ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2000

ЛЕНСЕР АБГАРОВИЧ АГАЛОВЯН
(к шестидесятилетию со дня рождения)

Академику Национальной Академии Наук Республики Армения, доктору физико-математических наук, директору Института механики НАН РА, известному ученому в области механики деформируемого твердого тела, плодотворному наставнику Ленсеру Абгаровичу Агаловяну исполнилось 60 лет.

Л.А.Агаловян родился 3 февраля 1940г. в селе Колатак Мартакертского района Нагорного Карабаха в семье педагога. С отличием окончив школу, в 1956 году поступил на физико-математический факультет Ереванского госуниверситета. Будучи ленинским стипендиатом, Л.А.Агаловян в 1961 году с отличием окончил госуниверситет по специальности механика. После окончания университета работал ассистентом на кафедре теоретической механики ЕГУ (1961-1963 гг.), учился в аспирантуре (1963-1966 гг.). В 1966г., после защиты кандидатской диссертации, ему присуждена ученая степень кандидата физико-математических наук. В 1966-1969гг. работал старшим преподавателем на кафедре высшей математики ЕГУ. С 1969г. работает в Институте механики НАН РА сначала старшим научным сотрудником, а с 1987 года—директором Института. В 1980 году защитил докторскую диссертацию и ему была присуждена ученая степень доктора физико-математических наук. В 1996г. избран академиком НАН РА.

Л.А.Агаловян является известным ученым в области теории пластин и оболочек и теории упругости. Основные научные достижения

Л.А.Агаловяна обобщены в его объемной монографии "Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек" (М., Наука, 1997г.) и свыше 80 научных публикациях, выступал с докладами на многих международных научных конференциях и конгрессах.

Первые научные исследования Л.А.Агаловяна относятся к асимптотическим решениям классических краевых задач для анизотропных балок, пластин и оболочек. Эти исследования завершены построением асимптотической теории анизотропных балок, пластин и оболочек.

Л.А.Агаловяном асимптотический метод распространен на новый класс задач и этим положено начало новому направлению в теории пластин и оболочек — задачи тонких тел, когда на лицевых поверхностях заданы значения компонентов вектора перемещения или смешанные граничные условия. Доказана неприменимость гипотезы Кирхгофа-Лява для них, установлена принципиально новая асимптотика для тензора напряжений и вектора перемещения. Полученные результаты, в частности, позволили очертить рамки применимости широко используемых для расчета упругих оснований-фундаментов моделей Винклера-Фусса, Пастернака, Клейна, вычислить коэффициенты постели для слоистых и неоднородных оснований.

Л.А.Агаловяном разработан механизм сведения трехмерных задач теории упругости к двумерным, обнаружено влияние коэффициентов анизотропии и изменяемости действующих сил на точность расчета пластин и оболочек по классической и уточненным теориям.

Л.А.Агаловян является одним из первоисследователей задач погранслоя для балок, пластин и оболочек. Полученное математически точное решение для погранслоя прямоугольника позволило ему установить связь между погранслоем и принципом Сен-Венана, доказать справедливость принципа Сен-Венана в случае первой краевой задачи теории упругости и объяснить неприменимость этого принципа ко второй и смешанной граничным задачам.

Перспективными надо считать полученные Л.А.Агаловяном в последние годы важные результаты по слоистым пластинам и оболочкам, когда между слоями нет полного контакта. Разработанная им методика позволила при самой общей анизотропии слоев учитывать влияние произвольных поверхностных, объемных (вес, приведенная сейсмическая нагрузка и др.) сил и температурных полей, что важно, в частности, для сейсмостойкого строительства и геофизики.

Л.А.Агаловяном установлена явная связь между частотами собственных колебаний полос и пластинок и скоростями распространения сейсмических сдвиговых и продольных волн, намечены пути использования этих результатов в сейсмологии, в частности, показано, что при надлежащем выборе параметров основания сооружения можно оградить их от резонанса при сейсмических воздействиях.

Велика заслуга Л.А.Агаловяна в деле подготовки высококвалифицированных научных кадров. Под его руководством многие молодые специалисты успешно защитили докторские и кандидатские диссертации.

Л.А.Агаловян является членом Национального Комитета России по теоретической и прикладной механике, Президиума Национальной Академии Наук РА, бюро отделения физико-математических и технических наук НАН РА, редколлегии журнала ИЗВ. НАН РА "Механика", а также членом оргкомитетов многих международных конференций и симпозиумов. Усилиями Л.А. Агаловяна в 1990г. при Институте механики НАН РА создан специализированный совет по защите докторских диссертаций по механике деформируемого твердого тела, председателем которого он является.

Л.А.Агаловян в 1994г. был удостоен гранта международного научного фонда (ISF) Сороса, а в 1998 – гранта международного научного фонда INTAS. Общество армянских ученых и инженеров (США) в 1995г. присудило ему премию имени Виктора Амбарцумяна.

За большой вклад в развитие новых научных направлений в механике, решение актуальных проблем механики и прикладной математики, большую научно-организационную работу Л.А.Агаловян награжден грамотами АН Армении "Говестагир", "Вастакагир".

С 1960-х годов Л.А.Агаловян активно участвует в общественно-политической жизни Армении, является одним из основателей общественно-политической организации "Арцах-Айастан" и его первым председателем (1992-1996гг.).

Редакция журнала Известия НАН Армении "Механика", научная общественность Армении поздравляют Ленсера Абгаровича Агаловяна с юбилеем и желают ему доброго здоровья, дальнейших творческих успехов.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №1, 2000 Механика
УДК 539.3.01

К ВОПРОСУ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ СДВИГОВЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОМ УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Белубекян М.В., Казарян К.Б.

Մ.Վ. Բելուբեկյան, Կ.Բ. Ղազարյան
Սահքի մակերևույթային ալիքների գոյության հարցը ոչ համասեռ առաձգական կիսատարածությունում

Այխատանքում ուսումնասիրվում է SH տիպի մակերևույթային ալիքների գոյության հարցը ըստ խորության անհամասեռ կիսատարածությունում: Հաստատված է, որ այս հարցի հետազոտումը սերտ կապված է երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ օպերատորի սպեկտրի հետազոտման հետ: Որոշված են մակերևույթային ալիքի գոյության ընդհանուր պայմանները:

M.V. Belubekyan, K.B. Kazaryan
On Existense Problem for Surface Shear Waves in Non-Homegeneous Elastic Semi-Space

В работе исследуется вопрос существования поверхностных SH-волн в неоднородном по глубине упругом полупространстве. Показано, что исследование этого вопроса тесно связано с исследованием спектра самосопряженного дифференциального оператора второго порядка. Определены общие условия существования поверхностных сдвиговых волн в зависимости от неоднородности среды и класс функции, характеризующих неоднородность

Исследованию вопроса распространения сдвиговых поверхностных волн с заданными характеристиками неоднородности посвящены многочисленные работы, в частности укажем на работы [1-3]. Отметим также работу [4], где исследован вопрос существования дискретного вещественного спектра собственных частот колебаний полубесконечной неоднородной мембраны.

1. Перед тем, как перейти к рассмотрению вопроса в общей постановке, приведем иное решение классической задачи Лява для упругого слоя $(0 < x < h)$, лежащего на упругом полупространстве $(h < x < \infty)$.

Пусть, двухслойная упругая среда имеет следующие характеристики:

$$\rho(x) = \rho_1 \qquad \mu(x) = \mu_1 \qquad x \in (0, h)$$
$$\rho(x) = \rho_0 \qquad \mu(x) = \mu_0 \qquad x \in (h, \infty)$$

где ρ - плотность, μ - модуль сдвига среды.

Упругое поле сдвиговых волн характеризуется вектором перемещений $\vec{U}(x, y, t) = [0, 0, U(x, y, t)]$ и уравнением движения

$$\mu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = \rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

Изучая вопрос распространения монохроматической волны вдоль границы полупространства $-\infty < y < \infty$, примем

$$U(x,y,t) = U(x)\exp i(ky - \omega t)$$

Для функции $U(x)$, характеризирующей изменение амплитуды волн по глубине полупространства, имеем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-\frac{d^2U}{dx^2} + g(x)U = \lambda U \quad x \in (0,\infty) \tag{1.1}$$

$$g(x) = \omega^2\left(\frac{\rho_0}{\mu_0} - \frac{\rho_1}{\mu_1}\right) \quad x \in (0,h), \quad g(x) = 0 \quad x \in (h,\infty), \quad \lambda = \frac{\omega^2\rho_0}{\mu_0} - k^2$$

Уравнение (1.1) должно рассматриваться совместно с граничным условием на границе $x = 0$. На свободной или закрепленной границах имеем, соответственно

$$\frac{dU}{dx} = 0, \quad U = 0 \tag{1.2}$$

К краевой задаче (1.1, 1.2) может быть использована известная в теории дифференциальных операторов теорема [5], которую сформулируем следующим образом.

Пусть функция $g(x)$ является суммируемой в интервале $(0,\infty)$. Тогда непрерывная часть спектра всякого самосопряженного расширения оператора $\hat{L}(U)$, порожденного дифференциальным выражением (1.1), заполняет всю положительную полуось $\lambda \geq 0$, а на отрицательной полуоси $\lambda < 0$ может находиться только дискретная часть спектра оператора. При этом собственные функции имеют следующую асимптотику при $x \to \infty$:

$$U(x,\lambda) = \exp\left(-\sqrt{|\lambda|}x\right) \tag{1.3}$$

$$\frac{dU(x,\lambda)}{dx} = -\sqrt{|\lambda|}\exp\left(-\sqrt{|\lambda|}x\right)$$

На основе этой теоремы сразу следует следующий вывод, соответствующий решению классической задачи Лява.

Краевая задача (1.1) не имеет решения с асимптотикой (1.3), если $g(x) \geq 0$, $\lambda < 0$. Действительно, в этом случае имеем

$$\left[U(x)U'(x)\right]' = U^2(x)\left[g(x) - \lambda\right] > 0 \qquad (\ )' = \frac{d}{dx}$$

Функция $U(x)U'(x)$, будучи монотонной, не может иметь в любом интервале более одного нуля, и, следовательно, если функция $U(x)$ имеет нуль, то $U'(x)$ не может иметь нуля и наоборот. Следовательно, для рассматриваемых граничных условий имеем $U(x) \equiv 0$.

Приведем решение задачи (1.1) с помощью метода интегральных уравнений. Представляя решение $U(x,\lambda)$ в виде

$$U(x,\lambda)=\tilde{U}(x,p)\exp(-px) \qquad p=\sqrt{|\lambda|}$$

получим следующее интегральное уравнение относительно функции $\tilde{U}(x,p)$:

$$\tilde{U}(x,p)=1+\frac{1}{2p}\int_x^\infty\left(1-e^{2px}e^{-2ps}\right)g(s)\tilde{U}(s,p)ds \quad x\in(0,\infty)$$

Так как $g(x)$ – финитная функция, то

$$\tilde{U}(x,p)=1+g_0\int_x^h\left(1-e^{2px}e^{-2ps}\right)\tilde{U}(s,p)ds \qquad x\in(0,h)$$

$$\tilde{U}(x,p)=1 \qquad x\in(h,\infty)$$

где $g_0=\frac{\omega^2}{2p}\left(\frac{\rho_0}{\mu_0}-\frac{\rho_1}{\mu_1}\right)$

Вводя в рассмотрение функции

$$Z_1(x,p)=g_0\int_x^h\tilde{U}(s,p)ds,\ Z_2(x,p)=g_0\int_x^h e^{-2ps}\tilde{U}(s,p)ds$$

имеем $\tilde{U}(x,p)=1+Z_1(x,p)-e^{2px}Z_2(x,p)$

Функции $Z_1(x,p), Z_2(x,p)$ определяются из следующей системы уравнений:

$$\frac{dZ_1}{dx}+g_0(1+Z_1)-g_0e^{2px}Z_2=0,\ \frac{dZ_2}{dx}-g_0Z_2+g_0e^{-2px}(1+Z_1)=0 \qquad (1.4)$$

Из решения системы (1.4) для функции $U(x,p)$ имеем классическое решение Лява [6]:

$$U(x,p)=e^{-ph}\left[\cos\beta(x-h)-\frac{p\mu_1}{\beta\mu_0}\sin\beta(x-h)\right] \qquad x\in(0,h)$$

$$U(x,p)=e^{-px} \qquad x\in(h,\infty),\ \beta=\sqrt{-\left(p^2+2pg_0\right)}=\sqrt{\frac{\omega^2\rho_1}{\mu_1}-k^2}$$

2. Перейдем теперь к рассмотрению задачи для неоднородного полупространства, характеризуемого функциями $\mu(x)>0, \rho(x)>0$, заданными в области $x\in(0,\infty)$.

Имеем следующее уравнение для амплитуды поверхностной волны $U(x)$

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x)\frac{dU}{dx}\right]-k^2\mu(x)U=-\rho(x)\omega^2U$$

Переходя от функции $U(x)$ к функции $V(x)=\sqrt{\mu(x)}U(x)$, получим

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\left[\frac{\omega^2\rho(x)}{\mu(x)}-k^2-\varphi^2-\frac{d\varphi}{dx}\right]V=0 \tag{2.1}$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\mu}\frac{d\mu}{dx}$$

Пусть функции $\mu(x),\rho(x)$ таковы, что

$$\frac{d\varphi}{dx}+\varphi^2=\psi_1(x)+\alpha$$

$$\frac{\rho(x)}{\mu(x)}=\frac{1}{c_0^2}\left[1+\psi_2(x)\right] \qquad |\psi_2(x)|<1 \tag{2.2}$$

где α – некоторая постоянная, а $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ суммируемые функции в интервале $(0,\infty)$. Тогда, записывая краевую задачу (2.1) в виде

$$-\frac{d^2V}{dx^2}+g(x)V=\lambda V \qquad x\in(0,\infty) \tag{2.3}$$

$$\frac{dV}{dx}=\varphi(x)V \qquad x=0 \tag{2.4}$$

$$V=0 \qquad x=0$$

где

$$g(x)=\psi_1(x)-\frac{\omega^2}{c_0^2}\psi_2(x),\quad \lambda=\frac{\omega^2}{c_0^2}-k^2-\alpha,\quad c_0^2=\lim_{x\to\infty}\frac{\mu(x)}{\rho(x)}$$

придем к следующему выводу.

Краевая задача (2.3), (2.4) при выполнении условий (2.2) имеет решение с асимптотикой (1.3), при $\lambda<0$. При этом из краевых условий определяются отрицательные собственные значения, множество которых конечно.

Представляет отдельный интерес случай $g(x)>0$. В этом случае функция $V(x)$, а следовательно, и функция $U(x)$ не может иметь более одного нуля. В силу того, что функция $\left[V(x)V'(x)\right]'>0$, а в точке $x=0$ имеем $V'(0)V(0)=\varphi(0)V^2(0)$, из монотонности функции $V(x)V'(x)$ следует, что для существования стремящегося к нулю на бесконечности решения необходимо, чтобы $\varphi(0)<0$. Таким образом, при $g(x)>0$ и $\varphi(0)<0$ краевая задача имеет единственное собственное значение и соответствующую ему одну собственную функцию.

В случае граничного условия $V(0)=0$ рассматриваемая краевая задача имеет только решение $V(x)\equiv 0$.

Уравнение (2.3) имеет решение, удовлетворяющее следующему интегральному уравнению Вольтерра второго рода:

$$V(x,p)=e^{-px}\tilde{V}(x,p) \tag{2.5}$$

$$\tilde{V}(x,p)=1+\frac{1}{2p}\int_x^{\infty}(1-\exp 2p(x-s))g(s)\tilde{V}(s,p)ds$$

Для заданной функции $g(x)$ можно всегда получить решение интегрального уравнения в виде бесконечного ряда.

Применяя к уравнению (2.5) метод последовательных приближений, получим

$$\tilde{V}(x,p)=1+\sum_{n=1}^{\infty}H_n(x,p) \tag{2.6}$$

где

$$H_1(x,p)=\int_x^{\infty}K_0(x,s,p)ds,\quad H_2(x,p)=\int_x^{\infty}K_0(x,s,p)\left(\int_s^{\infty}K_0(s,\xi,p)d\xi\right)ds$$

$$K_0(x,s,p)=[1-\exp 2p(x-s)]g(s),\quad H_{n+1}(x,p)=\int_x^{\infty}K_0(x,s,p)H_n(s,p)ds$$

В частности, для функции $g(x)=-ae^{-qx}$ имеем

$$H_n(x,p)=\frac{(-1)^n a^n e^{-qx}}{q^n(2p+q)(2p+2q)(2p+3q).....(2p+nq)}$$

Покажем, что функция $H_n(x,p)$ удовлетворяет оценке

$$|H_{n+1}(x,p)|\le\frac{\eta^{n+1}(x)}{(n+1)!} \tag{2.7}$$

где

$$\eta(x)=\frac{1}{2p}\int_x^{\infty}|g(s)|ds$$

Так как $|K_0(x,s,p)|\le\frac{1}{2p}|g(s)|$, то при $n=0$ оценка очевидна.

Допустим, что эта оценка справедлива для n и покажем ее справедливость и для $n+1$.

Так как $\frac{d\eta}{dx}=-\frac{1}{2p}|g(x)|$, то имеем

$$|H_{n+1}(x)|\le\int_x^{\infty}|K_0(x,s,p)|\frac{\eta^n(s)}{n!}ds\le\frac{1}{2p}\int_x^{\infty}|g(s)|\frac{\eta^n(s)}{n!}ds\le\frac{\eta^{n+1}(x)}{(n+1)!}$$

Из оценки (2.7) следует сходимость ряда (2.6), а также, что

$$|\tilde{V}(x,p)|\le\exp[\eta(x)],\quad |V(x,p)|\le\exp[\eta(x)-px]$$

Из граничного условия (2.4) получим следующее уравнение, корни которого определяют отрицательные собственные значения, множество которых конечно.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[H_n'(0,p)-(\varphi(0)+p)H_n(0,p)\right]=\varphi(0)+p$$

3.Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров неоднородности. Сначала рассмотрим случай слабо неоднородной среды [1-2].

Пусть $\rho(x)=\rho_0\left(1+\varepsilon_\rho e^{-qx}\right)$, $\mu(x)=\mu_0\left(1+\varepsilon_\mu e^{-qx}\right)$, $|\varepsilon_\mu|<1, |\varepsilon_\mu|<1$, $q>0$.

Для этой среды функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \varphi(x)$ имеют вид

$$\psi_1(x)=\frac{q^2\varepsilon_\mu e^{-qx}(2+\varepsilon_\mu e^{-qx})}{4\left(1+\varepsilon_\mu e^{-qx}\right)^2},\ \psi_2(x)=\frac{(\varepsilon_\rho-\varepsilon_\mu)e^{-qx}}{c_0^2\left(1+\varepsilon_\mu e^{-qx}\right)},\ \varphi(x)=-\frac{\varepsilon_\mu q e^{-qx}}{2\left(1+\varepsilon_\mu e^{-qx}\right)}$$

Так как функции $\psi_1(x), \psi_2(x)$ являются суммируемыми, то в этой среде возможно существование решений в виде поверхностных волн.

В частности, если $\varepsilon_\rho<\varepsilon_\mu, \varepsilon_\mu>0$, то в этом случае $g(x)>0, \varphi(0)<0$ и, следовательно, краевая задача имеет единственное решение. В остальных случаях имеем конечное множество решений.

Теперь обратимся к другому примеру неоднородности, допускающего решение с помощью функций Бесселя.

Пусть

$$\mu(x)=\mu_0\mathrm{ch}^2(\alpha x+\beta),\ \rho(x)=\rho_0\mathrm{ch}^2(\alpha x+\beta)\left(1+\gamma e^{-2qx}\right),\ \alpha>0, q>0, |\gamma|<1$$

В этом случае функция $g(x)$ имеет вид

$$g(x)=-\frac{\omega^2\gamma}{c_0^2}e^{-2qx}$$

а для λ имеем

$$\lambda=\frac{\omega^2}{c_0^2}-k^2-\alpha^2, c_0^2=\frac{\mu_0}{\rho_0}$$

На основе вышеизложенных результатов можно заключить, что при $\gamma>0, \lambda<0$ задача имеет не более чем счетное число собственных функций, сответствующих поверхностным волнам.

В случае, когда $\gamma<0$, задача имеет единственное решение, если

$$\varphi(0)=\alpha\mathrm{th}\beta<0, \qquad \alpha>0, \beta<0$$

Аналогичные результаты можно получить также из непосредственного решения уравнения (2.3).

Уравнение (2.3) с помощью замены переменной $z(x)=\dfrac{\omega\sqrt{\gamma}}{c_0 q}e^{-qx}$ приводится к уравнению Бесселя

$$z^2V''+zV'+(z^2-\upsilon^2)V=0;\quad \upsilon=\frac{\sqrt{|\lambda|}}{q} \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) при $\gamma>0$ имеет решение $V(z)=C_1 J_\upsilon(z)+C_2 K_\upsilon(z)$

В точке $z=0$ функция $K_\upsilon(z)$ имеет особенность, а функция $J_\upsilon(z)$

нуль υ- порядка и, следовательно, принимая $C_2 = 0$, имеем

$$V(z) = J_{\upsilon}\left(\frac{\omega\sqrt{\gamma}}{c_0 q} e^{-qx}\right)$$

При $x \to \infty$ $(z \to 0)$ имеем $V \sim e^{-\sqrt{|\lambda|}x}$.

Из граничных условий получим следующие уравнения, определяющие собственные значения:

$$-z_0 J'_{\upsilon}(z_0) = \frac{\varphi(0)}{q} J_{\upsilon}(z_0), \qquad z_0 = \frac{\omega\sqrt{\gamma}}{c_0 q}$$

или

$$J_{\upsilon}(z_0) = 0 \tag{3.2}$$

Трансцендентные уравнения (3.2) имеют конечное число решений, относительно индекса υ (собственных чисел).

При $\gamma < 0$ имеем, соответственно

$$V(z) = C_1 J_{\upsilon}(iz) = C_1 I_{\upsilon}(z), \; z = \frac{\omega\sqrt{|\gamma|}}{c_0 q} e^{-qx}$$

где $I_{\upsilon}(z)$ есть модифицированная функция Бесселя первого рода . Функция $I_{\upsilon}(z)$ является монотонно возрастающей функцией от своего аргумента, имеющая в точке $z = 0$ нуль υ- порядка.

Соответствующее трансцендентное уравнение

$$-z_0 I'_{\upsilon}(z_0) = \frac{\varphi(0)}{q} I_{\upsilon}(z_0), \qquad z_0 = \frac{\omega\sqrt{|\gamma|}}{c_0 q}$$

в силу монотонности функции $I_{\upsilon}(z_0)$, $\left(I'_{\upsilon}(z_0)\right) > 0$ имеет единственное решение, если $\varphi(0) < 0$. В остальных случаях оно не имеет решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах.- М.: Наука, 1981. 288с.
2. Белубекян М.В., Мухсихачоян А.Р. Сдвиговые поверхостные волны в слабо неоднородных упругих средах.-Акустический журнал, 1996, т. 42, №2, с.179-182.
3. MauginG.A. Elastic Surface Waves with Transverse Horizontal Polarization.- Advances in Applied Mechanics. 1983, v.23, p.373-474.
4. Абрамян А.К., Индейцев Д.А. Ловушечные моды колебаний в мембране с неоднородностью.-Акустический журнал, 1998, т.44, №4, с.437-442.
5. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы.-М.: Наука, 1969. 526с.
6. Новацкий В. Теория упругости.-М.: Мир, 1975. 872с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
24.03.1999

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №1, 2000 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ СДВИГОВОЙ ДЕФОРМАЦИИ (АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА)

Мовсисян Л.А.

Լ.Ա. Մովսիսյան
Սահքի դեֆորմացիայի մի մոդելի մասին (հակահարթ խնդիր)

Դասական հակահարթ խնդրում մարմնի չափը տեղափոխության ուղղությամբ չի մտնում շարժման հավասարման մեջ: Փորձ է արվում առաջին կարգի ճշտությամբ այդ բացը վերացնել:
Դիտարկված մի շարք խնդիրներում ցույց է տրված դրա ազդեցությունը: Հետաքրքիր է հատկապես այն, որ այդ դիվածքով հնարավոր է մակերևութային ալիքի գոյությունը:

L.A. Movsisyan
About one model of shear deformation (antiplane problem)

Классическая антиплоская задача получается в предположении независимости нормального к плоскости перемещения от координаты этого же направления. Предположение в общем случае верное, если тело в этом же направлении простирается до бесконечности. Такая же схема принимается и для обычной сдвиговой задачи, да и при изгибе коротких стержней (например, в задачах сейсмостойкости). При такой постановке протяженность тела (размер) в направлении перемещения не входит в уравнение движения. В предлагаемой работе сделана попытка в первом приближении учесть этот фактор и на различных примерах будет показана его роль.

1. Предположим, что сдвиг происходит в направлении оси z и координатная плоскость xy помещена в срединной плоскости тела. Относительно компонентов перемещения принимается

$$u_x = \frac{2}{h} z\varphi(x,y,t), \quad u_y = \frac{2}{h} z\psi(x,y,t), \quad u_z = w(x,y,t) \tag{1.1}$$

то есть обычное предположение гипотезы прямых при изгибе пластин, только здесь принимается, что материал, размеры тела и напряженное состояние такие, что нормальными напряжениями и связанными с ними моментами в уравнениях движения можно пренебречь. Тогда осредненные уравнения движения будут такими:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - N_1 = \rho\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} - N_2 = \rho\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xz}\,dz, \quad N_2 = \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{yz}\,dz, \quad M = \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{yz}\,z\,dz \tag{1.2}$$

Уравнения (1.2) выведены в предположении, что внешние плоскости пластинки свободны от напряжений. Материал тела будем предполагать ортотропным. Тогда соотношениями упругости будут

$$N_1 = A_{55}h\left(\frac{2}{h}\varphi + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad N_2 = A_{44}h\left(\frac{2}{h}\psi + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad M = A_{66}\frac{h^2}{6}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \quad (1.3)$$

2.Рассмотрим одномерные волны в направлении оси x. Тогда из (1.2) и (1.3) относительно w и φ получится система, которая дает для фазовой скорости следующее значение:

$$\frac{c}{a_1} = \sqrt{1+\gamma}, \quad c = \frac{\omega}{k}, \quad a_1 = \sqrt{A_{55}/\rho}, \quad \gamma = \frac{12}{h^2k^2} \qquad (2.1)$$

k – волновое число.

Как видно из (2.1), при $h \to \infty$ для фазовой скорости получается известное значение скорости сдвиговой волны (здесь имеется дисперсия).

З а м е ч а н и е 1. Возникает такой вопрос: ведь классическая постановка вместо (1.1) предполагает (в одномерном случае) $u_x = 0$, $u_z = w(x,t)$. При u_x, добавляя линейный член по z, не следует ли и в u_z добавить соответствующий член, то есть вместо (1.1) взять

$$u_x = \frac{2}{h}z\varphi, \quad u_z = w + \frac{4}{h^2}z^2w_1 \qquad (2.2)$$

Возможны два пути для дальнейшего продвижения.

а) Если по (2.2) определить сдвиговое напряжение τ_{xz} и удовлетворить условиям свободной поверхности $\tau_{xz}(z = \pm h/2) = 0$, как, например, в [1], то для него получится

$$\tau_{xz} = A_{55}\left(1 - \frac{4}{h^2}z^2\right)\left(\frac{2}{h}\varphi + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad (2.3)$$

Если теперь повторить все процедуры с таким τ_{xz}, то для фазовой скорости получится то же выражение (2.1). Следует отметить, что вовсе не все величины по (2.3) и по п.1 будут одинаковыми, однако, сам по себе факт одинаковости фазовой скорости является примечательным.

б) Есть еще второй путь: заранее не удовлетворять условиям $\tau_{xz}(z = \pm h/2) = 0$, а это сделать в ходе осреднения уравнений движения [2]. Тогда для неизвестных φ, w и w_1 получится система

$$\begin{aligned}
&A_{55}\left(\frac{2}{h}\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial w_1}{\partial x}\right) = -\rho\frac{h}{6}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\\
&A_{55}\left(\frac{2}{h}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}\right) \qquad (2.4)\\
&A_{55}\left(\frac{2}{h}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{3}{5}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{3}{5}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}\right)
\end{aligned}$$

Система (2.4) дает две скорости: одна – по φ и w, как (2.1), и вторая – от w_1, равная классической $c = a_1$.

3. Теперь рассмотрим двумерные свободные колебания прямоугольной пластинки $(a \times b)$, края которой свободны $N_n = M = 0$. Как здесь, так и в

следующем пункте удобнее иметь систему в усилиях. Из (1.1) и (1.3) получим

$$\frac{12}{h^2}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-N_1\right)+\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 N_2}{\partial x\partial y}=\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2 N_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{12}{h^2}\left(\frac{\partial M}{\partial x}-N_2\right)+\frac{\partial^2 N_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2}=\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2 N_2}{\partial t^2} \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}-\frac{\partial N_1}{\partial y}-\frac{\partial N_2}{\partial x}=\frac{1}{a_3^2}\frac{\partial^2 M}{\partial t^2}$$

Здесь $a_2=\left(A_{44}/\rho\right)^{1/2}$, $a_3=\left(A_{66}/\rho\right)^{1/2}$

Выбрав

$$N_1=A\sin\lambda_m x\cos\mu_n y,\quad N_2=B\cos\lambda_m x\sin\mu_n y$$
$$M=C\sin\lambda_m x\sin\mu_n y,\quad \lambda_m=m\pi/a,\ \mu_n=n\pi/b \qquad (3.2)$$

удовлетворим граничным условиям.

Дисперсионное уравнение в общем случае слишком громоздкое, чтобы его привести. Для выяснения влияния анизотропии и поперечного размера на частоты приведем его в частном случае: для "основной" частоты квадратичной пластинки $(a=b,\ m=n=1)$. Для безразмерной частоты оно имеет вид

$$\alpha\beta\Omega^3-[2\alpha+\beta(1+\alpha)(1+\delta)]\Omega^2+(2+\delta)(1+\alpha+\beta\delta)\Omega-4\delta=0 \qquad (3.3)$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha=\frac{A_{55}}{A_{44}},\quad \beta=\frac{A_{66}}{A_{66}},\quad \Omega=\frac{\omega^2 a^2}{\pi^2 a_1^2},\quad \delta=\frac{12a^2}{\pi^2 h^2}$$

В табл.1 и 2 в каждой клетке помещены три корня уравнения (3.3) для различных α,β и δ. В каждой клетке третья строка соответствует основному движению от w. Как показывают таблицы, так и имеющиеся другие данные (для различных α,β и δ) эти частоты увеличиваются по сравнению с классической в новых обозначениях

$$\Omega=1+1/\alpha \qquad (3.4)$$

Эти частоты, как и при одномерном случае, с увеличением h уменьшаются.

Особо нужно сказать о вторых строках. Если в (3.1) пренебречь моментом, то полученная система дает дисперсионное уравнение

$$\alpha\Omega^2-(1+\alpha)(1+\beta)\Omega+(1+\delta)^2-1=0 \qquad (3.5)$$

Отсюда полученные частоты соответствуют первым и третьим строкам таблиц, то есть частоты вторых строк имеют моментное происхождение и еще интересно, что с увеличением h они увеличиваются.

Частоты, определенные из (3.5), меньше, чем по (3.3).

Как и следовало ожидать, вновь появившиеся частоты от φ и ψ, меньше, чем от w.

В предельном случае, когда $h\to\infty$, система (3.1) распадается на две системы и соответствующие частоты будут

$$\rho\omega^2 = A_{55}\lambda_m^2 + A_{66}\mu_n^2$$
$$\rho\omega^2 = A_{66}\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2\right) \tag{3.6}$$

4. Здесь обсудим такой вопрос: существует ли поверхностная волна, затухающая в направлении, перпендикулярном к направлению распространения волны. Как известно, в антиплоской задаче такой волны не существует.

Итак, пусть край пластинки $y = 0$ свободен: $N_2 = M = 0$ и волна распространяется в направлении оси x. Если искать решение (3.1) в виде

$$(N_1, N_2, M) = (A, B, C)\exp[py + i(kx - \omega t)] \tag{4.1}$$

то характеристическое уравнение для определения p будет

$$s^4 + Rs^2 + Q = 0$$
$$R = \frac{1}{\alpha_1}\left[(\alpha_1 - \gamma)(\alpha_3 - 1) + (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - \gamma) + 2\gamma\right] \tag{4.2}$$
$$Q = (\alpha_1 - 1 - \gamma)(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_3\gamma),\ s = p/k,\ \ \alpha_i = \omega^2 / a_i^2 k^2$$

Для того, чтобы корни (4.2) имели отрицательную действительную часть, необходимо, чтобы

$$R < 0, \quad Q > 0 \tag{4.3}$$

Вычислив с такими s_i перерезывающие усилия и момент, после удовлетворения условиям свободной границы получим

$$(\alpha_1 - \alpha_2 - 2\gamma - 2\gamma)(s_1^2 - s_2^2) = 0 \tag{4.4}$$

Равенство нулю первого множителя при условиях (4.3) невозможно, а равенство нулю второго множителя даст

$$R^2 - 4Q = 0 \tag{4.5}$$

Совместимы ли условия (4.3) и (4.5)? Легко можно показать, что эти условия не могут быть осуществлены не только при $\gamma = 0$ $(h \to \infty)$, но и в изотропном $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, и даже в $\alpha_1 = \alpha_2$ случаях.

Конечно, можно было бы в общем случае определить те области параметров, когда эти условия имеют место. Но так как нашей целью является показать, что такая волна вообще существует, покажем это на конкретных значениях: если, например, взять $\alpha_1 = \alpha_3 = 0{,}5;\ \gamma = 0{,}01$, то значения α_2, удовлетворяющие всем приведенным условиям, будут $\alpha_2 = 0{,}9937$; $\alpha_2 = 0{,}04629$; то есть при этих значениях возможно существование поверхностной волны.

Следует отметить, что как здесь, так и в общем случае, существование и глубина проникновения поверхностной волны зависят от волнового числа (k).

5. Представляет также интерес вопрос распространения волны по настоящей модели при наличии пьезоэффекта. С этой целью рассмотрим задачу распространения одномерной сдвиговой волны в пьезоэлектрике $6mm$ [3].

В предположении металлического слоя на внешних плоскостях электрический потенциал берется в виде [4]

$$\Phi(x,z,t)=F(x,t)\left(1-\frac{4}{h^2}z^2\right) \tag{5.1}$$

Тогда, согласно [3] и (1.2), одномерные уравнения движения примут вид

$$A_{55}\left(\frac{2}{h}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\frac{2}{3}e_2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$-A_{55}\left(\frac{2}{h}\varphi+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{2}{3}e_2\frac{\partial F}{\partial x}=\rho\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{5.2}$$

а для неизвестной функции F имеем

$$e_2\left(\frac{2}{h}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\frac{2}{3}\kappa_1\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{2}{h}e_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{8}{h^2}\kappa_2 F=0 \tag{5.3}$$

Системы (5.2) и (5.3) для фазовой скорости дают

$$\frac{v^2}{a_2^2}=1+\gamma+\frac{e_2\left[e_1+\gamma(e_1+e_2)\right]}{A_{55}(\kappa_1+\gamma\kappa_2)} \tag{5.4}$$

то есть увеличению фазовой скорости способствует как поперечный размер, так и пьезоэффект.

$\delta=0{,}01$ Таблица 1

β \ α	0,1	1	10
0,1	0,01812	0,01000	0,001811
	10,97	1,999	1,103
	20,12	20,01	20,01
1	0,01812	0,01000	0,001811
	1,988	1,8634	1,097
	11,10	2,146	2,012
10	0,01812	0,01000	0,001811
	0,1990	0,1989	0,1988
	11,09	2,011	1,110

$\delta=0{,}1$ Таблица 2

β \ α	0,1	1	10
0,1	0,1758	0,1000	0,01758
	10,74	1,989	1,134
	21,19	20,11	20,06
1	0,1758	0,1000	0,01758
	1,891	1,6000	1,074
	12,03	2,500	2,119
10	0,1731	0,1000	0,01758
	0,1937	0,1895	0,1891
	11,93	2,110	1,203

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1987. 360с.
2. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. 334с.
3. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. – М.: Наука, 1982. 424 с.
4. Мовсисян Л.А. Волны изгиба и другие для одной пьезоэлектрической пластинки. – Изв.НАН Армении, Механика, 1997, т.50, №2, с.21-27.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
19.03.1999

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №1, 2000 Механика

УДК 539.3.01

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОЛОСЫ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ КОНТАКТА МЕЖДУ СЛОЯМИ

Хачатрян А.М.

Ա.Մ.Խաչատրյան

Անիզոտրոպ կոր երկշերտի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակը շերտերի միջև կոնտակտի տարբեր պայմանների դեպքում

Ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդով կառուցված է ընդհանուր անիզոտրոպիայով օժտված կորագիծ երկշերտի ներքին խնդրի լուծումը շերտերի միջև լրիվ և ոչ լրիվ կոնտակտի դեպքում: Լրիվ կոնտակտի դեպքում ստացված հավասարումները համեմատված են Կիրխհոֆ-Կլեբշի դասական տեսության հավասարումների հետ: Դիտարկված են կոնկրետ օրինակներ:

A.M.Khachatrian

The Stress-Strain State of an Anisotrope Two-Layered Curved Strip with Different Conditions of the Contacts between the Strips

Асимптотическим методом выведены уравнения и расчетные формулы для двухслойной криволинейной полосы с общей анизотропией при полном и неполном контактах между слоями. Полученные уравнения при полном контакте сопоставлены с классическими уравнениями Кирхгофа-Клебша. Рассмотрены конкретные примеры.

Методом асимптотического интегрирования построено решение внутренней задачи анизотропной двухслойной криволинейной балки при полном и неполном контактах между слоями. Используется асимптотика, предложенная А.Л.Гольденвейзером [1,2], справедливая также для анизотропных пластинок и оболочек [3]. Континуальная модель слоистой среды с проскальзыванием на контактных границах построена в [4]. В работах [5,6] методом асимптотического интегрирования исследовано напряженно-деформированное состояние (НДС) анизотропной слоистой балки при полном контакте между слоями, двухслойной анизотропной полосы-балки, когда между слоями заданы условия неполного контакта. В работе [7] тем же методом исследовано НДС однослойного криволинейного стержня с цилиндрической анизотропией.

1. Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния двухслойного плоского криволинейного стержня с цилиндрической анизотропией. Предполагается, что стержень имеет общую постоянную ширину $2h$, ограничен в плане двумя дугами концентрических окружностей R_1 и R_2 $(R_2 > R_1)$. Радиус

окружности, разделяющей верхний и нижний слои — R_0 . Слои имеют различные толщины h_k , коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$ $(k=1,2)$.

На криволинейных сторонах стержня заданы значения напряжений, а на торцах — различные комбинации торцевых условий.

$$\sigma_{r\theta} = \pm\sqrt{h/R_0}\,Y^{\pm}(\theta), \sigma_r = \pm Z^{\pm}(\theta) \text{ при } r = R_2, R_1 \tag{1.1}$$

На линии раздела двух слоев $r = R_0$ имеем следующие условия контакта:

а) полный контакт

$$w_1 = w_2,\ v_1 = v_2,\ \sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)},\ \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)} \tag{1.2}$$

б) неполный контакт

$$w_1 = w_2,\ \sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)},\ \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)} = \varepsilon^{-1} f(\theta) \tag{1.3}$$

где $\varepsilon = \sqrt{h/R_0}$ — малый геометрический параметр, $f(\theta)$ считается заданной.

Для решения сформулированной задачи введем безразмерную координатную систему ζ, φ по формулам

$$\zeta = (r - R_0)/h,\ \varphi = \theta/\varepsilon,\ h = (h_1 + h_2)/2 \tag{1.4}$$

После этих преобразований соответствующие уравнения теории упругости анизотропного тела в полярных координатах будут содержать малый параметр. Это сингулярно возмущенная система, следовательно, ее решение складывается из двух типов решений: внутреннего и пограничного слоя.

Решение внутренней задачи будем искать в виде [1-3]

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{-q_k} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s Q^{(k,s)} \tag{1.5}$$

где $Q^{(k)}$ — любое из напряжений и безразмерных перемещений, $V^{(k)} = v_k/R_0$, $W^{(k)} = w_k/R_0$, S — число приближений, k — номер слоя и принимает значения $k = 1,2$. Целые числа q_k выбираются таким образом, чтобы получить непротиворечивую систему. Эта цель достигается при [7]

$$q_k = 2 \text{ для } \sigma_\theta^{(k)}, W^{(k)},\ q_k = 1 \text{ для } \sigma_{r\theta}^{(k)}, V^{(k)},\ q_k = 0 \text{ для } \sigma_r^{(k)} \tag{1.6}$$

Подставив (1.5) в вышеуказанные уравнения, с учетом (1.6), получим систему

$$\frac{\partial\sigma_r^{(k,s)}}{\partial\zeta} - \sigma_\theta^{(k,s)} + \frac{\partial\sigma_{r\theta}^{(k,s)}}{\partial\varphi} + \zeta\frac{\partial\sigma_r^{(k,s-2)}}{\partial\zeta} + \sigma_r^{(k,s-2)} = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_\theta^{(k,s)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\sigma_{r\theta}^{(k,s)}}{\partial\zeta}+\zeta\frac{\partial\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)}}{\partial\zeta}+2\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)}=0$$

$$\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial\zeta}=a_{11}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-4)}+a_{12}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-2)}+a_{16}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-3)} \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial\varphi}+W^{(k,s)}=a_{12}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-2)}+a_{22}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s)}+a_{26}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-1)}+$$

$$+\zeta\left(a_{12}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-4)}+a_{22}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-2)}+a_{26}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-3)}\right)$$

$$\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial\varphi}+\zeta\frac{\partial V^{(k,s-2)}}{\partial\zeta}-V^{(k,s-2)}=a_{16}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-3)}+a_{26}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-1)}+$$

$$+a_{66}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)}+\zeta\left(a_{16}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-5)}+a_{26}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-3)}+a_{66}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-4)}\right)$$

Решением этой системы является

$$W^{(k,s)}=w^{(k,s)}(\varphi)+w^{*(k,s)}(\varphi,\zeta)$$

$$V^{(k,s)}=-\frac{dw^{(k,s)}}{d\varphi}\zeta+v^{(k,s)}(\varphi)+v^{*(k,s)}(\varphi,\zeta)$$

$$\sigma_\theta^{(k,s)}=-\frac{1}{a_{22}^{(k)}}\frac{d^2w^{(k,s)}}{d\varphi^2}\zeta+\frac{1}{a_{22}^{(k)}}\left(w^{(k,s)}+\frac{dv^{(k,s)}}{d\varphi}\right)+\sigma_\theta^{*(k,s)}(\varphi,\zeta) \tag{1.8}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(k,s)}=\frac{1}{2a_{22}^{(k)}}\frac{d^3w^{(k,s)}}{d\varphi^3}\zeta^2-\frac{1}{a_{22}^{(k)}}\left(\frac{dw^{(k,s)}}{d\varphi}+\frac{d^2v^{(k,s)}}{d\varphi^2}\right)\zeta+\tau_{r\theta 0}^{(k,s)}(\varphi)+\sigma_{r\theta}^{*(k,s)}(\varphi,\zeta)$$

$$\sigma_r^{(k,s)}=-\frac{1}{6a_{22}^{(k)}}\frac{d^4w^{(k,s)}}{d\varphi^4}\zeta^3+\frac{1}{2a_{22}^{(k)}}\frac{d^3v^{(k,s)}}{d\varphi^3}\zeta^2+\frac{1}{a_{22}^{(k)}}\left(w^{(k,s)}+\frac{dv^{(k,s)}}{d\varphi}\right)\zeta-$$

$$-\frac{d\tau_{r\theta 0}^{(k,s)}}{d\varphi}\zeta+\tau_{r\theta}^{(k,s)}(\varphi)+\sigma_r^{*(k,s)}(\varphi,\zeta)$$

здесь $w^{(k,s)}$, $v^{(k,s)}$, $\tau_{r\theta 0}^{(k,s)}$, $\tau_{r\theta}^{(k,s)}$ — неизвестные пока функции, подлежащие определению, а величины со звездочками определяются по формулам

$$w^{*(k,s)}=\int_0^\zeta\left(a_{11}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-4)}+a_{12}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-2)}+a_{16}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-3)}\right)d\zeta$$

$$v^{*(k,s)}=\int_0^\zeta\left(a_{16}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-3)}+a_{26}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-1)}+a_{66}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)}\right)d\zeta+$$

$$+\int_0^\zeta\zeta\left(a_{16}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-5)}+a_{26}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-3)}+a_{66}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-4)}\right)d\zeta+$$

$$+\int_0^\zeta\left(-\frac{\partial w^{*(k,s)}}{\partial\varphi}-\zeta\frac{\partial V^{(k,s-2)}}{\partial\zeta}+V^{(k,s-2)}\right)d\zeta$$

$$\sigma_{\theta}^{*(k,s)} = \frac{1}{a_{22}^{(k)}}\left[w^{*(k,s)} + \frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial \varphi} - \left(a_{12}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-2)} + a_{26}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-1)}\right) - \right.$$
$$\left. - \zeta\left(a_{12}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-3)} + a_{26}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-3)} + a_{22}^{(k)}\sigma_{\theta}^{(k,s-2)}\right)\right] \tag{1.9}$$
$$\sigma_{r\theta}^{*(k,s)} = -\int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial \sigma_{\theta}^{*(k,s)}}{\partial \varphi} + \zeta\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k,s-2)}}{\partial \zeta} + 2\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)}\right)d\zeta$$
$$\sigma_r^{*(k,s)} = \int_0^{\zeta}\left(\sigma_{\theta}^{*(k,s)} - \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{*(k,s)}}{\partial \varphi} - \zeta\frac{\partial \sigma_r^{(k,s-2)}}{\partial \zeta} - \sigma_r^{(k,s-2)}\right)d\zeta$$

Для определения неизвестных функций необходимо удовлетворить условиям контакта (1.2) или (1.3), а также граничным условиям (1.1).

Учитывая, что при $r = R_0$ $(\zeta = 0)$, $w^{*(k,s)} = v^{*(k,s)} = 0$, $\sigma_r^{*(k,s)} = \sigma_{r\theta}^{*(k,s)} = 0$ и удовлетворив условиям полного контакта (1.2), получим

$$w^{(1,s)} = w^{(2,s)} = w^{(s)}, \quad v^{(1,s)} = v^{(2,s)} = v^{(s)}, \quad \tau_{r0}^{(1,s)} = \tau_{r0}^{(2,s)}, \quad \tau_{r\theta 0}^{(1,s)} = \tau_{r\theta 0}^{(2,s)} \tag{1.10}$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно перемещений $w^{(s)}$ и $v^{(s)}$:

$$C\left(\frac{dw^{(s)}}{d\varphi} + \frac{d^2 v^{(s)}}{d\varphi^2}\right) + K\frac{d^3 w^{(s)}}{d\varphi^3} = p^{(s)}$$
$$D\frac{d^4 w^{(s)}}{d\varphi^4} + K\left(2\frac{d^2 w^{(s)}}{d\varphi^2} + \frac{d^3 v^{(s)}}{d\varphi^3}\right) + C\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(s)}}{d\varphi}\right) = q^{(s)} \tag{1.11}$$

где

$$C = C_1 + C_2, \quad K = K_1 - K_2, \quad D = D_1 + D_2$$
$$C_k = (-1)^k \zeta_k / a_{22}^{(k)}, \quad K_k = -\zeta_k^2 / \left(2a_{22}^{(k)}\right), \quad D_k = (-1)^k \zeta_k^3 / \left(3a_{22}^{(k)}\right)$$
$$\zeta_1 = (R_1 - R_0)/h = -h_1/h, \quad \zeta_2 = (R_2 - R_0)/h = h_2/h \tag{1.12}$$

Обобщенные нагрузки $p^{(s)}$ и $q^{(s)}$ определяются по формулам

$$p^{(s)} = -(Y^{+(s)} + Y^{-(s)}) + \sigma_{r\theta}^{*(2,s)}(\zeta_2) - \sigma_{r\theta}^{*(1,s)}(\zeta_1)$$
$$q^{(s)} = Z^{+(s)} + Z^{-(s)} + \zeta_2\frac{dY^{+(s)}}{d\varphi} + \zeta_1\frac{dY^{-(s)}}{d\varphi} - \sigma_r^{*(2,s)}(\zeta_2) +$$
$$+ \sigma_r^{*(1,s)}(\zeta_1) - \zeta_2\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{*(2,s)}(\zeta_2)}{d\varphi} + \zeta_1\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{*(1,s)}(\zeta_1)}{d\varphi} \tag{1.13}$$

После удовлетворения граничным условиям (1.1) определяются также неизвестные функции $\tau_{r\theta 0}^{(1,s)}$ и $\tau_{r0}^{(2,s)}$

$$\tau_{r\theta}^{(2,s)} = Y^{+(s)} - \frac{1}{2a_{22}^{(k)}}\frac{d^3w^{(s)}2}{d\varphi^3}\zeta_2^2 + \frac{1}{a_{22}^{(k)}}\left(\frac{dw^{(s)}}{d\varphi} + \frac{d^2v^{(s)}}{d\varphi^2}\right)\zeta_2 - \sigma_{r\theta}^{*(2,s)}(\zeta_2)$$

$$\sigma_r^{(2,s)} = Z^{+(s)} + \zeta_2\frac{dY^{+(s)}}{d\varphi} - \frac{1}{3a_{22}^{(2)}}\frac{d^4w^{(s)}2}{d\varphi^4}\zeta_2^3 + \frac{1}{2a_{22}^{(2)}}\left(2\frac{d^2w^{(s)}}{d\varphi^2} + \frac{d^3v^{(s)}}{d\varphi^3}\right)\zeta_2^2 -$$

$$- \frac{1}{a_{22}^{(2)}}\left(w^{(s)} + \frac{dv}{d\varphi}\right)\zeta_2 - \sigma_r^{*(s)}(\zeta_2) - \zeta_2\frac{\partial\sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta_2)}{\partial\varphi} \qquad (1.14)$$

$$Z^{\pm(0)}, Y^{\pm(0)} = Z^{\pm}, Y^{\pm}; \quad Z^{\pm(s)} = Y^{\pm(s)} = 0 \;\; s > 0$$

Таким образом, все величины будут определены, если будут известны перемещения $v^{(s)}$ и $w^{(s)}$.

Если в первых двух уравнениях (1.7) и соотношениях (1.8) перейти от напряжений к статически эквивалентным им усилиям и моментам

$$N^{(s)} = \int_{\zeta_1}^{0}\sigma_\theta^{(1,s)}d\zeta + \int_{0}^{\zeta_2}\sigma_\theta^{(2,s)}d\zeta, \quad N^{*(s)} = \int_{\zeta_1}^{0}\sigma_\theta^{*(1,s)}d\zeta + \int_{0}^{\zeta_2}\sigma_\theta^{*(2,s)}d\zeta$$

$$M^{(s)} = \int_{\zeta_1}^{0}\zeta\sigma_\theta^{(1,s)}d\zeta + \int_{0}^{\zeta_2}\zeta\sigma_\theta^{(2,s)}d\zeta, \quad M^{*(s)} = \int_{\zeta_1}^{0}\zeta\sigma_\theta^{*(1,s)}d\zeta + \int_{0}^{\zeta_2}\zeta\sigma_\theta^{*(2,s)}d\zeta \qquad (1.15)$$

$$Q^{(s)} = \int_{\zeta_1}^{0}\sigma_{r\theta}^{(1,s)}d\zeta + \int_{0}^{\zeta_2}\sigma_{r\theta}^{(2,s)}d\zeta, \quad Q^{*(s)} = \int_{\zeta_1}^{0}\sigma_{r\theta}^{*(1,s)}d\zeta + \int_{0}^{\zeta_2}\sigma_{r\theta}^{*(2,s)}d\zeta$$

получим уравнения

$$\frac{dQ^{(s)}}{d\varphi} - N^{(s)} = -\left(Z^{+(s)} + Z^{-(s)}\right) - \left(\zeta_2 Z^{+(s-2)} + \zeta_1 Z^{-(s-2)}\right)$$

$$\frac{dN^{(s)}}{d\varphi} + Q^{(s-2)} = -\left(Y^{+(s)} + Y^{-(s)}\right) - \left(\zeta_2 Y^{+(s-2)} + \zeta_1 Y^{-(s-2)}\right) \qquad (1.16)$$

$$\frac{dM^{(s)}}{d\varphi} - Q^{(s)} = -\left(\zeta_2 Y^{+(s)} - \zeta_1 Y^{-(s)}\right) - \left(\zeta_2^2 Y^{+(s-2)} - \zeta_1^2 Y^{-(s-2)}\right)$$

и соотношения

$$N^{(s)} = K\frac{d^2w^{(s)}}{d\varphi^2} + C\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(s)}}{d\varphi}\right) + N^{*(s)}$$

$$Q^{(s)} = -D\frac{d^3w^{(s)}}{d\varphi^3} - K\left(\frac{dw^{(s)}}{d\varphi} + \frac{d^2v^{(s)}}{d\varphi^2}\right) + \zeta_2 Y^{+(s)} + \zeta_1 Y^{-(s)} + \qquad (1.17)$$

$$- \zeta_1\sigma_{r\theta}^{*(1,s)}(\zeta_1) - \zeta_2\sigma_{r\theta}^{*(2,s)}(\zeta_2) + Q^{*(s)}$$

$$M^{(s)} = -D\frac{d^2w^{(s)}}{d\varphi^2} - K\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(s)}}{d\varphi}\right) + M^{*(s)}$$

которые, за исключением второго уравнения (1.16), совпадают с уравнениями Кирхгофа-Клебша для двухслойной кривой балки с той лишь разницей, что во втором уравнении в нулевом приближении отсутствует слагаемое Q, которое присутствует в классических уравнениях [9]. Этот член в ходе асимптотического интегрирования уравнений теории упругости появляется, начиная с приближения $s=2$.

Если хотим уточнить классические уравнения, то необходимо учитывать все члены порядка $O(\varepsilon^2)$. Тогда можно рекомендовать уравнения (1.16) и соотношения (1.17), оставляя все члены, имеющие порядок $O(\varepsilon^2)$ (в (1.17) они содержатся в выражениях $N^{*(s)}, Q^{*(s)}, M^{*(s)}$ в неявном виде).

2. Рассмотрим неполный контакт. Из условий (1.3), с учетом (1.8), вытекает

$$
\begin{aligned}
&w^{(1,s)} = w^{(2,s)} = w^{(s)}, \qquad \tau_{r\theta}^{(1,s)} = \tau_{r\theta}^{(2,s)} \\
&\tau_{r\theta}^{(1,s)} = \tau_{r\theta}^{(2,s)} = f^{(s)}(\varphi), \quad f^{(0)}(\varphi) = f\left(\theta/\varepsilon\right), \;\; f^{(s)}(\varphi) = 0 \;\; s>0
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Удовлетворив условиям (1.1), получим следующие дифференциальные уравнения для определения перемещений

$$
\begin{aligned}
&C_k\left(\frac{dw^{(s)}}{d\varphi} + \frac{d^2 v^{(k,s)}}{d\varphi^2}\right) + K_k\frac{d^3 w^{(s)}}{d\varphi^3} = f^{(s)}(\varphi) + p_k^{(s)} \\
&D\frac{d^4 w^{(s)}}{d\varphi^4} + K_2\left(2\frac{d^2 w^{(s)}}{d\varphi^2} + \frac{d^3 v^{(2,s)}}{d\varphi^3}\right) - K_1\left(2\frac{d^2 w^{(s)}}{d\varphi^2} + \frac{d^3 v^{(1,s)}}{d\varphi^3}\right) + \\
&\qquad + C_1\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(2,s)}}{d\varphi}\right) - C_2\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(1,s)}}{d\varphi}\right) = q^{(s)}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

где жесткости C_k, K_k и D определяются по формулам (1.12), а обобщенные нагрузки $p_k^{(s)}$ и $q^{(s)}$ – следующим образом:

$$
p_1^{(s)} = -Y^{-(s)} + \sigma_{r\theta}^{*(1,s)}(\zeta_1), \qquad p_2^{(s)} = Y^{+(s)} + \sigma_{r\theta}^{*(2,s)}(\zeta_2) \tag{2.3}
$$

$$
\begin{aligned}
q^{(s)} = Z^{+(s)} + Z^{-(s)} + \zeta_2\frac{dY^{+(s)}}{d\varphi} + \zeta_1\frac{dY^{-(s)}}{d\varphi} - \sigma_r^{*(2,s)}(\zeta_2) + \sigma_r^{*(1,s)}(\zeta_1) - \\
-\zeta_2\frac{d\sigma_{r\theta}^{*(2,s)}(\zeta_2)}{d\varphi} + \zeta_1\frac{d\sigma_{r\theta}^{*(1,s)}(\zeta_1)}{d\varphi}
\end{aligned}
$$

Из граничных условий (1.1) определяем также неизвестную функцию $\tau_{r\theta}^{(k,s)}(\varphi)$

$$\tau_{r\theta}^{(2,s)} = Z^{+(s)} + \zeta_2 \frac{dY^{+(s)}}{d\varphi} - \sigma_r^{*(2,s)}(\zeta_2) - \frac{d\sigma_{r\theta}^{*(2,s)}(\zeta_2)}{d\varphi} - D\frac{d^4 w^{(s)}}{d\varphi^4} -$$
$$- K_2\left(2\frac{d^2 w^{(s)}}{d\varphi^2} + \frac{d^3 v^{(2,s)}}{d\varphi^3}\right) - C_2\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(2,s)}}{d\varphi}\right) \qquad (2.4)$$

Если в уравнениях (1.7) и соотношениях (1.8) перейти к усилиям и моментам, при этом используя для $Q^{(s)}, M^{(s)}, Q^{*(s)}, M^{*(s)}$ формулы (1.15), а $N^{(k,s)}$ и $N^{*(k,s)}$ определяя по формулам

$$N^{(1,s)} = \int_{-1}^{0}\sigma_\theta^{(1,s)}d\zeta,\; N^{(2,s)} = \int_{0}^{\zeta_2}\sigma_\theta^{(2,s)}d\zeta,\; N^{*(1,s)} = \int_{\zeta_1}^{0}\sigma_\theta^{*(1,s)}d\zeta,\; N^{*(2,s)} = \int_{0}^{\zeta_2}\sigma_\theta^{*(2,s)}d\zeta \qquad (2.5)$$

то получим следующие уравнения:

$$\frac{dN^{(k,s)}}{d\varphi} + Q^{(k,s-2)} = f^{(s)} - \zeta_k Y^{\pm(s)} + \zeta_k Y^{\pm(s-2)} \qquad (k = 1,2)$$
$$\frac{dQ^{(s)}}{d\varphi} - \left(N^{(1,s)} + N^{(2,s)}\right) = -\left(Z^{+(s)} + Z^{-(s)}\right) - \left(\zeta_2 Z^{+(s-2)} + \zeta_1 Z^{-(s-2)}\right) \qquad (2.6)$$
$$\frac{dM^{(s)}}{d\varphi} - Q^{(s)} = -\left(\zeta_2 Y^{+(s)} - \zeta_1 Y^{-(s)}\right) - \left(\zeta_2^2 Y^{+(s-2)} - \zeta_1^2 Y^{-(s-2)}\right)$$

где $Q^{(1,s)} = \int_{\zeta_1}^{0}\sigma_{r\theta}^{(1,s)}d\zeta, \quad Q^{(2,s)} = \int_{0}^{\zeta_2}\sigma_{r\theta}^{(2,s)}d\zeta$,

а также соотношения

$$N^{(k,s)} = K_2\frac{d^2 w^{(s)}}{d\varphi^2} + C_k\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(k,s)}}{d\varphi}\right) + N^{*(k,s)} \qquad (k = 1,2)$$
$$Q^{(s)} = 2f^{(s)} + \frac{1}{2}D\frac{d^3 w^{(s)}}{d\varphi^3} + K_2\left(\frac{dw^{(s)}}{d\varphi} + \frac{d^2 v^{(2,s)}}{d\varphi^2}\right) - K_1\left(\frac{dw^{(s)}}{d\varphi} + \frac{d^2 v^{(1,s)}}{d\varphi^2}\right) + Q^{*(s)}$$
$$M^{(s)} = -D\frac{d^2 w^{(s)}}{d\varphi^2} - K_2\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(2,s)}}{d\varphi}\right) + K_1\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(1,s)}}{d\varphi}\right) + M^{*(s)} \qquad (2.7)$$

Заметим, что вместо трех уравнений (1.16) и трех соотношении (1.17) в задаче двухслойной криволинейной балки при полном контакте между слоями, при неполном контакте получили четыре уравнения (2.6) и столько же соотношении (2.7).

Ограничившись только исходным (нулевым) приближением в уравнениях (2.2) или (2.6) и перейдя к первоначальным величинам и координатам, получим уравнения, которые можно рекомендовать в качестве прикладных уравнений для двухслойных криволинейных балок при неполном контакте между слоями.

3. В заключение, в качестве иллюстрации, рассмотрим задачу чистого

изгиба кривых брусьев с постоянным сечением в виде узкого прямоугольника и кривой осью. Пусть брус изгибается в плоскости кривизны моментами M, приложенными на торцах [8].

Учитывая что через R_1 и R_2 обозначены внутренний и внешний радиусы поверхности бруса, и приняв ширину прямолинейного поперечного сечения равной единице, получим следующие граничные условия:

$$\sigma_r = \sigma_{r0} = 0 \quad \text{при } r = R_1, R_2$$

$$\sigma_{r\theta} = 0, \int_{R_1}^{R_2} \sigma_\theta dr = 0, \int_{R_1}^{R_2} \sigma_\theta r dr = -M \quad \text{при } \theta = 0, \theta_0 \tag{3.1}$$

Сначала рассмотрим чистый изгиб однослойного кривого бруса с шириной $2h = R_2 - R_1$ и радиусом срединной оси $R_0 = (R_2 - R_1)/2$. Пользуясь формулами (1.8) и уравнениями (1.11)-(1.13), заранее полагая $a_k^{(1)} = a_k^{(2)}$, $h_1 = h_2 = h$ и ограничившись первыми двумя отличными от нуля приближениями, получим

$$\sigma_0 = -\frac{6M}{(R_2 - R_1)^2}\zeta + \frac{2M}{R_2^2 - R_1^2}(3\zeta^2 - 1), \qquad \sigma_{r\theta} = 0$$

$$\sigma_r = -\frac{3M}{R_2^2 - R_1^2}(\zeta^2 - 1) + \frac{5M}{(R_2 + R_1)^2}\zeta(\zeta^2 - 1) \tag{3.2}$$

Если ширина бруса мала по сравнению с радиусом срединной оси стержня, то обычно напряженное состояние принимается таким же, как и в прямоугольном брусе (линейное распределение нормального напряжения σ_θ). Если же ширина не мала, то обычно полагают, что при изгибе поперечные сечения бруса остаются плоскими. Тогда распределение нормального напряжения σ_θ по любому поперечному сечению следует гиперболическому закону [8].

Представим наименьшее (при $r = R_1$) и наибольшее (при $r = R_2$) значения напряжения σ_θ в виде

$$\sigma_\theta = \frac{mM}{R_1^2} \tag{3.3}$$

В табл. 1 приведены наибольшее и наименьшее значения множителя m, вычисленные по двум элементарным методам, по асимптотическому методу и по точной формуле [8]. Из таблицы следует, что уже первых два приближения асимптотического решения дают достаточно точные результаты. Результаты же нулевого приближения точно совпадают с результатами, когда принимается закон линейного распределения нормального напряжения σ_θ.

Рассмотрим ту же задачу для двухслойного бруса. Граничные условия задачи принимаются те же, что и для однослойного бруса, то есть условия (3.1). Ограничившись только нулевым приближением, приведем значения напряжений

Таблица 1

$\frac{R_2}{R_1}$	Линейное распределение напряжения (нулевое приближение асимптотического решения)	Гипотеза плоских сечений (гиперболическое распределение напряжения)	Асимптотическое решение (два приближения)	Точное решение
1.3	±66.67	72.98, − 61.27	72.76, − 60.87	73.05, − 61.35
2	±6.00	7.725, − 4.863	7.33, − 4.67	7.755, − 4.917
3	±1.50	2.285, − 1.095	2.00, − 1.00	2.292, − 1.130

а) полный контакт

$$\sigma_{\theta}^{(k)} = -\frac{4M}{(R_2 - R_1)^2 a_{22}^{(k)} D_{12}}\left(\zeta + \frac{K}{C}\right), \qquad \sigma_{r\theta}^{(k)} = 0$$

$$\sigma_r^{(k)} = -\frac{2M}{(R_2 - R_1)^2 a_{22}^{(k)} D_{12}}\left[\left(\zeta^2 - \zeta_k^2\right) + \frac{2K}{C}(\zeta - \zeta_k)\right] \tag{3.4}$$

$$D_{12} = \frac{1}{h^3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{R_2^3}{a_{22}^{(2)}} - \frac{R_1^3}{a_{22}^{(1)}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{R_2^2}{a_{22}^{(2)}} - \frac{R_1^2}{a_{22}^{(1)}}\right)\left(\frac{R_2 - R_1}{2} - \frac{Kh}{C}\right)\right]$$

б) неполный контакт

Предположим, что трение между слоями отсутствует $(f(x) = 0)$. Тогда

$$\sigma_{\theta}^{(k)} = -\frac{16M}{(R_2 - R_1)^2 a_{22}^{(k)} D}\left(\zeta - \frac{1}{2}\zeta_k\right), \qquad \sigma_{r\theta}^{(k)} = 0$$

$$\sigma_r^{(k)} = -\frac{8M}{(R_2^2 - R_1^2) a_{22}^{(k)} D}\zeta(\zeta - \zeta_k) \tag{3.5}$$

Если слои имеют одинаковые физические и геометрические характеристики, то есть $h_1 = h_2$, $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)} = a_{ij}$, то $D = \frac{2}{3}\frac{1}{a_{22}}$, $\zeta_2 = 1, \zeta_1 = -1$, а максимальное значение $\sigma_{\theta}^{(k)}$ будет достигаться при $\zeta = \zeta_k$ и $\zeta = 0$ и будет равняться

$$\left|\sigma_{\theta}^{(k)}\right| = \frac{12M}{(R_2 - R_1)^2} \tag{3.6}$$

что в два раза больше значения нормального напряжения σ_{θ} для однослойной полосы из такого же материала с общей толщиной $2h$. Таким образом, асимптотическим методом подтверждается известный факт, что однослойная полоса (балка) способна в первом приближении выдержать нагрузку в два раза большую, чем несвязанная двухслойная (неполный контакт, идеальное скольжение) [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. – ПММ, 1962, т.26, вып.4, с.668-686.
2. Гольденвейзер А.Л. О двумерных уравнениях обшей линейной теории тонких упругих оболочек. – В сб.: "Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды". М.: Наука, 1969. 692с.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек.- М.: Наука. Физматлит. 1997. 415с.
4. Зволинский Н.В., Шхинек К.Н. Континуальная модель слоистой упругой среды.- МТТ, №1, 1984, с.5-14.
5. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния анизотропной слоистой балки. - Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1986, т.39, №2. с.3-14.
6. Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряженно-деформированного состояния анизотропной двухслойной балки с проскальзыванием. - В сб. "Актуальные проблемы неоднородной механики", Ереван, 1991, с. 55-60.
7. Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. Исследование напряженно-деформированного состояния криволинейного стержня методом асимптотического интегрирования. - Изв. АН РА, Механика, 1991, т.44, №1, с.3-12.
8. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. - М.: Наука, 1979, 560 с.
9. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник. Том 1.- М.: Машиностроение, 1968. 831с.
10. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов.- М.: Наука, 1986. 512с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
18.02.1999

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №1, 2000 Механика

УДК 539.3

ВОЗБУЖДЕНИЕ СДВИГОВЫХ ВОЛН В АКУСТИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ ПОЛУПРОСТРАНСТВАХ ДИЭЛЕКТРИКА И ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКА

Бардзокас Д.И., Сеник Н.А.

Դ. Ի. Բարձոկաս, Ն. Ա. Սենիկ

Էլեկտրոդների զույգով ակուստիկորեն կապակցված դիէլեկտրիկի և պյեզոէլեկտրիկի կիսատարածություններում սահքի ալիքների գրգռումը

Ակուստիկորեն կապակցված առաձգական կիսատարածություններում, երբ կիսատարածություններից մեկը պատրաստված է պյեզոէլեկտրիկից, ուսումնասիրված է սահքի մակերևութային ալիքի տարածման հնարավորության հարցը, որը որում ենթադրվում է, որ սահքի ալիքը տեղայնացված է կիսատարածությունների միացման մակերևույթի շրջակայքում: Որոշակի պայմանների դեպքում, երբ կոնտակտային հարթության վրա դասավորված է տարանուն լիցքերով էլեկտրոդների զույգը, ցույց է տրված նշված տիպի ալիքների գոյությունը: Խնդրի լուծումը բերված է եռակի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը, որն իր հերթին հանգեցված է գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգի:

D.I. Bardzokas, N.A. Senik

Perturbation of Shear Waves in Acoustic Coupled Half-Spaces of a Dielectric and a Piezoelectric with a Pair of Electrodes

Для упругих акустически связанных полупространств, когда одно из полупространств является пьезоэлектриком, исследуется вопрос существования сдвиговой поверхностной волны, локализованной у контактной поверхности полупространств. При этом предполагается, что на контактной плоскости расположена пара разноименно заряженных электродов, возбуждающих колебания.

Наличие пьезоэффекта в среде может существенно изменять волновые поля, приводя к существованию новых типов волн. В случае контакта двух упругих полупространств возможно существование вертикально поляризованных волн Стоунли [1]. Аналогичная задача, когда одно из полупространств или оба являются пьезоэлектриками, исследовалась в [2]. Для упругих акустически связанных полупространств сдвиговая поверхностная волна недопустима, однако, когда одно из полупространств является пьезоэлектриком, то при определенных условиях оказывается возможным существование сдвиговой волны, локализованной у контактной поверхности полупространств. Эти волны допускают возбуждение системами встречно-штыревых электродов.

1. Пусть упругий диэлектрик с модулем сдвига μ_0, диэлектрической проницаемостью Э_0 и плотностью ρ_0 занимает полупространство $y < 0$, а полупространство $y > 0$ занято пьезоэлектриком симметрии класса $6mm$, причем ось симметрии шестого порядка кристалла, параллельная оси z, расположена в контактной плоскости и перпендикулярна к направлению распространения волны. Будем также предполагать, что на контактной

плоскости $y = 0$ расположена пара разноименно заряженных электродов, возбуждающих колебания (фиг.1).

Фиг. 1

В области упругого диэлектрика амплитуды потенциала электрического поля и смещения могут быть представлены в виде (временной фактор $\exp(i\omega t)$ опущен)

$$\varphi_0 = \int_0^\infty A_0(p)\exp(py)\sin(px)dp \tag{1.1}$$

$$w_0 = \int_0^\infty B_0(p)\exp[ys_0(p)]\sin(px)dp \tag{1.2}$$

где $\kappa_0 = \omega/V_0$, $V_0^2 = \mu_0/\rho_0$, $s_0 = \begin{cases}\left(p^2 - \kappa_0^2\right)^{1/2}, & p > \kappa_0\\ i\left(\kappa_0^2 - p^2\right)^{1/2}, & p < \kappa_0\end{cases}$

В области пьезоэлектрика потенциал и смещение определим соотношениями [3,4]

$$\varphi_1 = e_{15}w/э_{11} + \psi \tag{1.3}$$

$$\psi = \int_0^\infty \Phi_1(p)\exp(-py)\sin(px)dp \tag{1.4}$$

$$w_1 = \int_0^\infty B_1(p)\exp[-ys_1(p)]\sin(px)dp \tag{1.5}$$

Здесь $\kappa_1 = \omega/V_1$, $V_1^2 = \mu_1/\rho_1$, $\mu_1 = C_{44}(1 + k_{15}^2)$.

$s_1 = \begin{cases}\left(p^2 - \kappa_1^2\right)^{1/2}, & p > \kappa_1\\ i\left(\kappa_1^2 - p^2\right)^{1/2}, & p < \kappa_1\end{cases}$, а выбор корней s_0, s_1 согласован с условиями излучения.

Неизвестные функции $A_0(p)$, $B_0(p)$, $\Phi_1(p)$, $B_1(p)$, входящие в (1.1)-(1.5), определим так, чтобы выполнялись следующие контактные условия при $y = 0$

$$\sigma_{yz}^{(0)} = \sigma_{yz}^{(1)},\quad w_0 = w_1,\quad -\infty < x < \infty \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}&D_y^{(0)} = D_y^{(1)},\quad -a < x < a,\quad -\infty < x < -b,\quad b < x < \infty\\ &\varphi_1 - \varphi_0 = \pm V_0,\quad -b < x < -a,\quad a < x < b\end{aligned} \tag{1.7}$$

Используя закон Гука для упругого диэлектрика и уравнения состояния для пьезоэлектрика [3,4], с учетом соотношений (1.1)-(1.5) из условий (1.6) находим

$$\begin{aligned}&B_0 = B_1,\quad \Phi_1 = (\mu_0 s_0 + \mu_1 s_1)B_1/(e_{15}p)\\ &A_0 = e_{15}\left[1 - э_{11}(\mu_0 s_0 + \mu_1 s_1)/(e_{15}^2 p)\right]B_1/э_{11}\end{aligned} \tag{1.8}$$

Дальнейшее использование уравнений состояния, соотношений (1.1)-(1.5) и условий (1.7) совместно с формулами (1.8) приводит к следующей системе тройных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{F_1(p)}{F_2(p)} B_*(p)\sin(px)dp = V_*, \qquad a < x < b \\ &\int_0^\infty pB_*(p)\sin(px)dp = 0, \qquad 0 \le x < a \end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь

$$F_1(p) = k_{15}^2 p - \left(1 + k_{15}^2\right)\left(\mu_* s_0 + s_1\right), \quad F_2(p) = \text{э}\, k_{15}^2 p - \left(1 + k_{15}^2\right)\left(\mu_* s_0 + s_1\right)\left(1 + \text{э}\right)$$

$$B_*(p) = \left[1 - \left(1 + k_{15}^2\right)\left(1 + \text{э}\right)\left(\mu_* s_0 + s_1\right)/\left(\text{э}\, k_{15}^2 p\right)\right] B_1(p)$$

Так как подынтегральная функция в первом уравнении системы (1.9) может иметь полюсы, то интеграл в этом случае понимается в смысле главного значения.

2. Полюс подынтегральной функции определяется корнем уравнения

$$\delta p = \left(\mu_* \sqrt{p^2 - \beta^2 \kappa_1^2} + \sqrt{p^2 - \kappa_1^2}\right), \quad \beta = V_1 / V_{11}, \quad \delta = \frac{\text{э}\, k_{15}^2}{\left(1 + \text{э}\right)\left(1 + k_{15}^2\right)} \tag{2.1}$$

Анализ корней уравнения (2.1) показывает, что:

1) при $\mu_* = 0$ имеется единственный корень

$$p_* = \kappa_1 / \sqrt{1 - \delta^2} \tag{2.2}$$

определяющий волну Гуляева-Блюстейна для неэлектродированного полупространства [3,4].

2) В случае, когда скорость объемной волны в пьезоэлектрике больше скорости соответствующей волны в диэлектрике, то есть $\beta > 1$ и $\beta > 1/\sqrt{1-\delta^2}$, уравнение (2.1) корней не имеет. Если же $1 < \beta < 1/\sqrt{1-\delta^2}$, то корень уравнения (2.1) расположен в диапазоне

$$\beta\kappa_1 < p_1 < \min(p_*, p_2), \quad p_2 = \beta\kappa_1 / \sqrt{1 - (\delta/\mu_*)^2} \tag{2.3}$$

3) В случае, когда свойства сред удовлетворяют условиям $\beta < 1$ и $\beta/\sqrt{1-\delta^2} < 1$, уравнение (2.1) корней не имеет. Если же $\beta < 1$ и $\beta/\sqrt{1-\delta^2} > 1$, то корень уравнения удовлетворяет условиям

$$\kappa_1 < p < \min(p_*, p_2) \tag{2.4}$$

Заметим, что уравнение (2.1) является биквадратным уравнением и поэтому его прямое решение не представляет сложностей. Очевидно также, что ПАВ в рассматриваемой структуре является бездисперсионной. Влияние пьезоэффекта и диэлектрических свойств упругого диэлектрика оказывается принципиальным, поскольку пренебрежение этими параметрами приводит к потере ПАВ. Для того, чтобы полученные корни определяли экспоненциально затухающие волны при удалении от контактной плоскости, необходимо, чтобы корни уравнения (2.1) во всех рассмотренных случаях удовлетворяли условию

$$p = \max(\beta\kappa_1, \kappa_1) \tag{2.5}$$

Как видно, оценки (2.3), (2.4) удовлетворяют условию (2.5).

Отметим, что аналогичные результаты были получены ранее в работе [5].

3. Система интегральных уравнений (1.9) сводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений аналогично тому, как это сделано в [3] для подобных уравнений

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\omega_{nm} + \gamma_{nm}) = \delta_{0m}, \quad (m = 0,1,2,\ldots) \tag{3.1}$$

$$\omega_{nm} = \frac{\delta_{nm}}{n} - \frac{4(-\alpha)^{n+m}}{\pi(n+m)}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(n-m)\theta(\cos\theta)^{n+m}\,d\theta}{\left[1+\left(1-\alpha^2\cos^2\theta\right)^{1/2}\right]^{n+m}}, \quad n+m>0$$

$$\omega_{00} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln\left[1+\left(1-\alpha^2\cos^2\theta\right)^{1/2}\right]d\theta + 2\ln(2/\alpha), \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$\gamma_{nm} = \int_0^{\infty} F_0(\xi) J_n\left(\xi\frac{\bar{b}-1}{2}\right) J_m\left(\xi\frac{\bar{b}-1}{2}\right) S_n\left(\xi\frac{\bar{b}+1}{2}\right) S_m\left(\xi\frac{\bar{b}+1}{2}\right)\frac{d\xi}{\xi}, \; \xi = pa, \; \bar{b} = b/a$$

$$F_0(\xi) = \frac{k_{15}^2\left(1+k_{15}^2\right)\left(\mu.s_2^* + s_1^*\right) - k_{15}^2\left(1+k_{15}^2\right)\left(1+\mu.\right)\xi}{\left[k_{15}^2 - \left(1+k_{15}^2\right)\left(1+\mu.\right)\right]\left[\text{э}\, k_{15}^2\xi - \left(1+k_{15}^2\right)\left(1+\text{э}\right)\left(\mu.s_2^* + s_1^*\right)\right]}$$

$$\alpha = (b-a)/(b+a), \quad \lambda = \kappa_1\alpha, \quad s_1^* = \left(\xi^2 - \lambda^2\right)^{1/2}, \quad s_2^* = \left(\xi^2 - \beta^2\lambda^2\right)^{1/2}$$

Функция $S_n(\ldots)$ определена в [3].

Функция $B.(\xi)$, входящая в систему (1.9), связана с решением системы (3.1) выражением

$$\xi B.(\xi) = C\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n\left(\xi\frac{\bar{b}-1}{2}\right) S_n\left(\xi\frac{\bar{b}+1}{2}\right) \tag{3.2}$$

где $C = 2\dfrac{\text{э}_{11}\, Va}{e_{15}\,\text{э}}\,\dfrac{\text{э}_{11}\; k_{15}^2 - \left(1+k_{15}^2\right)\left(1+\text{э}\right)\left(\mu.+1\right)}{k_{15}^2 - \left(1+k_{15}^2\right)\left(\mu.+1\right)}$

После решения системы (3.1) характеристики полей в пьезоэлектрике и упругом диэлектрике могут быть определены. Заметим, что при вычислении интегралов γ_{nm} необходимо учитывать полюс в подынтегральной функции, который может существовать при установленных выше условиях.

Не останавливаясь на деталях вычислений, приведем выражение для потенциала электрического поля в диэлектрике

$$\varphi_0 = \frac{e_{15}\,\text{э}}{\text{э}_{11}\,a}\int_0^{\infty}\frac{k_{15}^2\xi - \left(1+k_{15}^2\right)\left(\mu.s_2^* + s_1^*\right)B.(\xi)\exp(\xi\bar{y})\sin(\xi\bar{x})\,d\xi}{f_0(\xi)} \tag{3.3}$$

$$\text{э}\, k_{15}^2\xi - \left(1 + k_{15}^2\right)\left(1 + \text{э}\right)\left(\mu_* s_2^* + s_1^*\right) = f_0(\xi),\quad \bar{x} = x/a,\quad \bar{y} = y/a,\quad \xi = pa$$

Учитывая вклад полюсной точки при интегрировании (3.3), для распространяющейся в положительном направлении оси X волны получим

$$\varphi_0^* = N_0 G(\xi_*) Q(\xi_*) \exp(\xi_* \bar{y}) \exp\left[i(\omega t - \xi_* \bar{x})\right],\quad y < 0 \tag{3.4}$$

Здесь введены обозначения

$$N_0 = \frac{\text{э}\, k_{15}^2 - \left(1 + k_{15}^2\right)\left(1 + \text{э}\right)\left(\mu_* + 1\right)}{k_{15}^2 - \left(1 + k_{15}^2\right)\left(\mu_* + 1\right)} V\pi,\quad Q(\xi_*) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n\left(\xi_* \frac{\bar{b} - 1}{2}\right) S_n\left(\xi_* \frac{\bar{b} + 1}{2}\right)$$

$$G(\xi_*) = \frac{k_{15}^2\xi_* - \left(1 + k_{15}^2\right)\left[\mu_* s_2^*(\xi_*) + s_1^*(\xi_*)\right]}{f_0'(\xi_*)},\quad f_0'(\xi_*) = \frac{df_0(\xi_*)}{d\xi}$$

причем ξ_* – корень уравнения $f_0(\xi) = 0$, а полюс при интегрировании обходится сверху.

Аналогично определяется сдвиговое смещение в диэлектрическом полупространстве, связанное с распространяющейся поверхностной волной

$$w_0^* = N_0 \frac{k_{15}^2\, \text{э}_{11}}{e_{15}} Q(\xi_*) \exp\left(s_2^*(\xi_*)\bar{y}\right) \exp\left[i(\omega t - \xi_* \bar{x})\right] / f'(\xi_*),\quad y < 0 \tag{3.5}$$

Проведенные вычисления для пьезоэлектрического полупространства приводят к следующим формулам:

$$\varphi_1^* = N_0 k_{15}^2 Q(\xi_*) \left[\exp\left(-s_2^*(\xi_*)\bar{y}\right) - \frac{1 + k_{15}^2}{k_{15}^2} \frac{\mu_* s_2^*(\xi_*) + s_1^*(\xi_*)}{\xi_*} \exp(-\xi_* \bar{y})\right] \times$$

$$\times \exp\left[i(\omega t - \xi_* \bar{x})\right] / f'(\xi_*),\quad y > 0 \tag{3.6}$$

$$w_1^* = N_0 \frac{k_{15}^2\, \text{э}_{11}}{e_{15}} Q(\xi_*) \exp\left(-s_1^*(\xi_*)\bar{y}\right) \exp\left[i(\omega t - \xi_* \bar{x})\right] / f_0'(\xi_*),\quad y < 0$$

Соотношения (3.5), (3.6) позволяют определить другие характеристики полей и затем подсчитать потоки энергии, переносимые в полупространствах. В направлении распространения волны проинтегрированные по переменной y суммарные потоки механической и электрической энергии определяются соответственно по формулам

$$Q_0^{(E)} = \frac{\omega\, \text{э}_0 N_0^2}{4} \left[\left|Q(\xi_*)\right| G(\xi_*) / \xi_*\right]^2$$

$$Q_0^{(M)} = \frac{\omega N_0^2 k_{15}^4\, \text{э}_{11}^2}{4 e_{15}^2} \left[\left|Q(\xi_*)\right| / f_0'(\xi_*)\right]^2 \frac{\mu_0 \xi_*}{a s_1^*(\xi_*)} \tag{3.7}$$

$$Q_1^{(E)} = \frac{\omega\, \text{э}_{11} \xi_*}{2} \left[\frac{N_0 k_{15}^2 \left|Q(\xi_*)\right|}{f_0'(\xi_*)}\right]^2 \left\{\frac{1}{2 s_1^*(\xi_*)} + \frac{1}{2\xi_*}\left[\frac{1 + k_{15}^2}{k_{15}^2}\left(\mu_* s_2^*(\xi_*) + s_1^*(\xi_*)\right)\right]^2 - \right.$$

$$\left. - 2\frac{1 + k_{15}^2}{k_{15}^2} \frac{\mu_* s_2^*(\xi_*) + s_1^*(\xi_*)}{\xi_* + s_1^*(\xi_*)}\right\} \tag{3.8}$$

$$Q_1^{(e)} = \frac{\omega \xi_* k_{15}^2 \left(1 + k_{15}^2\right) N_0^2\, э_{11} \left|Q(\xi_*)\right|^2}{2a\left[f_0(\xi_*)\right]^2} \left|\frac{\mu_* s_2^*(\xi_*) + s_1^*(\xi_*)}{\left(\xi_* + s_1^*(\xi_*)\right)\xi_*} - \frac{1}{2s_1^*(\xi_*)}\right|$$

причем формулы (3.8) относятся к упругому диэлектрику, а (3.7) — к пьезоэлектрику.

Из полученных формул следует, что отношения вида $Q_k^{(f)} / Q_k^{(e)}$ не зависят от величины $\left|Q(\xi_*)\right|$ и поэтому доля каждой из энергий в общем потоке энергии может быть определена без решения системы уравнений (3.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Stoneley R. The elastic waves at the interface of separation of two solids. — Proc. Roy. Soc. Lond., 1924, 106, A, p.416-429.
2. Гетман И.П., Лисицкий О.Н. Исследование поверхностных волн Стоунли на границе раздела электроупругих сред. — ПМ, 1987, т.23, №9, с.67-72.
3. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. — М.: Наука, 1988. 470 с.
4. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. — Новосибирск. Наука, 1982. 240 с.
5. Филиппов В.В., Любимов В.Н. О поверхностных поперечных упругих волнах на границе диэлектрика с пьезоэлектриком. — Изв. АН БССР, сер.физ.-мат. н., 1982, №3, с.69-73.

Афинский национальный технический университет, Греция

Поступила в редакцию 20.04.1999

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **53, №1, 2000** Механика

УДК 517.9

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ $u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q$

Асанян Д. Д., Оганесян А. О.

Դ. Ջ. Հասանյան, Ա. Օ. Հովանիսյան

$u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q$ հավասարման խմբային անալիզը

Աշխատանքում վերը նշված հավասարման համար կատարվում է խմբային անալիզ: Խմբային անալիզը թույլ է տալիս նշված հավասարման ինվարիանտ լուծումների որոշումը հանգեցնել սովորական ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը:

D.J. Hasanyan, A.O. Hovanesyan

Group properties of $u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q$

В работе приводится групповой анализ для вышеприведенного уравнения. Групповой анализ позволяет свести нахождение инвариантных решений рассматриваемого уравнения с частными производными к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Введение

Начиная с 60-ых годов, резко возросло число работ, посвященных групповым классификациям дифференциальных уравнений. В частности, работы [1-5] посвящены групповым классификациям, построению инвариантных решений различного рода дифференциальных уравнений, встречающихся в механике сплошных сред.

Решение многих физических проблем сводится к исследованию квазилинейного дифференциального уравнения с частными производными вида

$$u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q \tag{1}$$

где $m, n, p, q \in R$ — произвольные постоянные, а функция $g(u) \in C^2(R)$. На основе группового анализа получены те преобразования координат, относительно которых уравнение (1) остается инвариантным.

2. Алгебра Ли для уравнения (1)

Инфинитезимальный оператор группы симметрии уравнения (1) ищем в виде [1,2]

$$X = \xi^1(x, y, u)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(x, y, u)\frac{\partial}{\partial y} + \eta(x, y, u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{2}$$

Тогда операторы $\underset{1}{X}$ и $\underset{2}{X}$ соответственно первого и второго продолжения группы имеют вид:

$$\underset{1}{X} = X + \varsigma_1 \frac{\partial}{\partial u_x} + \varsigma_2 \frac{\partial}{\partial u_y} \tag{3}$$

$$\underset{2}{X} = \underset{1}{X} + \varsigma_{11} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varsigma_{22} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \varsigma_{12} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} \tag{4}$$

где $\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_{11}, \varsigma_{12}, \varsigma_{22}$ выражаются через $\xi^1, \xi^2, \eta, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ по формулам [1]:

$$\varsigma_k = D_k(\eta) - u_i D_k(\xi^i), \quad \varsigma_{ij} = \widetilde{D}_j(\varsigma_i) - u_{ik} \widetilde{D}_j(\xi^k), \quad D_i = \partial_i + u_i \partial_u$$

$$\widetilde{D}_i = D_i + u_{ik} \partial_{u_k}, \quad \partial_i = \partial / \partial x_i, \quad \partial_u = \partial / \partial u, \quad \partial_{u_k} = \partial / \partial u_k, \quad u_i = \partial / \partial x_i$$

$$x_1 = x, \ x_2 = y \quad (i = 1,2)$$

Функции ξ^1, ξ^2 и η находятся из следующего определяющего уравнения [1,2]:

$$\underset{2}{X} F \Big|_{F=0} = 0 \tag{5}$$

где $F = u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} - g(u) u_x^p u_y^q$. Уравнение (5) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&- f_{u_x} \{\eta_x + u_x \eta_u - u_x \xi^1_x - (u_x)^2 \xi^1_u - u_y \xi^2_x - u_x u_y \xi^2_u\} - \\
&- f_{u_y} \{\eta_y + u_y \eta_u - u_x \xi^1_y - u_x u_y \xi^1_u - u_y \xi^2_y - (u_y)^2 \xi^2_u\} - \\
&- n u_x^{n-1} u_y^m u_{yy} \{\eta_x + u_x \eta_u - u_x \xi^1_x - (u_x)^2 \xi^1_u - u_y \xi^2_x - u_x u_y \xi^2_u\} - \\
&- m u_x^n u_y^{m-1} u_{yy} \{\eta_y + u_y \eta_u - u_x \xi^1_y - (u_y)^2 \xi^2_u - u_y \xi^2_y - u_x u_y \xi^1_u\} + \\
&+ \eta_{xx} + 2u_x \eta_{xu} + \eta_u u_x^n u_y^m u_{yy} + (u_x)^2 \eta_{uu} - 2\xi^1_x [u_x^n u_y^m u_{yy} + f] - \\
&- u_x \xi^1_{xx} - 2(u_x)^2 \xi^1_{xu} - 3u_x \xi^1_u [u_x^n u_y^m u_{yy} + f] - (u_x)^3 \xi^1_{uu} - 2u_{xy} \xi^2_x - \\
&- u_y \xi^2_{xx} - 2u_x u_y \xi^2_{xu} - u_y \xi^2_u [u_x^n u_y^m u_{yy} + f] - u_y (u_x)^2 \xi^2_{uu} - 2u_x u_{xy} \xi^2_u - \\
&- u_x^n u_y^m \{\eta_{yy} + 2u_y \eta_{yu} + u_{yy} \eta_u + (u_y)^2 \eta_{uu} - 2u_{xy} \xi^1_y - u_x \xi^1_{yy} - 2u_x u_y \xi^1_{yu} - \\
&- u_x u_{yy} \xi^1_u - 2u_y u_{xy} \xi^1_u - u_x (u_y)^2 \xi^1_{uu} - 2u_{yy} \xi^2_y - u_y \xi^2_{yy} - 2(u_y)^2 \xi^2_{yu} - \\
&- 3u_y u_{yy} \xi^2_u - (u_y)^3 \xi^2_{uu}\} - \eta f_u + f \eta_u = 0, \quad f(u, u_x, u_y) = g(u) u_x^p u_y^q
\end{aligned} \tag{6}$$

Для произвольных целых чисел $m, n, p, q \in R$ и функции $g(u)$ из уравнении (6) получаем $\xi^1 = c_1, \xi^2 = c_2, \eta = 0$ и базис алгебры Ли имеет вид

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} \tag{7}$$

В дальнейшем рассматриваются следующие основные случаи показателей m и n

I) $n=0,\ m=0$; II) $n=1,\ m=0$; III) $n=1,\ m=-1$; IV) $n=0,\ m=-1$; V) $n\neq 0,1,2,\ \forall m$; VI) $m=0,\ \forall n$; VII) $n=0,\forall m$; VIII) $n=2,\ m=-2$.

В каждом из указанных случаев из определяющего уравнения соответственно получаем

$$\text{I) } \xi^1_y=\xi^2_x,\ \xi^2_y=\xi^1_x,\ \xi^1_u=\xi^2_u=0 \tag{8}$$

$$\text{II) } -\eta_u+2\xi^2_y-\xi^1_x=0,\ \xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=0,\ \eta_x=0 \tag{9}$$

$$\text{III) } \xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=\eta_x=\eta_y=0,\ \xi^2_y=\xi^1_x \tag{10}$$

$$\text{IV) } \xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=\eta_y=0,\ \eta_u+\xi^2_y-2\xi^1_x \tag{11}$$

$$\text{V) } \xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=\eta_x=\eta_y=0,\ (m+2)\xi^2_y+(n-2)\xi^1_x-(n+m)\eta_u=0 \tag{12}$$

$$\text{VI) } \xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=0,\ -2\xi^2_y-(n-2)\xi^1_x+m\eta_u=0 \tag{13}$$

$$\text{VII) } \xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=0,\ -(m+2)\xi^2_y+2\xi^1_x+m\eta_u=0 \tag{14}$$

$$\text{VIII) } \xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=0 \tag{15}$$

При этом определяющее уравнение (6) упрощается и принимает вид

$$\begin{gathered}\eta_{xx}-2u_x\eta_{xu}+u_x^2\eta_{uu}-u_x\xi^1_{xx}-u_y\xi^2_{xx}-u_x^n u_y^m\eta_{yy}-2u_x^n u_y^{m+1}\eta_{yu}-u_x^n u_y^{m+2}\eta_{uu}+\\ +u_x^{n+1}u_y^m\xi^1_{yy}+u_x^n u_y^{m+1}\xi^2_{yy}-\eta f_u-f_{u_x}\eta_x-f_{u_x}u_x(\eta_u-\xi^1_x)+f_{u_x}u_y\xi^2_x-f_{u_y}\eta_y\\ -f_{u_y}u_y(\eta_u-\xi^2_y)+f(\eta_u-2\xi^1_x)=0\end{gathered} \tag{16}$$

I) Исследование уравнения (16) приводит к следующим подслучаям:

a) $p=0,\ q=0$.

a_1) $g(u)$ – произвольная функция. Уравнения (8)-(16) удовлетворяются, если

$$\eta=0,\ \xi^1=c_1y+c_2,\ \xi^2=c_1x+c_3 \tag{17}$$

Полагая поочередно одну из постоянных $c_i\ (i=1,2,3)$ равной 1, а остальные, приравнивая к нулю, получим следующий базис алгебры Ли:

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x};\ \ X_2=\frac{\partial}{\partial y};\ \ X_3=y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y} \tag{18}$$

a_2) $g(u)=Ae^{\lambda u}$ $(A=\mathrm{const},\ \lambda=\mathrm{const})$, тогда из (8)-(16) имеем

$$\eta=-\frac{2c_1}{\lambda};\ \ \xi^1=c_1x+c_2y+c_3;\ \xi^2=c_2x+c_1y+c_4 \tag{19}$$

Базис алгебры Ли в этом случае состоит из операторов $X_i\ (i=1,2,3)$ и еще

$$X_4(\lambda)=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}-\frac{2}{\lambda}\frac{\partial}{\partial u} \tag{20}$$

a_3) $g(u)=A(u+\alpha)^{\beta}$, $(A,\alpha,\beta=\mathrm{const},\beta\neq 1)$. Тогда из (6)-(8) получим

$$\eta = \frac{2c_1}{1-\beta}(u+\alpha),\ \xi^1 = c_1x + c_2y + c_3,\ \xi^2 = c_2x + c_1y + c_4 \tag{21}$$

Базисом алгебры Ли будут операторы X_i $(i = 1,2,3)$ и

$$X_5(\lambda) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{2}{1-\beta}(u+\alpha)\frac{\partial}{\partial u} \tag{22}$$

При $\beta = 1$ уравнение (1) линейно и в этом случае

$$\xi^1 = c_2y + c_3,\ \xi^2 = c_2x + c_4,\ \eta = c_1u + a(x,y) \tag{23}$$

где функция $a(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a = 0 \tag{24}$$

Базис алгебры Ли в этом случае бесконечен.

$a_4)$ $g(u) = Ae^{-\lambda u}$ $(A,\ \lambda = \mathrm{const})$. Тогда получим случай $a_2)$. Легко убедиться, что (6)-(8) можно удовлетворить, выбирая также

$$\xi^1 = \varphi_1(x-y) + \varphi_2(x+y),\ \xi^2 = -\varphi_1(x-y) + \varphi_2(x+y) + c_1$$

$$\eta = \frac{1}{\lambda}[\varphi_1'(x-y) + \varphi_2(x+y)] \tag{25}$$

$b)$ p и q – произвольные постоянные $(p \neq 2, q \neq 2)$. Определяющие уравнения (8)-(16) можно удовлетворить при следующих подслучаях:

$b_1)$ если $g(u)$ – произвольная функция, то

$\eta = 0, \xi^1 = c_1, \xi^2 = c_2$

Базисом алгебры Ли в этом случае будут операторы X_1 и X_2.

$b_2)$ если $g(u) = A(u+\alpha)^\beta$, то

$$\xi^1 = c_1x + c_2,\ \xi^2 = c_1y + c_3,\ \eta = c_4u + c_5,\ c_5 = \alpha c_4,\ c_4 = \frac{p-2+q}{\beta+p+q-1}c_1 \tag{26}$$

Базис алгебры Ли в этом случае образуют операторы X_1 и X_2, а также оператор

$$X_6(\alpha,\beta,p,q) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (u+\alpha)\frac{p-2+q}{p+q-1+\beta}\frac{\partial}{\partial u} \tag{27}$$

$b_3)$ при $g(u) = Ae^{\lambda u}$ из (8)-(16) получим

$$\xi^1 = c_1x + c_2,\ \xi^2 = c_1y + c_3, \eta = c_5,\ c_5 = \frac{p-2+q}{\lambda}c_1 \tag{28}$$

Базисом алгебры Ли будут операторы X_1 и X_2 и

$$X_7(\lambda,p,q) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{p-2+q}{\lambda}\frac{\partial}{\partial u} \tag{29}$$

Заметим, что

$$X_7(\lambda,0,0) = X_4(\lambda);\ X_6(\alpha,\beta,0,0) = X_5(\alpha,\beta) \tag{30}$$

$c)$ при $p=2, q=0, g(u)=(u+\alpha)^{-1}$ легко убедиться, что уравнения (8)-(16) имеют решения

$$\xi^1=c_1x+c_2,\quad \xi^2=c_1y+c_3,\quad \eta=(u+\alpha)(c_4x+c_5) \tag{31}$$

Базисом алгебры Ли будут операторы X_i $(i=1,2,3)$ и

$$X_8=(u+\alpha)\frac{\partial}{\partial u},\ X_9=x(u+\alpha)\frac{\partial}{\partial u} \tag{32}$$

$d)$ Пусть теперь $p=0,\ q=2$. Этот случай получается из предыдущего, если поменять x на y и $g(u)$ на $-g(u)$.

II) Пусть $n=1;\ m=0$. При этом исследовании уравнений (9), (16) выделяются следующие подслучаи

$a)$ $p=0,\ q=0.$

$a_1)$ При $g(u)=A=\mathrm{const}$ получим

$$\xi^1=c_1x+c_2,\ \xi^2=c_3y+c_4,\ \eta=c_5u+c_6y+c_7,\ c_5=2c_1,\ c_3=3c_1/2 \tag{33}$$

Базисом алгебры Ли будут операторы X_1, X_2 и

$$X_{10}=\frac{\partial}{\partial u},\ X_{11}=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{3}{2}y\frac{\partial}{\partial y}+2u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{12}=y\frac{\partial}{\partial u} \tag{34}$$

$a_2)$ При $g(u)=Ae^{\lambda u}$: $A,\lambda=\mathrm{const}$ получается

$$\xi^1=c_1x+c_2,\ \xi^2=c_1y+c_4,\ \eta=c_5,\ c_5=-2c_1/\lambda. \tag{35}$$

и базис алгебры Ли составляют операторы X_1, X_2 и

$$X_{13}=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{2}{\lambda}\frac{\partial}{\partial u},\quad X_{14}=y\frac{\partial}{\partial y} \tag{36}$$

$a_3)$ При $g(u)=A(u-\alpha)^{\beta}$: $A,\alpha,\beta=\mathrm{const}$

$$\xi^1=c_1x+c_2,\ \xi^2=c_3y+c_4,\ \eta=c_5u+c_6,\ c_5=2c_1/(1-\beta),\ c_6=\alpha c_5 \tag{37}$$

и базисными операторами алгебры Ли будут X_1, X_2, X_{11}, X_{14} и

$$X_{15}=x\frac{\partial}{\partial x}+(u+\alpha)\frac{2}{1-\beta}\frac{\partial}{\partial u} \tag{38}$$

$b)$ $p=1,\ q=1$

$b_1)$ $g(u)=\lambda=\mathrm{const}$. Тогда

$$\xi^1=c_1x+c_2,\ \xi^2=c_3,\ \eta=-c_1u+c_4e^{\lambda x}+c_5 \tag{39}$$

Базис алгебры Ли состоит из операторов X_1, X_2, X_{10} и

$$X_{16}=x\frac{\partial}{\partial x}-u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_{17}(\lambda)=e^{\lambda x}\frac{\partial}{\partial u} \tag{40}$$

$b_2)$ $g(u)=Ae^{\lambda u}$: $A,\lambda=\mathrm{const}$. Тогда

$$\xi^1=c_1x+c_2,\ \xi^2=\frac{c_1}{2}y+c_3,\ \eta=c_4,\ c_4=-c_1/2\lambda \tag{41}$$

и к операторам X_1, X_2 добавляется

$$X_{17} = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial}{\partial u} \tag{42}$$

$b_3)\ g(u) = A(u+\alpha)^{\beta}$. Тогда

$$\begin{aligned} &\xi^1 = c_1 x + c_2,\ \ \xi^2 = c_3 y + c_4,\ \ \eta = c_5 u + c_6 \\ &c_5 = -c_1/(1+2\beta),\ \ c_6 = \alpha c_5,\ \ c_3 = \beta c_1/(1+2\beta) \end{aligned} \tag{43}$$

Базисом алгебры Ли являются операторы X_1, X_2 и

$$X_{18} = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta}{1+2\beta}y\frac{\partial}{\partial u} - (u+\alpha)\frac{1}{1+2\beta}\frac{\partial}{\partial u} \tag{44}$$

$c)\ p = 1,\ \ q = 0$.

$c_1)\ g(u) = \lambda = \mathrm{const}$, тогда

$$\xi^1 = c_1 x + c_2;\ \ \xi^2 = \frac{1}{2}(c_1 + c_5)y + c_3;\ \ \eta = c_5 u + c_4 y + c_6 + \frac{c_1}{2}\lambda y^2 \tag{45}$$

Базисом алгебры Ли являются операторы X_1, X_2, X_{10} и

$$X_{19} = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y};\ \ X_{20} = \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\lambda y^2}{2}\frac{\partial}{\partial u};\ \ X_{21} = y\frac{\partial}{\partial u} \tag{46}$$

$c_2)\ g(u) = \lambda^2 u$. В этом случае

$$\xi^1 = c_1 x + c_2;\ \ \xi^2 = c_3;\ \ \eta = -c_1 u + c_4 e^{\lambda y} + c_5 e^{-\lambda y} \tag{47}$$

и к операторам X_1, X_2 добавляются

$$X_{22} = x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u};\ \ X_{23} = e^{\lambda y}\frac{\partial}{\partial u};\ \ X_{24} = e^{-\lambda y}\frac{\partial}{\partial u} \tag{48}$$

$d)\ p = 1,\ \ q = 2$.

$d_1)\ g(u) = -\frac{3}{4}u^{-1}$, тогда

$$\xi^1 = c_1 x + c_2;\ \ \xi^2 = \frac{1}{2}(c_1 + c_3)y + \frac{c_5}{4}y^2 + c_4;\ \ \eta = c_3 u + c_5 uy \tag{49}$$

В этом случае базис алгебры Ли состоит из операторов X_1, X_2, X_{19}

и $$X_{24} = u\frac{\partial}{\partial u} + \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y};\ \ X_{25} = \frac{y^2}{4}\frac{\partial}{\partial y} + uy\frac{\partial}{\partial u} \tag{50}$$

V) $n \neq 0,1,2;\ m - \forall$.

В этом случае уравнения (6) и (12) принимают вид

$$\begin{cases} \xi^1_y = \xi^1_u = \xi^2_x = \xi^2_u = \xi^1_{xx} = \xi^2_{yy} = \eta_x = \eta_y = \eta_{uu} = 0 \\ (n+m)\eta_u + (2-n)\xi^1_x - (m+2)\xi^2_y = 0 \\ -\eta\cdot g'(u) + g(u)[(1-p-q)\eta_u + (p-2)\xi^1_x + q\xi^2_y] = 0 \end{cases} \tag{51}$$

При изучении системы (51) выделяются следующие подслучаи:

$a)\ g(u) = A(u+\alpha)^{\beta}$. Тогда из (51) получается

$$\xi^1 = c_1 x + c_2;\ \xi^2 = c_3 y + c_4;\ \eta = c_5 u + c_6;\ c_6 = \alpha c_5;\ c_5 = r_1 c_1;\ c_3 = r_2 c_1 \quad (52)$$

где

$$r_2(\beta) = \frac{q(n-2)-(p-2)(m+2)}{q(n+m)-(m+2)(\beta-1+p+q)}$$

$$r_1(\beta) = \frac{(n-2)(\beta-1+p+q)-(p-2)(n+m)}{q(n+m)-(m+2)(\beta-1+p+q)}; \quad n+m \neq 0$$

Базисом алгебры Ли являются операторы X_1, X_2 и

$$X_{26}(\beta) = x\frac{\partial}{\partial x} + r_2(\beta) y \frac{\partial}{\partial y} + (u+\alpha) r_1(\beta)\frac{\partial}{\partial u} \quad (53)$$

$b)\ g(u) = Ae^{\gamma u}$. Тогда из (51) имеем

$$\xi^1 = c_1 x + c_2;\ \xi^2 = c_3 y + c_4;\ \eta = c_5;\ c_6 = \alpha c_5;\ c_5 = r_1 c_1;\ c_3 = r_2 c_1 \quad (54)$$

где $c_3 = \dfrac{2-n}{n+m}c_1$; $c_5 = \dfrac{(p-2)(n+m)+q(2-n)}{\gamma(n+m)}c_1$; $\quad n+m \neq 0$.

При этом к операторам X_1, X_2 добавляется

$$X_{27}(\beta) = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2-n}{n+m} y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{(p-2)(n+m)+q(2-n)}{\gamma(n+m)}\frac{\partial}{\partial u} \quad (55)$$

$c)$ Если $g(u)$ произвольная функция и $n+m \neq 0$, то

$$\xi^1 = c_1;\ \xi^2 = c_2;\ \eta = 0 \quad (56)$$

и базис алгебры Ли состоит из операторов X_1 и X_2.

$d)$ В случае же, когда $g(u)$ произвольно, $n+m=0$, $p+q=2$ имеем

$$\xi^1 = c_1 x + c_2;\ \xi^2 = c_1 y + c_3;\ \eta = 0 \quad (57)$$

и базис алгебры Ли составляют операторы X_1, X_2 и X_3.

III) Этот случай получается из V), только в основных выражениях надо брать $n=1, m=-1$.

IV) Случай получается из случая III), только в основных выражениях надо поменять x на y, $g(u)$ на $-g(u)$ и q на $q+1$.

VI) $m=0$, $n - \forall$. Заметим, что все подслучаи, которые имели место в случае V), здесь тоже имеют место, но появляется новый вариант

$p=n$, $q=1$, и если $g(u) = \lambda = \text{const}$, то

$$\xi^1 = c_1 x + c_2;\ \xi^2 = c_3 y + c_4;\ \eta = c_5 u + c_6 e^{-\lambda x} + c_7 \quad (58)$$

где $c_3 = 0$; $c_5 = \dfrac{(n-2)}{n}c_1$.

Базисными операторами алгебры Ли являются X_1, X_2, X_{16}, X_{17} и оператор

$$X_{28}(n) = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{n+2}{n}u\frac{\partial}{\partial u} \tag{59}$$

Заметим, что $X_{28}(1) = X_{16}$. Если сделать замену $x \to y$; $n \to -m$; $g(u) \to -g(u)$; $q \to p$; $p \to q - m$, то легко убедиться, что VII] случай совпадает со случаем VI]

Отметим, что при $p = q = 0$ получается случай, расмотренный в [5]. Здесь этот случаи не приводится.

VIII) Пусть $n = 2$, $m = -2$. Все подслучаи, которые имеют место V), здесь тоже имеют место. Кроме того, можно убедиться, что определяющие уравнения (6), (15) удовлетворяются еще для произвольной функций $g(u)$ выбором

$$\xi^1 = c_1 x + c_2;\ \xi^2 = c_3 y + c_4;\ \eta(u) = c_5[g(u)]^{-\alpha} + \beta[g(u)]^{-\alpha}\int[g(s)]^{\alpha}ds \tag{60}$$

где $\alpha = \dfrac{1}{p+q-1}$; $\beta = \dfrac{c_1(p-2)+qc_3}{p+q-1}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.- М.: Наука, 1978.
2. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике.- М.: Наука, 1983.
3. Минасян М. М. Некоторые исследования ударных волн в сплошных средах.-Автореферат диссертации, М.: 1973.
4. Азатян Л. Д. Определение нелинейного решения в окрестности магнитозвуковой волны.- Уч. записки ЕГУ, 1974, 3.
5. D. J. Arrigo, Group Properties of $u_{xx} - u_y^m u_{yy} = f(u)$, Int. J. Non-Linear Mech., 26(1), 619-629, 1991.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
26.02.1999

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №1, 2000 Механика

УДК 539.6

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ ПО ГРАНИЦЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ, ЧАСТЬ КОТОРОЙ ЯВЛЯЕТСЯ ТВЕРДЫМ ПОКРЫТИЕМ

Асрян Н. Г., Багдоев А. Г.

Ն.Գ. Ասրյան, Ա.Գ. Բագդոև
Սեղմելի հեղուկով զբաղեցրած կիսահարթության պինդ եզրով կամայական արագությամբ տարածվող ճակատի ճնշման խնդրի լուծումը

Դիտարկվում է իդեալական սեղմելի հեղուկով զբաղեցրած և սառցե ծածկույթով կիսահարթության ներքև խորը թափանցող ճնշման որոշման խնդիրը

Ճնշման ճակատի շարժման օրենքը մակերևույթով կամայական է: Խառը եզրային պայմաններով այդ խնդրի լուծումը տրվում է հիմնվելով այն մեթոդների վրա, որոնք զարգացված են վերջավոր (բացվածքով) թևի և առաձգական միջավայրում ճաքերի տեսություններում:

N.G. Asrian, A.G. Bagdoev
The solution of problem on pressure front propogating along rigid boundary of halfplane, occupied by compressive fluid

Рассматривается задача проникновения давления в глубь сжимаемой идеальной жидкости, занимающей нижнюю полуплоскость с ледовым покровом.

Закон движения фронта давления по поверхности произвольный. Решение задачи со смешанными граничными условиями производится методами, развитыми в теории крыла конечного размаха и теории трещин в упругой среде. Получено значение нормальной скорости частиц жидкости под фронтом давления и потенциала (давления) вне его.

1. Общее решение задачи

Рассматривается задача о проникании давления в глубь сжимаемой идеальной жидкости, занимающей полуплоскость.

Выберем ось x по поверхности невозмущенной среды, ось y направим перпендикулярно вниз. Жидкость покрыта тонким слоем льда.

При распространении фронта давления по поверхности лед разрушается. Таким образом, имеем следующую граничную задачу:

При $y=0$, $x<l(t)$, $P=P_1(x,t)$, при $x>l(t)$, $v=0$,

где P-давление, v-нормальная скорость жидкости к поверхности $y=0$, $x=l(t)$ закон распространения координаты граничного давления.

Отметим, что в данной статье рассмотрена задача для жидкости, покрытой слоем льда. То же решение годится и в случае, когда поверхность жидкости покрыта тонким слоем любого хрупкого материала. Вместе с тем, повидимому, случай ледового покрытия является наиболее важным с практической точки зрения.

Рассматриваемая задача актуальна, поскольку в ней изучается влияние взрывной волны на подводные объекты, покрытые слоем льда.

Вводя потенциал скорости $\varphi(x, y, t)$ по формуле $P = -\rho \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$, где ρ – плотность, можно, учитывая, что $\partial \varphi / \partial y = v$, записать граничное условие в виде $y = 0$

$$\varphi = \varphi_1(x, t) \text{ при } x < l(t), \; \partial \varphi / \partial y = 0 \text{ при } x > l(t) \tag{1.1}$$

$\varphi_1(x,t) = -\dfrac{1}{\rho} \int\limits_{F(x)}^{t} P_1(x,t) dt$, $t = F(x)$ есть функция, обратная к $x = l(t)$.

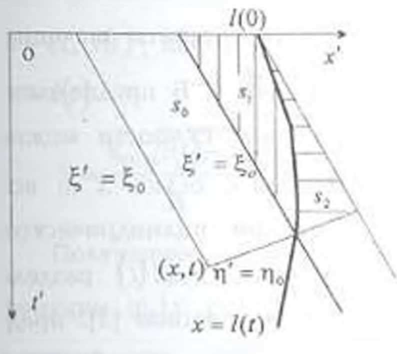
Для потенциала φ имеет место волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

Введением функции $v = \partial \varphi / \partial y$, условия (1.1) с учетом (1.2) запишутся в виде $y = 0$

$$\partial v / \partial y = f(x,t) \text{ при } x < l(t), \; v = 0 \text{ при } x > l(t) \tag{1.3}$$

где
$$f(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \tag{1.4}$$



Фиг. 1

и предположено, что $\dot{l}(t) < c$

Таким образом, для функции v задача свелась к антиплоской задаче о трещине в изотропной упругой среде, распространяющейся с произвольной скоростью [1,2,3]. Решение уравнения (1.2), верного и для функции v, при граничных условиях (1.3) можно искать методом интегральных уравнений [3, 4, 5]. Согласно [3, 5] можно записать для функции v интеграл Поссио на границе среды.

$$v = -\frac{c}{\pi} \iint \frac{(\partial v / \partial y)_{y=0}}{\sqrt{T}} dx' dt', \; T = c^2 (t - t')^2 - (x - x')^2 \tag{1.5}$$

где согласно (1.3) при $x' < l(t')(\partial v / \partial y)_{y=0} = f(x', t')$, причем $f(x,t)$ дается (1.4). При этом, интегрирование согласно [5], где рассмотрена аналогичная задача о крыле в характеристических координатах

$$\xi' = ct' - x', \; \eta' = ct' + x', \; \xi_0 = ct - x, \; \eta_0 = ct + x \tag{1.6}$$

должно вестись по заштрихованной области фиг. 1, в пределах $\xi_* < \xi' < \xi_0$, $-\xi' < \eta' < \eta_0$ причем ξ_* соответствует точке $x' = l(t_2)$, $t' = t_2$ пересечения характеристики $\eta = \eta_0 = ct_2 + l(t_2)$ с кривой $x = l(t)$

$$\xi_2 = ct_2 - l(t_2), \quad ct + x = ct_2 + l(t_2) \tag{1.7}$$

Тогда в характеристических координатах при $x < l(t)$ получится

$$v = -\frac{1}{2\pi}\int^{\xi_0} d\xi \int_{-\xi}^{\eta_0} f_1(\xi, \eta)\frac{d\eta}{\sqrt{(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)}} \tag{1.8}$$

причем $f_1(\xi, \eta) = f(x, t)$.

В задаче о штампе в переменных $\varphi, (\partial\varphi/\partial y)_{y=0}$ вместо $v, (\partial v/\partial y)_{y=0}$ формула (1.8) получена в [6].

Следует отметить, что приведенное ниже решение дается в предположения о дозвуковой скоростьи фронта давления, что может иметь место при взрыве на самой поверхности.

В случае взрыва в воздухе, вначале скорость ударной волны вдоль поверхности сверхзвуковая, а далее становится дозвуковой. Тогда на фиг 1 следует участок оси x $0 < x < l(0)$ заменить на сверхзвуковую часть кривой $x = l_1(t)$, что соответствует в задаче о крыле сверхзвуковой передней кромке [5]. Тогда все приведенные ниже формулы сохранятся, только в нижний предел интегралов по η следует ставить значения, соответствующие сверхзвуковой части кривой $x = l(t)$. В предположении малости времени достижения фронтом звуковой скорости можно считать сверхзвуковую часть кривой, совпадающей с осью x и все нижеприведенное сохраняет силу. Кроме того, при цилиндрическом взрыве в воздухе, вообще говоря, имеются две точки $x = \pm l(t)$ раздела граничных условий. Как и в задаче о крыле [5] и трещине [3], предполагается, что рассматриваются моменты времени, для которых дозвуковые части кривой $x = l(t)$ фиг. 1 и соответствующей кривой $x = -l(t)$ взаимно не влияют, что соответствует области справа от характеристики $\xi = -l(0)$ для приведенной на фиг 1 картины, описывающей правую часть диаграммы x, t, связанную с правым фронтом $x = l(t)$.

То, что интегрирование в (1.8) следует выбрать так, как сделано, следует из граничного условия $v = 0$ при $x > l(t)$, причем из (1.5) после замены $\tau_1 = (\partial v/\partial y)_{y=0}$ получится

$$\int_{-\xi}^{\eta_2(\xi_0)} \frac{\tau_1 d\eta}{\sqrt{\eta_0 - \eta}} + \int_{\eta_2(\xi_0)}^{\eta_0} \frac{\tau_1 d\eta}{\sqrt{\eta_0 - \eta}} = 0, \quad \eta_2(\xi_0) = ct_2 + l(t_2)$$

Тогда, записывая интегралы в (1.5) по заштрихованной области, и областям S_1, S_2 фиг. 1, можно видеть, что интегралы по S_1, S_2 сокращаются и получится (1.8). Тогда из (1.8) получится

$$v = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{l(t_2)-ct_2}^{ct-x} d\xi \int\limits_{-\xi}^{\eta_0} f_1(\xi, \eta')\frac{d\eta'}{\sqrt{(ct-x-\xi)(\eta_0-\eta')}} \tag{1.9}$$

2. Определение решения вблизи края фронта давления

Вблизи края фронта давления на границе $x \approx l(t)$ интегрирование по ξ ведется по узкой области, для которой $\xi \approx \xi_*$, причем

$$\xi_0 - \xi_* \approx [l(t) - x]\frac{2}{1 + \dot{l}(t)/c} \tag{2.1}$$

где точка означает дифференцирование по времени. Вычисляя интеграл по ξ в (1.9), где в $f_1(\xi, \eta')$ и в нижнем пределе интегрирования по η' подставлено $\xi = \xi_0$, переходя к переменной интегрирования x', для которой вдоль характеристики $\xi = \xi_0$, имеет место $d\eta' = 2dx'$, $\eta_0 - \eta' = 2(x - x')$, учитывая что пределы интегрирования по x' будут $x - ct$, $l(t)$, используя (2.1), можно получить под фронтом давления при $x \approx l(t)$

$$v = \frac{k_2\sqrt{l(t) - x}}{\pi}, \quad k_2 = -\frac{2}{\sqrt{1 + \dot{l}(t)/c}}\int\limits_{x-ct}^{l(t)-0}\frac{f\{x', t - l(t)/c + x'/c\}}{\sqrt{x - x'}}dx' \tag{2.2}$$

Полученное решение дает правильное поведение v только для функции $\varphi_1(x', t')$, гладкой в точке $x' = l(t')$.

В случае разрывной по производной функции $\varphi_1(x', t')$ в точке $x' = l(t')$ интеграл в (2.2) дает увеличение особенности при $x = l(t)$. При этом в (1.5) следует дважды проинтегрировать по частям интегралы по x', t', заменить производные по x', t' от $\frac{1}{\sqrt{T}}$ через производные по x, t и учесть формулу

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{T}} = \frac{1}{T^{3/2}} \tag{2.3}$$

Тогда (1.5) можно записать в виде

$$v = -\frac{c}{\pi}\iint \varphi_1(x', t')\frac{dx'\,dt'}{T^{3/2}} \tag{2.4}$$

В характеристических координатах ξ, η получится, как и в (1.8), формула

$$v = -\frac{1}{2\pi}\int_{\xi_0}^{\xi_0} d\xi' \int_{-\xi'}^{\eta_0} \varphi_1(x', t') \frac{d\eta'}{(\xi_0 - \xi')^{3/2}(\eta_0 - \eta')^{3/2}} \tag{2.5}$$

Повторяя выкладки, сделанные при получении (2.2), используя (2.1), переходя от η' к x', вычисляя конечную часть интеграла по ξ', можно получить при $x = l(t)$ соотношение:

$$v = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{1 + \dot{l}(t)/c}}{\sqrt{l(t) - x}}\int_{x-ct}^{x} \varphi_1\left(x', t - \frac{1}{c}x + \frac{1}{c}x'\right)\frac{dx'}{(x - x')^{3/2}} \tag{2.6}$$

В случае же непрерывной в точке $x = l(t)$, но имеющей излом, функции $\varphi_1(x, t)$, например,

$$\varphi_1(x, t) = B(x, t)\{l(t) - x\} \tag{2.7}$$

где $B\{l(t), t\} \neq 0$, а более конкретно, для случая разрывного давления на фронте $P = P_1 = \text{const}$, при котором

$$\varphi_1(x, t) = -\frac{1}{\rho}P_1\{t - F(x)\} \tag{2.8}$$

интеграл в (2.6) в точке $x = l(t)$ дает с точностью до множителя $-\frac{1}{\rho\sqrt{c}}P_1$ при переходе от переменной интегрирования x' к $t' = t + x'/c - x/c$

$$\int_0^t \frac{t' - F\{l(t) + ct' - ct\}}{(t - t')^{3/2}}dt' \tag{2.9}$$

Нижний предел не дает особенности, а при $t' \to t$ подынтегральная функция в (2.9), с учетом того, что $F\{l(t)\} = t$, равна приближенно

$$\frac{t' - t - F'\{l(t)\}c(t' - t)}{(t - t')^{3/2}} = -\frac{1 - cF'(l)}{\sqrt{t - t'}} \tag{2.10}$$

причем $F'(l) = 1/\dot{l}(t)$. Таким образом, для граничной функции $\varphi_1(x', t')$, обращающейся в нуль первого порядка при $x' = l(t')$, интеграл в (2.6) для $x = l(t)$ имеет конечное значение, и имеет место известная из теории трещин [3] особенность функции v.

3. Определение потенциала вне фронта давления

Можно также получить значение $\varphi(x,t)$ при $x > l(t)$ на поверхности среды. Для этого следует применить метод сверток [2, 6].

Запишем

$\varphi = \varphi_+(x,t) + \varphi_-(x,t)$, $\quad v = v_+(x,t) + v_-(x,t)$

где индекс "+" соответствует функциям, равным нулю при $x < l(t)$, а индекс "–" функциям, равным нулю при $x > l(t)$.

Вводя преобразование Лапласа по t, $\overline{\varphi}(x,y,s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\varphi(x,y,t)dt$,

полагая $\overline{\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha_1 x - \beta y} \cdot \varphi d\alpha_1$ и, подставляя в (1.2), можно получить $\beta = -i\sqrt{s^2/c^2 + \alpha_1^2}$. Вводя преобразования Лапласа и Фурье от функций φ и v на границе полуплоскости $y = 0$

$$\overline{\overline{\varphi}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha_1 x}\,\overline{\varphi}(x',0,s)dx', \qquad \overline{\overline{v}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha_1 x}\,\overline{v}(x',0,s)dx \tag{3.1}$$

используя равенство $v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, можно получить для $\overline{\overline{\varphi}}, \overline{\overline{v}}$

$$\overline{\overline{\varphi}} = \overline{\overline{S}}(\alpha_1, s)\overline{\overline{v}} \tag{3.2}$$

где $$\overline{\overline{S}} = -\frac{1}{\sqrt{s^2/c^2 + \alpha_1^2}} \tag{3.3}$$

Записывая факторизацию функции $\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{S}}_+\overline{\overline{S}}_-$, где [6]

$$\overline{\overline{S}}_+ = \frac{1}{\sqrt{s/c - i\alpha_1}}, \quad \overline{\overline{S}}_- = \frac{1}{\sqrt{s/c - i\alpha_1}} \tag{3.4}$$

вводя также функции $\overline{\overline{P}}_\pm = 1/\overline{\overline{S}}_\pm$, можно из (3.2), следуя [2, 6], получить

$$\varphi_+ = S_+ ** \{(S_- ** v_+ - P_+ ** \varphi_-)H(x-l)\} \tag{3.5}$$

$$v_- = -P_- ** \{(S_- ** v_+ - P_+ ** \varphi_-)H(l-x)\} \tag{3.6}$$

где $H(x)$ есть единичная функция. Звездочки обозначают свертки по x, t. В силу того, что $v_+ = 0$, из (3.6) можно после некоторых преобразований получить значение v под фронтом давления, даваемое (1.5), (2.4). Из (3.5) получится при $x > l(t)$

$$\varphi_+ = -S_+ ** \{(P_+ ** \varphi_-)H(x-l)\} \tag{3.7}$$

Функции S_*, P_* находятся из (3.4) применением обратных преобразований Лапласа и Фурье в виде [6]

$$S_*(t,x) = -\frac{H(x)\delta(t - x/c)}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}, \quad P_*(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\delta(t - x/c)\frac{H(x)}{x^{3/2}} \tag{3.8}$$

Для граничной функции, заданной в виде

$$\varphi_1 = \varphi_{0-} = -\delta(x-\xi)H(t-\tau) \tag{3.9}$$

можно получить для внутренней свертки в (3.7)

$$P_* * *\varphi_{0-} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{H(x-\xi)}{(x-\xi)^{3/2}}H\left(t-\tau-\frac{x}{c}+\frac{\xi}{c}\right) \tag{3.10}$$

Из (3.7) и (3.10) с учетом (3.8) после замены $x - x' - \xi = X'$, имеем

$$\begin{aligned}\varphi_{0-} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(x')}{X'^{3/2}}\frac{H(x-X'-\xi)}{\sqrt{x-X'-\xi}}H\left(t-\tau-\frac{x}{c}+\frac{\xi}{c}\right)\times \\ \times H\left\{X'+\xi-l\left(t-\frac{x}{c}+\frac{\xi}{c}+\frac{X'}{c}\right)\right\}dX'\end{aligned} \tag{3.11}$$

Нижний предел интегрирования находится из условий

$$X' + \xi - l(t_0) = 0, \quad t_0 = t - x/c + \xi/c + X'/c = t - x/c + l(t_0)/c \tag{3.12}$$

Заменяя переменную интегрирования $\frac{1}{\sqrt{X'}} = y$, можно из (3.11) с учетом (3.12) получить

$$\varphi_{0-} = -\frac{1}{\pi}H\left(t-\tau-\frac{x}{c}+\frac{\xi}{c}\right)\frac{1}{x-\xi}\frac{\sqrt{x-l(t_0)}}{\sqrt{l(t_0)-\xi}}$$

Для произвольной граничной функции $\varphi_1(t,x)$, пользуясь соотношением [2]

$$\varphi_-(t,x) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{t}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}\varphi_{0-}(t,\tau,x,\xi)d\tau d\xi \tag{3.13}$$

можно получить

$$\varphi_-(t,x) = \frac{\sqrt{x-l(t_0)}}{\pi\sqrt{c}}\int_0^{t_0}\varphi_1\{\tau, x-(t-\tau)c\}\frac{d\tau}{\sqrt{t_0-\tau}(t-\tau)} \tag{3.14}$$

где учтено, что вдоль характеристики

$$l(t_0) - x + c(t-\tau) = c(t_0-\tau) \tag{3.15}$$

Для реальной задачи, в которой имеет место нулевое значение потенциала в точке $x = l(t)$, а именно, $\varphi_1(x,t) = B(x,t)\{l(t) - x\}$, интеграл в формуле (3.14) является конечным. Таким образом, для функции $\varphi_- = \varphi_1(\tau,\xi)$, обращающейся в нуль при $\xi = l(t)$ (3.14) дает известное по характеру особенности решение для $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ [6].

Отметим, что в [7] дано решение задачи о давлении, распространяющемся вглубь упругой среды.

Решение анизотропной задачи о антиплоской трещине в упругой среде дано в [8].

Задача о трещине рассмотрена в [9], где записаны формулы вида (1.5), (1.8), однако там не рассмотрено упрощение вблизи края трещины. Кроме того, в [3] и [9] знак перед интегралом в формуле, аналогичной (1.5), следует изменить на обратный.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. Приближенное решение антиплоской анизотропной задачи о распространении трещины.-Механика, ЕГУ, 1989, вып. 7, с. 3-7.
2. Сарайкин В. А., Слепян Л. И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле.-Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 4, с. 54-73.
3. Костров Б. Б. Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига.-ПММ, 1966, т. 30, вып. 6, с. 1042-1050.
4. Ward G. Supersonic flow past thin wings.-The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathem.1949, V. II, Part 2.
5. Красильщикова В. Б. Тонкое крыло в сжимаемом потоке.-М.: Наука, 1978, 223с.
6. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости.-М.: Наука, 1986, 328с.
7. Мартиросян А. Н. Краевые задачи нестационарного движения анизотропных и изотропных упругих сред.- Докторская диссертация. Ереван, 1990, 278с.
8. Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н., Сафарян Ю. С. Антиплоская задача для трещины, движущейся с произвольной скоростью в анизотропной упругой однородной среде.- Изв. НАН Армении. Механика, 1998, т. 51, № 1, с. 16-20.
9. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология.- М.: Мир, 1983, 880с.

Институт механики НАН Армении
Ереванский архитектурно-строительный институт

Поступила в редакцию 11.02.1999

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №1, 2000 Механика

УДК 532.516

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ ПРИ НАЛИЧИИ ОТСОСА ИЛИ ВДУВА

Бабаджанян Г.А.

Գ.Հ. Բաբաջանյան
Հեղուկի շարժումը խողովակում արտահոսքի կամ ներհոսքի առկայությամբ
Այս աշխատանքում քննարկվում է մածուցիկ անսեղմելի հեղուկի ստացիոնար շարժումը գլանաձև խողովակում, որի ծակոտկեն մակերևույթի երկարությամբ տեղի ունի հեղուկի արտահոսք կամ ներհոսք: Խնդիրը լուծվում է Լապլասի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ: Որոշվում են առանցքային և շառավղային արագությունները, ճնշումը և շփման ուժը հեղուկի շերտերի միջև և խողովակի պատի վրա: Լուծված է թվային օրինակ և կառուցված են համապատասխան գրաֆիկներ:

G.H. Babajanyan
Fluid motion in pipe with inleakage or outflow of liquid

Рассматривается ламинарное, стационарное изотермическое движение несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрической трубе с постоянным по длине отсосом или вдувом. Определены законы изменения осевой и радиальной скоростей, давления, сил трения между слоями жидкости и на стенке трубы.

Ввиду многочисленных технических приложений (течение грунтовых вод, движение жидкости в тканевых шлангах, во внутренних каналах пороховых зарядов и т.д.) исследование закономерностей течения вязкой несжимаемой жидкости в каналах с отсосом или вдувом через пористые стенки представляют несомненный интерес [1–3].

1. Пусть в круглой неограниченной в одном направлении трубе радиуса a поступающая жидкость имеет равномерно распределенные и постоянные по входному сечению скорость U и давление $P_н$. Действие массовых сил не учитывается. В качестве исходных используем приближенные уравнения движения жидкости, записанные в цилиндрических координатах [4]:

$$
\begin{aligned}
& U\frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r}\right) \\
& \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \qquad\qquad (1.1) \\
& \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rV_r\right) = 0
\end{aligned}
$$

где V_z и V_r – осевая и радиальная компоненты скорости, p – давление; ρ – плотность, а ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости. Граничные условия для рассматриваемой задачи имеют следующий вид:

$$
z = 0, \quad V_z = U, \quad p = p_н \qquad (1.2)
$$

$$z > 0,\ r = a, \qquad V_z = 0,\ V_r = \pm V_0 = \text{const}$$
$$z > 0,\ r = 0, \qquad V_r = 0$$

Здесь a — радиус трубы; знак "+" перед V_0 соответствует отсосу, а "—" — вдуву жидкости через пористую поверхность трубы. С помощью безразмерных переменных

$x = z/a,\ y = r/a,\ u = (V_z - U)/U,\ V = V_r/U,\ P = (p - p_н)/\rho U^2$ система уравнений (1.1) и граничные условия (1.2) примут следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = R_e\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad (1.3)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}(yV) = 0$$

$$x = 0, \qquad u = 0, \quad P = 0$$
$$x > 0,\ y = 1, \qquad u = -1,\ V = \pm V_0/U$$
$$x > 0,\ y = 0, \qquad V = 0 \qquad (1.4)$$

где $R_e = Ua/\nu$ — число Рейнольдса.

2. Для нахождения решения задачи воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа. Применяя прямое и обратное преобразования Лапласа по переменной x к системе уравнений (1.3) и к граничным условиям (1.4), и переходя к первоначальным переменным для искомых функций $p(z)$, $v_z(z,r)$ и $v_r(z,r)$, получим:

$$p(z) = p_н - \rho U^2\left[\frac{8z}{R_e a} + \frac{1}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\gamma_n^2\frac{z}{R_e a}\right)/\gamma_n^2\right] \pm$$
$$\pm 2\rho V_0 U\left[\frac{4z}{3a} + \frac{4z^2}{R_e a^2} - \frac{R_e}{144} + 4R_e\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\gamma_n^2\frac{z}{R_e a}\right)/\gamma_n^4\right] \qquad (2.1)$$

$$v_z = 2U\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \pm V_0\left(\frac{4zr^2}{a^3} + \frac{R_e z^4}{4a^4} - \frac{R_e z^2}{3a^2} - \frac{4z}{a} + \frac{R_e}{12}\right) +$$
$$+4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\exp\left(-\gamma_n^2\frac{z}{R_e a}\right)/\gamma_n^2\right]\times\left[\frac{J_0(\gamma_n r/a)}{J_0(\gamma_n)} - 1\right]\times\left(U \pm \frac{2V_0 R_e}{\gamma_n^2}\right) \qquad (2.2)$$

$$v_r = \pm\frac{V_0 r}{a}\left(2 - \frac{r^2}{a^2}\right) + 4\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\gamma_n^2\frac{z}{R_e a}\right)\times$$
$$\times\left[\frac{J_1(\gamma_n r/a)}{\gamma_n J_0(\gamma_n)} - \frac{r}{2a}\right]\times\left(\frac{U}{R_e} \pm \frac{2V_0}{\gamma_n^2}\right) \qquad (2.3)$$

Сила трения определяется по формуле:

$$\tau = \mu\left(\frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z}\right) = -\frac{4\mu}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\gamma_n^2 z}{R_e a}\right)\frac{J_1(\gamma_n r/a)}{\gamma_n J_0(\gamma_n)}\left[U \pm \frac{2V_0 R_e}{\gamma_n^2}\right] \pm$$

$$\pm\frac{\mu V_0 r}{a^2}\left(\frac{8z}{a}+\frac{R_e r^2}{a^2}-\frac{2R_e}{3}\right)-\frac{4U\mu r}{a^2}- \tag{2.4}$$

$$-\frac{4\mu}{aR_e}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\gamma_n^2 z}{R_e a}\right)\left[\frac{J_1(\gamma_n r/a)}{\gamma_n J_0(\gamma_n)}-\frac{r}{2a}\right]\left[\frac{U\gamma_n^2}{R_e}\pm 2V_0\right]$$

На поверхности трубы сила трения примет вид

$$\tau_{r=a}=-\frac{4\mu}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{\gamma_n^2 z}{R_e a}\right)/\gamma_n\right]\frac{J_1(\gamma_n)}{J_0(\gamma_n)}\left(U\pm\frac{2V_0R_e}{\gamma_n^2}\right)\pm\frac{\mu V_0}{a}\left(\frac{8z}{a}+\frac{R_e}{3}\right)-$$

$$-\frac{4U\mu}{a}-\frac{4\mu}{aR_e}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\gamma_n^2 z}{R_e a}\right)\left[\frac{J_1(\gamma_n)}{\gamma_n J_0(\gamma_n)}-\frac{1}{2}\right]\left(\frac{U\gamma_n^2}{R_e}\pm 2V_0\right) \tag{2.5}$$

Здесь μ – динамический коэффициент вязкости; J_0 и J_1 – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка, соответственно. Величины $\gamma_n=-i\sqrt{R_e s_n}$ являются действительными корнями функции Бесселя первого рода второго порядка $J_2(\gamma_n)$. Формулы (2.1) – (2.5) определяют законы изменения характерных величин потока жидкости в цилиндрической пористой трубе. Полученные формулы при отсутствии отсоса (вдува) совпадают с результатами работ [4,5]. Отметим, что факт удовлетворения полученных формул граничным условиям подтверждает равномерную сходимость входящих в них рядов.

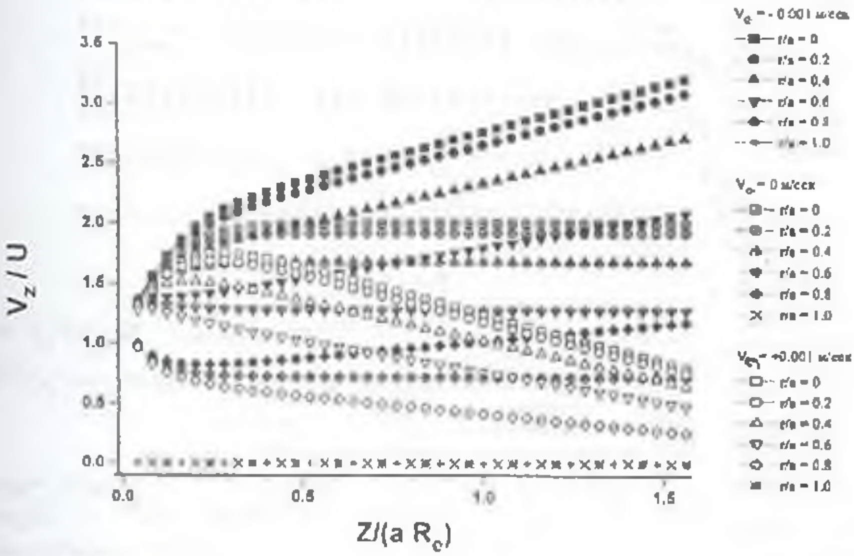
С целью получения наглядной картины развития течения жидкости в цилиндрической трубе с отсосом или вдувом, проведены численные (компьютерные) расчеты со следующими значениями входящих параметров: $U=10^{-1}$ м·сек$^{-1}$; $V_0=10^{-3}$ м·сек$^{-1}$; $p_0=10^{2}$ кг·м$^{-2}$; $\rho=102$ кг·сек^{2}·м$^{-4}$; $\mu=10^{-4}$ кг·сек·м$^{-2}$; $R_e=50$; $\nu=10^{-3}$ м^2·сек$^{-1}$; $a=0.05$ м. На фиг.1, 2 и 3 представлены результаты расчетов для зависимостей продольной скорости, давления и силы трения, выраженных в безразмерных единицах (V_z/U), (p/p_H), $(\tau a/\mu U)$ соответственно, от продольной координаты (в единицах z/aR_e) в различных сечениях трубы (значения r/a). Анализ приведенных кривых показывает, что:

а) резкие изменения поведения продольной скорости (фиг.1) происходят на начальном участке (до $\sim 0.4z/aR_e$) трубы. Далее имеет место монотонное поведение: увеличение скорости при вдуве, уменьшение – при отсосе и постоянное – в случае сплошной стенки;

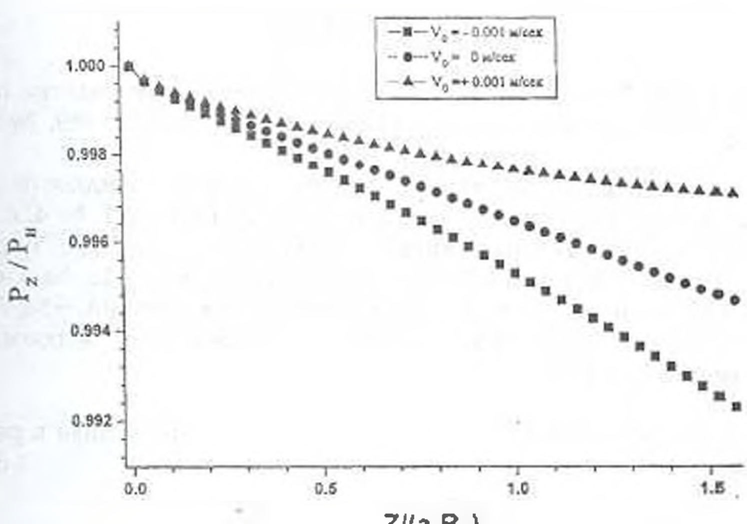
б) монотонное уменьшение давления во всех поперечных сечениях трубы с соблюдением неравенств $p_{\text{отсос}}>p_{\text{сплош}}>p_{\text{вдув}}$ (фиг.2);

в) наиболее интересны результаты, полученные для силы трения (фиг.3). Как и для продольной скорости, резкие изменения в величине и характере поведения силы трения имеют место на начальном участке (до $\sim 0.2z/aR_e$). При этом образуется пограничный слой жидкости в трубе (между продольными сечениями с $r/a=0.8$ и $r/a=0.6$), разделяющий поток на две части, в которых законы изменения силы трения прямо противоположны. Интересно также, что во всех сечениях вдоль длины трубы сила трения подчиняется следующей закономерности:

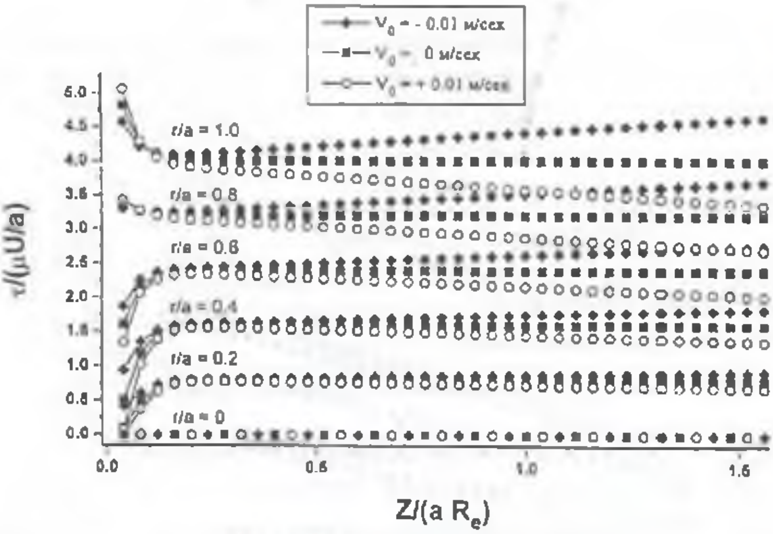
$\tau_{вдув} > \tau_{сплош} > \tau_{отсос}$. Причем, как следует из величин углов наклона кривых на фиг.3, скорость изменения силы трения (возрастание — при вдуве и убывание — при отсосе) явно зависит от радиальной координаты, увеличиваясь от нуля в центре трубы до максимального значения на стенке.



Фиг.1 Зависимость продольной скорости (в безразмерных единицах V_z / U) течения вязкой жидкости в трубе от продольной координаты (в безразмерных единицах z / aR_e) в различных радиальных плоскостях (заданных в единицах r / a).



Фиг.2 Зависимость давления (в безразмерных единицах $P / P_н$) жидкости в трубе от продольной координаты (в безразмерных единицах z / aR_e).



Фиг.3 Зависимость силы трения (в безразмерных единицах $\tau a / \mu U$) вязкой жидкости в трубе от продольной координаты (в безразмерных единицах z / aR_e) в различных радиальных плоскостях (заданых в единицах r / a).

Таким образом, развитый в работе подход для изучения течения вязкой жидкости в трубах как со сплошной, так и пористой поверхностями, позволяет получать в достаточном объеме информацию о характере течения на достаточно протяженном участке трубы (как начальном, так и стабилизированном).

Работа выполнена в рамках научной темы № 94-670, финансируемой государственными источниками Республики Армения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Варапаев В.Н. Течение вязкой жидкости в начальном участке плоского канала с пористыми стенками. – Изв.АН СССР, МЖГ, 1969, № 4, с.178-181.
2. Слезкин Н.А. О развитии течения вязкой жидкости между параллельными пористыми стенками. – ПММ, 1957, т.21, № 4, с.591-593.
3. Бабаджанян Г.А. Течение вязкой жидкости в трубе с пористыми стенками. – Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат.н., 1965, т.18, № 4, с.73-79.
4. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. – М.-Л.: 1951.
5. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Гостехтеориздат, 1955.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 6.05.1999

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №1, 2000 Механика

УДК 531.36

К ТЕОРИИ K_Δ^ω УСТОЙЧИВОСТИ

Аванян В.Т.

Վ.Տ. Ավանյան

K_Δ^ω - կայունության տեսության մասին

Դիտարկվում է K_Δ^ω կայունություն [1]: Ապացուցվում է, որ հոլոնոմ ստացիոնար կապերով կոնսերվատիվ համակարգի մեկուսացված հավասարակշռության դիրքի կայունության համար, այդ դիրքում նրա պոտենցիալ էներգիայի մինիմում ունենալը բավական է: Ստացվել են նաև որոշ դեպքերի համար անկայունության բավարար պայմաններ:

Գծային համասեռ ոչ ստացիոնար դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգով նկարագրվող պրոցեսի համար ապացուցվել են ասիմպտոտիկ կայունության մասին երկու թեորեմներ: Իսկ երբ այդ համակարգը ա) բերվող է, ստացվել են կայունության և ասիմպտոտիկ կայունության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, բ) եռանկյունաձև է՝ ասիմպտոտիկ կայունության բավարար պայման, գ) ω-պարբերական է, կայունության և ասիմպտոտիկ կայունության բավարար պայմաններ:

Նշված ուսումնասիրությունները կատարված են Լյապունովի երկրորդ եղանակով:

Այս խնդրի դրվածքով Լյապունովի ֆունկցիան ընդհանուր դեպքում Հերմիտյան ձև է, որի մատրիցի միջոցով, օգտվելով հիմնական լեմմից [2] կառուցվում է գրգռումների թույլատրելի շեղումների տիրույթը ժամանակի $[t_0,\infty)$ ինտերվալի համար: Այդ տիրույթը հանդիսանում է ρ_ω- խողովակ, որի յուրաքանչյուր հատույթ $t=t^*$ հիպերհարթությամբ, n- չափանի էլիպսոիդ է որոշակի հատկություններով [1]:

V.T. Avanian

About the theory of K_Δ^ω - stability

Рассматривается K_Δ^ω устойчивость [1]. Доказывается, что для устойчивости линейного приближения положения изолированного равновесия консервативной механической системы с голономными стационарными связями, достаточно, чтобы в этом положении ее потенциальная энергия имела строгий минимум. При некоторых случаях получены достаточные условия для неустойчивости.

Для нестационарных линейных систем однородных дифференциальных уравнений доказаны две теоремы об асимптотической устойчивости. Когда система а) приводимая, получены необходимые и достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости, б) треугольная: достаточное условие асимптотической устойчивости, в) ω – периодичная: достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости.

Исследование проведено вторым методом Ляпунова, где функция Ляпунова является, в общем случае, эрмитовой формой, через матрицы которого в силу леммы, доказанной в [2], строится область допустимых отклонений для возмущений на интервале времени $[t_0,\infty)$. Эта область является ρ_ω- трубкой, каждое сечение которой гиперплоскостью $t=t^*$ представляет собой n мерный эллипсоид с определенными свойствами [1].

1. Допустим, что положение механической системы с голономными стационарными связями определяется s независимыми координатами $q_1,...,q_s$. В положении равновесия все обобщенные силы такой системы равны нулю.

$$Q_1 = 0,\ Q_2 = 0, \ldots,\ Q_s = 0 \tag{1.1}$$

Для консервативных сил $Q_k = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_k}$ $(k = 1,\ldots,s)$, где Π – потенциальная энергия системы, поэтому уравнения (1.1) принимают вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0,\quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0,\ \ldots,\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0 \tag{1.2}$$

Решая (1.2) относительно переменных $q_1,\ldots,q_s$, получаем те значения обобщенных координат, при которых механическая система находится в положении равновесия. Таких положений могут быть несколько, причем некоторые из них устойчивы, а остальные неустойчивы. Рассмотрим один из этих возможных положений равновесия (считается, что в этом положении потенциальная энергия системы равна нулю). Кроме того, не нарушая общности, можем предполагать, что в этом положении все обобщенные координаты $q_1,\ldots,q_s$ равны нулю. Рассмотрим K_Δ^ω-устойчивость положения равновесия относительно обобщенных координат $q_1,\ldots,q_s$ и обобщенных скоростей $\dot q_1,\ldots,\dot q_s$.

Тогда уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}; \qquad \frac{\partial q_k}{\partial t} = \dot q_k \qquad (k = 1,\ldots,s) \tag{1.3}$$

будут уравнениями возмущенного движения, и они допускают интеграл энергии

$$T + \Pi = h \tag{1.4}$$

где T – кинетическая энергия системы.

Попробуем доказать теорему Лагранжа в постановке K_Δ^ω – устойчивости.

Теорема. Если в положении изолированного равновесия консервативной системы с голономными и стационарными связями потенциальная энергия Π имеет строгий минимум, то линейное приближение K_Δ^ω устойчиво.

Доказательство. Пусть в рассматриваемом положении равновесия потенциальная энергия равна нулю и имеет строгий минимум. Тогда квадратичное приближение функции Π будет определенно-положительной формой относительно $q_1,\ldots,q_s$. С другой стороны, квадратичное приближение T-кинетической энергии в положении равновесия будет определенно-положительной формой относительно обобщенных скоростей. Таким образом, полная энергия

$$V = \Pi + T \tag{1.5}$$

будет определенно-положительной квадратичной формой относительно обобщенных координат и скоростей. Матрицу M квадратичной формы V разложим на множители следующим образом [2]:

$$M = H^{*-1}H^{-1} = \left(HH^*\right)^{-1}$$

где столбцы $H_1,\ldots,H_s$ матрицы H имеют одинаковую норму:

$$\|H_j\| = \sqrt{\frac{1}{S} SpM^{-1}} = \upsilon \quad (j = 1,...S) \tag{1.7}$$

Матрицу $A = \upsilon M$ квадратичной формы $V_1 = \upsilon V$ можно записать в виде

$$A = \upsilon M = \left(\frac{1}{\sqrt{\upsilon}} H \cdot \frac{1}{\sqrt{\upsilon}} H \right)^{-1}$$

где нормы столбцов матрицы $\frac{1}{\sqrt{\upsilon}} H$ равны единице. Функция V_1 удовлетворяет всем условиям теоремы 4.1 о K_Δ^{w}-устойчивости [2], следовательно, теорема доказана.

Так как из K_Δ^{w}-устойчивости всегда следует устойчивость по Ляпунову, но обратное имеет место не всегда [3], то легко утверждаются факты об обратимости теоремы Лагранжа из [4,5]:

а) если в положении изолированного равновесия потенциальная энергия не имеет минимума и его отсутствие определяется членами второго порядка малости без необходимости рассматривания членов высшего порядка, то равновесие K_Δ^{w} неустойчиво [4];

б) если в положении изолированного равновесия потенциальная энергия имеет максимум, определяемый по членам наименее высокого порядка, которые действительно имеются в разложении этой функции, то равновесие K_Δ^{w} неустойчиво [4];

в) если в изолированном положении равновесия потенциальная энергия П предполагается аналитической функцией $q_1,...,q_s$, не имеет минимума, то равновесие K_Δ^{w} неустойчиво [5].

2.Рассмотрим K_Δ^{w} устойчивость линейной однородной нестационарной системы:

$$\dot{x} = A(t)x, \; A(t) \in C(a,\infty); \quad \sup_t \|A(t)\| < \infty \text{, с спектром}$$

$$\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}, \quad (m \le n) \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. Если наибольший характеристический показатель системы (2.1) отрицателен [4]

$$\alpha = \max_k \alpha_k < 0 \tag{2.2}$$

то тривиальное решение этой системы (невозмущенный процесс) асимптотически K_Δ^{w} устойчиво.

Доказательство. Пусть (2.2) имеет место, $G(t)$ - произвольная матрица из класса K_Δ^{w}, $\rho > 0$ - произвольное достаточно малое число, кроме того, произвольное нетривиальное решение $x(t)$ системы (2.1) в начальный момент времени $t = a$ удовлетворяет условию

$$\left(G^{-1}(a)x(a), G^{-1}(a)x(a)\right) \le \rho^2 \tag{2.3}$$

Для эрмитовой формы

$$V(x)=\left(G^{-1^{*}}(t)G^{-1}(t)x(t),x(t)\right)=(H(t)x,x);\quad \left(H(t)=G^{-1^{*}}(t)G^{-1}(t)\right)$$

имеем

$$\lambda_{\min}(H(t))\|x\|^{2}\le V(x)\le\lambda_{\max}(H(t))\|x\|^{2}$$

где знак равенства имеет место лишь тогда, когда вектор $x(t)$ является собственным вектором, отвечающим собственным значениям соответственно $\lambda_{\min}(H)$ и $\lambda_{\max}(H)$. Поэтому из (2.3)

$$\left(G^{-1}(a)x(a),G^{-1}(a)x(a)\right)\le\lambda_{\max}(H(a))\|x(a)\|^{2}\le\rho^{2} \tag{2.4}$$

где [1]

$$\frac{1}{\sqrt{2}\omega}\le\lambda_{i}(H(a))\le 2\omega^{2} \tag{2.5}$$

Выбирая $\varepsilon>0$ настолько малым, чтобы было $\alpha+\varepsilon<0$, поскольку $\chi[x(t)]<\alpha+\varepsilon$, получим $\|x(t)\|e^{-(\alpha+\varepsilon)t}\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$

т.е.
$$\|x(t)\|=0\left(e^{(\alpha+\varepsilon)t}\right),\ (t\in[a,\infty)) \tag{2.6}$$

Согласно (2.5) и (2.6) имеем

$$\left(G^{-1}(t)x,G^{-1}(t)x\right)\le\lambda_{\max}(H(t))\|x\|^{2}\le 2\omega^{2}\cdot 0\left(e^{(\alpha+\varepsilon)t}\right)\le\rho^{2}\qquad(t\in(a,\infty))$$

Из соотношения (2.6) следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$, т.е. невозмущенный процесс асимптотически устойчив на $[t_0,\infty)$.

Теорема 2.2. Если наибольшее собственное значение $\Lambda(t)$ эрмитовой матрицы $A^{H}(t)=\frac{1}{2}\left[A(t)+A^{*}(t)\right]$ удовлетворяет неравенству

$$\Lambda(t)\le -h<0\qquad[t_0<t<\infty) \tag{2.7}$$

то тривиальное решение (невозмущенный процесс) системы

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t),\quad (A(t)\in c[t_0,\infty)) \tag{2.8}$$

асимптотически K_{Δ}^{ω} устойчиво.

Доказательство. Пусть (2.7) выполняется и решение $x(t)$ системы (2.8) в начальный момент времени $t=t_0$ удовлетворяет соотношению

$$\left(G^{-1}(t_0)x(t_0),G^{-1}(t_0)x(t_0)\right)\le\rho^{2} \tag{2.9}$$

где $\left(G(t)\in k_{\Delta}^{\omega}\right)$, а $\rho>0$ – достаточно малое число. Из неравенства Важевского

$$\|x(t_0)\|\exp\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau\le\|x(t)\|\le\|x(t_0)\|\exp\int_{t_0}^{t}\Lambda(\tau)d\tau$$

где $\lambda(t)$ и $\Lambda(t)$ – соответственно наименьшее и наибольшее собственные значения эрмитовой матрицы $A^{H}(t)$, в силу (2.7) имеем

$$\|x(t)\|\le\|x(t_0)\|\exp[-h(t-t_0)],\ (t_0\le t<\infty) \tag{2.10}$$

отсюда

$$\|x(t)\| \le \|x(t_0)\| \qquad (t_0 \le t < \infty) \tag{2.11}$$

Поскольку все собственные значения матрицы $H(t) = G^{-1}(t)G^{-1}(t)$ удовлетворяют неравенству (2.5), когда $t > t_0$, то из (2.11) следует неравенство $\left(G^{-1}(t)x(t),\ G^{-1}(t)x(t)\right) \le \rho^2$, а из (2.10) следует, что $\lim_{t\to\infty}\|x(t)\| = 0$.

Если система (2.8) приводимая, т.е. существует преобразование Ляпунова, через которого система (2.8) приводится к системе $\dot{x} = By$ с постоянной матрицей B, поскольку при преобразовании Ляпунова характеристические показатели линейной дифференциальной системы сохраняются и являются действительными частями собственных значений постоянной матрицы B, то, согласно теоремам 3.1 и 3.2 [3], в качестве следствия получаются следующие утверждения:

1) Для K_Δ^ω устойчивости приводимой линейной однородной системы (2.8) необходимо и достаточно, чтобы все его характеристические показатели были неположительными, причем нулевым характеристическим показателям отвечают простые элементарные делители.

2) Для асимптотической K_Δ^ω устойчивости приводимой линейной однородной системы (2.8) необходимо и достаточно, чтобы все его характеристические показатели были отрицательными.

В частном случае, если в (2.8) матрица $A(t)$ $t_0 \le t < \infty$ ограничена и треугольная $\left(a_{ij}(t) = 0,\ i < j,\ t_0 \le t < \infty\right)$, то совокупность средних значений его диагональных коэффициентов определяет совокупность его характеристических показателей.

$$\alpha_k = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} a_{ij}(\tau)d\tau \quad (i = 1...n).$$

Следовательно, когда $\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} a_{ii}(\tau)d\tau < 0 \quad (t \in [0,\infty))$, тривиальное решение системы (2.8) будет асимптотически k_Δ^ω- устойчивым.

3.Рассмотрим процесс, описываемый линейным однородным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x \qquad A(t+\omega) = A(t); \quad \omega > 0 \tag{3.1}$$

где $A(t) - n \times n$-матрица, непрерывная (или кусочно-непрерывная) на $(-\infty,+\infty)$. Его нормированная фундаментальная матрица имеет вид $X(t) = \Phi(t)e^{\Lambda t}$, ($X(0) = E; E -$ единичная матрица), где $\Phi(t) \in C^1$ (или кусочно-гладкая) $\omega -$ периодичная невырожденная матрица $\Phi(0) = E$, а Λ - матрица порядка $n \times n$

$$\Lambda = \frac{1}{\omega}Ln X(\omega), \quad X(\omega) = e^{\Lambda\omega}.$$

Характеристические показатели линейной периодической системы λ_i

и характеристические показатели Ляпунова α_j нетривиальных решений этой системы связаны соотношением $\alpha_j = \operatorname{Re}\lambda_j$, где

$$\lambda_j = \frac{1}{\omega} Ln\rho_j = \frac{1}{\omega}\left[\ln|\rho_j| + i(\arg\rho_j + 2k\pi)\right] \qquad (j = 1,...n; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2,...)$$

$(\rho_j$ – собственные значения матрицы $X(\omega))$ $\alpha_j = \operatorname{Re}\lambda_j = \frac{1}{\omega}\ln|\rho_j|$ $(j = 1,...m; \ m \le n)$.

Отсюда, согласно вышеизложенным следствиям: а) при $|\rho_j| \le 1$ $(j = 1,...,m)$ тривиальное решение периодической системы (3.1) будет K_Δ^ω устойчивым, если при $|\rho_j| = 1$ соответствующие элементарные делители матрицы $X(\omega)$ – простые; б) при $|\rho_j| < 1$ $(j = 1,...,n)$ асимптотически K_Δ^ω устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абгарян К.А. Устойчивость движения на конечном интервале.- Итоги науки и техники. Общая механика.- 1976, т.3, с. 43-124.
2. Абгарян К.А., Аванян В.Т. К теории устойчивости на заданном интервале времени. -Тр. Моск. ав. ин-та. 1975. № 339, с. 5-11.
3. Абгарян К.А., Аванян В.Т. К теории устойчивости на заданном интервале времени. -ПММ. 1977, т. 41, № 5, с. 844-849.
4. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения.-М.: Гостехиздат, 1950, 450 с.
5. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. - М.: Изд. АН СССР, 1962, 320с.

Ереванский архитектурно-строительный институт

Поступила в редакцию 22.04.1999

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №1, 2000 Механика

УДК 539.3; 62.50

ОБ УПРАВЛЯЕМОМ ДВИЖЕНИИ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С УПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Айрапетян В.В., Гукасян А.А.

Վ.Վ. Հայրապետյան, Ա.Ա. Ղուկասյան

Առաձգական էլեմենտներով թռչող սարքի մի մոդելի ղեկավարվող շարժման մասին

Աշխատանքում բերվում է առաձգական էլեմենտներով (սալերով) թռչող սարքի մի մոդելի նկարագրությունը: Սալերի տեղափոխության փոքրության և կողմնորոշման համակարգի մասին որոշակի ենթադրությունների դեպքում ստացված են շարժման գծային և սալերի առաձգական տատանումների հավասարումները: Բերված է ղեկավարման մի կիբեռնետիկական սխեմա, որը հաշվի է առնում թռչող սարքի առաձգական հատկությունները:

V.V. Hayrapetyan, A.A. Ghukasyan

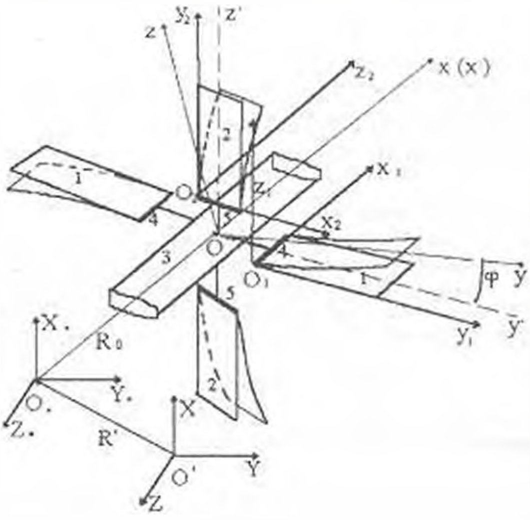
On controlled motion of one model of an aircraft with elastic elements

В работе приводится описание одной модели летательного аппарата (ЛА) с упругими элементами типа пластин. При некоторых предположениях относительно малости смещений пластин и системы ориентации получены линейные уравнения движения ЛА и уравнения упругих колебаний пластин. Приведена одна кибернетическая схема управления, учитывающая упругие свойства ЛА.

1.Описание кинематической модели ЛА. Рассматривается управляемое движение упругого летательного аппарата (ЛА) в центральном гравитационном поле Земли. ЛА представляет собой цилиндрическое, абсолютно твердое тело с закрепленными к нему упругими пластинами (фиг. 1). Пара пластин 1 перпендикулярна паре пластин 2. Края пластин жестко заделаны к абсолютно жестким стержням 4,5. Пластины однородные с толщиной h и размерами $(a \times b)$. Они характеризуются плотностью ρ, модулем Юнга E и жесткостью на изгиб D. Радиус центрального тела обозначим через q.

Введем инерциальную систему координат $O_*X_*Y_*Z_*$ (фиг. 1). В зависимости от характера исследований в качестве системы $O_*X_*Y_*Z_*$ можно выбрать также какую-либо квазиинерциальную систему координат, ускорение и угловая скорость которой считаются пренебрежимо малыми. Например, начало координат O_* можно поместить в центре планеты, одну ось направить по оси вращения планеты, вторую и третью расположить в плоскости экватора. В другом случае одну ось совмещают с радиус-вектором перигея орбиты, вторую проводят по нормали к плоскости орбиты, а третью – параллельно трансверсали. В любом случае система $O_*X_*Y_*Z_*$ предполагается невращающейся и равномерно-перемещающейся [1]. Здесь мы введем еще одну систему координат $O'XYZ$, положение которой известно относительно $O_*X_*Y_*Z_*$ и в начале которой может находиться пункт наблюдения. Соответствующие оси систем $O_*X_*Y_*Z_*$ и $O'XYZ$

параллельны. Для описания кинематики ЛА вводится также связанная прямоугольная система координат $Oxyz$, начало которой находится в центре масс ЛА, а ось Ox направлена вдоль продольной оси ЛА.



Фиг.1

Будем рассматривать поступательное движение ЛА вдоль оси Ох и вращение вокруг той же оси. Положение начала системы координат $O_{*}X_{*}Y_{*}Z_{*}$ относительно $O'XYZ$ определим радиус-вектором $\mathbf{R}'$, а положение центра масс ЛА относительно системы $O_{*}X_{*}Y_{*}Z_{*}$ $\mathbf{R}_0$. Относительное положение точки тела в деформированном состоянии обозначим через вектор $\mathbf{r}$. Абсолютное положение точек ЛА определяется вектором

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}' + \mathbf{R}_0 + \mathbf{r} \tag{1.1}$$

Для исследования упругих колебаний пластин 1,2 введем соответственно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$, начала которых в связанной системе известны (фиг.1). Ориентация связанной системы Oxyz относительно $O'XYZ$ определяется тремя углами $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, называемые самолетными углами [2]. Матрица перехода между системами $Oxyz$ и $O'XYZ$ в нашем случае имеет следующий вид:

	X	Y	Z
x	c_1c_3	$c_1s_3+s_1s_2c_3$	$s_1s_3-c_1s_2c_3$
y	$-c_2s_3$	$c_1c_3-s_1s_2s_3$	$s_1c_3-c_1s_2s_3$
z	s_2	$-s_1c_2$	c_1c_2

где $\sin\theta_k = s_k$, $\cos\theta_k = c_k$, $k = 1,2,3$.

Для определения вращения ЛА введем жестко связанную с ЛА систему координат $Ox'y'z'$. Ось совпадает с осью Ox, ось Oy' находится в плоскости недеформированных пластин 1, ось Oz' – в плоскости недеформированных пластин 2. Вращение ЛА определится углом φ (фиг.1).

Обозначая радиус-вектор произвольной точки пластины 1 через $\mathbf{r}_1$, а точки пластины 2 через $\mathbf{r}_2$ в системе $Oxyz$, имеем

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - b/2 \\ (q+l+y_1)\cos\varphi - w_1\sin\varphi \\ (q+l+y_1)\sin\varphi + w_1\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

$$\mathbf{r}_2=\begin{pmatrix} r_{2x}\\ r_{2y}\\ r_{2z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w_2\\ (x_2-b/2)\cos\varphi-(q+l+y_2)\sin\varphi\\ (x_2-b/2)\sin\varphi+(q+l+y_2)\cos\varphi\end{pmatrix}$$

где $w_1=w_1(t,x_1,y_1)$ и $w_2=w_2(t,x_2,y_2)$ − упругие перемещения точек пластин в системах $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$ соответственно, а l − длина жесткого стержня, соединяющего пластину с основным телом.

Для удобства элементы матрицы перехода между системами $O'XYZ$ и Oxyz обозначим следующим образом:

$$\begin{pmatrix} c_2c_3 & c_1s_3+s_1s_2c_3 & s_1s_3-c_1s_2c_3\\ -c_2s_3 & c_1c_3-s_1s_2s_3 & s_1c_3-c_1s_2s_3\\ s_2 & -s_1c_2 & c_1c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz}\\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz}\\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz}\end{pmatrix} \tag{1.3}$$

С учетом (1.2), (1.3) и предполагая, что радиус-вектор R_0 направлен по оси вращения ЛА, радиус-векторы точек пластин 1,2 соответственно (1.1) примут вид

$$\mathbf{R}_i=\begin{pmatrix} R_{ix}\\ R_{iy}\\ R_{iz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X+a_{xx}R_0+a_{xx}r_{ix}+a_{yx}r_{iy}+a_{zx}r_{iz}\\ Y+a_{xy}R_0+a_{xy}r_{ix}+a_{yy}r_{iy}+a_{zy}r_{iz}\\ Z+a_{xz}R_0+a_{xz}r_{ix}+a_{yz}r_{iy}+a_{zz}r_{iz}\end{pmatrix},\quad i=1,2 \tag{1.4}$$

$\dot{\mathbf{R}}_i$ $i=1,2$ имеют следующий вид:

$$\dot{\mathbf{R}}_i=\begin{pmatrix} a_{xx}\dot{R}_0+a_{xx}\dot{r}_{ix}+a_{yx}\dot{r}_{iy}+a_{zx}\dot{r}_{iz}\\ a_{xy}\dot{R}_0+a_{xy}\dot{r}_{ix}+a_{yy}\dot{r}_{iy}+a_{zy}\dot{r}_{iz}\\ a_{xz}\dot{R}_0+a_{xz}\dot{r}_{ix}+a_{yz}\dot{r}_{iy}+a_{zz}\dot{r}_{iz}\end{pmatrix},\quad i=1,2 \tag{1.5}$$

При вычислениях $\dot{\mathbf{R}}_i$ $i=1,2$ учитывается, что наблюдательный пункт неподвижен относительно системы $O.X.Y.Z.$, а $\theta_1,\theta_2,\theta_3=\mathrm{const}$.

2. **Вывод уравнений движения и колебаний пластин.** Поступательное движение и вращение ЛА происходят за счет внешней силы **F**, направленной вдоль оси Ox и вращательного момента **M**, приложенной вокруг той же оси.

Кинетическая энергия движения ЛА имеет вид

$$T=\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2+\frac{m_c}{2}\dot{\mathbf{R}}_0^2+\rho h\iint_{\Omega}\dot{\mathbf{R}}_1^2d\Omega+\rho h\iint_{\Omega}\dot{\mathbf{R}}_2^2d\Omega \tag{2.1}$$

где I − момент инерции основного тела 3 относительно оси Ox, $d\Omega$ − элемент площади срединной плоскости пластин, m_c − масса ЛА без пластин. Первое и второе слагаемые в (2.1) представляют собой кинетическую энергию вращательного и поступательного движений ЛА без пластин. Третий и четвертый слагаемые представляют кинетические энергии первой и второй пар пластин соответственно.

Потенциальная энергия ЛА состоит из потенциальных энергий упругой деформации[3] и гравитационных сил

$$U = D\sum_{i=1}^{2}\iint_{\Omega}\left\{\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2}\right)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2}-\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i \partial y_i}\right)^2\right]\right\}d\Omega + mgR_0 \quad (2.2)$$

где $D = Eh^3/12(1-\nu)^2$, ν – коэффициент Пуассона.

Исследования проводятся в рамках линейной теории упругости, где имеют место следующие предположения: упругое поперечное смещение пластин мало по сравнению с линейными размерами, а цилиндрическая жесткость на изгиб велика($D \sim \varepsilon^{-1}$, $w_i/\max(a,b) \sim \varepsilon$ $i=1,2$, $\varepsilon<<1$) [4]. Из этих предположений следует также, что $\dot{\varphi} \sim \varepsilon^{1/2}$, $\ddot{\varphi} \sim \varepsilon$, $\dot{R}_0 \sim \varepsilon^{1/2}$, $\ddot{R}_0 \sim \varepsilon$.

Для получения уравнений движения ЛА и колебаний пластин воспользуемся вариационным принципом Гамильтона-Остроградского[2]

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta(T + A - U)dt = 0 \quad (2.3)$$

где δT – вариация кинетической энергии, δU – вариация потенциальной энергии, δA – элементарная работа внешней силы F и внешнего момента M на виртуальных перемещениях $\delta R_0, \delta\varphi$. t_1, t_2 – соответственно начальное и конечное время движения, причем $\delta\varphi = \delta w_1 = \delta w_2 = \delta R_0 = 0$ при $t = t_1, t_2$. В выражениях $\delta T, \delta U, \delta A$, оставляя члены, порядок которых не превышает ε, получим следующие уравнения движения ЛА и колебаний пластин:

$$m\ddot{R}_0 = -mg + F + 2a_R\ddot{\varphi}\sin\varphi + 2d_1\rho h\ddot{\varphi}\cos\varphi\iint_{\Omega}(q+l+y_2)d\Omega - 2\rho h\iint_{\Omega}\ddot{w}_2 d\Omega -$$

$$-2d_1\rho h\dot{\varphi}^2\sin\varphi\iint_{\Omega}(q+l+y_2)d\Omega - 2a_R\dot{\varphi}^2\cos\varphi + 2d_1\rho h\iint_{\Omega}\ddot{w}_1\sin\varphi d\Omega \quad (2.4)$$

$$I\ddot{\varphi} + 2a_{\varphi 1}\ddot{\varphi}\sin^2\varphi + 2a_{\varphi 2}\ddot{\varphi}\cos^2\varphi - 2a_{\varphi 3}\ddot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi - 2a_{\varphi 4}\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi -$$

$$-a_{\varphi 3}\dot{\varphi}^2\cos 2\varphi + 2d_2\rho h\sin^2\varphi\iint_{\Omega}\ddot{w}_1(q+l+y_1)d\Omega +$$

$$+2\rho h\cos^2\varphi\iint_{\Omega}\ddot{w}_1(q+l+y_1)d\Omega - 2a_{\varphi 5}\ddot{R}_0\sin\varphi - 2d_1\rho h\ddot{R}_0\cos\varphi\iint_{\Omega}(q+l+y_1)d\Omega -$$

$$-2d_1\rho h\sin\varphi\iint_{\Omega}\ddot{w}_2(x_2-b/2)d\Omega - 2d_1\rho h\cos\varphi\iint_{\Omega}\ddot{w}_2(q+l+y_2)d\Omega = M(t) \quad (2.5)$$

$$\ddot{w}_1(d_2\sin^2\varphi+\cos^2\varphi) + \frac{D}{\rho h}\Delta^2 w_1 = -d_2(q+l+y_1)\ddot{\varphi}\sin^2\varphi - (q+l+y_1)\ddot{\varphi}\cos^2\varphi +$$

$$+ d_3(q+l+y_1)\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi + d_1\ddot{R}_0(\sin\varphi-\cos\varphi) \quad (2.6)$$

$$\ddot{w}_2 + \frac{D}{\rho h}\Delta^2 w_2 = -\ddot{R}_0 + g - d_1(q+l+y_2)\ddot{\varphi}\cos\varphi + d_1(x_2-b/2)\ddot{\varphi}\sin\varphi -$$

$$-d_1(q+l+y_2)\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + d_1(x_2-b/2)\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi \quad (2.7)$$

с начальными и граничными условиями

$$R_0(t_0)=R_{0},\ \dot R_0(t_0)=V_0,\ \varphi(t_0)=\varphi_0,\ \dot\varphi(t_0)=\omega_0 \tag{2.8}$$

$$w_i(t_0,x_i,y_i)=F_i^1(x_i,y_i),\ \dot w_i(t_0,x_i,y_i)=F_i^2(x_i,y_i)\quad i=1,2 \tag{2.9}$$

$$w_i(t,x_i,y_i)\Big|_{y_i=0}=0;\ \left.\frac{\partial w_i(t,x_i,y_i)}{\partial y_i}\right|_{y_i=0}=0;\ \left.\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2}+\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}\right)\right|_{y_i=a}=0;$$

$$\left.\left[\frac{\partial^3 w_i}{\partial y_i^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i^2\partial y_i}\right]\right|_{y_i=a}=0;\ \left.\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2}\right)\right|_{x_i=0}=0;$$

$$\left.\left[\frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w_i}{\partial y_i^2\partial x_i}\right]\right|_{x_i=0}=0; \tag{2.10}$$

$$\left.\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2}\right)\right|_{x_i=b}=0;\qquad \left.\left[\frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w_i}{\partial y_i^2\partial x_i}\right]\right|_{x_i=b}=0;\qquad i=1,2$$

где

$$d_1=\sin 2\theta_3\sin^2\theta_2\cos^2\theta_1-\sin 2\theta_1\sin\theta_2\sin^2\theta_1$$

$$d_2=1-\sin 2\theta_1\sin 2\theta_3\sin\theta_2,\ \ d_3=1-d_2=\sin 2\theta_1\sin 2\theta_3\sin\theta_2$$

$$a_R=d_1\rho h\iint\limits_{\Omega}(q+l+y_1+x_2-b/2)d\Omega$$

$$a_{\varphi1}=d_2\rho h\iint\limits_{\Omega}[(q+l+y_1)^2+(x_2-b/2)^2]d\Omega+\rho h\iint\limits_{\Omega}(q+l+y_2)^2d\Omega$$

$$a_{\varphi2}=d_2\rho h\iint\limits_{\Omega}(q+l+y_2)^2d\Omega-\rho h\iint\limits_{\Omega}[(q+l+y_1)^2+(x_2-b/2)^2]d\Omega$$

$$a_{\varphi3}=2d_3\rho h\iint\limits_{\Omega}(x_2-b/2)(q-l+y_2)d\Omega$$

$$a_{\varphi4}=d_2\rho h\iint\limits_{\Omega}[(q+l+y_1)^2+(x_2-b/2)^2-(q+l+y_2)^2]d\Omega$$

$$a_{\varphi5}=d_1\rho h\iint\limits_{\Omega}(x_2-b/2+q+l+y_1)d\Omega$$

В дальнейшем для аналитического исследования уравнений колебаний пластин, предполагается что ось O_1X_1 совпадает с осью вращения ЛА. При этом уравнения движения (2.4), (2.5) и уравнения колебаний пластин(2.6), (2.7) принимают следующий вид:

$$m\ddot R_0=-mg+F-2\rho h\iint\limits_{\Omega}\ddot w_2 d\Omega \tag{2.11}$$

$$2a_{\varphi1}\ddot\varphi\rho h+2\rho h\iint\limits_{\Omega}\ddot w_1(q+l+y_1)d\Omega+I\ddot\varphi=M(t) \tag{2.12}$$

$$\ddot w_1+\frac{D}{\rho h}\Delta^2 w_1=-\ddot\varphi(q+l+y_1) \tag{2.13}$$

$$\ddot{w}_2 + \frac{D}{\rho h}\Delta^2 w_2 = -\ddot{R}_0 + g \qquad (2.14)$$

3.Решение краевой задачи и учет упругости пластин в системе управления ЛА. Краевую задачу (2.13),(2.14),(2.9),(2.10) можно представить в виде

$$\ddot{w}_i + \frac{D}{\rho h}\Delta^2 w_i = \Phi_i \qquad i = 1,2 \qquad (3.1)$$

где $\Phi_1 = -\ddot{\varphi}(q + l + y_1)$, $\Phi_2 = -\ddot{R}_0 + g$.

В (3.1) можно перейти к безразмерным переменным, введя единицу времени и длины соответственно по формулам $\theta = (D_* / \rho_0 d)^{1/2}$, $d = (ab)^{1/2}$, где D_* – единица измерения жесткости на изгиб, а ρ_0 – единица измерения плотности.

Решение уравнения (3.1) с заданной правой частью представим в виде ряда по собственным формам однородной краевой задачи[3]

$$w_i(t, x_i, y_i) = \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mn}(t) X_{mi}(x_i) Y_n(y_i) \qquad (3.2)$$

Функции $X_{mi}(x_i)$, $Y_n(y_i)$ представляют собой собственные формы колебаний однородных балок, которыми аппроксимируются пластины. $X_{mi}(x_i)$ – собственная форма колебаний свободной балки, а $Y_n(y_i)$ – собственная форма колебаний балки, жестко заделанной на конце $y_i = 0$, и свободным на конце $y_i = a$.

Подставляя (3.2) в (3.1) и (2.9), получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $w_{mn}(t)$

$$\ddot{w}_{mn}(t) + k_{mn}^2 w_{mn}(t) = \Phi_{mn}[t] \qquad (3.3)$$

с начальными условиями

$$w_{mni}(t_0) = \iint_{\Omega} F_i^1(x_i, y_i) X_{mi}(x_i) Y_{ni}(y_i) d\Omega = F_{mni}^1$$

$$\dot{w}_{mni}(t_0) = \iint_{\Omega} F_i^2(x_i, y_i) X_{mi}(x_i) Y_{ni}(y_i) d\Omega = F_{mni}^2 \qquad (3.4)$$

где

$$k_{mni}^2 = \frac{D}{\rho h}\left[\lambda_n^4 + \mu_m^4 + 2\iint_{\Omega} X_{mi}''(x_i) Y_{ni}''(y_i) X_{mi}(x_i) Y_{ni}(y_i) d\Omega\right]$$

$$\Phi_{mni}[t] = \iint_{\Omega} \Phi_i X_{mi}(x_i) Y_{ni}(y_i) d\Omega \qquad i = 1,2$$

а λ_n, μ_m – собственные частоты балок. Решение уравнения (3.3) с начальными условиями (3.4) имеет вид

$$w_{mn}(t) = c_{mn}^1 \cos k_{mn} t + c_{mn}^2 \sin k_{mn} t + \frac{1}{k_{mn}} \int_{t_0}^{t} \Phi_{mn}[\tau] \sin k_{mn}(t - \tau) d\tau \qquad (3.5)$$

где

$$c^1_{mni} = F^1_{mni}\cos k_{mni} t_0 + \frac{F^2_{mni}}{k_{mni}}\sin k_{mni} t_0,\quad c^2_{mni} = F^1_{mni}\sin k_{mni} t_0 + \frac{F^2_{mni}}{k_{mni}}\cos k_{mni} t_0$$

Следовательно, упругие колебания пластин ЛА во время движения определяются выражением

$$\begin{aligned} w_i(t, x_i, y_i) = \sum_{m,n=1}^{\infty} [c^1_{mni}\cos k_{mni} t + c^2_{mni}\sin k_{mni} t + \\ + \frac{1}{k_{mni}}\int_{t_0}^{t} \Phi_{mni}[\tau]\sin k_{mni}(t-\tau)d\tau] X_{mi}(x_i) Y_{ni}(y_i) \end{aligned} \tag{3.6}$$

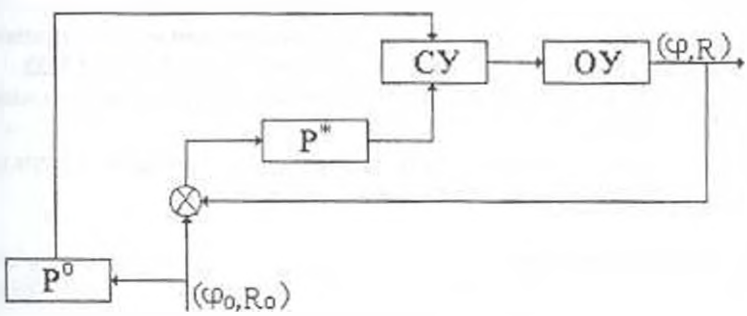
Выражение (3.6) используется при введении колебательного эффекта в систему управления ЛА, поскольку при управлении упругими ЛА появляются дополнительные отклонения от программного движения. Для коррекции программного движения ЛА необходимо в системе управления ввести дополнительный регулятор с обратной связью, который вырабатывает управляющие силы и моменты, в зависимости от упругих колебаний пластин. Эти силы и моменты в задачах кинематического управления в данном случае определяются из (2.11), (2.12) в виде

$$F^* = 2\rho h \iint_{\Omega} \ddot{w}_2 d\Omega$$

$$M^* = 2\rho h \iint_{\Omega} \ddot{w}_1 (q + l + y_1) d\Omega$$

где $w_i(t, x_i, y_i)$, $i = 1,2$ определяются из (3.6).

На фиг.2 схематично представлена кибернетическая схема управления ЛА с упругими свойствами.



Фиг.2

P^0 – регулятор жесткой модели ЛА; P^*-регулятор, учитывающий упругий эффект ЛА; СУ-система управления; ОУ-объект управления

4. О сходимости полученных рядов. В уравнениях (3.1) Φ_i $(i = 1,2)$ являются обобщенными управляющими воздействиями из класса кусочно-непрерывных и ограниченных функций, коэффициенты Фурье которых имеют порядок $\frac{1}{m^{2+\alpha} n^{2+\alpha}}$, $\alpha > 0.5$, следовательно, левые части уравнений (3.1) тоже являются ограниченными функциями и должны принадлежать классу L^2. Мы должны показать, что ряды (3.6) и их смешанные производные четвертого порядка по x_i, y_i, а также вторая производная по t сходятся с квадратом. Как видно из (3.1), $w_i(t, x_i, y_i)$ четырежды дифференцируемы по x_i, y_i и дважды дифференцируемы по t. Так как левые части уравнений (3.1) принадлежат классу L^2, то функции $F_i^1(x_i, y_i)$, $F_i^2(x_i, y_i)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\partial^4 F_i^1 / \partial x_i^k \partial y_i^l \in L^2, \ \partial^4 F_i^2 / \partial x_i^k \partial y_i^l \in L^2, \ k, l = \overline{0, 4}; \quad k + l = 4 \qquad (4.1)$$

С другой стороны μ_m, λ_n зависят от m, n линейно [5]. Ряды коэффициентов Фурье функций (4.1) удовлетворяют неравенству Бесселя [6] и должны иметь порядок $\frac{1}{m^{k+\alpha} n^{l+\alpha}}, \alpha > 0.5; \ k, l = \overline{0, 4}; \quad k + l = 4$. Тогда коэффициенты Фурье функции $F_i^1(x_i, y_i)$, $F_i^2(x_i, y_i)$ будут иметь порядок $\frac{1}{m^{4+\alpha} n^{4+\alpha}}$. Следовательно, коэффициенты c_{mn}^1, c_{mn}^2 (3.5) имеют порядок $\frac{1}{m^{4+\alpha} n^{4+\alpha}}$, где $\alpha > 0.5$

Таким образом, из постановки задачи следует, что ряды (3.6) и их производные по t, x_i, y_i сходятся с квадратом и их предельные функции принадлежат классу L^2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. -М.:Машиностроение, 1987. 232с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика.-М.:Наука, 1977. 736с.
3. Бабаков И.М. Теория колебаний.-М.:Наука, 1968. 559с.
4. Гукасян А.А., Саркисян С.В. О колебательном движении прямоугольной пластинки.-Изв.АН Арм. ССР. Механика, 1990, №4, с.13-23.
5. Вибрации в технике. Под ред. В.В. Болотина.-М.:Машиностроение, т.1, 1978. 352с.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.:Наука. 1968. 496с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 28.06.1999

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №1, 2000 Механика

УДК 539.3

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ ГИБКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ

Саркисян Саркис В.

Սարգիս Վ. Սարգսյան

Ճկուն անիզոտրոպ գլանային թաղանթի տատանումների օպտիմալ ստաբիլիզացիան

Աշխատանքում դիտարկված է համասեռ անիզոտրոպ ճկուն շրջանային գլանային թաղանթի տատանումների օպտիմալ ստաբիլիզացիայի խնդիրը: Տատանումները ստաբիլիզացվում են ամբողջ մակերևույթի վրա կիրառված ուժով: Որպես նպատակային ֆունկցիոնալ դիտարկվում են թաղանթի կինետիկ և պոտենցիալ էներգիաները և ազդող ուժերի աշխատանքը: Լյապունովի ֆունկցիան վեր է ածվել շարքի և կառուցվել են նրա հաջորդական մոտավորությունները: Ոչգծային տատանումների համար ստացվել է օպտիմալ ստաբիլիզացնող ղեկավարումը:

Sargis V. Sargsyan

Optimal Stabilization of Vibrations of Flexible Anisotropic Cylindrical Board

В работе рассматривается задача об оптимальной стабилизации колебаний гибкой однородной анизотропной цилиндрической панели. Колебания стабилизируются нагрузкой, приложенной на всю поверхность оболочки. Для нелинейных колебаний получено оптимальное стабилизирующее воздействие.

Рассматривается однородная анизотропная гибкая круговая панель толщины h, радиуса R, размер которой по образующей (длина) значительно превышает размер вдоль дуги в ширину, так что изогнутую поверхность можно считать цилиндрической.

Принимается, что колеблющая панель скреплена с неподвижными ребрами и загружена силами, которые вызывают как плоские, так и изгибные деформации оболочки.

В основу ставятся гипотезы уточненной теории С.А. Амбарцумяна, учитывающие поперечные сдвиги [1].

Одномерные уравнения колебаний этой панели имеют вид [2]:

$$
\begin{aligned}
&B_{26}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial y}\right]-B_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\
&B_{22}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial y}\right]+B_{26}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\
&\frac{h^2}{12}\left[B_{22}\frac{\partial^3\psi_y}{\partial y^3}+B_{26}\frac{\partial^3\psi_x}{\partial y^3}\right]+\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\sigma}{R}-\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{q(y,t)}{h}=0\\
&\frac{h^2}{12}\left[B_{26}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}+B_{66}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2}\right]-k^2\left[B_{55}\psi_x+B_{45}\left(\psi_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]=0\\
&\frac{h^2}{12}\left[B_{22}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}+B_{26}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2}\right]-k^2\left[B_{45}\psi_x+B_{44}\left(\psi_y+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]=0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Пусть на движение панели наложены следующие начальные условия:

$$w(y,t)\big|_{t=0} = \Phi(y), \quad \dot{w}(y,t)\big|_{t=0} = \Phi_1(y)$$

где функции $\Phi(y)$, $\Phi_1(y)$ (начальные прогиб и скорость точек срединной поверхности) принадлежат классу L_2 на дуге $[0, b]$.

Для определения оптимального значения нормальной нагрузки $q(y, t)$, которая стабилизирует колебания

$$w(y,t)\big|_{t\to 0} \to 0, \quad \dot{w}(y,t)\big|_{t\to\infty} \to 0$$

минимизируется полная энергия панели и стабилизирующего воздействия

$$J = K + V + \frac{g\chi}{hj}\int_0^{\infty}\int_0^{b} q^2(y,t)\,dy\,dt$$

Здесь K и V– соответственно кинетическая и потенциальная энергии оболочки [1].

Первое приближение системы уравнений (1), с учетом граничных условий и выбора типа управляющей нагрузки, целесообразно искать в следующем виде:

$$\begin{gathered} w = f(t)\sin\lambda y,\ u = \psi(t)\cos\lambda y,\ v = \varphi(t)\cos\lambda y \\ \psi_x = \psi_x(t)\cos\lambda y,\ \psi_y = \psi_y(t)\cos\lambda y \end{gathered} \tag{2}$$

где $\lambda = \pi / b$.

Подставляя $\psi_x(y)$ и $\psi_y(y)$ из (2) в четвертое и пятое уравнения системы (1), получаются их зависимости от w, а из остальных уравнений этой системы и предположения, что взаимное сближение кромок закрепленных длинных краев панели должно быть равно нулю, получается значение α, зависящее от $f(t)$. Учитывая вышеизложенное и представляя значение управляющей нагрузки в виде

$$q(y,t) = \tilde{q}(t)\sin\lambda y \tag{3}$$

применяя метод Бубнова-Галеркина для каждой гармоники, получается следующее обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее нелинейные колебания панели:

$$\begin{gathered} \frac{d^2 f}{dt^2} - \left\{\frac{h^2\lambda^4}{12}\left(B_{22}a_2 + B_{26}a_1\right) + \frac{8}{R^2\pi^2}B_{22}\left(1 + \frac{2B_{26}^2}{B_{22}B_{66}}\right)\right\}\frac{g}{\gamma}f + \\ \left\{\frac{2\lambda^2}{\pi R}\left(1 + \frac{2B_{26}^2}{B_{22}B_{66}}\right) + \frac{\pi B_{22}}{b^2 R}\right\}\frac{g}{\gamma}f^2 + \frac{B_{22}\pi g}{b^2 R\gamma}f^3 = \tilde{q}\frac{hg}{\gamma} \end{gathered} \tag{4}$$

Для решения нелинейной задачи преобразуем (4), вводя обозначения

$$x_1 = \alpha f, \quad x_2 = \dot{f}, \quad u = \tilde{q}\frac{hg}{\gamma} \tag{5}$$

получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_1^2 + \alpha_3 x_1 + u \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{B_{22}\pi g}{b^2 R\gamma},\ \alpha_2 = -\left\{\frac{2\lambda^2}{\pi R}\left(1+\frac{2B_{26}^2}{B_{22}B_{66}}\right)+\frac{\pi B_{22}}{b^2 R}\right\}\frac{g}{\gamma}$$

$$\alpha_3 = \left\{\frac{h^2\lambda^4}{12}\left(B_{22}a_2 + B_{26}a_1\right)+\frac{8}{R^2\pi^2}B_{22}\left(1+\frac{2B_{26}^2}{B_{22}B_{66}}\right)\right\}\frac{g}{\gamma}$$

Теперь задачу оптимальной стабилизации можно сформулировать следующим образом: определить такое оптимальное стабилизирующее управление u^0, которое минимизировало уже целевой функционал

$$J = \int_0^\infty \left(x_1^2 + x_2^2 + u^2\right)dt$$

по всей поверхности панели, и выполнялись условия

$$x_1\big|_{t\to\infty} \to 0,\quad x_2\big|_{t\to\infty} \to 0$$

Система уравнений (6) нелинейная. Для решения задачи оптимальной стабилизации воспользуемся методом, предложенным в [3].

Функция Ляпунова для системы (6) представляется в виде

$$V(x_1,x_2) = V_2(x_1,x_2) + V_3(x_1,x_2) + \ldots,$$

где $V_k(x_1,x_2)$ $(k = 2,3,\ldots)$–форма k-того порядка.

Для линейного приближения системы (6)

$$\dot{x}_1 = \alpha x_2,\quad \dot{x}_2 = \alpha_3 x_1 + u \tag{7}$$

принимаем

$$V_2(x_1,x_2) - C_{11}x_1^2 + 2C_{12}x_1x_2 + C_{22}x_2^2 \tag{8}$$

Воспользуясь известными уравнениями Бельмана и представлением (8), получим

$$\left(2C_{12}\alpha_3 - C_{12}^2 + 1\right)x_1^2 + \left(2C_{12}\alpha - C_{22}^2 + 1\right)x_2^2 + 2\left(C_{11}\alpha + C_{22}\alpha_3 - C_{11}C_{22}\right)x_1x_2 = 0 \tag{9}$$

Из (9) определяются коэффициенты C_{ij} (i, j=1, 2), удовлетворяющие условию определенно положительности функции Ляпунова $V_2(x_1,x_2)$.

Для линейного приближения (7) оптимальное управление следующее:

$$u^0 = -C_{12}x_1 - C_{22}x_2\,.$$

Для вычислений последующих приближений функции $V(x_1,x_2)$ используется следующее линейное преобразование:

$$y_1 = \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2,\quad y_2 = \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 \tag{10}$$

где β_{ij} определяются из уравнений

$$C_{11} = \beta_{11}^2 + \beta_{21}^2,\ C_{12} = \beta_{12}\beta_{11} + \beta_{21}\beta_{22},\ C_{22} = \beta_{12}^2 + \beta_{22}^2$$

приводящие функцию $V_2(x_1,x_2)$ к каноническому виду

$$V_2(y_1,y_2) = y_1^2 + y_2^2\,.$$

Используя (10) и обратное к нему преобразование

$$x_1 = e_{11}y_1 + e_{12}y_2,\quad x_2 = e_{21}y_1 + e_{22}y_2$$

уравнения (6) примут вид

$$\dot{y}_1 = \frac{\alpha e_{21}e_{22} - \alpha_3 e_{11}e_{12}}{\Delta}y_1 + \frac{\alpha e_{22}^2 - \alpha_3 e_{12}^2}{\Delta}y_2 - \frac{\alpha_2 e_{12}e_{11}^2}{\Delta}y_1^2 - \frac{\alpha_2 e_{12}^3}{\Delta}y_2^2 -$$

$$-\frac{2\alpha_2 e_{11}e_{12}^2}{\Delta}y_1y_2-\frac{\alpha_1 e_{12}e_{11}^3}{\Delta}y_1^3-\frac{\alpha_1 e_{12}^4}{\Delta}y_2^3-\frac{3\alpha_1 e_{12}^3 e_{11}}{\Delta}y_1y_2^2-\frac{3\alpha_1 e_{12}^2 e_{11}^2}{\Delta}y_1^2y_2-\frac{e_{12}}{\Delta}u$$

$$\dot{y}_2=\frac{\alpha e_{21}^2-\alpha_2 e_{11}^2}{\Delta}y_1+\frac{\alpha e_{21}e_{22}-\alpha_2 e_{11}e_{12}}{\Delta}y_2-\frac{\alpha_2 e_{11}^3}{\Delta}y_1^2-\frac{\alpha_2 e_{11}e_{12}^2}{\Delta}y_2^2-$$

$$-\frac{2\alpha_2 e_{11}^2 e_{12}}{\Delta}y_1y_2-\frac{\alpha_1 e_{11}^4}{\Delta}y_1^3-\frac{\alpha_1 e_{11}e_{12}^3}{\Delta}y_2^3-\frac{3\alpha_1 e_{11}^2 e_{12}^2}{\Delta}y_1y_2^2-\frac{3\alpha_1 e_{11}^3 e_{12}}{\Delta}y_1^2y_2-\frac{e_{11}}{\Delta}u$$

где $\Delta=e_{11}e_{22}-e_{12}e_{21}$, а минимизируемый функционал

$$J=\int_0^\infty\left[\left(e_{11}^2+e_{21}^2\right)y_1^2+2\left(e_{11}e_{12}+e_{21}e_{22}\right)y_1y_2+\left(e_{12}^2+e_{22}^2\right)y_2^2+u^2\right]dt$$

Далее, используя тот же метод [3], для последующих приближений функции Ляпунова будем иметь:

$$V_3(y_1,y_2)=V_5(y_1,y_2)=V_6(y_1,y_2)=\ldots\equiv 0$$

$$V_4(y_1,y_2)=A_1y_1^4+A_2y_1^3y_2+A_3y_1^2y_2^2+A_4y_1y_2^3+A_5y_2^4$$

где $A_i(i=\overline{1,5})$ определяются из системы неоднородных линейных уравнений известным образом [3].

Теперь для $V(y_1,y_2)$ можно записать следующее:

$$V(y_1,y_2)=y_1^2+y_2^2+A_1y_1^4+A_2y_1^3y_2+A_3y_1^2y_2^2+A_4y_1y_2^3+A_5y_2^4$$

для оптимального управляющего воздействия получится следующее:

$$u^0=\frac{e_{12}}{\Delta}\left(y_1+2A_1y_1^3+\frac{3}{2}A_2y_1^2y_2+A_3y_1y_2^2+\frac{1}{2}A_4y_2^3\right)+$$

$$+\frac{e_{11}}{\Delta}\left(y_2+\frac{1}{2}A_2y_1^3+A_3y_1^2y_2+\frac{3}{2}A_4y_1y_2^2+2A_5y_2^3\right)$$

Воспользовавшись обозначением (5) и преобразованием [10], получаются выражения для функции Ляпунова $V^0(f,\dot f)$ и оптимального управления $u^0(f,\dot f)$. Сходимость полученных рядов и конечность целевого функционала легко можно показать [3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек.-М.: Наука, 1974. 448с.
2. Саркисян С.В. Некоторые задачи изгиба и колебаний анизотропных гибких цилиндрических оболочек.-Механика. Межвуз. сб. научн. тр. Ереван, ЕГУ, 1984, вып. 3, с.182-192.
3. Альбрехт Э. Г. Об оптимальной стабилизации нелинейных систем.-ПММ, 1961, т. 25, вып.5, с.836-844.
4. Габриелян М.С. О стабилизации механической системы континуума. Уч. записки ЕГУ, 1975, 2, с.49-57.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 29.06.1999

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №1, 2000 Механика

УДК 539.3:620.1

ԲՈՐԱԼՅՈՒՄԻՆԱՅԻՆ ԲԱՂԱԴՐԱՆՅՈՒԹԵՐԻ ՄՆԱՑՈՐԴԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

Գասպարյան Ս.Հ., Գևորգյան Ս.Խ, Մուսայելյան Ս.Լ.

С.А. Гаспарян, С.Х. Геворкян, С.Л. Мусаелян

Определение остаточных напряжений в боралюминиевых композитах

Приведены метод определения остаточных напряжений в боралюминиевых волокнистых материалах и результаты их реализации. Рассматривая возникновение остаточных напряжений как случайный процесс, построена методика представления данных экспериментов, на основе которой проведена количественная оценка их величины и распределения.

S.H. Gasparyan, S.Ch. Gevorkyan, S.L. Musaelyan

Determination of boron-aluminium composite's residual stresses

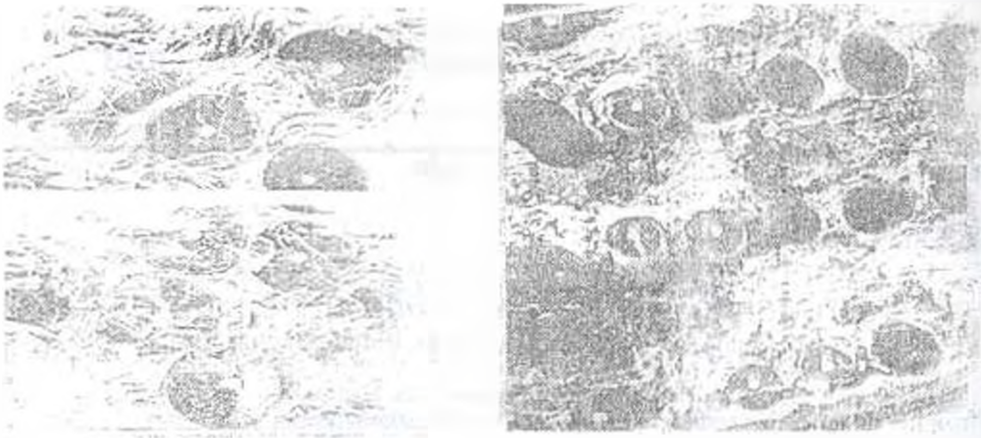
Բերված են բորալյումինային թելքավոր բաղադրանյութերում մնացորդային լարումների որոշման փորձարարական մեթոդ և դրանց իրականացման արդյունքները: Դիտարկելով մնացորդային լարումների առաջացումը որպես պատահական գործընթաց, կառուցվել է փորձերի տվյալների ներկայացման վիճակագրական մեթոդիկա, որի հիման վրա կատարվել է մնացորդային լարումների բաշխման ու մեծության քանակային գնահատում:

Մնացորդային լարումները, ինչպես և կառուցվածքային անհամասեռությունը բաղադրանյութերի ցայտուն արտահայտված հատկանիշներ են և առաջանում են դրանց պատրաստման տեխնոլոգիական գործընթացում: Հետևաբար, բաղադրանյութերից պատրաստված կառուցվածքների ամրության հաշվարկներում այդ գործոնները պետք է համապատասխանորեն արտացոլվեն: Մնացորդային լարումների հաշվառումը, կախված դրանց արժեքից ու շահագործման ընթացքում բեռնվածքից առաջացած լարումների նկատմամբ հարաբերակցությունից, իրականացվում է տարբեր հաշվարկային մոտեցումներով [1]: Տարածված մոտեցումներից է տեխնոլոգիական ու շահագործական լարումների վերադրումը, որը և առաջադրում է դրանց (առաջինների) նախնական արժեքի որոշումը: Մնացորդային լարումների ազդեցության հաշվառումը բաղադրանյութերի հոգնածային ամրության փորձարարական ուսումնասիրության հիմնահարցերից է, որը նույնպես կարևորում է դրանց բաշխման ու արժեքի գնահատումը:

Մնացորդային լարումների որոշման (առանց կամ մասնակի քայքայման) հայտնի մեթոդներից ոչ բոլորն են նպատակահարմար կամ կիրառելի [2, 3, 4] միայն մակերևույթային շերտերի միջինացված լարվածային վիճակը պատկերելու կամ բորի դիֆրակցիային աննշան ենթարկվելու պատճառով: Ելնելով վերոհիշյալից, նպատակահարմար է մնացորդային լարումները որոշել խածատման մեթոդով [5,6], որի միջոցով հնարավոր է քանակապես գնահատել դրանց բաշխումը նյութի խորությամբ, երբ շերտի հեռացման ընթացքում առաջանում է փորձանմուշի ծռման դեֆորմացիա: Մնացորդային լարումների որոշման հաշվարկային կախումը թենզատվիչների օգնությամբ դեֆորմացիաների չափման եղանակով [5,7] հետևյալն է

$$\sigma = -0.5E(h-a)d\varepsilon(a)/d(a) + 2E\varepsilon(a) - 3E(h-a)\int_0^a \varepsilon(\xi)d(\xi)/(h-\xi)^2 \quad (1)$$

որտեղ E-ն բորալյումինի առաձգականության արդյունարար մոդուլն է, a-ն

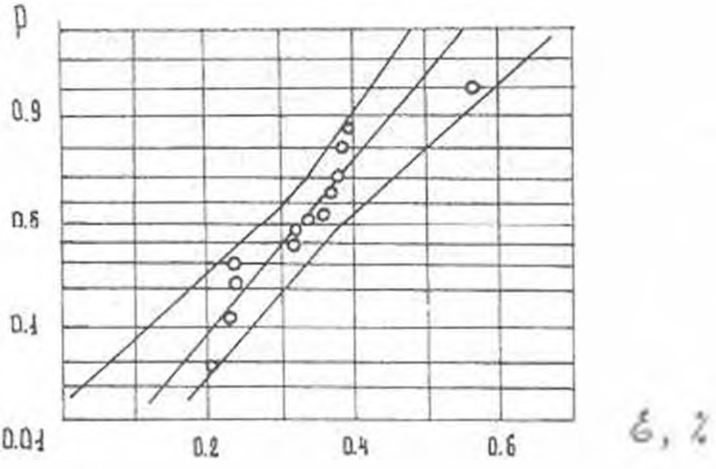


ա.   բ.

Նկ. 1 "Ամուր" (ա) և "թույլ" (բ) բաղադրանյութերի լայնական հատույթների պատկերները (մեծացված են 100 և 50 անգամ)

փորձանմուշի ստորին նիստից հեռացվող շերտի հաստությունն է:

Որոշվել են ADH և $AM\Gamma-6$ ձակնիշի ալյումինե մամլամայրերով և 0.14 մմ տրամագծի բորի թելիկներով երկու տեսակի բաղադրանյութերի մնացորդային լարումները, որոնք տարբերվում են ծավալային մասի գործակցով $V_{f1}=0.4$, $V_{f2}=0.65$, տեխնոլոգիական գործընթացի որոշ տարբերությամբ և հատույթում թելիկների դասավորության ձևով (նկ.1): Այդ բաղադրանյութերի առաձգականության արդյունարար մոդուլներն են, $E_1=2240$ ՄՊա և $E_2=2680$ ՄՊա, թելիկների ուղղությամբ ամրության սահմանները $\sigma_{v1}=800-850$ ՄՊա և $\sigma_{v2}=1200-1350$ ՄՊա:



Նկ. 2 n=12 ընտրանքի դեֆորմացիաների նորմալ բաշխման էմպիրիկ ֆունկցիան 5% և 95% վստահական միջակայքով

Բաղադրանյութերի արդյունարար կոշտության ու ամրության բնութագրերը որոշվել են առաջարկված [5] և ավանդական փորձարարական մեթոդներով [6]:

Լրացուցիչ մնացորդային լարումներ առաջացնելուց խուսափելու համար փորձանմուշները կտրվել են թերթավոր նյութերից էլեկտրակայծային եղանակով ուղղանկյուն հատույթի հետևյալ չափերի ձողերի տեսքով $L = 95$ մմ, $b = 8$ մմ, $h = 2.1$ մմ: Դեֆորմացիաների չափումների համար կիրառվել են ամեն մի փորձանմուշի համար երկուական $KFP-5-120-C1-65$ մակնիշի $R = 120$ Օհմ դիմադրության և 5 մմ հենքի թենզաստվիչներ:

Փորձանմուշի մամլամայրի հեռացումն իրականացվել է սովորական խածատմամբ, որի համար օգտագործվել է նախնական փորձերի միջոցով ընտրված խտության ալկալիական լուծույթ, ելնելով մետաղի հավասարաչափ հեռացման, խածատման գործընթացի անհրաժեշտ արագության և մակերևույթի կետային քայքայումից խուսափելու պայմաններից: Թենզաստվիչների ցուցմունքները վերցվել են ավտոմատացված անընդհատ գրանցումով ու հիշասարքով թենզաստվիչային կամրջակի միջոցով: Նախապես իրականացվել է փորձանմուշներին փակցված թենզաստվիչների չափորոշում: Փորձարկվել են երկու տեսակի «թույլ» (E_1, V_{f1}) և «ամուր» (E_2, V_{f2}) երկուական փորձանմուշներ, որոնց դեֆորմացիաների ստացված արդյունքները ընդգծված ստոխաստիկ բնույթ են կրում: Քանի որ առկա են մամլամայրում քաղաղրանյութերի թելիկների հավասարաչափ բաշխման, դրանց պատրաստման տեխնոլոգիական ընթացքի և այլ հարաչափերի շեղումներ, փորձերի ժամանակ առաջացած դեֆորմացումը իրենից ներկայացնում է պատահական գործընթաց: Հետևաբար անհրաժեշտ է այն մոտարկել համապատասխան ֆունկցիայով՝ կախված նյութի խածատման $a(\xi)$ խորությունից, գնահատելով որոշակի $a(\xi)$ խորությամբ փորձի արդյունքներ հանդիսացող պատահական մեծության՝ դեֆորմացիայի բաշխման ընտրված նպատակահարմար հավանականային ֆունկցիայով, համապատասխան մեկնաբանությամբ:

Դեֆորմացիաների առաջացման պատահական գործընթացը մոտարկվել է հետևյալ տեսքի բազմանդամով

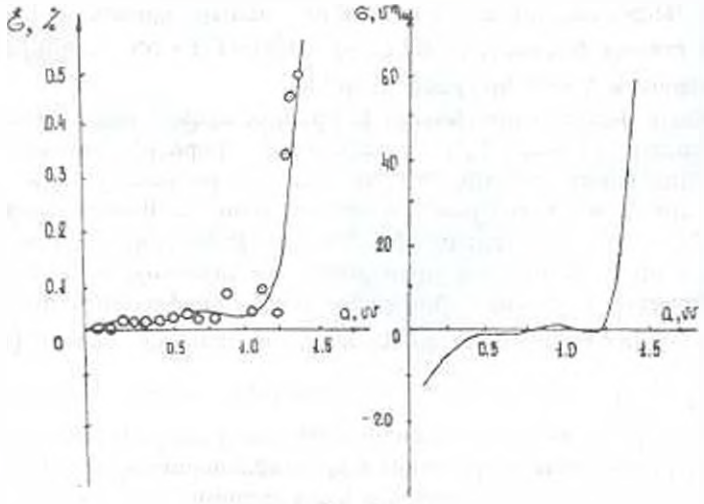
$$\varepsilon(a) = \sum k_i a^i \qquad (i = 0 \div 7) \tag{2}$$

որի k_i գործակիցները որոշվել են միջին քառակուսային շեղման նվազագույնի մեթոդի հիման վրա կազմված $FXFIT$ ծրագրի միջոցով՝ ապահովելով փորձնական կետերի և մոտարկվող կորի համեմատաբար բարձր համահարաբերակցություն (գործակիցը $r = 0.995$):

Հավանականության բաշխման ֆունկցիան ընտրվել է՝ դիտարկելով ε_i դեֆորմացիան որպես ընդհանուր համախմբության փորձանմուշի տարբեր որոշակի $a(\xi)$ խորության սահմաններում, վերցրած ընտրանիների բազմության վրա որոշվող պատահական մեծության: Դիտարկենք $1.2 < a < 1.4$ (մմ) սահմաններում $n = 12$ ծավալի $\bar{x} = 3.295 \times 10^{-3}$ միջին արժեքով և $s = 0.952 \times 10^{-4}$ միջին քառակուսային շեղումով ընտրանք:

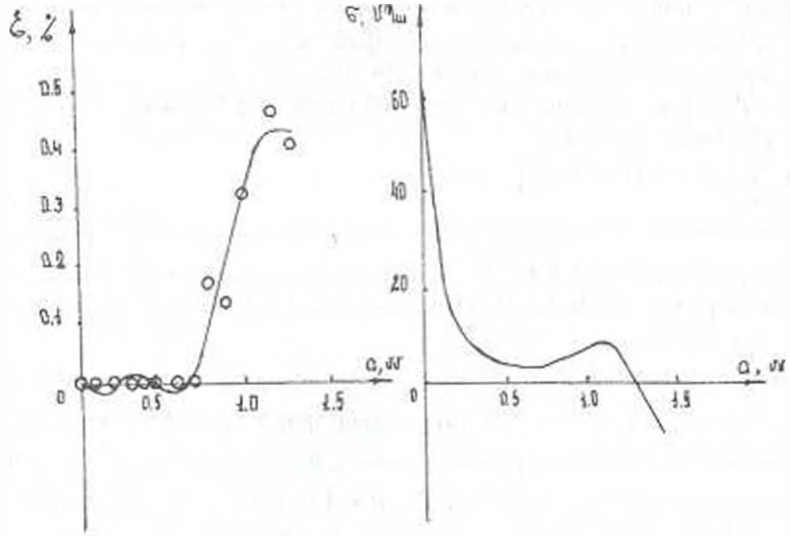
Հավանականային թղթի վրա (P և ε կոորդինատային համակարգում) կառուցված կորագիծը հավաստում է դեֆորմացիայի պատահական մեծության նորմալ բաշխում (նկ.2) [8]: Բերված ընտրանքի բաշխման կորագծին կծանշված 5% և 95% վստահական միջակայքը բավականաչափ նեղ է, որը ցույց է տալիս ε դեֆորմացիայի իսկական արժեքի տրված միջակայքում գտնվելու բարձր հավաստիություն և պատահական մեծության նորմալ բաշխում: Ընդունելով որպես ընդհանուր համախմբության անհայտ $\varepsilon_{\text{ա}}$ հարաչափի իսկական արժեք նյութի վերցրած a խորության վրա (2) բազմանդամից ստացված $\varepsilon_{\text{ա}\text{տ}} = 3399.5$ արժեքը, ստուգենք բաշխման մեծության միջին արժեքի դիրքը $n = 12$ ծավալի ընտրանքի հիման վրա, այսինքն $x = \varepsilon_{\text{ա}\text{տ}} = \varepsilon_{\text{ա}0}$ վարկածը $t = (\bar{x} - \varepsilon_{\text{ա}0})\sqrt{n}/S$

վիճակագրության կիրառման միջոցով [9]:



Նկ. 3ա

$k_1 = 1.5 \cdot 10^{-3}$, $k_2 = -2.67 \cdot 10^{-2}$, $k_3 = 0.16$, $k_4 = -0.45$, $k_5 = 0.6$, $k_6 = -0.37$, $k_7 = 8.59 \cdot 10^{-2}$



Նկ. 3բ

$k_1 = -9.35 \cdot 10^{-3}$, $k_2 = 0.15$, $k_3 = -0.75$, $k_4 = 1.66$, $k_5 = -1.78$, $k_6 = -0.91$, $k_7 = -0.176$

Վիճակագրության տվյալ մեծության $t = 0.381$, հաշվարկված արժեքը ցույց է տալիս, որ հավանականությունը, որի դեպքում t-ն տարբերվում է տրված միջինից ցանկացած կողմի վրա ավելի, քան t_p-ով $(t_p = 0.396)$ $\nu = n - 1$ $(\nu = 11)$ ազատության աստիճանների համար, հավասար է 0.7 իմաստավոր է հանդիսանում: Հետևաբար ε_{am} ընդհանուր համախմբության հուսալի գնահատական է: Այսպիսով, եթե տեղադրվեն $\varepsilon(a) = \varepsilon_{a0} + SU_n$ (2) արտահայտությունից ստացված արժեքները (1) հավասարման մեջ, կստացվեն մնացորդային լարումների հավանականային կորերի ընտանիք ըստ P հավանականության, որտեղ U_p-ն բաշխման քվանտիլն է [8]:

Փորձարկված «ամուր» և «թույլ» բաղադրանյութերի դեֆորմացիաների ստացված արդյունքների միջին արժեքների ըստ (2) կախման կորերն ու *MERCURI* ծրագրի օգտագործմամբ ըստ (1) կախման մնացորդային լարումների նմանատիպ կորերը բերված են նկ. 3-ում: Ի դեպ տեղին է նշել, որ «ամուր» փորձանմուշի քայքայման տևողությունը մի կարգ ավելի է (10-15 ժամ), քան «թույլինը»: Ստացված արդյունքները ցույց են տալիս մնացորդային լարումների որոշ պարբերային փոփոխություն ըստ փորձանմուշի (նյութի) խորության և լարումների գրադիենտի մեծացման: Ըստ երևույթին, լարումների փոփոխման պարբերությունը «թույլ» բաղադրանյութի համար համապատասխանում է բորի թելիկների շերտերին: Քանի որ «ամուր» բաղադրանյութում թելիկները դասավորված են շախմատաձև, դրանցում լարումների փոփոխումը չունի ընդգծված պարբերություն, գերակշռում է իր բացարձակ արժեքով ավելի մեծ V_f-ի պատճառով և ավելի մոտ է նման տեխնոլոգիական գործընթացի ենթարկված հոծ (ոչ բաղադրյալ) նյութի մնացորդային լարումների բաշխմանը:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Шульга Н.А., Томашевский В.Т. Технологические напряжения и деформации в материалах. Т. 6 - Киев: ПТОО "А.С.К.". 1997. 200с.
2. I. Morfin "Measurements of Residual Stresses: Problems and Opportunities", Residual Stress for Designers and Metallurgists. pp. 189-210. American Society for Metals Park, OH, 1981.
3. J.F. Williams, D.C. Stouffer An Estimate of the Residual Stress Distribution in the Vicinity of a Propagating Fatigue Crack, Eng. Fract. Mech., vol. 11, 3, 1979, p. 547.
4. G.R. Leverant, B.S. Langer et. All, Surface Residual Stresses, Surface Topography and the Fatigue Behavior of Ti-GAL-4V, Metallurgical Trans., vol. A10, 2, 1979, p. 251.
5. Гаспарян С.А., Микаелян В.В. и др. Измерение остаточных напряжений в волокнистых боралюминиевых композитах. – Изв. АН Арм ССР, сер. техн. наук, 1982, т. 35, №3, с. 16.
6. Гаспарян С.А., Геворкян С.Х., Шекян Г.Г., Арутюнян З.М. Определение эффективных модулей волокнистых композиционных материалов. – Изв. НАН Армении и ГИУА, сер. техн. наук, 1996, XLIX, 2, с. 59.
7. Биргер И.А. Остаточные напряжения. – М.: Машгиз, 1963.
8. Степнов М.Н. Статистические методы обработки результатов механических испытаний. – М.: Машиностроение, 1985. 225 с.
9. Худсон Д. Статистика для физиков. – М.: Мир, 1970. 190 с.

Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարան
Երևանի ճարտարապետաշինարարական ինստիտուտ

Поступила в редакцию 21.04.1999

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №1, 2000 Механика

УДК 539.4: 670.17: 678

ХАРАКТЕР ПОВРЕЖДЕНИЯ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ И ОЦЕНКА СНИЖЕНИЯ ИХ ПРОЧНОСТИ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Саркисян Н.Е., Саркисян Н.Н.

Ն. Ե. Սարգսյան, Ն. Ն. Սարգսյան
Կոմպոզիտային նյութերի վնասվածության բնույթը և նրանց ամրության իջեցման գնահատումը ցիկլիկ դեֆորմացիայի դեպքում

Հետազոտված է պլաստիկների վնասվածության բնույթը և ամրության իջեցումը նրանց ցիկլիկ դեֆորմացիայի (ծռախախտման) դեպքում ռեզոնանսային ռեժիմի բեռնավորման պայմաններում: Առաջարկված է վնասվածության չափանիշ, որը կարող է օգտագործվել նյութի երկարակեցության գնահատման համար պատահական բեռնավորման դեպքում:

N. E. Sargsyan, N. N. Sargsyan
Character of damage of composite materials and evaluation of their strength decrease while cyclic deformation

Исследован характер трещинообразования и снижение прочности пластиков при их статическом и циклическом деформировании в режиме резонансного нагружения. Предложен критерий повреждения, который может быть использован для оценки долговечности материала в условиях случайного нагружения.

Исследование механизма возникновения и накопления повреждений композитных материалов при нагружении представляет большой интерес для оценки реальной несущей способности конструкции из этих материалов в различных режимах эксплуатации [1, 2]. Указанная проблема находится в центре внимания многих исследователей [3 и др.].

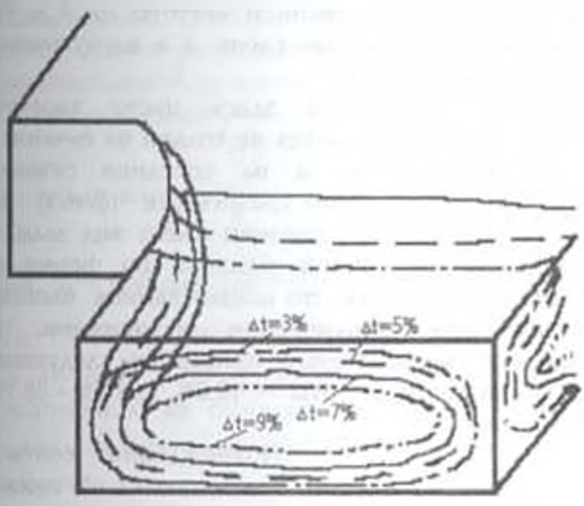
В настоящей работе исследован характер повреждений слоистых (для краткости – стеклопластик) и тканных (стеклотекстолит) волокнистых композитных материалов при кратковременном статическом и длительном циклическом деформировании в режимах синусоидального симметричного цикла нагружения.

Для установления характера повреждения стеклопластика и стеклотекстолита были проведены испытания образцов при плоском симметричном изгибе. Основные исследования проведены на стеклотекстолите, так как этот материал позволяет разделять после испытаний слои стеклоткани и производить их дефектацию.

Приведем основные характеристики исследуемых материалов. Образцы из стеклопластика были изготовлены путем вакуумирования плит, состоящих из 6 слоев стеклоткани марки Т-10-80 и чередующихся с ней 6 слоев стеклонити марки БС6-13х1х8. Пропитка плит производилась эпоксифенольным связующим. Вырезка образцов производилась с продольным и поперечным расположением нитей. Среднее значение предела прочности при растяжении образца с поперечным расположением нитей $<\sigma_b> = 268$МПа, для образца с продольным расположением нитей $<\sigma_b> = 534$ МПа.

Предел прочности тканевого стеклопластика с толщиной образца 3 мм составил 242 МПа.

Испытания проводились с применением резонансного метода контроля повреждения. Поскольку подобный метод может быть использован для систем с острым резонансом, была снята амплитудно-частотная характеристика образца (фиг.1), которая показывает, что образец, как колебательная система, обладает высокой добротностью. Это позволяет поддерживать постоянную амплитуду образцов в ходе испытаний.



Фиг. 1 Диаграмма повреждения стеклопластика

Каждая партия по 6 образцов подвергалась циклическому нагружению с частотой 30 Гц и напряжением 122 МПа. Испытания первой партии образцов проводились до снижения собственной частоты на 0.5%, второй — на 1%, третий — на 2% и т.д. до 9%. Предварительно была установлена зависимость изменения температуры разогрева образцов от амплитуды. Температура стабилизировалась при заданном напряжении в течении 5-10 минут.

При измерении температуры циклического разогрева, в основном, пользовались методикой, указанной в работе [4].

После циклического нагружения из каждой партии выбирались образцы и разделялись по слоям для определения характера и объема разрушения. Наблюдения повреждения проводились визуально, с помощью микроскопа МИМ-7 или с помощью увеличительных линз.

Для образцов, имеющих снижение собственной частоты на 0.5%, внешних изменений в слоях не наблюдалось, что позволяет предположить, что повреждение начинается между слоями.

На фиг.1 в качестве иллюстрации в графическом виде показаны зоны повреждения рабочего участка образца из стеклопластика.

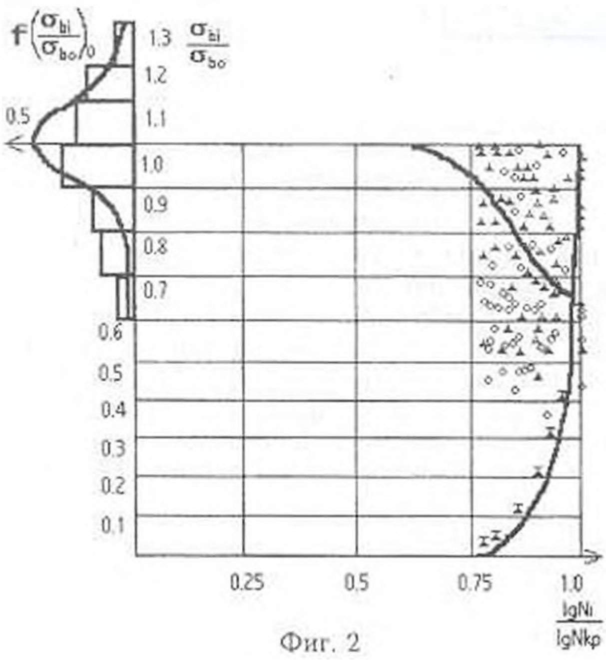
Для образцов, имеющих снижение собственной частоты на 1%, наблюдалось растрескивание связующего в поверхностном слое, в местах перекрещивания волокон и частичное отслаивание его от стеклоткани. Трещины ориентировались перпендикулярно оси образца на ширину 8 мм в опасном сечении.

Для образцов, имеющих снижение собственной частоты на 3%, в первом слое стеклоткани наблюдалось разрушение связующего и отслаивание его от нитей стеклоткани. Подобное повреждение охватывает все опасное сечение образца. Нити, перпендикулярные главной оси образца, увеличивались в объеме и наблюдалось их рыхление. На втором слое ткани наблюдалось частичное выкрашивание связующего, мелкое растрескивание его и обнажение нитей стеклоткани.

Для образцов, имеющих снижение собственной частоты на 5%, для первого и второго слоев наблюдалось сплошное поражение всей опасной зоны, отслаивание и растрескивание слоя связующего. В узлах пересечения нитей стеклоткани наблюдалось их разрыхление. В некоторых местах лопнули волокна тканей. Третий слой стеклоткани имел малую зону поражения, которая начинала переходить на четвертый слой.

Для образцов, имеющих снижение собственной частоты на 7 и 9%, собственно увеличивалось число поврежденных слоев, а в нагруженном первом слое наблюдался разрыв стеклонитей.

Таким образом, разрушение композитов здесь носит характер объемного повреждения слоев и распространяется не только на сечение с максимальным значением напряжений, но и на соседние сечения. Картина повреждения может быть представлена графически (фиг.1). Из фигуры следует, что повреждение в опасном сечении имеет вид эллипса и распространяется вдоль образца по кривой, близкой по форме на начальном участке к параболе. Если принять, что поврежденная площадь не оказывает сопротивления при циклическом нагружении, то поврежденная площадь в опасном сечении будет принимать следующие значения: для 3% снижения собственной частоты — 19.8%, для 5% - 36.7%, для 7% - 49.2%, для 0% - 57.5%.



Фиг. 2

Повреждение, соответствующее 4%-6% снижения собственной частоты, занимает от 20% до 40% площади критического сечения образца (фиг.2), поэтому в качестве критерия повреждения может быть принят определенный процент отклонения частоты образца от собственной. Величина отклонения собственной частоты может быть определена по изменению механических характеристик материала, возникшего за счет циклического накопления повреждений.

Нами исследовалось изменение статистических характеристик прочности (предела прочности на разрыв σ_b) предварительно циклически деформированных образцов из стеклопластика и стеклотекстолита, которые подвергались плоскому симметричному изгибу резонансным способом. Для стеклопластика одна группа образцов выполнялась с поперечным, а вторая - с продольным расположением стеклотканей относительно оси образца. Для стеклотекстолита одна группа образцов выполнялась с продольным расположением нитей стеклоткани, другая — с расположением нитей под 45° по отношению к продольной оси образца.

Циклические испытания проводились на трех уровнях напряжений для стеклопластика $\sigma = 105$, 117, 130.6 МПа, для стеклотекстолита на уровне $\sigma = 132$ МПа и $\sigma = 90$ МПа для второй группы с расположением нитей под 45°. Частота нагружения 30 Гц.

На каждом уровне напряжений испытывалось по 6 групп образцов (по 10 образцов в группе) до выполнения заданных критериев повреждения. Под критерием повреждения здесь понималось определенное уменьшение частоты собственных колебаний образцов от первоначальной резонансной, которое выбиралось

для стеклопластика

$$(1 - f_i / f_0)100\% = 0.5,\ 1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9\%$$

для стеклотекстолита

$$(1 - f_i / f_0)100\% = 0.5,\ 1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9\%$$

где f_i — текущее значение частоты собственных колебаний образца,

f_0 — первоначальное значение резонансной частоты образца.

После этапа циклических испытаний образцы подвергались разрушению на разрывной машине. Из каждой группы образцов один использовался для визуального осмотра при определении степени повреждения.

На фиг.2 приведена зависимость снижения пределов прочности стеклопластика на всех трех уровнях напряжений 1 и кривая кинетики 2. Из анализа кривой 1 и расположения поля точек относительных пределов прочности $\Delta\sigma_s$ для трех уровней напряжений следует, что на характер снижения $\Delta\sigma_s$ действующее напряжение влияния не оказывает.

В результате статистической обработки были построены гистограммы значений пределов прочности в относительных единицах (фиг.2). Гистограммы были аппроксимированы нормальным законом распределения случайных величин. Проверка сходимости экспериментального и теоретического распределений производилась с использованием критерия согласия X^2 Пирсона (для стеклотекстолита $X^2 = 0.5242$, для стеклопластика $X^2 = 0.572$). Среднее квадратичное отклонение, характеризующее разброс значений предела прочности для стеклопластика $\sqrt{<\sigma_s>} = 31.4$ МПа и стеклотекстолита $\sqrt{<\sigma_s>} = 42$ МПа. Максимальные отклонения предела прочности с вероятностью $q = 0.997$ для стеклопластика от нормального значения составляет 94 МПа (или 35%), для стеклотекстолита — 126 МПа (или 50%).

Из фиг.2 видно, что снижение предела прочности наблюдается уже при малых повреждениях ($D = 0.5\%$) и прогрессивно снижается при больших повреждениях.

Анализируя кривые снижения предела прочности в связи с циклическим нагружением, приходим к выводу, что в качестве критерия повреждения можно выбрать такое снижение собственной частоты образца от первоначальной, когда начинает уменьшаться предел прочности материала. Результаты настоящей работы показывают, что для проведения эксперимента по выбору параметров программ усталостных испытаний не имеет существенного значения строгость в назначении критерия повреждения. Однако, при использовании резонансного метода контроля повреждаемости следует выбирать такое повреждение, которое вызвало бы устойчивое снижение частоты собственных колебаний образца и прочностных характеристик материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абибов А.Л., Бойцов Б.В., Молодцов Г.А., Шейдеман И.Ю. Применение конструкционных пластмасс в производстве летательных аппаратов.- М.: Машиностроение, 1971. 190 с.
2. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов.- Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
3. Гарф М.Э., Крамаренко О.Ю., Филатов М.Я., Филатов Э.Я. Развитие усталостных трещин в материалах и конструкциях.- Киев: Наукова думка, 1980. 152 с.
4. Саркисян Н.Е.. Выносливость и деформативность ориентированного стеклопластика при высокой частоте нагружения.- Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1974, т.27, No.6, с.84-82.

Ереванский архитектурно-строительный институт

Поступила в редакцию 11.12.1998