

DOI: 10.54503/0571-7132-2024.67.2-191

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ЗВЕЗДНОГО ВЕЩЕСТВА. I. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ГОРЯЧЕЙ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ С ОБИЛЬНЫМ РОЖДЕНИЕМ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР

Г.С.АДЖЯН, А.С.АРУТЮНЯН

Поступила 6 февраля 2024

Принята к печати 10 июня 2024

Используя уравнения Власова, определены поперечная и продольная диэлектрические проницаемости горячей разреженной ультрарелятивистской электрон-позитронной плазмы. В качестве невозмущенной функции распределения электронов и позитронов использовано распределение Ферми. Показано, что из-за обильного рождения электрон-позитронных пар плазменная частота ультрарелятивистской плазмы с ростом температуры линейно растет. При этом отношение частоты, на которой спектральная плотность равновесного излучения максимальна к плазменной частоте, остается неизменным и равно 28. Показано, что в такой плазме, в частности в веществе ранней Вселенной в ультрарелятивистскую электрон-позитронную эпоху, спектр излучения отличается от чернотельного излучения весьма незначительно.

Ключевые слова: *ультрарелятивистская электрон-позитронная плазма:
диэлектрическая проницаемость*

1. *Введение.* При определении термодинамических характеристик горячего звездного вещества считается, что излучение в нем является планковским [1]. А в кварковом веществе, ссылаясь на дисперсионные свойства этой среды, принято считать, что электромагнитное излучение практически отсутствует [2]. Если для решения многих задач это справедливо, то для понимания некоторых явлений учет дисперсии необходим. В [3], в частности, рассматривается вопрос влияния дисперсии в веществе ранней Вселенной (до образования нейтральных атомов) на спектр излучения. Вопросам распространения линейных и нелинейных волн в астрофизической плазме посвящено много работ. В частности, в [4] на основе известных выражений для поперечной и продольной диэлектрических проницаемостей ультрарелятивистского вырожденного электронного газа, рассмотрены волны различного характера в электронно-ядерном веществе (вещество белых карликов и внешних слоев нейтронных звезд).

В предлагаемой работе исследуются диэлектрические свойства горячей

разреженной плазмы, когда концентрация электрон-позитронных пар намного превосходит концентрацию атомных ядер. Расчеты проведены согласно теории бесстолкновительной плазмы, предложенной Власовым [5].

2. Основные уравнения и соотношения. Кинетические уравнения Больцмана без столкновительного члена для функции распределения i -того типа частиц по импульсам $f_i(\vec{p}_i, \vec{r}_i, t)$, уравнения для плотностей заряда ρ и тока $\vec{j}$

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum q_i \int f_i d^3 \vec{p} dV, \quad (1)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum q_i \int \vec{v}_i f_i d^3 \vec{p} dV, \quad (2)$$

где $f_i d^3 \vec{p} dV$ - число частиц в фазовом объеме $d^3 \vec{p} dV$ в точке $\vec{r}$, в момент времени t , q_i и $\vec{v}_i$ - заряд и скорость i -того типа частиц соответственно, называются уравнениями Власова [4,6,7]. Согласно этой модели, частицы фактически движутся без столкновений под воздействием внешних сил в усредненном электромагнитном поле, созданном ими. Выбор функции распределения частиц по импульсам, а не по скоростям, удобен тем, что кинетические уравнения Больцмана для $f_i(\vec{p}_i, \vec{r}_i, t)$ справедливы и при релятивистских скоростях [6]. Для таких частиц достаточно лишь использовать релятивистские соотношения между физическими величинами, в частности, связь между импульсом и энергией частицы. В рассматриваемых нами случаях плазма при отсутствии магнитного поля и электромагнитной волны является изотропной и равновесной. Все функции распределения по импульсам изотропной плазмы зависят только от величины импульса соответствующей частицы.

Электромагнитная волна, распространяясь в изотропной плазме, нарушает ее равновесное состояние f_{0i} , а также ее изотропность [6,7]. Последнее обстоятельство вызывает пространственную дисперсию в изначально изотропной плазме. Если электромагнитная волна монохроматическая и достаточно слабая, то возмущения функций распределения $\delta f_i = f_i - f_{0i}$ легко находятся. Тензор диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\alpha\beta}$ выражается через δf_i и зависит как от частоты ω , так и от волнового вектора $\vec{k}$ [6,7]. В общем случае этот тензор имеет вид [6,7]

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \vec{k}) = \epsilon_t(\omega, k)(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) + \epsilon_l(\omega, k)n_\alpha n_\beta, \quad \vec{n} = \vec{k}/k. \quad (3)$$

Согласно $D_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta$, первое слагаемое выделяет поперечную $\vec{D}_\perp = \epsilon_t \vec{E}_\perp$ (по отношению к волновому вектору $\vec{k}$) часть индукции, а второе слагаемое - продольную $\vec{D}_\parallel = \epsilon_l \vec{E}_\parallel$. Функции ϵ_t и ϵ_l называются поперечными и продольными диэлектрическими проницаемостями, соответственно. Они выражаются через невозмущенные функции распределения [6,7]

$$\varepsilon_i(\omega, k) = 1 - \frac{2\pi}{\omega} \sum q_i^2 \int \vec{v}_{i\perp} \frac{df_{0i}}{d\vec{p}_{i\perp}} \frac{d^3\vec{p}}{\vec{k}\vec{v}_i - \omega}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 - \frac{4\pi}{k^2} \sum q_i^2 \int \vec{k} \frac{df_{0i}}{d\vec{p}_i} \frac{d^3\vec{p}}{\vec{k}\vec{v}_i - \omega}, \quad (5)$$

где q_i , $\vec{v}_i$ и $\vec{p}_i$ - заряд, скорость и импульс i -того типа частицы, соответственно. Знаком $\perp$ у вектора обозначена поперечная к волновому вектору составляющая этого вектора. Интегралы вычисляются, обходя полюс $\vec{k}\vec{v}_i = \omega$ снизу - по правилу Ландау. Для волн $\omega > kc$ полюс отсутствует. Отметим, что эти формулы верны как для любых скоростей частиц, так и для изначально анизотропной плазмы.

В квазивыврожденном веществе число заполнений энергетических уровней фермионов близко к единице. Поэтому классические уравнения Больцмана в уравнениях Власова заменяются соответствующими квантовыми уравнениями [6,7]. Соответственно меняются и выражения для поперечной и продольной проницаемостей (4) и (5).

Волновое число k и частота ω связаны законами дисперсии [6,7]

$$k^2 c^2 = \omega^2 \varepsilon_l(\omega, k) \quad \text{и} \quad \varepsilon_l(\omega, k) = 0. \quad (6)$$

Плотность энергии равновесного теплового излучения как плотность энергии Бозе газа безмассовых частиц равна [8]

$$w(T) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \hbar\omega \frac{d^3\vec{p}}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}, \quad (7)$$

где $d^3\vec{p} = \hbar^3 d^3\vec{k}$, а связь энергии частиц (фотонов) $\hbar\omega$ с импульсом $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ определяется законом дисперсии поперечных волн (6). Коэффициент 2 в (7) обусловлен наличием двух независимых поляризаций электромагнитной волны. Давление излучения равно 1/3 плотности энергии (7).

Области изменений температуры и концентраций частиц, а также химический состав звездного вещества настолько огромны и разнообразны, что описать диэлектрические проницаемости ε_r и ε_l этого вещества единой формулой невозможно. Поэтому рассмотрим отдельные частные случаи.

3. Волны в разреженной плазме с обильным рождением электрон-позитронных пар.

3.1. Поперечные волны. Когда плотность полностью ионизированной плазмы достаточно низка, а температура высока, то в ней обильно рождаются электрон-позитронные пары (e^-e^+ -пары), число которых намного превосходит число тех электронов, которые нейтрализуют положительный заряд атомных ядер [9]. Концентрации электронов n_e и позитронов n_{pos} почти равны ($n_e \approx n_{pos}$).

Поэтому они имеют нулевые химические потенциалы ($\mu_e = \mu_{pos} = 0$). В таком состоянии термодинамические характеристики плазмы зависят только от температуры и являются суммами соответствующих характеристик горячего электрон-позитронного газа и электромагнитного излучения. Более подробно такое состояние рассмотрено в [9], где влияние дисперсии на характеристику излучения не учтено. Считается, что излучение чернотельное.

Ниже мы определяем закон дисперсии горячей ультрарелятивистской ($k_B T \gg m_e c^2$) электрон-позитронной плазмы при отсутствии магнитного поля. Тензор диэлектрической проницаемости ультрарелятивистской горячей электронной плазмы с максвелловским распределением без учета рождения $e^- e^+$ пар вычислен в [10]. Поперечная диэлектрическая проницаемость такой плазмы имеет следующий вид [6,7]

$$\varepsilon_{Ml} = 1 + \frac{\pi e^2 n_e c}{k \omega k_B T} \Phi\left(\frac{\omega}{kc}\right), \quad \omega > kc, \quad \Phi(x) = (1 - x^2) \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 2x. \quad (8)$$

Физические характеристики плазмы с фермиевским распределением электронов обозначим дополнительным индексом F , а с максвелловским - индексом M .

Волны с $\omega < kc$ в плазме затухают так как диэлектрические проницаемости для этих частот становятся комплексными [6,7]. В представленной работе рассматриваются только незатухающие волны, т.е. волны с $\omega > kc$. Конечно, и для этих частот столкновения приводят к затуханию, однако, когда частота столкновений частиц намного меньше частоты волны, то этим затуханием можно пренебречь [7]. Вопрос о применимости бесстолкновительной модели плазмы и отсутствии затухания Ландау рассмотрен в 5.1.

На первый взгляд может показаться, что для учета рождения $e^- e^+$ пар достаточно в (8) концентрацию электронов n_e заменить на $n_e + n_{pos} = 2n_e$ как концентрации ультрарелятивистских Ферми газов с нулевыми химическими потенциалами [8]

$$2n_e = \frac{4}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{d^3 \vec{p}}{\exp(cp/k_B T) + 1} = \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \zeta(3) = \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{m_e c^2}\right)^3 \zeta(3) / \lambda^3, \quad (9)$$

где $\zeta(x)$ - функция Римана: $\zeta(3) = 1.202 \dots$, а $\lambda = \hbar/m_e c$ - комптоновская длина волны электрона. Выражение для поперечной диэлектрической проницаемости (8) получено для ультрарелятивистской плазмы с максвелловским распределением. Это распределение следует как из Ферми, так и из Бозе распределений при условии $e^{\mu/k_B T} \ll 1$. В нашем же случае $\mu_e = \mu_{pos} = 0$, поэтому вычисление интегралов в (4) следует проводить с функциями

$$f_{0e} = f_{0pos} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp(cp/k_B T) + 1}. \quad (10)$$

В результате для поперечной диэлектрической проницаемости разреженной и

горячей e^-e^+ ультрарелятивистской плазмы для частот $\omega > kc$ получим

$$\varepsilon_{Ft} = 1 + \frac{\pi}{3} \alpha \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^2 \frac{\omega}{kc} \Phi \left(\frac{\omega}{kc} \right), \quad (11)$$

где $\alpha = e^2/\hbar c$ постоянная тонкой структуры. В отличие от $\varepsilon_{Mt} - 1 \sim 1/T$, у ультрарелятивистской e^-e^+ плазмы $\varepsilon_{Ft} - 1 \sim T^2$.

Согласно (6) и (11), в ультрарелятивистской e^-e^+ плазме частота ω и волновое число k электромагнитной волны связаны соотношением

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\pi}{3} \alpha \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^2 \frac{\omega}{kc} \Phi \left(\frac{\omega}{kc} \right). \quad (12)$$

Для заданных значений температуры T и волнового числа k численным решением (12) можно найти значение частоты волны ω , а потом и численное значение диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{Ft}(\omega, k(\omega)) = k^2 c^2 / \omega^2. \quad (13)$$

Разумнее поступить наоборот. Для заданного значения температуры T и разных значений $0 < \varepsilon_{Ft} < 1$ из (11) найти $k_B T / \hbar \omega$, а потом ω и $k = \omega \sqrt{\varepsilon_{Ft}} / c$. Это удобно для построения различных графиков зависимостей характеристик плазмы от частоты. Однако иногда лучше иметь, пусть и приближенное, но аналитическое решение (12) для ε_{Ft} , чем "точные" численные таблицы.

Для волновых чисел $kc \ll \omega$

$$k^2 c^2 = \frac{5}{6} \omega^2 \left(1 - \left(\frac{\Omega_{Fpl}}{\omega} \right)^2 \right) \left(1 + \frac{3}{28} \left(\frac{\Omega_{Fpl}}{\omega} \right)^2 \right), \quad (14)$$

$$\Omega_{Fpl} = \frac{2}{3} \sqrt{\pi \alpha} \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right) \quad (15)$$

является приближенным решением (12), где Ω_{Fpl} - плазменная частота ультрарелятивистской горячей e^-e^+ плазмы. В отличие от [6,7] в (14) учтена следующая поправка по $(\Omega_{Fpl}/\omega)^2$. Для больших волновых чисел ($\Omega_{Fpl} \ll kc < \omega$) [6,7]

$$k^2 c^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\Omega_{Fpl}}{\omega} \right)^2 \right). \quad (16)$$

Плазменная частота ультрарелятивистской электронной плазмы с максвелловским распределением равна [6]

$$\Omega_{Mpl}^2 = 4\pi e^2 n_e c^2 / 3k_B T. \quad (17)$$

Если для вычисления поперечной диэлектрической проницаемости горячей ультрарелятивистской e^-e^+ плазмы ε_{Ft} в соответствующей формуле (8) для

максвелловского ультрарелятивистского электронного газа n_e просто заменить на $2n_e$, согласно (9), то получим

$$\frac{\varepsilon_{Ft} - 1}{\varepsilon_{Mt} - 1} = \frac{9}{\pi^2} \zeta(3) \approx 1.1,$$

т.е. ошиблись бы на 10%.

Комбинируя (14) и (16) для диэлектрической проницаемости ультрарелятивистской e^-e^+ плазмы, получим приближенное выражение

$$\varepsilon_{Ft}(\omega, k(\omega)) - 1 = \begin{cases} \frac{5}{6} \left(1 - \left(\frac{\Omega_{Fpl}}{\omega} \right)^2 \right) \left(1 - \frac{3}{28} \left(\frac{\Omega_{Fpl}}{\omega} \right)^2 \right), & \omega / \Omega_{Fpl} < 2.39, \\ \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\Omega_{Fpl}}{\omega} \right)^2 \right), & \omega / \Omega_{Fpl} > 2.39. \end{cases} \quad (18)$$

На рис.1 для значений температуры $k_B T / m_e c^2 = \{2; 5; 10; 25; 50; 100\}$ показаны зависимости поперечной диэлектрической проницаемости ультрарелятивистской e^-e^+ плазмы ε_{Ft} от частоты. Сплошные кривые соответствуют "точным" численным решениям уравнения (12), а пунктирные кривые

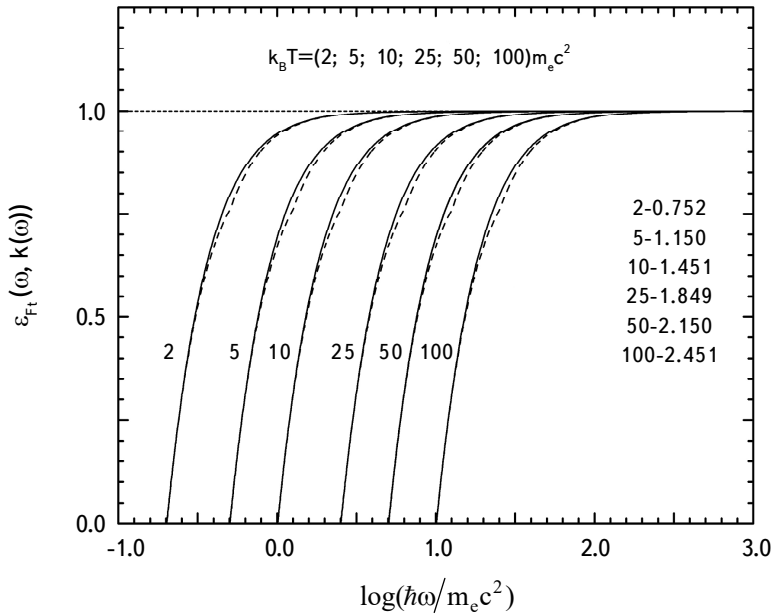


Рис.1. Зависимость поперечной диэлектрической проницаемости ультрарелятивистской e^-e^+ плазмы $\varepsilon_{Ft} = k^2 c^2 / \omega^2$ от частоты для значений температуры $k_B T / m_e c^2 = \{2; 5; 10; 25; 50; 100\}$. Сплошные кривые соответствуют численным решениям уравнения (12), а пунктирные кривые построены по (18). На этом же рисунке справа приведены логарифмы значения частоты $\omega_{max} = 28\Omega_{Fpl}$, на которых тепловое равновесное электромагнитное излучение при указанных температурах имеет максимальную спектральную плотность.

построены по (18). Близость этих кривых показывает, что аппроксимация ε_{Ft} по (18) хорошая. Нетрудно показать, что из-за линейной зависимости плазменной частоты Ω_{Fpl} от температуры частота ω_{max} , на которой плотность энергии излучения максимальна, равна $28\Omega_{Fpl}$.

На рис.1 приведены также значения логарифма этой частоты для указанных значений температуры. Из рис.1 следует, что эти частоты находятся далеко от области, где ε_{Ft} заметно отличается от единицы. В области частот близких к ω_{max} $\varepsilon_{Ft} \approx 0.999$. Поэтому термодинамические характеристики излучения (плотность энергии, давления, энтропия) в ультрарелятивистской e^-e^+ плазме ($k_B T \gg m_e c^2$), где количество e^-e^+ пар гораздо больше атомных ядер, будут отличаться от планковских значений незначительно. Различие от планковского распределения будет только в далекой от ω_{max} "длинноволновой" области частот, где сосредоточена малая часть энергии поля излучения. Следовательно, несмотря на отсутствие волн с частотами $\omega \leq \Omega_{Fpl}$, спектр излучения в такой равновесной плазме можно считать достаточно близким к планковскому.

В плазме или в плазмоподобных средах частотный спектр излучения на плазменной частоте Ω_{pl} обрывается. Электромагнитные волны с частотой меньше этой частоты в плазме не могут распространяться. Чем ближе значение $\hbar\Omega_{pl}$ к $k_B T$, тем сильнее спектр этого излучения отличается от планковского. В работе [3] значение отношения $\hbar\Omega_{pl}/k_B T$ принято количественной мерой отличия равновесного спектра излучения от планковского. Дополнительной количественной мерой отклонения спектра равновесного излучения в какой-либо среде от теплового спектра излучения в вакууме может служить численное значение параметра $\beta = 1 - W_{pl}/W_0$, где W_{pl} и W_0 плотности энергии излучения в плазме и в вакууме, соответственно. На основе выражений (7, 15, 18) можно показать, что в ультрарелятивистской горячей e^-e^+ плазме температурная зависимость плотности энергии излучения W_{pl} такая же, как и у чернотельного излучения. Поэтому параметр β не зависит от температуры и равен $3.6 \cdot 10^{-4}$. Малость этого параметра подтверждает вышесказанное.

3.2. Продольные волны. Продольная диэлектрическая проницаемость ε_l ультрарелятивистской плазмы с максвелловским распределением электронов определена в [10]:

$$\varepsilon_{Ml} = 1 + \frac{4\pi n_e^2}{k^2 k_B T} \left[1 + \frac{\omega}{2kc} \ln \frac{\omega - kc}{\omega + kc} \right], \quad \omega > kc. \quad (19)$$

Для вычисления продольной диэлектрической проницаемости ультрарелятивистской разреженной электрон-позитронной плазмы в (5) вместо максвелловской функции распределения нами использовано распределение Ферми (10). После вычисления интеграла в (5) получаем

$$\varepsilon_{Fl} = 1 + \frac{4}{3} \pi \alpha \left(\frac{k_B T}{\hbar k c} \right)^2 \left[1 + \frac{\omega}{2 k c} \ln \frac{\omega - k c}{\omega + k c} \right], \quad \omega > k c. \quad (20)$$

Связь волнового числа k и частоты ω определяется вторым уравнением (6). Приближенные решения этого уравнения в области $k c \ll \omega$ как для ε_{Fl} , так и для ε_{Ml} имеют одинаковый вид $\omega^2 = \Omega_{pl}^2 + 3 k^2 c^2 / 5$. Отличаются лишь плазменные частоты: $\Omega_{pl} = \Omega_{Fpl}$ и $\Omega_{pl} = \Omega_{Mpl}$, соответственно. Они совпадают с соответствующими плазменными частотами поперечных волн.

4. *Спектр излучения в ранней Вселенной в период от ультрарелятивистской e^-e^+ эпохи до эпохи рекомбинации.* В [3], двигаясь в обратном направлении во времени из состояния вещества в ранней Вселенной в эпоху рекомбинации, показано, что при адиабатическом "сжатии" (слово сжатие берется в кавычки, указывая на обратный ход событий в действительности. Ниже кавычки использованы именно в этом смысле) параметр $a = \hbar \Omega_{Mpl} / k_B T$ (мера отклонения спектрального распределения излучения от планковского) только растет. Согласно [3], когда вещество с излучением в ранней Вселенной адиабатически "сжималось" от состояния $T = 3000^\circ \text{K}$ и $n_e = 300 \text{ см}^{-3}$ до состояния "начала" (вернее конца) релятивистской эпохи ($k_B T \approx m_e c^2$), концентрация электронов стала $n_e = 2.3 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$. Для такой концентрации электронов $a = \hbar \Omega_{pl} / k_B T \approx \hbar \Omega_{pl} / m_e c^2 \approx 10^{-6}$ [3]. В дальнейшем, точнее до того, когда электроны были ультрарелятивистскими, в [3] выражение для плазменной частоты нерелятивистской горячей электронной плазмы заменяется на соответствующее выражение ультрарелятивистской максвелловской электронной плазмы (17). Несмотря на то, что плазменная частота такой плазмы с "повышением" температуры уменьшается ($\Omega_{Mpl} \sim 1/T$), однако за счет "увеличения" концентрации электронов при "сжатии" параметр a остается постоянным. А так как "стартовое" значение параметра a этого состояния было близко к 10^{-6} , то авторы [3] заключают, что начиная от ультрарелятивистского состояния электронов до эпохи рекомбинации в ранней Вселенной излучение с большой точностью было планковским.

Как отмечено выше, если в области температур $k_B T \leq m_e c^2$ концентрация протонов n_p достаточно мала, то вещество обильно обогащено e^-e^+ парами и $n_e \gg n_p$. Причем не важно, каким путем вещество пришло в такое состояние. Все термодинамические характеристики вещества [9], в том числе и ее плазменная частота Ω_{Fpl} (15), в таком состоянии зависят только от температуры. Согласно (15), в ультрарелятивистской области $a = 2\sqrt{\alpha\pi}/3 \approx 0.1$. Таким образом, хотя в ранней Вселенной при "переходе" плазмы в ультрарелятивистское e^-e^+ состояние параметр a быстро растет, однако, достигая значения $a \approx 0.1 \ll 1$, он в дальнейшем остается неизменным. Конечно, это значение параметра a в веществе ранней Вселенной в эпоху ультрарелятивистской e^-e^+ плазмы

указывает на более сильное искажение теплового спектра излучения, чем при $k_B T < m_e c^2$. Однако, учитывая еще и малость значения параметра $\beta = 3.6 \cdot 10^{-4}$, его можно считать планковским. Следовательно, вывод в [3], полученный без учета рождения $e^- e^+$ пар о том, что тепловое излучение в ранней Вселенной от эпохи, когда в веществе доминировала $e^- e^+$ плазма, до эпохи рекомбинации, является планковским, остается в силе.

5. Границы справедливости полученных результатов.

5.1. *Условие доминирования количества $e^- e^+$ пар.* Как было сказано выше, в достаточно разреженной и горячей плазме количество $e^+ e^-$ пар намного больше тех электронов, которые нейтрализуют электрический заряд атомных ядер вещества. В такой водородной плазме, согласно вышесказанному, концентрация протонов $n_p \ll n_e$. Согласно требованию локальной нейтральности $n_p - n_e + n_{pos} = 0$, поэтому $n_e \approx n_{pos}$. Такое состояние может реализоваться даже при $k_B T < m_e c^2$, если концентрация протонов достаточно мала [9]. Согласно (9) и требованию $n_p \ll n_e$, при $k_B T \gg m_e c^2$ получим ограничения на концентрацию протонов n_p и на плотность ρ_b

$$n_p \ll \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \zeta(3) \approx 3.2 \cdot 10^{30} \left(\frac{k_B T}{m_e c^2} \right)^3 \text{ см}^{-3},$$

$$\rho_b = m_p n_p \ll \rho_0 = 5.3 \cdot 10^6 \left(\frac{k_B T}{m_e c^2} \right)^3 \text{ г/см}^3.$$

По результатам [3] в ранней Вселенной при $k_B T \approx m_e c^2$ для плотности ρ_b получается значение 0.38 г/см^3 . Когда температура в ранней Вселенной была $k_B T \approx 200 m_e c^2$ ($\approx 100 \text{ МэВ}$), то плотность барионов $\rho_b \approx 10^4 \text{ г/см}^3$ [11]. Так что условие $n_p \ll n_e$ выполняется и учет рождения $e^- e^+$ пар при вычислении диэлектрической проницаемости необходим.

5.2. *Условие идеальности.* В представленной работе все результаты получены с помощью кинетических уравнений Больцмана, которые справедливы, если нарушения идеальности плазмы невелики. В рассмотренном случае это нарушение обусловлено взаимодействием между заряженными частицами [6,7]. Так как $n_p \ll n_e$, то основной вклад в энергию взаимодействия между частицами обусловлен в основном заряженными лептонами: электронами и позитронами. Чем меньше средняя энергия взаимодействия $e^2 n^{1/3}$ между двумя заряженными лептонами от их средней тепловой энергии $k_B T$, тем более оправдано описание $e^- e^+$ плазмы кинетическими уравнениями Больцмана. С учетом (9), для плазмы с обильным рождением $e^- e^+$ пар при $k_B T \gg m_e c^2$ для отношения этих энергий, которое называется газовым параметром, получим

$$\frac{e^2 n^{1/3}}{k_B T} = \sqrt[3]{3\zeta(3)/\pi^2} \alpha \approx 5 \cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, эту плазму можно считать идеальной.

5.3. Отсутствие затухания Ландау. Электроны плазмы, скорость которых близка, но чуть меньше фазовой скорости электромагнитной волны, отбирают от волны энергию. А те электроны, скорость которых чуть больше фазовой скорости электромагнитной волны, отдают свою энергию волне. Если волна отдает электронам больше энергии, чем получает от них, то она затухает [7]. Это поглощение не связано со столкновениями частиц в плазме и называется затуханием Ландау. В e^+e^- плазме при $k_B T \gg m_e c^2$ скорость лептонов близка к скорости света в вакууме, а фазовая скорость поперечной электромагнитной волны, согласно рис.1, $v_f = c/\sqrt{\varepsilon_{Fl}} > 1$. Поэтому затухание Ландау в такой плазме отсутствует.

5.4. Приближение бесстолкновительной плазмы. Выражения для диэлектрических проницаемостей ε_{Fl} и $\varepsilon_{F\bar{l}}$ (8,11,19) получены согласно уравнениям Власова [5]. Приближение бесстолкновительной плазмы оправдано, если частота электромагнитной волны ω намного больше частоты столкновений ν между частицами плазмы. В ультрарелятивистской e^-e^+ плазме из-за малости концентрации атомных ядер по сравнению с концентрацией e^-e^+ пар, столкновения между заряженными лептонами происходят гораздо чаще, чем между ядрами и лептонами. В ультрарелятивистской e^-e^+ плазме частота столкновений между лептонами определяется сечениями электрон-электрон (e^-e^-), позитрон-позитрон (e^+e^+), и электрон-позитрон (e^-e^+) упругих рассеиваний, а также сечениями тормозного излучения при этих рассеиваниях. Дифференциальные сечения упругих (e^-e^-) и (e^+e^+) процессов равны, а сечение процесса (e^-e^+) отличается от первых множителем меньше единицы [12]. Сечения же тормозного излучения ($e^-e^- \gamma$) и ($e^+e^+ \gamma$) одинаковы, а сечение процесса ($e^-e^+ \gamma$) больше этих сечений на логарифмический множитель [12].

Для оценки частоты столкновений между лептонами $\nu_{ll} = n_e \sigma c$ принято, что соответствующие сечения σ этих процессов между заряженными лептонами приблизительно равны, и использованы транспортные сечения для ультрарелятивистских лептонов σ_{ll} из [7]. До значения температуры $T_0 \approx 8 m_e c^2 / k_B$ частота столкновений между лептонами ν_{ll} определяется упругими процессами, а выше этой температуры, тормозным излучением при столкновении лептонов [7]. Опуская расчеты, приведем конечный результат для отношения плазменной частоты к частоте столкновений между лептонами ν_{ll} ультрарелятивистской e^-e^+ плазмы:

$$\frac{\Omega_{Fpl}}{\nu_{ll}} = \begin{cases} 3 \cdot 10^3, & T < T_0 \\ 4 \cdot 10^5 / (k_B T / m_e c^2)^2 \ln(k_B T / m_e c^2), & T \geq T_0. \end{cases}$$

Для значений температуры $k_B T / m_e c^2 = \{2; 5; 10; 25; 50; 100\}$ получим $\Omega_{Fpl} / \nu_{ll} \approx \{3 \cdot 10^3; 3 \cdot 10^3; 1700; 200; 40; 10\}$. Если же учесть, что в ультрарелятивистской горячей $e^- e^+$ плазме Ω_{Fpl} является нижней границей возможных значений частот электромагнитной волны, а основная часть энергии излучения сосредоточена в области вокруг частоты $\omega_{max} \approx 28 \Omega_{Fpl}$, то эти числа следует увеличить на порядок.

Частоту столкновений электронов с фотонами $\nu_{e\gamma}$ в ультрарелятивистской $e^- e^+$ плазме ($k_B T \gg m_e c^2$) можно оценить по сечению эффекта Комптона [12] и по концентрации фотонов как концентрация Бозе газа [8]. Простые вычисления показывают, что $\omega_{max} / \nu_{e\gamma} = 10^5 m_e c^2 / k_B T$. Для рассмотренных здесь значений температуры этот процесс по сравнению с вышеупомянутыми процессами несущественен.

Таким образом, использованное нами приближение бесстолкновительной плазмы для определения диэлектрической проницаемости ультрарелятивистской $e^- e^+$ плазмы оправдано.

6. Заключение. Если температура водородной плазмы достаточно высока ($k_B T \gg m_e c^2$) и концентрация протонов намного меньше, чем $3 \cdot 10^{30} (k_B T / m_e c^2)^3 \text{ см}^{-3}$, то в термодинамически равновесном состоянии в такой плазме количество $e^- e^+$ пар намного больше количества протонов. В частности, в таком состоянии находилось вещество в ранней Вселенной чуть раньше стадии рекомбинации. Правда, в нем присутствовали всевозможные лептоны и ядра легких элементов [11].

В представленной работе с помощью уравнений Власова, при отсутствии внешнего магнитного поля, получены выражения для поперечной и продольной диэлектрических проницаемостей разреженной, ультрарелятивистской, электрон-позитронной горячей плазмы. Показано, что модель бесстолкновительной идеальной плазмы для определения этих характеристик является хорошим приближением. Ранее эти характеристики горячей плазмы без учета рождения $e^- e^+$ пар с максвелловским распределением ультрарелятивистских электронов получены в [8] и показано, что плазменная частота такой плазмы обратно пропорциональна температуре. В отличие от этого, из-за обильного рождения электронов и позитронов их распределение становится фермиевским, а плазменная частота Ω_{Fpl} - прямо пропорциональной температуре. Показано, что отношение частоты ω_{max} (на которой спектральная плотность теплового излучения максимальна) к плазменной частоте постоянно и равно 28. При наличии в плазме $e^- e^+$ пар спектр теплового излучения искажен сильнее, чем при их отсутствии,

однако, большое значение этого отношения и маленькие значения параметров $a = \hbar\Omega_{Fpl}/k_B T \approx 0.1$ и $\beta = 1 - W_{pl}/W_0 \approx 4 \cdot 10^{-4}$, где W_{pl} и W_0 плотности энергии излучения в плазме и в вакууме, соответственно, указывают на большую близость теплового излучения в ультрарелятивистской электрон-позитронной горячей разреженной плазме к чернотельному. Поэтому, даже с учетом наличия ультрарелятивистских электрон-позитронных пар, в ранней Вселенной в эпоху, предшествовавшую эпохе рекомбинации, спектр теплового излучения можно считать планковским. Следовательно, вывод в [3] (полученный без учета рождения e^-e^+ пар) о том, что тепловое излучение в ранней Вселенной является планковским, остается в силе.

Работа выполнена в научно-исследовательской лаборатории физики сверхплотных звезд института физики ЕГУ, финансируемой комитетом по науке Министерства образования, науки, культуры и спорта Республики Армения.

Ереванский государственный университет, Армения
e-mail: ghajyan@ysu.am hararthur@ysu.am

ELECTROMAGNETIC PROPERTIES OF STELLAR MATTER. I. DIELECTRIC PERMEABILITY OF THE HOT RAREFIED PLASMA WITH ABUNDANT PRODUCTION OF ELECTRON-POSITRON PAIRS

G.S.HAJYAN, A.S.HARUTYUNYAN

Using the Vlasov equations, the transverse and longitudinal dielectric permeabilities of the hot rarefied ultrarelativistic electron-positron plasma are determined. The Fermi distribution was used as the unperturbed distribution function of electrons and positrons. It is shown that due to the abundant production of electron-positron pairs, the plasma frequency of ultrarelativistic plasma increases linearly with increasing temperature. In this case, the ratio of the frequency at which the spectral density of equilibrium radiation is maximum to the plasma frequency remains unchanged and is equal to 28. It is shown that in such plasma, in particular in the matter of the early Universe in the ultrarelativistic electron-positron epoch, the radiation spectrum differs very slightly from the black-body radiation.

Keywords: *ultrarelativistic electron-positron plasma: dielectric permeability*

ЛИТЕРАТУРА

1. *М.Шварцшильд*, Строение и эволюция звезд, М., ИЛ, 1961.
2. *C.Alcock, E.Farhi, A.Olinto*, *Astrophys. J.*, **310**, 261, 1986.
3. *С.А.Тригер, А.Л.Хомкин*, Прикладная физика, No.3, 2009.
4. *Г.П.Алоджани, А.А.Саарян*, *Астрофизика*, **20**, 571, 1984, (*Astrophysics*, **20**, 317, 1984). <https://doi.org/10.1007/BF01005422>.
5. *А.А.Власов*, *ЖЭТФ*, **8**, 291, 1938.
6. *В.П.Силин, А.А.Рухадзе*, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, 1961.
7. *Е.М.Лифшиц, А.П.Питаевский*, Физическая кинетика, М., Наука, 1979.
8. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц*, Статистическая физика, М., Наука, 1964.
9. *Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков*, Релятивистская астрофизика, М., Наука, 1967.
10. *В.П.Силин*, *ЖЭТФ*, **38**, 1577, 1960.
11. *Г.С.Бисноватый-Коган*, Релятивистская астрофизика и физическая космология, Москва, изд. КРАСАНД, 2010.
12. *В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, А.П.Питаевский*, Релятивистская квантовая физика, ч.1., М., Наука, 1968.