sami*, New Adv. Phys., **10**, 77, 2016.
39. *M.Sami*, Curr. Sci., **97**, 887, 2009.
40. *J.Yoo, Y.Watanabe*, Int. J. Mod. Phys. D, **21**, 1230002, 2012.
41. *Sarita Rani et al.*, J. Cosm. Astropart. Phys., **03**, 031, 2015.
42. *X.D.Li et al.*, Astrophys. J., **796**, 137, 2014.
43. *X.D.Li et al.*, Astrophys. J., **832**, 103, 2016.
44. *X.D.Li et al.*, Astrophys. J., **856**, 88, 2018.
45. *Z.Zhang et al.*, Astrophys. J., **878**, 137, 2019.
46. *S.K.J.Pacif et al.*, Modern Phys. Lett. A, 35.05 (2020): 2050011.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Рукописи могут быть представлены в печатном виде (hard copies) в двух экземплярах, отпечатанные на одной стороне листа формата А4, вместе с соответствующей электронной версией. Один из экземпляров должен быть подписан всеми авторами. Указываются сведения об авторах: фамилия, имя, отчество, название учреждения, электронный адрес.

2. *Рукопись* может быть набрана в виде файла с расширениями .doc, .docx, .rtf, через 1.5 интервала, используя Font 12pt.

3. *Рисунки* должны быть выполнены предельно аккуратно с разборчивыми надписями. Необходимые объяснения даются в подписях к рисункам, которые не должны повторяться в тексте. Рисунки необходимо отправить в виде .jpg, .bmp, .wmf, .eps файлов. С учетом формата журнала размеры рисунков редакцией могут быть изменены. В тексте рисунки нумеруются в порядке очередности (рис.1, рис.2, и т.д.). Если рисунок, состоит из двух или более панелей, то возможны обозначения типа рис.1a или рис.1a, b.

4. *Таблицы* должны иметь номера и информативные названия. Примечания должны быть сведены к минимуму и пронумерованы надстрочными арабскими цифрами.

5. *Цитирование литературы.* Цитируемая литература дается порядковым номером в строчку в квадратных скобках (например, [5]) и соответствует номеру в списке литературы. Список литературы должен быть оформлен следующим образом:

а) Для журнальных статей указываются инициалы и фамилии авторов курсивным шрифтом (в оригинальной транскрипции), название журнала в принятом сокращении (сокращения для некоторых наиболее часто встречаемых журналов, применяемых в "Астрофизике", дается в сайте журнала), номер тома жирным шрифтом, номер первой страницы, год издания. Для русскоязычных журналов, которые переводятся на английский язык, в скобках приводятся соответствующее название журнала на английском, том, страница и год публикации.

б) Для книг следует указывать инициалы и фамилию автора курсивом, место и год издания.

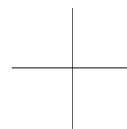
6. *Оформление рукописи.* На первой странице дается название статьи (по возможности кратко и информативно), инициалы, фамилия каждого автора и аннотация на русском языке. На второй странице приводятся название статьи, инициалы, фамилия каждого автора и текст аннотации на английском языке, который должен полностью соответствовать русскому. В аннотации должны быть изложены главные результаты работы без ссылок на литературу. Максимальный объем аннотации не должен превышать 5% основного текста. Таблицы, список литературы, рисунки и надписи к рисункам печатаются на отдельных страницах. Расположение таблиц и рисунков отмечается на полях основного текста. Аннотации, основной текст, список литературы и таблицы должны иметь одну общую нумерацию страниц. Суммарный объем не должен превышать 16 стандартных страниц. Объем краткого сообщения - не более 4 страниц.

Статья состоит из пронумерованных разделов, начиная с "1. *Введение*". Названия разделов печатаются курсивом в строке, они должны быть краткими и содержательными. Подразделы могут быть пронумерованы как 2.1, 2.2 и т.д. Необходимые сокращения терминов или названий могут быть использованы во всей статье, однако их объяснение дается лишь один раз при первом упоминании.

7. В случае представления двух или более статей одновременно необходимо указать желательный порядок их публикации.

8. Рукописи авторам не возвращаются.

9. Авторам статьи (независимо от их количества) представляется 10 оттисков бесплатно.



CONTENTS

Classification of BLL blazars by optical activity types	
<i>A.M.Mickaelian, H.V.Abrahamyan, G.M.Paronyan, G.A.Mikayelyan, A.G.Sukiasyan, V.K.Mkrtychyan</i>	129
BSN: First light curve study of the low mass contact binary V0610 Vir	
<i>A.Alizadehsabegh, F.Lomoz, A.Poro, A.Narimani</i>	139
Activity of the hot Jupiter planet hosting K2V dwarf HD 189733	
<i>I.S.Savanov</i>	151
Photometric studies of asynchronous polar IGR J19552+0044 in 2019-2022	
<i>Ju.V.Babina, E.P.Pavlenko, N.V.Pit, K.A.Antonyuk, A.A.Sosnovskij, V.G.Godunova, I.A.Izviekova, G.I.Kokhirova, F.D.Rakhmatullaeva, A.O.Simon, I.V.Chupira</i>	161
Viscous plane symmetric string cosmological model in $f(R)$ gravity	
<i>A.Dabre, P.Makode</i>	175
Electromagnetic properties of stellar matter. I. Dielectric permeability of the hot rarefied plasma with abundant production of electron- positron pairs	
<i>G.S.Hajian, A.S.Harutyunyan</i>	191
Reconstruction of the quintessence dark energy potential from a Gaussian process	
<i>E.Elizalde, M.Khurshudyan, K.Myrzakulov, S.Bekov</i>	205
Isospin-asymmetric cold nuclear matter in the relativistic mean-field model with a scalar-isovector interaction channel	
<i>G.B.Alaverdyan, A.G.Alaverdyan</i>	229
Fermionic vacuum stresses in models with toroidal compact dimensions	
<i>A.A.Saharian, R.M.Avagyan, G.H.Harutyunyan, G.H.Nikoghosyan</i>	245
Re-examining Berman's parametrization of the Hubble parameter in the context of late-time acceleration	
<i>K.R.Mishra, R.Kumar, S.K.J.Pacif</i>	259

СОДЕРЖАНИЕ (продолжение)

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ЗВЕЗДНОГО ВЕЩЕСТВА. I. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ГОРЯЧЕЙ РАЗРЕ- ЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ С ОБИЛЬНЫМ РОЖДЕНИЕМ ЭЛЕКТРОН- ПОЗИТРОННЫХ ПАР	<i>Г.С.Аджян, А.С.Арутюнян</i>	191
РЕКОНСТРУКЦИЯ ПОТЕНЦИАЛА КВИНТЭССЕНЦИИ ТЕМНОЙ ЭНЕРГИИ ИЗ ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА	<i>Э.Элизалде, М.Хурушудян, К.Мырзакулов, С.Беков</i>	205
ИЗОСПИНОВО-АСИММЕТРИЧНАЯ ХОЛОДНАЯ ЯДЕРНАЯ МАТЕРИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ СО СКАЛЯРНО-ИЗОВЕКТОРНЫМ КАНАЛОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ	<i>Г.Б.Алавердян, А.Г.Алавердян</i>	229
ФЕРМИОННЫЕ ВАКУУМНЫЕ НАТЯЖЕНИЯ В МОДЕЛЯХ С ТОРОИДАЛЬНО КОМПАКТНЫМИ ИЗМЕРЕНИЯМИ	<i>А.А.Саарян, Р.М.Авакян, Г.Г.Арутюнян, Г.Г.Никогосян</i>	245
ПЕРЕСМОТР ПАРАМЕТРИЗАЦИИ БЕРМАНА ПАРАМЕТРА ХАББЛА В КОНТЕКСТЕ ПОЗДНЕГО УСКОРЕНИЯ	<i>К.Р.Мишра, Р.Кумар, Ш.К.Д.Пасиф</i>	259