

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2000

УДК 539.3

ВНЕДРЕНИЕ ЖЕСТКОГО ШТАМПА С ЭЛЕКТРОДОМ В ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Баблоян А.А., Бегларян А.Г., Шахвердян Г.Н.

Ա. Հ. Բաբլոյան, Ա. Գ. Բեգլարյան, Գ. Ն. Շահվերդյան

Էլեկտրոդով կոշտ դոշմի ներթափանցումը պiezոկերամիկական կիսահարթության մեջ երբեք հաշվառումով

Ստացված են պiezոկերամիկական կիսահարթության համար կոնտակտային խնդիրների ճշգրիտ լուծումները երբեք ազդեցության հաշվառումով, երբ դոշմի և պiezոկերամիկայի միջև տեղի ունի լրիվ հարակցում կամ կոտեճյան շփում. Դոշմի և պiezոկերամիկայի միջև դրված է էլեկտրոդ և ախտահարված քննարկված էլեկտրոդ պiezոկերամիկական կիսահարթության եզրի հետ կապմունք և կամայական անկյուն

A. H. Babloyan, A. G. Beglaryan, G. N. Shahverdyan

The intrusions of hard stamp with electrode into piezoceramic half-line, taking into consideration the influence of ether

Получены точные решения ряда контактных задач для пьезокерамической полуплоскости с учетом (или без учета) влияния эфира. Вектор предварительной поляризации с границей пьезокерамической полуплоскости составляет произвольный угол

В работе приводятся точные решения контактных задач для пьезокерамической полуплоскости с учетом нематериальной среды (эфира), когда между жестким штампом и пьезокерамикой имеет место полное сцепление или кулоновское трение, а вектор предварительной поляризации составляет произвольный угол с границей полуплоскости. Рассматривается случай, когда электрические граничные условия также задаются в смешанном виде. Аналогичные задачи рассматривались в работах [1,2,8].

Как известно [1,2], уравнения равновесия электроупругости для плоско-деформированного состояния имеют вид

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} &= 0 \\ (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + c_{44} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + c_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + e_{15} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= 0 \\ (e_{13} + e_{31}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + e_{15} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

где u_x и u_z — проекции вектора перемещений в декартовой системе координат, ψ — потенциал электрического поля. Уравнения состояния будут

$$\sigma_x = c_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} - e_{31} E_z, \quad \tau_{xz} = c_{44} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) - e_{15} E_x$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y &= c_{12} \frac{\partial u_z}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} - e_{31} E_z, \quad D_z = e_{15} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + \varepsilon_{11} E_x \\
\sigma_z &= c_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} - e_{33} E_z, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = D_x = 0, \quad (\operatorname{rot} \bar{E} = 0) \\
D_x &= e_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \varepsilon_{33} E_z, \quad \operatorname{div} \bar{D} = 0, \quad \bar{E} = -\operatorname{grad} \psi
\end{aligned} \quad (2)$$

Общее решение дифференциальных уравнений (1) в полярной системе координат (r, φ) для клиновидных областей можно представить в виде интеграла Меллина [3,4,5]

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^3 \int_L \gamma_1(\alpha_p) \lambda^{-1} \Phi_p'(\lambda, \theta_p) \rho_p^{-\lambda} d\lambda, \quad \Phi_p'' + \lambda^2 \Phi_p = 0 \\
u_2 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^3 \int_L \gamma_2(\alpha_p) \Phi_p(\lambda, \theta_p) \rho_p^{-\lambda} d\lambda, \quad \psi = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^3 \int_L \Phi_p(\lambda, \theta_p) \rho_p^{-\lambda} d\lambda \\
\sigma_\varphi &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^3 \int_L \frac{\gamma_3(\alpha_p)}{\alpha_p} \left[\Phi_p'(\lambda, \theta_p) \cos \theta_p + \lambda \Phi_p(\lambda, \theta_p) \sin \theta_p \right] \frac{b_p^{-\lambda+1}(\varphi)}{r^{\lambda+1}} d\lambda \\
\tau_{\varphi\theta} &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^3 \int_L \gamma_3(\alpha_p) \left[\frac{\Phi_p'(\lambda, \theta_p)}{\alpha_p^2} \sin \theta_p - \lambda \Phi_p(\lambda, \theta_p) \cos \theta_p \right] \frac{b_p^{-\lambda+1}(\varphi)}{r^{\lambda+1}} d\lambda \\
\sigma_r + \sigma_\theta &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^3 \int_L \frac{\alpha_p^2 - 1}{\alpha_p} \gamma_3(\alpha_p) \left[\lambda \Phi_p(\lambda, \theta_p) \sin \theta_p - \Phi_p'(\lambda, \theta_p) \cos \theta_p \right] \frac{b_p^{-\lambda+1}(\varphi)}{r^{\lambda+1}} d\lambda \\
D_\theta &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^3 \int_L \gamma_4(\alpha_p) \Phi_p(\lambda, \theta_p) b_p^{-\lambda}(\varphi) r^{-\lambda-1} d\lambda \\
D_r &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^3 \int_L \left[\frac{\alpha_p^2 - 1}{2\alpha_p} \Phi_p'(\lambda, \theta_p) \sin 2\varphi + \lambda \Phi_p(\lambda, \theta_p) \right] \frac{\alpha_p \gamma_4(\alpha_p)}{b_p(\varphi) \rho_p^{\lambda+1}} d\lambda
\end{aligned} \quad (3)$$

где использованы обозначения

$$x = r \cos \varphi = \rho \cos \theta, \quad \alpha z = \alpha r \sin \varphi = \rho \sin \theta$$

$$\rho_p = r b_p(\varphi), \quad \operatorname{tg} \theta_p = \alpha_p \operatorname{tg} \varphi, \quad b_p^2(\varphi) = \cos^2 \varphi + \alpha_p^2 \sin^2 \varphi$$

$$\Delta_0(\alpha) \gamma_1(\alpha) = \alpha [(c_{11} + c_{44})(e_{15} - \alpha^2 e_{33}) - (e_{31} + e_{15})(c_{44} - \alpha^2 c_{33})]$$

$$\Delta_0(\alpha) \gamma_2(\alpha) = (c_{13} + c_{44})(e_{31} + e_{15}) \alpha^2 + (c_{11} - \alpha^2 c_{44})(e_{15} - \alpha^2 e_{33})$$

$$\Delta_0(\alpha) = (c_{11} - \alpha^2 c_{44})(c_{44} - \alpha^2 c_{33}) + (c_{13} + c_{44})^2 \alpha^2$$

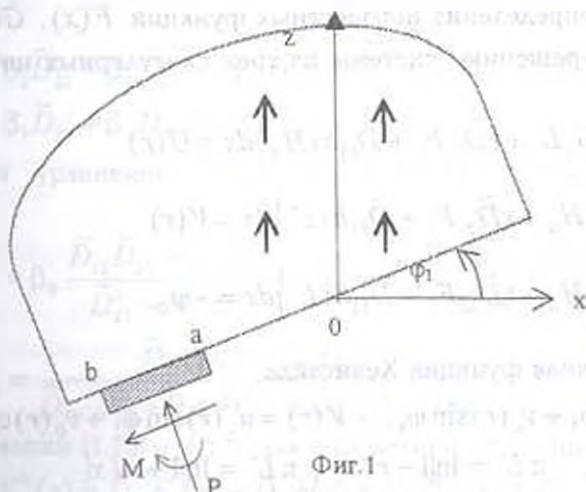
$$\begin{aligned}
\gamma_3(\alpha) &= c_{44} \alpha \gamma_1(\alpha) + c_{44} \gamma_2(\alpha) - e_{15} = c_{11} \alpha^{-1} \gamma_1(\alpha) - c_{13} \gamma_2(\alpha) + e_{31} = \\
&= -\alpha [c_{13} \gamma_1(\alpha) - c_{33} \alpha \gamma_2(\alpha) + \alpha e_{33}], \quad \gamma_5(\alpha) = \gamma_4(\alpha) + \varepsilon_0
\end{aligned} \quad (4)$$

$$\gamma_4(\alpha) = e_{31} \gamma_1(\alpha) - e_{33} \alpha \gamma_2(\alpha) - \alpha \varepsilon_{33} = -\alpha^{-1} [e_{15} \alpha \gamma_1(\alpha) + e_{15} \gamma_2(\alpha) + \varepsilon_{11}]$$

Здесь ε_0 - диэлектрическая постоянная эфира, c_{ij} - упругие, e_{ij} - электрические, ε_{ij} - диэлектрические постоянные пьезокерамического

материала, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ - корни характеристического многочлена шестого порядка, для которых $\operatorname{Re} \alpha_p > 0$

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) = & (c_{11} - \alpha^2 c_{44})(c_{44} - \alpha^2 c_{33})(e_{11} - \alpha^2 e_{33}) + \\ & + (c_{13} + c_{44}) \alpha (e_{11} - \alpha^2 e_{33}) + 2(c_{13} + c_{44})(e_{31} + e_{15}) \alpha^2 (e_{15} - \alpha^2 e_{33}) - \\ & - (e_{31} + e_{15})^2 \alpha^2 (c_{44} - \alpha^2 c_{33}) + (c_{11} - \alpha^2 c_{44})(e_{15} - \alpha^2 e_{33})^2 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$



Фиг.1

1. Пусть пьезокерамическая полуплоскость ограничена лучами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2 = \varphi_1 + \pi$, а жесткий штамп расположен по отрезку $L = \{0 < a \leq r \leq b < \infty, \varphi = \varphi_2\}$. При этом граничные условия рассматриваемой задачи в случае полного сцепления будут (фиг.1)

$$\sigma_\varphi(r, \varphi_k) = 0, \tau_{r\varphi}(r, \varphi_k) = 0, \quad (0 \leq r < \infty, r \notin L, k = 1, 2)$$

$$u_z(r, \varphi_2) = u_0(r), u_r(r, \varphi_1) = v_0(r), \psi(r, \varphi_2) = \psi_0 = \text{const}, \quad (r \in L) \quad (1.1)$$

Кроме граничных условий (1.1) должны удовлетворяться также электрические условия контакта пьезокерамики с эфиром,

$$\psi(r, \varphi_1) = \psi_0(r, \varphi_1 + 2\pi), \quad \psi(r, \varphi_2) = \psi_0(r, \varphi_2)$$

$$D_\varphi(r, \varphi_1) = D_{0\varphi}(r, \varphi_1 + 2\pi), \quad D_\varphi(r, \varphi_2) = D_{0\varphi}(r, \varphi_2), \quad (r \notin L) \quad (1.2)$$

$$\psi_0(r, \varphi_2) = \psi_0, \quad (r \in L)$$

где L — область контакта, $\psi_0(r, \varphi)$ — потенциальная функция для эфира

$$\begin{aligned} \psi_0(r, \varphi) = & \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[A_0(\lambda) \sin \lambda(\pi - \varphi + \varphi_2) + B_0(\lambda) \cos \lambda(\pi - \varphi + \varphi_2) \right] r^{-\lambda} d\lambda \\ & (0 \leq r < \infty, \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \pi \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Функции Φ_p ищем в виде

$$\Phi_p(\lambda, \theta_p) = A_p(\lambda) \sin \lambda(\theta_p - \theta_{p1}) + B_p(\lambda) \cos \lambda(\theta_p - \theta_{p1})$$

$$\operatorname{tg} \theta_{p1} = \alpha_p \operatorname{tg} \varphi_1, \quad \operatorname{tg} \theta_{p2} = \alpha_p \operatorname{tg} \varphi_2, \quad (p = 1, 2, 3) \quad (1.4)$$

Обозначим неизвестные контактные нормальные и касательные напряжения через $f(r)$ и $g(r)$ соответственно и вводим обозначения

$$F(r) = f(r) \cos \varphi_1 + g(r) \sin \varphi_1, \quad G(r) = f(r) \sin \varphi_1 - g(r) \cos \varphi_1, \quad (r \in L) \\ D_0(r, \varphi_2) = D_{00}(r, \varphi_2) = h(r), \quad (r \in L) \quad (1.5)$$

где $h(r)$ — неизвестный нормальный компонент вектора электрического смещения (индукции) под жестким штампом.

Удовлетворяя всем граничным и контактным условиям, после ряда преобразований, определение неизвестных функций $F(x)$, $G(x)$ и $h(x)$ ($x \in L$) сводим к решению системы из трех сингулярных интегральных уравнений:

$$\int_L \{ -\bar{D}_{11} G_2 L^- + (\bar{D}_{12} F_2 + \bar{D}_{13} h) H_0 \} dx = U(r) \\ \int_L \{ \bar{D}_{21} G_2 H_0 + (\bar{D}_{22} F_2 + \bar{D}_{23} h) L^- \} dx = V(r) \\ \int_L \{ \bar{D}_{31} G_2 H_0 + (\bar{D}_{32} F_2 + \bar{D}_{33} h) L^- \} dx = -\psi_0 \quad (1.6)$$

где $H_0(x)$ — единичная функция Хевисайда

$$U(r) = -u_0(r) \cos \varphi_1 + v_0(r) \sin \varphi_1, \quad -V(r) = u_0(r) \sin \varphi_1 + v_0(r) \cos \varphi_1, \\ H_0 = H_0(r/x - 1), \quad \pi L^- = \ln|1 - r/x|, \quad \pi L^+ = \ln|1 + r/x| \quad (1.7)$$

а $(0.5\pi - \varphi_1)$ — угол между вектором предварительной поляризации и границей полуплоскости (вектор поляризации направлен внутрь тела).

Постоянные величины $\bar{D}_{ij}$ и D_{ij} определяются по формулам

$$D_{11} = [\Gamma_1(\alpha_p), \alpha_p^{-1}, \Gamma_3(\alpha_p)], \quad D_{12} = [1, \Gamma_1(\alpha_p), \Gamma_3(\alpha_p)] \\ D_{13} = [1, \alpha_p^{-1}, \Gamma_1(\alpha_p)], \quad D_{21} = [\Gamma_2(\alpha_p), \alpha_p^{-1}, \Gamma_5(\alpha_p)] \\ D_{22} = [1, \Gamma_2(\alpha_p), \Gamma_5(\alpha_p)], \quad D_{23} = [1, \alpha_p^{-1}, \Gamma_2(\alpha_p)] \\ D_{31} = [\gamma_3^{-1}(\alpha_p), \alpha_p^{-1}, \Gamma_5(\alpha_p)], \quad D_{32} = [1, \gamma_3^{-1}(\alpha_p), \Gamma_5(\alpha_p)] \\ D_{33} = [1, \alpha_p^{-1}, \gamma_3^{-1}(\alpha_p)], \quad D_0 = [1, \alpha_p^{-1}, \Gamma_3(\alpha_p)] \quad (1.8)$$

где использованы обозначения

$$\Gamma_k(\alpha_p) = \frac{\gamma_k(\alpha_p)}{\gamma_3(\alpha_p)}, \quad D_0 \cdot \bar{D}_{ij} = D_{ij}, \quad [a_p, b_p, c_p] = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad (1.9)$$

Пользуясь теоремой Виета, для уравнения шестого порядка (5) доказываем, что матрица $\{D_{ij}\}$ симметрична, то есть $D_{ij} = D_{ji}$ для любого пьезокерамического материала

Для решения интегральных уравнений умножим второе и третье уравнения системы (1.6) на β_1 и β_2 соответственно и прибавим к первому уравнению

$$\int_L \left\{ H_0 [\tilde{D}_{12} F_2 + \tilde{D}_{13} h + (\beta_1 \tilde{D}_{12} + \beta_2 \tilde{D}_{13}) G_2] + \right. \quad (1.10)$$

$$\left. + L [(\beta_1 \tilde{D}_{22} + \beta_2 \tilde{D}_{23}) F_2 + (\beta_1 \tilde{D}_{23} + \beta_2 \tilde{D}_{33}) h - \tilde{D}_{11} G_2] \right\} dx = U + \beta_1 V - \beta_2 \psi_0$$

Далее, требуем выполнение следующих соотношений:

$$\frac{\beta_1 \tilde{D}_{22} + \beta_2 \tilde{D}_{23}}{\tilde{D}_{12}} = \frac{\beta_1 \tilde{D}_{23} + \beta_2 \tilde{D}_{33}}{\tilde{D}_{13}} = \frac{-\tilde{D}_{11}}{\beta_1 \tilde{D}_{12} + \beta_2 \tilde{D}_{13}} = -\beta_0 \quad (1.11)$$

или же

$$\begin{aligned} \beta_1 \tilde{D}_{22} + \beta_2 \tilde{D}_{23} &= -\beta_0 \tilde{D}_{12}, \quad \beta_1 \tilde{D}_{12} + \beta_2 \tilde{D}_{13} = \beta_0^{-1} \tilde{D}_{11} \\ \beta_1 \tilde{D}_{23} + \beta_2 \tilde{D}_{33} &= -\beta_0 \tilde{D}_{13} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Разрешая уравнения (1.11) или (1.12) относительно β_1 , β_2 и β_0 , получим

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_0 \frac{\tilde{D}_{12} \tilde{D}_{33} - \tilde{D}_{13} \tilde{D}_{23}}{\tilde{D}_{23}^2 - \tilde{D}_{22} \tilde{D}_{33}}, \quad \beta_2 = \beta_0 \frac{\tilde{D}_{22} \tilde{D}_{13} - \tilde{D}_{12} \tilde{D}_{23}}{\tilde{D}_{23}^2 - \tilde{D}_{22} \tilde{D}_{33}} \\ \beta_0^2 &= \frac{\tilde{D}_{11} (\tilde{D}_{22}^2 - \tilde{D}_{22} \tilde{D}_{33})}{\tilde{D}_{33} \cdot \tilde{D}_{12}^2 + \tilde{D}_{22} \cdot \tilde{D}_{13}^2 - 2 \tilde{D}_{12} \cdot \tilde{D}_{13} \cdot \tilde{D}_{23}} \end{aligned} \quad (1.13)$$

На основании (1.10) – (1.13) для определения функций

$$X^{\pm}(x) = \tilde{D}_{12} F_2(x) + \tilde{D}_{13} h(x) \pm \beta_0^{-1} \tilde{D}_{11} G_2(x) \quad (1.14)$$

получим следующее известное сингулярное интегральное уравнение:

$$\int_L \left[H_0 + \frac{\beta_0}{\pi} L^- \right] X^{\pm}(x) dx = g^{\pm}(r), \quad (x \in L) \quad (1.15)$$

$$\text{где } g^{\pm}(r) = U(r) \pm [\beta_1 V(r) - \beta_2 \psi_0], \quad \psi_0 = \text{const} \quad (1.16)$$

Для получения недостающего уравнения, из последних двух уравнений (1.6) исключим функцию $G_2(x)$. Тогда для определения неизвестной функции

$$X(x) = \beta_2 F_2(x) - \beta_1 h(x), \quad (\tilde{D}_{23}^2 - \tilde{D}_{22} \tilde{D}_{33}) \cdot g(r) = \beta_0 [\tilde{D}_{31} V(r) + \tilde{D}_{21} \psi_0] \quad (1.17)$$

получим простое интегральное уравнение

$$\int_L X(x) L^- dx = g(r), \quad (r \in L) \quad (1.18)$$

Уравнения (1.15) и (1.18) решаются точно, в замкнутом виде [6,7]. После решения интегральных уравнений (1.15) и (1.18) контактные нормальные и касательные напряжения $(f_2(x), g_2(x))$, а также нормальная проекция вектора индукции $(D_{\varphi}(x) = h(x))$ будут определяться элементарно из соотношений (1.5), (1.14) и (1.17).

В том случае, когда L - отрезок прямой (a, b) , решение сингулярных интегральных уравнений (1.15) и (1.18) представим в виде ряда Фурье по полиномам Якоби и Чебышева соответственно [3,7]. Для уравнения (1.15) имеем

$$X^{\pm}(x) = \omega_{\pi}^{-1}(x) \sum_{m=0}^{\infty} X_m^{\pm} Q_m^{\pi}(x), \quad (a \leq x \leq b) \quad (1.19)$$

где $(c)_m$ - символ Похгаммера,

$$X^2 = \frac{m(m!) \sin 2\pi\gamma}{\pi(0.5+\gamma)_m(0.5-\gamma)_m} \int_a^b \frac{g_1(r)}{\omega_1(r)} Q_2^{\gamma}(r) dr, \quad \gamma = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\beta_0 + 1}{\beta_0 - 1}$$

$$Q_2^{\gamma}(x) = P_m^{(\gamma-1/2, -\gamma-1/2)} \left(\frac{2x-b-a}{b-a} \right), \quad \varpi_{\gamma}(x) = (b-x)^{-\gamma+1/2} (x-a)^{\gamma+1/2} \quad (1.20)$$

Точное решение уравнения (1.18) приведено в [6].

Первые два коэффициента разложения (1.19) можно определять также из соотношений

$$\int X(x) dx = \frac{\pi X_0}{\cos \pi \gamma}, \quad \int \left(x - \frac{a+b}{2} \right) X(x) dx = \frac{\pi(b-a)}{2 \cos \pi \gamma} \left[(1/4 - \gamma^2) X_1 - 2\gamma X_0 \right] \quad (1.21)$$

Путем разделения действительных и мнимых частей отсюда получаются условия равновесия жесткого штампа.

Аналогичным образом могут быть получены замкнутые решения других контактных задач электроупругости с учетом (или без учета) нематериальной среды (эфира). Отметим следующий факт: в контактных задачах теории упругости со сцеплением, напряжения вблизи концов жесткого штампа имеют осциллирующий характер. В том случае, когда все три граничные условия (механические и электрические) задаются в смешанном виде, при любом направлении вектора предварительной поляризации контактные напряжения на концах штампа обращаются в бесконечность монотонно (без осцилляций), независимо от того, учитывается ли влияние эфира или нет.

Приведем значения постоянных D_i и β_i для некоторых пьезокерамических материалов ($D_{ij} = D_{ji}$), при учете влияния эфира ($\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ ф/м):

1. Пьезокерамика-PZT-4:

$$D_0 = 1.373751, \quad \tilde{D}_{11} = 0.183924, \quad \tilde{D}_{12} = -0.0752849, \quad \tilde{D}_{13} = -0.0173454, \\ \tilde{D}_{22} = 0.177179, \quad \tilde{D}_{23} = -0.0221169, \quad \tilde{D}_{33} = -0.0884141, \quad \beta_0 = 2.49048, \\ \beta_1 = 0.341647, \quad \beta_2 = -5.74054, \quad \delta_0 = \pi^{-1} \arctg \beta_0^{-1} = 0.121538$$

2. Пьезокерамика-PZT-6S/35:

$$D_0 = -1.990381, \quad \tilde{D}_{11} = 0.139673, \quad \tilde{D}_{12} = -0.0604444, \quad \tilde{D}_{13} = -0.0197556, \\ \tilde{D}_{22} = 0.159684, \quad \tilde{D}_{23} = -0.0214183, \quad \tilde{D}_{33} = -0.0174305, \quad \beta_0 = 3.01575, \\ \beta_1 = 0.586428, \quad \beta_2 = -4.13862, \quad \delta_0 = \pi^{-1} \arctg \beta_0^{-1} = 0.101917$$

3. Пьезокерамика - ЦТС-19:

$$D_0 = 217.9271, \quad \tilde{D}_{11} = 0.230068, \quad \tilde{D}_{12} = -0.0780912, \quad \tilde{D}_{13} = -0.0130722, \\ \tilde{D}_{22} = 0.209539, \quad \tilde{D}_{23} = -0.0205082, \quad \tilde{D}_{33} = -0.00862917, \quad \beta_0 = 4.52393, \\ \beta_1 = 0.823652, \quad \beta_2 = -8.81074, \quad \delta_0 = \pi^{-1} \arctg \beta_0^{-1} = 0.0692478$$

Для сравнения приведем значения постоянных D_i и β_i для тех же пьезокерамических материалов ($D_{ij} = D_{ji}$) без учета влияния эфира

($\varepsilon_0 = 0$):

1. Пьезокерамика-PZT-4:

$$\begin{aligned} D_0 &= 1.37483i, \tilde{D}_{11} = 0.183951, \tilde{D}_{12} = -0.0752509, \tilde{D}_{13} = -0.0173318, \\ \tilde{D}_{22} &= 0.177223, \tilde{D}_{23} = -0.0220996, \tilde{D}_{33} = -0.0083345, \beta_0 = 2.49178 \\ \beta_1 &= 0.341825, \beta_2 = -5.74353, \delta_0 = \pi^{-1} \operatorname{arctg} \beta_0^{-1} = 0.121481; \end{aligned}$$

2. Пьезокерамика-PZT-65/35:

$$\begin{aligned} D_0 &= -1.99345i, \tilde{D}_{11} = 0.139707, \tilde{D}_{12} = -0.060407, \tilde{D}_{13} = -0.0197251, \\ \tilde{D}_{22} &= 0.159725, \tilde{D}_{23} = -0.0213853, \tilde{D}_{33} = -0.0174036, \beta_0 = 3.01951, \\ \beta_1 &= 0.58716, \beta_2 = -4.14378, \delta_0 = \pi^{-1} \operatorname{arctg} \beta_0^{-1} = 0.0101799; \end{aligned}$$

3. Пьезокерамика-ЦТС-19:

$$\begin{aligned} D_0 &= 218.093i, \tilde{D}_{11} = 0.230084, \tilde{D}_{12} = -0.0780675, \tilde{D}_{13} = -0.0130622, \\ \tilde{D}_{22} &= 0.209576, \tilde{D}_{23} = -0.0204925, \tilde{D}_{33} = -0.00862259, \beta_0 = 4.52713, \\ \beta_1 &= 0.824233, \beta_2 = -8.81696, \delta_0 = \pi^{-1} \operatorname{arctg} \beta_0^{-1} = 0.0692005. \end{aligned}$$

2. Аналогичным образом задача индентирования жесткого штампа с электродом в пьезокерамическую плоскость при наличии кулоновского трения ($\tau_{\varphi} = \chi \sigma_{\varphi}$, $\sigma_{\varphi} = f(r)$, $r \in D$) и учете влияния эфире сводится к решению следующей системы сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \int_L \left\{ [A f(x) + \tilde{D}_{13} \sin \varphi_1 h(x)] H_0 - [B f(x) + \tilde{D}_{23} \cos \varphi_1 h(x)] L^- \right\} dx &= u(r) \quad (2.1) \\ \int_L \left\{ \tilde{D}_{31} (\sin \varphi_1 - \chi \cos \varphi_1) f(x) H_0 + [\tilde{D}_{32} (\cos \varphi_1 + \chi \sin \varphi_1) f(x) + \tilde{D}_{33} h(x)] L^- \right\} dx &= -\psi, \end{aligned}$$

где

$$A = \chi \tilde{D}_{12}, B = \tilde{D}_{11} (\sin \varphi_1 - \chi \cos \varphi_1) \sin \varphi_1 + \tilde{D}_{22} (\cos \varphi_1 + \chi \sin \varphi_1) \cos \varphi_1 \quad (2.2)$$

Путем введения новой неизвестной функции

$$X(x) = f(x) [A + \beta \tilde{D}_{31} (\sin \varphi_1 - \chi \cos \varphi_1)] + h(x) \tilde{D}_{12} \sin \varphi_1 \quad (2.3)$$

задачу свеем к решению сингулярного интегрального уравнения

$$\int_L [H_0 - \beta_0 L^-] X(x) = u(r) - \beta \psi, \quad (r \in L) \quad (2.4)$$

где числа β и β_0 при $\sin \varphi_1 \neq 0$ определяются из соотношений

$$\frac{\beta \tilde{D}_{32} (\cos \varphi_1 + \chi \sin \varphi_1) - \beta}{\beta \tilde{D}_{31} (\sin \varphi_1 - \chi \cos \varphi_1) + A} = \frac{\beta \tilde{D}_{33} - \tilde{D}_{23} \cos \varphi_1}{\tilde{D}_{11} \sin \varphi_1} = -\beta_0 \quad (2.5)$$

После решения уравнения (2.4) для двух пар значений β и β_0 , полученных из (2.5), с помощью формулы (2.3) можно определять неизвестные функций $f(x)$ и $h(x)$.

Как видно из (2.3) — (2.5), при контакте с трением степени особенностей напряжений зависят от коэффициента трения (χ) и направления вектора предварительной поляризации (анизотропии). Если же $\sin \varphi_1 = 0$ то вместо (2.4) будем иметь

$$\int_L \left\{ \chi (\tilde{D}_{31} \tilde{D}_{33} - \tilde{D}_{31} \tilde{D}_{23}) H_0 + (\tilde{D}_{32} \tilde{D}_{23} - \tilde{D}_{23} \tilde{D}_{33}) L \right\} f_2(x) dx = \tilde{D}_{33} u(r) - \tilde{D}_{23} \psi$$

$$\int_L \left\{ (\tilde{D}_{32} \tilde{D}_{21} - \tilde{D}_{22} \tilde{D}_{31}) f_2(x) + (\tilde{D}_{33} \tilde{D}_{21} - \tilde{D}_{23} \tilde{D}_{31}) h(x) \right\} L dx = \tilde{D}_{31} u(r) - \tilde{D}_{21} \psi \quad (2.6)$$

В частном случае, для гладкого штампа ($\chi = 0$) из (2.5) получим

$$\tilde{D}_{33} \beta = \tilde{D}_{23} \cos \varphi_1 \pm \sqrt{(\tilde{D}_{23}^2 - \tilde{D}_{22} \tilde{D}_{33}) \cos^2 \varphi_1 - \tilde{D}_{11} \tilde{D}_{33} \sin^2 \varphi_1}$$

$$\beta_0 = \mp (\tilde{D}_{13} \sin \varphi_1)^{-1} \sqrt{(\tilde{D}_{23} - \tilde{D}_{22} \tilde{D}_{33}) \cos^2 \varphi_1 - \tilde{D}_{11} \tilde{D}_{33} \sin^2 \varphi_1} \quad (2.7)$$

Уравнения (2.4) или (2.6) также решаются в замкнутом виде [6,7].

Отметим, что точные решения рассмотренных здесь задач, а также все выкладки, можно было получить более простым способом, если бы воспользовались результатами работы [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. Киев: Наукова думка, 1989. 23 с.
2. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. - М.: Наука, 1988. 471 с.
3. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. - М.: Наука, 1984. 255 с.
4. Баблоян А.А., Медкумян С.А. Плоская задача электроупругости пьезокерамического клина. Докл. НАН РА, 1999, т. 99, с. 172-177.
5. Баблоян А.А., Медкумян С.А., Шахвердян Г.Н. Некоторые задачи квазигенерала. // ЕГУ, Институт механики НАН РА. Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван, 1997, с.201-204.
6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. 708 с.
7. Попов Г.Я. Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. - ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
8. Баблоян А.А., Аванян В.Т., Варданян А.М. Общее решение уравнений равновесия электроупругости для наклонной полосы // Сб. науч. тр., конференция, посв. 90-летию со дня рожд. Т.Т. Хачатряна и О.М. Сапонджяна, Ереван, 1997, с.46-50.

Ереванский архитектурно-строительный институт

Поступила в редакцию
29.06.2000

УДК 539.3

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ
 ПЛАСТИНЫ, НА ПОВЕРХНОСТИ КОТОРОЙ ПРИКЛЕЕН
 СТРИНГЕР КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Григорян Э.Х.

Է.Խ.Գրիգորյան

Անվերջ առձգական սալի, որի վրա ստեղծված է վերջավոր երկարության սարիճեր, խնդրի լուծման
 մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է կոնտակտային խնդիր անվերջ առձգական սալի վերաբերյալ, որի վրա
 իր ամբողջ երկարությամբ ստեղծված է վերջավոր ստրինգեր: Խնդիրը հանգեցվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ
 սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը, որի աջ մասը հանդիսանում է խնդրի լուծումը, երբ սալը
 բացարձակ կոշտ է: Այնուհետև տրվում է խնդրի պարամետրերի ճշգրիտ գնահատական, որոնց դեպքում
 ստացված ինտեգրալ հավասարումը կարելի է լուծել հաջորդական մոտավորության և անվերջ
 հավասարումների սխեմով մեթոդներով:

Э.Х.Григорян

On solution of problem for an elastic infinite plate, on the surface of which finite length stringer is glued

В работе рассматривается контактная задача о передаче нагрузки от стрингера конечной длины к
 упругой бесконечной пластине. Причем стрингер по всей своей длине контакта приклеен к пластине. Задача
 сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, правая часть которого является
 решением задачи, соответствующей жесткой пластине. Далее дается точная оценка параметров задачи, при
 которых полученное интегральное уравнение можно решать с помощью методов последовательных
 приближений и бесконечных систем уравнений.

Рассматривается задача о передаче нагрузки от стрингера конечной длины к
 упругой бесконечной пластине. Причем стрингер по всей своей длине приклеен к
 пластине. Вопрос заключается в определении контактных касательных напряжений,
 когда сила приложена к концу $x = L$ стрингера.

Обсуждаемая задача ранее рассматривалась в работе [1] (здесь сила приложена к
 концу $x=0$ стрингера), где задача свелась к решению интегрального уравнения

$$Q(x) - \beta^2 \int_0^x (x-u)Q(u)du - \gamma^2 \int_0^1 \ln|x-u|Q(u)du - K = -\beta^2 x, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

где K определяется из условия $\int_0^1 Q(u)du = 1$.

$$K = \mu_0 G b L / P \eta + \gamma^2 \ln L, \quad Q(x) = q(x)L/P, \quad \beta^2 = G b L^2 / \eta E_1 A$$

$\gamma^2 = G b L (1 + \nu) (3 - \nu) / 4 \pi \eta E_2 l$; b, L, A, E_1 – ширина, длина, площадь
 поперечного сечения и модуль упругости материала стрингера соответственно; η, G –
 толщина и модуль сдвига материала клея соответственно, l, ν, E_2 – толщина,
 коэффициент Пуассона и модуль упругости материала пластины соответственно, μ_0 –
 неизвестная постоянная, P – величина силы, приложенной к концу $x = L$ стрингера.
 $q(x) = b \tau(x)$, $\tau(x)$ – контактные касательные напряжения.

Далее решение уравнения (1) ищется в виде

$Q(x) = Q_0(x) + Q(0)[1 + \gamma^2(x \ln x - x)] + Q(1)[1 + \gamma^2(1-x) \ln(1-x) - (1-x)] + R(x)$
 где $Q_0(x) = \beta \operatorname{ch} \beta(L-x) / \operatorname{sh} \beta$ является решением задачи в случае жесткой пластины.

В работе [2], где опять рассматривается эта задача, решение уравнения (1) строится с помощью ортогональных многочленов Чебышева второго рода.

1. Получение интегрального уравнения задачи. Относительно стрингера принимается модель контакта по линии, т.е. допускается, что контактные силы сосредоточены по длине средней линии контактного участка, а относительно пластины полагается, что во время деформации она находится в условии обобщенного плоского напряженного состояния. В таком случае

$$u_2(x, 0) = \frac{(1+\nu)(3-\nu)}{4E_2 t \pi} \int_0^L \left(\ln \frac{1}{|x-s|} + u_0 \right) q(s) ds \quad (2)$$

где $u_2(x, 0)$ — горизонтальное перемещение точки пластины при $y=0$, а остальные обозначения те же, что и выше.

Далее, полагая, что слой клея находится в условии чистого сдвига [1], получим

$$u_1(x) - u_2(x, 0) = \gamma_s \eta, \quad q(x) = b\tau(x) = bG\gamma_s \quad (3)$$

где $u_1(x)$ — перемещение точки стрингера, γ_s — деформация сдвига слоя клея, $\tau(x)$ — касательные напряжения в слое клея. В силу вышесказанного, относительно стрингера будем иметь:

$$\frac{d^2 u_1(x)}{dx^2} = \frac{1}{E_1 A} q$$

Имея в виду, что (3)

$$q(x) = \frac{[u_1(x, 0) - u_2(x, 0)] b G}{\eta}$$

окончательно получим

$$\frac{d^2 u_1(x)}{dx^2} - \alpha^2 u_1 = -\alpha^2 u_2 \quad (4)$$

где $\alpha^2 = bG/\eta E_1 A$.

Отметим, что должны иметь место и граничные условия

$$\left. \frac{du_1}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{du_1}{dx} \right|_{x=L} = \frac{P}{E_1 A} \quad (5)$$

Решение граничной задачи (4), (5) ищем в виде

$$u_1(x) = A_1 \operatorname{ch} \alpha x + B_1 \operatorname{sh} \alpha x + u^0(x)$$

где $u^0(x)$ является решением уравнения (4) при нулевых граничных условиях, т.е. в (5) надо положить $P=0$. $u^0(x)$ определяется в виде

$$u^0(x) = \alpha^2 A u_2$$

где

$$Au_2 = \int_0^L k(x, s) u_2(s) ds$$

$$k(x, s) = \frac{1}{2\alpha \sinh \alpha L} \begin{cases} \operatorname{ch}[\alpha(L-x-s)] + \operatorname{ch}[\alpha(L-x+s)] & x > s \\ \operatorname{ch}[\alpha(L-x-s)] + \operatorname{ch}[\alpha(L+x-s)] & x < s \end{cases}$$

Очевидно, что $k(x, s)$ — непрерывная функция и $k(x, s) = k(s, x)$.

Далее, удовлетворяя граничным условиям (5), будем иметь

$$u_1(x) = u_1^0(x) + \alpha^2 \int_0^L k(x, s) u_2(s) ds \quad (6)$$

где

$$u_1^0(x) = \frac{P \operatorname{ch} \alpha x}{E_1 A \alpha \sinh \alpha L}$$

Теперь, имея в виду (3), из (6) получим

$$\frac{\eta}{bG} q(x) + u_2(x) = \alpha^2 \int_0^L k(x, s) u_2(s) ds + u_1^0(x) \quad (7)$$

Тогда, в силу того, что имеем равенство (2), уравнение (6) запишется в виде

$$q(x) + \gamma^2 \left(\int_0^L \ln \frac{1}{|x-s|} q(s) ds - \alpha^2 \int_0^L k(x, s) \int_0^L \ln \frac{1}{|\tau-s|} q(\tau) d\tau ds \right) = -\gamma^2 u_0 \int_0^L q(s) ds + \\ + \alpha^2 \gamma^2 u_0 \int_0^L k(x, s) ds \cdot \int_0^L q(s) ds + \frac{bG}{\eta} u_1^0 \quad (8)$$

Здесь обозначения γ^2 , b , G , η , u_0 те же, что и во второй странице.

Для дальнейшего заметим, что спектром симметрического оператора

$D = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha^2$, областью определения которого являются дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям $(du/dx)_{x=0} = 0$, $(du/dx)_{x=L} = 0$, являются собственные значения

$\lambda_n = \alpha^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), а соответствующими собственными функциями

являются функции $\cos(n\pi x/L)$. С другой стороны, как известно [3], самосопряженный вполне непрерывный оператор A является обратным оператором оператора D . Это означает, что

$$A \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \int_0^L k(x, s) \cos\left(\frac{n\pi s}{L}\right) ds = \frac{L^2}{\alpha^2 L^2 + n^2 \pi^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (n = 0, 1, 2) \quad (9)$$

Теперь, после замены в (8) x на Lx , а s — на Ls , получим

$$q(x) + \gamma^2 L \left(\int_0^1 \ln \frac{1}{|x-s|} q(s) ds - \alpha^2 L \int_0^1 k(x, s) \int_0^1 \ln \frac{1}{|\tau-s|} q(\tau) d\tau ds \right) = -\gamma^2 u_0 \int_0^1 q(s) ds + \\ + \alpha^2 \gamma^2 u_0 \int_0^1 q(s) ds \int_0^1 k(x, s) ds + \gamma^2 L \int_0^1 q(s) ds \ln L - \ln L \gamma^2 \alpha^2 L^2 \int_0^1 k(Lx, Ls) ds + u_1^0(Lx). \quad (10)$$

Если теперь учесть (9), из (10) окончательно получим искомое интегральное уравнение:

$$p(x) + \gamma^2 L \int_0^1 \Pi(x, s) p(s) ds = p_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (11)$$

где

$$p(x) = q(xL), \quad \Pi(x, s) = \ln \frac{1}{|x-s|} - \alpha^2 L \int_0^1 \ln \frac{1}{|s-\tau|} k(x, \tau) d\tau$$

$$p_0(x) = \frac{P \alpha \chi \beta x}{\operatorname{sh} \beta}, \quad \beta = \alpha L, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Легко видеть из (11), что $p_0(x)$ является решением задачи в случае жесткой пластины, т.е. решением уравнения (11) при $E_2 \rightarrow \infty$, а также ограниченность $p(x)$ при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 1$.

Таким образом, задача свелась к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, ядро интегрального уравнения квадратично интегрируемо по двум переменным, правой частью которого является решение поставленной задачи в случае жесткой пластины. В отличие от уравнения (1), здесь неизвестная постоянная отсутствует. Кроме того, надо отметить, что при выводе уравнения (11) мы нигде не пользовались условием равновесия

$$\int_0^1 p(s) ds = \frac{P}{L} \quad (12)$$

Надо полагать, что (12) удовлетворяется автоматически в уравнении (11), поскольку

$$\int_0^1 p_0(s) ds = \frac{P}{L}$$

Действительно, если уравнение (11) записать в виде

$$p(x) + \gamma^2 L \left(\int_0^1 \ln \frac{1}{|x-s|} p(s) ds - \alpha^2 L \int_0^1 k(x, s) \int_0^1 \ln \frac{1}{|s-\tau|} p(\tau) k(\tau) d\tau ds \right) = p_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (13)$$

при этом учитывая, что

$$\int_0^1 \ln \frac{1}{|x-s|} p(s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

и имея в виду (9), получим

$$\int_0^1 \int_0^1 \ln \frac{1}{|x-s|} p(s) k(s, \tau) d\tau ds - \alpha^2 L \int_0^1 \int_0^1 k(x, s) \left(\int_0^1 \ln \frac{1}{|s-\tau|} p(\tau) k(\tau) d\tau \right) ds dx = 0 \quad (14)$$

откуда и будет следовать наше утверждение

2. Решение уравнения (11) методом последовательных приближений.
Очевидно, что

$$\int_0^1 \Pi^2(x, x) dx \leq C_1 \quad (15)$$

где C_1 — некоторая постоянная

Известно [4], что при условии (15) последовательные приближения уравнения (11) равномерно сходятся при всех значениях $\gamma^2 L$, которые удовлетворяют неравенству

$$d\gamma^2 L < 1, d^2 = \int_0^1 \int_0^1 \Pi^2(x, s) dx ds$$

Здесь вопрос стоит об оценке величины d , которая, по-видимому, представляет определенный интерес. Для этого уравнение (13), которое равносильно уравнению (11), представим в виде

$$p(x) + \gamma^2 LBCp(x) = p_0(x), 0 \leq x \leq 1$$

где оператор B действует по формуле

$$B\varphi = \varphi - \alpha^2 L \int_0^1 k(x, s)\varphi(s) ds$$

а оператор C действует по формуле

$$C\varphi = \int_0^1 \ln \frac{1}{|x-s|} \varphi(s) ds, 0 \leq x \leq 1$$

Тогда

$$BC\varphi = \int_0^1 \Pi(x, s)\varphi(s) ds$$

Рассматривая уравнение (11) в $L_2(0,1)$, будем иметь

$$\|BC\|^2 = \int_0^1 \int_0^1 \Pi^2(x, s) ds dx = d^2$$

Теперь оценим норму оператора BC , т.е. $\|BC\| = d$. Поскольку оператор

$B = I - \alpha^2 A$, а спектр оператора A — это числа $\frac{L^2}{\alpha^2 L^2 + n^2 \pi^2}$, то спектром

оператора B будут числа $1 - \frac{\alpha^2 L^2}{\alpha^2 L^2 + n^2 \pi^2}$. Отсюда следует (поскольку

оператор B самосопряженный), что норма оператора B равна единице, т.е.

$\|B\| = 1$. Значит $\|BC\| \leq \|C\|$.

Следовательно, уравнение (11) можно решать методом последовательных

приближений при $\gamma^2 L < \frac{1}{\|C\|}$,

где

$$\|C\| = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 \ln^2 |x-s| dx ds} = \frac{\sqrt{14}}{2} \quad (16)$$

3. Решение уравнения (11) методом бесконечных систем.

Решение уравнения (11) ищем в виде

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\pi x \quad (17)$$

Тогда, имея в виду (9), (14), уравнение (11) можно свести к квазивполне регулярной бесконечной системе линейных уравнений

$$b_m + \gamma^2 L^2 \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 \pi^2 + \alpha^2 L^2} K_{mn} b_n = \frac{2P\alpha\beta \cos m\pi}{\beta^2 + m^2 \pi^2}, m = 1, 2, \dots \quad (18)$$

где

$$K_{mn} = \iint_{\Omega} \ln \frac{1}{|x-s|} \cos m\pi x dx \cos n\pi s ds$$

$$\int_0^1 p_0(s) \cos m\pi s ds = \frac{P\alpha\beta \cos m\pi}{\beta^2 + m^2 \pi^2}, m = 0, 1, 2, \dots$$

Квазиполная регулярность системы (18) следует из (15) [4]. Она имеет место при

$$\gamma^2 L < \frac{1}{\|C\|} \quad (16)$$

Причем ряд (17) сходится равномерно [4].

В конце отметим, как оказалось выше [в отличие от работы [1] (1)], решение задачи $q(x)$ не содержит постоянную u_0 . Этого надо было ожидать, поскольку, как известно, напряженное состояние в плоской задаче теории упругости не зависит от постоянной плоской задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lubkin J L., Lewis L.C. Adhesive shear flow for an axially loaded, finite stringer bonded to an infinite sheet - J of Mech. and Applied Math., vol XXIII, Pt 4, 1970.
2. Саркисян В.С., Керопян А.В. Решение задачи для анизотропной полуплоскости, на границе которой приклеена накладка конечной длины // Юбилейная науч. конф., посв. 60-летию основания пед. института им. Налбандяна. Сб. науч. трудов, т.1, "Высшая школа" Египри, 1994, с. 73-76.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс -М. Гостехиздат, 1961.
4. Михлин С.Г. Интегральные уравнения - М.: ОГИЗ. Гостехиздат, 1947.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
24.12.1999

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ С ЧАСТИЧНО
НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Капанадзе Г.А.

Գ.Ա. Կապանաձե

Մասնակի անհայտ եզրով սափ ծոման մի խնդրի մասին

Դիտարկվում է իզոտրոպ առածգական սափ ծոման խնդիրը երկկապ վերջավոր սիրույթի համար, որի արտաքին եզրը ուղուցիկ բազմանկյուն է, իսկ ներքինը՝ փակ ողորկ կոնտուր: Ենթադրվում է, որ արտաքին եզրագծի յուրաքանչյուր օղակին ամրացված է կոշտ ձող և սալը ձուլում է ձողերի վրա կիրառված նորմալ-ծռող մոմենտներով, իսկ եզրագծի ներքին մասը ազատ է արտաքին լարումներից: Պահանջվում է որոշել սալի ճկվածքը և ներքին եզրագծի ձևը այն պայմանից, որ նրա վրա տանգենցիալ-նորմալ մոմենտը ընդունում է իսատատուն արժեք: Զննարկվող խնդիրը քերելով Ռիման-Հիլբերտի խնդրին և լուծելով այն, կառուցվում է խնդրի էֆեկտիվ լուծումը:

G.A. Khapnadze

One Problem of a Bend of a Plate with partially unknown border

Рассматривается задача изгиба изотропной упругой пластинки для конечной двухсвязной области, внешней границей которой является выпуклый многоугольник, а внутренней границей – гладкий замкнутый контур. Предполагается, что на каждом звене внешней границы прикреплена жесткая планка и пластинка изгибается нормально-изгибающими моментами, приложенными к планкам, а внутренняя часть границы свободна от внешних усилий. Задача заключается в определении прогиба пластинки и формы внутренней границы при условии, что на ней тангенциально-нормальный момент принимает постоянное значение. Путем сведения рассмотренной задачи к задаче Римана-Гильберта для кругового кольца и решением последнего, решение рассмотренной задачи строится эффективно.

Краевые задачи изгиба пластинки с частично неизвестной границей исследованы в работах [1,2].

Пусть срединная поверхность изотропной упругой пластинки занимает конечную двухсвязную область S , внутренней границей которой является гладкая замкнутая кривая L_1 , а внешней границей – выпуклый многоугольник (A_0) с границей L_0 . Обозначим через A_j ($j=1, \dots, n$) вершины (их аффиксы) многоугольника (A_0) . Возьмем точку $z=0$ внутри контура L_1 и положительное направление на $L=L_0 \cup L_1$, оставляющее область S слева.

Предположим, что на каждом звене границы L_0 прикреплена жесткая планка и пластинка изгибается нормальными моментами, приложенными к планкам, а L_1 свободна от внешних усилий. Будем считать, что на каждом звене границы L_0 задан либо угол поворота, либо значение главного изгибающего момента.

Рассмотрим задачу: найти прогиб $w(x,y)$ средней поверхности пластинки и неизвестную часть L_1 границы L при условии, что на L_1

тангенциальный нормальный момент принимает постоянное значение.

Согласно приближенной теории изгиба пластинки [3] прогиб $u(x, y)$ средней поверхности в рассматриваемом случае удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 u(x, y) = 0, \quad z = x + iy \in S \quad (1)$$

и граничным условиям

$$M_n = f(t) \left(\text{или } \frac{\partial u}{\partial n} = d(t) \right), \quad N(t) = 0, \quad t \in L_0 \quad (2)$$

$$M_n = 0, \quad M_{ns} = 0, \quad M_s = n = \text{const}, \quad N(t) = 0, \quad t \in L_1$$

где $d(t) = d_k = \lg \gamma_k$ (γ_k — углы поворота), при $t \in L_0^{(k)}$ ($L_0^{(k)}$ — стороны многоугольника (A_0)), $N(t)$ — перерезывающая сила, M_n — нормально-изгибающий момент, M_{ns} — крутящий момент, M_s — тангенциально-нормальный момент.

На основании известных формул имеем [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} + i \frac{\partial u}{\partial s} &= e^{-i\alpha(t)} [\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}] \\ (\sigma - 1)k [\chi\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}] &= \left[M_n + i \int_0^t N(s) ds \right] dt \\ M_n + M_s &= -4D(1 - \sigma) \operatorname{Re}[\varphi'(t)] \end{aligned} \quad (3)$$

где $\alpha(t)$ — угол между осью Ox и внешней нормалью границы L_0 в точке $t \in L_0$, $D = Ek^2 [12(1 - \sigma^2)]^{-1}$ — цилиндрическая жесткость пластинки.

В силу условий (2) и формулы (3), относительно искомых функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ получаем задачу

$$\operatorname{Re} [e^{-i\alpha(t)} (\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)})] = d(t), \quad t \in L_0 \quad (4)$$

$$\operatorname{Re} [e^{-i\alpha(t)} (\chi\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)})] = c(t) + g(t), \quad t \in L_0 \quad (5)$$

$$\chi\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = E(t), \quad t \in L_0 \quad (6)$$

$$\operatorname{Re}[\varphi'(t)] = P, \quad t \in L_1 \quad (7)$$

где $d(t) = \lg \gamma_n$, $c(t) = c_1 \sum_{j=1}^n M_j \sin(\alpha_j - \alpha)$, $M_j = \frac{1}{1 - \sigma} \int_{L_j} M_n ds$, $\alpha = \frac{\sigma + 3}{1 - \sigma}$

$g(t) = g_1$ — действительные постоянные, $E(t) = E$ — произвольная (вообще, комплексная) постоянная, $P = -k/[4D(1 - \sigma)]$ — действительная постоянная.

От искомых функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ требуем, чтобы $\varphi(z)$ была непрерывна в замкнутой области $S + L$, а $\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ непрерывно продолжимы на границу области S всюду, за исключением, может быть, вершин многоугольника (A_0) , в окрестностях которых выполняются условия

условия

$$|\varphi'(z)|, |\psi(z)| < M|z - A_k|^{-\delta_k}, \quad 0 \leq \delta_k < 1$$

Сложением (4) и (5) и затем дифференцированием по дуговой абсциссе s получаем

$$\operatorname{Im}[\varphi'(t)] = 0 \quad (8)$$

Пусть $z = \omega(\zeta)$ — конформное отображение области S на круговое кольцо D ($1 < |\zeta| < R$), где R — неизвестное число, которое следует определить. Будем считать, что L_2 переходит в окружность I_0 , ($|\zeta| = R$), а L_1 — в окружность I_1 , ($|\zeta| = 1$). Обозначим через a_k точки окружности I_k , соответствующие точкам A_k (можно полагать $a_1 = R$).

Рассмотрим функцию

$$\Phi(\zeta) = \varphi'[\omega(\zeta)] - p \quad (9)$$

По условиям (7) и (8) заключаем, что функция $\Phi(\zeta)$ является решением задачи Римана-Гильберта для кругового кольца D :

$$\operatorname{Re} \Phi(t) = 0, \quad t \in I_1, \quad \operatorname{Im} \Phi(t) = 0, \quad t \in I_0$$

Отсюда заключаем, что $\Phi(\zeta) \equiv 0$ и, следовательно, из формулы (9) получаем

$$\varphi(z) = p \cdot z, \quad z \in S \quad (10)$$

Следовательно, на основании условия (4)–(6), для функций $\psi_0(\zeta) \equiv \psi[\omega(\zeta)]$ и $\omega(\zeta)$, голоморфных в кольце D , получаем граничную задачу

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [e^{-i\alpha(\sigma)} (p(x-1)\omega(\sigma) - \overline{\psi_0(\sigma)})] &= c(\sigma) + g(\sigma), \quad \sigma \in I_0 \\ p(x-1)\omega(\sigma) - \overline{\psi_0(\sigma)} &= E(\sigma), \quad \sigma \in I_1 \end{aligned} \quad (11)$$

Для упрощения записи кусочно-постоянные функции $\alpha[\omega(\sigma)]$, ..., $g[\omega(\sigma)]$ обозначим опять через $\alpha(\sigma)$, ..., $g(\sigma)$. Так будем поступать и в дальнейшем относительно кусочно-постоянных функций и определим их на всей плоскости равенствами $f(r\sigma) = f(\sigma)$ ($0 < r < \infty$).

Легко заметить, что на I_0 имеет место равенство

$$\operatorname{Re} [e^{-i\alpha(\sigma)} \omega(\sigma)] = f_0(\sigma), \quad \sigma \in I_0 \quad (12)$$

где $f_0(\sigma) = \operatorname{Re} [e^{-i\alpha(\sigma)} A(\sigma)]$, $A(\sigma) = A_k$, $\sigma \in I_0^{(k)}$, ($I_0^{(k)}$ — дуги окружности I_0 , соответствующие сторонам $L_k^{(1)}$).

Из условий (11) и (12) относительно функций $\omega(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ получим граничную задачу

$$\operatorname{Re} [e^{-i\alpha(\tau)} \omega(\tau)] = f_0(\tau), \quad \tau \in I_0 \quad (13)$$

$$\omega(\sigma) - \frac{1}{p(x-1)} \overline{\psi_0(\sigma)} = \frac{E(\sigma)}{p(x-1)}, \quad \sigma \in l_1 \quad (14)$$

$$\text{где } f_1(\tau) = f_0(\tau) - \frac{1}{p(x-1)} [c(\tau) + g(\tau)]$$

Рассмотрим новую искомую функцию $W(\zeta)$, определяемую формулой

$$W(\zeta) = \begin{cases} \omega(\zeta), & 1 < |\zeta| < R, \\ \frac{1}{p(x-1)} \left[\overline{\psi_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)} + E \right], & \frac{1}{R} < |\zeta| < 1 \end{cases} \quad (15)$$

В силу условий (14) заключаем, что $W(\zeta)$ является голоморфной функцией в кольце $D^* (1/R < |\zeta| < R)$, и удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[e^{-i\alpha(\tau)} W(\tau)] &= f_0(\tau), \quad \tau \in l_0 \\ \operatorname{Re}[e^{-i\alpha(t)} W(t)] &= f_1^*(t), \quad t \in l_0^* \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{где } l_0^* - \text{окружность } |\zeta| = \frac{1}{R}, \quad f_1^*(t) = f_1(t) + \frac{1}{p(x-1)} \operatorname{Re}[e^{-i\alpha} E]$$

Теперь рассмотрим многоугольник (A_1) , целиком расположенный внутри контура L_1 , и подобный многоугольник (A_0) так, чтобы соответственные вершины были расположены на одном и том же луче, проведенном из точки $z=0$ (коэффициент подобия ρ пока не фиксируем). Вершины многоугольника (A_1) обозначим через A_i , $(A_0 = \frac{1}{\rho} A_1)$, а границу — через L_0 .

Обозначим через S^* двухсвязную область, ограниченную многоугольниками (A_0) и (A_1) . Положительным направлением на границе области S^* ($L^* = L_0 \cup L_1$) выберем то, которое область S^* оставляет слева.

Пусть функция $z = \omega^*(\zeta)$ конформно отображает область S^* на круговое кольцо $D^* (1/R < |\zeta| < R)$. При этом L_0 переходит в окружность l_0 , а L_1 — в окружность l_0^* . Функция $\omega^*(\zeta)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[e^{-i\alpha(\tau)} \omega^*(\tau)] &= f_0(\tau) \\ \operatorname{Re}[e^{-i\alpha(\tau/R^2)} \omega^*(\tau/R^2)] &= \frac{1}{\rho} f_0(\tau/R^2), \quad \tau \in l_0 \end{aligned} \quad (17)$$

Дифференцируя граничные условия (17) по s , получим

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left[i\tau \cdot e^{-i\alpha(\tau)}\omega^*(\tau)\right] &= 0, \quad \tau \in l_0 \\ \operatorname{Re}\left[i\tau e^{-i\alpha(\tau)}\omega^*(\tau)\right] &= 0, \quad \tau \in l_0^*\end{aligned}\quad (18)$$

Решение задачи (18) (относительно функции $\omega^*(\zeta)$) класса $h\left(\frac{a_1}{R^2}, \dots, \frac{a_n}{R^2}\right)$ [3] имеет вид

$$\omega^*(\zeta) = K \cdot e^{ic_0} \prod_{j=1}^n G(R^{4j}\zeta) g(R^{4j}\zeta) \cdot R^{4\delta_j} \zeta^{-2} \cdot R^2 \quad (19)$$

$$\text{где } G(\zeta) = \prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\alpha_k^0 - 1}, \quad g(\zeta) = \prod_{k=1}^n \left(\zeta - \frac{a_k}{R^2}\right)^{1 - \alpha_k^0}, \quad \delta_j = \begin{cases} 0 & j \geq 0 \\ 1 & j \leq -1 \end{cases}$$

$\alpha_k^0 \pi$ — величина внутреннего угла при вершине A_k .

$$c_0 = \frac{1}{4\pi i} \int_{l_0} \ln \left[e^{-i\alpha(\tau)} \cdot R^2 \cdot \tau^{-2} \right] \frac{d\tau}{\tau}, \quad k \text{ — действительная постоянная}$$

Формуле (19) можно придать вид

$$\omega^*(\zeta) = K \cdot e^{ic_0} \prod_{j=1}^n \left(\frac{a_k}{R}\right)^{\alpha_k^0 - 1} \left(1 - \frac{\zeta}{a_k}\right)^{\alpha_k^0 - 1} \left(1 - \frac{a_k}{R^2\zeta}\right)^{1 - \alpha_k^0} \zeta^{-2} \frac{T(\zeta)}{T(R^2\zeta)} \quad (20)$$

где

$$T(\zeta) = \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_k}{R^{4j}\zeta}\right)^{\alpha_k^0 - 1} \left(1 - \frac{\zeta}{a_k R^{4j}}\right)^{\alpha_k^0 - 1}$$

Таким образом, функция $\omega^*(\zeta)$ имеет вид

$$\omega^*(\zeta) = K \cdot e^{ic_0} \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{R}\right)^{\alpha_k^0 - 1} \left(1 - \frac{\zeta}{a_k}\right)^{\alpha_k^0 - 1} \left(1 - \frac{a_k}{R^2\zeta}\right)^{1 - \alpha_k^0} \zeta^{-2} \frac{T(\zeta)}{T(R^2\zeta)} d\zeta + \omega(\zeta_0) \quad (21)$$

где ζ_0 — фиксированная точка области D^* .

Из приведенных результатов заключаем, что функция $e^{2i\alpha(\tau)}$ представлена в виде $e^{2i\alpha(\tau)} = \frac{\chi(\tau)}{\chi(\tau)} = \frac{\chi(\tau/R^2)}{\chi(\tau/R^2)}$, где $\chi(\zeta) = \omega^*(\zeta) \cdot \zeta$ и таким

образом, граничные условия (17) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Omega(\tau) + \overline{\Omega(\tau)} &= 2e^{i\alpha(\tau)} [\chi(\tau)]^{-1} f_0(\tau) \\ \Omega(\tau/R^2) + \overline{\Omega(\tau/R^2)} &= 2e^{i\alpha(\tau)} \rho^{-1} [\chi(\tau/R^2)]^{-1} f_0(\tau/R^2), \quad \tau \in l_0\end{aligned}\quad (22)$$

где $\Omega(\zeta) = \omega^*(\zeta) \cdot [\chi(\zeta)]^{-1}$.

Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (22) имеет вид

$$\int_0^1 \frac{f_0(\tau) e^{i\alpha(\tau)} d\tau}{\omega^*(\tau) \tau^2} = \frac{R^2}{\rho} \int_0^1 \frac{f_0(\tau/R^2) e^{i\alpha(\tau/R^2)} d\tau}{\omega^*(\tau/R^2) \tau^2}$$

Из этого условия находим зависимость между ρ и R :

$$\rho = R^2 \cdot \frac{\int_0^1 f_0(\tau/R^2) e^{i\alpha(\tau)} \left[\omega^*(\tau/R^2) \right]^{-1} \tau^{-2} d\tau}{\int_0^1 f_0(\tau) e^{i\alpha(\tau)} \left[\omega^*(\tau) \right]^{-1} \tau^{-2} d\tau} \quad (23)$$

Вернемся теперь к задаче (16). Легко заметить, что если $W(\zeta)$ — решение задачи (16), то $W'(\zeta) = \omega^*(\zeta)$, где $\omega^*(\zeta)$ определена формулой (20). Для того, чтобы задачи (16) и (17) были одни и те же, потребуем, чтобы имело место равенство

$$\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \operatorname{Re} [e^{-i\alpha(t)} A(t)] = \frac{1}{\rho(x-1)} [c(t) + g(t) - \operatorname{Re}(e^{-i\alpha} E)] \quad (24)$$

Если постоянные g_k ($k = 1, \dots, n$) и $E = E_1 + iE_2$ подберем так, чтобы имело место равенство (24), то уравнение контура L_1 определится из соотношения

$$t' = \frac{i\sigma \omega^*(\sigma)}{|\omega^*(\sigma)|}, \quad \sigma \in l_1 \quad (25)$$

а функция $\psi_1(\zeta)$ будет иметь вид

$$\psi_1(\zeta) = \rho(x-1) \omega^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) - E, \quad \zeta \in D \quad (26)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда (A_0) — правильный многоугольник. Предположим, что на каждой стороне многоугольника действует один и тот же постоянный нормально-изгибающий момент M .

Начало координатной системы возьмем в центре многоугольника (A_0) , а ось Ox направим перпендикулярно к стороне $A_1 A_2$. В этом случае можно допустить

$$A_k = r \exp \left\{ -\frac{\pi i}{n} + \frac{2\pi i}{n} (k-1) \right\}, \quad d_k = \frac{2\pi}{n} (k-1), \quad a_k = R \cdot \exp \left\{ \frac{2\pi i}{n} (k-1) \right\} \quad (27)$$

В силу этих формул легко показать, что функция $f_0(\tau)$ является постоянной

$$f_0(\tau) = r \cos \frac{\pi}{n}$$

Кусочно-постоянная функция $c(\tau)$ в этом случае имеет вид

$$c(\tau) = \frac{M}{\sigma-1} \sum_{j=1}^k \sin \frac{2\pi}{n} j = \frac{M}{2(\sigma-1) \sin \frac{\pi}{n}} \left[\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n} (2k-1) \right], \quad \tau \in I_0^{(k)}$$

Таким образом, условие (24) примет вид (считаем $g_1 = 0$)

$$\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) r \cos \frac{\pi}{n} = \frac{1}{p(x-1)} \left[\frac{M}{2(\sigma-1)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} - \frac{\cos \frac{\pi}{n} (2k-1)}{\sin \left(\frac{\pi}{n}\right)} \right) - (E_1 \cos \alpha_n + E_2 \sin \alpha_n) \right]$$

или, то же самое

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) r \cos \frac{\pi}{n} = & \frac{M}{2(\sigma-1)p(x-1)} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} - \frac{M}{2(\sigma-1)p(x-1)} \cos \frac{2\pi}{n} (k-1) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} + \\ & + \frac{M}{2(\sigma-1)p(x-1)} \sin \frac{2\pi}{n} (k-1) - \frac{E_1}{p(x-1)} \cos \frac{2\pi}{n} (k-1) - \frac{E_2}{p(x-1)} \sin \frac{2\pi}{n} (k-1) \end{aligned} \quad (28)$$

Если возьмем

$$E_1 = -\frac{M}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}, \quad E_2 = \frac{M}{2}$$

из (28) получаем

$$\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) r \cos \frac{\pi}{n} = \frac{M}{2p(x-1)(\sigma-1)} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$$

Отсюда, учитывая, что $p = -k[4D(1-\sigma)]^{-1}$, получаем формулу для k :

$$k = \frac{MEh^3}{12(1+\sigma)^2 r \sin \frac{\pi}{n} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)} \quad (29)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Банцури Р.Д., Исаханов Р.С. Некоторые обратные задачи теории упругости // Тр. Тбилисского матем. ин-та, 87 (1987), с.3-20.
2. Банцури Р.Д., Исаханов Р.С. Об одной полуобратной задаче изгиба пластинки // Сообщ. АН ГССР, 128 (1987), №2, с.277-280.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. 512 с.

Тбилисский государственный
университет

Поступила в редакцию
27.09.2000

УДК 539.3

О ДВУХ ВАРИАНТАХ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПЛАСТИНОК
Гнуни В.Ц.

Վ.Շ. Գնունի

Սալերի հաշվարկային մոդելների երկու տարբերակների մասին

Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ սալերի հաշվարկային մոդելները, որոնք հաշվի են առնում ռելյալնական սահմանի և նորմալ լարման ազդեցությունները, քննական է համատեղել սալի նորմալ տեղափոխության (ճկվածքի) ըստ հաստության փոփոխման ենթադրության հետ:

Դիտարկվում է նաև սալի հաշվարկի տարբերակ, որտեղ ենթադրվում է սալի իրենական լարումների գծային օրենքով փոփոխությունը ըստ հաստության:

V. Ts. Gnuni

On the two variants of the plates calculation models

Настоящая работа написанная по мотивам статей [1,2], имеет целью показать, что расчетные модели в теории пластинок, учитывающие влияние поперечных сдвигов и существенно дополняющие теорию Кирхгофа [3], было бы естественным совместить с предположением изменяемости нормального перемещения (прогиба) по толщине пластинки. В работе приводится вариант расчетной модели пластинки, свободной от предположений постоянства прогиба пластинки по толщине и малости поперечного нормального напряжения.

Следует отметить, что в настоящее время варианты расчетных моделей [4-9] вполне считаются классическими, так как содержат главную часть уточнений и дополнений к теории Кирхгофа. Однако, для строгости изложения следует отказаться также и от предположений равенства нулю поперечной деформации растяжения (сжатия) и малости поперечного нормального напряжения.

Во второй части работы приводятся уравнения теории пластин в напряжениях при предположении линейного изменения основных напряжений по поперечной координате.

1. Пусть упругая прямоугольная пластинка размерами a, b, h отнесена к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ так, что координатная плоскость $z=0$ совпадает с срединной плоскостью пластинки. Пластинка изготовлена из трансверсально-изотропного материала и плоскости $z=\text{const}$ совпадают с плоскостями изотропии материала. Трансверсально-изотропное тело характеризуется техническими постоянными $E, \nu, G = E/2(1+\nu)$, $E', G', \nu', \nu' = \nu''E'/E$.

Перемещения произвольной точки (x, y, z) пластинки представляются в виде

$$u_1 = u - z \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1 \right), \quad u_2 = v - z \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2 \right), \quad u_3 = w + z \varphi_3 - \frac{z^2 \varphi}{2} \quad (1.1)$$

где $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ – искомые перемещения срединной плоскости пластинки, $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ – искомые функции.

При $\varphi_1(x, y) \equiv 0$, $\varphi_2(x, y) \equiv 0$ получаются соотношения классической теории пластинок, основанные на гипотезе Кирхгофа.

На основе (1.1) для поперечных деформаций сдвига получаются

$$\varepsilon_{11} = \varphi_1 + z \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{z^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varepsilon_{21} = \varphi_2 + z \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{z^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (1.2)$$

Из условий отсутствия касательных напряжений σ_{13}, σ_{23} на лицевых поверхностях ($z = \pm 0.5h$) пластинки получается

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0, \quad (\varphi_3 = \text{const}), \quad \varphi_1 = \frac{h^2}{8} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varphi_2 = \frac{h^2}{8} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

следовательно,

$$u_1 = u - z \frac{\partial}{\partial x} \left(w - \frac{h^2}{8} \varphi \right), \quad u_2 = v - z \frac{\partial}{\partial y} \left(w - \frac{h^2}{8} \varphi \right), \quad u_3 = w + z \varphi_3 - \frac{z^2}{2} \varphi \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(w - \frac{h^2}{8} \varphi \right), \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(w - \frac{h^2}{8} \varphi \right)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(w - \frac{h^2}{8} \varphi \right)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (1.4)$$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(w - \frac{h^2}{8} \varphi \right) + \frac{\nu^*}{1-\nu} \sigma_{33}$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(w - \frac{h^2}{8} \varphi \right) + \frac{\nu^*}{1-\nu} \sigma_{33}$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(w - \frac{h^2}{8} \varphi \right)$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2} G' \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \sigma_{23} = \frac{1}{2} G' \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (1.5)$$

Поперечное нормальное напряжение σ_{33} определяется из третьего уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} = 0 \quad (1.6)$$

Интегрированием уравнения (1.6) по z и удовлетворением условий

$$\sigma_{33}|_{z=0.5h} = 0, \quad \sigma_{33}|_{z=-0.5h} = -q(x, y)$$

получается

$$\sigma_{33} = -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{z}{h^3} (3h^2 - 4z^2) \right] q \quad (1.7)$$

и уравнение для определения искомой $\varphi(x, y)$

$$\Delta \varphi = -\frac{12}{G'h^3} q(x, y) \quad (1.8)$$

Из соотношений для напряжений (1.5) для усилий и моментов получаются

$$T_{11} = C \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\nu'' h}{2(1-\nu)} q, \quad T_{22} = C \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\nu'' h}{2(1-\nu)} q$$

$$T_{12} = \frac{1-\nu}{2} C \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1.9)$$

$$M_{11} = -D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(w - \frac{h^2}{8} \varphi \right) + \frac{\nu'' h^2}{10(1-\nu)} q$$

$$M_{22} = -D \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(w - \frac{h^2}{8} \varphi \right) + \frac{\nu'' h^2}{10(1-\nu)} q$$

$$M_{12} = -(1-\nu) D \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(w - \frac{h^2}{8} \varphi \right) \quad (1.10)$$

$$T_{13} = \frac{G'h^3}{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad T_{23} = \frac{G'h^3}{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (1.11)$$

где $C = \frac{Eh}{1-\nu^2}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

Усилия и моменты удовлетворяют уравнениям равновесия во внутренних усилиях и моментах, откуда получаются:

для обобщенного плоского напряженного состояния

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{(1+\nu)\nu''}{2E} \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{(1+\nu)\nu''}{2E} \frac{\partial q}{\partial y} \quad (1.12)$$

для задачи изгиба

$$D \Delta^2 w = q - \left[\frac{E}{8(1-\nu^2)G'} - \frac{\nu''}{10(1-\nu)} \right] h^2 \Delta q \quad (1.13)$$

к которым добавляется также уравнение (1.8)

$$\Delta \varphi = -\frac{12}{G'h^3} q \quad (1.14)$$

К системе уравнений (1.12)-(1.14) необходимо присоединить граничные условия:

а) заделанный край $x = \text{const}$

$u = v = 0$ — для плоской задачи,

$$w - \frac{h^2}{24} \varphi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(w - \frac{h^2}{8} \varphi \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(w - \frac{h^2}{8} \varphi \right) = 0 \quad (1.15)$$

— для задачи изгиба,

б) свободный край

$$T_{11} = T_{12} = 0 \text{ — для плоской задачи,} \\ M_{11} = 0, M_{12} = 0, T_{13} = 0 \text{ — для задачи изгиба} \quad (1.16)$$

в) условия Навье ($\sigma_{11} = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$)

— свободно опертый край

$$T_{11} = 0, v = 0 \text{ — для плоской задачи.}$$

$$w - \frac{h^2}{24} \varphi = 0, M_{11} = 0, \frac{\partial}{\partial y} \left(w - \frac{h^2}{8} \varphi \right) = 0 \text{ — для задачи изгиба.} \quad (1.17)$$

2. Представляет интерес получение уравнения теории тонких пластинок в напряжениях.

Пусть напряжения $\sigma_{ij}(x, y, z)$ ($i, j = 1, 2$) изменяются по толщине по линейному закону

$$\sigma_{ij} = a_{ij}(x, y) + zb_{ij}(x, y) \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.1)$$

где a_{ij}, b_{ij} — шесть искомых функций.

Из уравнений равновесия теории упругости в напряжениях и из условий на лицевых поверхностях пластинки

$$\sigma_{13}(x, y, \pm h/2) = 0 \quad (i = 1, 2), \sigma_{33}(x, y, h/2) = 0, \sigma_{33}(x, y, -h/2) = -q(x, y) \quad (2.2)$$

получается

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + \frac{\partial a_{12}}{\partial y} = 0, \frac{\partial a_{12}}{\partial x} + \frac{\partial a_{22}}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 b_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 b_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 b_{22}}{\partial y^2} = -\frac{12}{h^3} q(x, y) \quad (2.4)$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial b_{11}}{\partial x} + \frac{\partial b_{12}}{\partial y} \right), \sigma_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial b_{12}}{\partial x} + \frac{\partial b_{22}}{\partial y} \right) \quad (2.5)$$

$$\sigma_{33} = -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{z}{h^3} (3h^2 - 4z^2) \right] q(x, y)$$

Пусть

$$a_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, a_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, a_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (2.6)$$

$$b_{11} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \varphi, b_{22} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \varphi, b_{12} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}$$

где $\Phi(x, y), \Psi(x, y), \varphi(x, y)$ — искомые функции, тогда уравнения (2.3) удовлетворяются тождественно, а из (2.4) получается уравнение для определения искомой функции $\varphi(x, y)$

$$\Delta \varphi = -\frac{12}{h^3} q(x, y) \quad (2.7)$$

В силу (2.1), (2.5), (2.6) и из обобщенного закона Гука для напряжений и деформаций получаются

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\Phi + z\Psi) + z\varphi, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Phi + z\Psi) + z\varphi, \quad \sigma_{12} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\Phi + z\Psi)$$

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \sigma_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (2.8)$$

$$\sigma_{33} = -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{z}{h^3} (3h^2 - 4z^2) \right] q(x, y)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\nu^*}{2} q \right) + \frac{z}{E} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + (1-\nu)\varphi - \frac{\nu^*}{h^3} (3h^2 - 4z^2) q \right]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\nu^*}{2} q \right) + \frac{z}{E} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + (1-\nu)\varphi - \frac{\nu^*}{h^3} (3h^2 - 4z^2) q \right]$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2G^*} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2G^*} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{1}{2E^*} \left[1 - \frac{z}{h^3} (3h^2 - 4z^2) \right] q - \frac{\nu^*}{E} \Delta (\Phi + z\Psi) - \frac{2\nu^*}{E} z\varphi$$

Из уравнения совместности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} \quad (2.10)$$

Для определения искомых $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ получаются уравнения

$$\Delta^2 \Phi = -\frac{\nu^*}{2} \Delta q \quad (2.11)$$

$$\Delta^2 \Psi = \frac{12(1-\nu)}{h^3} \left(1 + \frac{\nu^* h^2}{10(1-\nu)} \right) \Delta q \quad (2.12)$$

Таким образом, уравнение (2.11) характеризует обобщенное плоское напряженное состояние, а уравнения (2.7), (2.12) — изгиб пластинки. Формулами (2.8), (2.9) определяется напряженное и деформированное состояние пластинки. По деформациям пластинки (2.9) можно с точностью жесткого смещения и поворота определить перемещения произвольной точки пластинки и рассматривать краевые задачи изгиба пластинки.

Необходимо отметить, что граничные условия на краях пластинки будут удовлетворены интегрально по координате z .

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.В. О теории тонких пластин //Изв.АН РА, МТТ, 1992, №3, с.26-47.
2. Алфрутов Н.А. О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин //Изв.АН РА, МТТ, №3, с.65-72.
3. Kirchhoff G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe //J.Reine Angew. Math. 1850, Bd.40, S.51-58.
4. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates //J. Math. and Phys. 1944, v.23, '4, p.184-191.
5. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. //Trans. ASME. 1945, v.67, p.A69-A77.
6. Hencky H. Über die Berücksichtigung in ebenen Platten //Ing. Arch. 1947, Bd 16, H1, S.72-76.
7. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин —М.: Физматгиз. 1987. 360с.
8. Власов Б.Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты //Вестник МГУ, 1957, №2.
9. Амбарцумян С.А. К теории изгиба анизотропных пластинок //Изв. ОН АН СССР, 1958, №5.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
27.03.2000

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КВАЗИПОПЕРЕЧ- НЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В УПРУГИХ ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ Минасян М. М.

Մ.Մ. Մինասյան

Զվագիլայնական ու զծային զրգռումների տարածումը առածական հաղորդիչ միջավայրերում

Աշխատանքում "կարճ" ալիքների մոտավորությամբ ուսումնասիրվել են ու զծային զվագիլայնական զրգռումների տարածումը անհամասեռ էլեկտրահաղորդիչ միջավայրերում: Հավասարումների սխեմատիկացման իսմար կիրառվել է Ֆրիդրիխսի մեթոդը: Լայնորեն օգտագործվել են ֆիզիկական և մաթեմատիկական բնույթի էվոլյուտիկական խիստ հիմնավորված մեթոդներ: Հաշվի են առնված նաև, դիսպերսիայի և դիսիպացիայի տարրեր մեխանիզմներ

M.M. Minassian

The Propagation of Nonlinear "Intermediate" Perturbations in Electroconducting Elastic Medium

В работе исследуется распространение нелинейных квазипоперечных возмущений в проводящих средах. Учитываются начальная неоднородность среды, а также различные механизмы, порождающие дисперсию и диссипацию. Для вывода гребенчатых уравнений распространения интенсивности волны применяется теория "коротких" волн с использованием метода Фридрихса симметризации гиперболических систем и ряда эвристических строгих методов физического и математического характеров ("малый" и "большой" принципы Гюйгенса принцип инвариантности характеристических многообразий гиперболических систем термодинамический принцип изменения энтропии на скачке, адиабатический закон распространения энергии возмущения и др.) для эффективного вычисления коэффициентов кубической нелинейности, дифракционного оператора и коэффициентов диссипации и дисперсии.

Основной метод вывода всех результатов базируется здесь на теории "коротких волн", разработанной в газовой динамике [1,2] и на обобщенной в работах автора [3,4,5] применительно к системам общего вида

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + A^j \frac{\partial u}{\partial x^j} = \sum_{\alpha=1}^n \prod_{\beta=1}^{\alpha+1} \left(B_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + C_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) u \quad (1)$$

для функций $u(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Теория "коротких волн" позволяет вывести из системы (1) одно уравнение, описывающее распространение одноволновых возмущений. Для интенсивности возмущения $\sigma(x_1, x_2, x_3, t)$ получается уравнение [14]

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right] = \xi_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} + \sum_{r=2,3} \mu_r \frac{\partial^r \sigma}{\partial x_1^r}, \quad (\alpha, \beta = 2, 3)$$

$$L[\sigma] = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + x_1 \frac{d \ln U_n}{dt} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} + m_s \sigma^k \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} + \frac{\sigma}{2} \frac{d \ln R}{dt} \quad (2)$$

Уравнение записано в декартовой системе, связанной с линейным фронтом, представляющим одну из характеристических поверхностей единичной кратности.

Проблеме редукции систем уравнений к одному уравнению посвящено огромное число работ [1-14], в которых применены различные по схеме, но аналогичные по своей сути методы. Для термовязкомагнитоупругой среды, а также для других сред конкретные коэффициенты получены в работах А.Г. Багдоева. В его монографии [4] для поперечных волн уравнение вида (2) выведено не в полной мере, как это сделано для "быстрых" и "медленных" волн. В частности, это касается нелинейности, которая, как будет показано здесь, кубическая. Кроме того, здесь упрощены коэффициенты поперечного (дифракционного) оператора и рассмотрены другие модели термовязкоупругости.

Для сложных сред, когда число уравнений системы, следовательно, размерности векторов и матриц становятся непомерно великими, вычисление коэффициентов представляет громоздкий и утомительный труд. С другой стороны, имеется достаточное количество фактов физического и математического содержания общего характера, эффективное использование которых позволяет существенно облегчить труд и построить окончательное уравнение, минуя многие промежуточные выкладки.

Отправной точкой является закон геометрической оптики [17]. Многие выкладки существенно упрощаются, если идеальная система (без правой части) симметрична и гиперболична. Процедура симметризации системы законов сохранения хорошо разработана в трудах С.К. Годунова [15], Фридрихса и Лакса [16]. Метод Фридрихса имеет то преимущество, что окончательная система записывается в терминах "начальных" функций u_i .

Для идеально проводящих тел без намагничивания и поляризации идеальная система уравнений содержит уравнение импульса, магнитной индукции и кинематики [18, 19, 20]. Проведя симметризацию по Фридрихсу в лагранжевом представлении, получим симметричную систему

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial L_{ij}}{\partial F_{mn}} \frac{\partial F_{mn}}{\partial \xi_j'} + \frac{B_k}{\mu_0} \frac{\partial J}{\partial F_{kj}} \frac{\partial B_i}{\partial \xi_j'} - \frac{B_k}{\mu_0} \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} \frac{\partial B_k}{\partial \xi_j'} \quad (3)$$

$$\frac{J}{\mu_0} \frac{\partial B_i}{\partial t} = \frac{B_k}{\mu_0} \frac{\partial J}{\partial F_{kj}} \frac{\partial v_i}{\partial \xi_j'} - \frac{B_k}{\mu_0} \frac{\partial v_k}{\partial \xi_j'}, \quad \frac{\partial L_{mn}}{\partial F_{ij}} \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial L_{mn}}{\partial F_{ij}} \frac{\partial v_j}{\partial \xi_j'}$$

с дополнительными соотношениями

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial \xi_j'}, \quad L_{ij} = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial F_{ij}}, \quad B_i = JB_k \frac{\partial \xi_j'}{\partial x^k} = B_k \frac{\partial J}{\partial F_{kj}},$$

$$T_{ij} = \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} B^2 \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} \right), \quad \frac{\partial B_i}{\partial \xi_j'} = 0, \quad J = \text{Det} F_{ij} \quad (4)$$

Поскольку некоторые коэффициенты (в частности, коэффициент нелинейности) вычисляются из одномерных уравнений, то удобно ввести вектор "укороченной" дисторсии и соответствующий J по представлениям [19, 20]

$$f_i = \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad J = \text{Det} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x} \right| = 1 + f_i \quad (5)$$

Из характеристического уравнения линеаризованной идеальной

системы уравнение поверхности нормалей для поперечной волны (1) получается в виде [4,18]

$$c_t^2 \xi^2 + (\bar{b} \bar{\xi})^2 = 1, \quad c_t^2 = 2\rho_0 \frac{\partial U}{\partial N}, \quad \left(N = f_z^2, \quad \bar{b} = \frac{\bar{B}}{\sqrt{\mu_0 J \rho_0}} \right) \quad (6)$$

Переходим к конкретизации коэффициентов уравнения трехмерных "коротких волн". Условия совместностей на линейном фронте для I волны имеют вид [18]

$$\bar{B}' = \sigma(\bar{B} \times \bar{n}), \quad B_n \bar{f}' = \sigma J(\bar{B} \times \bar{n}), \quad \bar{v}' = -c_t \bar{f}' \quad (7)$$

При вычислении коэффициентов (2) будем пользоваться эвристическими методами, изложенными в [22].

Функция $R(t)$ определяется из принципа сохранения энергии в адиабатическом приближении:

$$\sigma^2 R = \rho_0 v'^2 c_t \Sigma = \frac{\rho_0 c_t^2 J^2 B_n'^2 \Sigma}{B_n^2} = \text{const вдоль лучей} \quad (8)$$

где Σ — площадь поверхности фронта, ограниченной лучевой трубкой

Коэффициенты поперечного оператора получаются из (6):

$$\xi_{2111} = -\frac{c_t^2}{c_l^2} \left(1 + \frac{b_{210}^2}{c_l^2} \right), \quad \xi_{21} = -\frac{b_{21} b_{20} c_l^2}{c_l^4} \quad (9)$$

Эти коэффициенты выведены также в [4], но в другой записи. Нетрудно показать, что после их упрощений они совпадают с (9). Как видно, поверхность нормалей выпукла наружу, и все точки ее эллиптические. Омбилических точек нет при произвольном магнитном поле. Для подтверждения мысли о том, что прямые выводы коэффициентов из системы могут стать источником появления случайных ошибок, укажем на работу [8], в которой коэффициент поперечного оператора не верен ни по значению (и для продольных волн), ни по знаку. Правильный коэффициент следует из (9) при отсутствии магнитного поля.

Теперь определим коэффициент нелинейности. Для рассматриваемой волны $m_1 = 0$ (исключительный случай), и поэтому следует удерживать в уравнении возмущений нелинейности более высокого порядка для уточнения условий совместности (7). Записав систему (3) в подвижной системе и интегрируя первое приближение с учетом соотношений (7) получим

$$f_z'(c_l^2 - c_t^2 - b_{21}^2) = (c_{122} - b_{21}^2) \frac{f_z'^2}{2}, \quad \left(c_{122} = \rho_0 \frac{\partial^2 U}{\partial f_z \partial f_z^2} \right) \quad (10)$$

Коэффициент кубической нелинейности легче вычислить, используя условие Гюгонио на разрыве, которое имеет вид [19]

$$\rho_0 [U] = \langle L_i \rangle [f_i'] - \frac{1}{4\mu_0} [f_z'] [B_{21}']^2 \quad (11)$$

Разлагая (11) по степеням возмущений и упрощая полученное соотношение в главных выражениях, получим

$$T_0 s' = \frac{1}{12} c_{,nn} f'_1 f'_1 f'_1 + \frac{1}{24} c_{,nnn} f'_1 f'_1 f'_1 f'_1 - \frac{1}{4} f'_2 f'^2_2 + \dots$$

$$\left(c_{,j} = \frac{\partial U}{\partial f_j}, \quad c_{,ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial f_j \partial f_i}, \dots \right) \quad (12)$$

Учитывая, что f'_n имеет порядок σ^2 , а f'_2, b'_2 - порядок σ с учетом (7) и (10), из (12) получим

$$\rho_0 T_0 s' = \left[\frac{1}{8} \frac{(c_{,nn} - b'^2_2)^2}{c'^2_i - c'^2_i - b'^2_2} + \frac{1}{24} c_{,nnn} \right] f'^4_2 \quad (13)$$

Вычислив изменение полной энергии возмущения в объеме, заключенного внутри лучевой трубки между линейным фронтом и ударной волной и приписав это изменение скачку энтропии на ударной волне [14,22], получим

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{m_2 R \sigma^4}{6 c_i} = - c_i T_0 \Sigma s' \quad (14)$$

Коэффициент m_2 определяется из (14) с учетом (8) и (13).

Поскольку при наличии магнитного поля

$$\frac{c'^2_{,nn}}{c'^2_i - c'^2_i} > \frac{(c_{,nn} - b'^2_2)^2}{c'^2_i - c'^2_i + b'^2_2} \quad (15)$$

то отсюда следует, что магнитное поле усиливает условие возрастания энтропии на (I) фронте разрыва.

В качестве примера рассмотрим нелинейную модель упругого изотропного тела, рассмотренного в [21]. Для внутренней энергии имеем разложение

$$\rho_0 U = \rho_0 T_0 s + \frac{\mu}{2} f'^2_1 + \frac{\lambda + 2\mu}{2} \left(f'^2_2 + f'_2 f'_2 + \frac{1}{4} f'^4_1 \right) +$$

$$\left(\frac{1}{2} \beta + \frac{3}{4} \nu \right) f'_2 f'^2_2 + \left(\frac{1}{4} \beta + \frac{3}{8} \nu \right) f'^4_1 + \frac{\xi}{4} f'^4_2 + \dots \quad (16)$$

Из этого разложения следует

$$\frac{1}{24} c_{,nnn} = \frac{\lambda + 2\mu}{8} + \frac{\beta}{4} + \frac{3}{8} \nu + \frac{\xi}{4} \quad (17)$$

При отсутствии магнитного поля этот результат совпадает с аналогичным результатом нейтральной среды [21]. Сравнивая значения скачка энтропии (13) со значением, полученным на основании (14), получим коэффициент m_2 .

Теперь рассмотрим вопрос влияния различных факторов диссипативного и дисперсионного характеров на распространение возмущений.

Исходя из общей теории вывода уравнения "коротких" волн, сделаем ряд упрощающих предположений. Это в первую очередь относится к записи дополнительных слагаемых в одномерном представлении. Кроме этого, для вычисления указанных членов можно в равной степени

пользоваться как лагранжевыми, так и эйлеровыми координатами, поскольку в линейном приближении обе переменные эквивалентны. По той же причине всеми нелинейностями в этих слагаемых пренебрегаем.

Из всех механизмов, порождающих диссипацию и дисперсию, как наиболее важные, будем рассматривать: влияние теплового поля, конечную электропроводность; вязкость обусловленную зависимостью тензора напряжения от тензора скорости деформаций; вязкость обусловленную памятью материала (теория наследственности).

Сначала рассмотрим влияние теплопроводности и конечной электропроводности. Уравнение теплопроводности примем в виде [18]

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 \beta \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{u} + \pi_0 \nabla \cdot \vec{J} = \lambda \Delta T + \frac{\mu_a}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B})^2 \quad (18)$$

Здесь C - удельная теплоемкость при постоянной деформации, T_0 - начальная температура, β - коэффициент температурных напряжений (теплового расширения), π_0 - коэффициент влияния электрического тока на плотность теплового потока, λ - коэффициент теплопроводности, μ_a - коэффициент магнитной вязкости.

Закон Ома обобщается в виде [18]

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - k_0 \nabla T + \rho_s \vec{v} \quad (19)$$

где σ - коэффициент электропроводности, k_0 - коэффициент влияния теплового поля на плотность электрического тока и ρ_s - плотность свободных зарядов. В дальнейшем будем пренебрегать джоулевым теплом (последний член в (18)) и считать $\rho_s = 0$.

Из (18) и (19) в "короткой волне" получается уравнение

$$-\rho_0 C \frac{\partial T'}{\partial x} - T_0 \beta \frac{\partial f'_x}{\partial x} = \frac{\lambda}{c} \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \pi_0 \sigma B \left(\vec{n} \times \frac{\partial \vec{f}'}{\partial x} \right) \quad (20)$$

Рассмотрим два предельных случая распространения тепла [24]

В адиабатическом приближении можно пренебречь первым членом в (20). Тогда, интегрируя оставшиеся члены, получим:

$$\frac{\partial T'}{\partial x} = - \frac{T_0 \beta c}{\lambda} f'_x + \frac{\pi_0 \sigma c}{\lambda} B (\vec{n} \times \vec{f}') \quad (21)$$

В конечном итоге это уравнение, введя соответствующие обозначения, можно представить в виде

$$-\beta \frac{\partial T'}{\partial x} = \alpha_j f'_j \quad (22)$$

В другом предельном изотермическом случае можно считать малым первый член в правой части в (20). Методом последовательных приближений получим.

$$\rho_0 C \frac{\partial T'}{\partial x} = -T_0 \beta \frac{\partial f'_x}{\partial x} - \pi_0 \sigma B \left(\vec{n} \times \frac{\partial \vec{f}'}{\partial x} \right) + \frac{\lambda}{c} \left[T_0 \beta \frac{\partial^2 f'_x}{\partial x^2} + \pi_0 \sigma B \left(\vec{n} \times \frac{\partial^2 \vec{f}'}{\partial x^2} \right) \right] \quad (23)$$

Введя соответствующие обозначения, (23) представим в виде

$$-\beta \frac{\partial T'}{\partial x} = \gamma_1 \frac{\partial f'}{\partial x} - \delta_1 \frac{\partial^2 f'}{\partial x^2}, \quad \left(\delta_1 = \frac{\gamma_1}{\rho_0 C} \right) \quad (24)$$

В уравнении импульса учет температурных напряжений будет отражен дополнительным членом $-\beta \frac{\partial T'}{\partial x}$ в правой части, а конечная

проводимость — в уравнении индукции членом $\mu_m \frac{\partial^2 B'}{\partial x^2}$. Как видно,

конечная проводимость порождает обычную высокочастотную вязкость, в то время как теплопроводность играет разные роли в двух рассмотренных предельных случаях. В первом, адиабатическом случае, приходим к выводу, что температурное поле не влияет на геометрию распространения слабых возмущений (лучи, бихарактеристики, линейный фронт, скорость распространения линейных возмущений), а также на качественные закономерности нелинейных возмущений (возникновение разрыва, скачок энтропии и т.д.). Влияние теплового поля здесь порождает низкочастотное рассеяние, как дополнительный эффект к рассеянию из-за неоднородности и геометрического расхождения лучей. В итоге функция Ψ заменяется произведением $\Psi \exp(-\nu t)$.

В изотермическом случае, подставив выражение (24) в уравнение импульса и объединив его с упругими напряжениями, получим

$$c_1 \frac{\partial f'_1}{\partial x} - \beta \frac{\partial T'}{\partial x} n_1 = \bar{c}_1 \frac{\partial f'_1}{\partial x} - \bar{d}_1 \frac{\partial^2 f'_1}{\partial x^2} \quad (\bar{c}_1 = c_1 + \beta n_1 \gamma_1, \quad \bar{d}_1 = \beta n_1 \delta_1) \quad (25)$$

Если второе слагаемое в правой части (25) приводит к высокочастотному рассеянию, как обычная вязкость, то первое слагаемое приводит к пересмотру и геометрии распространения линейных возмущений и переучету всех коэффициентов одномерного уравнения "коротких" волн.

Для вязкоупругой среды, когда вязкость проявляется в виде зависимости вязких напряжений от тензора скоростей деформаций, исчерпывающие исследования содержатся в работах А.Г. Бигдосова [4]. Результаты, полученные им, показывают, что тепловое поле может существенно влиять на все явления распространения нелинейных возмущений.

Для материала наследственного типа можно исходить из линейных соотношений [25]

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t c_{ijkl}(t-\tau) \frac{\varepsilon_{kl}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (26)$$

Будем считать, что ядро вольтеррового оператора содержит слагаемое с δ -особенностью (мгновенный упругий отклик) и регулярную часть наследственности. Кроме того, будем иметь в виду материалы с "короткой" памятью. Пусть α -характерное время релаксации. Будем

считать ядра операторов быстро исчезающими при $t > \alpha$. Можно ввести высокочастотные и низкочастотные модули [26]. В силу сделанных предположений для девиатора напряжений и среднего давления получим

$$\delta s_{ij} = 2G_0 \delta e_{ij} + 2(G_\infty - G_0) \left[\delta e_{ij} \alpha \int_0^\infty \xi \Gamma(\xi) d\xi - \frac{\delta \dot{e}_{ij} \tau^2}{2} \int_0^\infty \xi^2 \Gamma(\xi) d\xi + \dots \right] \\ - \delta p = K_0 \theta + (K_\infty - K_0) \left[\delta \theta \tau \int_0^\infty \xi \Gamma_1(\xi) d\xi + \dots \right] \quad (27)$$

Действуя дальше аналогичным образом, как и в случае газовой динамики [26] и МГД [12], легко можно вычислить диссипативные и дисперсионные члены, при этом определенную роль сыграет разностный коэффициент.

Поскольку соотношения (26) и (27) линейны то в итоге нелинейность механического поля будет носить геометрический характер из-за конечности деформаций. Можно, конечно, обобщить (27) и на случай физической нелинейности, представив G и K функциями от инвариантов тензора деформаций.

Автор благодарит А.Г. Багдоева за полезные советы и обсуждения ряда положений настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гриб А.А., Рыжов О.С., Христианович С.А. Теория коротких волн. - ПМТФ, 1960, N1.
2. Шефгер Г.М. Учет эффектов вязкости и теплопроводности при распространении импульсов в неоднородном движении жидкости. - ПММ, 1969, т.33, в.1.
3. Багдоев А.Г., Даноян Э.Н. Исследования движения среды в окрестности точки касания УВ в линейной и нелинейной постановках. - Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ., 1972, №12, в.6.
4. Багдоев А.Г. Распространение волн в сплошных средах. - Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1984.
5. Asano N., Ono H. Nonlinear dispersive or dissipative waves. - J. Phys. Soc., Japan, vol.31, N.6, 1971.
6. Taniguti T., Wei C. C. Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation. - J. Phys. Soc. Japan, 1968, v. 24.
7. Donald A. The Burgers equation in magneto-thermo-elasticity with one-dimensional deformation. - Z. Angew. Math. And Phys., 1976, 27, N2, 281-284.
8. Ваальдек У.А., Энгельбрехт Ю.К. К вопросу асимптотического описания нелинейной продольной и поперечной волн деформаций в полупространстве. - МТТ, 1986, №4, с.101-106.
9. Энгельбрехт Ю.К. Теория одномерных волн в нелинейных диссипативных средах. - "Механика полимеров", 1976, №1, с.41-46.

10. Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е., Энгельбрехт Ю.К. Нелинейные эволюционные уравнения. - Таллин, Валгус, 1984, с.154.
11. Коробейников В.П. Распространение слабых МГД волн. - Магнитная гидродинамика, 1967, №2.
12. Минасян М.М. О распространении слабых возмущений в магнитной газодинамике. - Докл. АН Арм.ССР, 1972, т. LV, 2, №5, с.273-280.
13. Минасян М.М. Распространение слабых возмущений в бесстолкновительной плазме. - Уч. записки ЕГУ, 1975, 2.
14. Минасян М.М. Приближенные уравнения нелинейных волн в неоднородных движущихся средах с учетом диссипации и дисперсии. - Уч. записки. ЕГУ, 1978, 3, с.46-52.
15. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. - М.: Наука, 1978.
16. Friedrichs K.O., Lax P.D. Systems of conservation equation with a convex extension, - Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 68, 8, 1971, pp.1686-1688.
17. Jeffrey A. Quasilinear hyperbolic systems and waves. - Lond., San-Fr., Melb., Pitnam Publ., 1976.
18. Новацкий В.К. Электромагнитные эффекты в твердых телах. - М.: Мир 1986.
19. Bazer J., Ericson W.B. Nonlinear wave motion in magnetoelasticity. - Arch. Rat. Mech. And Anal., 1974, 55, N2, pp.125-192.
20. Можен М. Механика электромагнитных сплошных сред. - М.: Мир, 1991.
21. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. - М.: Мир, 1972.
22. Минасян М.М. Эвристический подход в теории многомерных "коротких" волн в МСС. - В кн.: "Вопр. оптим. управл. и прочности мех. систем. Сб. научн. трудов. ЕГУ и НАН РА, 1997, с.154-159.
23. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. - М.: Физматгиз, 1962.
24. Engelbrecht J., Maugin G.A. Deformation waves in thermoelastic media and the concept of internal variables. - Arc. Appl. Mech. 66, 1996, pp.200-207.
25. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во МГУ, 1978.
26. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. - М.: Наука, 1973.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
26.11.1999

УДК 539.1+532.5

СТАЦИОНАРНАЯ АККРЕЦИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА
С КОНИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Григорян С.Д.

Ս.Դ. Գրիգորյան

Իդեալական գազի ստացիոնար ակրեցիան կոնական հարվածային ալիքի հետ

Ստացված են ուժեղ կոնական հարվածային ալիքներով ստացիոնար լուծումներ, որոնք նկարագրում են իդեալական գազի ակրեցիան կոնսերվատիվ ձգողության դաշտում։ Հոլդ են տրված իդեալական գազի կոնական հոսանքների առաջին ինտեգրալները։ Հետազոտված են ամբողջ տարածության մեջ լուծումների գոյության պայմանները։

S.D. Grigoryan

Stationary accretion of an ideal gas under a strong conical shock wave

Найдены стационарные решения с сильной конической ударной волной, описывающие аккрецию идеального газа на притягивающий центр. Указаны первые интегралы конических течений идеального газа. Исследованы условия существования решений, определенных во всем пространстве.

В многочисленных астрофизических явлениях возникает задача о стационарном обтекании массивной звезды потоком газа. В данной работе мы рассматриваем эту задачу при следующих предположениях: 1) масса звезды M много больше массы газа, расположенной в ее окрестности; 2) газ является идеальным; 3) радиус звезды R много больше ее гравитационного радиуса $R \gg r_g = 2GM/c^2$; 4) скорости движения газа $v \ll c$, где c — скорость света.

При такой идеализации задача сводится к исследованию стационарного движения идеального газа в поле притягивающего центра в классической ньютоновской теории, причем самогравитацией газа можно пренебречь. Мы предположим также, что движение газа обладает осевой симметрией и относится к классу так называемых конических решений, для которых в цилиндрических координатах r, φ, z все параметры газа существенно зависят только от одной переменной $\lambda = z/r$.

Стационарная аккреция газа при других предположениях изучалась в большом числе работ, обзор которых содержится в книге Зельдовича и Новикова 1971г. и в работе Сюняева 1978г. Конические течения газа без гравитации рассматривались впервые в классической работе Тейлора и Макколла 1944г. при изучении движения тела конической формы в воздухе. Эти решения применялись также Рудерманом и Шнигелем в 1971г. для моделирования движения газа в кильватерном следе, возникающем позади звезды движущейся с постоянной скоростью через однородный газ. Исследование конических потоков газа в поле притягивающего центра впервые было начато в работе Бисноватого-Когана и др. в 1979г., где задача исследовалась, главным образом, численными методами. В данной

работе стационарная аккреция газа с конической ударной волной изучается с помощью строгих аналитических и геометрических методов.

§1. Стационарные конические течения газа в поле притягивающего центра.

Уравнения газовой динамики для стационарных решений с осевой симметрией в цилиндрических координатах r, φ, z имеют следующий вид

$$\begin{aligned} v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{w^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_r, & v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{vw}{r} &= 0 \\ v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_z, & \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} + \frac{\rho v}{r} &= 0 \\ v \frac{\partial(\rho \rho^\gamma)}{\partial r} + u \frac{\partial(\rho \rho^\gamma)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u, v, w — радиальная, вертикальная и вращательная компоненты скорости газа. p — давление, ρ — плотность, $\gamma > 1$ — показатель адиабаты. В рассматриваемой задаче F_r и F_z — радиальная и вертикальная составляющие силы гравитационного притяжения массы M , расположенной в точке $r=0, z=0$:

$$F_r = -\frac{rGM}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad F_z = -\frac{zGM}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.2)$$

где G — гравитационная постоянная, $[G] = L^3 M^{-1} T^{-2}$.

Конические решения системы уравнений (1.1) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{a}{r^s} R(\lambda), \quad p = \frac{ab^2}{r^s} r^{2k} P(\lambda), \quad v = br^k V(\lambda) \\ u &= br^k U(\lambda), \quad w = br^k \Omega(\lambda), \quad \lambda = \frac{z}{r} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где константы a и b имеют размерности $[a] = ML^{-1}$, $[b] = L^{-1} T^{-1}$, k и s — безразмерные константы; из условия конечности массы газа в окрестности центра получаем $s < 3$. Конические решения вида (1.3) при $k=0$ изучались впервые Тейлором и Макколом в качестве модели обтекания потоком газа тела конической формы.

Система уравнений (1.1) при условиях (1.2) имеют решения вида (1.3) только при одном значении $k = -1/2$. В этом случае из констант задачи G, M и b формируется одна безразмерная константа $m = GM/b^2$. Для исследования решений вида (1.3) удобно ввести угол $\theta = \arctg \lambda$ и использовать компоненту скорости V_r , направленную по лучу $\lambda = z/r = \text{const}$ и компоненту скорости V_n , направленную по нормали к V_r :

$$V_r = \frac{\lambda U + V}{(1 + \lambda^2)^{1/2}}, \quad V_n = \frac{U - \lambda V}{(1 + \lambda^2)^{1/2}} \quad (1.4)$$

Система уравнений (1.1) - (1.2) для решений вида (1.3) при преобразовании координат

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{(2m)^{1/2}} V_n (1 + \lambda^2)^{1/4}, \quad y = \frac{1}{(2m)^{1/2}} V_l (1 + \lambda^2)^{1/4} \\ \psi &= \frac{1}{(2m)^{1/2}} \Omega (1 + \lambda^2)^{1/4}, \quad z_0 = \frac{\gamma P}{m(\gamma - 1)R} (1 + \lambda^2)^{1/2} \\ \theta &= \operatorname{arctg} \lambda, \quad R\end{aligned} \quad (1.5)$$

переходит в следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений по θ :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} = x' &= - \frac{y \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{\gamma - 1}{2} z_0 \right) + x \operatorname{tg} \theta \left(\psi^2 + \frac{\gamma - 1}{2} z_0 \right)}{x^2 - \frac{\gamma - 1}{2} z_0} \\ y' &= \frac{1}{x} \left(x^2 + \frac{1}{2} y^2 + \psi^2 + \left(\frac{3}{2} - \kappa \right) \frac{\gamma - 1}{2} z_0 - \frac{1}{2} \right) \\ \psi' &= \frac{\psi}{x} \left(x \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{2} y \right) \\ \frac{z_0'}{z_0} &= -(\gamma - 1) \frac{x'}{x} + \frac{1}{2x} [(s - 3\gamma)y + 2(\gamma - 1)x \operatorname{tg} \theta]\end{aligned} \quad (1.6)$$

уравнение для функции R отделяется

$$\frac{R'}{R} = -\frac{x'}{x} + \frac{1}{x} \left[\left(s - \frac{3}{2} \right) y + (1 - s)x \operatorname{tg} \theta \right] \quad (1.7)$$

Здесь параметр $\alpha = 3/2 - (s + 1)/\gamma$. Замкнутая система уравнений (1.6) полностью определяет стационарные конические течения газа в поле притягивающего центра.

§2. Первые интегралы конических течений газа

Ряд первых интегралов системы (1.6) - (1.7) можно получить путем простых вычислений. Из уравнений для z_0' и R' непосредственно следует закон сохранения

$$F_1 = (z_0 (x \cos \theta)^{\gamma-1})^{s-2} (R x (\cos \theta)^{\gamma-1})^{2-\gamma} = \text{const} \quad (2.1)$$

Этот интеграл аналогичен известному интегралу адиабатичности для автомодельных решений уравнений газовой динамики [6]. Интеграл (2.1) при $\gamma \neq 5/3$ позволяет выразить в явном виде функцию R через решение системы (1.6).

Из уравнений (1.6) для z_0' и ψ' получаем

$$F_2 = z_0 (x \cos \theta)^{\gamma-1} (\psi \cos \theta)^{5-3\gamma} = \text{const} \quad (2.2)$$

В силу интеграла F_2 функция ψ при $\gamma \neq 5/3$ выражается через z_0, x, θ и поэтому система (1.6) сводится к системе трех уравнений для функции x, y, z_0 .

Случай одноатомного газа $\gamma = 5/3$ для рассматриваемых решений является исключительным: при $\gamma = 5/3$ интегралы (2.1) и (2.2) сводятся к интегралу

$$F_3 = z_0 (x \cos \theta)^{2/3} = \text{const} \quad (2.3)$$

Интеграл F_3 также позволяет понизить порядок системы (1.6) на единицу.

Для нахождения более сложных интегралов системы (1.6) необходимо привлечь энергетические соображения¹¹. Оценим полное изменение энергии газа, заключенного в коническом секторе $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, в единицу времени

Поток энергии в единицу времени через конус $\lambda = \text{const}$ равен

$$2\pi \int_0^\infty \epsilon v_n r (1 + \lambda^2)^{1/2} dr$$

где $v_n = (u - \lambda v) / (1 + \lambda^2)^{1/2}$ — компонента скорости газа, ортогональная к поверхности конуса, ϵ — энергия единицы объема газа:

$$\epsilon = \frac{\rho}{\gamma - 1} + \rho \frac{v^2 + u^2 + w^2}{2} - \frac{GM\rho}{(r^2 + z^2)^{1/2}}$$

Работа, совершаемая газом против сил давления, равна

$$2\pi \int_0^\infty p v_n r (1 + \lambda^2)^{1/2} dr$$

Полное изменение энергии газа E внутри конического сектора $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= 2\pi \int_0^\infty (\epsilon + p) v_n r (1 + \lambda^2)^{1/2} dr \Big|_{\lambda_1}^{\lambda_2} = \\ &= 2\pi a b^2 \int_0^\infty R \left(\frac{\gamma p}{(1 - \gamma)R} + \frac{V_n^2 + V_t^2 + \Omega^2}{2} - \frac{m}{(1 + \lambda^2)^{1/2}} \right) V_n r^{-1/2} dr \Big|_{\lambda_1}^{\lambda_2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для стационарного течения газа $dE/dt = 0$; отсюда следует сохранение интеграла (2.4), вычисленного при различных значениях λ . Однако интеграл в (2.4) в общем случае равен $\pm \infty$; только в специальном

¹¹ Закон сохранения энергии для исследования автомодельных решений впервые был применен Седовым [6]; новые применения этого закона, позволившие обнаружить автомодельные пульсации газа в звездах, были найдены Бояжявленским [2,3].

случае, когда подынтегральное выражение в (2.4) равно нулю, проведенное рассуждение доказывает сохранение нулевого уровня функции

$$H = \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)R} + \frac{V_n^2 + V_t^2 + \Omega^2}{2} + \frac{m}{(1 + \lambda^2)^{1/2}} \quad (2.5)$$

После преобразования в переменные (1.5) функция H принимает вид

$$H = m(\cos \theta)H_0, \quad H_0 = z_0 + x^2 + y^2 + \psi^2 - 1 \quad (2.6)$$

Дифференцирование функции H_0 в силу системы (1.6) приводит к уравнению

$$H_0' = \frac{\gamma}{x} H \quad (2.7)$$

Отсюда следует прямое доказательство сохранения траекториями системы (1.6) уровня $H = H_0 = 0$.

Из уравнения (2.7) и уравнения (1.6) для z_0' получаем первый интеграл

$$F_1 = z_0 (x \cos \theta)^{-(s+1)/2} H_0^{-(s-1)/2} = \text{const} \quad (2.8)$$

Из уравнения (2.7) и уравнения (1.6) для ψ' получаем первый интеграл

$$F_2 = H_0 \psi^2 \cos^2 \theta = \text{const} \quad (2.9)$$

который при $\gamma \neq 5/3$ выражается через предыдущие интегралы

$$F_3 = (F_1 / F_2)^{2/(s-1)}$$

В силу интегралов (2.2) и (2.8) функции z_0 и ψ при $\gamma \neq 5/3$ выражаются через x, y, θ и поэтому система четырех уравнений (1.6) сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений на функции x, y . При $\gamma = 5/3$ такое же понижение порядка системы (1.6) достигается с помощью интегралов (2.3) и (2.9).

При значениях параметров $\gamma \neq 5/3$, удовлетворяющих условию

$$\left(\frac{3}{2} - \alpha \right) \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) = \frac{1}{2\gamma} (s + 1)(\gamma - 1) = 1 \quad (2.10)$$

или $s = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ система (1.6) имеет еще один интеграл

$$F_4 = H_0 (H_0 + 1 - y^2) = (z_0 + x^2 + \psi^2)(z_0 + x^2 + y^2 + \psi^2 - 1) = \text{const} \quad (2.11)$$

При выполнении условия (2.10) и $H_0 \neq 0$ три первых интеграла (2.8), (2.9) и (2.11) вместе с выражением H_0 (2.6) позволяет выразить x, y, z_0, ψ через H_0, θ . В результате этого система четырех уравнений (1.6) сводится к одному уравнению (2.7) после подстановки полученных выражений для x и y через H_0, θ .

§3. Стационарная аккреция газа с конической ударной волной

1. Поверхность $L = x^2 - \frac{\gamma - 1}{2} z_0 = 0$ является поверхностью непродолжимости решений для системы (1.6). Действительно, с двух сторон производная x' обращается в $\pm \infty$ и меняет знак, поэтому траектории,

втекающие в поверхность $L = 0$, могут быть продолжены при всех θ ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$) только с введением разрыва. Наличие у системы (1.6) поверхности непродолжимости решений $L = 0$ является формальной причиной возникновения в стационарных конических течениях газа ударной волны на которой $\lambda = z/r = \text{const}$. Фронт ударной волны в этих решениях имеет форму конуса. Поверхность $L = 0$ делит пространство переменных x, y, z, ψ на "сверхзвуковую" область $L > 0$, где скорость газа V (ортогональная к поверхности конуса $\lambda = \text{const}$) больше скорости звука $v_0 = (dp/d\rho)^{1/2}$ и "дозвуковую" область $L < 0$, где $v_0 < v$.

Условия Гюгоннио сшивки решений на фронте ударной волны имеют, как известно, следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_1 v_1 &= \rho_2 v_2, \quad v_1 = v_2, \quad p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \\ \frac{\gamma p_1}{(\gamma-1)\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} &= \frac{\gamma p_2}{(\gamma-1)\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь индексы 1 и 2 определяют параметры газа по разные стороны от поверхности разрыва, величины V означают компоненты скорости, ортогональные к разрыву; касательные к разрыву компоненты скорости v_t не меняются.

После подстановки в (3.1) выражений (1.3) – (1.5) получаем условия на скачке:

$$\begin{aligned} R_1 x_1 &= R_2 x_2, \quad y_1 = y_2, \quad \psi_1 = \psi_2, \\ \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{z_{01}^2}{x_1} + x_1^2 &= z_{02}^2 + x_2^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Отметим, что при преобразовании Гюгоннио (3.2) величина

$$H_0 = z_0^2 + x^2 + y^2 + \psi^2 - 1 \text{ сохраняется.}$$

II. Проведем построение стационарных решений, описывающих следующее явление. Пусть на массивное гравитирующее тело набегает поток холодного газа, в этом потоке возникает сильная коническая ударная волна, за которой температура газа существенно отличается от нуля, за фронтом ударной волны происходит аккреция газа на центр.

В случае сильной ударной волны можно считать, что газ перед фронтом ударной волны имеет нулевую температуру, то есть $z_{01} = 0$.

Величины z_{01} и x_1 за фронтом ударной волны в силу (3.2) при $z_{01} = 0$ связаны условием

$$z_{02}^2 = 4\gamma x_1^2 / (\gamma - 1)^2 \quad (3.3)$$

В дальнейшем предположим, что в потоке газа отсутствует вращение ($\psi = 0$) и величина $H_0 = 0$. В этом случае система (1.6) после подстановки $z_0 = 1 - x^2 - y^2$ (в силу инвариантности условия $H_0 = 0$) сводится к

системе двух дифференциальных уравнений на функции x и y определенной внутри единичного круга $D^2: z_0 = 1 - x^2 - y^2 \geq 0$ (фиг.1).

Система (1.6) при $z_0 = 0$ описывает стационарное движение холодного газа (пыли) и интегрируется в явном виде:

$$x = \sin\left(\frac{1}{2}(\theta - \theta_0)\right), \quad y = -\cos\left(\frac{1}{2}(\theta - \theta_0)\right) \quad (3.4)$$

Соответствующее точное решение имеет следующий вид:

$$v = -\frac{(2GM)^{1/2} \cos[(\theta + \theta_0)/2]}{(r^2 + z^2)^{3/4}}, \quad u = -\frac{(2GM)^{1/2} \sin[(\theta + \theta_0)/2]}{(r^2 + z^2)^{3/4}} \quad (3.5)$$

$$\rho = \frac{a \sin^{2(1-s)}[(\theta + \theta_0)/2]}{r(r^2 + z^2)^{s-1/2}}, \quad w = 0, \quad p = 0$$

В решении (3.5) плотность ρ и скорости u, v стремятся к нулю при $(r^2 + z^2) \rightarrow \infty$

Путем прямого вычисления нетрудно убедиться, что система (1.6) при $\theta \rightarrow \pi/2$, $H_{11} = 0$ имеет решение S со следующей асимптотикой при $\theta \rightarrow \pi/2$:

$$x = \alpha \cos \theta, \quad y = -1 + \beta x^2, \quad z_0 = \frac{2}{k(\gamma - 1)} x^2 \quad (3.6)$$

где константы α, β, k выражаются через параметры γ, κ

$$\alpha = \frac{5 - 3\gamma}{4\gamma}, \quad \beta = \gamma \frac{4 + (\gamma - 1)(2\alpha - 3)}{2(5 + \gamma)(2\alpha - 3)(\gamma - 1)}, \quad k = 2 \frac{5 + \gamma(2\alpha - 3)}{5 - \gamma} \quad (3.7)$$

Асимптотика (3.6) имеет физический смысл при $k > 0$, что в силу (3.7) и $\kappa = 3/2 - (s+1)\gamma$ при $\gamma < 5$ означает $s < 3/2$. Асимптотика (3.6) при $\alpha > 0$ ($\gamma < 5/3$) описывает аккрецию на центр. При этом параметры газа при $\theta \rightarrow \pi/2$ ($\lambda = z/r \rightarrow \infty$) имеют следующий асимптотический вид:

$$v = -(2GM)^{1/2} \frac{5 + \gamma}{4\gamma} \frac{r}{z^{3/2}}, \quad u = -(2GM)^{1/2} \frac{1}{z^{1/2}}, \quad w = 0 \quad (3.8)$$

$$\rho = a c_0 \frac{1}{r^s} \left(\frac{z}{r}\right)^{10 - (s+1)\gamma}, \quad p = 2a \frac{GM\alpha^2}{\gamma k} c_0 \frac{1}{r^{1+s}} \left(\frac{z}{r}\right)^{7 - (s+\gamma)\gamma}$$

Частицы газа в асимптотике (3.8) падают в центр $r = z = 0$ по кривым

$$z = c_1 r^{4\gamma/(5+\gamma)} \quad (3.9)$$

которые при $\gamma < 5/3$ касаются оси z . В асимптотике (3.9) при $\gamma < 5/3$, $s < 3/2$ плотность газа $\rho \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$; при $s < 7/(5 + \gamma)$ давление газа $p \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$

Траектория (3.4) (граница круга D^2) при преобразовании Гюгонио на ударной волне (3.2) переходит, в силу (3.3), в эллипс E_1 :

$$\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^2 x^2 + y^2 = 1 \quad (3.10)$$

Поверхность непродолжимости решений $L = x^2 - (\gamma - 1)z_0/2 = 0$ в рассматриваемом случае проектируется в эллипс E_0 :

$$\frac{\gamma+1}{\gamma-1} x^2 + y^2 = 1 \quad (3.11)$$

Очевидно, что при $\gamma > 1$ эллипс E_1 лежит внутри эллипса E_2 (фиг.1).

Траектория S , имеющая асимптотику (3.6), находится (в окрестности точки $Y_1(x=0, y=-1)$) в дозвуковой области $L < 0$ или внутри эллипса E_0 (3.11), при $k < 1$, что в силу (3.7) и $k = 3/2 - (s+1)\gamma$ означает $s > (1+\gamma)/4$. Траектория S находится (в окрестности точки Y_1) внутри эллипса E_1 при $\beta > \beta_0 = \frac{1}{2}((\gamma+1)/(\gamma-1))^2$ и вне эллипса E_1 при $\beta < \beta_0$.

Условие $\beta = \beta_0$ в силу (3.7) означает

$$s = s_0 = \frac{\gamma^2 + 6\gamma + 5}{8\gamma} \quad (3.12)$$

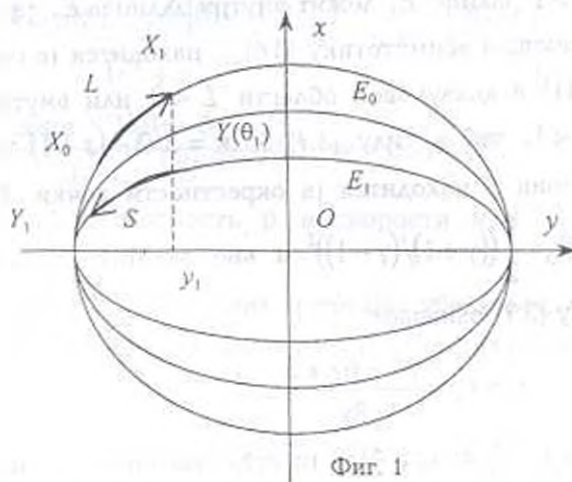
При $1 < \gamma < 5/3$ имеем $3/2 > s_0 > 4/3$, то есть значение s_0 находится в области физической применимости асимптотики (3.6) ($k > 0$ или $s < 3/2$). При изменении s в окрестности s_0 траектория S , имеющая асимптотику (3.6), переходит с одной стороны эллипса E_1 на другую. Поэтому при всех s в некоторой окрестности s_0 заведомо существует пересечение траектории S с эллипсом E_1 . Пусть это пересечение происходит при $0 = \theta_1$ в точке $Y(\theta_1)$ с координатами (x_2, y_2) и пусть X_1 — точка с координатами (x_1, y_2) , переходящая в точку $Y(\theta_1)$ при преобразовании Гюгонио (3.2). Проведенные предварительные построения позволяют теперь перейти к конструкции искомого решения.

Стационарное движение газа с конической ударной волной в поле притягивающего центра описывается следующими двумя решениями. Фронт ударной волны является конусом $\theta = \theta_1$.

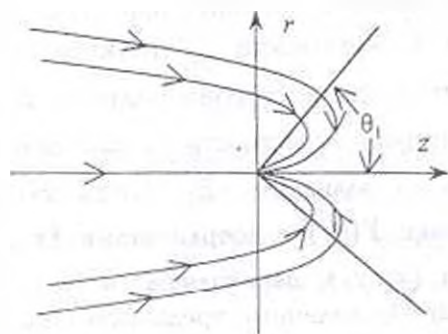
В области перед ударной волной при $-\pi/2 < \theta < \theta_0$ решение имеет вид (3.4) - (3.5), где $\theta_0 = (\theta_1 - 2 \arcsin x_1)$ и соответствует дуге L (от точки X_0 до X_1) на окружности $x^2 + y^2 = 1$ (фиг.1). Это решение описывает стационарное движение газа (холодного газа). В области за ударной волной при $\theta_1 < \theta < \pi/2$ решение описывается отрезком траектории S от точки $Y(\theta_1)$ до точки Y_1 (фиг.1). Траектория S , являющаяся решением системы (1.6) при $H_0 = 0$, $\psi = 0$, имеет при $\theta \rightarrow \pi/2$ асимптотику (3.6). Соответствующее стационарное решение имеет при $\lambda = z/r \rightarrow \infty$

асимптотику (3.8) и описывает аккрецию газа на притягивающий центр $z = r = 0$, касаясь линии (3.9), и плотность газа ρ на оси $r = 0$ равна ∞ . Траектории частиц в построенном решении показаны на фиг. 2.

Полученное решение допускает обобщение при $H_0 \neq 0$, $\psi = 0$. При этом асимптотика решения при $\theta \rightarrow \pi/2$ по-прежнему имеет вид (3.6), из уравнения (2.7) находим асимптотику $H_0 = c(\cos \theta)^{4/(3-\gamma)} \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow \pi/2$.



Фиг. 1



Фиг. 2

III. Отметим, что при $H_0 \leq 0$ и $\gamma \leq 5/3$ все стационарные решения вида (1.3) при наличии вращения газа ($\psi \neq 0$) существуют только на отрезке $|\theta| < \theta_0 < \pi/2$ и не продолжимы при $|\theta| \rightarrow \pi/2$. Действительно, в силу $z_0 \geq 0$ из условия $H_0 = z_0 + x^2 + y^2 + \psi^2 - 1 \leq 0$ следует $\{z_0, |x|, |y|, |\psi|\} \leq 1$. Поэтому в силу наличия первого интеграла (2.2) решение с $\psi \neq 0$, $H_0 \leq 0$ при $\gamma < 5/3$ не может существовать при $|\theta| \rightarrow \pi/2$. При $\gamma < 5/3$ в силу наличия интеграла (2.3) имеем

$$H_0 = \frac{F_3}{(x \cos \theta)^{2/3}} + x^2 + y^2 + \psi^2 - 1 > \frac{4(F_3/3)^{3/4}}{(\cos \theta)^{1/2}} - 1 \quad (3.13)$$

Поэтому при $\gamma = 5/3$ все стационарные решения вида (1.3) при $H_0 \leq 0$ (включая случай $\psi = 0$) не могут быть продолжены при $|\theta| \rightarrow \pi/2$.

При $\psi \neq 0$ и $H_0 > 0$ существуют решения, продолжимые при $|\theta| \rightarrow \pi/2$. Для всех таких решений в силу существования первого интеграла (2.9) имеем $H_0 \rightarrow \infty$ при $|\theta| \rightarrow \pi/2$.

При $\gamma = 5/3$ существуют решения, имеющие следующую асимптотику при $\theta \rightarrow \pi/2$:

$$x = \frac{(kF_3/3)^{3/s}}{(\cos\theta)^{1/s}}, \quad y = \frac{5x}{2\cos\theta}, \quad z_0 = \frac{F_3}{(x\cos\theta)^{2/3}}, \quad \psi = c_1(\cos\theta)^{3/4} \quad (3.14)$$

где $k = 1 - s$. Решения с асимптотикой (3.14) при $0 < s < 1$ могут быть использованы для моделирования стационарных движений газа в поле притягивающего центра, в которых частицы газа при $t \rightarrow \pm\infty$ уходят на бесконечность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бисноватый-Коган Г.С., Каздан Я.М., Кыпин А.А., Луцкий А.Е., Шакура Н.И. Аккреция на быстро движущийся гравитирующий центр — *Астрономический журнал*, 1979, т.56, вып.2, с.359-367.
2. Богоявленский О.И. Автомодельные пульсации газа в звездах — *Письма в АЖ*, 1978, 4, с.397.
3. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. — М.: Наука, 1980. 319с.
4. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. — Теория и эволюция звёзд — М.: Наука, 1971. 484с.
5. Ruderman M.A., Spiegel E.A. — *Astrophys. J.* 1971, vol.65, 1.
6. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 438с.
7. Сюняев Р.А. В сб. "Physics and Astrophysics of Neutron Stars and Black Holes", 1978, LXV Corso Soc. Italiana di Fisica, Bologna.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
19.01.2000

ОГРАНИЧЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ
ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА
ФАЗОВУЮ СКОРОСТЬ

Аветисян В.В.

Վ.Վ. Ավետիսյան

Գծային դինամիկական համակարգի սահմանափակ ղեկավարումը
սահմանափակ ֆազային արագության դեպքում

Դիտարկվում է գծային դինամիկական համակարգը կամայական սկզբնական վիճակից տրված վերջնական վիճակ բերող ղեկավարման կառուցման խնդիրը, երբ առկա են սահմանափակումներ ղեկավարման և համակարգի ֆազային արագության վեկտորների կոմպոնենտների վրա: Համակարգի դինամիկական պարամետրերի համար ստացված են պայմաններ, որոնց դեպքում դիտարկվող խնդիրը լուծելի է տրված սահմանափակումներին քաղաքարող ցանկացած սկզբնական և վերջնական վիճակների համար:

V.V.Avetisyan

Constrained control of linear dynamic system with restrictions on velocity

Рассматривается задача построения управления, обеспечивающего переход линейной динамической системы из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние при ограничениях на компоненты вектора управления и вектора фазового состояния системы. Получены условия на динамические параметры системы, при которых поставленная задача разрешима для любых начальных и конечных состояний, удовлетворяющих наложенным ограничениям.

1. Рассматривается линейная управляемая динамическая система вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (1.1)$$

$$x(t_0) = x^0 \quad (1.2)$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$ - вектор фазовых координат, $u = (u_1, \dots, u_m)$ - вектор управления. $A(t)$ и $B(t)$ - вещественные кусочно-непрерывно зависящие от времени t матрицы размеров $n \times n$ и $n \times m$ соответственно.

Требуется построить управляющую вектор-функцию $u(t)$, осуществляющую переход системы из произвольного начального состояния в заданный момент $t = t_0$ (1.2) в произвольное конечное состояние в некоторый момент $t = T$

$$x(T) = x^1 \quad (1.3)$$

при условии, что на компоненты $u_j(t)$ и $\dot{x}_j(t)$ вектора управления $u(t)$ и вектора фазовой скорости $\dot{x}(t)$ при $t \in [t_0, T]$ наложены следующие ограничения:

$$|u_i(t)| \leq b_i, \quad b_i > 0, i = 1, \dots, m \quad (1.4)$$

$$|x_j(t)| \leq a_j, \quad a_j > 0, j = 1, \dots, n \quad (1.5)$$

Запишем решение системы (1.1), (1.2)

$$x(t) = \Phi(t) \left[x^0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \right] \quad (1.6)$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная, определяемая условиями $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$, $\Phi(t_0) = E_n$, E_n — единичная матрица размера $n \times n$.

Учитывая (1.3) и (1.6), задача сводится к отысканию такого управления $u(t)$, при котором удовлетворяются условие

$$\int_{t_0}^T \Phi^{-1}(t) B(t) u(t) dt = \Phi^{-1}(T) x^1 - x^0 \quad (1.7)$$

и ограничения (1.4), а соответствующее этому управлению фазовая скорость $\dot{x}(t)$ удовлетворяет ограничению (1.5) для всех $t \in [t_0, T]$.

2. Воспользуемся известным подходом [1] построения управления. Этот подход в [2,3] был распространен на случай наличия ограничения на управление — в задачах успокоения многочастотных систем линейных осцилляторов (маятников), скалярно управляемых, а в [4] на основе этих работ — при ограничениях (1.4).

Следуя указанному подходу, управление, решающее задачу без учета ограничений (1.4), (1.5), ищем в виде

$$u(t) = Q^T(t) C, \quad Q(t) = \Phi^{-1}(t) B(t) \quad (2.1)$$

где $C = (C_1, \dots, C_m)$ — постоянный вектор, определяемый из системы линейных алгебраических уравнений

$$R(T) \cdot C = \Phi^{-1}(T) x^1 - x^0, \quad R(T) = \int_{t_0}^T Q(t) Q^T(t) dt \quad (2.2)$$

В случае полной управляемости системы (1.1), матрица $R(T)$ неособая [5] и поэтому (2.2) имеет единственное решение

$$C = R^{-1}(T) \cdot (\Phi^{-1}(T) x^1 - x^0) \quad (2.3)$$

Учитывая (2.1)–(2.3) и подставляя (2.1)–(2.3), (1.5) в (1.1), управление $u(t)$ и соответствующую ему фазовую скорость $\dot{x}(t)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(t) &= F(t, T) \cdot (x^*)^T, \quad F = (F^0, F^1) \\ \dot{x}(t) &= G(t, T) \cdot (x^*)^T, \quad G = (G^0, G^1); \quad x^* = (x^0, x^1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где элементы блочных матриц F и G определяются выражениями

$$\begin{aligned}
F^0(t, T) &= -(\Phi^{-1}(t)B(t))^T R^{-1}(T), \quad F^1(t, T) = (\Phi^{-1}(t)B(t))^T R^{-1}(T)\Phi^{-1}(T) \\
G^0(t, T) &= A(t)\Phi(t) - A(t)\Phi(t)R(t)R^{-1}(T) - B(t)B^T(t)(\Phi^{-1}(t))^T R^{-1}(T) \quad (2.5) \\
G^1(t, T) &= A(t)\Phi(t)R(t)R^{-1}(T)\Phi^{-1}(T) + B(t)B^T(t)(\Phi^{-1}(t))^T R^{-1}(T)\Phi^{-1}(T)
\end{aligned}$$

Пусть $f_{iq}^{0,1}$ и $g_{jq}^{0,1}$ — элементы матриц $F^{0,1}$ и $G^{0,1}$ соответственно. Введем обозначения

$$\begin{aligned}
f_{iq}(t, T) &= \begin{cases} f_{iq}^0(t, T), & q = 1, \dots, n \\ f_{iq}^1(t, T), & q = n+1, \dots, 2n \end{cases}, \quad g_{jq}(t, T) = \begin{cases} g_{jq}^0(t, T), & q = 1, \dots, n \\ g_{jq}^1(t, T), & q = n+1, \dots, 2n \end{cases} \\
x_q^* &= \begin{cases} x_q^0, & q = 1, \dots, n \\ x_q^1, & q = n+1, \dots, 2n \end{cases} \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Тогда с учетом (2.5) и (2.6) искомое управление и соответствующую ему фазовую скорость можно представить в следующих координатных формах:

$$\begin{aligned}
u_i(t) &= \sum_{q=1}^{2n} f_{iq}(t, T) x_q^*, \quad i = 1, \dots, m; \\
\dot{x}_j(t) &= \sum_{q=1}^{2n} g_{jq}(t, T) x_q^*, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Решение $x(t)$ системы (1.1), (1.2) при управлении $u(t)$ с компонентами (2.7) для любого $T > 0$ удовлетворяет краевому условию (1.3). При этом, однако, построенное управление и соответствующая ему фазовая скорость не обязательно удовлетворяют наложенным ограничениям (1.4) и (1.5). Для того, чтобы учесть эти ограничения, введем следующие функции:

$$\begin{aligned}
S_i(t_0, T) &= \left[\max_{t_0 \leq t \leq T} K_i(t_0, t, T) \right]^{-1/2}, \quad i = 1, \dots, m \\
M_j(t_0, T) &= \left[\max_{t_0 \leq t \leq T} L_j(t_0, t, T) \right]^{-1/2}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.8)
\end{aligned}$$

где $K_i(t_0, t, T)$, $L_j(t_0, t, T)$ определяются из (2.6) и имеют вид

$$K_i(t_0, t, T) = \sum_{q=1}^{2n} f_{iq}^2(t, T), \quad i = 1, \dots, m; \quad L_j(t_0, t, T) = \sum_{q=1}^{2n} g_{jq}^2(t, T), \quad j = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

К соотношениям (2.7) применим неравенство Коши-Буняковского

$$\begin{aligned}
|u_i| &\leq \left(\sum_{q=1}^{2n} x_q^{*2} \right)^{1/2} \left(\sum_{q=1}^{2n} f_{iq}^2(t, T) \right)^{1/2}, \quad i = 1, \dots, m \\
|\dot{x}_j| &\leq \left(\sum_{q=1}^{2n} x_q^{*2} \right)^{1/2} \left(\sum_{q=1}^{2n} g_{jq}^2(t, T) \right)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |u_i| &\leq |x^*| [K_i(t_0, t, T)]^{1/2} \leq |x^*| S_i^{-1}(t_0, T), \quad i = 1, \dots, m \\ |\dot{x}_j| &\leq |x^*| [L_j(t_0, t, T)]^{1/2} \leq |x^*| M_j^{-1}(t_0, T), \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из (2.11) следует, что наложенные ограничения (1.4) и (1.5) на компоненты векторов управления и фазовой скорости будут удовлетворены для всех $t \in [t_0, T]$, если время $T > 0$ выбирать из следующего условия:

$$|x^*| = \min_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} [b_i S_i(t_0, T), a_j M_j(t_0, T)] \quad (2.12)$$

Таким образом, построение управления $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ осуществляется по следующей последовательности. Определяются элементы $f_{\alpha\beta}^{0,1}, g_{\alpha\beta}^{0,1}$ матрицы $F^{0,1}, G^{0,1}$ с помощью формул (2.1)-(2.6) и подсчитываются функции $S_i(t_0, T), M_j(t_0, T)$ $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ с помощью (2.8), (2.9). Далее, для любых заданных t_0 и x^* из условия (2.12) находится время T , а затем определяются $u_j, j = 1, \dots, m$ из (2.7).

3. Проиллюстрируем вышеизложенную схему построения управления для системы четвертого порядка

$$\ddot{\psi}_1 = u_1 - u_2, \quad \ddot{\psi}_2 = u_2 \quad (3.1)$$

$$|u_1(t)| \leq b_1, \quad |u_2(t)| \leq b_2, \quad b_2 = 1 \quad (3.2)$$

$$|\psi_1(t)| \leq a_1, \quad |\psi_2(t)| \leq a_2 \quad (3.3)$$

Система (3.1)-(3.3) в безразмерной форме описывает движения различных механических моделей, в частности, плоские движения статически уравновешенным вторым звеном двухзвенного манипулятора [6]. В (3.1)-(3.3) ψ_1, ψ_2 - обобщенные координаты (абсолютные углы в шарнирах манипулятора), а a_1, a_2, b_1, b_2 - заданные безразмерные постоянные.

Определим управления $u_1(t), u_2(t)$ так, чтобы система (3.1) перешла из начального состояния покоя при $t = 0$

$$\psi_1(0) = 0, \dot{\psi}_1(0) = 0, \psi_2(0) = 0, \dot{\psi}_2(0) = 0 \quad (3.4)$$

в заданное конечное состояние покоя при $t = T$

$$\psi_1(T) = \psi_1^1, \dot{\psi}_1(T) = 0, \psi_2(T) = \psi_2^1, \dot{\psi}_2(T) = 0 \quad (3.5)$$

и при этом удовлетворялись ограничения (3.2), (3.3) для всех $t \in [0, T]$.

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\psi_1, \dot{\psi}_1, \psi_2, \dot{\psi}_2)^T$ - фазовый вектор системы (3.1). Представим уравнения (3.1) в общем виде (1.1)

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.6)$$

с постоянными матрицами A, B размеров $4 \times 4, 4 \times 2$ и фундаментальной матрицей $\Phi(t)$ соответственно

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Начальные (3.4) и конечные (3.5) условия запишем в общем виде

$$x(0) = 0, \quad x(T) = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1)^T = (\psi_1^1, 0, \psi_2^1, 0)^T \quad (3.8)$$

Замечание. Система (3.6), (3.7), (3.2) вполне управляема. Действительно, вместо (3.2) рассмотрим ограничение

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \leq r, \quad r = \min_i b_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.2')$$

Согласно [7], система (3.6), (3.7), (3.2') вполне управляема, так как имеет место условие Калмана [1] и $\operatorname{Re} \lambda_i = 0, i = 1, \dots, 4$, где λ_i — собственные числа матрицы A . Поскольку $W_0 \subset W_1$, где $W_0 = \{u: |u| \leq r\}$, $W_1 = \{u: |u_i| \leq b_i\}$, то вполне управляема и система (3.6), (3.7), (3.2).

Из (2.4) следует, что при построении управления достаточно вычислить элементы матриц F^1, G^1 (2.5). С помощью (3.7), (2.1)–(2.6) найдем

$$F^1 = \|f_{iq}^1\|, \quad i = 1, 2; q = 1, \dots, 4, \quad f_{11}^1 = f_{13}^1 = f_{23}^1 = -12T^{-2}t + 6T^{-1} \quad (3.9)$$

$$f_{12}^1 = f_{14}^1 = f_{24}^1 = 6T^{-2}t - 2T^{-1}, \quad f_{21}^1 = f_{22}^1 = 0$$

$$G^1 = \|g_{jq}^1\|, \quad j = 1, \dots, 4; q = 1, \dots, 4, \quad g_{11}^1 = g_{33}^1 = -6T^{-2}t^2 + 6T^{-1}t \quad (3.10)$$

$$g_{12}^1 = g_{34}^1 = 3T^{-2}t^2 - 2T^{-1}t, \quad g_{21}^1 = g_{43}^1 = -12T^{-2}t - 6T^{-1}$$

$$g_{22}^1 = g_{44}^1 = 6T^{-2}t - 2T^{-1}, \quad g_{13}^1 = g_{14}^1 = g_{23}^1 = g_{24}^1 = g_{31}^1 = g_{32}^1 = g_{41}^1 = g_{42}^1 = 0$$

Тогда для вспомогательных функций $S_i, i = 1, 2$ и $M_j, j = 1, 3$ из (2.8) будем иметь

$$S_1(T) = (72/T^4 + 32/T^2)^{-1/2}, \quad S_2(T) = \sqrt{2}S_1, \quad M_1(T) = M_3(T) = 2/3T \quad (3.11)$$

Подставим $S_i, i = 1, 2$ и $M_j, j = 1, 3$ из (3.11) в условие (2.12), в кото-

ром, согласно (3.8), положим $|x^*| = \sqrt{(x_1^1)^2 + (x_2^1)^2}$. Из (2.12) получим уравнения для нахождения T . В зависимости от соотношений между параметрами задачи a_1, a_2, b_1, b_2 возможны следующие случаи:

1.1. $a_1 < a_2, b_1 < \sqrt{2}b_2$. Тогда, если а) $b_1 > 8\sqrt{2}a_1/3$, то из (2.12) получим

$$|x^*| = \begin{cases} S_1(T), & T \in [0, T_{11}] \\ M_1(T), & T \in [T_{11}, \infty] \end{cases} \quad (3.12, a)$$

где T_{11} определяется из равенства $S_1(T) = M_1(T)$

$$T_{11} = [288a_1^2 / (9b_1^2 - 128a_1^2)]^{1/2}$$

Поскольку функции S_1, M_1 (3.11) монотонно возрастающие, то из уравнений (3.12, а) искомое время T определяется единственным образом

$$T = \left(\left(16|x^*|^2 + \left(256|x^*|^4 + 72b_1^2|x^*|^2 \right)^{1/2} \right) / b_1^2 \right)^{1/2}, \quad T \in [0, T_{11}] \quad (3.12, a1)$$

$$T = 3|x^*| / 2a_1, \quad T \in [T_{11}, \infty] \quad (3.12, a2)$$

Если а) $b_1 > 8\sqrt{2}a_1/3$, то из (2.12) получим

$$|x^*| = S_1(T), \quad T \in [T, \infty] \quad (3.12, b)$$

откуда с учетом (3.11) найдем

$$T = \left(\left(16|x^*|^2 + \left(256|x^*|^4 + 72b_1^2|x^*|^2 \right)^{1/2} \right) / b_1^2 \right)^{1/2} \quad (3.12, b1)$$

Нахождение времени T в остальных случаях производится аналогичным образом. Окончательно получаем

$$2.1. \quad a_1 < a_2, \quad b_1 > \sqrt{2}b_2$$

$$a) \quad b_2 > 8a_1/3$$

$$|x^*| = \begin{cases} S_2(T), & T \in [0, T_{21}] \\ M_1(T), & T \in [T_{21}, \infty] \end{cases} \quad T_{21} = [144a_1^2 / (9b_2^2 - 128a_1^2)]^{1/2} \quad (3.13, a)$$

$$T = \left(\left(8|x^*|^2 + \left(64|x^*|^4 + 36b_2^2|x^*|^2 \right)^{1/2} \right) / b_2^2 \right)^{1/2}, \quad T \in [0, T_{21}] \quad (3.13, a1)$$

$$T = 3|x^*| / 2a_2, \quad T \in [T_{21}, \infty] \quad (3.13, a2)$$

$$b) \quad b_2 < 8a_1/3$$

$$|x^*| = S_2(T), \quad T \in [0, \infty] \quad (3.13, b)$$

$$T = \left(\left(8|x^*|^2 + \left(64|x^*|^4 + 36b_2^2|x^*|^2 \right)^{1/2} \right) / b_2^2 \right)^{1/2}, \quad T \in [0, \infty] \quad (3.13, b1)$$

$$1.3. \quad a_1 > a_2, \quad b_1 < \sqrt{2}b_2$$

$$a) \quad b_1 > 8\sqrt{2}a_2/3$$

$$|x^*| = \begin{cases} S_1(T), & T \in [0, T_{13}] \\ M_3(T), & T \in [T_{13}, \infty] \end{cases} \quad T_{13} = [288a_2^2 / (9b_1^2 - 128a_2^2)]^{1/2} \quad (3.14, a)$$

$$T = \left[\left(16|x^*|^2 + \left(256|x^*|^4 + 72b_1^2|x^*|^2 \right)^{1/2} \right) / b_1^2 \right]^{1/2}, \quad T \in [0, T_{13}] \quad (3.14, a1)$$

$$T = 3|x^*| / 2a_2, \quad T \in [T_{13}, \infty] \quad (3.14, a2)$$

$$b) \quad b_1 < 8\sqrt{2}a_2 / 3$$

$$|x^*| = S_1(T), \quad T \in [0, \infty] \quad (3.14, b)$$

$$T = \left[\left(16|x^*|^2 + \left(256|x^*|^4 + 36b_1^2|x^*|^2 \right)^{1/2} \right) / b_1^2 \right]^{1/2}, \quad T \in [0, \infty] \quad (3.14, b1)$$

$$2.3. \quad a_1 > a_2, \quad b_1 > \sqrt{2}b_2$$

$$a) \quad b_2 > 8a_2 / 3$$

$$|x^*| = \begin{cases} S_2(T), & T \in [0, T_{23}] \\ M_3(T), & T \in [T_{23}, \infty] \end{cases} \quad T_{23} = [144a_2^2 / (9b_1^2 - 128a_2^2)]^{1/2} \quad (3.15, a)$$

$$T = \left[\left(8|x^*|^2 + \left(64|x^*|^4 + 36b_1^2|x^*|^2 \right)^{1/2} \right) / b_1^2 \right]^{1/2}, \quad T \in [0, T_{23}] \quad (3.15, a1)$$

$$T = 3|x^*| / 2a_2, \quad T \in [T_{23}, \infty] \quad (3.15, a2)$$

$$b) \quad b_2 < 8a_2 / 3$$

$$|x^*| = S_2(T), \quad T \in [0, \infty] \quad (3.15, b)$$

$$T = \left[\left(8|x^*|^2 + \left(64|x^*|^4 + 36b_2^2|x^*|^2 \right)^{1/2} \right) / b_2^2 \right]^{1/2}, \quad T \in [0, \infty] \quad (3.15, b1)$$

Таким образом, расчет управления можно провести по следующей последовательности. Пусть параметры задачи удовлетворяют одному из случаев i, j) (а), $i = 1, 2; j = 1, 3$. Разобьем весь полубесконечный интервал изменения T на две части: $[0, T_{ij}]$, $[T_{ij}, \infty]$, которым соответствуют два интервала изменения $|x^*|: [0, |x^*|_y]$, $[|x^*|_y, \infty]$. Здесь $|x^*|_y$, $i = 1, 2; j = 1, 3$ определяются подстановкой в правые части уравнений (3.12, а, б) - (3.15, а, б) значений $T = T_{ij}$, $i = 1, 2; j = 1, 3$ из (3.12, а1, а2) - (3.15, а1, а2) соответственно. Далее, для фиксированного начального состояния ($t = 0, x^0 = 0$) (3.8) по заданному конечному состоянию x^1 , путем сравнения $|x^*|$ с $|x^*|_y$

определяем, в каком из двух отрезков лежит искомое T . Если $T \in [0, T_0]$, то T определяется одним из формул (3.12, a1)-(3.15, a1). Если $T \in [T_0, \infty]$ то T определяется с помощью (3.12, a1)-(3.15, a1).

Если, же параметры задачи удовлетворяют одному из случаев i, j) (b), $i=1,2; j=1,3$, то по заданному x^1 время T на всем интервале изменения $[0, \infty)$, определяется единственным образом из уравнений (3.12,b)-(3.15,b) и выражается с помощью (3.12,b1)-(3.15,b1) соответственно.

Теперь для заданного начального и конечного состояний (3.8) компоненты управления в любой момент времени можно подсчитывать по формулам

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 6T^{-2}(1-2T^{-1}t)x_1^1 + 2T^{-1}(3T^{-1}t-2)x_2^1 + \\ &\quad + 6T^{-2}(1-2T^{-1}t)x_3^1 + 2T^{-1}(3T^{-1}t-2)x_4^1 \\ u_2(t) &= 6T^{-2}(1-2T^{-1}t)x_3^1 + 2T^{-1}(3T^{-1}t-2)x_4^1 \end{aligned}$$

в которых время T определяется по формулам (3.12,a1,a2,b1)-(3.15, a1,a2,b1) согласно вышеизложенному.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р. Об общей теории систем управления. Тр. I-го конгр. Междунар. федерации по автомат. управ-ю. (IFAC). М. : АН СССР, 1961. Т.2, с.521-547.
2. Черноусько Ф. А. О построении ограниченного управления в колебательных системах. // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4, с. 549-558.
3. Добрынина И. С., Черноусько Ф. А. Ограниченное управление линейной системой четвертого порядка // РАН. Техн. Кибернет. 1992, № 6, с. 94-100.
4. Аветисян В.В. Ограниченное векторное управление линейной динамической системой.// Сб. науч. Тр. Конф. "Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем". Ереван, 1997, с. 13-17.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением.- М. : Наука, 1968. 476с.
6. Аветисян В.В., Болотник Н.Н., Черноусько Ф.А. Оптимальные программные движения двузвенного манипулятора.// Изв. АН СССР. Техн. кибернет. 1985, № 3, с. 113-120
7. Brammer R. F. Controllability of linear autonomous systems with positive pastive controllers // SIAM J. on Control. 1972. V. 10, No 2.

УДК 518.9:531.01

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА УКЛОНЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК ОТ НЕСКОЛЬКИХ ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ В ОДНОРОДНОМ ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

Барсегян В.Р., Симонян Т.А.

Վ.Ռ. Բարսեղյան, Տ.Ա. Սիմոնյան

Շատ նպատակային բազմություններից նյութական կետերի շեղման դիֆերենցիալ խաղ համասեռ
կենտրոնական դաշտում

Դիտարկվում է համասեռ կենտրոնական դաշտում շատ նպատակային բազմություններից շեղման
դիֆերենցիալ խաղ ստոխաստիկ մասնակի ծրագրային ստրատեգիաների դասում, երբ խաղը ընթանում է
նեղ սֆերիկ շերտերում: Երկրորդ խաղացողը կառուցում է իր ստրատեգիան հետևելով նախորդ
կառուցված ուղղորդին, առաջին խաղացողի ամենաուժեղ դիմադրության դեպքում: Հարթ դեպքում երկու
նպատակային բազմություններից շեղման համար կառուցված է երկրորդ խաղացողի ստրատեգիան
հերկված և ուղղորդից համակարգի իրական թափային վիճակի շեղման գնահատականը ժամանակի
յանկալյալ աճի համար:

V.R. Barsегhyan, T.A. Simonyan

The differential game of the deviation of substantial points from several target sets in the homogeneous
central field

Рассматривается дифференциальная игра уклонения от нескольких целевых множеств и
классе стохастических частично-программных стратегий в однородном центральном поле.
Когда игра протекает в тонких сферических слоях. Второй игрок строит свою стратегию
отслеживая построенный поводыр, при самом упорном сопротивлении со стороны первого
игрока. В комбинаторном случае при двух целевых множествах построена стратегия второго
игрока, которая обеспечивает уклонение от этих множеств и получена оценка для величины
расстояния истинного фазового состояния системы от поводыря в любой момент времени

1. Рассмотрим процесс преследования летательных аппаратов, условно
называемых перехватчиком и целью. Для описания движения перехватчика и цели, считая их материальными точками и пренебрегая возмущениями от несферичности Земли, атмосферным сопротивлением и притяжением других небесных тел, запишем векторные уравнения для каждого аппарата, участвующего в сближении [1].

$$\ddot{\mathbf{r}}_n + \frac{\mu_0}{r_n^3} \mathbf{r}_n = \mathbf{u}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_c + \frac{\mu_0}{r_c^3} \mathbf{r}_c = \mathbf{v} \quad (1.1)$$

где $\mathbf{r}_n$ и $\mathbf{r}_c$ — геоцентрические радиус-векторы перехватчика и цели; $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — равнодействующие векторы ускорения от тяги двигателей перехватчика и цели; μ_0 — гравитационная постоянная Земли.

Предполагая, что преследование протекает в тонких сферических слоях гравитационного поля [1] и считая, что двигатели управления работают непрерывно, уравнения (1.1) принимают вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_n + \omega^2 \mathbf{r}_n = \mathbf{u}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_c + \omega^2 \mathbf{r}_c = \mathbf{v} \quad (1.2)$$

где $\omega^2 = \frac{\mu_0}{r_{cp}^3}$, $r_{cp} = \text{const}$ — средний радиус сферического слоя.

Вычитая из первого уравнения (1.2) второе и определяя вектор дальности от цели до перехватчика $\bar{r} = \bar{r}_n - \bar{r}_u$, получим

$$\dot{\bar{r}} + \omega^2 \bar{r} = \bar{u} - \bar{v} \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) в нормальной форме запишется

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv \quad (1.4)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_6)'$, $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = y$, $x_4 = \dot{y}$, $x_5 = z$, $x_6 = \dot{z}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Управления $u = (u_1, u_2, u_3)'$ и $v = (v_1, v_2, v_3)'$ удовлетворяют ограничениям

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq \lambda^2, \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \leq \lambda^2 \quad (1.5)$$

Здесь и далее штрих означает транспонирование.

Пусть заданы моменты времени $t_0 = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \dots < \vartheta_m = \theta$.

Рассмотрим дифференциальную игру уклонения системы (1.4) в моменты времени ϑ_k , ($k = 1, \dots, m$) от множеств

$$M_k: \sum_{i=1}^6 x_i^2[\vartheta_k] \leq a_k^2 \quad (k = 1, \dots, m) \quad (1.6)$$

когда управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ выбираются из класса стохастических частично-программных управлений на интервале времени $[t_0, \theta]$ [2,3].

Следуя работе [3], стохастические частично-программные управления игроков, как измеримые по t , ω и неупреждающие функции на полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ имеют вид

$$u_i(t, \omega, x[\tau_i]) = u_i(t, \xi_1, \dots, \xi_i, x[\tau_i]) \quad (1.7)$$

$$v_i(t, \omega, x[\tau_i]) = v_i(t, \xi_1, \dots, \xi_i, x[\tau_i]) \quad (1.8)$$

при $\tau_i \leq t < \tau_{i+1}$, где $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ являются узлами разбиения интервала времени $[t_0, \theta]$ с диаметром $\delta = \sup_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$ таким, что моменты времени ϑ_k ($k = 1, \dots, m$) являются узлами разбиения, т.е.

$$\tau_0 = t_0 = \vartheta_0, \quad \tau_i = \vartheta_1, \dots, \tau_m = \vartheta_m = \theta$$

Случайное движение системы (1.4) определится как решение стохастического дифференциального уравнения

$$\dot{x} = Ax + Bu_i(t, \xi_1, \dots, \xi_i, x[\tau_i]) + Cv_i(t, \xi_1, \dots, \xi_i, x[\tau_i])$$

при частично-программных управлениях $u_i(\cdot)$ и $v_i(\cdot)$ и начальной позиции $(\tau_i, x[\tau_i])$, т.е.

$$x(t, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}) = X[t, \tau_i] X[\tau_i] + \int_{\tau_i}^t X[t, \tau] [Bu(\tau, \cdot) + Cv(\tau, \cdot)] d\tau \quad (1.9)$$

при $\tau_i \leq t < \tau_{i+1}$. Здесь $X[t, \tau]$ - фундаментальная матрица решений однородной части системы (1.4) и имеет вид

$$X[t, \tau] = \begin{pmatrix} \cos \omega(t-\tau) & \frac{\sin \omega(t-\tau)}{\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega \sin \omega(t-\tau) & \cos \omega(t-\tau) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \omega(t-\tau) & \frac{\sin \omega(t-\tau)}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \sin \omega(t-\tau) & \cos \omega(t-\tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \omega(t-\tau) & \frac{\sin \omega(t-\tau)}{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega \sin \omega(t-\tau) & \cos \omega(t-\tau) \end{pmatrix}$$

Иными словами, перехватчик (первый игрок) стремится сблизить стохастическое движение (1.9) системы к множествам M_k ($k = 1, \dots, m$) (1.6) не позже, чем к моментам времени ϑ_k ($k = 1, \dots, m$). Целью второго игрока является выбором своей стратегии (1.8) уклонить стохастическое движение (1.9) системы от всех множеств M_k ($k = 1, \dots, m$) до моментов θ_k .

2. Наряду со стохастическим движением (1.9) исходной системы (1.4) рассмотрим детерминированное движение точки (поводырь) $w(t)$, которое формируется так, чтобы в процессе игры они взаимно отслеживались [2, 4]. Динамика поводыря определяется следующим уравнением:

$$\dot{w} = Aw + Bu + Cv \quad (2.1)$$

Составим гипотетические рассогласования $\varepsilon_k^{(0)}(t, w, \vartheta_k)$ ($k = 1, \dots, m$) [3, 4]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^{(0)}(t, w, \vartheta_k) = \max_{\|l_k\|=1} & \left[l_k' X[\vartheta_k, t] w + \int_{\vartheta_k}^t \min_{\substack{u^2 + w^2 + v^2 \leq \lambda_1^2}} l_k' X[\vartheta_k, \tau] Bu(\tau) d\tau + \right. \\ & \left. + \int_{\vartheta_k}^t \max_{\substack{v^2 + w^2 + u^2 \leq \lambda_2^2}} l_k' X[\vartheta_k, \tau] Cv(\tau) d\tau + \min_{p \in M_1} l_k' p \right] \quad (2.2) \end{aligned}$$

Стратегия второго игрока $\{V_k[t, w]\}$, обеспечивающая уклонение каждого движения $w(t)$ системы (2.1) от множеств $\{M_k\}$ до моментов времени $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$, если $w_0 = w(t_0)$ не принадлежит множеству M_1 , определяются из условия [3, 5]

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \int_{\vartheta_k - \mu}^{\vartheta_k + \mu} \frac{d\tau}{[\varepsilon_k^{(0)}(t, w, \tau)]^2} l_k^{(0)'} X[\tau, t] \Big| CV_t[t, w] = \\ & = \max_{\substack{\vartheta_k - \mu \leq t \leq \vartheta_k + \mu, \\ \vartheta_k - \mu \leq t \leq \vartheta_k + \mu, \\ \vartheta_k - \mu \leq t \leq \vartheta_k + \mu}} \left\{ \sum_{k=1}^m \int_{\vartheta_k - \mu}^{\vartheta_k + \mu} \frac{d\tau}{[\varepsilon_k^{(0)}(t, w, \tau)]^2} l_k^{(0)'} X[\tau, t] \Big| CV \right. \quad (2.3) \\ & \quad \left. (\vartheta_{k-1} - \mu \leq t \leq \vartheta_k - \mu, k = 1, \dots, m) \right\} \end{aligned}$$

где $\mu > 0$ - сколь угодно малое число, $l_k^{(0)}$ - векторы, максимизирующие

(2.2), единственность которых следует из выполнения для l_k ($k = 1, \dots, m$) условия [5]

$$l'_k(Bu + Cv) \geq \min_{u^2+v^2 \leq \lambda_1^2} l'_k Bu + \max_{v^2-u^2 \leq \lambda_1^2} l'_k Cv$$

которое в данном случае принимает следующий вид:

$$l_{k2}(v_1 - u_1) + l_{k4}(v_2 - u_2) + l_{k6}(v_3 - u_3) \leq (\lambda_2 - \lambda_1) \sqrt{l_{k2}^2 + l_{k4}^2 + l_{k6}^2},$$

$$(k = 1, \dots, m)$$

Пучок абсолютно-непрерывных функций, который является поводырем, будет решением следующего дифференциального уравнения:

$$\dot{w} = Aw + Bu[t] + C\dot{v} \quad w_0 = w(t_0) \quad (2.4)$$

где $u[t]$ - любое допустимое управление, а $\dot{v}$ определяется из условия (2.3).

Так как целью второго игрока является получение гарантированного результата, обеспечивающего соответствующие отклонения от целевых множеств $M_1, \dots, M_m$ при самом упорном сопротивлении первого игрока, то второй игрок прицеливает движение на построенный поводырь.

Рассмотрим компланарный случай и пусть $m = 2$, тогда, предполагая, что

а) $l_{k1} = l_{k3} = 0$ ($k = 1, 2$) из (2.2) при $k = 1$ имеем

$$\varepsilon_1^0(t, w, \vartheta_1) = \max_{u^2+v^2 \leq \lambda_1^2} \{l_{12}A_1(t, w, \vartheta_1) + l_{14}B_1(t, w, \vartheta_1) +$$

$$+ \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \min_{u^2+v^2 \leq \lambda_1^2} [u_1 l_{12} \cos \omega(\vartheta_1 - \tau) + u_2 l_{14} \cos \omega(\vartheta_1 - \tau)] d\tau +$$

$$+ \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \max_{v^2-u^2 \leq \lambda_1^2} [v_1 l_{12} \cos \omega(\vartheta_1 - \tau) + v_2 l_{14} \cos \omega(\vartheta_1 - \tau)] d\tau + \min_{p \in M_1} l'p\}$$
(2.5)

где

$$A_1(t, w, \vartheta_1) = w_2(t) \cos \omega(\vartheta_1 - t) - w_1(t) \omega \sin \omega(\vartheta_1 - t)$$

$$B_1(t, w, \vartheta_1) = w_4(t) \cos \omega(\vartheta_1 - t) - w_3(t) \omega \sin \omega(\vartheta_1 - t)$$

Проведя необходимые выкладки, из (2.5) получим

$$l_{12}^0 = \frac{A_1(t, w, \vartheta_1)}{\sqrt{A_1^2(t, w, \vartheta_1) + B_1^2(t, w, \vartheta_1)}} \quad l_{14}^0 = \frac{B_1(t, w, \vartheta_1)}{\sqrt{A_1^2(t, w, \vartheta_1) + B_1^2(t, w, \vartheta_1)}}$$

$$\varepsilon_1^0(t, w, \vartheta_1) = \sqrt{A_1^2(t, w, \vartheta_1) + B_1^2(t, w, \vartheta_1)} + (\lambda_2 - \lambda_1) h_1(t, \vartheta_1) - a_1 \quad (2.6)$$

$$\text{где } h_1(t, \vartheta_1) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} |\cos \omega(\vartheta_1 - \tau)| d\tau$$

Аналогичным образом из (2.2) при $k = 2$ будем иметь

$$l_{21}^0 = \frac{C_1(t, w, \vartheta_2)}{\sqrt{C_1^2(t, w, \vartheta_2) + D_1^2(t, w, \vartheta_2)}}$$

$$I_{24}^0 = \frac{D_1(t, w, \vartheta_2)}{\sqrt{C_1^2(t, w, \vartheta_2) + D_1^2(t, w, \vartheta_2)}}$$

$$\varepsilon_2^{(0)}(t, w, \vartheta_2) = \sqrt{C_1^2(t, w, \vartheta_2) + D_1^2(t, w, \vartheta_2)} + (\lambda_2 - \lambda_1)h_2(t, \vartheta_2) - a_2 \quad (2.7)$$

где приняты обозначения

$$C_1(t, w, \vartheta_2) = w_2(t) \cos \omega(\vartheta_2 - t) - w_1(t) \omega \sin \omega(\vartheta_2 - t)$$

$$D_1(t, w, \vartheta_2) = w_4(t) \cos \omega(\vartheta_2 - t) - w_3(t) \omega \sin \omega(\vartheta_2 - t)$$

$$h_2(t, \vartheta_2) = \int_0^{\vartheta_2} \cos \omega(\vartheta_2 - \tau) d\tau$$

Таким образом, подставляя выражения для $\varepsilon_1^{(0)}$ из (2.6) и $\varepsilon_2^{(0)}$ из (2.7) в (2.3) и проводя соответствующие вычисления для управлений второго игрока, обеспечивающих уклонение от множеств M_1 и M_2 , будем иметь:

$$\begin{aligned} \text{при } t_0 \leq t \leq \tau \leq \vartheta_1 \quad V_{1c}(t, w) &= \lambda_2 F_1(t, w) [F_1^2(t, w) + E_1^2(t, w)]^{1/2} \\ V_{2c}(t, w) &= \lambda_2 E_1(t, w) [F_1^2(t, w) + E_1^2(t, w)]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \text{при } \vartheta_1 \leq t \leq \tau \leq \vartheta_2 \quad V_{1c}(t, w) &= \lambda_2 C_2(t, w) [C_2^2(t, w) + D_2^2(t, w)]^{1/2} \\ V_{2c}(t, w) &= \lambda_2 D_2(t, w) [C_2^2(t, w) + D_2^2(t, w)]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$F_1(t, w) = A_2(t, w) + C_2(t, w), \quad E_1(t, w) = B_2(t, w) + D_2(t, w)$$

$$A_2(t, w) = - \int_0^{\vartheta_1} \frac{I_{12}^0 \cos \omega(\tau - t)}{[\varepsilon_1^{(0)}(t, w, \vartheta_1)]^2} d\tau, \quad B_2(t, w) = - \int_0^{\vartheta_1} \frac{I_{14}^0 \cos \omega(\tau - t)}{[\varepsilon_1^{(0)}(t, w, \vartheta_1)]^2} d\tau$$

$$C_2(t, w) = - \int_0^{\vartheta_2} \frac{I_{22}^0 \cos \omega(\tau - t)}{[\varepsilon_2^{(0)}(t, w, \vartheta_2)]^2} d\tau, \quad D_2(t, w) = - \int_0^{\vartheta_2} \frac{I_{24}^0 \cos \omega(\tau - t)}{[\varepsilon_2^{(0)}(t, w, \vartheta_2)]^2} d\tau$$

б) При $I_{k2} = I_{k4} = 0$ ($k = 1, 2$), проводя аналогичные рассуждения, для управлений второго игрока, обеспечивающих уклонение от множеств M_1 и M_2 , будем иметь;

$$\begin{aligned} \text{при } t_0 \leq t \leq \tau \leq \vartheta_1 \quad V_{1c}(t, w) &= \lambda_2 F_2(t, w) [F_2^2(t, w) + E_2^2(t, w)]^{1/2} \\ V_{2c}(t, w) &= \lambda_2 E_2(t, w) [F_2^2(t, w) + E_2^2(t, w)]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \text{при } \vartheta_1 \leq t \leq \tau \leq \vartheta_2 \quad V_{1c}(t, w) &= \lambda_2 C_3(t, w) [C_3^2(t, w) + D_3^2(t, w)]^{1/2} \\ V_{2c}(t, w) &= \lambda_2 D_3(t, w) [C_3^2(t, w) + D_3^2(t, w)]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

где приняты следующие обозначения:

$$F_2(t, w) = A_3(t, w) + C_3(t, w), \quad E_2(t, w) = B_3(t, w) + D_3(t, w)$$

$$A_3(t, w) = - \frac{1}{\omega} \int_0^{\vartheta_1} \frac{I_{11}^0 \sin \omega(\tau - t)}{[\varepsilon_1^{(0)}(t, w, \vartheta_1)]^2} d\tau, \quad B_3(t, w) = - \frac{1}{\omega} \int_0^{\vartheta_1} \frac{I_{13}^0 \sin \omega(\tau - t)}{[\varepsilon_1^{(0)}(t, w, \vartheta_1)]^2} d\tau$$

$$C_1(t, w) = -\frac{1}{\omega} \int_{t_0}^{\vartheta_1} \frac{I_{21}^0 \sin \omega(\tau - t)}{[\varepsilon_2^-(t, w, \vartheta_2)]^2} d\tau, \quad D_1(t, w) = -\frac{1}{\omega} \int_{t_0}^{\vartheta_1} \frac{I_{24}^0 \sin \omega(\tau - t)}{[\varepsilon_2^-(t, w, \vartheta_2)]^2} d\tau$$

$$\varepsilon_1^{-(0)}(t, w, \vartheta_1) = \sqrt{\bar{A}_1^2(t, w, \vartheta_1) + \bar{B}_1^2(t, w, \vartheta_1) + (\lambda_2 - \lambda_1)h_1(t, \vartheta_1) - a_1}$$

$$\varepsilon_2^{-(0)}(t, w, \vartheta_2) = \sqrt{\bar{C}_1^2(t, w, \vartheta_2) + \bar{D}_1^2(t, w, \vartheta_2) + (\lambda_2 - \lambda_1)h_2(t, \vartheta_2) - a_2}$$

$$\bar{A}_1(t, w, \vartheta_1) = w_1(t) \cos \omega(\vartheta_1 - t) + w_2(t) \frac{1}{\omega} \sin \omega(\vartheta_1 - t)$$

$$\bar{B}_1(t, w, \vartheta_1) = w_3(t) \cos \omega(\vartheta_1 - t) + w_4(t) \frac{1}{\omega} \sin \omega(\vartheta_1 - t)$$

$$\bar{C}_1(t, w, \vartheta_2) = w_1(t) \cos \omega(\vartheta_2 - t) + w_2(t) \frac{1}{\omega} \sin \omega(\vartheta_2 - t)$$

$$\bar{D}_1(t, w, \vartheta_2) = w_3(t) \cos \omega(\vartheta_2 - t) + w_4(t) \frac{1}{\omega} \sin \omega(\vartheta_2 - t)$$

$$I_{11}^0 = \frac{\bar{A}_1(t, w, \vartheta_1)}{\sqrt{\bar{A}_1^2(t, w, \vartheta_1) + \bar{B}_1^2(t, w, \vartheta_1)}}$$

$$I_{13}^0 = \frac{\bar{B}_1(t, w, \vartheta_1)}{\sqrt{\bar{A}_1^2(t, w, \vartheta_1) + \bar{B}_1^2(t, w, \vartheta_1)}}$$

$$I_{21}^0 = \frac{\bar{C}_1(t, w, \vartheta_2)}{\sqrt{\bar{C}_1^2(t, w, \vartheta_2) + \bar{D}_1^2(t, w, \vartheta_2)}}$$

$$I_{23}^0 = \frac{\bar{D}_1(t, w, \vartheta_2)}{\sqrt{\bar{C}_1^2(t, w, \vartheta_2) + \bar{D}_1^2(t, w, \vartheta_2)}}$$

$$h_i(t, \vartheta_i) = \frac{1}{\omega} \int_t^{\vartheta_i} |\sin \omega(\vartheta_i - \tau)| d\tau \quad (i = 1, 2)$$

Подставляя полученные выражения для стратегий второго игрока $V_e(t, w) = \{V_{1e}(t, w), V_{2e}(t, w)\}$ в случае а) (2.8) при $t \in [t_0, \vartheta_1]$ и (2.9) при $t \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$ (или в случае б) (2.10) и (2.11) соответственно) в уравнение (2.4) и интегрируя соответствующими начальными условиями, будем иметь пучок движений точки поводья $w(t)$, уклоняющих от целевых множеств M_1 и M_2 при любом допустимом воздействии со стороны первого игрока.

3. Пусть $t_* \in [t_0, \vartheta_1]$, $x(t_*) = x_*$ — истинное положение системы.

Предполагается также, что второй игрок не может точно определить истинное положение системы x_* , измеренное с ошибкой положение обозначим через $\tilde{x}_*$. Условия прицеливания второго игрока на построенный поводья при самом упорном сопротивлении первого игрока будут

$$(w_* - \tilde{x}_*)' Bu^* = \min_{u_1^2 + u_2^2 \leq \lambda_1^2} (w_* - x_*)' Bu$$

$$(w_* - \tilde{x}_*)' Cv^* = \min_{v_1^2 + v_2^2 \leq \lambda_2^2} (w_* - x_*)' Cv$$

где w_* есть самое близкое положение точки x_* .

Конкретное движение поводья определяется из уравнения

$$\dot{w}(t) = Aw(t) + Bu^* + Cv^* \quad (w_* = w(t_*))$$

а реальное движение точки определяется

$$\dot{x}[t] = Ax[t] + Bu(t) + Cv^*$$

где $u(t)$ - любое допустимое управление.

Обозначая расстояние между фазовым состоянием системы и поведением через

$$\rho(t) = \|w(t) - x[t]\|$$

(евклидову норму вектора $w(t) - x[t]$), получим [3]

$$\rho^2\left(t. + \sum_{i=1}^{k+1} \delta_i\right) \leq \rho^2(t.) e^{2v \sum_{i=1}^{k+1} \delta_i} + \frac{1}{2v} [\varphi(\delta_1) + cd\varepsilon_1] \left(e^{2v \sum_{i=1}^{k+1} \delta_i} - e^{2v \sum_{i=2}^{k+1} \delta_i} \right) +$$

$$\frac{1}{2v} \sum_{j=2}^{k+1} [\varphi(\delta_j) + cd\varepsilon_j] \left(e^{2v \sum_{i=j}^{k+1} \delta_i} - 1 \right)$$

где $v = \|A\| = \sqrt{2(\omega^4 + 1)}$, $c = \|C\| = \sqrt{2}$, $d = \lambda_2$, $\delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i$,

$$\left\| \dot{x}\left(t. + \sum_{i=1}^{j-1} \delta_i\right) - x\left(t. + \sum_{i=1}^{j-1} \delta_i\right) \right\| \leq \varepsilon_j, \quad \varepsilon_j > 0, \quad \varphi(\delta_j) \rightarrow 0 \text{ при } \delta_j \rightarrow 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Граздовский Г.А., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975.
2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
3. Габриелян М.С., Барсегян В.Р., Симонян Т.А. Об уклонении стохастической линейной системы при m целевых множествах. // Уч. записки ЕГУ, 1996, № 1.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
5. Габриелян М.С. Об оптимальном уклонении от областей. // Уч. записки ЕГУ, 1976, № 3.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
21.04.2000

УДК 62.50

ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ СХВАТОМ МАНИПУЛЯТОРА

Гукасян А.А., Степанян В.К.

Ա.Ա. Դուկասյան, Վ.Զ. Ստեփանյան
Սամիպուլյատորի բռնիչի ղեկավարման խաղային խնդիրներ

Հիմնավորվում է մանիպուլյատորի բռնիչի ղեկավարման խաղային խնդիրների դրվածքները, նոր յուրացանյութի ազատության աստիճան ունի երկու ղեկավարող ազդեցություններ Դինամիկ ծրագրավորման և էքստրեմալ ճշանառության մեթոդներով ուսումնասիրվում է տարբեր խաղային խնդիրներ, տրված մաշտակային բազմության և ղեկավարման ֆունկցիաների տարբեր սահմանափակումների ու բառակուսային ֆունկցիոնալի միմիմարի դրվածքում:

A.A.Ghukasyan, V.K. Stepanyan
Game problems of the manipulator's grasp

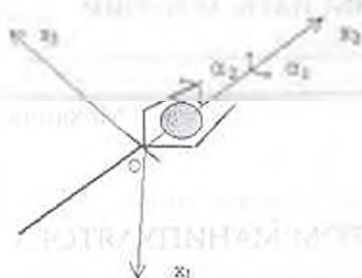
Приводится обоснование применения игровых постановок задачи управления схватом манипуляционных роботов, в случае, когда управление по каждой степени подвижности осуществляется двумя управляющими воздействиями. На основе метода динамического программирования и экстремального прицеливания исследованы разные игровые задачи с заданным целевым множеством при разных ограничениях на управляющие воздействия и на минимакс квадратичного функционала.

Введение. Развитие робототехники в будущем предполагает совершенствование конструкции и управления с целью обеспечения более плавных и контролируемых движений, которые свойственны биологическим объектам. Этот путь развития приводит к созданию биотехнических объектов со многими элементами искусственного интеллекта. Контролируемые движения в этих системах можно осуществить с двумя или несколькими управляющими воздействиями, которые могут конфликтовать или содействовать в процессе движения в зависимости от полученной информации о складывающейся ситуации.

В работе делается попытка создать систему управления вышеуказанного типа для управления движением (ориентацией) схвата манипулятора с двумя степенями подвижности. Предполагается, что движения по каждой степени подвижности создаются двумя управляющими воздействиями, которые противодействуют между собой. Здесь конфликт имеет виртуальный характер и заключается в том, что одно из этих управляющих воздействий (первый игрок) исполняет роль движущей силы, а второе (второй игрок) – удерживающей, обеспечивая, тем самым, плавное (в широком смысле) движение схвата. Сформулированы разные игровые задачи управления, для исследования которых используется метод динамического программирования и экстремального прицеливания. [1-4]

1. Расчетная модель схвата и уравнения движений. Рассматривается схват манипулятора типичной конструкции [5], кинематическая схема которого представлена на фиг. 1. Движение (ориентация) схвата

происходит по степеням подвижности α_1, α_2 , где α_1 характеризует поворот относительно оси OX_2 , а α_2 — относительно оси OX_1 .



Фиг. 1

Динамика независимых движений схвата по указанным степеням подвижности описывается следующими дифференциальными уравнениями

$$I_i \ddot{\alpha}_i = Q_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

где I_1, I_2 — соответствующие моменты инерции относительно осей вращения, Q_i ($i = 1, 2$) — обобщенные управля-

ющие моменты, каждый из которых состоит из двух слагаемых

$$Q_i = n_i u_i - m_i v_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.2)$$

Первые слагаемые в (1.2) являются движущими моментами $n_i u_i$ ($i = 1, 2$), а вторые $m_i v_i$ ($i = 1, 2$) — удерживающими. n_i, m_i ($i = 1, 2$) — передаточные числа приводных систем или коэффициенты усиления [5].

После перехода к безразмерным переменным

$$t' = t/T, \quad u_i = n_i u_i T^2 / I_i, \quad v_i = m_i v_i T^2 / I_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.3)$$

уравнения (1.1) с последующим опусканием штрихов, относительно переменных $\alpha_1 = x_1, \alpha_2 = x_2, \dot{\alpha}_1 = \dot{x}_1, \dot{\alpha}_2 = \dot{x}_2, \ddot{\alpha}_1 = \ddot{x}_1, \ddot{\alpha}_2 = \ddot{x}_2$ принимают вид

$$\ddot{x} = Ax + Bu + Cv \quad (1.4)$$

где $x = (x_1, \dots, x_4)^T$, $u = (u_1, u_2)^T$, $v = (v_1, v_2)^T$, а A и B ($B = -C$) — соответственно (4×4) и (4×2) -мерные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В обозначениях (1.3) T — принятое за единицу измерения характерное время ориентации схвата. Углы поворота $\alpha_i \sim 1$ ($i = 1, 2$). Тогда для безразмерных переменных и параметров системы (1.4) выполняются следующие соотношения порядков: $x \sim 1$, $u \sim 1$, $v \sim 1$ [6].

2. Игровые задачи управления. Рассмотрим две позиционные игровые задачи управления схватом.

Задача 1. Движущая сторона (первый игрок), оперирующая управлением $u = (u_1, u_2)$, стремится привести (ориентировать) схват из начального состояния $(t_0, x(t_0))$ в заданное конечное состояние $(T, x(T))$ и минимизировать при этом функционал $J(u, v)$ на движениях системы (1.4), а удерживающая сторона (второй игрок), оперирующая управлением $v = (v_1, v_2)$ стремится уклонить схват от цели $(T, x(T))$ и максимизировать значение функционала $J(u, v)$. Игроки выбирают свои стратегии из класса позиционных.

Для удобства дальнейших исследований примем за конечное состояние начало координат фазового пространства и $t_0 = 0$. Пусть функционал $J(u, v)$ задан в виде:

$$J[u, v] = \int_0^T (\|x\|^2 + \|u\|_R^2 - \gamma^2 \|v\|_H^2) dt \quad (2.1)$$

где $\|x\|$ есть евклидова норма вектора $x \in R^n$, $\|u\|_R^2 = u^T R u$, $\|v\|_H^2 = v^T H v$, а (2×2) -матрицы R, H определены положительно.

В соответствии с поставленной задачей требуется определить оптимальные стратегии $u^0(x)$ и $v^0(x)$, которые доставляют минимакс и максимин функционалу (2.1) соответственно.

В общем случае, когда $x \in R^n$, $u, v \in R^m$, а A и B ($B = -C$) соответственно $(n \times n)$ и $(n \times m)$ -мерные матрицы, решение поставленной задачи имеет вид [7, 8]

$$u^0(x) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \frac{\partial W_\gamma}{\partial x}, \quad v^0(x) = \frac{1}{2\gamma^2} H^{-1} C^T \frac{\partial W_\gamma}{\partial x} \quad (2.2)$$

где $W_\gamma(x)$ есть определено-положительное решение уравнения Беллмана-Айзекса

$$\frac{\partial W_\gamma}{\partial x} A x + \frac{1}{4} \frac{\partial W_\gamma}{\partial x} \left(\frac{1}{2\gamma^2} C H^{-1} C^T - B R^{-1} B^T \right) \frac{\partial W_\gamma}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

с граничным условием $W_\gamma(0) = 0$. Решение уравнения (2.3) представляется в виде $W_\gamma(x) = x^T G x$, где симметричная матрица G удовлетворяет уравнению Риккати

$$A^T G + G A + G \left(\gamma^{-2} C H^{-1} C^T - B R^{-1} B^T \right) G = 0 \quad (2.4)$$

Матричное уравнение (2.4) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений со многими неизвестными, решение которой в общем случае можно получить с применением вычислительной техники.

В рассматриваемом случае (1.4), (2.1), уравнение Беллмана-Айзекса

$$\begin{aligned} W_\gamma(x) = & \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}} x_1^2 + \frac{2\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} x_1 x_2 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}} x_2^2 + \\ & + \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}} x_3^2 + \frac{2\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} x_3 x_4 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}} x_4^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

имеет решение $\gamma > 1$, где для упрощения вычислений матрицы R, H выбраны единичными.

Подставляя (2.5) в (2.2), получим следующие выражения для оптимальной стратегии:

$$\begin{aligned}
u_1^0(x_1, x_2) &= -\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} x_1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}} x_2 \\
v_1^0(x_1, x_2) &= -\frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma^2 - 1}} x_1 - \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma^2 + 1}} \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}} x_2 \\
u_2^0(x_3, x_4) &= -\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} x_3 - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}} x_4 \\
v_2^0(x_3, x_4) &= -\frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma^2 - 1}} x_3 - \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma^2 + 1}} \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}} x_4
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (2.4), получим асимптотические устойчивые оптимальные фазовые траектории управления схватом манипулятора.

Вторую игровую задачу управления схватом сформулируем следующим образом.

Задача 2. Пусть ограничения на управления u и v для системы (1.4) заданы в виде

$$u \in P, \quad v \in Q \tag{2.7}$$

где P и Q — компакты в R^i . Задачей первого игрока является приведение в момент времени T манипулятор из заданного начального состояния $(t_0, x(t_0))$ к началу координат фазового пространства с помощью позиционного управления u , удовлетворяющего первому ограничению (2.7). Целью второго игрока является противостояние этому движению с помощью позиционного управления v , удовлетворяющего второму ограничению (2.7).

В соответствии с поставленной задачей определим целевое множество M_c следующим образом:

$$M_c = \{(t, x) : t \geq t_0 = 0, x = 0\} \tag{2.8}$$

Теперь задачей первого игрока является сближение позиции (t, x) к целевому множеству M_c в момент $t = T$, а задачей второго игрока — уклонение от M_c вплоть до момента $t = T$.

Исследование поставленной задачи для линейных систем проводится методом экстремального прицеливания [3], который позволяет с помощью некоторых вспомогательных программных конструкций в регулярных случаях построить оптимальные стратегии для исходной позиционной дифференциальной игры. Вычисленная для каждой текущей позиции (t, x) системы (1.4) на вспомогательных движениях некоторая функция $\epsilon^0(t, x, T)$ заменяет функцию Беллмана (задача 1).

Согласно методу экстремального прицеливания, необходимо для каждой текущей позиции (t, x) вычислить функцию

$$\epsilon^0(t, x, T) = \max_{l \in L} \chi(t, x, T, l) + c \tag{2.9}$$

где $\|l\|$ — евклидова норма вектора прицеливания l , c — некоторая

положительная постоянная, а функция $\chi(t, x, T, l)$ имеет вид

$$\chi(t, x, T, l) = \rho_1(t, T, l) + \rho_2(t, T, l) + \rho_M(l) + l^T X[T, t]x \quad (2.10)$$

$$\rho_1(t, T, l) = \int_t^T \min_{u \in P} (l^T X[T, \tau] B u) d\tau, \quad \rho_2(t, T, l) = \int_t^T \max_{v \in Q} (l^T X[T, \tau] C v) d\tau$$

$$\rho_M(l) = \min_{-q \in M_c} l^T q = 0$$

Здесь $X[T, t]$ — фундаментальная матрица системы (1.4)

Как известно [3], если множества P и Q подобны ($P = rQ$, $r > 1$), то $\rho_1(t, T, l) = -r\rho_2(t, T, l)$ и ситуация в данной задаче является регулярной. Это означает, что задача на максимум (2.9) имеет единственное решение $l^0(t, x, T)$.

Игровую задачу 2 (сближения-уклонения) для схвата манипулятора рассмотрим при следующих ограничениях на управляющие функции:

$$u_1 \in P_1 = \{u_1 | \leq \lambda_1\}, \quad u_2 \in P_2 = \{u_2 | \leq \lambda_2\}, \quad \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = r > 1 \quad (2.11)$$

$$v_1 \in Q_1 = \{v_1 | \leq \mu_1\}, \quad v_2 \in Q_2 = \{v_2 | \leq \mu_2\}$$

$$u = (u_1, u_2) \in P = \{(u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 \leq \lambda^2\} \quad (2.12)$$

$$v = (v_1, v_2) \in Q = \{(v_1, v_2) : v_1^2 + v_2^2 \leq \mu^2\}$$

Задача управления схватом (1.4), (2.7), (2.8) при ограничении типа (2.11) распадается на две группы задач, для уравнения второго порядка

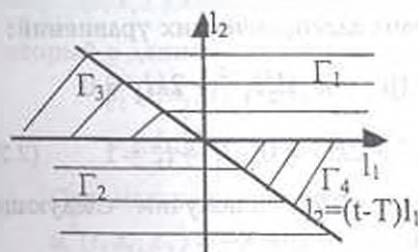
$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= x_2 \\ \ddot{x}_2 &= u_1 - v_1 \end{aligned} \quad (2.13)$$

с ограничениями на управления

$$u_1 \in P_1 = \{u_1 | \leq \lambda_1\} \quad (2.14)$$

и с целевым множеством

$$M_{1c} = \{(t, x_1, x_2) : t \geq 0, x_1 = x_2 = 0\} \quad (2.15)$$



Фиг. 2

Замечание 1. Необходимо отметить, что к уравнениям типа (2.13) приводит также уравнение движения многозвенного манипулятора, управление которого по каждой степени подвижности происходит независимо от остальных [6, 9].

Применяя метод экстремального прицеливания для задачи (2.13)–(2.15), получим

$$\rho_1(t, T, l) = \int_t^T \min_{|u_1| \leq \lambda_1} \{u_1 [l_1(T - \tau) + l_2]\} d\tau = -\lambda_1 \int_t^T |u_1 (l_1(T - \tau) + l_2)| d\tau \quad (2.16)$$

Интеграл (2.16) в разных областях плоскости (l_1, l_2) (фиг.2) имеет

различные значения

$$\rho_1(t, T, l) = \begin{cases} -\frac{\lambda_1}{2} [l_1(T-t)^2 + 2l_2(T-t)], & \Gamma_1 = \{l_1 \geq 0, l_2 \geq 0\} \cup \{l_1 < 0, l_2 \geq (t-T)l_1\} \\ -\frac{\lambda_1}{2} [l_1(T-t)^2 + 2l_2(T-t)], & \Gamma_2 = \{l_1 < 0, l_2 < 0\} \cup \{l_1 > 0, l_2 \leq (t-T)l_1\} \\ -\frac{\lambda_1}{2} \left[l_1(T-t)^2 + 2l_2(T-t) + 2\frac{l_2^2}{l_1} \right], & \Gamma_3 = \{l_1 > 0, (t-T)l_1 < l_2 < 0\} \\ -\frac{\lambda_1}{2} \left[l_1(T-t)^2 + 2l_2(T-t) + 2\frac{l_2^2}{l_1} \right], & \Gamma_4 = \{l_1 > 0, (t-T)l_1 < l_2 < 0\} \end{cases} \quad (2.17)$$

Экстремальная задача (2.9) в этом случае приводится к виду

$$\varepsilon^0(t, x_1, x_2, T) = \max_{|l|=1} \{l_1[x_1 + (T-t)x_2] + l_2x_2 + (1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1})\rho_1(t, T, l)\} + c \quad (2.18)$$

где $\rho_1(t, T, l)$ имеет вид (2.17), а $\|l\| = (l_1^2 + l_2^2)^{1/2}$.

Экстремальная задача (2.18) в плоскости (l_1, l_2) исследуется методом Лагранжа.

1) при $(l_1, l_2) \in \Gamma_1$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0(t, x_1, x_2, T) &= \left\{ [x_1 + (T-t)x_2 - \frac{1}{2}(\mu_1 - \lambda_1)(T-t)^2]^2 + [x_2 + (\mu_1 - \lambda_1)(T-t)]^2 \right\}^{1/2} + c \\ l_1^0(t, x_1, x_2, T) &= [x_1 + (T-t)x_2 + \frac{1}{2}(\mu_1 - \lambda_1)(T-t)^2][\varepsilon_1^0(t, x_1, x_2, T) - c]^{-1} \\ l_2^0(t, x_1, x_2, T) &= [x_2 + (\mu_1 - \lambda_1)(T-t)][\varepsilon_1^0(t, x_1, x_2, T) - c]^{-1} \end{aligned} \quad (2.19)$$

2) при $(l_1, l_2) \in \Gamma_2$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^0(t, x, T) &= \left\{ [x_1 + (T-t)x_2 + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \mu_1)(T-t)^2]^2 + [x_2 + (\lambda_1 - \mu_1)(T-t)]^2 \right\}^{1/2} + c \\ l_1^0(t, x_1, x_2, T) &= [x_1 + (T-t)x_2 + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \mu_1)(T-t)^2][\varepsilon_2^0(t, x_1, x_2, T) - c]^{-1} \\ l_2^0(t, x_1, x_2, T) &= [x_2 + (\lambda_1 - \mu_1)(T-t)][\varepsilon_2^0(t, x_1, x_2, T) - c]^{-1} \end{aligned} \quad (2.20)$$

3) При $(l_1, l_2) \in \Gamma_3$ исследование экстремальной задачи (2.18) приводится к решению следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + (T-t)x_2 + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \mu_1)(T-t)^2 - (\mu_1 - \lambda_1)l_2^2l_1^{-2} + 2kl_1 &= 0 \\ x_2 + (\lambda_1 - \mu_1)(T-t) + 2(\mu_1 - \lambda_1)l_2l_1^{-1} + 2kl_2 &= 0 \quad l_1^2 + l_2^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

относительно неизвестных l_1, l_2, k . Из (2.21) получим следующее решение для экстремальной задачи (2.18):

$$\begin{aligned} \varepsilon_3^0(t, x_1, x_2, T) &= \left\{ [x_1 + (T-t)x_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 - \mu_1)(T-t)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\lambda_1 - \mu_1)\varphi^2]^2 + [x_2 - (\lambda_1 - \mu_1)(T-t) - 2(\lambda_1 - \mu_1)\varphi]^2 \right\}^{1/2} + c \end{aligned}$$

$$l_1^0(t, x_1, x_2, T) = [x_1 + (T-t)x_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 - \mu_1)(T-t)^2 + (\lambda_1 - \mu_1)\varphi^3][\varepsilon_1^0(t, x_1, x_2, T) - c]^{-1} \quad (2.22)$$

$$l_2^0(t, x_1, x_2, T) = [x_2 - (\lambda_1 - \mu_1)(T-t) - 2(\lambda_1 - \mu_1)\varphi][\varepsilon_1^0(t, x_1, x_2, T) - c]^{-1}$$

где φ есть действительный корень кубического уравнения

$$\varphi^3 + \left\{ 2 + \left[x_1 + (T-t)x_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 - \mu_1)(T-t)^2 \right] (\lambda_1 - \mu_1)^{-1} \right\} \varphi - [x_2 - (\lambda_1 - \mu_1)(T-t)] (\lambda_1 - \mu_1)^{-1} = 0 \quad (2.23)$$

который единственен при условии

$$4 \left\{ 2 + (T-t)x_2 + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \mu_1)(T-t)^2 \right\}^3 + 27 \left\{ x_2 + (\lambda_1 - \mu_1)(T-t) \right\}^3 (\lambda_1 - \mu_1)^{-3} > 0 \quad (2.24)$$

и имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{6} \left(-108\eta + 12(129^3 + 81\eta^2)^{1/2} \right)^{1/3} - 29 \left(-108\eta + 12(129^3 + 81\eta^2)^{1/2} \right)^{-1/3}$$

где

$$\eta = 2 + \left[x_1 + (T-t)x_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 - \mu_1)(T-t)^2 \right] (\lambda_1 - \mu_1)^{-1}$$

$$\eta = -[x_2 - (\lambda_1 - \mu_1)(T-t) - x_1] (\lambda_1 - \mu_1)^{-1}$$

Если условия (2.24) не выполняются, то (2.23) имеет три действительных корня.

4) При $(l_1, l_2) \in \Gamma_4$ для $\varepsilon_1^0(t, x_1, x_2, T)$, $l_1^0(t, x_1, x_2, T)$ и $l_2^0(t, x_1, x_2, T)$ получаем выражения, аналогичные (2.22)-(2.24), где вместо величины $-(\lambda_1 - \mu_1)$ следует поставить $(\lambda_1 - \mu_1)$.

Следовательно, после исследования экстремальной задачи (2.18), для тех позиций (t, x_1, x_2) , где $\varepsilon_1^0(t, x_1, x_2, T) > c$, можно определить оптимальную стратегию первого игрока из задачи на минимум [3]

$$l^{0*}(t, x, T)X[T, t]Bu^0(t, x) = \min_{u \in P} l^{0*}(t, x, T)X[T, t]Bu \quad (2.25)$$

который в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} & [l_1^0(t, x_1, x_2, T)(T-t) - l_2^0(t, x_1, x_2, T)]u_1^0(t, x_1, x_2) = \\ & = \min_{u_1 \in U_1} [l_1^0(t, x_1, x_2, T)(T-t) - l_2^0(t, x_1, x_2, T)]u_1(t, x_1, x_2) \end{aligned}$$

Оптимальная стратегия первого игрока (2.25) имеет вид

$$u_1^0(t, x_1, x_2) = -\lambda_1 \text{sign}((l_1^0(t, x_1, x_2, T)(T-t) - l_2^0(t, x_1, x_2, T))) \quad (2.26)$$

Для остальных позиций оптимальная стратегия $u_1^0(t, x_1, x_2)$ есть любой вектор, удовлетворяющий ограничению (2.14).

Для определения оптимальной стратегии $v_0(t, x)$ второго игрока, в общем случае (1.4), (2.7)-(2.9), необходимо вычислить вектор прицеливания $z(t, x)$, согласно равенству [3]

$$s(t, x, T) = \int_t^T [\varepsilon^0(t, x, \tau) - c]^{-2} X^T[\tau, t] l^0(t, x) d\tau \quad (T < T_0(t_0, x_0)) \quad (2.27)$$

где $\varepsilon^0(t, x, \tau)$ — сеть значений максимума (2.9) при $T = \tau$.

Заметим, что как здесь, так и выше, $T_0(t_0, x_0)$ есть наименьший корень уравнения

$$\varepsilon^0(t_0, x_0, T) = 0$$

Стратегия $V_0(t, x)$ определяется из следующей задачи на максимум [3]

$$s^T(t, x) C v^0(t, x) = \max_{v \in Q} s^T(t, x) C v \quad (2.28)$$

для всех позиций $(t, x) \in G$, где

$$G = \{(t, x) : \varepsilon^0(t, x, T) > c, 0 \leq t < T\} \quad (2.29)$$

В рассматриваемом случае (2.13)-(2.18), оптимальная стратегия второго игрока для всех позиции $(t, x) \in G_1$, которые имеют вид

$$G_1 = \{(t, x_1, x_2) : \varepsilon_1^0(t, x_1, x_2, T) > c, 0 \leq t < T\} \quad (2.30)$$

определяется из следующей задачи на максимум (2.28)

$$-s^T(t, x_1, x_2, T) v_1^0(t, x_1, x_2) = \max_{v_1 \in Q_1} (-s^T(t, x_1, x_2, T) v_1(t, x_1, x_2)) \quad (2.31)$$

Решение задачи (2.31) определяется формулой

$$v_1^0(t, x_1, x_2) = -\mu_1 \text{signs}(t, x_1, x_2, T), \quad \text{где}$$

$$s(t, x_1, x_2, T) = \int_t^T [\varepsilon_1^0(t, x_1, x_2, \tau) - c]^{-2} l_2^0(t, x_1, x_2, \tau) d\tau$$

При $(t, x_1, x_2) \in G_1$ $v_1(t, x_1, x_2)$ есть любой вектор, удовлетворяющий условию $|v_1| \leq \lambda_1$.

Замечание 2. Если условие (2.24) не выполняется, то вектор прицеливания $\{l_1^0(t, x_1, x_2, T), l_2^0(t, x_1, x_2, T)\}$ не единственен и они образуют множество $L^0(t, x, T)$.

Если для всякой позиции $(t, x) \in G_1$ и при всяком выборе вектора $v \in Q_1 = \text{co}\{v \in Q_1\}$ найдется по крайней мере один максимизирующий момент τ_0

$$\varepsilon^0(t, x) = \min_{\tau \in [t, T]} \varepsilon_1^0(t, x, \tau)$$

и один вектор $u \in P = \text{co}\{u \in P\}$ такой, что для любого вектора l^u из множества $L^u(t, x, \tau_0)$ и для всех $t > \tau_0$ выполняется неравенство

$$l^{uT}(Bu + Cv) \leq \min_{u \in P} l^{uT} Bu + \max_{v \in Q} l^{uT} Cv \quad (2.32)$$

то экстремальная к множеству $W[T] = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, \varepsilon^0(t, x) = c\}$ стратегия $u^0(t, x)$ гарантирует для всякого движения $x[t] = x[t, t_0, x_0, u^0]$ системы (1.4) встречу с множеством (2.8) к моменту $t = T$, если только

$\varepsilon^0(t_0, x_0) = c$ [3]. Легко проверить, что неравенство (2.32) в данном случае выполняется.

Перейдем к исследованию игровой задачи 2 (сближения-уклонения) управления движением (ориентацией) схвата манипулятора (фиг. 1), уравнения которого имеют вид (1.4), при ограничениях на управления (2.12) и целевом множестве

$$M_c = \{(t, x) : x = (x_1, x_2, x_3, x_4), t \geq 0, x = 0\} \quad (2.33)$$

$\rho_i(t, T, l)$, согласно (2.10) в рассматриваемом случае определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \rho_i(t, T, l) = & \int_t^T \min_{u \in U} (l^T X(T, \tau) B u) d\tau = -\frac{\lambda}{2} (T-t + b a^{-1}) \times \\ & \times [a(T-t)^2 + 2b(T-t) + d]^{1/2} - b a^{-1} d^{1/2} + a^{-1/2} (d - b^2 a^{-1}) \times \\ & \times (\ln[a^{1/2}(T-t) + b a^{-1} + (a(T-t)^2 + 2b(T-t) + d)^{1/2}] - \ln(b a^{-1/2} - d^{1/2})) \end{aligned} \quad (2.34)$$

где приняты следующие обозначения:

$$a = l_1^2 + l_2^2, \quad b = l_1 l_2 + l_3 l_4, \quad d = l_3^2 + l_4^2, \quad l = (l_1, l_2, l_3, l_4)$$

Заметим, что если необходимо совместить только геометрические координаты схвата манипулятора, то $l_2 = l_4 = 0$ и $\varepsilon^0(t, x, T)$ (2.9) имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(t, x, T) = & \max_{l \in L} \{l_1[x_1 + (T-t)x_2] + l_3[x_3 + (T-t)x_4] + \\ & + \frac{1}{2}[(\mu - \lambda)(T-t)^2](l_1^2 + l_3^2)^{1/2}\} \end{aligned} \quad (2.35)$$

где $\|l\| = (l_1^2 + l_3^2)^{1/2}$.

В (2.35) максимум достигается при

$$\begin{aligned} l_1^0(t, x, T) &= [x_1 + (T-t)x_2] \{ [x_1 + (T-t)x_2]^2 + [x_3 + (T-t)x_4]^2 \}^{1/2} \\ l_3^0(t, x, T) &= [x_3 + (T-t)x_4] \{ [x_1 + (T-t)x_2]^2 + [x_3 + (T-t)x_4]^2 \}^{1/2} \\ l_2^0(t, x, T) &\equiv 0, \quad l_4^0(t, x, T) \equiv 0 \end{aligned}$$

и имеет следующий вид:

$$\varepsilon^0(t, x, T) = \{ [x_1 + (T-t)x_2]^2 + [x_3 + (T-t)x_4]^2 \}^{1/2} - \frac{1}{2}(T-t)^2(\lambda - \mu) \quad (2.36)$$

Согласно (2.25), оптимальная стратегия первого игрока в тех позициях, где $\varepsilon_0(t, x, T) > c$, здесь определяется выражениями

$$\begin{aligned} u_1^0(t, x) &= -\lambda [l_1^0(t, x, T)(l_1^{02}(t, x, T) + l_3^{02}(t, x, T))]^{-1/2} \\ u_3^0(t, x) &= -\lambda [l_3^0(t, x, T)(l_1^{02}(t, x, T) + l_3^{02}(t, x, T))]^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.37)$$

а оптимальная стратегия второго игрока в позициях, где $\varepsilon_0(t, x, T) > c$, согласно (2.28) имеет вид

$$v_1^0(t, x) = \mu s_1^0(t, x, T), \quad v_3^0(t, x) = \mu s_3^0(t, x, T), \quad \text{где}$$

$$s_1^0(t, x, T) = \int_0^T [\varepsilon_0(t, x, \tau) - c]^{-2} (\tau - t) l_1^0(t, x, \tau) d\tau$$

$$T < T_0(t_0, x_0) \quad (2.38)$$

$$s_2^0(t, x, T) = \int_0^T [\varepsilon_0(t, x, \tau) - c]^{-2} (\tau - t) l_2^0(t, x, \tau) d\tau$$

Таким образом, вектор прицеливания и оптимальные стратегии движения (ориентации) схвата манипулятора при ограничениях на управляющие функции (2.11), (2.12), определяются в явном виде.

Заключение. Строится математическая модель схвата манипулятора, который должен осуществить оптимальное (в смысле дополнительных критериев) и контролируемые движения. Управления по каждой степени подвижности схвата реализуются двумя управляющими воздействиями. С применением методов динамического программирования и экстремального прицеливания исследованы две позиционные игровые задачи управления при разных ограничениях на управляющие воздействия. Получены оптимальные стратегии управления движением (ориентации) схвата манипулятора в явном виде, которые можно реализовать в системе управления с обратной связью. Аналогичные исследования можно проводить также для многосвязного манипулятора с несколькими степенями подвижности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
4. Черноусько Ф.А., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.
5. Козырев Ю.Г. Промышленные роботы (справочник). М.: Машиностроение, 1983.
6. Акуленко А.Д., Болотник Н.Н. Синтез оптимального управления транспортными движениями манипуляционных роботов // Изв. АН СССР, МТТ, № 4, 1986.
7. Bittanti S., Laub A., Williams J. C. The Riccati equation, New York, Springer, 1991.
8. Anderson B. D. O., Moore J. B. Linear optimal control. Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, NJ, 1971.
9. Черноусько Ф.А., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
30.05.2000

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЕ ДЛЯ
 УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ
 Шагинян С.Г.

Ս.Գ. Շահինյան

Ուշացող արգումենտով դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի ըստ ազդող ուժի կայունության մասին

Դիտարկվում է ուշացող արգումենտով դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի կայունության խնդիրը. երբ համակարգի վրա ժամանակի վերջավոր միջակայքում ազդում են ինտեգրալով փոքր զրգոող ուժեր

Տրված է ըստ ազդող ուժի կայունության սահմանումը այդպիսի համակարգերի լուծումների համար։ Մտացված են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում համակարգի տրիվյալ լուծումը ասինպտոտիկ կայուն է ամբողջում սովորական իմաստով։ Որոշված են մասն պայմաններ գծային համակարգերի ըստ ազդող ուժի կայունության համար։

S.G.Shahinyan

On the stability of acting force of the systems of differential equation with time lags.

Рассматривается задача устойчивости систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, когда на систему на конечном промежутке времени действует интегральное малое возмущающее воздействие, т.е. силы, которые выражаются из более широких классов функций, чем при постоянно действующем возмущении. Они могут быть импульсными силами конечной мощности.

Получены достаточные условия, при которых тривиальное решение системы асимптотически устойчиво в целом в обычном смысле. Определены также условия, при которых линейная система устойчива по действующей силе.

1. Пусть имеем систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{x} = F(x(t); x(t - \tau)) \quad (1.1)$$

где $x \in R^n$; $F: R^n \rightarrow R^n$ — непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая всем условиям существования и единственности решений системы (1.1) ([1], с. 31) в компактном множестве

$$M = \{x(\tau); \|x(\cdot)\|, < \infty; \tau \in [0; h]; h > 0\} \quad (1.2)$$

и $F(0) = 0$.

Норму вектор-функции $x(\tau)$ можно выбрать различными способами. Целесообразно здесь выбрать в виде

$$\|x(\cdot)\|_h = \left[\int_0^h \sum_{i=1}^n x_i^2(\tau) d\tau \right]^{1/2}$$

Докажем следующую теорему, аналогичную теореме Барбашина-Красовского об устойчивости в целом для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [2]:

Теорема 1. Если для системы (1.1) существует определительно-положи-

тельный функционал $V(x(\cdot))$, определенный на функции $x(\tau) \in M$, для которого

$$\text{а) } \lim_{\|x(\cdot)\|_h \rightarrow \infty} V(x(\cdot)) = \infty \quad (1.3)$$

б) производная $\frac{dV(x_\psi(t-\tau))}{dt}$ ([1], с. 141) вдоль интегральных кривых системы (1.1) неположительна, притом не существует ни одна целая полутраектория (кроме $x=0$), вдоль которой $\frac{dV(x_\psi(t-\tau))}{dt} = 0$ (где $x_\psi(t-\tau)$ — решение системы (1.1), определяемое начальной вектор-функцией $\psi = \psi(t); t_0 - h \leq t < t_0$),

то решение $x \equiv 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво в целом.

Доказательство. Так как для решения $x=0$ системы (1.1) имеют место все условия теоремы об устойчивости ([1] с.141), то это решение устойчиво. Пусть $x = x_\psi(t-\tau)$ — такое решение системы (1.1), которое определяется некоторой начальной вектор-функцией $\psi = \psi(t)$, где $\psi = \psi(t)$ — непрерывная функция при $t \in [t_0 - h; t_0]$.

Обозначим через $K_\psi \subset M$ некоторый компакт, содержащий часть траектории $x_\psi(\tau)$ при $t = t_0$; $x_\psi(\tau) \in K_\psi \subset M$, и пусть $A = \sup_{x_\psi(\tau) \in K_\psi} V(x_\psi(\cdot))$.

Так как $V(x_\psi(\cdot))$ — непрерывный функционал, а K_ψ — компактное множество, то $A < \infty$. Следовательно, согласно условию (1.3), существует число $H > 0$ такое, что $V(x(\cdot)) \leq A$ при $\|x(\cdot)\|_h < H$ и $K_\psi \subset \{x(\cdot) \mid \|x(\cdot)\|_h \leq H\}$. При этих условиях для системы (1.1) имеет место теорема Красовского об асимптотической устойчивости ([3], с.181), т.е. $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(\cdot)\|_h = 0$. Откуда и следует асимптотическая устойчивость в целом решения $x \equiv 0$ системы (1.1).

Таким образом, вышеуказанная теорема доказана.

2. Снова рассмотрим систему (1) и систему

$$\dot{x} = F(x(t-\tau), x(t)) + \varphi(t) \quad (2.1)$$

где $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям, указанным в [4];

$$\text{а) } \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_{t_0}^T \varphi_i(t) dt \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \infty$$

$$\text{б) } \varphi(t) \equiv 0 \text{ при } t \geq T$$

Здесь $T > t_0 + h$ — заданный момент времени.

Определение 1. Решение $x \equiv 0$ системы (1.1) назовем устойчивым по действующей силе, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$

такое, что для всех решений $x_\psi(t-\tau)$ системы (2.1) $\|x(\cdot)\|_h < \varepsilon$ при

$$t \geq T+h, \text{ если } \|\psi(\tau)\|_h < \delta, \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_{t_0}^t \varphi_i(t) dt \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \delta.$$

Определение 2. Решение $x \equiv 0$ системы (1.1) назовем асимптотически устойчивым по действующей силе, если для каждого решения $x_\psi(t-\tau)$ системы (2.1) удовлетворяется условие $\lim_{t \rightarrow \infty} x_\psi(\cdot) = 0$ при всех

$$\text{непрерывных начальных функциях } \psi(t) \text{ и при } \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_{t_0}^t \varphi_i(t) dt \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \delta.$$

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с запаздывающим аргументом

$$\dot{x} = Ax + Bx(t-\tau) \quad (2.2)$$

где A и B - $n \times n$ - постоянные матрицы, $n \in R^n$.

Предположим, что все корни характеристического уравнения

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (2.3)$$

имеют отрицательные вещественные части.

Покажем, что в этом случае система (2.2) асимптотически устойчива по действующей силе. Действительно, при вышеуказанных условиях для системы

$$\dot{x} = Ax \quad (2.4)$$

согласно теореме Ляпунова ([5], с. 106) существует определенно-положительная квадратичная форма

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j$$

такая, что

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{(2.4)} = - \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Для системы (2.2) в качестве функции Ляпунова выбираем:

$$V(x(\cdot)) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \int_{-h}^0 x_i^2(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

где $\varepsilon_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$) - сколь угодно малые числа.

Вычислим производную функционала $V(x(\cdot))$ вдоль решений системы (2.2):

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(x(t-\tau))}{dt} \right|_{(2.2)} &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_j(t) (a_{i1} x_1(t) + \dots + a_{in} x_n(t)) + \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_j(t) (b_{i1} x_1(t-\tau) + \dots + b_{in} x_n(t-\tau)) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (x_i^2(t) - x_i^2(t-\tau)) = \\ &= - \sum_{i=1}^n [(1-\varepsilon_i) x_i^2(t) - \sum_{j,l=1}^n \alpha_{ij} b_{jl} x_j(t) x_l(t-\tau) + x_i^2(t-\tau)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Известно ([3], с. 196), что если $\|B\|_0 = \beta > 0$ $\left(\|B\|_0 = \max_i \sum_j |b_{ij}| \right)$

достаточно малое число, то величины ε_i можно подобрать так, чтобы производная (2.6) была определенно-отрицательной (например,

$\varepsilon_i = \frac{1}{2n}$, $i = 1, \dots, n$). Следовательно, для системы (2.2) имеют место все условия теоремы 1, откуда следует, что система (2.2) асимптотически устойчива в целом. Следовательно, согласно определению 2, она асимптотически устойчива и по действующей силе.

3. Предположим теперь, что в системе (2.2) $B = \mu A$ (μ - достаточно малое число) и корни уравнения (2.3) удовлетворяют следующим условиям

а) $\lambda_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$) притом $\text{rang } A = n - k$ ($k \leq n$);

б) $\text{Re } \lambda_j < 0$ ($j = k+1, \dots, n$) (3.1)

Если корни уравнения (2.3) таковы, что существует хотя бы один корень с неотрицательной действительной частью, который не удовлетворяет условиям (3.1), то система (2.4) будет неустойчивой по действующей силе [6]. Следовательно, система (2.2) также будет неустойчивой по действующей силе.

Докажем следующую теорему:

Теорема 2. Если корни характеристического уравнения (2.3) системы (2.2) удовлетворяют условиям (3.1), то система (2.2) устойчива по действующей силе.

Доказательство. Известно, что если корни уравнения (2.3) удовлетворяют условиям (3.1), ([6], с. 141), то существует такая матрица C ($\det C \neq 0$), что

$$A_1 = CAC^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{k+1} & \dots & d_{k+1} & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{n-k+1} & \dots & d_{n-k+1} & n \end{pmatrix}$$

Следовательно, $B_1 = CBC^{-1} = C\mu AC^{-1} = \mu CAC^{-1} = \mu A_1$.

Выполняя линейное преобразование $y = Cx$, систему (2.2) можно привести к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{y}_i = 0, & i = 1, \dots, k; \\ \dot{y}_j = d_{jk+1}y_{k+1} + \dots + d_{jn}y_n + \\ + \mu(d_{jk+1}y_{k+1}(t-\tau) + \dots + d_{jn}y_n(t-\tau)), & j = k+1, \dots, n \end{cases} \quad (3.2)$$

Выполняя такое же преобразование $y = Cx$ относительно системы $\dot{x} = Ax + Bx(t-\tau) + \varphi(t)$

получим

$$\dot{y}_i = v_i(t) \quad (i = 1, \dots, k) \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= d_{jk+1}y_{k+1}(t) + \dots + d_{jn}y_n(t) + \\ &+ \mu(d_{jk+1}y_{k+1}(t-\tau) + \dots + d_{jn}y_n(t-\tau) + v_j(t)), \end{aligned} \quad (j = k+1, \dots, n) \quad (3.4)$$

где $v(t) = C\varphi(t)$ и если $\left[\sum_{i=1}^k \left(\int_{t_0}^t \varphi_i(t) dt \right)^2 \right]^{1/2} < \delta_1$,

то $\left[\sum_{i=1}^k \left(\int_{t_0}^t v_i(t) dt \right)^2 \right]^{1/2} < \|C\|_{\infty} \cdot \delta_1 = \delta_1$. Значит

$$\left[\sum_{i=1}^k \left(\int_{t_0}^t v_i(t) dt \right)^2 \right]^{1/2} < \delta_1 \text{ и } \left[\sum_{i=k+1}^n \left(\int_{t_0}^t v_i(t) dt \right)^2 \right]^{1/2} < \delta_1$$

Интегрируя систему (3.2) отдельно, получим

$$y_i(t-\tau) = y_i(t_0 - \tau) + \int_{t_0}^{t-\tau} v_i(\xi) d\xi \quad (i = 1, \dots, k)$$

и $y_i(t-\tau) = y_i(t_0 - \tau) + \int_{t_0}^T v_i(t) dt$ при $t \geq T + h$,

где $y(t_0 - \tau)$ — начальная функция. Следовательно,

$$\|\bar{y}(t-\tau)\|_{h,(k)} \leq \|\bar{y}(t_0 - \tau)\|_{h,(k)} + \left[\sum_{i=1}^k \left(\int_{t_0}^t v_i(t) dt \right)^2 \right]^{1/2} < \delta + \delta_1 = \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.5)$$

если

$$\|\bar{y}(t_0 - \tau)\|_{h, (k)} < \delta, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

через $\|y(\cdot)\|_{h, (m)}$ обозначена норма m -мерного функционального пространства.

Так как все корни характеристического уравнения системы

$$\dot{y}_j = d_{jk+1}y_{k+1} + \dots + d_{jn}y_n \quad (j = k+1, \dots, n) \quad (3.6)$$

имеют отрицательные вещественные части, то, согласно теореме Ляпунова ([5], с. 106-108), существует определенно-положительная форма

$$V_1 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=k+1}^n \alpha_{ij} y_i y_j \quad \text{такая, что}$$

$$\left. \frac{dV_1}{dt} \right|_{(3.6)} = - \sum_{i=k+1}^n y_i^2 \quad (3.7)$$

Для системы (3.2) в качестве функционала Ляпунова возьмем

$$V(y(\tau)) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=k+1}^n \alpha_{ij} y_i y_j + \sum_{i=k+1}^n \varepsilon_i \int_{-\tau}^0 y_i^2(\xi) d\xi \quad (3.8)$$

где $\varepsilon \geq 0$ ($i = k+1, \dots, n$) — достаточно малые числа, а

$$\bar{y}(\tau) = \begin{pmatrix} y_{k+1}(\tau) \\ \vdots \\ y_n(\tau) \end{pmatrix}$$

Очевидно, что функционал $V(\bar{y}(\cdot))$ определенно-положителен и

$$\lim_{\|\bar{y}(\cdot)\| \rightarrow \infty} V(\bar{y}(\cdot)) = \infty$$

Вычислим производную функционала $V(\bar{y}(\cdot))$ вдоль решений системы (3.2)

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(y(t-\tau))}{dt} \right|_{(3.2)} &= \sum_{i,j=k+1}^n \alpha_{ij} y_j(t) (d_{ik+1} y_{k+1}(t) + \dots + d_{in} y_n(t)) + \\ &+ \mu \sum_{i,j=k+1}^n \alpha_{ij} y_j(t) (d_{ik+1} y_{k+1}(t-\tau) + \dots + d_{in} y_n(t-\tau)) + \\ &+ \sum_{i=k+1}^n \varepsilon_i (y_i^2(t) - y_i^2(t-\tau)) = - \sum_{i=k+1}^n y_i^2 + \\ &+ \mu \sum_{i,j=k+1}^n \alpha_{ij} y_j(t) (d_{ik+1} y_{k+1}(t-\tau) + d_{in} y_n(t-\tau)) + \sum_{i=k+1}^n \varepsilon_i (y_i^2(t) - y_i^2(t-\tau)) = \end{aligned}$$

$$= - \sum_{i=k+1}^n ((1-\varepsilon_i)(y_i^2(t) - \mu \sum_{j=k+1}^n \alpha_j d_{ij} y_j(t) y_i(t-\tau) + y_i^2(t-\tau)) \quad (3.9)$$

Правые части системы (3.2) удовлетворяют условиям

$$|\mu| |d_{k+1} y_{k+1} + \dots + d_{kn} y_n| \leq \alpha \cdot \|y\|_{(n-k)} \quad (3.10)$$

$$\text{где } \alpha = |\mu| \cdot \max_{i,j=k+1,\dots,n} |d_{ij}|, \quad \|y\|_{(n-k)} = \left(\sum_{i=k+1}^n y_i^2 \right)^{1/2}$$

Тогда квадратичная форма (3.9) при малых μ будет определительно-отрицательной ([3], с. 196). То есть, согласно теореме 1, для решений системы (3.2) будет иметь место условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t-\tau)\|_{h,(n-k)} = 0$$

Следовательно, существует такой момент времени $t_* \geq T + h$, что

$$\|y(t-\tau)\|_{h,(n-k)} < \frac{\varepsilon}{2}; \text{ при } t > t_*. \quad (3.11)$$

Тогда, согласно (3.5) и (3.11), для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ и момент времени $t_* \geq T + h$ такие, что $\|y(t-\tau)\|_k < \varepsilon$ при $t > t_*$.

$$\|y(t-\tau)\|_k < \delta \quad \text{и} \quad \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_{t_0}^t \varphi_i(t) dt \right)^2 \right]^{1/2} < \delta.$$

Теорема доказана.

Автор статьи выражает свою искреннюю благодарность доктору физ. мат. наук, профессору Габриеляну М.С. за постоянное внимание к работе, а также за многие полезные советы и замечания.

Работа выполнена в рамках научной темы под грифом 96-862, финансирующейся из государственных централизованных источников РА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эльсгольд Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971. 296 с.
2. Барбашин Е.А., Красовский Н.Н. О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. — ПММ, 1954. т. 18. вып. 3.
3. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
4. Габриелян М.С., Шагинян С.Г. О построении функции Ляпунова. — Уч. записки ЕГУ, 1987, № 1, с. 39-45.
5. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.—Л.: Гостехиздат, 1950. 471 с.
6. Шагинян С.Г. Об одной задаче теории устойчивости. — Уч. записки ЕГУ, 1987, № 1, с. 39-46.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988. 548 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
8.12.1999.

УДК.678.067.5.539.4.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ
ГЕТИНАКСА, ИЗГОТОВЛЕННОГО С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
ТЕХНОЛОГИИ РЕГУЛИРУЕМОГО ТЕРМОПРЕССОВАНИЯ

Валесян С.Ш.

Ս Շ Վալեսյան

Կարգավորվող ջերմամամլման տեխնոլոգիայի սպառարմամբ պատրաստված գետինակսի
մեխանիկական հատկությունների հետազոտումը

Աշխատանքում բերված են գետինակսի, որը պատրաստված է կարգավորվող ջերմամամլման տեխնոլոգիայով, մեխանիկական հատկությունների փորձարարական հետազոտումների տվյալները: Կատարված է ջերմամամլման ճնշման հաշվարկը պոլիմերիզացիայի ընթացքում և ցույց է տրվում նրա ազդեցությունը գետինակսի ամրության և առանձնահատկություն գործակցի վրա:

S.Sh.Valesyan

The Investigation of mechanical properties of gethnacks manufacturing with the use of
regulation thermopressing technology

В работе приводятся данные экспериментальных исследований механических свойств гетинакса, изготовленного по технологии регулируемого термопрессования. Сделан расчет давления термопрессования в процессе полимеризации и показано влияние его на прочность и модуль упругости гетинакса.

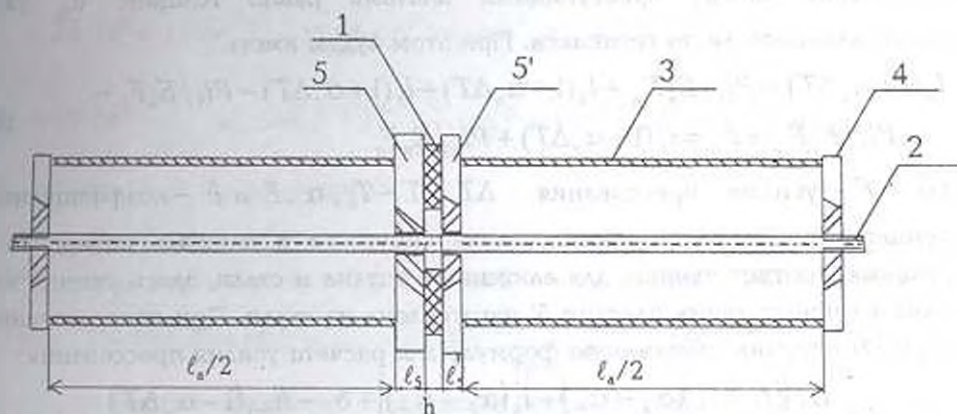
Как известно [1], прессование композита в процессе его отверждения существенно понижает его прочность. В связи с этим была разработана и опробована на стеклопластиковых и углепластиковых трубах технология термопрессования (самопрессования), основанная на разнице коэффициентов температурного расширения материалов внутренней и наружной оправок, что обеспечивает уменьшение зазора между оправками и, как следствие, прессование композита без использования прессового оборудования [2]. Эта технология особенно эффективна при изготовлении тонкостенных большеразмерных труб. Однако при использовании этой технологии изменение давления прессования может осуществляться лишь путем изменения толщин оправок, что весьма неэффективно, так как приводит к весьма незначительным изменениям давления прессования и для труб малого размера - к очень слабому прессованию вообще.

В работах [3] предлагалась технология регулируемого термопрессования, которая, благодаря специальному конструкторскому решению оправок, обеспечивает давление прессования в весьма широких пределах и может быть использована для изготовления изделий различной формы.

В настоящей работе осуществляется исследование прочности плоских образцов гетинакса в зависимости от давления прессования, получаемого при использовании технологии регулируемого термопрессования.

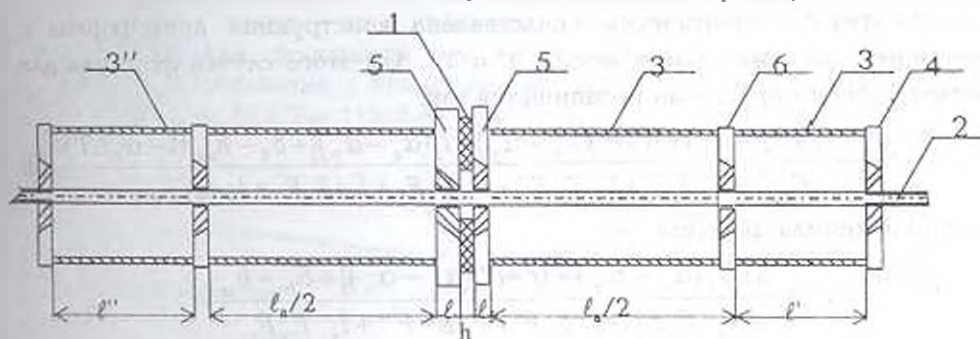
Гетинакс представляет собой листовой слоистый материал, изготовленный высокотемпературным прессованием бумаги, пропитанной полимерным связующим [4]. Для проведения исследований был исполь-

зован препрег из сульфатцеллюлозной бумаги (ГОСТ 25500-82)



Фиг. 1

На фиг.1. схематически показана прессформа, разработанная и изготовленная в Институте механики. Прессуемый полуфабрикат 1 в виде лент препрега с размерами $110 \div 35$ мм, состоящих из листов и количестве 52 штук, помещается между прессующими плитами 5 и 5', на которые упираются алюминиевые втулки 3 в результате завинчивания упорных гаек 4 на сплошной титановый стержень 2. В результате нагрева конструкции, вследствие того, что температурное расширение алюминия больше, чем у титана, очевидно, происходит сближение прессующих плит, обеспечивая прессование материала. Давление прессования может быть регулируемо путем изменения длин и материалов втулок 3 и стержня 2 или введением дополнительных втулок с шайбами 6 (фиг.2.).



Фиг. 2

Ниже рассматривается расчет давления прессования полуфабриката при повышении температуры.

Положим, что при некоторой температуре T_0 в результате завинчивания гаек 4 (фиг.1.) до упора расстояние между прессующими плитами составляет $h_{заз}$ и напряжения в элементах системы пренебрежимо малы. Здесь мы имеем

$$l_a + l_s + l'_s + h_{заз} = l_T \quad (1)$$

После нагрева до некоторой температуры принимается, что расстояние между прессующими плитами равно толщине δ_0 уже изготовленного листа гетинакса. При этом будем иметь

$$l_a(1 + \alpha_a \Delta T) - Pl_a/E_a F_a + l_s(1 + \alpha_s \Delta T) + l'_s(1 + \alpha'_s \Delta T) - Pl'_s/E'_s F'_s - Pl_s/E_s F_s + \delta_0 = l_t(1 + \alpha_t \Delta T) + Pl_t/E_t F_t \quad (2)$$

где P — усилие прессования, $\Delta T = T - T_0$, α , E и F — коэффициенты температурного расширения, модуль упругости и площадь поперечного сечения, соответственно, для алюминия, титана и стали, здесь учтено, что одна из прессующих пластин S' изготовлена из стали. При использовании (1) и (2) получим следующую формулу для расчета усилия прессования.

$$P = \frac{\Delta T [(l_a + l_s)(\alpha_a - \alpha_t) + l'_s(\alpha'_s - \alpha_t)] + \delta_0 - h_{\text{зат}}(1 - \alpha_a \Delta T)}{l_a/E_a F_a + l'_s/E'_s F'_s + l_s/E_s F_s + l_t/E_t F_t} \quad (3)$$

Пренебрегая толщинами прессующих элементов по отношению к длинам втулок, получим следующую приближенную формулу:

$$P = \frac{\Delta T (\alpha_a - \alpha_t) l_a + \delta_0 - h_{\text{зат}}}{l_a/E_a F_a + l_t/E_t F_t} \quad (4)$$

Давление же прессования определяется по формуле

$$q = \frac{P}{2S} \quad (5)$$

где S — площадь поверхности образца, по которой он прессуется. Здесь учтено, что прессованию подвергаются одновременно два образца.

На фиг. 2 схематически представлена конструкция прессформы с введением дополнительных втулок $3'$ и $3''$. Для этого случая формула для расчета усилия прессования запишется так:

$$P = \frac{\Delta T [(l_a + l_s)(\alpha_a - \alpha_t) + (l' + l'')(\alpha'_a - \alpha_t) + l'_s(\alpha'_s - \alpha_t)] + \delta_0 - h_{\text{зат}}(1 - \alpha_a \Delta T)}{l_a/E_a F_a + l' E' F' + l'' E'' F'' + l'_s/E'_s F'_s + l_s/E_s F_s + l_t/E_t F_t} \quad (6)$$

а приближенная формула —

$$P = \frac{\Delta T [l_a(\alpha_a - \alpha_t) + (l' + l'')(\alpha'_a - \alpha_t)] + \delta_0 - h_{\text{зат}}}{l_a/E_a F_a + l' E' F' + l'' E'' F'' + l_t/E_t F_t} \quad (7)$$

где F' , F'' , E' и E'' — площади сечений и модули упругости материалов дополнительных втулок, здесь

$$l_a + l_s + l'_s + l' + l'' + h_{\text{зат}} = l_t \quad (8)$$

Были изготовлены 3 серии опытных образцов. Образцы первой серии изготовлены на прессформе, согласно фиг. 1, при следующих данных:

$$l_s = 60 \text{ см}, l_t = 2 \text{ см}, l_s' = 0,75 \text{ см}, h_{\text{max}} = 0,4 \text{ см}, E_s = 0,7 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2, \\ E_t = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2, E_r = 1,08 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2, \alpha_s = 23 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}, \\ \alpha_t = 13 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}, \alpha_r = 8,5 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}, \Delta T = 150^\circ \text{C}, F_s = 1,44 \text{ см}^2, \\ F_r = 10,17 \text{ см}^2, F_t = F_s' = 9,58 \text{ см}^2.$$

При этом были получены образцы толщиной $\delta = 0,35 \text{ см}$. Образцы второй серии изготовлены на прессформе, согласно фиг.2 при следующих данных: $l' = 5 \text{ см}, l'' = 18,5 \text{ см}, \alpha_s = 23 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}, F' = 2,69 \text{ см}^2, F'' = 7,95 \text{ см}^2$.

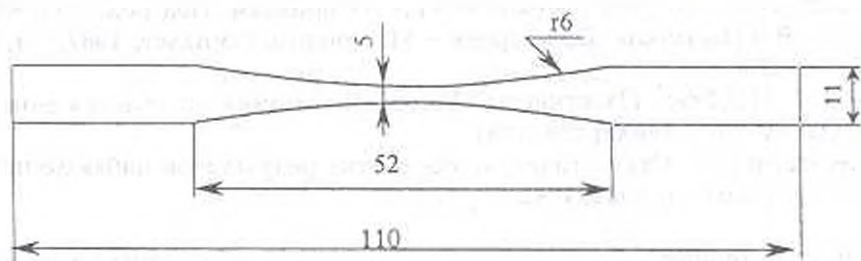
остальные данные совпадают с данными, приведенными для 1 серии, при этом были получены образцы толщиной $\delta = 0,30 \text{ см}$. Образцы третьей серии изготовлены на прессформе, согласно фиг.2 при следующих данных:

$$l_s = 37 \text{ см}, l' = 28,5 \text{ см}, l'' = 17 \text{ см}, \alpha_s = 13 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}, F' = F'' = 14,37 \text{ см}^2$$

остальные данные совпадают с данными, приведенными для 1 серии, при этом были получены образцы толщиной $\delta = 0,34 \text{ см}$.

Кроме того, были изготовлены образцы по той же технологии, но практически без прессования (поверх полуфабрикатов при полимеризации была поставлена металлическая плита, обеспечивающая давление прессования $\approx 0,015 \text{ кгс/см}^2$).

Образцы всех партий после полимеризации остывали вместе с выключенной печью во избежание внутренних температурных напряжений. Для испытаний на растяжение образцы подвергались механической обработке с приданием им формы двухсторонних лопаток ("восьмерок") по ГОСТ-у 11262-80 (фиг.3) [5].



Фиг.3

Испытания на растяжение осуществлялись на испытательной машине ZD 10/90 при скорости нагружения 5 мм/мин.

Результаты испытаний приведены в нижеследующей таблице:

Таблица

Серия	Расчетное давление прессования, кгс/см ²	Удельный вес г/см ³	Прочность при растяжении, кгс/см ²	Модуль упругости, кгс/см ²
1	18,68	1,2	1173,33±13,22	408,16
2	24,19	1,3	1361,11±149,97	476,19
3	50,82	1,27	1403,68±56,41	478,24
без пресс.	0,015	0,511	552,71±183,08	

Экспериментальные значения прочности при растяжении даны с допусками с достоверностью 68,3%, то есть с этой вероятностью действительные значения прочности (математические ожидания) находятся в приведенных пределах [6].

Как можно заключить из данных таблицы, с увеличением давления прессования прочность композита увеличивается. При этом несколько увеличиваются и значения модулей упругости при растяжении.

Проведенные исследования позволяют заключить, что метод регулируемого термопрессования позволяет осуществлять прессование образцов при полимеризации, эффективно влияя на их прочность и деформационные свойства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартиросян М.М. Давление прессования и прочность углепластика// Научно-техн. сб.: сер.15,1984. Деп.№1416/1471.
2. Мартиросян М.М., Симонян А.М., Каграманян А.Н. Повышение прочностных и жесткостных свойств оболочек из ПКМ с применением технологии самопрессования//Тезисы докладов 5-ой межотраслевой научно-техн.конф."Технология" и проблемы внедрения композиционных материалов в промышленность. Миасс,1984.
3. Симонян А.М., Валесян С.Ш. Конструкции оправок для регулируемого самопрессования композитов в процессе полимеризации//Изв.НАН Армении, сер техн.н., 1999, №1, с.14-19.
4. Справочник по электротехническим материалам. Под ред. Ю.В.Корицкого, В.В.Пасынков, Б.М.Тареев. — М.: Энергоатомиздат, 1987. т.1, 368с. (с.313-315)
5. ГОСТ 11262-80. Пластмассы. Метод испытания на растяжение. М.: Издательство стандартов. 1981.
6. Леонтьев Н.А. Статистическая обработка результатов наблюдений. М.: Гослесбуиздат, 1952. 104с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
21.08.2000

УДК 517.43

О ВЫПУКЛОСТИ СЛЕДОВ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ САМО-
СОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ
ПАРАМЕТРА

Локшин А.А., Сагомоян Е.А.

Ա.Ա. Լոկշին, Ե.Ա. Սագոմոնյան

Պարամետրիկ կախված կիսաահմանափակ ինքնահամալուծ օպերատորների հետքերի ուղղույթկության մասին

Հոդվածում ապացուցվում է բերքեմ, որը որոշակի պայմաններում ապահովում է պարամետրիկ կախված ներքին կիսաահմանափակ ինքնահամալուծ օպերատորների հաջորդական սեփական արժեքների զրոմարների պարամետրական ուղղույթկությունը:

A. A. Lokshin, E. A. Sagomonyan

About concavity of traces of semi-bounded self-adjoint operators depending on a parameter

В заметке устанавливается теорема, гарантирующая при определенных условиях параметрическую выпуклость сумм последовательных собственных значений полуограниченных операторов, зависящих от параметра.

Пусть $\mathcal{H}$ — абстрактное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\| \cdot \|$. Пусть далее, $H = H(a)$ — полуограниченный снизу самосопряженный оператор, действующий в $\mathcal{H}$; $a = (a_1, \dots, a_n)$ — параметр, изменяющийся в некоторой выпуклой области $G \subseteq R^n$. Область определения $D(H(a))$ оператора $H(a)$ считаем, вообще говоря, зависящей от a , однако, предполагаем, что существует такое не зависящее от a линейное подпространство D_0 пространства $\mathcal{H}$, на котором $H(a)$ существенно самосопряжен при каждом $a \in G$. Нам понадобится следующее

определение. Оператор $H(a)$ (удовлетворяющий перечисленным выше условиям) называется существенно выпуклым вверх по параметру a в области G , если для любых $a, b \in G$ и любого элемента $u \in D_0$ справедливо неравенство

$$\left\langle H\left(\frac{a+b}{2}\right)u, u \right\rangle \geq \frac{\langle H(a)u, u \rangle + \langle H(b)u, u \rangle}{2} \quad (1)$$

Т е о р е м а Пусть $H(a)$ — полуограниченный снизу самосопряженный оператор, существенно выпуклый вверх по параметру $a \in G$ (G — выпуклая область в R^n). Пусть, далее, нижняя часть спектра оператора $H(a)$, $a \in G$ является чисто дискретной и состоит из собственных значений $E_i(a)$, $i = 1, 2, \dots$, которые мы считаем занумерованными в порядке возрастания с учетом кратности. Положим

$$S_k(a) = E_1(a) + E_2(a) + \dots + E_k(a), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Тогда при $a \in G$ все функции $S_k(a)$ выпуклы вверх.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что справедливо равенство [1]

$$S_k(a) = \inf \sum_{i=1}^k \langle H(a)u_i, u_i \rangle \quad (3)$$

где инфимум берется по всем ортонормированным наборам $u_1, u_2, \dots, u_k \in D(H(a))$. Далее, пусть $a, b \in G$ и пусть

$$H\left(\frac{a+b}{2}\right)\varphi_i = E_i\left(\frac{a+b}{2}\right)\varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

где $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). В силу существенной самосопряженности оператора $H\left(\frac{a+b}{2}\right)$ на D_0 для любого $\bar{\varepsilon} > 0$, очевидно, найдутся такие $v_1, v_2, \dots, v_k \in D_0$, что

$$\|v_i - \varphi_i\| < \bar{\varepsilon}, \quad \left\| H\left(\frac{a+b}{2}\right)v_i - E_i v_i \right\| < \bar{\varepsilon}, \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

Ортонормируя набор $v_1, v_2, \dots, v_k$, легко замечаем, что справедливо следующее утверждение: для любого $\varepsilon > 0$ найдется ортонормированный набор $w_1, w_2, \dots, w_k \in D_0$ такой, что

$$\left| S_k\left(\frac{a+b}{2}\right) - \sum_{i=1}^k \left\langle H\left(\frac{a+b}{2}\right)w_i, w_i \right\rangle \right| < \varepsilon$$

В частности, отсюда следует, что

$$S_k\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sum_{i=1}^k \left\langle H\left(\frac{a+b}{2}\right)w_i, w_i \right\rangle - \varepsilon \quad (4)$$

Теперь, используя существенную выпуклость оператора H , имеем из (4):

$$S_k\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k \langle H(a)w_i, w_i \rangle + \sum_{i=1}^k \langle H(b)w_i, w_i \rangle \right) - \varepsilon$$

Далее, учитывая ортонормированность набора $\{w_i\}$ и соотношение (3), имеем из предыдущего неравенства

$$S_k\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{S_k(a) + S_k(b)}{2} - \varepsilon$$

переходя здесь к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем требуемый результат.

З а м е ч а н и е. В случае полуограниченного самосопряженного оператора, линейно зависящего от параметра a , с областью определения, не зависящей от этого параметра, выпуклость вверх функций $S_k(a)$ была установлена в [1].

Приведем пример, иллюстрирующий действие доказанной выше теоремы. Рассмотрим в $L_2(R_+^1)$ следующее одномерное уравнение Шредингера, зависящее от параметра λ ($\lambda > 1$):

$$H(\lambda)\varphi \equiv \left[-\frac{d^2}{dx^2} - x^2 + \lambda x^{2n} \right] \varphi = E(\lambda)\varphi \quad (5)$$

(здесь n — натуральное, $n > 1$). Как известно [2], оператор $H(\lambda)$ существенно самосопряжен на $C_0^\infty(R_+^1)$. Поэтому в силу предыдущей теоремы функции $S_k(\lambda)$ выпуклы вверх; здесь, как и выше, через $S_k(\lambda)$ обозначены суммы последовательных собственных значений рассматриваемого оператора.

Однако, для операторов с потенциалами, состоящими из конечных сумм однородных функций, можно получать и более сильные утверждения. Действительно, сделаем в (5) замену положив

$$x = a^\gamma y, \quad \lambda = a^\beta \quad (6)$$

где a — вещественный скалярный параметр, γ и β — вещественные постоянные, которые будут определены ниже. Тогда (5), очевидно, перепишется следующим образом:

$$\tilde{H}(a)\varphi \equiv \left[-\frac{1}{a^{2\gamma}} \frac{d^2}{dy^2} - a^{2\gamma} y^2 + a^{2\gamma n + \beta} y^{2n} \right] \varphi = E(a^\beta)\varphi \quad (7)$$

Очевидно, что оператор $\tilde{H}(a)$ существенно самосопряжен на $C_0^\infty(R_+^1)$; он будет существенно выпуклым по a , если будет удовлетворяться одна из двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leq -2\gamma \leq 1 \\ 2\gamma \leq 0 \\ 0 \leq 2n\gamma + \beta \leq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 \leq -2\gamma \leq 1 \\ 2\gamma \geq 1 \\ 0 \leq 2n\gamma + \beta \leq 1 \end{cases} \quad (8)$$

В частности, решением первой из этих систем служит

$$\gamma = 1/2, \quad \beta = n + 1 \quad (9)$$

Итак, при условии (9) оператор $\tilde{H}(a)$ из левой части (7) является существенно выпуклым по a (при $a > 1$, ибо $a = \lambda^{1/(n+1)}$). Теперь из (7) и (9) в силу доказанной выше теоремы вытекает, что при $a > 1$ функции $S_k(a^{n+1})$ выпуклы по a ($k = 1, 2, \dots$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Wehrl A. Convex and Concave Traces // Acta Phys. Austriaca. 1973, v.37, p.361-380.
2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.2 Гармонический анализ. Самосопряженность. — М.: Мир, 1978. 395 с.

Московский государственный
университет им. М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию
20.04.2000