

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ / PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA  
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՊԻՏՈՒՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱՎԱՆԵՄՄԱՆ ԳԻՒՄԻՄԱՅՐՏԵԼԵՒԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ  
МЕХАНИКА  
MECHANICS

1999

ИЗГИБ БЕСКОНЕЧНОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ БАЛКИ,  
ЛЕЖАЩЕЙ НА ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ  
Агабекян П.В., Агаян К.А.

Պ.Վ. Աղաբեկյան, Կ.Ա. Աղայան

Առանձին կտրվածքային կտրվածքների կիրառման դեպքում կոորդինատային համակարգի անօրինակ լուծումը

Մասնավորապես  $L$  անսահման կտրվածքային վրա սրված, երկու սուրբեր կիրառանքային մասերի դեպքում, անօրինակ լուծում կրճատվում է լինելով: Չարքի ընդհանրացված ձևախառնարանի և կոորդինատային միջավայրի օգտագործումը կառավարվում է լինելով փակ լուծումը

P.V. Agabekyan, K.L. Agayan

Bending of an Infinite Non-homogeneous Beam, Lying on an  
Elastic Half-plane

Рассматривается контактная задача об изгибе бесконечной балки, состоящей из двух разных полубесконечных частей, лежащей на границе упругой полуплоскости. При помощи обобщенного преобразования Фурье и метода факторизации построено замкнутое решение задачи

Рассматривается контактная задача для упругой полуплоскости, граница которой вдавливается бесконечной кусочно-однородной балкой. с модулем упругости  $E(x) = E_1\theta(-x) + E_2\theta(x)$ , где  $\theta(x)$  – функция Хевисайда. Исследование ведется без учета касательных контактных напряжений и без учета явления отрыва балки от границы упругой полуплоскости. Задача с помощью обобщенного преобразования Фурье сводится к решению функционального уравнения на действительной оси. Строится замкнутое решение задачи.

Рассмотренная здесь задача относится к достаточно хорошо изученной области теории контактных задач о взаимодействии тонкостенных элементов в виде балок, плит и накладок с линейно-деформируемыми основаниями. Не останавливаясь на подробностях, которые можно найти в [1], укажем лишь работы [2-6], тесно связанные с изучаемой здесь задачей. В [2, 3] получено замкнутое решение задач об изгибе бесконечной кусочно-однородной и полубесконечной плиты на упругом полупространстве. В [4] и [5] построено замкнутое решение задач о контактном взаимодействии бесконечной кусочно-однородной накладки и полубесконечной балки с упругой полуплоскостью. В [6] рассмотрена та же задача для полосы, что и в [5], но с учетом касательных контактных напряжений. Здесь решение задачи сведено к системе фредгольмовских интегральных уравнений второго рода, допускающее решение методом последовательных приближений.

Пусть, кусочно-однородная бесконечная балка вдавливается на границу упругой полуплоскости с помощью сил  $P\delta(x+a)$  и  $Q\delta(x-b)$ , приложенных на балку. Ось  $Ox$  направлена по границе полуплоскости, а

$Oy$  — по ее внутренней нормали. Тогда для двух полубесконечных частей балки будем иметь уравнения

$$\begin{aligned} D_1 \frac{d^4 v}{dx^4} &= P\delta(x+a) - q(x), & -\infty < x < 0 \\ D_2 \frac{d^4 v}{dx^4} &= Q\delta(x-b) - q(x), & 0 < x < \infty \end{aligned} \quad (1)$$

при условиях

$$\begin{aligned} v(-0) &= v(+0), & v'(-0) &= v'(0) \\ D_1 \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x=-0} &= D_2 \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x=+0} \\ D_1 \frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_{x=-0} &= D_2 \frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_{x=+0} \end{aligned} \quad (1')$$

где  $v(x)$  — вертикальные перемещения балки,  $q(x)$  — интенсивность нормальных контактных напряжений,  $D_1 = E_1 J_2$ ,  $D_2 = E_2 J_2$ ,  $J_2$  — момент инерции относительно оси  $Oz$ , перпендикулярной к плоскости  $xOy$ .

Введем функции

$$\begin{aligned} A^\pm(x) &= \theta(\pm x)A(x), & \bar{A}^\pm(\sigma) &= \int_{\pm} A^\pm(x) e^{i\sigma x} dx \\ A^+(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{A}^+(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma \end{aligned}$$

где  $\theta(x)$  — функция Хевисайда. В дальнейшем функции типа  $A^\pm(x)$  будем называть (+) функцией,  $A^-(x)$  — (-) функцией. Причем известно, что  $F^{-1}[\bar{A}^+(\sigma)\bar{B}^+(\sigma)]$  является (+) функцией, а  $F^{-1}[\bar{A}^-(\sigma)\bar{B}^-(\sigma)]$  — (-) функцией. Здесь  $F$  — прямое, а  $F^{-1}$  — обратное преобразование Фурье.

Введем еще функцию  $V(x) = \theta(-x)\frac{dV}{dx} + \theta(x)\frac{dV}{dx}$ . Применив к  $V(x)$  операцию дифференцирования в смысле теории обобщенных функций, из (1) при помощи условий (1) получим

$$\begin{aligned} \frac{d^4 V}{dx^4} &= -\frac{1}{D_1} q^-(x) - \frac{1}{D_2} q^+(x) + a_0 \delta(x) + a_1 \delta'(x) + \\ &+ \frac{P}{D_1} \delta(x+a) + \frac{Q}{D_2} \delta(x-b), & (-\infty < x < \infty) \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x=+0} - \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x=-0} = a_1$

$$\text{где } a_1 = \left( \frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1} \right) M_0$$

$M_0$  — изгибающий момент в точке  $x = 0$ .

$$\frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_{x=+0} - \frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_{x=-0} = a_1$$

$$\text{где } a_0 = \left( \frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1} \right) Q_0$$

$Q_0$  — перерезывающая сила при  $x = 0$

Условия равновесия балки запишутся в виде

$$\int q(x) dx = P + Q, \quad \int xq(x) dx = bQ - aP \quad (3)$$

Далее, применив в (2) обобщенное преобразование Фурье, будем иметь

$$i\sigma^4 \bar{V}(\sigma) = -\frac{1}{D_1} \bar{q}^+(\sigma) - \frac{1}{D_2} \bar{q}^-(\sigma) + a_0 - i\sigma a_1 + \frac{P}{D_1} e^{-i\sigma a} + \frac{Q}{D_2} e^{i\sigma b} \quad (4)$$

С другой стороны, для граничных точек упругой полуплоскости имеем

$$\frac{du_z(x,0)}{dx} = \frac{1-\nu}{\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(s) ds}{s-x}, \quad (-\infty < x < \infty) \quad (5)$$

где  $u_z(x,0)$  — вертикальные перемещения граничных точек упругой полуплоскости,  $\mu$  — модуль сдвига,  $\nu$  — коэффициент Пуассона упругой полуплоскости. Условие контакта между балкой и полуплоскостью имеет вид

$$\frac{du_z(x,0)}{dx} = V(x), \quad (-\infty < x < \infty) \quad (6)$$

Применив к (5) и (6) преобразование Фурье, при этом имея в виду теорему о свертке, получим

$$\bar{V}(\sigma) = -\frac{(1-\nu)/\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)}{\mu} \bar{q}(\sigma) \quad (7)$$

где  $\bar{q}(\sigma) = \bar{q}^+(\sigma) + \bar{q}^-(\sigma)$ . Далее, подставив (7) в (4), получим искомое разрешающее функциональное уравнение.

$$(\lambda_1^3 + |\sigma|^3) \bar{q}^+(\sigma) + (\lambda_2^3 + |\sigma|^3) \bar{q}^-(\sigma) = \bar{f}(\sigma), \quad (-\infty < \sigma < \infty) \quad (8)$$

где

$$\lambda_1 = [\mu(1-\nu)D_1]^{1/3}, \quad \lambda_2 = [\mu(1-\nu)D_2]^{1/3}$$

$$\bar{f}(\sigma) = \lambda_1^3 P e^{-i\sigma a} + \lambda_2^3 Q e^{i\sigma b} + \frac{\mu}{1-\nu} (a_0 - i\sigma a_1)$$

Таким образом, задача свелась к решению функционального уравнения (8). Для решения этого уравнения запишем его заново в виде

$$\bar{K}(\sigma) \bar{q}^+(\sigma) + \bar{q}^-(\sigma) = \bar{f}_1(\sigma), \quad (-\infty < \sigma < \infty) \quad (9)$$

где

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{\lambda_2^3 + |\sigma|^3}{\lambda_1^3 + |\sigma|^3}, \quad \bar{f}_1(\sigma) = \frac{\bar{f}(\sigma)}{\lambda_1^3 + |\sigma|^3}$$

Теперь приступим к решению уравнения (9) [5,7]. Для этого факторизуем  $\bar{K}(\sigma)$ , представив ее в виде

$$\bar{K}(\sigma) = \bar{K}^+(\sigma)\bar{K}^-(\sigma) \quad (10)$$

где  $\bar{K}^+(\sigma)$  является преобразованием Фурье (+) функции, а  $\bar{K}^-(\sigma)$  — (-) функции. Причем

$$\bar{K}^+(\sigma) = \exp(\bar{R}^+(\sigma)), \quad \bar{K}^-(\sigma) = \exp(\bar{R}^-(\sigma))$$

$$\bar{R}^+(\sigma) = \int_0^{\infty} R(z)e^{i\sigma z} dz, \quad \bar{R}^-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 R(z)e^{i\sigma z} dz$$

$$R(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left( \frac{\lambda_2^3 + |\sigma|^3}{\lambda_1^3 + |\sigma|^3} \right) e^{-i\sigma z} d\sigma, \quad -\infty < z < \infty$$

Заметим, что из абсолютной интегрируемости  $R(z)$  следует, что  $\bar{R}^+(\sigma) \rightarrow 0$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$  и  $(\bar{K}^-(\sigma))^{-1}$  тоже является преобразованием Фурье (-) функций. Следовательно,  $\bar{K}^+(\sigma) \rightarrow 1$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ .

Далее, имея в виду (10), уравнение (9) запишем в виде

$$\bar{K}^+(\sigma)\bar{q}^+(\sigma) + \frac{\bar{q}^-(\sigma)}{\bar{K}^-(\sigma)} = \frac{\bar{f}_1(\sigma)}{\bar{K}^-(\sigma)} \quad (11)$$

Представим  $\bar{f}_1(\sigma)/\bar{K}^-(\sigma)$  в виде

$$\frac{\bar{f}_1(\sigma)}{\bar{K}^-(\sigma)} = \bar{\varphi}^+(\sigma) + \bar{\varphi}^-(\sigma), \quad (-\infty < \sigma < \infty) \quad (12)$$

где

$$\bar{\varphi}^+(\sigma) = \int_0^{\infty} \varphi(u)e^{i\sigma u} du, \quad \bar{\varphi}^-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 \varphi(u)e^{i\sigma u} du$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}_1(\sigma)}{\bar{K}^-(\sigma)} e^{-i\sigma u} d\sigma$$

Заметим, в котором нетрудно убедиться, что  $\varphi(u)$  является абсолютно интегрируемой функцией, то есть  $\bar{\varphi}^+(\sigma) \rightarrow 0$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ .

Имея в виду (12), уравнение (11) запишется в виде

$$\bar{M}^+(\sigma) = \bar{K}^+(\sigma)\bar{q}^+(\sigma) - \bar{\varphi}^-(\sigma) = \bar{\varphi}^+(\sigma) - \frac{\bar{q}^-(\sigma)}{\bar{K}^-(\sigma)} = \bar{L}^-(\sigma), \quad (-\infty < \sigma < \infty) \quad (13)$$

Из уравнения (13) следует, что  $\bar{M}^+(\sigma)$  и  $\bar{L}^-(\sigma)$  являются обобщенными функциями, сосредоточенные в нулевой точке, причем [8]

$$M^+(x) = L^-(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta^{(k)}(x) \quad (14)$$

где  $\delta^{(0)}(x) = \delta(x)$ , а  $\delta^{(k)}(x)$  — производные функции Дирака  $\delta(x)$ .  
 Применив к (14) обобщенное преобразование Фурье, получим

$$\overline{M}^*(\sigma) = \overline{L}^*(\sigma) = \sum_{k=0}^n b_k \sigma^k$$

то есть

$$\begin{aligned} \overline{K}^*(\sigma) \overline{q}^*(\sigma) - \overline{\varphi}^*(\sigma) &= \sum_{k=0}^n b_k \sigma^k \\ \overline{\varphi}^*(\sigma) - \frac{\overline{q}^*(\sigma)}{\overline{K}^*(\sigma)} &= \sum_{k=0}^n b_k \sigma^k \end{aligned} \quad (15)$$

Если учесть, что  $\overline{q}^*(\sigma) \rightarrow 0$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$  (из абсолютной интегрируемости  $q(x)$ ) и поведения функций  $\overline{K}^*(\sigma)$ ,  $\overline{\varphi}^*(\sigma)$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ , будем иметь, что  $b_k = 0$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ). Тогда, как следует из (15), искомое решение задачи будет иметь вид

$$\overline{q}^*(\sigma) = \overline{\varphi}^*(\sigma) / \overline{K}^*(\sigma), \quad \overline{q}^*(\sigma) = \overline{\varphi}^*(\sigma) \overline{K}^*(\sigma)$$

или же

$$\overline{q}(\sigma) = \overline{\varphi}^*(\sigma) / \overline{K}^*(\sigma) + \overline{\varphi}^*(\sigma) \overline{K}^*(\sigma) \quad (16)$$

В случае однородной бесконечной балки, то есть при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  получим

$$\overline{q}(\sigma) = \frac{\lambda^3 (P e^{-\sigma a} + Q e^{i \sigma b})}{\lambda^3 + |\sigma|^3} \quad (17)$$

которое совпадает с решением Шехтера, приведенным в [1].

Заметим, что уравнения равновесия балки (3) можно записать в виде

$$\overline{q}(0) = P + Q, \quad \overline{q}'(0) = i(bQ - aP)$$

при помощи которых определяются неизвестные постоянные  $a_0$  и  $a_1$ ,  $\overline{q}(\sigma)$ , как преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции  $q(x)$ , является непрерывной функцией и стремится к нулю при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ . Кроме того, как следует из (16),  $\overline{q}(\sigma)$  имеет порядок  $1/|\sigma|$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ . Из сказанного следует, что  $\overline{q}(\sigma)$  является абсолютно интегрируемой функцией. Отсюда следует, что  $q(x)$  является непрерывной функцией для всех  $x \in (-\infty, \infty)$ . Более того, из (16) можно получить следующие асимптотические представления для контактных напряжений:

$$\begin{aligned} \lambda_1^{-1} q(x) &= [\overline{\varphi}^*(0) \Gamma(4) (1 - \lambda_1^3 / \lambda_2^3) - 6A \pi^{-1} (\lambda_1 / \lambda_2)^{3/2}] (\lambda_1 x)^{-3} + O[(\lambda_1 x)^{-5}] \\ &\quad \text{при } x \rightarrow +\infty \\ \lambda_1^{-1} q(x) &= [-6A \pi^{-1} - \Gamma(4) (1 - \lambda_1^3 / \lambda_2^3) (A + \overline{\varphi}^*(0))] (\lambda_1 / \lambda_2)^{3/2} (\lambda_1 x)^{-4} + O[(\lambda_1 x)^{-5}] \\ &\quad \text{при } x \rightarrow -\infty \\ q(x) &= q(0) + O(x \ln|x|) \quad \text{при } x \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (18)$$

где  $A = P + Q(\lambda_2 / \lambda_1)^3 + a_0 \mu / \lambda_1^3 (1 - \nu)$ ,  $\Gamma(x)$  — известная Гамма-функция.

В частном случае, для однородной балки, когда  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , из (17) получим

$$\lambda^{-1} q(x) = -\frac{P+Q}{\pi} \Gamma(4)(\lambda_1 x)^{-4} + O[(\lambda_1 x)^{-5}] \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty$$

которое, как нетрудно видеть, совпадает с (18).

Знак [-] в последней формуле показывает, что контактные давления меняют знак, то есть в случае свободно лежащей балки могут образоваться зоны отрыва.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. - М.: Наука, 1976.
2. Попов Г.Я. О спаренных интегро-дифференциальных уравнениях изгиба, лежащей на упругом полупространстве неограниченной плиты кусочно-постоянной жесткости. - Изв. Вузов. Математика, №1, 1957 и №3, 1958.
3. Попов Г.Я. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании. - ПММ, 1961, вып.1, т.25.
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. - Уч. зап. ЕГУ, ест.н., 1979, №3.
5. Григорян Э.Х. Изгиб полубесконечной балки, лежащей на упругой полуплоскости. - Изв. НАН РА, Механика, 1992, т.45, №1-2, с.11-26.
6. Керонян А.В. К контактной задаче для упругой полосы с упругой разнородной бесконечной накладкой. - Межвуз. сб. науч. тр. "Механика", Ереван, изд. ЕГУ, вып.8, 1991.
7. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. - М.: Наука 1971. 104 с.
8. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1972. 283 с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
30.06.1998

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ  
 СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ<sup>1</sup>

Գասպարյան Ա.Է., Խաչատրյան Ա.Ա.

Հ ե Գասպարյան, Ա Ա Խաչատրյան

Փոփոխական կալիվածքով ձողերի երկայնական տատանումներին նվիրված որոշ խնդիրներ

Լուծվում են փոփոխական կալիվածքով ձողերի երկայնական տատանումների խնդիրներ, կոբ ձողերի ընդլայնական կալիվածքների մակերևույթը փոփոխվում են երկու տարբեր շրանքայինների ընտանիքներով: Ստացվում են համադրության թանձեր տեղափոխությունների համար հասարակում են բխյան կալիվածքներ:

H. E. Gasparyan, A. A. Khachatryan

Some problems on longitudinal vibrations of rods with variable cross-sections

Решены задачи о продольных колебаниях стержней, площади поперечных сечений которых меняются по двум различным семействам функций. Получены необходимые формулы и соотношения для перемещений. Рассмотрены числовые примеры.

В настоящей работе, являющейся как бы продолжением статьи [1], рассматриваются стержни, площади поперечных сечений которых по длине стержня изменяются по законам следующих двух семейств функции:

$$a) F_m(x) = F_0 \left( 1 - \delta_m \frac{x}{l} \right)^m, \quad \delta_m = 1 - \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

$$b) F_m(x) = F_0 \left( 1 + \lambda_m \frac{x}{l} \right)^{-m}, \quad \lambda_m = \sqrt{k} - 1 = \sqrt{k} \delta_m \quad (1)$$

Здесь для каждого стержня, независимо от значения индекса

$$F'_{z_m}(0) = F'_0 = k F'_{z_m}(l), \quad (k > 1) \quad (2)$$

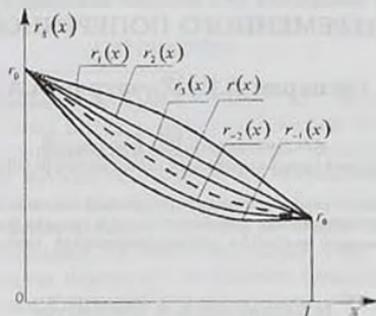
Предположим, стержни имеют форму тела вращения. При этом на фиг. 1 представлены примерные графики радиусов  $r_m(x)$  поперечных сечений для некоторых значений  $m$  при  $k = 16$ . Здесь  $r_1(x)$  — выпуклая кривая,  $r_2(x)$  — прямая (случай усеченного конуса), все остальные — вогнутые.

Отметим, что для функций  $r_{z_m}(x)$  в открытом интервале  $(0 < x < l)$  имеют место следующие неравенства:

<sup>1</sup> Настоящая статья является исправленным вариантом статьи, опубликованной в журнале Изв. НАН РА "Механика" 1994, т. 47 №5-6, с. 14-23, в которой по вине редакции допущены ошибки, искажающие суть работы. Редакция

$$\bar{r}_m(x) < r_{m-1}(x) < r(x) = r_0 \exp\left(-\frac{x}{l} \ln \sqrt{k}\right) < r_{m+1}(x) < r_m(x) \quad (3)$$

где  $r(x)$  является предельным значением функций  $r_m(x)$ , когда  $m \rightarrow \infty$  и представляет собой границу раздела двух рассматриваемых семейств. На фиг.1 график функции  $r(x)$  представлен пунктирной линией. Отметим, что именно этот предельный случай достаточно подробно рассмотрен в [1].



Фиг. 1

Как известно, свободное продольное колебание стержней переменного поперечного сечения описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{F'(x)}{F(x)} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4)$$

Здесь  $u(x, t)$  — продольное перемещение точек стержня с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $a^2 = E/\rho$ ,  $E, \rho$  — модуль упругости и плотность материала.

Для решения конкретных примеров к уравнению (4) присоединяются необходимые граничные и начальные условия.

Ниже рассматриваются задачи, где стержни (1), закрепленные в одном конце  $x=0$ , растянуты силой  $P$  и в момент времени  $t=0$  внезапно освобождаются от силы, представив им свободно колебаться.

1. В этом пункте рассмотрим стержни  $F_m(x)$  — первого семейства (1).

Подставляя в уравнение (4) значение  $F_m(x)$  из (1), с заменой  $x$  на  $\alpha$

$$1 - \delta_m \frac{x}{l} = \alpha \quad \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \alpha \leq 1 \right) \quad (1.1)$$

и произведи разделение переменных  $u_m(\alpha, t) = X(\alpha)T(t)$  получим

$$\frac{\delta_m^2}{X} \left( X'' + \frac{m}{\alpha} X' \right) = \frac{l^2}{a^2} \frac{T''}{T} = -\omega^2 \quad (1.2)$$

или

$$X'' + \frac{2p+1}{\alpha} X' + \frac{\omega^2}{\delta_m^2} X = 0 \quad \left( p = \frac{m-1}{2} \right)$$

$$T'' + \frac{\omega^2 a^2}{l^2} T = 0 \quad (1.3)$$

Общие решения уравнений (1.3) имеют вид

$$X(\alpha) = \alpha^{-p} \left[ A_1 J_p \left( \frac{\omega}{\delta_m} \alpha \right) + A_2 Y_p \left( \frac{\omega}{\delta_m} \alpha \right) \right]$$

$$T(t) = A_3 \cos \frac{\omega a}{l} t + A_4 \sin \frac{\omega a}{l} t \quad (1.4)$$

Для рассматриваемой задачи граничные и начальные условия следующие:

$$1) \text{ при } \alpha = 1 \quad u_m = 0, \quad 3) \text{ при } t = 0 \quad \frac{\partial u_m}{\partial t} = 0 \quad (1.5)$$

$$2) \text{ при } \alpha = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \frac{\partial u_m}{\partial \alpha} = 0 \quad 4) \text{ при } t = 0 \quad u_m = \frac{Pl}{2pEF_0 \delta_m} (\alpha^{-2p} - 1)$$

Из первых двух условий (1.5) имеем

$$A_1 J_p \left( \frac{\omega}{\delta_m} \right) + A_2 Y_p \left( \frac{\omega}{\delta_m} \right) = 0$$

$$A_1 J_{p+1} \left( \frac{\omega}{\lambda_m} \right) + A_2 Y_{p+1} \left( \frac{\omega}{\lambda_m} \right) = 0 \quad (1.6)$$

а из третьего условия  $A_4 = 0$ .

Из системы (1.6) для определения  $\omega$  получаем следующее трансцендентное уравнение, которое имеет неограниченное количество корней  $\omega_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ):

$$J_p \left( \frac{\omega_n}{\delta_m} \right) Y_{p+1} \left( \frac{\omega_n}{\lambda_m} \right) - Y_p \left( \frac{\omega_n}{\delta_m} \right) J_{p+1} \left( \frac{\omega_n}{\lambda_m} \right) = 0 \quad (1.7)$$

Таким образом, общее решение рассматриваемой задачи можно представить в виде

$$u_m(\alpha, t) = \alpha^{-p} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[ Y_p \left( \frac{\omega_n}{\delta_m} \right) J_p \left( \frac{\omega_n}{\delta_m} \alpha \right) - J_p \left( \frac{\omega_n}{\delta_m} \right) Y_p \left( \frac{\omega_n}{\delta_m} \alpha \right) \right] \cos \frac{\omega_n a}{l} t \quad (1.8)$$

Удовлетворив теперь четвертому условию (1.5), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[ Y_p \left( \frac{\omega_n}{\delta_m} \right) J_p \left( \frac{\omega_n}{\delta_m} \alpha \right) - J_p \left( \frac{\omega_n}{\delta_m} \right) Y_p \left( \frac{\omega_n}{\delta_m} \alpha \right) \right] = \frac{Pl}{2pEF_0 \delta_m} (\alpha^{-p} - \alpha^p) \quad (1.9)$$

Для определения величин  $B_n$  следует учесть, что здесь функции в квадратных скобках ортогональны в интервале  $1/\sqrt{k} \leq \alpha \leq 1$  с весом  $\alpha$  (доказательство не приводится).

После определения величин  $B_n$  и некоторых преобразований, окончательное решение задачи представим в виде

$$u_m(\alpha, t) = \frac{\pi P l k^{\frac{p-1}{m}}}{E F_0 \alpha^p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right) J_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right)}{\omega_n \left[ J_p^2\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right) - J_{p+1}^2\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) \right]} \times \\ \times \left[ Y_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right) J_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \alpha\right) - J_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right) Y_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \alpha\right) \right] \cos \frac{\omega_n \alpha}{l} t \quad (1.10)$$

Отметим, что это решение верно для всех конечных значений  $m = 1, 2, \dots$  ( $p = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ ) несмотря на то, что в четвертом условии (1.5) случай  $m=1$  ( $p=0$ ) является особым и при отдельном его рассмотрении необходимо было бы произвести предельный переход  $p \rightarrow 0$ .

Из решения (1.10) можно получить соответствующее решение для стержня постоянного поперечного сечения ( $k=1$ ). Но для этого следует учесть, что при  $k \rightarrow 1$  аргументы функции Бесселя безгранично возрастают: так как при этом  $\delta_m, \lambda_m \rightarrow 0$  и поэтому необходимо предварительно пользоваться их асимптотическими разложениями. Тогда трансцендентное уравнение (1.7) преобразуется к виду

$$\cos \omega_n = 0, \quad \omega_n = (2n-1)\pi/2 \quad (1.11)$$

Далее в (1.10), пользуясь асимптотическими разложениями и учитывая (1.11), после перехода к переменной  $x$  и пределу  $k \rightarrow 1$  получим известное решение рассматриваемой задачи для стержня постоянного поперечного сечения [2]

$$u(x, t) = \frac{8Pl}{\pi^2 l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{2n-1}{2l} \pi x \cos \frac{2n-1}{2l} \pi \alpha t \quad (1.12)$$

Следует отметить, что при четных значениях  $m = 1, 3, \dots$  индексы бесселевых функции целые числа, а при четных значениях  $m = 2, 4, \dots$  указанные индексы принимают значения целое число плюс  $1/2$ . В последнем случае известно, что бесселевы функции выражаются через элементарные функции.

2. Теперь рассмотрим стержни  $F_m(x)$  — второго семейства (1). Подставляя в уравнение (4) значение  $F_m(x)$  из (1), с заменой  $x$  на  $\beta$

$$1 + \lambda_m \frac{x}{l} = \beta \quad \left( 1 \leq \beta \leq \sqrt{k} \right) \quad (2.1)$$

и производя разделение переменных  $u_m(\beta, t) = v_m(\beta) \Theta(t)$ , получим

$$\frac{\lambda_m^2}{Z} \left( Z^* - \frac{m}{\beta} Z^* \right) = \frac{l^2}{\alpha^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = -\Omega^2 \quad (2.2)$$

или

$$\begin{cases} Z'' + \frac{2q+1}{\beta} Z' + \frac{\Omega^2}{\lambda_m^2} Z = 0 \\ \Theta'' + \frac{\Omega^2 a^2}{l^2} \Theta = 0 \quad \left( q = -\frac{m+1}{2} = -p-1 \right) \end{cases} \quad (2.3)$$

Общие решения уравнений (2.3) имеют вид

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \beta^{-q} \left[ C_1 J_q \left( \frac{\Omega}{\lambda_m} \beta \right) + C_2 Y_q \left( \frac{\Omega}{\lambda_m} \beta \right) \right] \\ \Theta(t) &= C_3 \cos \frac{\Omega a}{l} t + C_4 \sin \frac{\Omega a}{l} t \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для рассматриваемой задачи граничные и начальные условия следующие:

$$1) \text{ при } \beta = 1 \quad v_m = 0, \quad 3) \text{ при } t = 0 \quad \frac{\partial v_m}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

$$2) \text{ при } \beta = \sqrt{k} \quad \frac{\partial v_m}{\partial \beta} = 0 \quad 4) \quad v_m(\beta, 0) = \frac{Pl}{2qEF_0 \lambda_m} (1 - \beta^{-2q})$$

Поступая аналогично первому пункту, получим следующее трансцендентное уравнение относительно  $\Omega_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ )

$$J_q \left( \frac{\Omega_n}{\lambda_m} \right) Y_{q+1} \left( \frac{\Omega_n}{\delta_m} \right) - Y_q \left( \frac{\Omega_n}{\lambda_m} \right) J_{q+1} \left( \frac{\Omega_n}{\delta_m} \right) = 0 \quad (2.6)$$

Тогда общее решение можно представить в виде

$$v_m(\beta, t) = \beta^{-q} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left[ Y_q \left( \frac{\Omega_n}{\lambda_m} \right) J_q \left( \frac{\Omega_n}{\delta_m} \beta \right) - J_q \left( \frac{\Omega_n}{\lambda_m} \right) Y_q \left( \frac{\Omega_n}{\delta_m} \beta \right) \right] \cos \frac{\Omega_n a}{l} t \quad (2.7)$$

Прежде чем перейти к определению величин  $D_n$ , преобразуем трансцендентное уравнение (2.6). Учитывая, что  $q = -p-1 < 0$  и пользуясь известными формулами перехода от отрицательных к положительным индексам бесселевых функций, уравнение (2.6) приводится к виду

$$J_p \left( \frac{\Omega_n}{\delta_m} \right) Y_{p+1} \left( \frac{\Omega_n}{\lambda_m} \right) - Y_p \left( \frac{\Omega_n}{\delta_m} \right) J_{p+1} \left( \frac{\Omega_n}{\lambda_m} \right) = 0 \quad (2.8)$$

Из сравнения уравнений (2.8) и (1.7) следует, что

$$\Omega_n = \omega_n \quad (2.9)$$

Таким образом, имеет место любопытный факт, что в поставленной здесь задаче для стержней обоих семейств (1), определяемых одним и тем же значением  $m$ , их собственные числа совпадают.

После удовлетворения четвертому условию (2.5) и учитывая (2.9), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \left[ Y_q \left( \frac{\omega_n}{\lambda_m} \right) J_q \left( \frac{\omega_n}{\lambda_m} \beta \right) - J_q \left( \frac{\omega_n}{\lambda_m} \right) Y_q \left( \frac{\omega_n}{\lambda_m} \beta \right) \right] = \frac{Pl}{2qEF_0 \lambda_m} (\beta^q - \beta^{-q}) \quad (2.10)$$

Пользуясь ортогональностью функции в квадратных скобках (2.10) с весом  $\beta$  в интервале  $1 \leq \beta \leq \sqrt{k}$ , определяем коэффициенты  $D_n$ , после чего общее решение задачи будет

$$v_m(\beta, t) = \frac{\pi P l k^{-\frac{q+1}{m}}}{EF_0 \beta^q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) J_{q+1}\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right)}{\omega_n \left[ J_q^2\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) - J_{q+1}^2\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right) \right]} \times \\ \times \left[ Y_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) J_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \beta\right) - J_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) Y_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \beta\right) \right] \cos \frac{\omega_n \alpha t}{l} \quad (2.11)$$

После перехода от отрицательных к положительным индексам бесселевых функций, окончательное решение задачи принимает вид

$$v_m(\beta, t) = \frac{\pi P l k^{-\frac{q}{m}}}{EF_0} \beta^{p+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right) J_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right)}{\omega_n \left[ J_p^2\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right) - J_{p+1}^2\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) \right]} \times \\ \times \left[ Y_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) J_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \beta\right) - J_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) Y_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \beta\right) \right] \cos \frac{\omega_n \alpha t}{l} \quad (2.12)$$

Отметим, что результат (1.12), полученный для стержней постоянного поперечного сечения из (1.10), получается аналогичным образом также и из (2.12).

3. Выше было показано, что в рассматриваемой задаче для обоих семейств стержней (1) трансцендентное уравнение одно и то же (1.7). Корни этого трансцендентного уравнения  $\omega_n$  зависят от параметров  $m$  и  $k$ , то есть  $\omega_n = \omega_n(m, k)$ .

Рассмотрим частные случаи ( $m = 2$  и  $m = 4$ ), при которых бесселевы функции выражаются через элементарные функции

а)  $m = 2$  ( $p = 1/2$ )

В этом случае из (1) имеем  $\delta_2 = 1 - 1/\sqrt{k}$ ,  $\lambda_2 = \sqrt{k} - 1 = \sqrt{k} \delta_2$ .

Обозначив  $\omega_n(2, k) = \xi_n(k)$ , из (1.7) получим

$$J_{1/2}\left(\frac{\xi_n}{\delta_2}\right) Y_{3/2}\left(\frac{\xi_n}{\lambda_2}\right) - Y_{1/2}\left(\frac{\xi_n}{\delta_2}\right) J_{3/2}\left(\frac{\xi_n}{\lambda_2}\right) = 0 \quad (3.1)$$

Отсюда, после замены бесселевых функции соответствующими их выражениями, получим

$$\operatorname{tg} \xi_n = -\xi_n / \lambda_2 \quad (3.2)$$

Здесь очевидно, что интересующие нас положительные корни трансцендентного уравнения (3.2) находятся в следующих интервалах:

$$(2n-1)\frac{\pi}{2} < \xi_n < n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

Они расположены ближе к левому краю и по мере возрастания  $n$  приближаются к левому значению (3.3).

В табл.1 приведены значения нескольких корней  $\xi_n(k)$  уравнения (3.2) при двух значениях  $k$  ( $k=2, k=10$ )

Таблица 1

$n$	$\xi_n(2)$	$\xi_n(10)$	$n$	$\xi_n(2)$	$\xi_n(10)$
1	1,7973	2,3209	4	11,0331	11,1865
2	4,7985	5,1125	5	14,1664	14,2874
3	7,9062	8,1144	6	17,3026	17,4024

В общих решениях (1.10) и (2.12), произведя необходимые замены и некоторые преобразования с учетом (3.2), соответственно получим

$$u_2(\alpha, t) = \frac{2\sqrt{k}PI\lambda_2}{EF_0\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \xi_n}{\xi_n^2(\lambda_2^2 + \cos^2 \xi_n)} \sin \frac{\xi_n}{\delta_2} (1-\alpha) \cos \frac{\xi_n a}{l} t \quad (3.4)$$

$$v_2(\beta, t) = \frac{2kPI\lambda_2}{EF_0} \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^2(\lambda_2^2 + \cos^2 \xi_n)} \cos \frac{\xi_n}{\lambda_2} (\beta - \sqrt{k}) \cos \frac{\xi_n a}{l} t \quad (3.5)$$

б)  $m=4, (p=3/2)$

В этом случае из (1) имеем  $\delta_4 = 1 - 1/\sqrt[3]{k}, \lambda_4 = \sqrt[3]{k} - 1 = \sqrt[3]{k}\delta_4$ . Обозначив  $\omega_n(4, k) = \eta_n(k)$ , из (1.7) получим

$$J_{3/2}\left(\frac{\eta_n}{\delta_4}\right) Y_{5/2}\left(\frac{\eta_n}{\lambda_4}\right) - Y_{3/2}\left(\frac{\eta_n}{\delta_4}\right) J_{5/2}\left(\frac{\eta_n}{\lambda_4}\right) = 0 \quad (3.6)$$

После соответствующих преобразований, трансцендентное уравнение (3.6) принимает вид

$$\operatorname{tg} \eta_n = -\frac{\eta_n}{\delta_4} \frac{\eta_n^2 - 3\delta_4 \lambda_4^2}{(3\lambda_4 + 2)\eta_n^2 + 3\lambda_4^2} \quad (3.7)$$

Для того, чтобы иметь четкое представление о корнях этого уравнения, необходимо исследовать его правую часть как функцию от  $\eta$

$$f(\eta) = -\frac{\eta}{\delta_4} \frac{\eta^2 - 3\delta_4 \lambda_4^2}{(3\lambda_4 + 2)\eta^2 + 3\lambda_4^2} \quad (3.8)$$

Прежде всего отметим, что эта функция нечетная, а нас интересует ее поведение только при положительных значениях  $\eta$ .

Приведем некоторые характерные данные из результатов исследования функции (3.8).

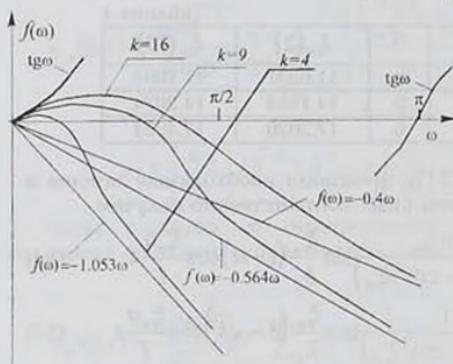
Функция (3.8) с возрастанием  $\eta$  возрастает от нуля (причем  $f'(0) = 1$ ), принимая свое максимальное значение  $f'(\eta) = 0$  при

$$\eta = \lambda_4 \left\{ \frac{6\delta_4}{\sqrt{(3\sqrt[3]{k} + \delta_4)^2 - 4\delta_4 + 3\sqrt[3]{k} - \delta_4}} \right\}^{1/2}$$

затем убывает, обращаясь в нуль при  $\eta = \eta^* = \lambda_4 \sqrt{3\delta_4}$ .

Имеем точку перегиба ( $f''(\eta) = 0$ ) при  $\eta = 3\lambda_4 / \sqrt{3\lambda_4 + 2}$  и асимптоту с уравнением

$$f(\eta) = \frac{\eta}{(3\lambda_4 + 2)\delta_4}$$



Фиг.2

На фиг.2 представлены графики функции (3.8) при трех значениях  $k$  ( $k = 4; 9; 16$ ). Интересно также отметить, что при  $k \leq 24$   $\eta^* < \pi/2$ .

Из приведенных здесь данных о функции (3.8) нетрудно заключить, что корни  $\eta_n$  трансцендентного уравнения (3.7), аналогично  $\xi_n$ , находятся в интервалах (3.3).

В табл.2 приведены значения нескольких

корней уравнения (3.7) при двух значениях  $k$  ( $k = 2, k = 10$ )

Таблица 2

$n$	$\eta_n(2)$	$\eta_n(10)$	$n$	$\eta_n(2)$	$\eta_n(10)$
1	1,7982	2,3603	4	11,0326	11,1659
2	4,7976	5,0853	5	14,1660	14,2701
3	7,9057	8,0885	6	17,3024	17,3879

Рассматривая значения корней  $\xi_n(k)$  (при  $m = 2$ ) и  $\eta_n$  (при  $m = 4$ ), можно отметить, что при одном и том же значении  $k$  они мало отличаются друг от друга (в особенности при  $k = 2$ ).

Что же касается решений  $u_4(\alpha, t)$  и  $v_4(\beta, t)$ , хотя они после преобразований выражаются через элементарные функции, здесь не будем приводить из-за громоздкости их выражений.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Гаспарян А.Е., Хачатрян А.А. О продольных колебаниях стержней с переменными поперечными сечениями. - Изв.АН Армении, Механика, 1993, т.46, №3-4, с.36-41.
- Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. - М.: Физматгиз, 1959. 440 с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
6.04.1993

**ВОЛНЫ ТИПА РЭЛЕЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ  
 ГОФРИРОВАННОЙ ПЛАСТИНКЕ**  
 Гулгазарян Г.Р.

Գ. Բ. Գուլգազարյան

Ռեկի տիպի ալիքները կիսաանվիբր ծայրավոր սալում

Աշխատանքում հետազոտվում է հարթ, սեղի տիպի ալիքների տարածման հարցը, որոնք մարում են կիսաանվիբր ծայրավոր սալի ազատ եզրից ձեռնարկի ուղղությամբ, երբ ծածան կոշտությունը ընդունվում է հավասար գերայի (անճմմենա խնդիր):

Ենթադրվում է, որ ձեռնարկ ուղղահայաց են սալի եզրին և միջին մակերևույթի ուղղությամբ կորի կոորդինոն ունի հետևյալ տեսքը  $R^{-1}(\beta) = k\epsilon \cos k\beta$ ,  $k > 0$ ,  $-\infty < \beta < \infty$

Այստեղ  $\epsilon = \text{const}$ ,  $\beta$  - միջին մակերևույթի ուղղությամբ կորի փոխյալանի անդին օրենսդրված երկարություն է: Գտնվում է բվային մերտրվ լուծվում է դիսպերսիոն հավասարումը:

G.R. Ghulghazaryan

The waves of Rayleigh type in semi-infinite goffered plate

В работе исследуется вопрос распространения плоских волн типа Рэлея, затухающих от свободного края полубесконечной гофрированной пластинки вдоль направления ее образующих, когда жесткость на изгиб принимается равной нулю (безмоментная задача).

Предполагается, что образующие ортогональны к краю пластинки и кривизна направляющей кривой срединной поверхности имеет вид

$$R^{-1}(\beta) = k\epsilon \cos k\beta, \quad k > 0, \quad -\infty < \beta < \infty$$

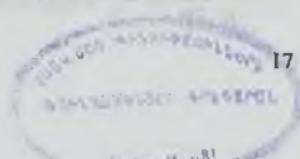
Здесь  $\epsilon = \text{const}$ ,  $\beta$  - ориентированная длина переменной дуги направляющей кривой срединной поверхности. Находится и численным методом решаются дисперсионные уравнения.

Вопросы распространения плоской волны типа Рэлея, затухающей от свободного края полубесконечной пластинки, изучены в [1,2].

В качестве исходных уравнений возьмем следующие уравнения, которые соответствуют безмоментной теории цилиндрических оболочек [3]:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u_1}{\alpha^2} - \frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\beta^2} - \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\alpha\beta} + \frac{\sigma}{R} \frac{\partial u_3}{\alpha} &= \lambda u_1 \\ -\frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\alpha^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\beta^2} - \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_2}{R} \right) &= \lambda u_2 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{\sigma}{R} \frac{\partial u_1}{\alpha} + \frac{u_3}{R^2} &= \lambda u_3 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $u_1, u_2, u_3$  - проекции смещения точки срединной поверхности,  $\alpha, \beta$  - ортогональные координаты точки срединной поверхности,  $R^{-1} = R^{-1}(\beta)$  - кривизна направляющей кривой.



$$\lambda = (1 - \sigma^2) \omega^2 \rho / E \quad (2)$$

где  $\rho$  — удельная плотность материала оболочки,  $E$  — модуль Юнга,  $\sigma$  — коэффициент Пуассона,  $\omega$  — угловая частота.

Для дальнейшей цели удобно систему (1) заменить системой уравнений [4]

$$\begin{aligned} \Gamma u_1 &= \sigma \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} \left( \frac{u_3}{R} \right) - \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \left( \frac{u_3}{R} \right) + \frac{2\lambda \sigma}{1 - \sigma} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u_3}{R} \right) \\ \Gamma u_2 &= \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \left( \frac{u_3}{R} \right) + (2 + \sigma) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} \left( \frac{u_3}{R} \right) + \frac{2\lambda}{1 - \sigma} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_3}{R} \right) \\ &- \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{\sigma}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{u_3}{R^2} = \lambda u_i \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь оператор

$$\Gamma = \Delta \Delta + (3 - \sigma) / (1 - \sigma) \lambda \Delta + 2\lambda^2 / (1 - \sigma) \quad (4)$$

Граничные условия принимают вид:

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \sigma \left( \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \right|_{\alpha=0} = 0$$

$$u_i(\alpha, \beta) = u_i(\alpha, \beta + 2\pi/k), \quad i = \overline{1, 3}, \quad \sum_{j=1}^3 |u_j|_{\alpha=\pi} = 0 \quad (5)$$

Периодическое решение системы (3) ищем в виде

$$u_1(\beta) = \exp(k \mp \alpha) \left( u_0 / 2 + \sum_{m=1}^{\infty} u_{2m} \cos 2mk\beta \right)$$

$$u_2(\beta) = \exp(k \mp \alpha) \sum_{m=1}^{\infty} v_{2m} \sin 2mk\beta \quad (6)$$

$$u_3(\beta) = \exp(k \mp \alpha) \sum_{m=1}^{\infty} w_{2m-1} \cos(2m-1)k\beta$$

Подставим (6) в (3). Из первых двух уравнений (3) получим

$$c_{2m} u_{2m} = \varepsilon / 2 \mp \alpha_{2m} (w_{2m-1} + w_{2m+1})$$

$$c_{2m} v_{2m} = -\varepsilon / 2 (2m) b_{2m} (w_{2m-1} + w_{2m+1})$$

$$a_{2m} = \sigma \alpha^2 + 4m^2 + \sigma \eta^2, \quad b_{2m} = (2 + \sigma) \alpha^2 - 4m^2 + \eta^2 \quad (7)$$

$$c_{2m} = (\alpha^2 - 4m^2)^2 + (3 - \sigma) / 2 \eta^2 (\alpha^2 - 4m^2) + (1 - \sigma) / 2 \eta^4$$

$$\eta^2 = 2\lambda / [k^2 (1 - \sigma)], \quad w_1 = w_3, \quad m = \overline{0, \infty}$$

При  $m = 0$  в (7)  $u_0$  заменяется на  $u_0 / 2$ .

Из третьего уравнения (3), учитывая, что  $w_1 = w_3$ ,

$$\frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} = \frac{k^2 \varepsilon}{2} \mp \alpha \exp(k \mp \alpha) \sum_{m=1}^{\infty} (u_{2m-2} + u_{2m}) \cos(2m-1)k\beta$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} = \frac{k^2 \varepsilon}{2} \mp \alpha \exp(k \mp \alpha) \sum_{m=1}^m [(2m-2)v_{2m-2} + 2mv_{2m}] \cos(2m-1)k\beta$$

$$\frac{u_1}{R^2} = \frac{k^2 \varepsilon^2}{4} \exp(k \alpha \varepsilon) \sum_{m=1}^{\infty} [w_{2m-1} + 2w_{2m} + w_{2m+1}] \cos(2m-1)k\beta \quad (8)$$

Получим бесконечную систему уравнений

$$\varepsilon^2 P_m w_{2m-1} + [Q_m + \varepsilon^2 (P_m + R_m)] w_{2m} + \varepsilon^2 R_m w_{2m+1} = 0 \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} P_m &= (c_{2m} + 4m^2 b_{2m} - \sigma \alpha^2 a_{2m}) c_{2m+2} \\ R_m &= (c_{2m+2} + (2m+2)^2 b_{2m+2} - \sigma \alpha^2 a_{2m}) c_{2m} \\ Q_m &= -2(1-\sigma) \eta^2 c_{2m} c_{2m+2}, \quad m = 0, \infty \end{aligned} \quad (10)$$

Можно показать, что бесконечный определитель системы (9) при любом комплексном  $|\eta|^2 > 2(1+\sigma)\varepsilon^2$  и  $\alpha$  относится к известному классу сходящихся определителей — к нормальным определителям [5]. В этом можно убедиться, деля каждую его строку на  $-2(1-\sigma)\eta^2(2m+1)^2$ ,  $m = 0, \infty$  соответственно, и воспользоваться тем, что в выражениях  $P_m$  и  $R_m$  из (10) отсутствует  $m^2$ .

Чтобы система (9) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель (он является определителем типа Хилла) равнялся нулю:

$$D(\alpha, \eta, \sigma, \varepsilon) = 0 \quad (11)$$

Уравнение (11) устанавливает функциональную зависимость  $\alpha = \alpha(\eta, \sigma, \varepsilon)$ . В явной форме эта зависимость устанавливается следующим образом. Возьмем  $D$  из (11) при конечном  $n$  и приравняем нулю:

$$D_{n+1}(\alpha, \eta, \sigma, \varepsilon) = 0 \quad (12)$$

Найдем  $\alpha_n$  решение алгебраического уравнения (12). Точное решение получится ил  $\alpha_n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Заметим, что определитель  $D_{n+1}$  вычисляется следующей рекуррентной формулой:

$$\begin{aligned} D_1 &= a_0 + \varepsilon^2(2P_0 + R_0), \quad D_2 = [Q_1 + \varepsilon^2(2P_1 + R_1)]D_1 - \varepsilon^4 R_0 P_1 \\ D_{n+1} &= [Q_n + \varepsilon^2(P_n + R_n)]D_n - \varepsilon^4 P_n R_{n-1} D_{n-1}, \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  являются корнями уравнения (11) с отрицательными действительными частями и  $(w_1^{(j)}, w_3^{(j)}, \dots, w_{2m-1}^{(j)})$ ,  $(j=1, 2)$  являются нетривиальными решениями системы (9) при  $\alpha = \alpha_j$ ,  $(j=1, 2)$  соответственно.

Решение задачи (3), (5) представим в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{j=1}^2 \exp(k \alpha_j \varepsilon) \left( u_0^{(j)} / 2 + \sum_{m=1}^{\infty} u_{2m}^{(j)} \cos 2mk\beta \right) \\ u_2 &= \sum_{j=1}^2 \exp(k \alpha_j \varepsilon) \sum_{m=1}^n v_{2m}^{(j)} \sin 2mk\beta \end{aligned} \quad (14)$$

$$u_j = \sum_{j=1}^2 \exp(k\alpha, \alpha) \sum_{m=1}^{\infty} w_{2m-1}^{(j)} \cos(2m-1)k\beta$$

Здесь  $u_{2m}^{(j)}, v_{2m}^{(j)}, m = \overline{0, \infty}$  — значения  $u_{2m}, v_{2m}$  из (7) при  $\alpha = \alpha$ , соответственно. Заметим, что

$$\frac{u_j^{(j)}}{R} = \frac{k\epsilon}{2} \exp(k\alpha, \alpha) \left[ w_1^{(j)} + \sum_{m=1}^{\infty} (w_{2m-1}^{(j)} + w_{2m+1}^{(j)}) \cos 2mk\beta \right] \quad (15)$$

Подставляя (14) в (5) и учитывая (15), приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \frac{A_m^{(j)}}{c_{2m}^{(j)}} (w_{2m-1}^{(j)} + w_{2m+1}^{(j)}) &= 0 \\ \sum_{j=1}^2 \frac{B_m^{(j)}}{c_{2m}^{(j)}} (w_{2m-1}^{(j)} + w_{2m+1}^{(j)}) &= 0, \quad m = \overline{0, \infty} \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} A_m^{(j)} &= \alpha^2 a_{2m}^{(j)} - 4m^2 \sigma b_{2m}^{(j)} - \sigma c_{2m}^{(j)} \\ B_m^{(j)} &= 2m\alpha, (a_{2m}^{(j)} + b_{2m}^{(j)}), \quad w_{-1} = w_1 \end{aligned} \quad (17)$$

а  $a_{2m}^{(j)}, b_{2m}^{(j)}, c_{2m}^{(j)}$  — значения  $a_{2m}, b_{2m}, c_{2m}$  из (7) при  $\alpha = \alpha$ , соответственно.

Нетривиальное решение системы (16) можно получить, например, следующим образом. Возьмем  $w_1^{(j)} = w_3^{(j)} = \dots = w_{2m-1}^{(j)} = 0, j = 1, 2$ , находим нетривиальное решение системы

$$\sum_{j=1}^2 \frac{A_m^{(j)}}{c_{2m}^{(j)}} w_{2m+1}^{(j)} = 0, \quad \sum_{j=1}^2 \frac{B_m^{(j)}}{c_{2m}^{(j)}} w_{2m+1}^{(j)} = 0 \quad (18)$$

а остальные неизвестные находим по формулам

$$w_{2(m+i)+1}^{(j)} = (-1)^i w_{2m+1}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \quad i = \overline{1, \infty} \quad (19)$$

Чтобы система (18) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} A_m^{(1)} B_m^{(2)} - A_m^{(2)} B_m^{(1)} &= (1 - \sigma^2) m (\alpha_2 - \alpha_1) \times \\ &\times \{ \gamma_1 \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \gamma_2 \alpha_1 \alpha_2 + \gamma_3 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \gamma_4 \} = 0 \quad m = \overline{1, \infty} \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 2[8(1 + \sigma)m^2 - \sigma\eta^2], \quad \gamma_2 = -\eta^2(8m^2 + \sigma\eta^2) \\ \gamma_3 &= 2\sigma\eta^2(4m^2 - \eta^2), \quad \gamma_4 = \sigma\eta^4(4m^2 - \eta^2) \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнения (20) эквивалентны уравнениям

$$\gamma_1 \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \gamma_2 \alpha_1 \alpha_2 + \gamma_3 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \gamma_4 = 0, \quad m = \overline{1, \infty} \quad (22)$$

которые являются дисперсионными уравнениями задачи (1), (5).

Справедливы следующие утверждения:

1. При фиксированном  $m$  и при всех  $\eta$ , удовлетворяющих неравенствам

$$\epsilon \sqrt{2(1 + \sigma)} < \eta < 2m \quad (23)$$

уравнение  $Q_m = 0$  имеет два отрицательных корня

$$\alpha_1^{(m)} = -(4m^2 - \eta^2)^{1/2}, \quad \alpha_2^{(m)} = -[4m^2 - (1 - \sigma)/2\eta^2]^{1/2} \quad (24)$$

2. При достаточно малом  $\varepsilon$  и при условии (23) уравнение (11) имеет два  $\alpha^2$ -формальных решения вида

$$\alpha_j^2 = (\alpha_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)}\varepsilon^2 + \beta_j^{(m)}\varepsilon^4 + \dots, \quad j = 1, 2 \quad (25)$$

где

$$\alpha_1^{(m)} = 4m^2 (\alpha_1^{(m)})^2 / \eta^4, \quad \alpha_2^{(m)} = (8m^2 + \sigma\eta^2)^2 / (4\eta^4) \quad (26)$$

Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго утверждения, в уравнении (12) возьмем  $n = m$  и в зоне (23) корни уравнения (12) ищем в виде

$$\alpha_{jm}^2 = (\alpha_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)}\varepsilon^2 + \beta_j^{(m)}\varepsilon^4 + \dots, \quad j = 1, 2 \quad (27)$$

Подставляя (27) в (12), учитывая (13) и приравнявая к нулю коэффициенты при  $\varepsilon^2$ , получим формулы (26).

Легко заметить, что коэффициенты при  $\varepsilon^2$  в (27) не изменяются, если использовать в (12) определители более высокого порядка, чем  $m + 1$ . Таким образом, доказаны формулы (25) с достоверными значениями  $\alpha_1^{(m)}$  и  $\alpha_2^{(m)}$ .

Используя выражение (25), дисперсионные уравнения (22) запишутся в виде

$$\begin{aligned} & (8m^2 + \sigma\eta^2)\alpha_1^{(m)}\{\alpha_1^{(m)}[8(1 + \sigma)m^2 - \eta^2] - \eta^2\alpha_2^{(m)}\} + \\ & + \varepsilon^2\{\gamma_1[\alpha_1^{(m)}(\alpha_2^{(m)})^2 + \alpha_2^{(m)}(\alpha_1^{(m)})^2] + \gamma_2/2(\alpha_1^{(m)}\alpha_2^{(m)}/\alpha_1^{(m)} + \alpha_2^{(m)}\alpha_1^{(m)}/\alpha_2^{(m)}) + \\ & + \gamma_3(\alpha_1^{(m)} + \alpha_2^{(m)})\} + O(\varepsilon^4) = 0, \quad m = \overline{1, \infty} \quad (28) \end{aligned}$$

где постоянная в  $O$ -члене не зависит от  $m$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  уравнения (28) приводятся к уравнениям

$$\alpha_1^{(m)}[8(1 + \sigma)m^2 - \eta^2] - \eta^2\alpha_2^{(m)} = 0, \quad m = \overline{1, \infty} \quad (29)$$

которые эквивалентны соответствующим дисперсионным уравнениям Рэлея для пластинки [6], [7].

$$(2 - \eta^2/4m^2)^* = 16(1 - \eta^2/4m^2)\{1 - (1 - \sigma)\eta^2/(8m^2)\}, \quad m = \overline{1, \infty} \quad (30)$$

В табл. 1 приведены значения  $\eta/(2m)$  (безразмерная характеристика собственной частоты задачи (1), (5)) в зависимости от  $m$  и  $\varepsilon$  при  $\sigma = 1/3$ . Для решения уравнения (22) используются приближенные формулы

$$\alpha_j^2 = (\alpha_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)}\varepsilon^2, \quad j = 1, 2 \quad (31)$$

Численные расчеты подтверждают тот факт, что при малых  $\varepsilon$  значения  $\eta/(2m)$ ,  $m = \overline{1, \infty}$  в гофрированной пластинке (при отсутствии жесткости на изгиб) хорошо аппроксимируются фазовыми скоростями волн типа Рэлея для пластинки.

Таблица 1

$m$	$\eta/(2m)$			
	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 1$	$\epsilon = 1/2$	$\epsilon = 1/10$
1	0,91940	0,92293	0,92041	0,91944
2	"-	0,91966	0,91947	0,91940
3	"-	0,91945	0,91941	0,91940
4	"-	0,91942	0,91941	0,91940
5	"-	0,91941	0,91940	0,91940
6	"-	0,91940	0,91940	0,91940
7	"-	0,91940	0,91940	0,91940

## ЛИТЕРАТУРА

1. Коненков Ю.К. Об изгибной волне "релеевского" типа. - Акуст. журн., 1960, т.6, вып.1, с.124-126.
2. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки. - ПМ, 1994, т.30, №2, с.61-68.
3. Гольденшнейзер Л.А., Лидский В.Б., Товстик М.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. - М.: Наука, 1979. 383 с.
4. Гулгазарян Г.Р. Приближенные частоты собственных колебаний некруговой цилиндрической оболочки. - Изв. НАН РА, Механика, 1996, т.49, №1, с.61-70.
5. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Т.1. - М.: Физматгиз, 1963. 342 с.
6. Багдасарян Р.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке.- В сб.: Волновые задачи механики, Нижний Новгород: 1992, с.87-93.
7. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. - М.: Наука, 1975. 575с.

Армпединститут им. Х.Абовяна  
Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
1.04.1997

УДК 531.36

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ  
ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ  
СИСТЕМ**

**Матвийчук К.С.**

Կ.Ս. Մատվիչուկ

Պարամետրերն զրգովող բաշխված համակարգերի տեխնիկական կայունության սրոշումը

Հետազոտվում է ոչ գծային պարամետրերն զրգովող բաշխված սյուցաների տեխնիկական կայունությունը վերջավոր, անվերջ ժամանակի հատվածներում, ասիմպտոտիկ տեխնիկական կայունությունը էլիքերայան տարածության մեջ: Օգտագործելով համեմատության մեթոդը Լյուպոմովի երկրորդ մեթոդի հետ և խրոնահամայն օպերատորների համար Ռեյեյի հայտնությունյան Լրատրեմպ հատկությունների էիմերի վրա էլիքերայան տարածության մեջ ստացված են տրված համակարգելի տեխնիկական կայունության բավարար արտահայտումներ:

K.S. Matvichuk

**Definition of the Condition of the Technical Stability of Parametrical Excited  
Distributed System**

Исследуется техническая устойчивость на конечном, бесконечном промежутках времени, асимптотическая техническая устойчивость нелинейных параметрически возбуждаемых распределенных процессов в гильбертовом пространстве  $S$  использованием метода сравнения и сочетании со вторым методом Ляпунова и на базе экстремальных свойств отношений Рэлея для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве получены достаточные условия технической устойчивости заданных систем.

Настоящая работа посвящена исследованию технической устойчивости [1-7] параметрически возбуждаемых [8,9] нелинейных распределенных процессов на конечном и бесконечном промежутках времени, асимптотической технической устойчивости. Для решения данной задачи применяются метод сравнения [8,6,10], метод собственных значений в сочетании со вторым методом Ляпунова при использовании экстремальных свойств отношений Рэлея для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве [4,7,10-13].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим класс динамических процессов, описываемых в области  $T_1 \times D$ ,  $T_1 \subset T = [t_0, +\infty)$ ,  $t_0 \geq 0$ ,  $D \subset R^N$ ,

$x = (x_1, \dots, x_N) \in R^N$ , нелинейными уравнениями в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} &= Z(t, \mu)u(t, x), \quad Z(t, \mu)u(t, x) = L(t)u(t, x) + \\ &+ \mu^2 [t, x, u(t, x), \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}, \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, \dots, \mu], \quad x \in D, \quad t \in T_1 \end{aligned} \quad (1)$$

$u(t, x)$  -  $2N$ -мерный вектор состояния, удовлетворяющий крайевым условиям

$$Gu(t, x) = 0, \quad x \in C, \quad C - \text{граница } D \quad (2)$$

$$u(t_0, x) = u_0(x) \quad (3)$$

Вектор-функция  $u_0(x)$  имеет частные производные необходимых порядков в  $D \subset R^v$ ; оператор  $L(t)$  обозначает  $(2N \times 2N)$ -мерную матрицу линейных дифференциальных операторов в частных производных по  $x$  с зависящими от  $t$  непрерывными коэффициентами;  $0 < \mu < 1$ ;  $F = (F_1, \dots, F_{2N})^*$  — нелинейная вектор-функция, непрерывная в заданной ограниченной области изменения своих аргументов и при  $u(t, x) = 0$  не обязательно обращается в нуль.

Рассмотрим действительное функциональное пространство  $H$   $2N$ -мерных векторов непрерывных функций, определенных в  $T_1 \times D$ . Определим в  $H$  скалярное произведение

$$(v_1, v_2) = \int_D v_1(t, x) v_2(t, x) dx, \quad v_1, v_2 \in H \quad (4)$$

Пусть  $H$  расширено так, что оно оказывается гильбертовым [8,11,12];  $\|\bullet\|$  — норма в  $H$ . Полагаем, что  $F$  по  $x$  удовлетворяют условию  $F \in H, \forall \mu \in (0,1)$ . Пусть  $G$  — линейный, не зависящий от  $t$  оператор в  $H$ , действующий в заданной области  $Q_G \subset H$ , а его замыкание  $\bar{G}$  имеет компактную область определения  $Q_G$  [11,12]. Считаем, задача (1)-(3) имеет [5,9] однозначное непрерывное решение  $u(t, x, \mu)$ , обладающее в  $T_1 \times D, T_1 \times C$  необходимыми производными, входящими в (1)-(3), и принадлежащее со всеми необходимыми производными пространству  $H$ . Пусть множество  $W$  состояний процесса (1)-(3) есть подмножество пространства  $H$ , такое, у которого элементы удовлетворяют граничному условию (2) и другим условиям гладкости, обеспечивающим свойство непрерывности функции  $L(t)u$  задачи (1)-(3) [8,9,11,12].

При условиях (2), (3) рассмотрим линейную краевую задачу

$$\partial u(t, x) / \partial t = L(t)u(t, x) \quad x \in D, \quad t \in T_1 \quad (5)$$

Пусть существует решение  $\bar{u}(t, x)$  задачи (5), (2), (3), удовлетворяющее тем же свойствам регулярности, что и  $u(t, x, \mu)$  [5,9]. Тогда решению  $\bar{u}(t, x)$  для каждого  $t$  можно сопоставить элемент в  $W$ , само  $\bar{u}(t, x)$  образует в  $W$  некоторую траекторию, а  $L(t)$  есть оператор в  $H$ , действующий в области  $W \subset H: L(t)W \rightarrow H, Z(t, x, \mu)$  есть оператор, также действующий из  $W$  в  $H$  при каждом  $\mu \in (0,1): Z(t, \mu)W \rightarrow H$  [11,12]. Решение  $u(t, x, \mu)$  представляет некоторую траекторию в  $W$ , отличающуюся в общем от траектории, соответствующей (5). Пусть существует сопряженный оператор  $L^*(t)$  к  $L(t)$ . Определим меру  $\rho(u, v)$

$$\rho(u, v) = \left[ (A_0 z, A_0 z) + \sum_{i=1}^n (A_i z, A_i z) \right]^{1/2} \quad u, v \in W \quad (6)$$

где  $z = u - v$ ,  $A_0$  — оператор тождественного преобразования, а  $L, A$  — линейные дифференциальные операторы в  $H$ , действующие в  $H$  [8,11]. Задачу (1)-(3) рассмотрим в области:

$$\Omega = \{x, u, \mu, t \in T, x \in D \subset R^n, |x| \leq t = \text{const} > 0 \\ \forall u \in W(T, D) \subset H, Z(t, \mu) \in W \rightarrow H, 0 < \mu < \mu_0 < 1\} \quad (7)$$

2. Функционал Ляпунова и соответствующие соотношения. Рассмотрим функционал

$$I[u, t] = (u, B(t)u), \quad u \in W \quad (8)$$

где  $B(t) : H \rightarrow H$  — самосопряженный оператор в смысле [9,11,12]

$$(v, B(t)u) = (u, B(t)v) \quad \forall u, v \in W \quad (9)$$

содержит необходимые дифференциальные моменты по  $x$ , дифференцируема по  $t$ , имеет ту же размерность, что и  $I(t)$ . Пусть  $B(t)$  определен так, что

$$I[u, t] \geq \alpha r(u, 0), \quad \forall t \in T, \quad \alpha = \text{const} > 0 \quad (10)$$

Пусть, определена [5,6,14] значение  $I[u, (x), t, \mu]$  на начальных данных (3), функция  $P(t, \mu)$  и постоянная  $\bar{\alpha}$ , удовлетворяющие условиям

$$P(t, \mu) \geq \bar{\alpha}, \quad 0 < P(t, \mu) \leq C, \quad C = \text{const} > 0, \quad \forall t \in T, \quad \mu \in (0, 1) \quad (11)$$

Пусть ограниченный оператор  $N(t) : W \rightarrow H$  равен  $N(t) = L(t)B(t) + B(t)L(t) + B(t)$ , где  $\dot{B}(t) = d[B(t)]/dt$ . Полагаем, что имеет место задача о собственных значениях [7,8]

$$N(t)u = \lambda B(t)u, \quad u \in W, \quad t \in T, \quad (12)$$

связанные значения которых являются вещественными ограниченными величинами  $\lambda, (t)$  для всех  $t \in T$  при том  $t$  рассматривается как параметр. Обозначим  $\lambda_{\max}(t)$  наибольшее собственное значение (12)

Пусть, задана область  $\Lambda = \{x, \mu, \lambda_{\max}(t), \mu \in T, -\alpha < z < \alpha, \lambda_{\max}(t) \leq b, b = \text{const} > 0, 0 < \mu < \mu_0 < 1\}$ , в которой рассмотрим задачу Коши сравнения [5,6,14]. Обозначим  $F(u, \mu), \bar{F}(u, \mu)$  двумя решениями (1)-(3) и (3), (2), (3) соответственно.

3. Условия технической устойчивости системы. Для (1)-(3) имеем следующие свойства.

Теорема. Пусть справедливы условия 1. Для краевых задач (1)-(3) и (3), (2), (3), где при вышеуказанных свойствах регулярности их коэффициентов операторы  $Z(u, \mu), L(t)$  есть операторы в  $H$ , действующие в области  $W \subset H$ , существуют решения 1. вышеуказанными свойствами 2. Существует положительно определенная относительно меры  $r(u, 0)$  функционал  $I[u, t] = (u, B(t)u)$ , порожденный заданным оператором  $B(t) : H \rightarrow H$ . 3. Для  $L(t)$

существует сопряженный оператор  $L^*(t)$ , удовлетворяющий при  $\forall v, w \in W$  условию

$$(L(t)v, B(t)w) = (v, L^*(t)B(t)w) \quad (13)$$

4. В задаче (12) оператор  $B^{-1}(t)N(t)$  является компактным при  $t \in T_1 \subset T$ . 5. Существуют постоянные  $C_i > 0, i = 1, 2, 3, 4$  и значения  $\mu_i > 0$ , удовлетворяющее условию  $[\mu - \bar{\mu}] < \mu_i$ , неотрицательные непрерывные на  $T_1 \subset T$  функции  $f_i(t), (i = 1, 2, 3), \gamma(t)$ , для которых справедливы неравенства:

а)  $\|u(t, x, \mu) - \bar{u}(t, x)\| \|N(t)[u(t, x, \mu) - u(t, x)]\| \leq C_1 f_1(t)$

б)  $2\| \mu F^*(t, \mu) - \bar{\mu} \bar{F}^*(t, \bar{\mu}) \| \|B(t)u(t, x, \mu)\| \leq C_2 f_2(t)$

в)  $\| \bar{F}^*(t, \bar{\mu}) \| \|B(t)u(t, x, \mu)\| \leq C_3 f_3(t)$

г)  $|V[\bar{u}(t, x), t] - V[u(t, x), t]| \leq C_4 \bar{\gamma}(t)$

б. В области  $\Lambda$  существует скалярная задача Коши сравнения

$$dy/dt = \lambda_{\max}(t)[y + \sigma(t, \mu)], \quad t \in T_1 \quad (14)$$

$$y(t_0) = y_0 \geq V[u_0(x), t_0], \quad \sigma(t, \bar{\mu}) = \int_{t_0}^t [C_1 b \bar{\gamma}(\tau) + f_3(\tau, \bar{\mu})] d\tau$$

$$f_3(t, \bar{\mu}) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + 2\mu C_3 f_3(t) \quad (15)$$

решение которой  $\bar{y}(t) = y(t, t_0, y_0)$  определено при  $t \in T_1$  и удовлетворяет неравенствам

$$\bar{y}(t) + \sigma(t, \bar{\mu}) \leq P(t, \mu), \quad t \in T_1, \quad y_0 \leq \bar{a} \quad (16)$$

Тогда 1. Процессы, описываемые задачей (1)-(3) в  $H$ , технически устойчивы в области  $\Omega$  на промежутке времени  $T_1$ . 2. Если условия теоремы справедливы на каждом интервале  $T_1 \subseteq T$ , тогда процессы (1)-(3) технически устойчивы в области  $\Omega$  на бесконечном промежутке времени  $T$ . 3. Если функции  $\bar{y}(t), \sigma(t, \mu)$  удовлетворяют условию

$$\bar{y}(t) + \sigma(t, \bar{\mu}) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad \mu \in (0, \mu_0) \quad (17)$$

то процессы (1)-(3) асимптотически технически устойчивы в области  $\Omega$ .

Доказательство. Вычислим  $dV(t)/dt$  вдоль решения задачи (1)-(3)

$$dV(t)/dt = (u, N(t)u) + 2\mu(F(t, \mu), B(t)u)$$

$$N(t) = L^*(t)B(t) + B(t)L(t) + \dot{B}(t) \quad (18)$$

Задача (12) связана с линейной краевой задачей (5), (2), (3). Используя величины  $(\bar{u}(t, x), N(t)\bar{u}(t, x)), \bar{\mu}(F(t, \bar{\mu}), B(t)\bar{u}(t, x))$ , для (18) получаем неравенство

$$dV(t)/dt \leq (\bar{u}(t, x), N(t)\bar{u}(t, x)) + \|u(t, x, \mu) - \bar{u}(t, x)\| \|N(t)[u(t, x, \mu) - \bar{u}(t, x)]\|$$

$$+ 2\| \mu F^*(t, \mu) - \bar{\mu} \bar{F}^*(t, \bar{\mu}) \| \times \|B(t)u(t, x, \mu)\| + 2\bar{\mu} \| \bar{F}^*(t, \bar{\mu}) \| \|B(t)u(t, x, \mu)\| \quad (19)$$

Из (19) и условий теоремы вдоль решения (1)-(3) имеем

$$dV(t)/dt \leq (\bar{u}(t, x), N(t)\bar{u}(t, x)) + f_3(t, \bar{\mu}) \quad t \in T \quad (20)$$

Убеждаемся, что  $N(t)$  – самосопряженный оператор в смысле [9]. Тогда задача (12) имеет вещественные собственные значения. Согласно условиям 4 теоремы задача (12) при всех  $t \in T_1 \subset T$  имеет ограниченные собственные значения, то есть  $\lambda_{\max}(t)$  – ограниченная действительная величина [12,14,15]. Собственные векторы задачи (12) образуют полную систему в  $W$ . Находим неравенство [7,8,12,14]  $(u, N(t)u)/(u, B(t)u) \leq \lambda_{\max}(t)$ ,  $t \in T_1 \subset T$ ;  $u \in W \subset H$ , где имеем  $|\lambda_{\max}(t)| \leq b$ . Отсюда вместо (20) получаем оценку

$$dV(t)/dt \leq \lambda_{\max}(t)V(t) + C_4 b \gamma(t) + f_3(t, \bar{\mu}) \quad (21)$$

Из (21) [5,6,10] следует задача Коши сравнения (14), (15), порожденная операторами  $Z(t)$ ,  $L(t)$ ,  $B(t)$ . Используя при  $\forall t \in T_1$  решение задачи (14), (15)

$$\bar{y}(t) = y_0 \exp \left[ \int_{t_0}^t \lambda_{\max}(\tau) d\tau \right] + \exp \left[ \int_{t_0}^t \lambda_{\max}(\tau) d\tau \right] \times$$

$$\times \int_{t_0}^t \left\{ f(t, \bar{\mu}) \exp \left[ - \int_{t_0}^s \lambda_{\max}(s) ds \right] \right\} dt - \sigma(t, \bar{\mu}), \quad f(t, \bar{\mu}) = C_4 b \gamma(t) + f_3(t, \bar{\mu}).$$

по теореме о дифференциальных неравенствах из [10] вдоль решения  $u(t, x, \mu)$  краевой задачи (1)-(3) для  $V[u, t]$  (8) находим оценку  $V[u(t, x, \mu), t] \leq \bar{y}(t) + \sigma(t, \bar{\mu})$ ,  $\forall t \in T_1$ . Используя условия (16) теоремы, получаем неравенства

$$V[u(t, x, \mu), t] \leq P(t, \mu), \quad V[u_0(x), t_0] \leq \bar{a}, \quad \forall t_0, t \in T_1 \quad (22)$$

откуда следует, что при условиях теоремы возмущенная траектория из  $\Omega$  процессов (1)-(3) будет находиться от невозмущенной  $u(t, x, \mu) \equiv 0$  при  $\forall t \in T_1$  на "расстоянии", не превышающем по величине пределов, определяемых вперед заданными функцией  $P(t, \mu)$ , постоянной  $\bar{a}$ .

Неравенства (22) характеризуют заданную мерой  $\rho(u, 0)$  окрестность  $\rho(u, 0) \leq \bar{C}$ ,  $\bar{C} = \text{const} > 0$  невозмущенного процесса, где  $\bar{C}$  определяется первым неравенством из (22). Два последних утверждения теоремы доказываются очевидным образом с незначительными изменениями. На этом доказательство теоремы завершено.

**4. Техническая устойчивость нелинейных состояний стойки при параметрическом возбуждении.** Рассматриваем в гильбертовом пространстве нелинейную краевую задачу о поперечных колебаниях вертикально расположенной стойки, шарнирно закрепленной в основаниях и нагруженной переменной по времени продольной

возбуждающей силой  $f(t)$ . Эту задачу представим в операторной форме, используя результаты из [8, 14]

$$\begin{aligned} \partial u(t, x) / \partial t &= Z(t, \mu)u(t, x), \quad Z(t, \mu)u(t, x) = \\ &= L(t)u(t, x) + \mu L^1(t, u_1^2(t, x), u_2^1(t, x)) \end{aligned} \quad (23)$$

$$L(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial^2 / \partial x^2 - f(t)\partial^2 / \partial x^2 & -\beta \end{pmatrix}, \quad L^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ [1 - u_1^2(t, x)]u_2^1(t, x) \end{pmatrix}, \quad \mu \in (0, 1)$$

$$u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x))^T, \quad u_1(t, x) = w(t, x), \quad u_2(t, x) = \partial u_1(t, x) / \partial t$$

$$u(t, x) \Big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_0(x) = (w_0(x), v_0(x))^T \quad (24)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad \partial^2 u(t, 0) / \partial x^2 = \partial^2 u(t, 1) / \partial x^2 = 0 \quad (25)$$

Совместно с задачей (23)-(25) рассмотрим линейную задачу при (24), (25):

$$\partial u(t, x) / \partial t = L(t)u(t, x) \quad (26)$$

где  $w(t, x)$  — поперечные смещения точек осевой линии стойки;  $w_0(x), v_0(x)$  — четырежды непрерывно дифференцируемые функции по  $x \in D = [0, 1]$ ,  $T = [0, T, \mu^{-1}]$  ( $\bar{T} = \text{const} > 0$ ) — заданный промежуток времени.  $T \subset I = [t_0, \infty)$ . Для  $f(t)$  возможен гармонический закон изменения

$$f(t) = 4\pi^2 (R_0 + R_1 \cos \omega t), \quad R_0 = P_0 l^2 / 4\pi^2 E \bar{I}, \quad R_1 = P_1 l^2 / 4\pi^2 E \bar{I}, \quad P_0 -$$

постоянная составляющая сжимающей силы;  $P_1$  — постоянная амплитуда пульсирующей составляющей продольной силы;  $l$  — длина стойки;  $E$  — модуль Юнга,  $\bar{I}$  — момент инерции поперечного сечения стойки относительно ее оси, проходящей через ее центр масс;  $\beta$  — коэффициент демпфирования;  $\mu \in (0, 1)$ . Для  $f(t)$  могут быть и другие представления. Считаем, что краевая задача (23)-(25) имеет однозначное непрерывное решение  $w(t, x, \mu)$  в области  $T \times D$  при  $\mu \in (0, 1)$ , обладающее в  $T \times D$  согласно (23)-(25) необходимыми непрерывными производными и принадлежащее вместе с указанными производными вещественному гильбертовому пространству  $L^2(D)$ . Относительно решения  $w(t, x)$  линейной задачи (26), (24), (25) допускаем аналогичные свойства.

Рассмотрим гильбертово пространство  $\bar{H}$  векторов  $\{u_1(t, x), u_2(t, x)\}$  с непрерывными функциями  $u_1(t, x), u_2(t, x)$  при  $t \in T, x \in D$ , для которых [14]

$$(u, v) = \int_D \sum_{i=1}^3 u_i(t, x) v_i(t, x) dx, \quad u, v \in \bar{H}$$

Задачу (23)-(25) рассмотрим в области

$$\Omega = \{t, x, u_1, \partial u_1 / \partial t, \partial^2 u_1 / \partial t^2, \partial u_1 / \partial x, \dots, \partial^4 u_1 / \partial x^4, f(t), \mu \mid t \in T, x \in D\}$$

$$\|u_1\|_2 \leq b_1, \|\partial u_1 / \partial t\|_2 \leq b_2, \|\partial^2 u_1 / \partial t^2\|_2 \leq b_3, \|\partial u_1 / \partial x\|_2 \leq c_1, \dots$$

$$\|\partial^4 u_1 / \partial t^4\|_2 \leq c_4, |f(t)| \leq c_5, b_i = \text{const} > 0, (i=1,2,3), c_j = \text{const} > 0,$$

( $j=1,2,3,4,5$ ),  $\mu \in (0,1)$ . В качестве меры  $\rho(u,0)$  в  $\bar{W} \subset \bar{H}$ , где  $\bar{W}$  аналогично [14], положим

$$\rho(u,0) = \left\{ \int_0^1 \left[ (\partial^2 w / \partial x^2)^2 + (\partial w / \partial x)^2 + w^2 + v^2 \right] dx \right\}^{1/2} \quad (27)$$

Сопряженный оператор  $L^*(t)$  к  $L(t)$  имеет представление

$$L^*(t) = \begin{pmatrix} 0 & (\partial^4 / \partial x^4) - f(t)(\partial^2 / \partial x^2) \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \quad (28)$$

При условиях [8,14] рассмотрим функционал

$$V[u, t] = (u, B(t)u), \quad B(t) = \begin{pmatrix} (\partial^4 / \partial x^4) + \gamma(t)(\partial^2 / \partial x^2) + \alpha_1 + \beta^2 / 4 & \beta / 2 \\ \beta / 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

( $\gamma(t)$  – некоторый коэффициент, непрерывно дифференцируемый по  $t \in T$ ,  $\alpha_1$  – некоторый постоянный параметр), который будет определенно положительным относительно меры  $\rho(u,0)$  при условиях

$$\begin{cases} 0 < \bar{\mu} < 1, (1 - \bar{\mu})4\pi^2 - (\bar{\mu} + \varepsilon) > \gamma(t) \\ \alpha_1 > \bar{\mu} - \beta^2 / 4 - \varepsilon\pi^2 + \beta^2 / [4(1 - \bar{\mu})], \varepsilon = \text{const} > 0 \end{cases} \quad (30)$$

$\bar{\mu}$  – фиксированное значение параметра  $\mu \in (0,1)$ . Находим:

$$N(t) = \begin{pmatrix} -\beta(\partial^4 / \partial x^4) - h(t)(\partial^2 / \partial x^2) & -g(t)(\partial^2 / \partial x^2) + \delta_- \\ -g(t)(\partial^2 / \partial x^2) + \delta_- & -\beta \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$h(t) = \beta f(t) - d\gamma(t)/dt, \quad g(t) = f(t) - \gamma(t), \quad \delta_{\pm} = \alpha_1 \pm \beta^2 / 4 \quad (31)$$

Имеем задачу о собственных значениях при (29)-(31):

$$N(t)y = \lambda B(t)y, \quad y = (y_1, y_2) \in W, \quad t \in T \quad (32)$$

Уравнение (32) сведем к уравнению для одной компоненты  $y_1$ :

$$\partial^4 y_1 / \partial x^4 + k(t)(\partial^2 y_1 / \partial x^2) + c(t)y_1 = 0 \quad (33)$$

$$k(t) = \{(\lambda + \beta)[\beta f(t) - \dot{\gamma}(t) + \lambda \gamma(t)] + 2[f(t) - \gamma(t)](\delta_- - \lambda \beta / 2)\} \{(\lambda + \beta)^2 - [f(t) - \gamma(t)]^2\}^{-1}, \quad c(t) = [\lambda(\lambda + \beta)\delta_-, -(\delta_- - \lambda \beta / 2)^2] / \{(\lambda + \beta)^2 - [f(t) - \gamma(t)]^2\}$$

при следующих граничных условиях:

$$y_1(t, 0) = y_1(t, 1) = 0, \quad \partial^2 y_1(t, 0) / \partial x^2 = \partial^2 y_1(t, 1) / \partial x^2 = 0 \quad (34)$$

Соответствующее уравнению (33) характеристическое уравнение имеет корни

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= +i(k/2 + \sqrt{k^2/4 - c})^{1/2}, \quad \bar{r}_2 = -i(k/2 + \sqrt{k^2/4 - c})^{1/2} \\ \bar{r}_3 &= +i(k/2 - \sqrt{k^2/4 - c})^{1/2}, \quad \bar{r}_4 = -i(k/2 - \sqrt{k^2/4 - c})^{1/2} \end{aligned} \quad (35)$$

Рассмотрим только случай, когда  $k(t) > 0, \forall t \in T$ . При этом получаем две последовательности собственных функций [8]:

а) при  $c > 0, k^2 > 4c$

$$y_1(t, x) = C_1(t) \sin r_1 x + C_2(t) \cos r_1 x + C_3(t) \sin r_2 x + C_4(t) \cos r_2 x \quad (36)$$

если справедливо условие

$$(r_1^4 + r_2^4 - 2r_1^2 r_2^2) \sin r_1 \sin r_2 = 0, \quad r_{1,2} = (k/2 \pm \sqrt{k^2/4 - c})^{1/2} \quad (37)$$

б) при  $c < 0, k^2 > 4c$

$$y_1(t, x) = C_1(t) \sin r_1 x + C_2(t) \cos r_1 x + C_3(t) \operatorname{sh} r_2 x + C_4(t) \operatorname{ch} r_2 x \quad (38)$$

если справедливо условие

$$(r_1^4 + r_2^4 + 2r_1^2 r_2^2) \sin r_1 \operatorname{sh} r_2 = 0, \quad r_{1,2} = (\pm k/2 + \sqrt{k^2/4 - c})^{1/2} \quad (39)$$

Для максимального собственного значения  $\lambda_{\max}(t)$  имеем

$$\lambda_{\max}(t) = \max_{k_n} \left\{ \begin{aligned} &-\beta - \gamma(t) / 2[k_n - \gamma(t)] + \left[ (\gamma(t) / 2[k_n - \gamma(t)])^2 + (2[f(t) - \right. \\ &\left. - \gamma(t)](\alpha_1 + (\beta/2)) / (k_n - \gamma(t)) [f(t) - \gamma(t)]^2 / (1 - \gamma(t) / k_n) \right]^{1/2} \end{aligned} \right\} \\ n = 1, 2, \dots, \quad \forall t \in T \quad (40)$$

Используя равенство

$$c_n (\lambda + \beta)^2 - [4c_n / \gamma^2(t)] \beta^2 = \alpha_1 (\lambda + \beta)^2 - \delta^2 \quad (41)$$

убеждаемся [14], что  $k_n \neq \gamma$  при любом целом  $n, \forall t \in T$ . Должно выполняться для  $\forall k_n$  условие

$$k_n > (1 - \bar{\mu}) 4\pi^2 - (\bar{\mu} + \varepsilon), \quad n = 1, 2, \dots \quad (42)$$

при каждом  $t \in T$  совместно с условиями (37) или (39). Если  $k_n \rightarrow \infty$ , то величина  $\lambda$  стремится к пределу  $\lambda_{\infty} = -\beta + [f(t) - \gamma(t)]$ . Значение  $\lambda_n = 0$  отсутствует [8, 11, 12]. Имеет смысл величина  $A = \sup_{t \in T} \lambda_{\max}(t)$ .

зависимая от условий (37) (или (39)) и (42). Собственные векторы в (32) [8, 14] образует полную систему в  $\bar{W} \subset \bar{H}$ . Используем величины

$$M(t, x, \mu) = [1 - w^2(t, x, \mu)] \left[ \partial^2 v(t, x, \mu) / \partial t^2 \right] w(t, x, \mu).$$

$$\xi(t, \mu) = V[\bar{u}(t, x) - u(t, x, \mu), t] \quad |\xi(t, \mu)| \leq k = \text{const} > 0,$$

$\bar{u}(t, x) = [1 - w^2(t, x)] \left[ \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} \right] u(t, x)$ . Вдоль решения задачи (23)-(25) в  $\Omega$  имеем  $dV[u(t, x, \mu), t]/dt \leq \lambda_{\max}(t) V[u(t, x, \mu), t] + \bar{\mu} f_1(t) + R$ .  
 $f_1(t) = (1 + \beta/2) M_1(t)$ .  $R = (\mu - \bar{\mu} + 2\bar{\mu})(\beta/2 + 1)(1 + b_1^2) b_2 b_2^1 + Ak$ .

Рассмотрим при  $t \in [0, T, \bar{\mu}^{-1}] = T_1$  уравнение сравнения

$$dz/dt = \lambda_{\max}(t) [z + \sigma(t, \bar{\mu})], \quad \sigma(t, \bar{\mu}) = \int_0^t [\bar{\mu}(1 + \beta/2) M_1(\tau)]_+ - R] d\tau \quad (43)$$

$$z(0) = z_0, \quad z_0 \geq V(u_0(x), 0), \quad z_0 \leq \bar{a} = \text{const} > 0 \quad (44)$$

Согласно [10] вдоль решения задачи (23)-(25) ил (43), (44) находим

$$V[u(t, x, \mu), (\partial u(t, x, \mu)/\partial t), t] \leq \exp \left[ \int_0^t \lambda_{\max}(\tau) d\tau \right] \left[ \bar{a} + \int_0^t \left( \bar{\mu} f_1(\tau) + R \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ \int_0^{\tau} \lambda_{\max}(\tau) d\tau \right] d\tau \right] = P(t, \mu), \quad t \in T = [0, T, \bar{\mu}^{-1}] \cap [0, T, \bar{\mu}^{-1}] \quad (45)$$

Следовательно, окончательно в области  $\Omega$  при  $t \in T$  имеем неравенство

$$V[u(t, x, \mu), (\partial u(t, x, \mu)/\partial t), t] \leq K, \quad t \in T = [0, T, \bar{\mu}^{-1}] \quad \bar{\mu}^{-1} = \min \{t^{-1}, \bar{\mu}^{-1}\}$$

$$K = \exp(ALT, \bar{\mu}^{-1}) \left\{ \bar{a}_0 + \bar{L} \bar{\mu}^{-1} [\bar{\mu}(1 + \beta/2)(b_1 + b_1^2) b_2^1 + R] \right\} \quad (46)$$

Из доказанной теоремы следует техническая устойчивость системы (23)-(25) в  $T$ . Если оценки (45)-(46) выполняются при всех  $T \subset I$ , то решения (23)-(25), заданные при всех  $T \subset I$ , технически устойчивы в  $I$ . Достаточное условие асимптотически технической устойчивости будет выполнено, если дополнительно справедливо:  $\bar{\Sigma}(t) \cdot \sigma(t, \bar{\mu}) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , и,  $\bar{\mu} \in (0, 1)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абгарян К.А. Устойчивость движения на конечном интервале времени. - Итоги науки и техники. Общая механика. - М.: ВИНИТИ, 1976, т.3, с.13-17.
2. Байрамов Ф.Д. О технической устойчивости систем с распределенными параметрами при постоянно действующих возмущениях. - Иш.Вуз. Авиатехника, 1974, вып.2 с.5-11.

3. Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Исследование задач по практической устойчивости и стабилизации движения. - МТТ, 1975, №6, с.15-24.
4. Зубов В.И. Методы А.М.Ляпунова и их применение. - Л.: Ленинград. ун-т, 1957. 241 с.
5. Матвийчук К.С. О методе сравнения для дифференциальных уравнений, близких к гиперболическим. - Дифференц.уравнения, 1984, т.20, с.2009-2011.
6. Матвийчук К.С. О технической устойчивости движения панели в газовом потоке. - Прикл.механика и техн.физика, 1988, №6, с.93-99.
7. Diaz J.B., Metcalf F.T. A Functional Equation for Rayleigh Quotient Eigenvalues and Some Application. - J.Math and Mech., 1968, v.17, '7, p.623-630.
8. Hsu C.S., Lee T.H. A Stability Study of Continuous Systems under Parametric Excitations Via Liapunov's Direct Method. - In: IUT Symposium on Instability of Continuous Systems West Germany, 1969 - Berlin: Springer, 1971, p.112-118.
9. Сиразетдинов Т.К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. - Новосибирск: Наука, 1987. 232 с.
10. Szarski J. Differential Inequalities. - Warszawa. PWN, 1967. 256 p.
11. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1981. 543 с.
12. Иосида К.Ф. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1967. 624 с.
13. Кириченко Р.Ф. Введение в теорию стабилизации движения. - Киев: Вища школа, 1978. 212 с.
14. Матвийчук К.С. Техническая теория параметрически возбуждаемых панелей в газовом потоке. - Изв. АН СССР. МТТ, 1990, №4, с.122-131.
15. Скоробогатько В.Я. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. - Киев: Наукова думка, 1980. 243 с.

Институт механики им.  
С.П.Тимошенко НАН Украины

Поступила в редакцию  
20.01.1998

ЭРОЗИЯ ПОЧВЫ НА СКЛОНАХ ВОЗВЫШЕННОСТЕЙ  
ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОТОКОМ СЛОЯ ЖИДКОСТИ,  
ОБРАЗОВАННОГО ДОЖДЕМ  
Сагомоян А.Я.

Ս. Յա. Սագոմոնյան

Հողի էռոզիան քարձրույթների լանջերին անձրևից ստացած հեղուկի շերտի տուրբուլենտ հոսանքով

Որչափում է լանջի մակերևույթին ստացած, հող չներթափանցած անձրևի կտրվելից հետո կշիռի տուրբուլենտ հոսանքը: Մտադիր մերդով ստացված է լանջի շերտի հաստությունը հոսանքի պարամետրերը որոշող անալիտիկ լուծումը: Դիտարկված է մասնավոր դեպք, երբ հոսանքում կախված հողի մասնիկները զանգվածով և ծավալով միատեսակ են: Օգտագործելով Պրանդտի մերդը որոշված է հողի մասնիկների բաշխումը հեղուկի շերտի հաստությամբ, որը րոյլ է տալիս որոշել նրանց զանգվածային ծախսը փոքրկուսում շերտի լայնական կտրվածքով

A. Ja. Sagomonyan

Soil Erosion on the Slopes of the Hills Formed by a Turbulent Flow of a Rain-made Layer

Определяется турбулентный поток жидкости капель дождя, не проникшей в почву, в образовании слое на поверхности склона. Приближенным методом по закону аналитическое решение задачи, определяющее параметры потока по толщине слоя. Проведен анализ решения. Рассмотрен частный случай, когда взвешенные в потоке частицы почвы по массе и объему одинаковы. Используя метод Праудта, изложенный в книге [3] в списке литературы рукописи, автором определено распределение частиц почвы по толщине слоя жидкости, позволяющее определить массовый секундный расход их через поперечное сечение слоя.

1. Часть непроникшей в почву жидкости капель дождя образует на поверхности склона слой жидкости, стекающей к его подножию под действием силы тяжести. Другая часть жидкости капель, проникшая в поры почвы через поверхность склона, образует поднасыщенную область почвы, примыкающей к этой поверхности. Предполагается, что среда в этой области остается в покое. Ударное воздействие капель дождя, проникание жидкости в поры и замачивание частиц почвы приводят к разрушению слабосвязанных частиц на более мелкие, свободные от сил сцепления частицы. Опыт показывает, что дальше происходит замедленное движение мелких частиц в слое жидкости в направлении нормали к поверхности склона. Скорость этих частиц в направлении потока практически равна скорости частиц жидкости. Восхождение отдельных частиц по нормали может продолжаться вплоть до свободной поверхности слоя жидкости. Более прочные крупные частицы почвы (гальки) при этом приходят в очень медленное движение вдоль поверхности склона, сосредотачиваясь вблизи этой поверхности. После прекращения нисходящего движения частиц, под действием силы тяжести начинается их падение (осаждение) в слое, преодолевая сопротивление жидкости. Падающие частицы достигают поверхности

склона в точках, лежащих ниже по течению потока и слое от точек их старта. На смену осаждающихся частиц с поверхности склона поднимаются другие частицы. В результате этого процесса достигается равновесное движение частиц почвы в потоке жидкости в слое. Эту среду в слое естественно назвать суспензией. Процесс уноса частиц почвы равновесным потоком суспензии вниз к подножию называется дождевой (водной) эрозией почвы. Дождевая эрозия на склонах возвышенностей вместе с частицами уносит наиболее плодородную часть вещества почвы на склонах. Поэтому исследование этого явления актуально при выработке противоэрозионных мер. В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных изучению водной эрозии почв. В их числе значительное место занимают результаты полевых и лабораторных исследований. В недавно вышедшей книге [1] большой список работ по проблеме эрозии почв. Поток суспензии в слое характерен завихренностью, интенсивность которой зависит от интенсивности дождя и степени шероховатости поверхности склона [2,3]. Наличие завихренности позволяет представить качественную картину начала восходящего движения мелких и легких частиц почвы, покоящихся на поверхности склона. В результате обтекания этих свободных от сил сцепления частиц возникает циркуляция скорости потока вокруг них. Это приводит к появлению подъемной силы, действующей на частицу. Во многих случаях эта сила превосходит все другие силы, действующие на эту же частицу. При этом условии, очевидно, что частица начнет восходящее движение с уменьшающейся составляющей скоростью по нормали к поверхности склона. Далее предполагается, что между поверхностью склона и прилегающей к ней поверхностью крупных частиц силы сцепления действуют дискретно в отдельных точках их связи. То есть, между этими поверхностями имеется сквозная щель (зазоры) очень малой толщины.

В рассматриваемой суспензии объемная концентрация обычно мала и можно ее моделировать несжимаемой вязкой жидкостью с плотностью  $\rho$ . Поток жидкости в тонкой щели порождает сдвиговые напряжения, действующие на поверхность гальки, способные разрушить связи и устранить силы сцепления. Возникающая после этого подъемная сила, действующая на крупную частицу, не может преодолеть силы сопротивления, но она может двигаться вдоль поверхности склона под действием в этом направлении гидродинамических сил. При этом количество уходящих частиц с данного места равно количеству приходящих на это место. То есть, количество проходящих частиц вдоль поверхности склона не изменяется [2,3,4,5].

Из теоретических работ, посвященных проблеме восхождения, осаждения и переноса твердых частиц в потоке жидкости, следует отметить фундаментальную работу Н.Е. Жуковского, опубликованную в 1919 году [6]. В этом исследовании на основе теории вихревого движения построена математическая модель, позволявшая автору получить ряд конкретных результатов, имеющих большое научное и практическое значение. Модель Н.Е. Жуковского может служить основой для решения

современных задач проблемы. Необходимо еще отметить исследования Ф.И.Франкля под названием "К теории движения взвешанных частиц", опубликованных в книге [7], (с.669-687). В этой работе выведены обобщенные уравнения "диффузионной теории" движения наносов [5,7].

**2.Постановка задачи.** Обычно объемная концентрация мелких частиц в слое водной суспензии мала, порядка  $10^{-4} - 10^{-5}$ . Чаще она моделируется вязкой несжимаемой жидкостью, коэффициент вязкости  $\eta$  которой определяется по формуле А.Эйнштейна [8]

$$\eta = \mu(1 + \gamma z), \quad z \ll 1$$

где  $\mu$  — коэффициент вязкости воды,  $z$  — объемная концентрация частиц почвы,  $\gamma$  — постоянный множитель. Для сферических твердых частиц  $\gamma = 2,5$ .

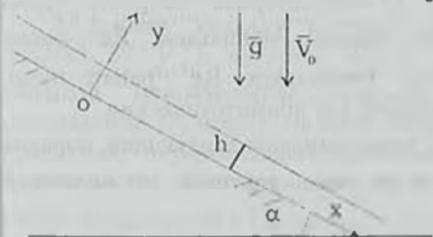
В настоящей работе движение суспензии определяется без учета влияния твердых частиц, поток суспензии заменяется потоком вязкой несжимаемой воды в слое. Приняв скорость  $\bar{V}$  водного потока в слое за скорость суспензии, можно определить массовую концентрацию частиц из уравнения переноса [5]

$$\rho_0 \frac{\partial c}{\partial t} + \rho_0 \bar{V} \text{grad} c = -\text{div}(\rho_0 \bar{V}^*)$$

где  $\rho_0$  — плотность суспензии в целом,  $c$  — массовая концентрация частиц (отношение массы частиц в единице объема к плотности  $\rho_0$ ), через  $\bar{V}^*$  обозначена подлежащая определению разность между средней скоростью частиц и скоростью  $\bar{V}$ . В диффузионной теории переноса пользуются законом Фика [5]

$$\bar{V}^* = -\frac{D}{c} \text{grad} c$$

где  $D$  — коэффициент диффузии частиц почвы в суспензии. Рассматривается плоскопараллельное движение. Поверхность склона считается неограниченной плоскостью, наклонной к горизонту (поверхности Земли) под углом  $\alpha$ . То есть предельный случай, когда кривизна



Фиг.1

поверхности равна нулю, а число Рейнольдса, в котором за характерную длину взят радиус кривизны поверхности, равно бесконечности. Скорость дождевых капель  $V_0$  одинакова, постоянна и параллельна ускорению силы тяжести  $\bar{g}$ . Величина  $V_0$  — порядка 5-9 м/с. Объемная концентрация жидкости капель  $\omega$  постоянна, равномерно распределена в "дождевом" пространстве и имеет порядок  $10^{-8} - 10^{-6}$ . Концентрация

пор почв (пористость)  $m$  также постоянна и равномерно распределена в почве склона. В дождевом пространстве над поверхностью слоя текущей суспензии давление постоянно и равно атмосферному давлению. Выберем начало декартовой системы координат на поверхности склона, ось  $x$  направим вдоль нее, вниз по течению, ось  $y$  — по внешней нормали плоскости склона (фиг.1). В силу принятых условий задачи граница между слоем суспензии и пространством дождя будет проницаемой плоскостью разрыва параметров среды, параллельная поверхности склона. Все параметры жидкости в слое не зависят от  $x$ , а толщина слоя  $h$  будет функцией только времени:  $t$

На границе  $y = h(t)$  выполняются граничные условия

$$\begin{aligned} \rho(h + V_0 \cos \alpha) &= \dot{h} + v_x, \quad \rho(h + V_0 \cos \alpha)(V_0 \cos \alpha - v_x) = P_s - P_a \\ y = h(t), \quad \rho(h + V_0 \cos \alpha)(V_0 \sin \alpha - u_x) &= \tau_x, \quad \dot{h} = \frac{dh}{dt} \end{aligned} \quad (1)$$

В этих равенствах  $\rho$  — плотность воды,  $u_x, v_x$  — компоненты скорости за поверхностью разрыва,  $P_s, P_a$  — давления за и перед ней,  $\tau_x$  — напряжение сдвига за ней. Ниже показано, что максимальное значение толщины  $h(t)$  слоя жидкости — суть малая величина, пропорциональная объемной концентрации жидкости капель в дождевом пространстве. В уравнениях плоского движения жидкости в узком слое между граничными линиями малой кривизны, порядок отношения сил инерции к силам трения определяется "приведенным" числом Рейнольдса  $Re^*$  [4,9]

$$Re^* = Re \left( \frac{h}{L} \right)^2, \quad Re = \frac{UL}{\nu}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2)$$

где  $L$  — средний радиус кривизны,  $U$  — характерная скорость вдоль границ. В рассматриваемой задаче число Рейнольдса  $Re$  равно бесконечности, а приведенное число Рейнольдса  $Re^*$  равно нулю. Конечно, эти значения надо рассматривать как асимптотические.

Условия (1) на границе  $y = h(t)$  устанавливают следующий порядок величин, имеющий место и во всем слое текущей несжимаемой жидкости:

$$\frac{v_x}{u_x} \ll 1, \quad \frac{P_s}{P_a} \approx 1, \quad \frac{h}{l} \ll 1 \quad (3)$$

В последнем неравенстве (3)  $l$  — характерная длина граничных линий и для нашей задачи оно выполняется всегда. Сказанное о приведенном числе Рейнольдса и условия (3) позволяют упростить основные уравнения турбулентного пульсационного движения [4,9,10]. Производя в уравнениях Навье-Стокса для осредненного турбулентного движения упрощения, какие делают при выводе уравнений пограничного слоя, для турбулентного течения в рассматриваемом слое получим уравнения

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho g \sin \alpha + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{wv}), \quad \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v'^2}), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v = v(t) \quad (5)$$

Здесь  $w$ ,  $v$  — теперь осредненные компоненты скорости по осям  $x, y$ ;  $P$  — осредненное давление. Символы  $u', v'$  означают компоненты скорости пульсаций по этим осям, черточка над их произведением означает осреднение этого произведения. Величина  $\overline{v'^2}$  — осредненный квадрат скорости пульсации по оси  $y$ . В рассматриваемой задаче  $\overline{v'^2}$  — функция только времени  $t$ . Одной из основных задач теории турбулентного движения жидкости является формулировка гипотез, основанных на анализе результатов эксперимента, позволяющих установить связь между осредненным и пульсационным движением. Так например, на основе гипотезы Л.Прандтля о длине пути перемешивания жидкости получена следующая формула для касательного пульсационного напряжения [10] (с.238)

$$\tau' = (-\rho \overline{w'v'}) = \rho l' \sqrt{\overline{v'^2}} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v' = \sqrt{\overline{v'^2}} \quad (6)$$

где  $l'$  — длина пути перемешивания. Заметим, что в настоящее время величине  $l'$  уже не придают обязательный смысл "пути перемешивания", а характеризует геометрическую структуру турбулентного потока, то есть масштаб турбулентности [5] (с.698). Учитывая (6), уравнение (4) представим в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (v + \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad v = \frac{\mu}{\rho}, \quad \varepsilon = l' v' \quad (7)$$

3. Средний квадрат вертикальных пульсационных скоростей не зависит от  $y$  и является малой величиной во много раз меньшей квадрата максимальной скорости осредненного потока в этом направлении [7] (с.685). На этом основании в формуле (5), в правой части уравнения, определяющего давление, отбросим член, содержащий эту величину. То есть примем, что давление в потоке определяется весом жидкости [11]. Принимая в условиях (3)  $P_s = P_a$ , получим

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha, \quad P - P_s = \rho g \cos \alpha (h - y), \quad 0 \leq y \leq h \quad (8)$$

В ряде работ (например, [12,13]) принимается, что на пористой границе скорость проникания жидкости  $w$  в поры почвы линейно зависит от давления с постоянным коэффициентом пропорциональности  $K$ . Тогда, принимая это условие согласно (8), для рассматриваемой задачи получим равенство

$$w = K \rho g \cos \alpha h(t) \quad (9)$$

Теперь определим толщину слоя жидкости  $h(t)$ , используя закон сохранения массы. Пусть  $ds$  — элемент граничной линии  $y = h(t)$  (фиг.1). В единицу времени через  $ds$  вытечет жидкость каплей в слой с массой  $dM_1$ :

$$dM_1 = \rho \omega ds (\dot{h} + V_0 \cos \alpha), \quad \dot{h} = \frac{dh}{dt}$$

За это же время через элемент  $ds$  поверхности склона на противоположной стороне из слоя в почву вытечет жидкость массы  $dM_2$ :

$$dM_2 = \rho m ds K \rho g \cos \alpha h(t)$$

где  $m$  — пористость почвы. При вышепринятых предположениях разность  $dM_1 - dM_2$  равняется секунднему изменению массы жидкости в объеме  $1 \times h \times ds$ :

$$dM_1 - dM_2 = \frac{\partial}{\partial t} (\rho h ds) = \rho ds \dot{h}$$

Это выражение определяет скорость движения границы

$$\dot{h} = \frac{wV_0 - mK\rho g \cos \alpha h}{1 - \omega} \quad (10)$$

а также величину толщины  $h(t)$  при условии  $t = 0, h = 0$

$$h(t) = A(1 - e^{-Et}), \quad A = \frac{\omega V_0}{mK\rho g}, \quad E = \frac{mK\rho g \cos \alpha}{1 - \omega} \quad (11)$$

Решение (11) имеет асимптотическое значение при  $t = \infty$

$$h_m = A = \frac{\omega V_0}{mK\rho g} \quad (12)$$

Скорость границы  $\dot{h}$  можно представить формулой

$$\dot{h} = \frac{wV_0 \cos \alpha}{1 - \omega} e^{-Et} \quad (13)$$

По гипотезе Прандтля длина пути перемешивания зависит от  $y$  в виде равенства [3,4]

$$l' = ky \quad (14)$$

постоянный коэффициент пропорциональности  $k$  для воды принимает значение  $k = 0,4$ . Используя последнее равенство, представим уравнение (7) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} (v + By) \right] = \frac{\partial u}{\partial t} - g \sin \alpha, \quad B = k \sqrt{v'^2} = kv' \quad (15)$$

и подчеркнем, что  $v'$  зависит только от времени. Уравнение (15) можно решать методом последовательных приближений, изложенном в работе [14] и использованном для аналогичной задачи в [11]. За первое

приближение примем решение квазистатического движения

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} (v + By) \right] = -g \sin \alpha \quad (16)$$

После интегрирования его по  $y$ , получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{g \sin \alpha y}{v + By} + \frac{C_1}{v + By} \quad (17)$$

Интегрирование (17) по  $y$  приводит к решению

$$u(y, t) = -\frac{g \sin \alpha y}{B} + \left( \frac{C_1}{B} + \frac{vg \sin \alpha}{B^2} \right) \ln(v + By) + C_2 \quad (18)$$

Функции времени  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий на границах слоя турбулентного движения жидкости. Выпишем второе равенство граничных условий (1) на поверхности  $y = h(t)$ :

$$\rho(h + V_0 \cos \alpha)(V_0 \sin \alpha - u_s) = \tau_s, \quad \tau_s = \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \tau' \quad (19)$$

При малых значениях объемной концентрации жидкости капле  $\omega \ll 1$ , на преобладающей части границы  $y = h(t)$ , давление равно атмосферному, а вязкая часть напряжения сдвига равна нулю. Эксперименты показывают, что на этой поверхности рейнольдсово напряжение сдвига  $\tau'$ , определенное по формуле (6), достигает минимального значения [4] (с.565). В настоящей задаче это значение имеет порядок  $\omega$ . В принципе задачу можно решать при граничном условии (19). С целью установить приближенные условия, приводящие к простому решению задачи, безразмерим уравнение (19), разделим его члены на  $\rho V_0^2 \sin^2 \alpha$ . Оценка величин безразмерных членов в полученном уравнении позволяет установить два возможных граничных условия

$$y = h(t), \quad u_s = V_0 \sin \alpha \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Здесь принимается первое условие

$$y = h(t), \quad u = u_s = V_0 \sin \alpha \quad (20)$$

О обосновании выбора условия (20) сказано ниже. Более сложно установление граничных условий на шероховатой поверхности склона [15,3,4]. На основании изложенного в начале статьи, принимается следующая модель. Вблизи поверхности склона в слое суспензии образуется подслой с предельной концентрацией частиц почвы, в котором еще возможно движение воды. На границе подслоя происходит равновесное восхождение и осаждение частиц почвы. Толщина подслоя  $y_0$  значительно меньше толщины слоя  $h$  ( $y_0 < h$ ). Предельная концентрация в настоящей работе предполагается заданной. При определении постоянных интегрирования в решении (18), продольной

скоростью среды в подслое пренебрегается, а граничные условия спускаются с поверхности  $y = y_0$  на поверхность склона  $y = 0$ . В результате граничное условие для продольной скорости на поверхности склона запишется в виде

$$y = 0, \quad u(0, t) = 0 \quad (21)$$

Теперь решение (18), удовлетворяющее условиям (20) и (21), запишется так:

$$u(y, t) = (V_0 B + y h) \frac{\sin \alpha}{B} \frac{\ln(1 + By/v)}{\ln(1 + Bh/v)} - \frac{g \sin \alpha}{B} y \quad (22)$$

Если не сделать указанную споску, а выполнить условие  $u = 0$  на границе  $y = y_0$ , то вместо (22) получили следующее выражение для продольной скорости:

$$u(y, t) = \frac{g \sin \alpha}{B} (y - y_0) + \left[ V_0 + \frac{g}{B} (h - y_0) \right] \sin \alpha \left[ \frac{\ln(v + By) - \ln(v + By_0)}{\ln(v + Bh) - \ln(v + By_0)} \right] \quad (22')$$

При  $y_0 = 0$  это выражение переходит в (22). Формула (22) определяет решение задачи в квазистатическом приближении, то есть решение уравнения (16). Второе и последующие приближения строятся методом работы [14] так, как это сделано в [11]. Рассматриваемое здесь движение относится к ползущимся движениям [4,5] и здесь ограничиваемся (22). Из этого решения следует, что максимальное значение продольной скорости  $u_m$  достигается внутри слоя на некотором расстоянии от поверхности склона  $y_1 < h$ . Затем скорость  $u(y, t)$  уменьшается при  $y > y_1$  и достигает значения  $V_0 \sin \alpha$  на поверхности  $y = h$ . Этот результат экспериментально подтвержден в статье Y. Уоп, H. Вейсел, опубликованной в журнале [16] в 1971 году.

Можно показать, из решения (16), полученного при втором условии  $y = h, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  и условии (21), следует, что скорость достигает максимума на границе  $y = h$ . Выше было отмечено, что длина пути перемещения рассматривается как параметр, определяющий масштаб турбулентности. Например, в теории "свободной" турбулентности, в задаче истечения турбулентной струи принимается, что скорость изменения ширины струи пропорциональна поперечной пульсационной скорости [4], (с.675). В рассматриваемой задаче поверхность слоя суспензии приближенно можно рассматривать как свободную поверхность и, по аналогии, принять

$$\sqrt{v'^2} = v' = \beta_1 \dot{h}(t)$$

где  $\beta_1$  - постоянный безразмерный коэффициент. Используя формулу (13), это равенство представим в виде

$$v' = \frac{\beta_1 \omega V_0 \cos \alpha}{1 - \omega} e^{-Et} \quad (23)$$

Теперь величина  $B$  в решении (22) определяется выражением

$$B(t) = \frac{k\beta_1 \omega V_0'}{1 - \omega} e^{-Et} \cos \alpha, \quad k = 0,4 \quad (24)$$

Следует отметить, что среди коэффициентов, использованных в настоящей работе, нет новых. Все они известны, используются в других исследованиях, в частности, в работах, содержащихся в списке литературы статьи.

4. Перенос взвешанных частиц потоком суспензии удобно рассчитать методом, предложенным Л.Прайдтлем [3] (с.444). Рассмотрим частный вид суспензии, когда твердые частицы в смеси одинаковы. Взаимодействием частиц пренебрегается, а сила сопротивления покоящейся жидкости линейно зависит от скорости падения частиц под действием силы тяжести. Так, для сферических частиц радиуса  $R$ , при силе сопротивления Стокса, скорость частиц вдоль оси  $y$  определяется по формуле [4,8]

$$U = U_0 = -\frac{2R^2(\rho_1 - \rho)g \cos \alpha}{9\mu}$$

где  $\rho_1$  — плотность материала частиц,  $\rho$  — плотность воды.

Скорость падения частиц вдоль оси  $y$  в потоке суспензии  $v_0$  запишется так [5,8]

$$v_0 = v + U \quad (25)$$

скорость  $v$  в правой части (25) определяется из условия сохранения массы в (1) и значения  $\dot{h}$  в формуле (13)

$$v = -\omega V_0' \cos \alpha (1 - e^{-Et}) \quad (26)$$

Следуя Л.Прайдтлю [3] пульсационное напряжение сдвига в (6) представим в виде

$$\tau' = A_1 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad A_1 = k\rho v' y, \quad k = 0,4 \quad (27)$$

где скорость  $v'$  определена по формуле (6). В теории переноса  $A_1$  называется коэффициентом переноса количества движения [3,5,7]

Пусть  $A_M$  — коэффициент переноса массы  $M$ :

$$M = A_M \frac{\partial c}{\partial y}$$

где  $c$  — массовая концентрация частиц в суспензии. Тогда коэффициент переноса объема  $A_V$  определяется из равенства

$$A_M = \rho A_V$$

Установлено, что  $A_M$  в 1,4-2 раза больше  $A_1$  [3,4]. Тогда, полагая  $k = 0,4$

для воды, получим

$$A_v = \beta v' y, \quad \beta = 0,56 - 0,8 \quad (28)$$

Пусть число взвешенных частиц в единице объема равно  $n$ . Эта концентрация является убывающей функцией вдоль оси  $y$ . По закону переноса, согласно (28), поток частиц вверх, в единицу времени, через единицу площади запишется в виде

$$-A_v \frac{dn}{dy} = -\beta v' y \frac{dn}{dy} \quad (29)$$

В равновесном процессе этот поток взвешенных частиц компенсируется исходящим переносом падающих частиц со скоростью  $v_0$ . В единицу времени через единицу площади опускается количество частиц  $n|v_0|$ .

Следовательно,

$$n|v_0| = -\beta v' y \frac{dn}{dy}$$

После интегрирования при  $y = y_0$ ,  $n = n_1$  получим [3]

$$\frac{n}{n_1} = \left( \frac{y}{y_0} \right)^{-m}, \quad m = \frac{|v_0|}{\beta v'} \quad (30)$$

где  $n_1$  — количество частиц при указанной выше предельной концентрации (состоянии насыщения),  $y_0$  — введенная выше координата границы подслоя среды в этом состоянии. Пусть числовая концентрация  $n_1$  в подслое постоянна, а среда в нем находится в состоянии твердого тела (подобно вязкопластической среде при малых напряжениях сдвига). Пренебрегая силой инерции ползучего движения и учитывая условия рассматриваемой задачи, приходим к выводу: среда в подслое между двумя поперечными сечениями и боковыми границами  $y = 0$  и  $y = y_0$  находится в равновесии [5] (с.479). Со стороны склона на боковую поверхность выделенного объема действует сила трения скольжения, а на другой боковой поверхности  $y = y_0$  действует сила, возникающая от напряжения сдвига. Действующей силой является составляющая силы тяжести вдоль поверхности склона. Выделим массу  $dM = \rho_0 y_0 dx$  в объеме  $y_0 dx$ , где  $\rho_0$  — плотность среды подслоя,  $dx$  — расстояние между двумя поперечными сечениями этого слоя. Условие равновесия сил, действующих на массу, можно записать в виде равенства

$$\tau_x dx - k_0 \rho_0 y_0 g \cos \alpha dx + \rho_0 y_0 g \sin \alpha dx = 0$$

Из этого равенства следует формула, определяющая толщину подслоя

$$y_0 = \frac{\tau_x}{\rho_0 g (k_0 \cos \alpha - \sin \alpha)} \quad (31)$$

где  $k_0$  — статический коэффициент трения, определяется из опыта, он

связан с углом трения  $\varphi$  равенством  $k_0 = \operatorname{tg} \varphi$ . На поверхности трения грунта о грунт угол  $\varphi$  имеет порядок  $14^\circ - 15^\circ$ ; символом  $\tau_u$  обозначено напряжение сдвига на боковой поверхности объема при  $y = y_0$ . Пренебрегая рейнولدсовым напряжением сдвига  $\tau'$  в окрестности поверхности склона, получим  $\tau_u = \mu \partial u / \partial y$  или же  $\tau_u = \eta \partial u / \partial y$ ; коэффициент  $\eta$  определен формулой Эйпштейна в начале статьи. Величина  $\partial u / \partial y$  есть производная по  $y$  от функции (22) при  $y = 0$  или производная по  $y$  от функции (22') при  $y_0 = 0, y = 0$ . В обоих случаях получим:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{g \sin \alpha}{B} + \left( V_0 \sin \alpha + \frac{gh \sin \alpha}{B} \right) \frac{B}{v \ln(1 + Bh/v)} \quad (32)$$

Пусть  $N$  — объемная концентрация материала частиц в подслое,  $V_1$  — объем одной частицы, тогда можно написать равенства

$$\rho_0 = \rho_1 N + \rho(1 - N), \quad n_1 = N / V_1 \quad (33)$$

При известной предельной объемной концентрации  $N$ , объеме частицы  $V_1$ , приведенные выше соотношения позволяют определить в формуле (30) толщину подслоя  $y_0$ , предельную числовую концентрацию  $n_1$ . Умножив число частиц  $n$  на массу каждой частицы  $m_1$  и на скорость потока по формуле (22), получим значение потока массы в единицу времени через единицу площади. Полный поток массы частиц в единицу времени определяется интегралом

$$m_1 \int_{y_0}^h m(y, t) dy = m_1 n_1 \sin \alpha \left\{ \frac{V_0 B + gh}{B \ln(1 + Bh/v)} \int_{y_0}^h \left( \frac{y_0}{y} \right)^m \ln(1 + By/v) dy - \frac{g}{B} \int_{y_0}^h \left( \frac{y_0}{y} \right)^m y dy \right\} \quad (34)$$

После вычисления интегралов, формулу (34) можно представить в следующем виде:

$$m_1 \int_{y_0}^h m(y, t) dy = I_1 + I_2 \quad (35)$$

$$I_1 = \frac{m_1 n_1 (V_0 B + gh) \sin \alpha y_0}{(1 - m) B} \left[ \left( \frac{h}{y_0} \right)^{1-m} - \frac{\ln(1 + By_0/v)}{\ln(1 + Bh/v)} - \frac{B}{v} \int_{y_0}^h \frac{(y/y_0)^{1-m} dy}{1 + By/v} \right] \quad (36)$$

$$I_2 = -\frac{m_1 n_1 g \sin \alpha y_0^2}{(2 - m) B} \left[ \left( \frac{h}{y_0} \right)^{2-m} - 1 \right] \quad (37)$$

Формула Л.Прандтля (30) показывает, что очень маленькие частицы,

осаждающиеся с малой скоростью  $v_0$ , так, что  $m \ll 1$  распределяются по толщине слоя  $y_0 \leq y \leq h$ , почти равномерно. Более крупные частицы, обладающие большей скоростью  $v_0$ , при  $m > 1$  сосредотачиваются в слоях, близких к поверхности склона. Скопление большого числа частиц в подслое, вблизи поверхности склона приводит к предельному состоянию, сходному с вязкопластическим состоянием среды [11].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов М.С., Глазунов Г.П. Эрозия и охрана почв. - М.: Изд. Московского университета, 1996.
2. Форхгеймер Ф. Гидравлика. - М.-Л.: Изд. ОНТИ, 1935.
3. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. - М.: ИЛ, 1951.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1969.
5. Лойцянский А.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1970.
6. Жуковский Н.Е. О снежных заносах и завалении рек. Полное собрание сочинений, т.III. - М.-Л.: 1936, с.451-474.
7. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. - М.: Наука, 1973.
8. Блечелор Дж. Введение в динамику жидкости. - М.: Мир, 1973.
9. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Гостехиздат, 1955.
10. Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости. Том 1, под редакцией С.Гольдштейна. М.: ИЛ, 1948.
11. Сагомоян А.Я. К вопросу дождевой эрозии почв. - Ж. Вестник Моск. ун-та, сер. I, матем., механ., 1995, №5, с.85-96.
12. Слезкин Н.А. О течении вязкой жидкости при наличии свободной границы и пористого дна. - Вестник Моск. ун-та, матем. механ., 1957, №5, с.3-5.
13. Бабаджанян Г.А., Даниелян А.Е. Течение вязкой жидкости в открытом пористом русле. - Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, 1963, т.16, №3, с.83-90.
14. Швец М.Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. - ПИММ, 1939, вып.3, с.251-266.
15. Петров А.Г., Петров П.Г. Перенос взвешенных частиц турбулентным потоком над размываемым дном. - ПМТФ, 1992, №4, с.61-69.
16. Journal of the Hydraulics Division Proceeding of the ASCE Engineers, 1971, v.97, №9, september, p 1367-1386.

МГУ им. М.И.Ломоносова

Поступила в редакцию  
20.06.1998

## РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК КАСАНИЯ ФРОНТОВ ВОЛН

Багдаев А.Г.

Ա.Գ. Բագդև

Ալիքների ճակատների հպման կետի շրջակայքում դժային և ոչ դժային խնդրի լուծումը

Կամույակաճմ միջավայրի համար, որը նկարագրվում է հիպերբոլիկ բնագիծային եավասարումների համակարգով, որոշված են ճառագայրային լուծումները, դժային լուծումները րիֆրակցիոն խնդրի համար և ոչ դժային լուծումը:

A. G. Bagdov

Solution of linear and nonlinear problems in vicinity of tangency point of waves fronts

Рассматриваются линейное и нелинейное решения системы гиперболических уравнений в окрестности точек касания произвольной волны с точечной или дифракционной волной.

Подобные решения возникают при прохождении акустических или упругих волн около края, отражении волн от тела, имеющего угловую точку. Найдено одномерное или лучевое решение, описывающее решение вдали от точки касания волн, линейное решение в окрестности точки касания и нелинейное решение, сравнимое с линейным и нелинейным одномерными решениями.

### §1. Интенсивность волны вдоль луча для произвольной системы линейных гиперболических уравнений с переменными коэффициентами

Пусть имеется произвольная линейная система уравнений с переменными коэффициентами в  $n+1$ -мерном пространстве времени

$$a_{ij}^{(k)} u_{j,k} + T_{ij} u_j = 0, \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)} \quad (1.1)$$

Здесь  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $x_0 = t$  обозначает время,  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) — координаты точки, по повторяющимся индексам понимается суммирование. На характеристической поверхности  $\varphi(x_k) = 0$  выполняется условие

$$\Delta = |a_{ij}^{(k)} \varphi_{,k}| = 0 \quad (1.2)$$

Рассматриваются характеристики единичной кратности, что не уменьшает общности. Нужно найти вид решения уравнений (1.1) в окрестности  $\varphi = 0$ . Пусть  $\varphi = 0$  есть уравнение волны. Тогда решение позади волны ( $\varphi > 0$ ) можно искать в виде лучевого ряда

$$u_j = \sum_{s=0}^{\infty} u_j^{(s)}(x_k) f_s(\varphi); \quad f_s(\varphi) = 0, \quad \varphi < 0 \quad (1.3)$$

$$f_{s+1}'(\varphi) = f_s(\varphi), \quad f_s(\varphi) = \varphi^{s+\alpha} / \Gamma(s+\alpha+1) \quad (1.4)$$

Из (1.3) можно найти

$$u_{j,k} = \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ u_j^{(s)} f_{s-1}(\varphi) \varphi_{,k} + u_{j,k}^{(s)} f_s(\varphi) \right\} \quad (1.5)$$

Наибольшее по порядку слагаемое будет при  $s=0$ . Тогда в порядке  $\varphi^{\alpha-2}$  получится из (1.1)

$$a_y^{(k)} \varphi_{,k} u_j^{(0)}(x_k) = 0 \quad (1.6)$$

откуда видно, что поверхность  $\varphi=0$  характеристическая и выполнено условие (1.2). Подставляя (1.3), (1.5) в (1.1) и приравнивая члены порядка  $\varphi^{\alpha}$ , можно получить

$$a_y^{(k)} u_{j,x}^{(0)} + a_y^{(k)} u_j^{(1)} \varphi_{,k} + T_j u_j^{(0)} = 0 \quad (1.7)$$

Из (1.6), учитывая, что по (1.2) существует нетривиальное решение (1.6), пропорциональное собственному вектору  $S_j$  матрицы  $a_y^{(k)} \varphi_{,k}$ , можно получить

$$u_j^{(0)} = \Phi S_j, \quad a_y^{(k)} \varphi_{,k} S_j = 0 \quad (1.8)$$

где  $\Phi$  — произвольный скаляр, дающий лучевое решение. Характеристический определитель  $\Delta$  в (1.2), где  $\varphi_{,k} = \partial\varphi/\partial x_k$  в силу (1.8) должен быть пропорционален  $a_y^{(k)} S_j \varphi_{,k}$ , и ввиду произвола в выборе параметра  $s$  в уравнениях лучей

$$\frac{dx_i}{ds} = \Delta_{,i}, \quad \frac{d\varphi}{ds} = -\Delta_{,s} \quad (1.9)$$

можно полагать

$$\Delta = a_y^{(k)} S_j \varphi_{,k}, \quad \Delta = 0 \quad (1.10)$$

Из (1.10) получится

$$\Delta_{,s_2} = a_y^{(k)} S_j \varphi_{,k} + 2a_y^{(k)} \varphi_{,s_2} S_j \varphi_{,k} \quad (1.11)$$

где использована симметричность  $a_y^{(k)}$  по  $i, j$ .

В силу (1.8) имеет место вдоль  $\varphi=0$

$$\Delta_{,s_2} = a_y^{(k)} S_j \varphi_{,k} \quad (1.12)$$

Кроме того, можно считать

$$u_j^{(1)} = S_j \varphi_{,i} \quad (1.13)$$

поскольку в (1.7) коэффициенты при  $u_j^{(1)}$  те же, что и у  $u_j^{(0)}$  в (1.6).

Умножая (1.7) на  $S_i$  и подставляя в него (1.8), можно найти

$$a_n^{(k)} S_i S_j \varphi_{,k} + a_n^{(k)} S_i S_{j,k} \Phi + T_n S_i S_j \Phi = 0 \quad (1.14)$$

Записывая

$$2a_y^{(k)} S_j S_{i,k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \{ a_y^{(k)} S_i S_j \} - a_{y,k}^{(k)} S_i S_j \quad (1.15)$$

учитывая, что по (1.9), (1.12)

$$dx_k/dt = a_y^{(k)} S_i S_j / a_y^{(0)} S_i S_j = C_k \quad (1.16)$$

$C_k$  есть вектор лучевой скорости, используя также лемму о решениях обыкновенных дифференциальных уравнений [1], согласно которой

$$\left\{ \alpha_y^{(k)} S_i S_j / \alpha_y^{(0)} S_i S_j \right\}_{,k} = d \ln J / dt, \quad J = \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(t, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})} \right| \quad (1.17)$$

где  $J$  есть якобиан от декартовых координат  $x_k$  к лучевым координатам  $\theta_s, s=1, \dots, n-1, \theta_s = \text{const}$  есть уравнение луча, можно из (1.14)-(1.17) получить, интегрируя вдоль луча

$$\Phi = \frac{C(\theta_s)}{\sqrt{\alpha_y^{(0)} S_i S_j J}} e^{\Omega}, \quad \Omega = \int_0^t \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_y^{(k)}}{\partial x_k} - T_y \right] \frac{S_i S_j}{\alpha_y^{(0)} S_i S_j} dt \quad (1.18)$$

Таким образом, получено лучевое решение для системы уравнений (1.1) в форме (1.18). Соотношение (1.17) также можно получить, применяя теорему Гаусса-Остроградского к лучевой трубке [2,3] в виде

$$\frac{\partial C_k}{\partial x_k} = \frac{d \ln \lambda \sigma}{dt}, \quad \text{где } \lambda \text{ есть нормальная скорость волны, } \sigma - \text{площадь}$$

сечения лучевой трубки, отнесенная к ее начальному значению, причем

$$J = \lambda \sigma \quad (1.19)$$

В частности, для плоской задачи  $x_1 = x, x_2 = y$ , вводя радиус-вектор точек волны  $\vec{r} = \vec{r}(t, \theta)$ , можно получить

$$\sigma = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| \quad (1.20)$$

Для идеальных сред уравнение (1.1) можно умножить на  $n_i$  и показать, что для получения закона сохранения энергии нужно полагать

$$T_y = \frac{1}{2} \alpha_{y,k}^{(k)} \quad (1.21)$$

Этот факт был отмечен М.М.Минасином, которому автор выражает благодарность.

Тогда указанный закон примет вид

$$\left\{ \alpha_y^{(k)} n_i n_j \right\}_{,k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (1.22)$$

причем из (1.18), (1.19) получится

$$\Phi = C(\theta_s) / \sqrt{\alpha_y^{(0)} S_i S_j \lambda \sigma} \quad (1.23)$$

В трехмерном пространстве  $k = 0, 1, 2, 3$ . Можно в качестве  $\Phi$  взять величину скорости частиц.

Как показано, вариационным методом [4] для произвольной среды и более строгим методом для широкого круга сред в [5, 6, 7] следует для движущихся перед волной сред считать

$$\alpha_y^{(0)} S_i S_j = \rho (c_n + u_n) / c_n \quad (1.24)$$

где  $\rho$  - начальная плотность среды,  $\lambda = c_n + u_n$  есть нормальная скорость волны,  $u_n$  - нормальная к волне невозмущенная скорость частиц.

Таким образом, найдено одномерное по нормали к волне линейное или лучевое решение для произвольных сред, данное (1.18), и для

идеальных сред (1.23), (1.24) для скорости частиц  $\Phi$ . Другой подход к определению лучевого решения в магнитной газодинамике для неоднородной движущейся среды дан в [5,6], где указаны также пути обобщения на произвольную идеальную среду.

То, что (1.24) имеет место, можно показать из эвристических соображений. Для неподвижной вперед волны среды с учетом уравнений движения можно полагать  $a_{ij}^{(0)} S_i S_j = \rho$ . Для движущейся вперед волны среды, учитывая связь исходной системы координат со связанной с частицами среды  $X_k = x_k + u_k$ ,  $u_{k,t} n_k = u_n$  можно получить

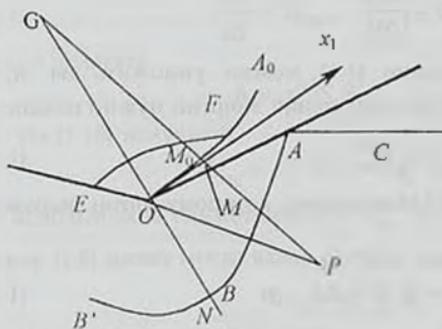
$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_k} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{X_k} + u_{k,t} \frac{\partial}{\partial X_k}$$

Кроме того, из условий совместности на волне  $\partial/\partial t \rightarrow -\lambda\delta'$ ,  $\partial/\partial X_k \rightarrow n_k\delta'$  [3] можно получить  $\partial/\partial X_k \approx -(n_k/\lambda)\delta'/\partial t$  и получится

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_k} = (c_n/\lambda) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{X_k}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{X_k} = (1 + u_n/c_n) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_k}$$

откуда в подвижной системе координат следует выбрать соотношение (1.24).

## §2. Определение линейного решения в окрестности точки касания произвольной волны с точечной или дифракционной волной



Фиг. 1

Рассмотрим две типичные дифракционные волновые задачи. Сначала возьмем непроницаемый полубесконечный плоский экран, на который в момент  $t=0$  падает произвольная волна  $OA_0$  (фиг.1). В момент времени  $t$  волна  $OA_0$  занимает положение  $AB$  и, кроме того, имеется точечная волна  $BB'$ , произведенная вершиной  $O$  экрана. При

наличии нескольких волн в среде следует вернуть их в начальное положение и определить решение на волнах  $AB$  с помощью начального условия на волне  $OA_0$ . При этом, согласно теории Кирхгофа, следует для решения в окрестности точки  $B$  касания волн интегрировать по освещенной части падающей волны, то есть по  $x_1 \geq 0$ , где ось  $x_1$  касается начальной волны в точке  $O$ . Удобно вместо координаты, отсчитываемой по нормали к начальной волне, вводить время пробега от точки интегрирования  $(x_1, y_1)$  до начальной волны  $\zeta$ , полагая  $y_1 = -c_0\zeta$ , где  $c_0 = c_{n_0} + u_{n_0}$  есть начальная скорость волны,  $\zeta$  — время

пробега от точки  $(x_1, y_1)$  до  $OA_0$ . Тогда начальное условие для волны  $AB$ , вблизи которой  $u_1 = S_1 u$ , можно взять в виде

$$u = u_1 = a^0(\zeta)^{\frac{1}{2}} (x_1)^{\frac{1}{2}} / \Gamma(\bar{\lambda} + 1) \quad (2.1)$$

где  $S_1$  есть значение собственного вектора на  $AB$ . Такое же начальное условие получится из граничной задачи отражения волны  $AC$  от угла, при этом для определения отраженных волн  $AB, A'B'$  можно решать систему алгебраических уравнений и из граничных условий на сторонах угла определять лучевым методом решение на  $AB$ . Тогда начальное условие на волне  $OA_0$  получится продолжением решения на  $AB$  к моменту  $t = 0$ , и поскольку при переходе к решению на точечной волне  $BB'$  следует считать решение на  $BB'$  равным нулю, при замене граничной задачи на начальную задачу следует, как и выше, полагать  $t = 0, u_1 = 0$  при  $x_1 < 0$  и брать начальное условие в форме (2.1). Тот же вывод получится при решении граничной задачи для системы уравнений с постоянными коэффициентами, например, задачи о проникании клина в магнитоупругую среду при начальном магнитном поле, направленном параллельно поверхности среды. В полученных методом Смирнова-Соболева интегралах по поверхности среды можно показать, что при определении решения вблизи точки  $B$  интеграл по отрицательным значениям координаты  $x$  есть малая более высокого порядка, чем интеграл по положительным  $x$ -ам, что после перехода к начальным условиям на  $OA_0$  позволяет интегрировать решения по  $OA_0$  для значений  $x_1 > 0$ , и выбирать начальное условие в виде (2.1). Решение системы уравнений (1.1) в окрестности точки  $B$  можно искать в виде, обобщающим решение волнового уравнения с переменной скоростью звука [8] и уравнений с постоянными коэффициентами [9]

$$u_1 = S_1 u, \quad u = -\left(2\pi\sqrt{2}\right)^{-1} \iint c_0 \Phi(\varphi)^{\frac{1}{2}} a^0(\zeta)^{\frac{1}{2}} (x_1)^{\frac{1}{2}} / \Gamma(\bar{\lambda} + 1) dx_1 d\zeta \quad (2.2)$$

где степень особенности фундаментального решения  $\Phi(\varphi)^{\frac{1}{2}}$  вблизи фронта волны выбирается из его поведения вблизи волны [10]. Тогда, подставляя (2.2) в систему (1.1), можно убедиться, что  $\Phi$  удовлетворяет уравнениям для лучевого решения §1 и дается формулами (1.13), (1.24), а для идеальных сред дается (1.23), (1.24). Выбор постоянной  $C(\theta_1)$  в (1.18), (1.23) и степени эйконала в лучевом решении (1.4)  $\alpha = -3/2$  для формулы (2.2), как будет показано далее, позволяет удовлетворить решением (2.2) начальному условию (2.1). Выбор  $\alpha = -3/2$  следует также из асимптотической формулы для фундаментального решения вблизи волны [10]. Согласно принципу взаимности для фундаментального решения [10, 11] можно в качестве лучевого решения и эйконала брать значения  $\Phi$  и  $\varphi$  не только для точечной волны  $BB'$  с центром в точке  $O$ , (а точнее, с центром в точке интегрирования  $x_1, \zeta$ ), но и для обращенной точечной волны или квазиокружности с центром в точке

$M(x, y)$  и вычисляемой в начальном положении. Для удовлетворения начальному условию (2.1) в (2.2), как будет показано нами далее, следует в лучевом решении  $\Phi$  постоянную  $C$  из (1.18), (1.23) брать в виде  $C(\theta_s) = \sqrt{\rho_0 / c_{n_0} c_0}$  и получится

$$\Phi = \sqrt{\rho_0 c_n \{c_{n_0} c_0 \rho (c_n + u_n)^2 \sigma\}^{\frac{1}{2}}} \quad (2.3)$$

где  $\rho_0, c_n, u_n$  — начальные значения  $\rho, c_n, u_n$ . Тогда (2.2) дает

$$u = -(\sqrt{2\pi})^{-1} \iint [A(t) c_0^{1/2} (\varphi)^{-3/2} (\zeta)^{-1/2} (x_1)^n / \Gamma(\bar{\lambda} + 1)] dx, d\zeta$$

$$A(t) = a^0 \sqrt{c_n \{c_{n_0} (c_n + u_n)^2 \sigma\}^{\frac{1}{2}}} \quad (2.4)$$

При вычислении формулы для эйконала обращенной волны  $EF$  или квазиокружности можно использовать видоизмененные соотношения работы [8] на случай двумерной дифракционной задачи. Величина  $\varphi$  в (2.4) есть время пробега от  $EF$  до точки  $(x_1, \zeta)$  для произвольного луча. Выбран за базовый луч  $MM_0$  и обозначая через  $s$  координату  $x_1$  точки  $M_0$  пересечения указанного луча с начальной волной, через  $t - t_\varphi$  время пробега от точки  $M$  до волны  $AB$  или от волны  $EF$  до начальной волны  $OA_0$  вдоль луча  $MM_0$ , ибо, когда точка  $M$  принадлежит  $AB(t - t_\varphi)$ , квазиокружность  $EF$  касается  $OA_0$  в точке  $M_0$ , учитывая, что в точке  $M_0$  происходит касание, обозначая также через  $k_1$  и  $k_2$  кривизны  $EF$  и  $OA_0$ , вычисленные в точке  $O$ , можно, разлагая расстояние  $c_0(\varphi + \zeta)$  от  $EF$  до  $OA_0$  в ряд Тейлора по степеням  $x_1 - s$ , получить аналогично одномерному случаю, рассмотренному в [8]

$$\varphi = t - t_\varphi - \frac{k_1 - k_2}{2c_0} (x_1 - s)^2 - \zeta \quad (2.5)$$

Из (2.5), обозначая  $\delta = t - t_\varphi$ ,  $-\tau = t - t_x$ , где  $\delta = 0$  дает уравнение  $AB$ ,  $\tau = 0$  — уравнение  $BB'$  и учитывая, что, когда точка  $(x, y)$  принадлежит точечной волне  $t = t_x$ , обращенная волна или квазиокружность  $EF$  проходит через точку  $O$ , можно получить ( $\varphi = 0, x_1 = 0, \zeta = 0$ )

$$t_x - t_\varphi = \frac{k_1 - k_2}{2c_0} s^2, \quad -\tau = \delta - \frac{k_1 - k_2}{2c_0} s^2 \quad (2.6)$$

Кроме того, обозначая через  $\theta$  угол нормали лучей к точечной волне  $BB'$  при выходе из точки  $O$  с осью  $x_1$ , через  $\theta_0$  значение  $\theta$  для точки  $B$ , через  $\theta_0 - \theta$  угол между указанными нормальями, проведя через точку  $M_0$  нормали  $M_0P$  и  $M_0Q$  к волнам  $EF, OA_0$ , можно

получить (фиг.1)  $\theta_0 - \theta = \angle OQM_0 + \angle OPM_0$  или, поскольку  $\angle OQM_0 = -k_2 s$ ,  $\angle OPM_0 = k_1 s$  получится

$$\theta_0 - \theta = s(k_1 - k_2) \quad (2.7)$$

Полученное соотношение проверено прямым вычислением для уравнений с постоянными коэффициентами, а также с коэффициентами, зависящими от одной координаты [9, 12]. В (2.4) интегралы понимаются в смысле главного значения или берется конечная часть интеграла [12]. Тогда согласно (2.4), (2.5), после интегрирования по частям, конечная часть интеграла имеет вид

$$u = (\pi\sqrt{2})^{-1} \iint [A(t)c_0^{1/2}(\varphi)^{1/2} \bar{\lambda}(\zeta)^{\bar{\lambda}-1} (x_1)_s^{\bar{\mu}} / \Gamma(\bar{\lambda} + 1)] dx_1 d\zeta \quad (2.8)$$

В силу равенства

$$t - t_0 - \frac{k_1 - k_2}{2c_0} (x_1 - s)^2 = \varphi', \quad \int_0^{\varphi'} \frac{\zeta^{\bar{\lambda}-1}}{\sqrt{\varphi' - \zeta}} d\zeta = (\varphi')^{\bar{\lambda}-1/2} B(\bar{\lambda}, 1/2) \quad (2.9)$$

можно получить

$$u = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{\bar{\lambda} AB(\bar{\lambda}, 1/2)}{\Gamma(\bar{\lambda} + 1)} c_0^{1/2} \int (x_1)_s^{\bar{\mu}} (\varphi')^{\bar{\lambda}-1/2} dx_1 \quad (2.10)$$

В дальнейшем различаются две области в окрестности  $B$ : позади точечной волны  $BB'$  и между  $AB, BB'$ . В области позади  $BB'$  имеет место  $t > t_x$ . В (2.10) следует интегрировать в пределах от  $O$  до значения  $x_1$ , обращающего  $\varphi'$  в нуль

$$x_1 = s \pm \tilde{s}, \quad \tilde{s} = \sqrt{2c_0 \delta(k_1 - k_2)} \quad (2.11)$$

причем при  $t > t_x$  имеет место  $\tilde{s} > s$  и знак минус в (2.11) не подходит.

Поэтому область интегрирования будет  $0 \leq x_1 \leq s + \tilde{s}$ . Вычисление (2.10) дает решение при  $t > t_x$  [9]

$$u = A_1 \mathfrak{F} \left( \frac{1}{2} - \bar{\lambda}, \bar{\lambda} + \frac{1}{2}, \bar{\lambda} + \frac{3}{2} + \bar{\mu}, \frac{1-\omega}{2} \right) \quad (2.12)$$

где  $\mathfrak{F}$  есть гипергеометрическая функция

$$A_1 = A \delta^{\bar{\lambda} + \bar{\mu} + 1} \left( \frac{2c_0}{k_1 - k_2} \right)^{\bar{\mu} + 1/2} \times \\ \times 2^{\bar{\lambda} - 1/2} c_0 \Gamma(1 + \bar{\mu}) (1 - \omega)^{\bar{\lambda} + 1/2 + \bar{\mu}} / \sqrt{\pi(k_1 - k_2)} \Gamma(\bar{\lambda} + 3/2 + \bar{\mu}) \quad (2.13)$$

где  $\omega = (0 - \theta_0) \{2c_0 \delta(k_1 - k_2)\}^{-1/2}$ .

Полагая в (2.12), (2.13)  $\bar{\lambda} = 0, \bar{\mu} = 0$ , что соответствует в (2.1) начальной волне со скачком решения, можно получить решение около точки  $B$  при  $t > t_x$  в виде

$$u = \frac{A(t)c_0}{\pi\sqrt{k_1 - k_2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2c_0} \sqrt{k_1 - k_2} \sqrt{-\tau}}{\theta - \theta_0} \quad (2.14)$$

В области  $t < t_x$  впереди точечной волны можно получить, интегрируя в пределах (2.11)

$$u = \frac{Ac_0 \delta^{\lambda}}{(k_1 - k_2)^{\mu+1/2}} \frac{(\theta_0 - \theta)^{\mu}}{\Gamma(\lambda + 1)} \mathfrak{F}\left(-\frac{\bar{\mu}}{2}, \frac{1 - \bar{\mu}}{2}, \bar{\lambda} + 1, \frac{1}{\omega^2}\right) \quad (2.15)$$

На самой волне  $AB$   $\delta \approx 0$  и  $\omega \approx \infty$

$$u = \frac{Ac_0}{\sqrt{k_1 - k_2}} \frac{\delta^{\lambda} s^{\mu}}{\Gamma(\lambda + 1)} \quad (2.16)$$

Тогда можно перейти к начальной волне  $OA_0$ , на которой  $\delta = \zeta$  и (2.16) дает

$$u_1 = \frac{Ac_0}{\sqrt{k_1 - k_2}} \frac{\zeta^{\lambda} s^{\mu}}{\Gamma(\lambda + 1)} \quad (2.17)$$

где согласно (2.4) при  $t \rightarrow 0$  получится  $A(t) = \alpha^0 / c_0 \sqrt{\sigma}$ .

Исходя из принципа взаимности для фундаментального решения [1] можно, вводя радиус-вектор для обращенной волны  $EF$   $\vec{r}' = \vec{r}'(\beta, t)$ , причем  $\beta = \text{const}$  дает лучи волны  $EF$ , получить при  $t \rightarrow 0$

$|\sigma| = \left| \frac{\partial \vec{r}'}{\partial \beta} \right| = k_1^{-1}$  и поскольку  $k_1 \gg k_2$ , получится  $(k_1 - k_2)\sigma \approx 1$ . Тогда (2.17) дает

$$u_1 \approx \alpha^0 \zeta^{\lambda} s^{\mu} / \Gamma(\lambda + 1) \quad (2.18)$$

то есть начальное условие (2.1) удовлетворяется решением (2.2). Для неоднородной задачи мелкой воды решение (2.13), (2.15) получено в [14]. Решение (2.12), (2.13) вблизи точечной волны  $BB'$  вдоль от  $B$  в силу (2.6) можно записать в виде  $\tau \approx 0$ ,  $1 - \omega \approx -c_0(k_1 - k_2)\tau / (\theta - \theta_0)^2$

$$u = A_1, \quad A_1 \approx \frac{A}{(\theta - \theta_0)^{\mu+1}} \frac{\Gamma(1 + \bar{\mu}) c_0^{1/2 - \lambda - \mu}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda + 3/2 + \bar{\mu})} (-\tau)^{\lambda + 1/2 + \bar{\mu}} \quad (2.19)$$

и поскольку  $\tau$  есть эйконал и дает профиль лучевого решения (1.4) на волне  $BB'$ , а вдоль лучей  $\theta = \text{const}$ , из (2.19) следует, что  $A(t)$ , даваемое (2.14), в самом деле есть амплитуда для точечной волны  $BB'$  лучевого решения

### §3. Определение нелинейного решения в окрестности точки $B$ касания волн

Как следует из линейного решения (2.14) для скачкообразной начальной волны при малых  $\Phi - \gamma$  в окрестности волны, имеющей порядок  $\tau \sim \gamma$ ,  $\partial u / \partial \tau \sim 1$  и нелинейные члены в уравнениях движения среды следует удерживать. Поскольку наибольшие трудности представляет получение нелинейного уравнения в проекции на направление наиболее быстрого изменения параметров, здесь предлагается метод получения этого уравнения с помощью уравнения

характеристики. Уравнение волны  $AB$  в линейной задаче согласно (2.6) имеет вид  $\delta = 0$ .

$$\tau = (0 - \theta_0)^2 / 2c_0(k_1 - k_2) \quad (3.1)$$

Отсюда видно, что дифференциальные уравнения характеристик линейной задачи вблизи точки  $B$  имеют вид

$$\Gamma = \frac{c_0}{2} \frac{d(k_1 - k_2)}{dt}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\Gamma \left( \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right)^2 \quad (3.2)$$

Но дифференциальное уравнение характеристической кривой имеет вид

$$-\frac{\partial I'}{\partial t} = (C_n + v_n) [\text{grad} I'] \quad (3.3)$$

где  $C_n$  — нормальная скорость нелинейной характеристики относительно частиц среды,  $v_n$  — нормальная к волне скорость частицы среды.

Обозначаем через  $c_n$  и  $u_n$  соответственные значения невозмущенных величин  $C_n$  и  $v_n$  и полагаем  $u = v_n - u_n$ ,  $C_n = c_n + (\alpha^0 - 1)u$ , где  $u$  мало,  $\alpha^0 u$  дает вклад в скорость  $C_n + v_n$  за счет нелинейных членов в выражении  $C_n$  через параметры среды, который можно найти из условий совместности на нелинейной характеристике.  $u_i$  находятся через  $u$  из уравнений

$$\alpha_i^{(0)} u_{j, \tau, k} = 0 \quad (3.4)$$

Таким образом,  $\alpha^0$  всегда может быть найдено [12]. Тогда из (3.3) получится, что уравнение одномерных по  $\tau$  нелинейных характеристик имеет вид  $\partial \tau / \partial t = \alpha^0 u / H_1$ ,  $H_1 = c_n + u_n$  и после сравнения с (3.2) можно убедиться, что уравнение нелинейных двумерных характеристик вблизи  $B$  имеет вид

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \Gamma \left( \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{\alpha^0}{H_1} u \quad (3.5)$$

При этом дифференциальное уравнение в проекции на  $\tau$ , имеющее (3.5) своим уравнением характеристик, запишется в виде

$$\Psi_{, \tau} - \Gamma \Psi_{, \theta \theta} + \alpha^0 H_1^{-1} u \Psi_{, \tau} - u d \ln \Phi / dt = 0 \quad (3.6)$$

Здесь в силу произвола выбора  $\Psi$  можно полагать  $u = \Psi_{, \tau}$ , и добавлено слагаемое  $-u d \ln \Phi / dt$ , дающее с точностью до независимого от  $t$  множителя одномерное по  $\tau$  линейное или лучевое решение  $\Phi$  §1 около  $BB'$ .

Вводя функцию  $v_0 = \Psi_{, \theta}$ , можно (3.6) записать в виде

$$u_{, \tau} - \Gamma v_{, \theta} + \alpha^0 H_1^{-1} u u_{, \tau} - u d \ln \Phi / dt = 0, \quad u_{, \theta} = v_{, \theta \tau} \quad (3.7)$$

Можно искать решение уравнений (3.7), переходящее для конечных  $\tau < 0$  в линейное решение (2.14) в виде [9]

$$u\sqrt{k_1 - k_2} = \Phi\mu, \quad v_0 = \sqrt{k_1 - k_2}\Phi v, \quad v = \frac{\theta - \theta_0}{\pi(k_1 - k_2)c_0} \operatorname{tg}\mu\pi - \frac{\theta - \theta_0}{k_1 - k_2} \frac{\mu}{c_0}$$

$$\tau = -\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2(k_1 - k_2)c_0} \operatorname{tg}^2\mu\pi + \int_0^{\alpha^0} \frac{\Phi}{H_1 \sqrt{k_1 - k_2}} \mu dt + C_1(C) \quad (3.8)$$

$$C = \frac{\sin \mu\pi}{\sqrt{k_1 - k_2}}$$

где произвольная функция  $C_1(C)$  может быть выбрана из условия наилучшего удовлетворения соотношений на ударной волне  $BB'$  [9] в окрестности точки  $B$ , в которой  $\mu=1$ , причем условия на  $BB'$  точно удовлетворены в точке  $B$  при предположении  $C_1(0) = 0$ .

Как показано в [13], для однородной сжимаемой жидкости для выполнения условия перехода решения (3.8) в значение  $u$  на волне  $BB'$  верное вдали от  $B$ , следует полагать  $C_1 = 0$ , что имеет место и для данной задачи в произвольной среде.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В.К. Курс высшей математики. Т.IV. - М.: Гостехиздат, 1950.
2. Акре Ж., Гординг А., Котаке Т. Задача Коши. - М.: Мир, 1967.
3. Jeffrey A., Taniuti T. Non-linear wave propagation. - New York-London: 1964 250 p.
4. Уизем Дж.Б. Волны с дисперсией и вариационные принципы. Нелинейные волны. - М.: Мир, 1977, с.155-160.
5. Минасян М.М. О распространении слабых возмущений в магнитной газодинамике. - Докл.АН Арм.ССР, 1972, т.4, №5, с.273-280.
6. Минасян М.М. Приближенные уравнения нелинейных волн в неоднородных движущихся средах с учетом диссипации и дисперсии. - Уч.записки ЕГУ, естеств.науки, 1978, №3 (139), с.46-52.
7. Минасян М.М. Распространение слабых ударных волн в неоднородных движущихся средах. - Уч.записки ЕГУ, естеств.науки, 1975, №1, с.55-64.
8. Бабич В.М. Распространение нестационарных волн и каустики. - Уч.записки АГУ, 1958, №32.
9. Багдоев А.Г., Даноян З.Н. Исследование движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке. - Ж.вычисл.матем. и матем.физики, 1972, т.12, №6, с.1512-1529.
10. Бабич В.М. Фундаментальные решения гиперболических уравнений с переменными коэффициентами. - Математ. сб.: 1960, т.52 (94), №2.
11. Куранг Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1965.
12. Багдоев А.Г. Распространение волн в сплошных средах. - Ереван: Изд.АН Арм.ССР, 1981. 303 с.
13. Zhalak G.J. and Myers M.K. Conical flow near singular rays - Journal of Fluid Mechanics, 1974, vol.63, №3.
14. Багдоев А.Г., Безиргян Г.С. Решение дифракционной задачи вблизи касания дифракционной и падающей гравитационной волн в линейной постановке. - Изв.НАН Армении, Механика, 1994, т.47, №3-4, с.37-53.

### Вводное слово к дискуссии

15 апреля и 6 мая 1999 г. редакцией журнала Известия НАН Армении "Механика" была организована дискуссия на тему: "О методах приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным".

В настоящее время эти вопросы представляются важными для определения пределов применимости тех или иных расчетных моделей тонкостенных элементов конструкций в зависимости от их физико-механических и геометрических характеристик и условий нагружения.

По решению редколлегии журнала в настоящем номере печатаются некоторые материалы, представленные на дискуссии.

Редколлегия

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ В ТЕОРИИ ПЛАСТИН И  
ОБОЛОЧЕК

Աղալովյան Ա.Ա.

Ա.Ա. Աղալովյան

Ասիմպտոտիկ մեթոդի մասին սայերի և քաղանքների տեսությունում

Շարադրված է շերտ-ինձանների, սայերի և քաղանքների եզրային խնդիրների լուծման ասիմպտոտիկ մեթոդը: Բերված է ակնարկ բարակ ճարտիչների ստատիկ և դինամիկ, դասական և ոչ դասական եզրային խնդիրների լուծումների և կարևոր արդյունքների, որոնք ստացվել են լուծելով առաձգականություն տևողության համադրատասխան հավասարումները ասիմպտոտիկ մեթոդով:

L. A. Aghalovyan

On Asymptotic Method in the Theory of Plates and Shells

Излагается асимптотический метод решения краевых задач балок-полос, пластин и оболочек. Приведен обзор работ и результатов по статическим и динамическим, классическим и неклассическим краевым задачам тонких тел на основе асимптотического метода решения соответствующих уравнений теории упругости.

**Суть метода.** Уравнения теории упругости, написанные в безразмерной системе координат для балок, пластин и оболочек, являются сингулярно возмущенными малым параметром  $\varepsilon$ . В качестве  $\varepsilon$  обычно выбирают для балок отношение диаметра поперечного сечения к длине балки, а для пластин и оболочек — отношение полутолщины к характерному размеру срединной поверхности.

Существует принципиальная разница между регулярно и сингулярно возмущенными уравнениями. Проиллюстрируем сказанное на двух простейших примерах.

Уравнение  $u'' + \varepsilon u' = 0$  (1)

является регулярно возмущенным малым параметром  $\varepsilon$ . Его решение  $u = c_1 + c_2 e^{-\varepsilon x}$  является непрерывной функцией от  $\varepsilon$ . Решение задачи Коши или краевой задачи для уравнения (1) можно найти простым разложением по степеням малого параметра:

$$u = \varepsilon' u_s, \quad s = \overline{0, \infty} \quad (2)$$

Здесь и далее обозначение  $s = \overline{0, \infty}$  означает, что по нему (повторяющемуся) индексу  $s$  происходит суммирование от нуля до  $\infty$ . Подставив (2) в (1), получим рекуррентные уравнения

$$u_s'' + u_{s-1}' = 0 \quad (3)$$

При  $s = 0$  есть полное соответствие между порядком укороченного (невозмущенного) уравнения  $u_0'' = 0$  и числом начальных и краевых условий. Решение при малом  $\varepsilon$  близко к решению при  $\varepsilon = 0$ . Задача в дальнейшем заключается в улучшении этого результата с помощью вычисления более высоких приближений.

Для сингулярно возмущенного уравнения (малый параметр является коэффициентом старшей производной)

$$\varepsilon u'' + u' = 0 \quad (4)$$

решение  $u = c_2 + c_1 e^{-x/\varepsilon}$  терпит разрыв при  $\varepsilon = 0$ .

Возникает вопрос: можно ли решение уравнения (4) определить разложением в степенной ряд по малому параметру  $\varepsilon$ . Непосредственное применение разложения (2) приводит к рекуррентным уравнениям

$$u_s'' + u_{s-1}' = 0 \quad (5)$$

то есть к понижению порядка, а следовательно, к невозможности удовлетворения всем начальным и граничным условиям. Но оказалось, что разложением (2) можно найти регулярную часть решения. Возникает вопрос: можно ли представлением типа (2) определить и сингулярную часть ( $\exp(-x/\varepsilon)$ ) решения. Оказалось, что можно, но для этого необходимо сделать в уравнении (4) замену переменной  $t = x/\varepsilon$  и решение вновь полученного уравнения отыскать в виде (2) (второе расщепление исходного оператора). Этому расщеплению соответствуют разрывные по  $\varepsilon$  решения, известные как решения пограничного слоя. Оказалось, что оперируя этими двумя типами решения, можно удовлетворить начальным и граничным условиям.

Таким образом, решение сингулярно возмущенного уравнения невозможно найти одним разложением по малому параметру. Его определение асимптотическим методом включает следующие этапы: а) построение решений, соответствующих первому расщеплению (решений укороченного уравнения и уравнений для последующих приближений типа (5)). В теории балок, пластин и оболочек это решение называют решением внутренней задачи или основным решением; б) построение решений пограничного слоя, соответствующих второму расщеплению исходного возмущенного оператора; в) сопряжение (сращивание, согласование) найденных, качественно различных решений при помощи краевых и начальных условий.

Более подробное представление о сингулярно возмущенных уравнениях и методах их решения можно составить, например, по монографиям [1-6].

Система уравнений теории упругости для тонкостенных тел имеет ту специфику, что параметр является коэффициентом не всего старшего оператора, а только его части. Это приводит к тому, что вырожденная (невозмущенная) система имеет меньшую пространственную размерность, число же пограничных функций становится бесконечным, но счетным [7].

При асимптотическом подходе очень важным также является правильное определение асимптотических порядков исконых величин, ибо не все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения имеют одинаковый вклад в напряженно-деформированное состояние. Установление такой асимптотики является одним из основных этапов асимптотического подхода. Оно имеет более глубокие корни, ибо сформулировав любой физический закон, или принимая ту или иную гипотезу, фактически задается некая асимптотика. Не случайно, что установление этой асимптотики (закона) многие авторы считают искусством [8,9].

Отметим, что последний подход широко практиковался и продолжает практиковаться в гидроаэромеханике, в механике же деформируемого твердого тела его использование связано с применением асимптотического метода.

Для большей наглядности изложение асимптотического метода начнем с плоских задач теории упругости.

### §1. Плоская задача для полосы (растяжение-сжатие стержней и изгиб балок)

Требуется определить решение задачи теории упругости в области  $\Omega = \{(x, y) \mid x \in [0, l], |y| \leq h, 2h \ll l\}$ , когда на продольных сторонах прямоугольника заданы значения напряжений  $\sigma_x, \sigma_y$ , а на торцах  $x = 0, l$  — значения напряжений, перемещений или смешанные условия.

При переходе к безразмерным координатам  $\xi = x/l, \zeta = y/h$  и безразмерным компонентам вектора перемещения  $U = u/l, V = v/l$ , уравнения плоской задачи для изотропной полосы записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \zeta} &= 0, & \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \zeta} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \xi} &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), & \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \zeta} &= \frac{1}{G} \sigma_{xy}, & \varepsilon &= h/l \end{aligned} \quad (1.1)$$

Система (1.1) сингулярно возмущена малым параметром  $\varepsilon$  (большим параметром  $\varepsilon^{-1}$ ). Попробуем найти решение этой системы по схеме, изложенной выше. Решение складывается из решения внутренней задачи (основное в смысле классической теории балок и пластин решение) и пограничного слоя. Решение внутренней задачи будем искать в виде [10]

$$Q(\xi, \zeta) = \varepsilon^{-q} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s Q^{(s)}(\xi, \zeta) \quad (1.2)$$

где  $Q$  — любое из напряжений и безразмерных перемещений,  $q$  — целое число, которое характеризует асимптотический порядок данной величины. Оно вообще различно для различных напряжений и перемещений и определяется таким образом, чтобы после подстановки (1.2) в (1.1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получить рекуррентную систему относительно  $Q^{(s)}$ . В нашем случае задача разбивается на симметричную задачу (растяжение-сжатие) с граничными условиями

$$\sigma_{xy} = \pm \varepsilon^{-1} X_1, \quad \sigma_y = Y_1 \quad \text{при } y = \pm h \quad (1.3)$$

и на кососимметричную (изгиб) задачу с граничными условиями

$$\sigma_{xy} = \varepsilon^{-1} X_2, \quad \sigma_y = \pm Y_2 \quad \text{при } y = \pm h \quad (1.4)$$

где

$$X_i = (X^+ \pm X^-) / 2, \quad Y_i = (Y^+ \mp Y^-) / 2, \quad i = 1, 2 \quad (1.5)$$

$X^+$ ,  $Y^+$  — тангенциальные и нормальные составляющие внешней нагрузки, действующие на продольных краях полосы  $y = \pm h$ .

Не сложно установить, что

$$q = 2 \text{ для } \sigma_x, U; \quad q = 1 \text{ для } \sigma_{xy}, q = 0 \text{ для } \sigma_y \quad (1.6)$$

для  $V$ :  $q = 1$  в симметричной и  $q = 3$  в кососимметричной задачах.

Отметим, что асимптотика (1.2), (1.6) единственная, которая приводит к непротиворечивой системе относительно  $Q^{(s)}$ . Эта асимптотика соответствует граничным условиям (1.3), (1.4). Если изменить граничные условия при  $y = \pm h$ , то существенным образом меняется и асимптотика (1.6). Поэтому одним из основных моментов асимптотического метода является установление правильной асимптотики, при этом сказанное относится не только к задачам теории упругости, но и к любой физической задаче, рассматриваемой в узкой области. Иногда для этого бывает полезным использовать решения задач, найденных иным методом. Например, асимптотика (1.2), (1.6) вытекает также из точного (в смысле Сен-Венана) решения для консольной балки, изгибаемой равномерно распределенной нормальной нагрузкой интенсивности  $q$  [11, с.64]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{3}{4} \frac{q}{h^3} \left( x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) \\ \sigma_y &= -\frac{3}{4} \frac{q}{h^3} \left( \frac{1}{3} y^3 - h^2 y + \frac{2}{3} h^3 \right) \\ \sigma_{xy} &= -\frac{3}{4} \frac{q}{h^3} (h^2 - y^2) x \end{aligned} \quad (1.7)$$

Точное решение (1.7) получено методом использования полиномов в качестве бигармонической функции. Если в (1.7) перейти к безразмерным перемещениям  $\xi = x/h$ ,  $\zeta = y/h$ , оно примет вид

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{3}{4}q\left(\varepsilon^2 \xi^2 \zeta - \frac{2}{3}\zeta^3\right) \\ \sigma_y &= -\frac{3}{4}q\left(\frac{1}{3}\zeta^3 - \zeta + \frac{2}{3}\right) \\ \sigma_{xy} &= -\frac{3}{4}q\varepsilon^{-1}(1-\zeta^2)\xi\end{aligned}\quad (1.8)$$

то есть  $\sigma_x \sim 0(\varepsilon^{-2})$ ,  $\sigma_y \sim 0(\varepsilon^{-1})$ ,  $\sigma_{xy} \sim 0(\varepsilon^0)$ , что подтверждает справедливость асимптотики (1.2), (1.6). В связи с этим отметим некорректность утверждения одного из участников затянувшейся дискуссии по теории пластин и оболочек [12-22] о том, что "исходные асимптотические порядки напряжений и перемещений ... обоснования не имеют ..." [21].

В [10,23] доказано, что асимптотическим методом можно получить не только решение (1.7), но и все те решения, которые найдены путем выбора бигармонической функции в виде полиномов. Более того, асимптотическим методом выведены рекуррентные формулы, автоматически обеспечивающие бигармоничность полиномов. Решения широкого спектра таких задач приведены в [23].

Подставив (1.2), (1.6) в (1.1), в симметричной задаче ( $U$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  — четные,  $\sigma_{xy}$ ,  $V$  — нечетные по  $\zeta$  функции, в задаче изгиба — наоборот) все величины  $Q^{(s)}$  выражаются через  $u^{(s)}$ , которое определяется из уравнения

$$EF \frac{d^2 u^{(s)}}{dx^2} = -q_x^{(s)} \quad (1.9)$$

в кососимметричной же задаче (изгиб) все величины выражаются через  $v^{(s)}$ , которое определяется из уравнения

$$EI \frac{d^4 v^{(s)}}{dx^4} = q^{(s)} \quad (1.10)$$

где  $EF$  — жесткость при растяжении-сжатии,  $EI$  — жесткость при изгибе,  $I$  — момент инерции поперечного сечения. При  $s=0$  уравнение (1.9) совпадает с классическим уравнением растяжения-сжатия стержней, а уравнение (1.10) — с классическим уравнением изгиба балки. Таким образом, установлен факт, что построение исходного приближения внутренней задачи идентично теории растяжения-сжатия стержней и изгиба балок, основанной на гипотезе плоских сечений. Более того, исходное приближение при асимптотическом подходе дает больше информации, чем классическая теория балок Бернулли-Кулона-Эйлера, ибо позволяет вычислить также напряжения  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_y$ , последним из которых в классической теории вообще пренебрегают.

Согласно (1.9), (1.10) решение внутренней задачи содержит две произвольные постоянные в симметричной и четыре в кососимметричной задачах. Из этих постоянных соответственно одна в симметричной и две в кососимметричной задачах будут характеризовать жесткое смещение, остальные же постоянные должны быть определены

из условий при  $x = 0, l$ . Очевидно, что одной постоянной в решении симметричной и двумя в кососимметричной задачах невозможно удовлетворить условиям в каждой точке торцов  $x = 0, l$ , что косвенным образом подтверждает сингулярную возмущенность уравнений исходной задачи. Следовательно, необходимо построить принципиально новое решение тоже. Естественно выяснить возможность существования решения типа пограничного слоя.

Для построения вблизи  $x = 0$  решения пограничного слоя, в уравнения (1.1) вводится новая замена переменной  $t = \xi/\varepsilon$ , и решение вновь полученной системы отыскивается в виде функций типа погранслоя [10, 23, 24]

$$R_p = \varepsilon^{\lambda_p+1} R_p^{(t)}(\zeta) \exp(-\lambda t), \quad s = \overline{0, N} \quad (1.11)$$

Устанавливается, что  $\chi_{\sigma} = \chi$ ,  $\chi_{\mu} = \chi + 1$ , а значение целого числа  $\chi$  однозначно определяется в ходе сопряжения (сращивания) внутреннего и погранслоя решений. Решение (1.11) должно при  $\zeta = \pm 1$  удовлетворять однородным граничным условиям

$$\sigma_{\nu p} = \sigma_{\nu p} = 0 \quad (1.12)$$

Для коэффициентов  $R_p^{(t)}(\zeta)$  представления (1.11) имеем

$$\sigma_{\nu p}^{(s)} = F_n^s A_n^{(s)}, \quad \sigma_{\nu p}^{(s)} = \frac{F_n''}{\lambda_n} A_n^{(s)}, \quad \sigma_{\nu p}^{(s)} = \frac{1}{\lambda_n^2} F_n'' A_n^{(s)}$$

$$u_p^{(s)} = \frac{1}{E} \left[ -\frac{F_n''}{\lambda_n^3} + \frac{\nu}{\lambda_n} F_n' \right] A_n^{(s)}, \quad V_p^{(s)} = -\frac{1}{E \lambda_n^2} \left[ \frac{F_n''}{\lambda_n^2} + (2 + \nu) F_n' \right] A_n^{(s)} \quad (1.13)$$

где в симметричной задаче

$$F_n(\zeta) = \zeta \sin \lambda_n \zeta - \operatorname{tg} \lambda_n \cos \lambda_n \zeta \quad (1.14)$$

а  $\lambda_n$  - корень уравнения  $\sin 2\lambda_n + 2\lambda_n = 0$

в кососимметричной задаче

$$F_n(\zeta) = \sin \lambda_n \zeta - \zeta \operatorname{tg} \lambda_n \cos \lambda_n \zeta$$

$$\sin 2\lambda_n - 2\lambda_n = 0 \quad (1.15)$$

Решение (1.11), (1.13)-(1.15) для произвольного  $s$  является точным, то есть удовлетворяет всем уравнениям теории упругости и граничным условиям (1.12). Фактически это решение является известным однородным решением Шиффа-Папковича-Лурье.

Таким образом, принимая гипотезу плоских сечений, тем самым теряется целый класс точного решения. Укажем также, что это решение невозможно получить ни по теории Рейсснера, ни по теории типа Тимошенко, ни по одной из существующих других прикладных теорий балок, пластин и оболочек. Без этого решения невозможно достаточно точно удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности. Забегая вперед, укажем, что в пространственных краевых задачах для изотропных и ортотропных пластин и оболочек помимо плоского погранслоя существует также антиплоский погранслой (краевое кручение). Теории Рейсснера, Амбарцумяна, типа Тимошенко учитывают этот пограничный слой, однако они не описывают плоский погранслой. Построение обоих пограничных слоев не является прерогативой сторонников

асимптотического метода, а отражает математическую сущность краевой задачи для тонких тел. Укажем также, что, как правило, погранслои через граничные условия на боковой поверхности влияют также на проникающее (основное) решение, поэтому без их целостного построения вряд ли уместно утверждать об уточнении результатов классической теории. Функции пограничного слоя убывают как  $\exp(-\operatorname{Re} \lambda_n l)$  и для того, чтобы напряженно-деформированное состояние в прямоугольнике можно было бы расчленить на внутреннее и типа погранслоя, его продольный размер  $l$  должен быть таким, чтобы величины порядка  $O\left[\exp\left(-\frac{l}{h} \operatorname{Re} \lambda_1\right)\right]$  были пренебрежимо малы по сравнению с единицей. Учитывая, что в симметричной задаче  $\operatorname{Re} \lambda_1 \approx 2,11$ , а в кососимметричной  $\operatorname{Re} \lambda_1 \approx 3,75$ , это требование будет практически выполнено уже на расстоянии от торца полутора-двух толщин.

Решение погранслоя (1.11), (1.13) имеет весьма важное свойство: напряжения  $\sigma_{x,p}, \sigma_{xy,p}$  в произвольном поперечном сечении  $l = l_k$  самоуравновешены:

$$\int_{-1}^1 \sigma_{x,p} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 \zeta \sigma_{x,p} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 \sigma_{xy,p} d\zeta = 0 \quad (1.16)$$

что позволяет непосредственно сравнивать (сопрягать) внутреннее и погранслоя решения.

Таким образом, асимптотическим решением исходной сингулярно возмущенной краевой задачи является

$$I = Q + R_p^{(1)} + R_p^{(2)} \quad (1.17)$$

где  $Q$  – решение внутренней задачи;  $R_p^{(1)}, R_p^{(2)}$  – решения погранслоев, соответствующие торцевым сечениям  $x = 0, l$ . Решение (1.17) содержит достаточное количество произвольных постоянных для удовлетворения любым граничным условиям при  $x = 0, l$ . Например, в случае задания при  $x = 0$  значений напряжений, одновременно устанавливается  $\chi = -2$  и используя свойство самоуравновешенности напряжений погранслоя (1.16), определяются все произвольные постоянные в решении внутренней задачи. Их ровно столько, сколько условий (1.16), что указывает на более глубокую логическую согласованность внутреннего и погранслоя решений. В случае первой краевой задачи самоуравновешенная часть торцевой нагрузки не влияет на решение внутренней задачи, пограничный же слой берет на себя самоуравновешенную часть этой нагрузки. Этот чисто математический результат подтверждает справедливость принципа Сен-Венана в плоских задачах. Иллюстрирующие сказанное примеры приведены в [10, 23].

Перемещения погранслоя не обладают самоуравновешенностью (1.16) (то есть принцип Сен-Венана для перемещений несправедлив), поэтому сопряжение внутреннего и погранслоя решений осуществляется иным способом. Для сопряжения решений можно использовать вариационные принципы, методы граничной коллокации, наименьших квадратов и др. [23].

В заключении этого раздела отметим, что примененный для плоских задач прием построения решений внутренней задачи, пограничного, сопряжения этих решений, без особого труда распространяется на анизотропные полосы, пространственные задачи изотропных и анизотропных пластин и оболочек, поэтому и мы так подробно останавливались на плоской задаче.

## §2. Пространственная краевая задача для пластин и оболочек

Решение уравнений пространственной задачи теории упругости для пластин и оболочек, как и в случае балок-полос, складывается из решения внутренней задачи и граничных слоев. Асимптотические по порядкам компоненты тензора напряжений и вектора перемещения во внутренней задаче для изотропных пластин установлены в [25, 26]. Эта асимптотика задается формулой (1.2) с той лишь разницей, что

$$Q^{(j)} = Q^{(j)}(\xi, \eta, \zeta), \quad q = 2 \text{ для } \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\beta\beta}, \mu_{\alpha}, \mu_{\beta}, \quad q = 1 \text{ для } \sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\beta\gamma}, \quad (2.1)$$

$q = 1$  для  $\sigma_{\alpha\gamma}$ , для  $\mu$ ,  $q = 1$  в симметричной,  $q = 3$  в косимметричной задачах.

Асимптотика (2.1) остается в силе для ортотропных пластинок и пластинок с общей анизотропией [21] (постоянная упругости) с подчеркнутой разницей о том, что порядок коэффициентов  $Q^{(j)}(\xi, \eta, \zeta)$  разложения (1.2) существенно зависит от соотношения значений постоянных упругости по различным направлениям [23, 27].

В симметричной задаче все величины выражаются через две двумерные функции, которые определяются из уравнения обобщенного плоского напряженного состояния, в косимметричной же задаче все величины выражаются через функцию прогиба, которая определяется из уравнения в частных производных четвертого порядка типа классического уравнения изгиба пластинок. Эти уравнения, написанные для исходного приближения, совпадают с классическими уравнениями растяжения-сжатия и изгиба пластинок. Последующие приближения приводят к повторному решению этих уравнений, но с новыми правыми частями. Как и в случае плоской задачи, решения этих уравнений не содержат достаточного количества произвольных постоянных (функций) для удовлетворения граничным условиям пространственной задачи на боковой поверхности. Преимущество той или другой теории следует оценить именно в этом плане насколько точно с позиции трехмерной задачи удовлетворены граничные условия на боковой поверхности разумеется, при одновременном удовлетворении уравнения равновесия и соотношениям состояния - обобщенного закона Гука.

В силу гингуарной возмущенности задачи, недостающим решением является решение типа пограничного слоя. Доказано, что в изотропных и ортотропных пластинках и оболочках могут существовать два типа пограничного слоя: антиплоский (краевое кручение) и плоский [24, 25, 28, 29]. Первый из этих пограничных слоев отсутствует в плоских задачах. В ортотропных пластинках при удалении от боковой поверхности  $\alpha = \alpha_1$  внутри пластины они затухают по экспоненциальному закону, но существенно различными скоростями [23, 24]. В симметричной задаче (растяжение-сжатие) антиплоский пограничный слой затухает как

$$\exp\left(-\sqrt{\frac{G_{23}}{G_{12}}}\pi\frac{\alpha-\alpha_0}{h}\right) \quad (2.2)$$

а в кососимметричной задаче (изгиб) как

$$\exp\left(-\sqrt{\frac{G_{23}}{G_{12}}}\frac{\pi}{2}\frac{\alpha-\alpha_0}{h}\right) \quad (2.3)$$

При модулях сдвига  $G_{23} \ll G_{12}$  этот погранслои может проникать достаточно глубоко (слабый погранслои), а при  $G_{23} \rightarrow \infty$  антиплоский погранслои исчезает — факт, который был известен и из других исследований.

Плоский погранслои затухает как

$$\exp\left(-\operatorname{Re}\lambda_1\frac{\alpha-\alpha_0}{h}\right) \quad (2.4)$$

где  $\operatorname{Re}\lambda_1$  — действительная часть первого корня с  $\operatorname{Re}\lambda_1 > 0$  соответствующего характеристического трансцендентного уравнения. В зависимости от значений постоянных упругости возможны следующие варианты трансцендентных уравнений [23]:

$$a) \sin 2\beta\lambda_n \pm 2\beta\lambda_n = 0 \quad (2.5)$$

$$b) \omega \sin z_n \pm \sin \omega z_n = 0$$

$$z_n = (\beta_1 + \beta_2)\lambda_n, \quad \omega = (\beta_2 - \beta_1)/(\beta_1 + \beta_2), \quad 0 < \omega < 1 \quad (2.6)$$

$$в) \omega \sin z_n \pm \operatorname{sh}\omega z_n = 0$$

$$z_n = 2\beta\lambda_n, \quad \omega = \alpha/\beta, \quad 0 < \omega < 1 \quad (2.7)$$

где  $\alpha, \beta, \beta_1, \beta_2$  — вещественные параметры, вычисляемые через постоянные упругости. Случай а) практически имеет место для изотропных пластинок, случай б) — при  $G_{13} < \sqrt{E_1 E_3}$ , случай в) — при  $G_{13} > \sqrt{E_1 E_3}$ .

Решение пограничного слоя удовлетворяет некоторым условиям, известным как условия согласованности погранслои и внутренней задачи. Они впервые были выведены А.Грипом [29] и являются обобщением условий (1.16) на случай пространственной задачи. Эти условия используются для сопряжения внутреннего и погранслои решений.

Для ортотропных пластинок асимптотическое решение пространственной задачи теории упругости имеет вид

$$I = Q^{int} + \varepsilon^\chi Q^\alpha + \varepsilon^\mu Q^p \quad (2.8)$$

где  $Q^{int}$  — решение внутренней задачи,  $Q^\alpha, Q^p$  — решения антиплоского и плоского погранслои, вещественные числа  $\chi$  и  $\mu$  характеризуют интенсивности погранслои, их значения зависят от типа граничных условий на боковой поверхности и определяются в ходе сопряжения внутреннего и погранслои решений. Появление в решении (2.8) произвольных пока коэффициентов  $\varepsilon^\chi, \varepsilon^\mu$  естественно, поскольку

погранслоя определяется из однородных уравнений при однородных граничных условиях.

Используя (2.8) и условия согласованности внутреннего и погранслоя решений, удается удовлетворить пространственным граничным условиям на боковой поверхности. В результате, решение трехмерной задачи сводится к решению краевых задач меньшей размерности для внутреннего и погранслоя состояний. Ограничившись тем или иным приближением для внутренней задачи и пограничных слоев, с определенной точностью, в смысле решения трехмерной задачи, вычисляется напряженно-деформированное состояние пластинки. Если ограничиться построением исходного приближения внутренней задачи, то приведенные двумерные уравнения и соответствующие им граничные условия совпадают с классическими. Важно отметить, что различными граничным условиям пространственной задачи могут соответствовать одни и те же условия классической теории пластинок. Например, граничным условиям

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} = w = 0 \text{ и } \sigma_{\alpha\alpha} = v = w = 0 \text{ при } \alpha = \alpha_0 \quad (2.9)$$

пространственной задачи в кососимметричной задаче соответствуют классические условия шарнирного опирания

$$M_\alpha = 0, W = 0 \text{ при } \alpha = \alpha_0 \quad (2.10)$$

Условиям пространственной задачи

$$u = v = w = 0 \text{ и } u = \sigma_{\alpha\beta} = w = 0 \text{ при } \alpha = \alpha_0 \quad (2.11)$$

в задаче изгиба соответствуют условия жесткой заделки классической теории

$$W = 0, \frac{\partial W}{\partial s_\alpha} = 0 \text{ при } \alpha = \alpha_0 \quad (2.12)$$

В симметричной же задаче (растяжение-сжатие) первой группе условий (2.9) соответствуют условия свободного края классической теории растяжения-сжатия пластинки:

$$T_\alpha = 0, S_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \alpha = \alpha_0 \quad (2.13)$$

а второй группе условий (2.9) - условия свободного в продольном направлении края:

$$T_\alpha = 0, V = 0 \text{ при } \alpha = \alpha_0 \quad (2.14)$$

Следовательно, перед тем как рассуждать о погрешности классической теории, необходимо выяснить соответствующую пространственную краевую задачу, которой она соответствует.

При рассмотрении последующих приближений в результате сопряжения решений внутренней задачи и пограничного слоя выясняется, что погранслой через граничные условия влияет на внутреннее напряженно-деформированное состояние. Например, в случае свободного края это сопряжение приводит к следующим новым граничным условиям для ортотропных пластин [23, 30]:

$$T_\alpha = 0, S_{\alpha\beta} = 0$$

$$M_\alpha - \sqrt{\frac{G_{12}}{G_{23}}} Ah \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial s_\beta} = 0 \quad (2.15)$$

$$N_{\alpha} + \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial s_{\beta}} - \frac{\sqrt{G_{12}}}{\sqrt{G_{33}}} Ah \frac{\partial (k_{\rho_0} H_{\alpha\beta})}{\partial s_{\beta}} = 0$$

Первой группе условий (2.9) (шарнирное закрепление первого рода) соответствуют приведенные условия:

$$\begin{aligned} T_{\alpha} + h \frac{E_1 E_2}{E_3^2} \frac{v_{32}^2}{1 - v_{12} v_{21}} k_{\rho_0} D_2 T_{\beta} &= 0 \\ S_{\alpha\beta} - h \frac{E_1 E_2}{E_3^2} \frac{v_{32}^2}{1 - v_{12} v_{21}} D_2 \frac{\partial T_{\beta}}{\partial s_{\beta}} &= 0 \\ M_{\alpha} - \frac{\sqrt{G_{12}}}{\sqrt{G_{33}}} Ah \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial s_{\beta}} + h k_{\rho_0} \frac{E_1 E_2}{E_3^2} \frac{v_{32}^2}{1 - v_{12} v_{21}} D_1 M_{\beta} &= 0 \\ W &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Второй же группе условий (2.9) (шарнирное закрепление второго рода) соответствуют:

$$\begin{aligned} T_{\alpha} + h \frac{E_1 E_2}{E_3^2} \frac{v_{32}^2}{1 - v_{12} v_{21}} k_{\rho_0} D_2 T_{\beta} &= 0 \\ F &= 0 \quad \text{при } \alpha = \alpha_0 \\ M_{\alpha} + h k_{\rho_0} \frac{E_1 E_2}{E_3^2} \frac{v_{32}^2}{1 - v_{12} v_{21}} D_1 M_{\beta} &= 0 \\ W &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

где  $G_{ik}$ ,  $E_i$ ,  $v_{ik}$  — соответственно, модули сдвига, Юнга, коэффициент Пуассона,  $k_{\rho_0}$  — геодезическая кривизна,  $D_i$  — некоторая постоянная упругости материала,  $\partial s_{\beta}$  — элементарная дуга линии  $\alpha = \alpha_0$ .  $A = 1.26$  — постоянная Гольденвейзера-Колос для изотропной пластинки, подчеркнутые члены — поправки к классическим граничным условиям. В (2.15) подчеркнутые члены отражают влияние антиплоского погранслоя, в (2.16) — влияние, как антиплоского, так и плоского (слагаемые, содержащие  $E_1 E_2 / E_3^2$ ) погранслоев, в (2.17) — влияние плоского погранслоя.

Как следует из (2.15), в случае свободного края ( $\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\gamma} = 0$  при  $\alpha = \alpha_0$ ) главенствующую роль играет антиплоский погранслой, плоским же погранслоем можно пренебречь. В случае шарнирного закрепления первого рода ( $\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} = w = 0$  при  $\alpha = \alpha_0$ ) из (2.16) следует, что важную роль играют оба погранслоя, в случае же шарнира второго рода ( $\sigma_{\alpha\alpha} = v = w = 0$  при  $\alpha = \alpha_0$ ) главную роль играет плоский погранслой, антиплоским же погранслоем можно пренебречь. Из сказанного можно сделать вывод, что чем жестче закреплена боковая поверхность, тем ярче проявляется воздействие плоского погранслоя, и противном случае проявляет себя антиплоский погранслой, что

физически вполне очевидно. Отметим также, что если классическая теория пластин не ставит разницы между двумя вариантами условий (2.9), то условия (2.16), (2.17) подчеркивают их отличие. Как было отмечено выше, теории Рейсснера, типа Тимошенко учитывают лишь антиплоский погранслой, следовательно, ими можно воспользоваться в тех случаях, когда закрепление свободно в тангенциальном направлении, например, в случае свободного края. Это необходимо особо подчеркнуть в связи с дискуссией по теории пластин [12-22].

Естественно выяснить соотношения асимптотической теории с другими прикладными теориями. Установлено, что если во внутренней задаче асимптотической теории ограничиться первыми тремя приближениями, то полученное разрешающее уравнение для прогиба практически совпадает с уравнением изгиба итерационной теории С.А. Амбарцумяна [31]. Приведем эти уравнения для трансверсально-изотропных пластин. По асимптотической теории [23,31]

$$D\Delta\Delta W = Z - \left(2\frac{G}{G'} - 0,75\frac{E}{E'}\nu'\right) \frac{(2h)^2 \Delta Z}{10(1-\nu)} \quad (2.18)$$

По итерационной теории [32]

$$D\Delta\Delta W = Z - \left(2\frac{G}{G'} - \frac{E}{E'}\nu'\right) \frac{(2h)^2 \Delta Z}{10(1-\nu)} \quad (2.19)$$

где штрихами отмечены упругие характеристики в плоскости, перпендикулярной плоскости изотропии,  $Z$  — нормальная составляющая внешней нагрузки,  $D$  — жесткость при изгибе. Уравнения (2.18) и (2.19) отличаются лишь коэффициентом при  $E/E'$ . Это различие вызвано тем, что в (2.19) не учтено поперечное обжатие. Как следует из (2.18), (2.19), поправка к классической теории зависит от отношений  $G/G'$ ,  $E/E'$  и если  $G/G' \gg E/E'$ , обжатием можно пренебречь. Поперечное обжатие учтено в "Новой итерационной теории" С.А. Амбарцумяна [33], тогда уравнения асимптотической теории внутренней задачи, соответствующие первым трем приближениям, совпадут с основными уравнениями "Новой итерационной теории". Отметим, что итерационные теории не учитывают пограничные слои. "Общая теория" же С.А. Амбарцумяна учитывает антиплоский погранслой. В монографии [23] рассмотрена задача изгиба полубесконечной трансверсально-изотропной полосы  $\Omega = \{(x, y, z) : x \in [0, \infty), |y| \leq l, |z| \leq h\}$  под воздействием изгибающего момента, приложенного на боковую поверхность  $x=0$  и шарнирно закрепленной по боковым поверхностям  $y = \pm l$ .

Задача решена в рамках уравнений асимптотической теории при новых граничных условиях (2.15) (естественно, с неоднородными правыми частями, то есть с учетом приложенного торцевого изгибающего момента) и аналогичных (2.16) граничных условиях на боковых поверхностях  $y = \pm l$ . Проведено сравнение найденного решения с решением той же задачи по "Общей теории" С.А. Амбарцумяна, то есть на основе уравнений [32], стр.140

$$\begin{aligned} \Delta\Delta W &= 0 \\ \Delta\Phi - \delta^2\Phi &= 0, \quad \delta^2 = \frac{5}{2h^2} \frac{G'}{G} \end{aligned} \quad (2.20)$$

при граничных условиях типа Пуассона.

Сравнение решений по обеим теориям показало их практическое совпадение. Например, по теории С.А. Амбарцумяна сдвиговой краевой эффект затухает, как

$$\exp \left[ -\frac{\pi}{l} \sqrt{1 + \frac{10G' l^2}{\pi^2 G (2h)^2}} x \right] \quad (2.21)$$

а по асимптотической теории, как

$$\exp \left[ -\sqrt{\frac{G'}{G}} \pi \frac{x}{2h} \right] \quad (2.22)$$

Как правило,  $\frac{10G' l^2}{\pi^2 G (2h)^2} \gg 1$ , пренебрегая в (2.21) единицей под

радикалом и принимая  $\pi^2 \approx 10$ , приведенные выше скорости затухания совпадут. Совпадают также решение внутренней задачи и решение по теории С.А. Амбарцумяна. Здесь знаменательным является то, что эти решения были получены при помощи различных уравнений с различными граничными условиями. Отсюда вытекает, что полезно сравнивать не уравнения теорий, а окончательные результаты. Если учет сдвига в теории С.А. Амбарцумяна приводит к появлению второго уравнения (2.20), то в асимптотической теории он приводит к новым граничным условиям (2.15).

Так обстоит и с теорией Рейсснера. Она учитывает сдвиговой краевой эффект и его влияние на проникающее решение. Однако эти теории не учитывают плоский погранслои и его влияние на внутреннее напряженное состояние. При асимптотическом подходе процесс получения последующих результатов детерминирован, при остальных же подходах он отсутствует и замыкается в рамки возможностей принятых гипотез.

Асимптотический метод позволил положительно решить вопрос определения напряженно-деформированных состояний пластинок, материал которых обладает анизотропией общего вида (21) упругая постоянная). Решение проблемы сведено к последовательному решению классических уравнений растяжения-сжатия и изгиба пластинок, имеющих плоскость упругой симметрии. Пограничный слой таких пластинок, в отличие от изотропных и ортотропных, не распадается на плоский и антиплоский погранслои и определяется из краевой задачи для обыкновенного дифференциального оператора шестого порядка [23].

Изложенная для пластинок процедура определения внутреннего и погранслоя напряженных состояний распространена на изотропные и анизотропные оболочки [23,34].

### §3. Неклассические краевые задачи балок, пластин и оболочек

Асимптотический метод проявил преимущества в особенности при решении принципиально новых классов задач для тонкостенных тел, когда гипотезы классической теории неприемлемы, а формулировка новых гипотез затруднена. К такого рода задачам относятся неклассические краевые задачи балок-полос, пластин и оболочек. Под этим подразумеваются задачи, когда на лицевых поверхностях

тонкостенных тел заданы не компоненты тензора напряжений, как в классических задачах, а иные условия – вектор перемещения, смешанные условия и др., хотя такие краевые задачи с позиций теории упругости также являются классическими. Эти задачи являются основными в фундаментах, расчетах аэродромных и других покрытий, прокладок, в сейсмологии. Для их решения использовались, в основном, методы математической теории упругости – метод Фурье, интегральных преобразований, теория потенциала, и то в большинстве своем для бесконечных и полубесконечных областей [35,36].

В первой же работе по этой проблеме с применением асимптотического метода, посвященного определению напряженно-деформированного состояния полосы-балки  $\Omega = \{(x, y) \cdot x \in [0, l], |y| \leq h, h \ll l\}$ , когда на одной из ее лицевых поверхностей задано значение вектора перемещения  $(u(-h) = u(x), v(-h) = v(x))$ , а на другой – значения вектора перемещения, компоненты тензора напряжений или смешанные условия, была установлена принципиально новая асимптотика для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения. Решение внутренней задачи имеет вид [37]

$$Q = \varepsilon^{q+s} Q^{(s)}, \quad s = \overline{0, N} \quad (3.1)$$

где  $q = -1$  для  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ ;  $q = 0$  для  $u, v$  (3.2)

Асимптотика (3.1), (3.2) резко отличается от асимптотики в случае первой краевой задачи, которая приведена в §1. В отличие от классического случая, здесь все напряжения равноправны, гипотеза же плоских сечений здесь не применима. Другой отличительной чертой является то, что решение внутренней задачи полностью определяется из граничных условий при  $y = \pm h$ , условия же при  $x = 0, l$  не влияют на это решение, ими обусловлен погранслой. Для широкого класса граничных условий получено точное решение внутренней задачи [23,37]. Например, если полоса в своей плоскости обладает анизотропией общего вида, нижняя грань жестко закреплена  $u = v = 0$ , а на верхнюю грань  $y = h$  действуют нагрузки с постоянной интенсивностью:  $\sigma_{xy}(h) = \tau'$ ,

$\sigma_x(h) = \sigma_2'$ ,  $\tau'$ ,  $\sigma_2' = \text{const}$ , решение имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -(a_{12}\sigma_2' + a_{16}\tau')/a_{11}, \quad \sigma_y = \tau', \quad \sigma_{xy} = \sigma_2' \\ u &= (A_{66}\tau' + A_{16}\sigma_2')(y+h), \quad v = (A_{11}\sigma_2' + A_{16}\tau')(y+h) \\ A_{11} &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)/a_{11}^{-1}, \quad A_{16} = (a_{11}a_{26} - a_{12}a_{16})/a_{11}^{-1}, \\ A_{66} &= (a_{11}a_{66} - a_{16}^2)/a_{11}^{-1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $a_{ik}$  – упругие постоянные, для ортотропной полосы  $a_{16} = a_{26} = A_{16} = 0$ .

В работе [38] было доказано, что асимптотика (3.1), (3.2) остается верной и для двухслойных и многослойных полос-балок, моделирующих, в частности, совместную работу фундамента и основания сооружения по модели сжимаемого слоя. На основе полученных точных решений выявлены рамки применимости прикладных моделей оснований -

фундаментов, в частности, модели Винклера-Фусса. Доказано, что для оснований с общей анизотропией эта модель непригодна, она применима для изотропных и ортотропных оснований. В последнем случае коэффициент постели служит [38, 23]

$$K = \frac{1}{A_{11}^{(2)} h_2} = \frac{E_2^{(2)}}{(1 - \nu_{12}^{(2)} \nu_{21}^{(2)}) h_2} \quad (3.4)$$

Для изотропного слоя  $K = E_{(2)} / (1 - \nu_{12}^2) h_2$  и совпадает с ранее известным и введенным иным путем коэффициентом [39], что еще раз подтверждает обоснованность асимптотического метода.

Асимптотическим методом получено решение для слоя с переменным по толщине упругим модулем, что позволило вывести формулу вычисления коэффициента постели для моделей Вигхардта, Клейна и др. Например, если основанием служит слой мощности (толщины)  $h_2$ , а модуль Юнга меняется по толщине слоя линейно, принимая значения  $[E_2, E_3]$ , коэффициент постели является [40]

$$K = K_0 \frac{c-1}{\ln c}, \quad c = E_3 / E_2 \quad (3.5)$$

где  $K_0 = E_2 / (1 - \nu_2^2) h_2$  — коэффициент постели основания с постоянным модулем упругости  $E_2$  и мощностью  $h_2$ .

Асимптотическим методом решены неклассические краевые задачи для полос при сосредоточенных и кусочно-непрерывных нагрузках, для полос переменной ширины, однослойных и многослойных полос с реологическими свойствами [41, 42, 43].

Следует особо подчеркнуть, что важное обстоятельство, что асимптотика напряжений и перемещений чутко реагирует на замену граничных условий при  $y = \pm h$ . Например, если на лицевой поверхности  $y = +h$  заданы значения напряжений, а на поверхности  $y = -h$  — нормальная компонента вектора перемещения и касательное напряжение (то есть, если в классических условиях заменить условие относительно  $\sigma_y(-h)$  условием для  $v(-h)$ ), то имеем совершенно иную асимптотику [44, 45]:

$$q = -1 \text{ для } \sigma_x, \sigma_y, u, v, \quad q = 0 \text{ для } \sigma_{xy} \quad (3.6)$$

Поэтому для тонкостенных тел весьма важным становится правильный выбор исходной физической модели.

Примененный для решения плоских смешанных краевых задач асимптотический метод нами использован для решения неклассических краевых задач анизотропных пластин. При этом анизотропия может быть общей (21 упругая постоянная), помимо поверхностных могут присутствовать объемные силы, а также температурные поля. Когда на одной из лицевых поверхностей пластины задан вектор перемещения, на противоположной — условия первой, второй или смешанных краевых задач теории упругости, найдена принципиально отличающаяся от классической асимптотика [46]

$$q = -1 \text{ для } \sigma_{ik}; \quad q = 0 \text{ для } u_\alpha, u_p, u_T \quad (3.7)$$

позволившая определять в самом общем виде интеграл трехмерной задачи. Эти результаты распространены на слоистые анизотропные термоупругие пластины [47,48]. На основе полученных результатов, в частности, установлена формула коэффициента постели  $n$ -слойного ортотропного основания:

$$K_n = 1 / \sum_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}^{(i)} \quad A_{\alpha\beta}^{(i)} = \frac{1 - \nu_{\beta\gamma}^{(i)} \nu_{\gamma\alpha}^{(i)} - \nu_{\alpha\gamma}^{(i)} \nu_{\gamma\alpha}^{(i)} - \nu_{\alpha\beta}^{(i)} \nu_{\beta\alpha}^{(i)} - 2 \nu_{\alpha\beta}^{(i)} \nu_{\beta\gamma}^{(i)} \nu_{\gamma\alpha}^{(i)}}{(1 - \nu_{\alpha\beta}^{(i)} \nu_{\beta\alpha}^{(i)}) E_{\alpha}^{(i)}} \quad (3.8)$$

Асимптотический метод оказался эффективным также для решения краевых задач пластин переменной толщины [49], слоистых пластин с чередующимися упругими и реологическими слоями [50].

Как и в случае балок-полос, асимптотика компонентов тензора напряжений и вектора перемещения пластины чутко реагирует на вид граничных условий на лицевых поверхностях [51]. Например, если на лицевой поверхности  $z = h$  пластинки заданы значения напряжений  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zz}$ , а на  $z = -h$  значения  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $w$ , асимптотика такова [51]

$$\begin{aligned} q &= -1 \quad \text{для } \sigma_x, \sigma_{xy}, \sigma_y, \sigma_z, u, v, w \\ q &= 0 \quad \text{для } \sigma_{xz}, \sigma_{yz} \end{aligned} \quad (3.9)$$

которая принципиально отличается от асимптотики классической теории. Существенно отличаются и соответствующие двумерные уравнения. При асимптотике (3.1), (3.9) все искомые величины выражаются через тангенциальные перемещения, относительно которых вытекают двумерные дифференциальные уравнения. Относительно же  $w$ , в противовес классической теории, где в задаче изгиба оно играет главенствующую роль, не получается никакого дифференциального уравнения.

Асимптотическим методом получены также решения неклассических задач для однослойных и двухслойных анизотропных оболочек. Построен общий интеграл внутренней задачи, который проиллюстрирован решением ряда прикладных задач. В частности, получено решение для ортотропной цилиндрической оболочки, внешняя поверхность которой жестко закреплена, а внутри действует постоянное давление [23,52].

Из работ этого направления укажем также работу А.А. Гольденвейлера [53].

О выполненных работах с применением асимптотического метода можно составить дополнительное представление по обзору [54].

#### §4. Задачи на собственные и вынужденные колебания

Асимптотический метод оказался эффективным не только для решения статических, но и для решения динамических задач. Он оказался эффективным, в частности, в задачах определения частот и форм собственных колебаний ортотропных и анизотропных полос-балок и пластин [55-57], имеющих важное значение в сейсмостойком строительстве и сейсмологии. В работах [55,56] на основе динамических уравнений теории упругости определены частоты и формы собственных колебаний ортотропной полосы-балки  $\Omega = \{(x, y) : x \in [0, l], |y| \leq l, h \ll l\}$ , когда одна из лицевых поверхностей жестко закреплена, а другая свободна, жестко закреплена или стеснена в тангенциальном

направлении. Например, когда обе продольные стороны ортотропной полосы жестко закреплены ( $u(\pm h) = v(\pm h) = 0$ ), доказано, что в полосе возникают два типа собственных колебаний: сдвиговые с частотами

$$\omega_n^{сд} = \frac{\pi n}{2h} \sqrt{\frac{G_{12}}{\rho}} = \frac{\pi n}{2h} v_{сд}, \quad n \in N \quad (4.1)$$

и продольные с частотами

$$\omega_n^{пр} = \frac{\pi n}{2h} \sqrt{\frac{k_2}{\rho(1 - \nu_{12}\nu_{21})}} = \frac{\pi n}{2h} v_p, \quad n \in N \quad (4.2)$$

где  $v_{сд}$ ,  $v_p$  — известные в сейсмологии скорости распространения сдвиговых и продольных волн.

Если же продольная сторона  $y = h$  ортотропной полосы свободна ( $\sigma_{xy}(h) = \sigma_x(h) = 0$ ), а сторона  $y = -h$  жестко закреплена, частотами собственных колебаний являются

$$\omega_n^{сд} = \frac{\pi}{4h} (2n+1) v_{сд}, \quad \omega_n^{пр} = \frac{\pi}{4h} (2n+1) v_p, \quad n \in N \quad (4.3)$$

Определены собственные функции (формы собственных колебаний) и доказана их ортогональность. Эти результаты обобщены на слоистые подосы-балки [58-60]. Для двухслойной полосы доказано, что хотя в ней и возникают сдвиговые и продольные собственные колебания, однако нет явной связи типа (4.1)-(4.3) между частотами собственных колебаний и скоростями сейсмических волн. Например, когда продольные стороны двухслойной полосы  $\Omega = \{(x, y) \mid x \in [0, l], -h_2 \leq y \leq h_1\}$  жестко закреплены, частоты собственных колебаний определяются из уравнения

$$a \sin(b\omega_2) = c \sin(d\omega_2) \quad (4.4)$$

где  $\omega_2^2 = h^2 \omega^2$ ,  $h = \max(h_1, h_2)$ . Для сдвиговых собственных колебаний

$$\begin{aligned} a &= 1 + \sqrt{\frac{\rho^{II} G^{II}}{\rho^I G^I}}, \quad b = \sqrt{\frac{\rho^I}{G^I}} \zeta_1 + \sqrt{\frac{\rho^{II}}{G^{II}}} \zeta_2 \\ c &= 1 - \sqrt{\frac{\rho^{II} G^{II}}{\rho^I G^I}}, \quad d = \sqrt{\frac{\rho^I}{G^I}} \zeta_1 - \sqrt{\frac{\rho^{II}}{G^{II}}} \zeta_2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$\zeta_1 = h_1/h$ ,  $\zeta_2 = h_2/h$ ,  $\rho^I$ ,  $\rho^{II}$  — плотности слоев.

Для продольных собственных колебаний

$$\begin{aligned} a &= 1 + \sqrt{\frac{\rho^{II} D_2^{II}}{\rho^I D_2^I}}, \quad b = \sqrt{\frac{\rho^I}{D_2^I}} \zeta_1 + \sqrt{\frac{\rho^{II}}{D_2^{II}}} \zeta_2 \\ c &= 1 - \sqrt{\frac{\rho^{II} D_2^{II}}{\rho^I D_2^I}}, \quad d = \sqrt{\frac{\rho^I}{D_2^I}} \zeta_1 - \sqrt{\frac{\rho^{II}}{D_2^{II}}} \zeta_2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$D_2^i = \frac{E_2^i}{1 - \nu_{12}^i \nu_{21}^i}, \quad i = I, II$$

В случае ортотропных пластинок, на основе асимптотического решения уравнений пространственной задачи установлено, что в

пластине с жестко закрепленной лицевой поверхностью  $z = -h$  и свободной поверхностью  $z = h$  могут возникнуть два типа сдвиговых собственных колебаний и продольное колебание [57].

Отметим, что изучению собственных колебаний оболочек на основе уравнений классической теории и широким использованием асимптотических методов посвящена монография [61].

Решению задач теории теплопроводности и термоупругости асимптотическим методом посвящены [62,63].

Построению асимптотической теории магнитоупругости пластин и оболочек посвящены работы [64,65].

В заключение отметим, что автор остановился на тех вопросах, которые находятся в кругу своих научных интересов. Несомненно, существуют и другие работы, в которых асимптотическим методом получены интересные результаты. Нет сомнений в том, что на его основе нас ждут новые результаты в различных областях механики сплошной среды.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вазон В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1968. 464 с.
2. Найфе А.Х. Методы возмущений. - М.: Мир, 1976. 455 с.
3. Васильева А.Б., Булузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: Наука, 1973. 272 с.
4. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. - М.: Наука, 1981. 398 с.
5. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. - М.: Наука, 1989. 336 с.
6. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1983. 352 с.
7. Воронич И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек //Тр. II Всесоюзного съезда по теор. и прикл. механике, вып.3. М.: Наука, 1966. С 116-136.
8. Бабич В.М., Булдырев В.С. Искусство асимптотики //Вестник Ленинград. ун-та. 1977, №13, вып.3, с.5-12.
9. Баранцев Р.Г. Об асимптотологии // Вестник Ленингр. ун-та. 1976, №1, вып.1, с.69-71.
10. Агаловян А.А. О характере взаимодействия пограничного с внутренним напряженно-деформированным состоянием полосы //Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1977, т.30, №5, с.48-62.
11. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. - М.: Наука, 1979. 560с.
12. Васильев В.В. О теории тонких пластин //Изв.АН СССР, МТТ, 1992, №3, с.26-47.
13. Жилин П.А. О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин // Изв.АН СССР, МТТ, 1992, №3, с.48-64.
14. Алфутов Н.А. О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин //Изв.АН СССР, МТТ, 1992, №3, с.65-72.
15. Гольденвейзер А.А. Алгоритмы асимптотического построения линейной двумерной теории тонких оболочек и принцип Сен-Венана //ПММ, 1994, т.58, вып.6, с.96-108.
16. Волох К.Ю. О классической теории пластин //ПММ, 1994, т.58, вып.6, с.156-165.

17. Даревский В.М. О статических граничных условиях в классической теории оболочек и пластин //Изв.РАН. МТТ, 1995, №4, с.130-133.
18. Жилин П.А. О классической теории пластин и преобразования Кельвина-Тэта //Изв.РАН МТТ, 1995, №4, с.134-140.
19. Васильев В.В. К дискуссии по классической теории пластин //Изв. РАН. МТТ, 1995, №4, с.140-150.
20. Гольденвейзер А.А. О приближенных методах расчета тонких упругих оболочек и пластин // Изв.РАН. МТТ, 1997, №3, с.134-149.
21. Васильев В.В. Об асимптотическом методе обоснования теории пластин //Изв. РАН. МТТ, 1997, №3, с.150-155.
22. Гольденвейзер А.А. Замечания о статье В.В. Васильева "Об асимптотическом методе обоснования теории пластин" //Изв. РАН. МТТ, 1997, №4, с.150-158.
23. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. - М.: Наука, 1997. 414 с.
24. Агаловян Л.А. О погранслое пластинок //Дока.АН Арм.ССР, 1972, т.45, №3, с.149-155.
25. Гольденвейзер А.А. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости //ПММ, 1962, т.26, вып.4, с.668-686.
26. Friedrichs K.O. and Dressler R.F. A Boundary-Layer Theory for Elastic Plates // Comm.Pure and Appl.Math. 1961, vol. 14, №1.
27. Агаловян Л.А. К теории изгиба ортотропных пластин //Изв. АН СССР, МТТ, 1966, №6, с.114-121.
28. Гольденвейзер А.А. Погранслой и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки //ПММ, 1969, т.33, вып.6, с.996-1028.
29. Green A.E. Boundary Layer Equations in the Linear Theory of Thin Elastic Shells // Proc.Roy. Soc., Ser.A., 1962, vol.269, №1339.
30. Агаловян Л.А. К вопросу приведения граничных условий трехмерной задачи к двумерным в теории анизотропных пластинок //Уч.записки Ереванск.ун-та. Ест.науки, 1978, №2(138), с.20-27.
31. Агаловян Л.А. Об уравнениях изгиба анизотропных пластин //Тр. VII Всесоюз.конференции по теории оболочек и пластинок. - М.: Наука, 1970. С.17-21.
32. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин.-М.: Наука, 1967. 266с.
33. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. - М.: Наука, 1974. 446 с.
34. Гольденвейзер А.А. Теория упругих тонких оболочек. - М.: Наука, 1976. 510 с.
35. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. - М.: Наука, 1963. 367 с.
36. Воронич И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. - М.: Наука, 1974. 455 с.
37. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела // Межвуз.сб.: Механика. Изд. Ереванск. ун-та. 1982, вып.2, с.7-12.
38. Агаловян Л.А. К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Вилклера // В сб.: XIII Всесоюз.конф. по теории пластин и оболочек. Часть I. Таллин, 1983, с.13-18.
39. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. - М.: Стройиздат, 1984. 679 с.

40. Агаловян А.А., Адамян С.Х. О коэффициенте постели для оснований с переменными другими характеристиками // Докл. АН Арм.ССР, 1987, т.84, №3, с.115-118.
41. Агаловян А.А., Асратян М.Г., Геворкян Р.С. К асимптотическому решению задач о действии сосредоточенной силы и кусочно-непрерывной нагрузки на двухслойную полосу // ПММ, 1990, т.54, вып.5, с.831-836.
42. Агаловян А.А., Хачатрян Г.Г. Об асимптотическом методе решения второй и смешанной краевых задач теории упругости для анизотропной полосы переменной ширины // В сб.: Механика деформ. твердого тела., Изд. АН Арм.ССР, 1993, с.33-41.
43. Агаловян А.А., Геворкян Р.С. Асимптотическое решение смешанных краевых задач двухслойной полосы, состоящей из упругого и реологического слоев // Изв. РАН. МТТ, 1992, №5, с.120-128.
44. Агаловян А.А., Товмасян А.Б. О смешанной краевой задаче для анизотропной термоупругой полосы // Докл. АН Арм.ССР, 1991, т.92, №2, с.76-81.
45. Агаловян А.А. О влиянии граничных условий на характер напряженно-деформированного состояния тонких тел // Изв. НАН и ГИУ РА. Техн. науки, 1995, т.48, №3, с.136-140.
46. Агаловян А.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией // В сб.: Механика конструкций из композиционных материалов. Новосибирск. Наука, 1984, с.105-110.
47. Агаловян А.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок // ПММ, 1986, т.50, вып.2, с.271-278.
48. Агаловян А.А., Геворкян Р.С. О неклассических краевых задачах трехслойных термоупругих пластин и некоторых приложениях // В сб.: Тр. XIV Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Тбилиси. Изд. Тбилисского ун-та. Том I, 1987, с.28-34.
49. Агаловян А.А., Геворкян Р.С., Хачатрян Г.Г. Смешанные краевые задачи для анизотропных пластин переменной толщины. - ПММ, 1996, т.60, вып.2, с.290-298.
50. Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных краевых задач слоистых пластин, состоящих из чередующихся упругих и реологических слоев // Изв. НАН Армении, Механика, 1991, т.44, №2, с.67-78.
51. Агаловян А.А., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки // Изв. НАН РА. Механика, 1993, т.46, №3-4, с.3-11.
52. Агаловян А.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении неклассических краевых задач для двухслойных анизотропных термоупругих оболочек // Изв. АН Арм.ССР. Механика, 1989, т.42, №3, с.28-36.
53. Гольдштейн А.А. Общая теория тонких упругих тел (оболочки, покрытия, прокладки) // Изв. РАН, МТТ, 1992, №3, с.5-17.
54. Агаловян А.А. О некоторых результатах по асимптотической теории балок, пластин и оболочек // В сб.: Проблемы механики деформируемого твердого тела. - Ереван: Изд. НАН Армении, 1997, с.31-50.
55. Агаловян А.А. О частотах собственных колебаний анизотропной полосы // В сб.: Юбил. научн. конф. к 60-летию ГПИ. Гюмри, 1994, с.23-26.

56. Агаловян М.А. Об одной задаче на собственные значения, возникающей в сейсмологии // Докл. НАН Армении, 1996, т.96, №2-4, с.23-28
57. Агаловян М.А. К определению частот собственных колебаний и собственных функций в пространственной смешанной краевой задаче для пластин // В сб.: Современные вопросы оптимального управления и устойчивости систем. - Ереван: Изд. ЕГУ, 1997, с.128-131.
58. Агаловян А.А., Саркисян А.С. О собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы // В сб.: Тр. XVIII Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. - Саратов: 1997. Т.1. С.30-38.
59. Саркисян А.С. О частотах собственных колебаний двухслойной ортотропной полосы // Докл. НАН Армении, 1997, №3, с.19-25.
60. Саркисян А.С. Об ортогональности форм собственных колебаний в смешанной краевой задаче для двухслойной полосы // В сб.: Современные проблемы оптимального управления и устойчивости систем. - Ереван: Изд. ЕГУ, 1997, с.163-167.
61. Гольденвейзер А.А., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. - М.: Наука, 1979. 384 с.
62. Зино И.Е., Тропп Э.А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. - Л.: Изд. АГУ, 1978. 224 с.
63. Рогачева Н.П. Уточненная теория термоупругих оболочек // Тр. X Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. - Тбилиси. Изд. Мецниереба, 1975, т.1, с.251-259.
64. Саркисян С.О. Построение асимптотической двумерной теории магнитоупругости проводящих тонких оболочек находящихся в неоднородном и нестационарном магнитном поле // Изв. АН Арм.ССР. Механика, 1989, т.42, №5, с.25-34.
65. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. - Ереван: Изд. АН Армении, 1992. 235 с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
22.03.1999

УДК 539.3

## К ДИСКУССИИ ПО ТЕОРИИ ПЛАСТИН

Белубекян М.В.

Մ.Վ. Բելուբեկյան

Սալերի տեսության վերաբերյալ քննարկումների մասին

Քննարկվում են ԲԱՈ, ՄՏՏ ամսագրի կողմից կազմակերպված վիճարկությունների որոշ հարցեր

M. V. Belubekyan

On the discussion about plates theory

Обсуждаются некоторые выводы дискуссии по теории пластин, проведенных журналом ԲԱՈ, ՄՏՏ.

Теория пластин Кирхгофа или теория ККТ (Кирхгоф-Кельвин-Тет) зарекомендовала себя как замечательный инструмент для исследования прочности, устойчивости и колебаний элементов конструкций из пластин. Более того, в некоторых случаях возможны также и упрощенные варианты теории Кирхгофа [1,2].

Однако, как и любая приближенная теория, ее применение имеет определенные ограничения. В настоящее время рамки применимости теории Кирхгофа, в основном, установлены и это один из основных результатов дискуссии, организованной журналом ՄՏՏ. Основные проблемные вопросы, связанные с теорией Кирхгофа, следующие.

1. Некоторые варианты закрепления кромок пластин.

2. Появление неинтегрируемой особенности в угловых точках пластинки.

3. Нечувствительность относительно трансверсальной изотропии.

4. Сведение пространственной гиперболической системы уравнений к двумерному параболическому уравнению.

Эти вопросы были обсуждены на страницах журнала ՄՏՏ [3-9], а также на семинаре "Волновые процессы" Института механики НАН Армении [10,11]. Были обсуждены и другие вопросы. Однако часть из них приводится к указанным, а другая часть требует дальнейших обсуждений.

Теории, учитывающие поперечные сдвиги и моменты инерций вращения, дают ответы на все четыре вопроса. Поэтому В.В. Васильев предлагает называть классической теорией один из вариантов уточненной теории, а теорию Кирхгофа рассматривать как упрощенный вариант классической теории. В этом смысле следует отметить и другие упрощенные варианты, например, варианты, предложенные в [12,13] или вариант, используемый в сейсмологии, улучшенная трактовка которой приводится в работе А.А. Мовсисяна [14].

В связи с вышеуказанным возникает вопрос: а какова роль асимптотических методов в теории пластин? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо обратить внимание на один важный факт теории Кирхгофа. А именно, гипотеза Кирхгофа имеет не только геометрическую

сущность, но и физическую. Более конкретно, точность гипотезы Кирхгофа зависит не только от относительной толщины пластинки, но и от отношений упругих характеристик по толщине и вдоль. Это обстоятельство впервые было установлено С.А. Амбарцумяном в 1958 году [15,16] и в настоящее время общепринято. Более того, установлено также, что точность гипотезы Кирхгофа существенно зависит от способов нагружения и от неоднородности геометрических и упругих свойств пластинки. Поэтому асимптотический метод, основанный только на малом геометрическом параметре с требованием, чтобы первое (нулевое) приближение соответствовало теории Кирхгофа, не может существенно расширить область применимости. В частности, не может ответить на поставленные выше четыре вопроса.

Тем не менее полезность асимптотического метода, основанного на малом геометрическом параметре, очевидна, как уточнение результатов теории пластин Кирхгофа и как обоснование теории, в смысле установления границ применимости. Этот метод может быть эффективным и при установлении гипотез, точность которых зависит от малости относительной толщины, для пластин с усложненными физико-механическими свойствами и при различных условиях на лицевых поверхностях.

С другой стороны, становится ясным, что дальнейшее развитие асимптотического метода должно быть связано с привлечением нескольких параметров, в частности, параметров, связанных с физическими свойствами и параметров, характеризующих способ нагрузки [17].

Возможно также, что к асимптотическому методу должно быть предъявлено требование, чтобы в первом приближении получить вариант уточненной теории. Такие попытки уже есть [18].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Reissner E. On a one-dimensional theory of finite bending and stretching of elastic plates. Computers and Structures, 1990, vol. 35, №4, p. 417-423.
2. Амбарцумян С.А., Белубекан М.В. К задаче изгиба прямоугольной пластинки с двумя противоположными свободными краями. В сб. Современные проблемы механики сплошной среды.-МП "Книга", Ростов-на-Дону, 1995, с. 19-23.
3. Васильев В.В. О теории тонких пластин//Изв. РАН, МТТ, 1992, №3, с.26-47.
4. Асфуров Н.А. О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин// Изв. РАН, МТТ, 1992, №3, с.65-72.
5. Жилин П.А. О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин.// Изв. РАН, МТТ, 1992, №3, с. 48-64.
6. Гольденвейзер А.А. О приближенных методах расчета тонких упругих оболочек и пластин. // Изв. РАН, МТТ, 1997, №3, с. 134-149.
7. Васильев В.В. Об асимптотическом методе обоснования теории пластин// Изв. РАН, МТТ, 1997, №3, с. 150-155.
8. Гольденвейзер А.А. Замечания о статье В.В. Васильева "Об асимптотическом методе обоснования теории пластин"// Изв. РАН, МТТ, 1997, №4, с. 150-158.
9. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ// Изв. РАН, МТТ, 1998, №3, с. 46-58.

10. Ananyan A.K., Belubekian M.V., Semenov B.N. On one Effect of Refined theory of Plates Bending. — In the volume of abstracts of the 32<sup>nd</sup> Solid Mechanics Conference. Polish Acad. Of Sciences, 1998, p. 45-46.
11. Белубекян В.М., Белубекян М.В. О граничных условиях теории пластин. Изв. НАН Армении, Механика, 1999, 52, №2, с.11-21.
12. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. О связи между задачами изгиба пластинки и балки. — В сб.: Научн. Трудов Арх.-стр. Института, Ереван, Изд. ЕГУ, 1999, с.19-22.
13. Киракосян Р.М. Об одной уточненной теории ортогональных пластин переменной толщины. — В сб.: Проблемы механики деформируемого твердого тела. Ереван, НАН Армении, 1997, с. 120-146.
14. Мовсисян А.А. Об одной модели для сдвиговой деформации (антиплоская задача). Изв. НАН Армении, Механика (в печати).
15. Амбарцумян С.А. К теории анизотропных пластинок. — Изв. АН СССР, сер. техн. н., 1958, №5, с.69-77.
16. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. — М.: Наука, 1987. 360с.
17. Рябенков Н.Г. К дискуссии о гипотезе Кирхгофа. — В сб.: Актуальные проблемы механики оболочек. Казань, 1998, с. 182-185.
18. Losin N.A. Asymptotics of Flexural Waves in Isotropic Elastic Plates. Journal of Applied Mechanics. 1997, v. 64, №2, p.336-342.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
3.05.1999

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО СТАТЬЕ  
"К ДИСКУССИИ ПО ТЕОРИИ ПЛАСТИН"

Աղալովյան Ա.Ա.

Լ.Ա. Աղալովյան

Որոշ դիտողություններ «Մակրի տեսության վերաբերյալ բանալեճի մասին» հոդվածի վերաբերյալ

Բնութագրվում են ճշված հոդվածի և ավստրալոսովյան մերողով սալերի և բաղաձայնների տեսությունը կառուցման որոշ դրույթները:

L. A. Aghalovyan

Some remarks on the article "To the discussion on plates theory"

Обсуждаются некоторые положения указанной статьи и асимптотического метода построения теории пластин и оболочек.

Известная дискуссия по классической и уточненным теориям пластин, развернутая на страницах журнала Изв. РАН, МТТ, возобновила интерес научной общественности к прикладным теориям пластин и оболочек, в частности, к вопросам более четкого установления рамок их применимости. Является очевидным, что эти рамки могут быть установлены лишь с позиций решения трехмерной задачи, т.е. выяснения вопроса — с какой точностью та или иная прикладная теория аппроксимирует решение трехмерной красовой задачи.

В настоящее время математически установлено, что пространственная краевая задача теории упругости для тонких тел (балки, пластины, оболочки) является сингулярно возмущенной. Из теории же подобных уравнений и их систем следует, что их решения складываются из медленно меняющихся решений и решений типа пограничного слоя. Эти решения могут быть построены, в частности, асимптотическими методами. Вернувшись к теориям, основанным на тех или иных гипотезах, следует выяснить степень описания ими медленно меняющихся и типа пограничного слоя интегралов.

Судя по статье [1], ее автор, к сожалению, плохо представляет или не знаком с возможностями асимптотического метода. Из его изложения следует, что асимптотический метод якобы не реагирует на "отношения упругих характеристик по толщине и вдоль", что "асимптотический метод, основанный только на малом геометрическом параметре с требованием, чтобы первое (нулевое) приближение соответствовало теории Кирхгофа, не может существенно расширить область применимости".

Во-первых, никто не требовал (здесь предварительно заказы не принимаются), чтобы первое (нулевое) приближение соответствовало теории Кирхгофа. Асимптотическим методом лишь были построены вышеуказанные медленно меняющиеся (интеграл внутренней задачи) и типа пограничного слоя решения [2-5]. Единственным требованием здесь

является возможность получения итерационного процесса, т.е. непротиворечивой системы для последовательного определения коэффициентов асимптотического разложения. Были найдены асимптотические порядки искомых компонентов тензора напряжений и вектора перемещения во внутренней задаче и построены итерационные процессы для вычисления этих искомых величин. То обстоятельство, что исходное приближение во внутренней задаче практически совпало с данными по теории Кирхгофа, лишь подтверждает корректность последней теории. Здесь особо подчеркнем, что асимптотика искомых величин чутко реагирует на тип граничных условий, накладываемых на лицевые поверхности пластинки или оболочки. На это мы неоднократно обращали внимание исследователей. Нами были установлены новые асимптотики для иных классов задач (неклассические краевые задачи пластин и оболочек), принципиально отличающиеся от кирхгофоской [5-7]. Здесь тоже никто ничего дополнительно не "требует", а делается упор на результаты, вытекающие из корректно построенного итерационного процесса.

Во-вторых, найденная асимптотика искомых величин, соответствующая первой краевой задаче теории упругости, т.е. классической теории пластины, является единственной, а данные для исходного приближения характеризуют асимптотические порядки (главные части) искомых величин. Единственность найденной асимптотики следует также из единственности решения краевой задачи теории упругости. Попытки найти иную асимпотику для той же краевой задачи приводят к провалу. Так обстоит и с работой [8], на которую ссылается М.В.Белубекян. Приводимая в работе [8] асимптотика противоречива, ибо если выписать уравнения для исходного приближения, то невозможно удовлетворить граничным условиям на лицевых поверхностях  $z = \pm h$  пластинки, когда там заданы отличные от нуля компоненты тензора напряжений. Именно этому случаю посвящены теория Кирхгофа и существующие уточненные теории, являющиеся предметом развернутой дискуссии.

То, что гипотезы Кирхгофа имеют "не только геометрическую сущность, но и физическую", следует также из асимптотической теории. Нами, в частности, для ортотропных пластин и оболочек установлены погрешности классической теории в зависимости от показателей анизотропии  $t_1, t_2$ . Считается, что  $E_3/E_1 = O(\epsilon^t)$ ,  $G_{13}/G_{12} = O(\epsilon^t)$ ,  $G_{23}/G_{12} = O(\epsilon^t)$  (см. [5], гл.8, §5, стр.332; гл.3, §4, стр.149, §5, стр.169; гл.4, §6; гл.5, §3, стр.229). Этот же вопрос для слоистых ортотропных полос изучен в [9]. Учет анизотропных свойств в поперечных плоскостях пластин асимптотическим методом детерминирован, т.е. метод позволяет не только оценивать погрешность классической теории, но и построением последующих приближений асимптотического разложения учитывать подобную анизотропию, указать случаи, когда найденная асимптотика, а следовательно и использование гипотез Кирхгофа, перестают быть верными.

Введение нескольких параметров, "в частности, связанных с физическими свойствами", должно исходить из конкретной задачи, отражать, например, очень сильную анизотропию (типа  $G_{12}/G_{13} = O(\epsilon^{-2})$ ), геометрический же малый параметр  $\epsilon = h/a$  с самого начала

естественным образом входит в уравнения теории упругости и позволяет выявлять те факторы, которые связаны с анизотропией в поперечных плоскостях пластины, с изменяемостью внешней нагрузки и др., построением последующих приближений учитывать их влияние.

Несостоятельным является утверждение автора статьи [1] о том, "что к асимптотическому методу должно быть предъявлено требование, чтобы в первом приближении получить вариант уточненной теории". Как указано выше, исходное приближение асимптотической теории соответствует классической теории и об уточнении классической теории может идти речь лишь когда построены последующие приближения во внутренней задаче и пограничные слои. Ограничившись тем или иным количеством приближений, предлагаем ту или иную прикладную модель [4,5]. Требование же, чтобы исходное приближение совпало с уточненной теорией, лишено основания, это означало бы, что классическая теория в корне ошибочна, а существующие уточненные теории вовсе не уточняют результаты по классической теории, а являются сугубо новыми, отвергающими результаты этой теории. Между тем, различными авторами доказано, что уточнения, вносимые этими теориями, не являются порядка слагаемых, соответствующих кирхгофовой теории, даже в случае сильной анизотропии [10-12]. Об исключительных случаях указано выше. Таким образом, асимптотическим методом можно предложить уточненную теорию, но она не будет соответствовать исходному (первому) приближению асимптотического разложения [4, 5, 13].

Что же касается ответов на поставленные в [1] четыре якобы проблемных вопроса, то на них асимптотическим методом давно даны ответы, в частности, большая серия граничных условий пространственной задачи подвергнута асимптотическому анализу в [4, гл.29; 5, гл.4; 14]. Хотелось бы увидеть анализ тех же граничных условий по сдвиговой теории и ответ на вопрос о точности удовлетворения поставленным краевым условиям. Автор статьи преувеличивает возможности теорий, учитывающих поперечные сдвиги. Известно, что эти теории не учитывают всех факторов, в частности, поперечное обжатие, вклад которого для анизотропных пластин может оказаться соизмеримым со вкладом сдвигового фактора, плоский пограничный слой и его влияние на внутреннее напряженно-деформированное состояние, т.е. с позиции трехмерной задачи отсутствуют целые классы решений.

По уточненным теориям нет приемлемого ответа на вопрос об особенностях в угловых точках. Известно, что удовлетворительный ответ на него можно получить на основе уравнений пространственной задачи теории упругости. Этот вопрос с исчерпывающей полнотой изучен в работах М.Вильямса, Д.Боджи, К.С.Чобаняна, О.К.Аксентян, О.Н.Лушица и др. [15-17]. Рассмотрение же этого вопроса на основе классической и уточненной теорий имеет смысл лишь в том плане, чтобы выяснить, насколько эти результаты (как особенности решений соответствующих уравнений математической физики) соответствуют истинным, т.е. особенностям на основе уравнений теории упругости.

В заключение хочется подчеркнуть, что асимптотический метод с большим успехом может быть использован для решения новых классов задач для тонких тел, не поддающихся решению методом гипотез (сами гипотезы с самого начала не очевидны). Именно в этих областях нас ожидают принципиально новые результаты, а не в областях с фиктивным введением новых параметров.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В. К дискуссии по теории пластин. - Изв. НАН Армении. Механика, 1999, т. 52, №3, с. 77-79.
2. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. - ПММ. 1962, т.26, вып.4, с. 668-686.
3. Friedrichs K.O. and Dressler R.F. A Boundary-Layer Theory for Elastic Plates. - Comm. Pure and Appl. Math., 1961, vol.14. №1.
4. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510с.
5. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
6. Агаловян Л.А., Товмасын А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки. - Изв. НАН Армении. Механика, 1993, т.46, №3-4, с.3-11.
7. Агаловян Л.А. О влиянии граничных условий на характер напряженно-деформированного состояния тонких тел. - Изв. НАН и ГИУ РА. Техн. науки. 1995, т.48, №3, с.136-140.
8. Рябенков Н.Г. К дискуссии о гипотезе Кирхгофа. - В сб.: Актуальные проблемы механики оболочек. Казань, 1998, с.182-185.
9. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния анизотропной слоистой балки. - Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1986, т.39, №2, с.3-14.
10. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин.-М.: Наука, 1967. 266с.
11. Амбарцумян С.А. Специфические особенности теории оболочек из современных материалов. - Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1968, т.21, №4, с.3-19.
12. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. Асимптотический анализ и уточнение теории пластин и оболочек типа Тимошенко-Рейсснера. - Изв. АН СССР. МТТ, 1990, №6, с.127-138.
13. Гольденвейзер А.Л. Замечания о статье В.В.Васильева "Об асимптотическом методе обоснования теории пластин". Изв. РАН. МТТ, 1997, №4, с.150-158.
14. Гольденвейзер А.Л. Граничные условия в двумерной теории оболочек. Математический аспект вопроса. — ПММ, 1998, т.62, вып.4, с.664-677.
15. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах.-Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1987. 338с.
16. Аксентян О.К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра.-ПММ, 1967, т.31, вып.1, с.178-186.
17. Аксентян О.К., Луцик О.Н. Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина.-Изв. АН СССР. МТТ, 1978, №5, с.102-108.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
3.05.1999

К ВОПРОСУ ПРИМЕНИМОСТИ ГИПОТЕЗЫ КИРХГОФА В  
ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Мовсисян Л.А.

Լ.Ա. Մովսիսյան

Անիզոտրոպ սալերի տեսությունում Կիրխոֆի վարկածի կիրառելիության մասին  
Զանի որ Կիրխոֆի վարկածը բացի երկրայինականից ունի նաև ֆիզիկական բնույթ ոչ բոլոր  
անիզոտրոպությունների դեպքում է, որ նա կիրառելի է

L.A. Movsisyan

On the Applicability of the Hypothesis of Kirchhoff in the Theory of Anisotropic Plates

Так как гипотеза Кирхгофа помимо геометрического имеет и физический смысл, то ее для  
всяких анизотропий она применима.

По инициативе редколлегии журнала "Механика" 15.04.1999 г. и 6.05.1999 г. состоялись семинары, тема: методы сведения трехмерных задач теории упругости к двумерным. Поводом послужила дискуссия, разлегуриувавшаяся в последние годы в журнале "Механика твердого тела" по поводу применимости теории Кирхгофа изгиба пластин. Так как у нас в Институте механики, более того, в редколлегии имеются приверженцы как классической и уточненных теорий, так и асимптотической теории, то было бы бесполезно обмениваться мнениями по этому поводу. Идея созыва семинара принадлежит автору настоящих строк, поэтому напрашивалось и его мнение по обсуждаемому вопросу.

Классическая теория изгиба пластин действительно создана и развита классиками и весьма обширен круг ее применимости. Однако существуют задачи, в которых она приводит к заведомо сомнительным или даже неверным результатам. Наряду с не раз отмеченными фактами (неволновой характер уравнения, лишнее условие при свободном крае и появление сосредоточенных сил вследствие приведения трех условий к двум, появление сосредоточенных сил в задаче шгамна и др.), С.А. Амбарцумяном не раз было подчеркнуто, что гипотеза Кирхгофа помимо геометрического имеет и физический характер. В многочисленных задачах для ортотропных материалов со слабыми сдвиговыми жесткостями показано [1], насколько сильно могут отличаться различные величины (прогиб, частота, критическая сила), вычисленные по классической и по уточненным теориям.

К перечисленным следует добавить пот еще что. Классическая теория при общей анизотропии качественно меняет НДС.

Например, при цилиндрическом изгибе по уточненной теории помимо изгиба появляется также кручение, которое отсутствует в

классической постановке. В последнем случае уравнения изгиба при ортотропном или анизотропном материалах по виду, вообще, не отличаются. Что касается асимптотических методов сведения трехмерных уравнений анизотропной теории упругости к двумерным, то мне представляется, что вряд ли получатся одинаковые асимптотики при

$$\frac{A_{11}}{A_{33}} = \frac{h}{l} \quad \text{и} \quad \frac{l}{h} (\epsilon^{-1}), \quad \text{то есть не всегда гипотеза прямых нормалей}$$

применима. Совсем не подвергая сомнению законность и строгость полученных результатов Л.А. Агаловян и его школой, всегда подчеркивалось, что в асимптотическом разложении первым приближением является классическая теория, которая безразлична к отношению  $\frac{A_{11}}{A_{33}}$ .

В своем пространным выступлении Л.А. Агаловян, помимо прочего, упрекал, что не читали монографию [2], привел длинную цитату (стр.55), которая заканчивается словами ... "Тогда ограничиться лишь классической теорией будет слишком грубо". Далее ... "В таких предельных случаях сильной анизотропии, в зависимости от показателей анизотропии и изменяемости внешней нагрузки, необходимо найти или другую асимптотику, или вообще нельзя применять асимптотический метод, а заодно и классическую теорию" (Подчеркнуто мною Л.М. Не напрасно сказано "Читайте классиков").

Очень даже замечательно, что все в порядке, это может вызывать только чувство глубокого удовлетворения. Значит, все-таки при малом

$$\frac{A_{33}}{A_{11}} \quad \text{довольствоваться только первым приближением (классическим)}$$

нельзя. И по его же словам, уже при учете следующего приближения для таких отношений упругих постоянных, получается результат, точь-в-точь совпадающий с аналогичным, полученным по уточненной теории [1].

Кажется уже все ясно. Недоразумений нет. Можно пойти по пути [2]: в первом члене разложения получить классическую теорию, и если анизотропия сильная, не довольствоваться первым приближением. Есть и второй путь. Построить такую асимптотику, которая с самого начала уловила характер анизотропии, о чем высказал с самого начала автор настоящих строк.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1987. 360с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. - М.: Наука, 1997. 414с.

НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЯХ  
 УПРУГИХ ПЛАСТИНОК

Գնուի Վ.Շ.

Առաձգական սալերի հաշվարկային մոդելների մասին մի քանի դատողություններ

Աշխատանքում բերվում են մի քանի պարզազույց օրինակներ, որոնք ցույց են տալիս, որ չի կարող լինել սալերի հաշվարկի հանրեղիանոր մեթոդ: Հաշվարկի յուրաքանչյուր մեթոդ, այլ լայն է տալիս առաձգականության տեսության եռչափի հավասարումների ինտեգրումը ըստ բնօրինական կոորդինատի, բնականաբար ունի իր կիրառության սահմանները, և այդ սահմանների որոշումն պետք է հանդիսանա հետազոտությունների արդյունքների ասարկան:

V.Շ. Gnuniy

Some Considerations on the Computational Models of the Elastic Plates

В статье на простейших примерах показывается, что в теории пластинок не может быть всеобъемлющей расчетной модели. Каждый расчетная модель, позволяющая интегрирование трехмерных уравнений теории упругости по поперечной координате, естественно имеет свои пределы применимости, и определение этих пределов является предметом необходимых дальнейших исследований.

Как принято, пластинкой называется цилиндрическое, в частности, призматическое тело, высота (толщина) которого  $h$  существенно меньше от других размеров в плоскости направляющей.

Вышеприведенное определение характеризует лишь геометрию пластинки. Однако, положенные в основу методов расчета тонких пластинок предположения имеют физический характер.

1. Предположения о поперечных деформациях

$$e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad e_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0, \quad e_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \quad (1.1)$$

и о пренебрежении в первых двух уравнениях обобщенного закона Гука влиянием поперечного нормального напряжения  $\sigma_{33}$  по сравнению с нормальными напряжениями  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ , приводят к классической модели расчета на изгиб тонких пластинок (теория Кирхгофа - 1850 год).

Гипотезы (1.1) имеют простую геометрическую интерпретацию. Нормальный к срединной плоскости ( $x_3 = 0$ ) линейный элемент после деформации остается нормальным к деформированной срединной плоскости и не меняет свою длину. Фактически изотропное тело заменяется некоторой моделью трансверсально-изотропного тела [1].

$$e_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) - \frac{\nu'}{E'}\sigma_{33}, \quad e_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) - \frac{\nu'}{E'}\sigma_{33}$$

$$e_{33} = \frac{1}{E'} \sigma_{33} - \frac{\nu'}{E'} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad e_{23} = \frac{1}{G'} \sigma_{23}, \quad e_{13} = \frac{1}{G'} \sigma_{13}, \quad e_{12} = \frac{1}{G} \sigma_{12} \quad (1.2)$$

для которого поперечные характеристики упругости

$$E' \rightarrow \infty, \quad G' \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

причем из условия  $E\nu' = E'\nu''$  следует, что  $\nu'' \rightarrow 0$ .

Здесь и в дальнейшем все обозначения общепринятые [1-4].

Из (1.2), при (1.3) следует

$$e_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}), \quad e_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}), \quad e_{12} = \frac{1}{G} \sigma_{12} \\ e_{33} = 0, \quad e_{13} = 0, \quad e_{23} = 0 \quad (1.4)$$

что совпадает с результатом классической теории пластинок [2-3].

Из (1.2), (1.4) следует, что если материал тела на самом деле трансверсально-изотропный (ортогортронный), то при  $E/E', G/G'$  (для ортогортронного тела  $E_1/E_3, E_2/E_3, G_{12}/G_{13}, G_{12}/G_{23}$ ) меньше единицы, ошибка, вносимая классической теорией, уменьшается, а при  $E/E' > 1, G/G' > 1$  — увеличивается монотонно с увеличением этих отношений. При  $E/E' \gg 1, G/G' \gg 1$  область применения классической теории пластинок существенно уменьшается [1].

Расчетные модели пластинок, учитывающие податливость материала тела в поперечном направлении (уточненные теории) фактически позволяют увеличить возможные значения относительной толщины и расширить класс рассматриваемых задач [5,6].

2. Однако, при расчетах пластинок, уточненные теории, содержащие поправки к классической теории порядка  $h^2/a^2$  для изотропных пластинок и  $Eh^2/G'a^2$  для трансверсально-изотропных пластинок, должны применяться с некоторой осторожностью.

В подтверждение вышесказанного рассмотрим пример задачи устойчивости длиной ( $b \gg a$ ) прямоугольной пластинки толщины  $h$ , сжатой продольным усилием  $P$ .

По классической и уточненной [1] теориям критические усилия трансверсально-изотропной пластинки суть

$$P_{кл}^* = P_0 = D \frac{\pi^2}{a^2}, \quad P_{\pi}^* = \frac{P_0}{1 + \frac{\pi^2 E h^2}{10(1-\nu^2) G' a^2}} \quad (2.1)$$

где  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  — жесткость на изгиб.

Критическое усилие той же пластинки, определенное с учетом деформаций начального состояния  $e_{11}^0, e_{33}^0$ , то есть с учетом изменения ширины и толщины пластинки до потери устойчивости, суть

$$P^* = \frac{P_0}{1 - \frac{(2+3\nu'')\pi^2 h^2}{12(1-\nu^2)a^2}} \quad (2.2)$$

Здесь в случае изотропной пластинки  $E/G' = 2(1+\nu)$ ,  $\nu'' = \nu$ . При  $\nu = 0,3$ ,  $h/a = 0,2$

$$P_{\text{гр}}^* = 0,898P_0, \quad P^* = 1,117P_0$$

и очевидно, что при совместном учете влияния поперечных сдвигов и деформаций  $e_{11}^0, e_{22}^0$  начального состояния классическая теория уравновешена и для изотропной пластинки практически  $P_{\text{кр}}^* = P_0$ .

В случае же трансверсально-изотропных пластинок удельный вес поправочного члена в (2.1) увеличивается с увеличением отношения  $E/G'$  и приобретает доминирующее значение по сравнению с поправкой, связанной с учетом начальных деформаций.

3. Рассмотрим другой простейший пример. Пусть замкнутая круговая цилиндрическая оболочка с размерами  $l, R, h$  и со свободными торцами нагружена внутренним давлением  $q$ .

По безмоментной теории отличное от нуля напряжение

$$\sigma_{22}^0 = Rqh \quad (3.1)$$

Если учесть увеличение радиуса на величину  $qR^2/Eh$  и уменьшение толщины приблизительно на  $\nu qR/h$ , то

$$\sigma_{22} = \sigma_{22}^0 \left( 1 + \frac{qR}{Eh} \right) \left( 1 - \frac{\nu qR}{Eh} \right)^{-1} \quad (3.2)$$

Здесь поправка от учета изменения  $R, h$  имеет порядок  $R/h$ , что указывает на необходимость более осторожного применения методов, основанных на разложениях по малому параметру  $h/R$ .

4. Известно [4], что с уменьшением относительной толщины пластинки  $h/c$ , где  $c = \min(a, b)$ , увеличивается допустимое значение (предельное значение) относительного прогиба  $w/h$ . Изгиб шарнирно опертой по четырем краям квадратной пластинки ( $a = b$ ), нагруженной постоянным давлением  $q$ , в первом приближении, при  $\nu = 0,3$ , описывается уравнением

$$2,51\bar{f} + \bar{f}^3 = \bar{q} \quad (4.1)$$

где  $\bar{f} = f/h$ ,  $\bar{q} = 9a^4 q / 8\pi^2 h^4 E$ ,  $f$  — прогиб в центре пластинки.

Здесь, при  $f \sim h$ , влияние второго слагаемого в левой части существенно. Линейные уравнения расчета тонких пластинок, основанные на малости относительной толщины, могут привести к значительным погрешностям, т.к. для достаточно малых толщин уравнения равновесия и геометрические соотношения становятся нелинейными (гибкая пластинка) [4].

Например, для предельного состояния квадратной пластинки из высокопрочной стали, при уровне допустимого напряжения  $\sigma_* = E/200$ , получится

$$\begin{aligned} q_* &= 35,1 \text{ кг/см}^2, \quad f_* = 0,570 \quad \text{при } h = a/30 \\ q_* &= 21,1 \text{ кг/см}^2, \quad f_* = 0,919 \quad \text{при } h = a/40 \end{aligned}$$

$$q_* = 15,4 \text{ кг/см}^2, f_* = 1,30 \text{ при } h = a/50$$

где  $q_*$ ,  $f_*$  - соответствующие предельные значения постоянного давления  $q$  и максимального прогиба (прогиб в центре)  $f$ .

В линейной постановке в рассматриваемом примере получается

$$q_* = 34,5 \text{ кг/см}^2, f_* = 0,698 \text{ при } h = a/30$$

$$q_* = 19,5 \text{ кг/см}^2, f_* = 1,14 \text{ при } h = a/40$$

$$q_* = 12,5 \text{ кг/см}^2, f_* = 1,77 \text{ при } h = a/50$$

Здесь ошибка в несущей способности, вследствие неучета нелинейности, становится значительным при  $h/a \geq 1/40$  и составляет 7,7% при  $h = a/40$  и 19% при  $h = a/50$ . Ошибка для предельного значения максимального прогиба значительна уже при  $h = a/30$  и составляет 22,5%.

Таким образом, линейная классическая теория, основанная на существенной малости отношения  $h/a$ , правомерна лишь для не очень тонких пластинок.

Рассмотренные выше простейшие примеры показывают, что в теории пластинок не может быть всеобъемлющей расчетной модели. Каждая расчетная модель, позволяющая интегрирование трехмерных уравнений теории упругости по поперечной координате, естественно имеет свои пределы применимости, и определение этих пределов является предметом необходимых дальнейших исследований.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин.-М.: Физматгиз, 1987. 360 с.
2. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки.-М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 460 с.
3. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки.-М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
4. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки.-М.: Гостехиздат, 1956. 419с.
5. Васильев В.В. О теории тонких пластин.-Изв.АН РФ, МТТ, 1992, №3, с.26-47.
6. Адфугон Н.А. О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин. - Изв. АН РФ, МТТ, 1992, №3, с.65-72.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
7.06.1999