ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1999

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №2, 1999 Механика

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОЙ КРУГЛОЙ ЛУНОЧКИ С ТРЕЩИНОЙ МЕЖДУ МАТЕРИАЛАМИ

Арутюнян Л.А.

Լ.Ա. Հարությունյան
Բաժանման մակերևույթի վրա ճաք պարունակող բաղադրյալ լուսնաձև մարմնի առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծումը:

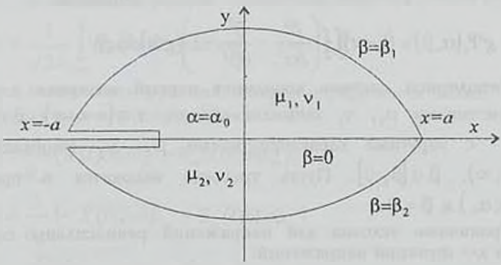
Երկբևեռ կոորդինատային համակարգի և Ֆուրյեի ինտեգրալների օգնությամբ տրվում է բաժանման մակերևույթի վրա, մինչև եզր դուրս եկող ճաք պարունակող բաղադրյալ լուսնաձև մարմնի առաձգականության տեսության հարթ խնդրի փակ լուծումը:

L.A.Harutjunyan
A plane problem of elasticity theory for a compound circular moonlike, with a crack between materials

С помощью биполярных координат и интеграла Фурье дано замкнутое решение плоской контактной задачи теории упругости для составной области с трещиной.

В данной работе с помощью биполярных координат и аппарата интеграла Фурье дано замкнутое решение плоской контактной задачи теории упругости для двух областей, образованных пересечением дуг окружностей и имеющей трещину между материалами, которая выходит до границ.

Ось ox направим по линии контакта (фиг.1).



Фиг.1

Задача решается при помощи функции напряжений в биполярной системе координат α, β, которые связаны с декартовой системой координат x, y соотношениями [1]

$$x=\frac{a\,\mathrm{sh}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta};\; y=\frac{a\sin\beta}{\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta} \tag{1.1}$$

Функция напряжений $\Phi(\alpha,\beta)$ удовлетворяет бигармоническому уравнению, которое в биполярной системе координат имеет вид [2,3]

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}-2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)(g\Phi)=0 \tag{1.2}$$

где $g=(\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta)/a$ характеризует масштаб преобразования, a - параметр биполярных координат.

Напряжения и перемещения выражаются через функцию напряжений соотношениями

$$a\sigma_\alpha=\left((\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\mathrm{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\mathrm{ch}\alpha\right)(g\Phi)$$

$$a\sigma_\beta=\left((\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\mathrm{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}-\cos\beta\right)(g\Phi)$$

$$a\tau_{\alpha\beta}=-(\mathrm{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(g\Phi) \tag{1.3}$$

$$u=\frac{\partial}{2\mu}\left((1-2\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial\beta}\right)$$

$$v=\frac{\partial}{2\mu}\left((1-2\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}+\frac{\partial\Psi_1}{\partial\alpha}\right)$$

где μ - модуль сдвига, ν - коэффициент Пуассона, $\Psi_1(\alpha,\beta)$ - бигармоническая функция, связанная с $\Phi(\alpha,\beta)$ формулой

$$g\Psi_1(\alpha,\beta)=(1-\nu)\int\int\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-1\right)(g\Phi)d\alpha d\beta \tag{1.4}$$

В биполярной системе координат первый материал с упругими характеристиками μ_1, ν_1 занимает область $\alpha\in(-\infty;\infty)$, $\beta\in[0;\beta_1]$, а второй - с упругими характеристиками μ_2, ν_2 занимает область $\alpha\in(-\infty;\infty)$, $\beta\in[\beta_2;0]$. Пусть трещина находится в промежутке $\alpha\in(-\infty;\alpha_0)$ и $\beta=0$.

Граничные условия для напряжений равносильны следующим условиям для функций напряжений:

$$(g\Phi_m)\big|_{\beta=\beta_m}=\varphi_m(\alpha);\;\left.\frac{\partial(g\Phi_m)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\beta_m}=\psi_m(\alpha)\;(m=1,2) \tag{1.5}$$

Предполагается, что $\varphi_m(\alpha)$ и $\psi_m(\alpha)$ удовлетворяют условиям разложимости в интервале Фурье.

На линии контакта имеем следующие условия:

$$\left.\frac{\partial(g\Phi_m)}{\partial\beta}\right|_{\beta=0} = 0 \qquad \alpha\in(-\infty;\infty)$$
$$(g\Phi_m)\big|_{\beta=0} = 0 \qquad \alpha\in(-\infty;\alpha_0)$$
$$(g\Phi_1)\big|_{\beta=0} = (g\Phi_2)\big|_{\beta=0} \quad \alpha\in(\alpha_0;\infty)$$
$$V_1\big|_{\beta=0} = V_2\big|_{\beta=0} \qquad \alpha\in(\alpha_0;\infty) \tag{1.6}$$

решение бигармонического уравнения (1.2) ищем в виде интеграла Фурье такого вида

$$g\Phi_m(\alpha,\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_m(t,\beta)\exp(-it\alpha)dt \qquad (m=1,2) \tag{1.7}$$

где

$$f_m(t,\beta)=A_m(t)\operatorname{ch}t(\beta_m-\beta)\cos\beta+B_m(t)\operatorname{ch}t\beta\cos(\beta_m-\beta)+$$
$$+C_m(t)\operatorname{sh}t(\beta_m-\beta)\sin\beta+D_m(t)\operatorname{sh}t\beta\sin(\beta_m-\beta) \quad (m=1,2) \tag{1.8}$$

Удовлетворяя граничным и контактным условиям (1.5) и (1.6), получаем следующие системы уравнений для определения неизвестных интегрирования:

$$A_m(t)\cos\beta_m+B_m(t)\operatorname{ch}t\beta_m=\overline{\varphi}_m(t)$$
$$-A_m(t)\sin\beta_m+tB_m(t)\operatorname{sh}t\beta_m-tC_m(t)\sin\beta_m-D_m(t)\operatorname{sh}t\beta_m=\overline{\psi}_m(t)$$
$$-tA_m(t)\operatorname{sh}t\beta_m+B_m(t)\sin\beta_m+C_m(t)\operatorname{sh}t\beta_m+tD_m(t)\sin\beta_m=0$$
$$A_m(t)\operatorname{ch}t\beta_m+B_m(t)\cos\beta_m=X(t) \qquad (m=1,2) \tag{1.9}$$

где величины $\overline{\varphi}_m(t)$ и $\overline{\psi}_m(t)$ $(m=1,2)$ являются преобразованиями Фурье от заданных функций $\varphi_m(\alpha)$ и $\psi_m(\alpha)$ $(m=1,2)$

$$\overline{\varphi}_m(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(\alpha)\exp(it\alpha)d\alpha$$
$$\overline{\psi}_m(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m(\alpha)\exp(it\alpha)d\alpha \qquad (m=1,2) \tag{1.10}$$

а $X(t)$ — пока неизвестная функция, которая определяется позже.

Разрешая систему (1.9), найдем

$$A_m(t)=\frac{1}{a_m}\left(X(t)\operatorname{ch}t\beta_m-\overline{\varphi}_m(t)\cos\beta_m\right)$$
$$B_m(t)=\frac{1}{a_m}\left(-X(t)\cos\beta_m+\overline{\varphi}_m(t)\operatorname{ch}t\beta_m\right)$$
$$C_m(t)=\frac{X(t)}{a_m b_m}\left(ta_m\operatorname{ch}t\beta_m+\left(t^2+1\right)\operatorname{sh}t\beta_m\sin\beta_m\cos\beta_m\right)-$$
$$-\frac{\overline{\varphi}_m(t)}{a_m b_m}\left(ta_m\cos\beta_m+\left(t^2+1\right)\operatorname{sh}t\beta_m\operatorname{ch}t\beta_m\sin\beta_m\right)+\frac{\overline{\psi}_m(t)t\sin\beta_m}{b_m}$$

$$D_m(t) = -\frac{X(t)}{a_m b_m}\left(ta_m \cos\beta_m + \left(t^2+1\right)\operatorname{sh}t\beta_m \operatorname{ch}t\beta_m \sin\beta_m\right) +$$

$$+\frac{\overline{\varphi}_m(t)}{a_m b_m}\left(ta_m \operatorname{ch}t\beta_m + \left(t^2+1\right)\operatorname{sh}t\beta_m \sin\beta_m \cos\beta_m\right) - \frac{\overline{\psi}_m(t)\operatorname{sh}t\beta_m}{b_m} \qquad (1.11)$$

где

$$a_m(t) = \operatorname{sh}^2 t\beta_m + \sin^2\beta_m \qquad (1.12)$$

$$b_m(t) = \operatorname{sh}^2 t\beta_m - t^2 \sin^2\beta_m$$

Неизвестная функция $X(t)$ определяется из следующей системы парных интегральных уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t)\exp(-it\alpha)dt = 0 \qquad \alpha \in (-\infty, \alpha_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(M(t)X(t) + N(t)\right)\exp(-it\alpha)dt = 0 \qquad \alpha \in (\alpha_0; \infty) \qquad (1.13)$$

где

$$M(t) = \frac{1}{2b_1(t)}\left(\operatorname{sh}2t\beta_1 + t\sin 2\beta_1\right) - \frac{h}{2\beta_2(t)}\left(\operatorname{sh}2t\beta_2 + t\sin 2\beta_2\right)$$

$$N(t) = \frac{1}{b_1(t)}\left(-\overline{\varphi}_1(t)\left(t\operatorname{ch}t\beta_1 \sin\beta_1 + \operatorname{sh}t\beta_1 \cos\beta_1\right) + \overline{\psi}_1(t)\operatorname{sh}t\beta_1 \sin\beta_1\right) +$$

$$+\frac{h}{b_2(t)}\left(\overline{\varphi}_2(t)\left(t\operatorname{ch}t\beta_2 \sin\beta_2 + \operatorname{sh}t\beta_2 \cos\beta_2\right) - \overline{\psi}_2(t)\operatorname{sh}t\beta_2 \sin\beta_2\right)$$

$$h = \frac{\mu_1(1-\nu_2)}{\mu_2(1-\nu_1)} \qquad (1.14)$$

Если размеры областей и внешние усилия одинаковы, т.е. $\beta_1 = -\beta_2 = \beta_0$, $\overline{\varphi}_1 = \overline{\varphi}_2 = \overline{\varphi}_0$, $\overline{\psi}_1 = -\overline{\psi}_2 = \overline{\psi}_0$, то из (1.14) получим

$$M(t) = \frac{(1+h)}{2}\frac{\left(\operatorname{sh}2t\beta_0 + t\sin 2\beta_0\right)}{\left(\operatorname{sh}^2 t\beta_0 - t^2\sin^2\beta_0\right)}$$

$$N(t) = \frac{1+h}{\operatorname{sh}^2 t\beta_0 - t^2\sin^2\beta_0}\left[\overline{\psi}_0(t)\operatorname{sh}t\beta_0 \sin\beta_0 - \right. \qquad (1.15)$$

$$\left. - \overline{\varphi}_0(t)\left(t\operatorname{ch}t\beta_0 \sin\beta_0 + \operatorname{sh}t\beta_0 \cos\beta_0\right)\right]$$

Как видно из (1.13), решение поставленных задач не зависит от упругих характеристик составляющих материалов. Аналогичные результаты для других областей были получены в работах [5, 6].

Применяя преобразование Фурье для определения неизвестной функции $X(t)$ из (1.13), получаем следующие характеристические сингулярные уравнения с ядром Коши:

$$a(t)X(t) + tN(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b(\tau)X(\tau) + \tau N(\tau)}{t-\tau}\exp(i(t-\tau)\alpha_0)d\tau \qquad (1.16)$$

или

$$
\begin{cases}
\int_0^\infty C(\xi)J_0(\xi r)d\xi = f_i(r), \quad a_i < r < b_i, \quad i = 1,2,\ldots,N \\
\int_0^\infty \xi C(\xi)J_0(\xi r)d\xi = 0, \quad 0 < r < a_1, \quad b_i < r < a_{i+1}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad r > b_N
\end{cases}
\tag{1.27}
$$

In the case of $N = 1$ $(a_1 = a,\ b_1 = b)$ the solution of Eqs. (1.27) takes the form

$$
C(\xi)(\pi/4)(b^2 - a^2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n J_n\left(\xi\frac{b+a}{2}\right)J_n\left(\xi\frac{b-a}{2}\right) \tag{1.28}
$$

where coefficients c_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ can be obtained using the solution of infinite system of algebraic equations

$$
\sum_{n=0}^{\infty} c_n\omega_{nk} = \frac{2}{\pi(b^2 - a^2)} f_k \qquad (k = 0,1,2,\ldots) \tag{1.29}
$$

Here

$$
\omega_{nk} = (2/(b+a))\int_0^\infty J_n(\eta)J_n(\alpha\eta)J_k(\eta)J_k(\alpha\eta)d\eta \qquad (n,\ k = 0,1,2,\ldots) \tag{1.30}
$$

2. Let us analyse the coefficients ω_{nk} determined using the formula (1.30) in the form of the improper integral of the product of four Bessel functions. The simplest approximate numerical method for these coefficients is based on using the representation of ω_{nk} in the form

$$
\omega_{nk} = \frac{2}{b+a}\int_0^{\eta_0} J_n(\eta)J_n(\alpha\eta)J_k(\eta)J_k(\alpha\eta)d\eta + \frac{2}{b+a}\int_{\eta_0}^{\infty} J_n(\eta)J_n(\alpha\eta)J_k(\eta)J_k(\alpha\eta)d\eta \tag{2.1}
$$

where the reason for choice of the value η_0 is the possibility of using in the last integral asymptotic formulas for the Bessel functions

$$
J_n(\eta) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi\eta}}\cos\left[\eta - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right], \quad (\eta \geq \eta_0) \tag{2.2}
$$

The asymptotic expression

$$
\begin{aligned}
&J_n(\eta)J_k(\eta)J_n(\alpha\eta)J_k(\alpha\eta) \cong (1/(2\pi^2\eta^2\alpha))[1 + (-1)^{n-k} + ((-1)^n + \\
&+ (-1)^k)(\sin 2\eta + \sin 2\alpha\eta) + \cos(2(1-\alpha)\eta) - (-1)^{n+k}\cos(2(1+\alpha)\eta)]
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

is correct with account of (2.2). Using (2.3) we obtain the following form for the second integral in the right part of (2.1)

$$
\begin{aligned}
&\int_{\eta_0}^{\infty} J_n(\eta)J_k(\eta)J_n(\alpha\eta)J_k(\alpha\eta)d\eta \cong (1/(2\pi^2\alpha\eta_0))[1 + (-1)^{n-k} + ((-1)^n + \\
&+ (-1)^k)(\sin 2\eta_0 + \sin 2\alpha\eta_0 - 2\eta_0 Ci(2\eta_0) - 2\alpha\eta_0 Ci(2\alpha\eta_0)) + \\
&+ \cos(2(1-\alpha)\eta_0) - (-1)^{n+k}\cos(2(1+\alpha)\eta_0) + 2(1-\alpha)\eta_0 si(2(1-\alpha)\eta_0) - \\
&- (-1)^{n+k}2(1+\alpha)\eta_0 si(2(1+\alpha)\eta_0)]
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Here

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left[\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)G(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau-z}$$

$$\Gamma^{\pm}(t)=\pm\frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{t-i}{t+i}\right)G(t)\right]+\Gamma(t),\quad \left(\Gamma(t)=\Gamma(z)\big|_{z=t}\right) \tag{1.24}$$

Пользуясь предельными значениями этой функции, преобразуем краевое условие (1.21) к виду

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{X^{+}(t)}=\frac{\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)}+\frac{g(t)}{X^{+}(t)} \tag{1.25}$$

Далее, вводя аналитическую функцию

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z} \tag{1.26}$$

Представим краевое условие в виде

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{X^{+}(t)}-\Psi^{+}(t)=\frac{\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)}-\Psi^{-}(t) \tag{1.27}$$

где

$$\Psi^{+}(t)=\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^{+}(t)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}$$

$$\Psi^{-}(t)=-\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^{+}(t)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t} \tag{1.28}$$

или

$$\Psi^{\pm}(t)=\pm\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^{+}(t)}+\Psi(t)\qquad\left(\Psi(t)=\Psi(z)\big|_{z=t}\right).$$

Применяя теорему об аналитическом продолжении и учитывая, что единственной особенностью рассматриваемой функции может быть лишь полюс в точке $z=-i$, на основании обобщенной теоремы Лиувилля будем иметь:

$$\frac{\Phi^{+}(z)}{X^{+}(z)}-\Psi^{+}(z)=\frac{\Phi^{-}(z)}{X^{-}(z)}-\Psi^{-}(z) \tag{1.29}$$

Отсюда получаем общее решение задачи

$$\Phi(z)=X(z)\Psi(z) \tag{1.30}$$

Так как $\operatorname{Ind}G(t)=-1$, надо добавлять еще одно условие $\Psi(i)=0$ или

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau+i}=0 \tag{1.31}$$

Напишем решение (1.30) краевой задачи Римана (1.21) по формулам Сохоцкого. Предельные значения соответствующих функций есть:

$$\Phi^{+}(t)=X^{+}(t)\left[\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^{+}(t)}+\Psi(t)\right]$$

$$\Phi^-(t) = X^-(t)\left[-\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^-(t)} - \Psi(t)\right] \tag{1.32}$$

Отсюда по формуле (1.20) имеем

$$\varphi(t) = \frac{g(t)}{2}\left[1+\frac{X^-(t)}{X^+(t)}\right] + X^+(t)\left[1-\frac{X^-(t)}{X^+(t)}\right]\Psi(t) \tag{1.33}$$

$\dfrac{X^-(t)}{X^+(t)}$ заменяя $1/G(t)$, а функцию $\Psi(t)$ - ее выражением из (1.2), получаем

$$\varphi(t) = \frac{g(t)}{2}\left[1+\frac{1}{G(t)}\right] + X^+(t)\left[1-\frac{1}{G(t)}\right]\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)d\tau}{X^+(\tau)(\tau-t)} \tag{1.34}$$

Подставляя вместо $X^+(t)$, $G(t)$ и $g(t)$ значения из (1.23) и (1.22), имеем

$$\varphi(t) = \frac{a(t)f(t)}{a^2(t)-b^2(t)} - \frac{b(t)z(t)}{\sqrt{a^2(t)-b^2(t)}}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)d\tau}{\sqrt{a^2(\tau)-b^2(\tau)}z(\tau)(\tau-t)} \tag{1.35}$$

где

$$Z(t) = \sqrt{\frac{t-i}{t+i}}\exp(\Gamma(t)) \tag{1.36}$$

или окончательно для неизвестной функции $X(t)$ получаем следующие выражения:

$$X(t) = -\frac{N(t)}{2M(t)} + \frac{Z(t)}{\sqrt{t(t+i)}M(t)}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\tau(\tau+i)}N(\tau)\exp(i(t-\tau)\alpha_0)d\tau}{\sqrt{M(\tau)}Z(\tau)(t-\tau)} \tag{1.37}$$

Рассмотрим частные случаи:

1) при $\alpha_0 \to \infty$ из (1.37) получаем

$$X(t) = 0 \tag{1.38}$$

2) при $\alpha_0 \to -\infty$

$$X(t) = -\frac{N(t)}{M(t)} \tag{1.39}$$

Эти результаты совпадают с известными результатами [2, 3, 4]. При получении значений (1.38) и (1.39) использовали следующие пределы:

$$\lim_{\alpha_0\to\pm\infty}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)\exp(i(t-\tau)\alpha_0)}{t-\tau}d\tau = \pm f(t)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968.
3. Арутюнян Л.А. Плоская задача теории упругости для составной области, образованной из двух луночек. -Изв. АН Арм ССР, Механика, 1976, т.29, №1, с. 51-66.
4. Арутюнян Л.А., Апикян Ж.Г., Аветисян Г.А. Плоская контактная задача для составного тела с симметричной трещиной между материалами. – Инж. проблемы строительной механики ЕрПИ, 1975, т.28, №3.
5. Мелконян М.Г., Мкртчян А.М. Об одной контактной задаче для двух прямоугольников. -Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т.28, №3, с. 13-28.
6. Абрамян Б.Л., Макарян В.С. Осесимметричная задача о контакте между двумя слоями из различных материалов с учетом трения между слоями. -Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т.29, №5, с. 3-14.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. -М.:Физматгиз, 1963.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
22.04.1998

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №2, 1999 Механика

УДК 539.3

О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ТЕОРИИ ПЛАСТИН

Белубекян В.М., Белубекян М.В.

Վ.Մ. Բելուբեկյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան

Սալերի տեսության եզրային պայմանների մասին

Սալերի տեսության եզրային պայմանները քննարկվում են խնդիրների ինքնահամալուծության սկզբունքների տեսանկյունից: Ս. Համբարձումյանի ճշգրտված տեսության համար ստացված են եզրային պայմանների տարբերակներ, որոնք բավարարում են ինքնահամալուծության սկզբունքին: Համեմատված է Կիրխհոֆի վարկածին համապատասխան եզրային պայմանների հետ: Մասնավորապես ցույց է տրված, որ ճշգրտված տեսությունը հնարավորություն է տալիս ուսումնասիրել սալի ծռման խնդիրը, երբ եզրում կիրառված է ոլորող մոմենտ:

V.M. Belubekyan, M.V. Belubekyan

On the Boundary Conditions of Plate Theory

Вопросам установления граничных условий в теории пластин посвящена обширная литература. Отметим, в частности, работы [1-3]. В настоящей статье на основе принципа самосопряженности обсуждаются граничные условия пластин по теории Кирхгофа и уточненной теории С. Амбарцумяна. Показывается, что в теории Кирхгофа возможны два варианта граничных условий, реализующих самосопряженность задач и заменяющих естественные граничные условия равенства нулю изгибающего и крутящего моментов и поперечного усилия. Приводятся сравнения результатов решения конкретных задач для указанных вариантов граничных условий.

При решении задач по уточненным теориям возникают вопросы установления третьего граничного условия для задач с условиями закрепления, шарнирого опирания и скользящего контакта, которые устанавливаются, следуя условиям самосопряженности. Показывается также, что для свободного края три естественные граничные условия не реализуют самосопряженности задач. Более того, если требовать равенство нулю изгибающего момента и поперечного усилия, нельзя получить третье условие, реализующее самосопряженность задачи. Для свободного края, при условии равенства нулю изгибающего момента и на основе принципа самосопряженности, установлены остальные два граничных условия.

1. Рассматривается однородное уравнение для прогиба прямоугольной пластины $(0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ -h \le z \le h)$ по теории Кирхгофа

$$\Delta^2 w = 0 \tag{1.1}$$

В принципе, вместо (1.1) можно рассматривать либо уравнение поперечных колебаний, либо уравнение устойчивости сжатой пластины.

Следующие выражения для изгибающего момента, перерезывающего усилия и крутящего момента будут использованы

$$M_1 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\quad N_1 = -D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w$$

$$H = -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},\quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \tag{1.2}$$

Принимается, что на кромках пластины $y = 0, b$ осуществляются условия шарнирного опирания

$$w = 0,\ \partial^2 w / \partial y^2 = 0$$

Тогда общее решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sin \lambda_n y, \quad \lambda_n = n\pi / b \tag{1.3}$$

Подстановка (1.3) в (1.1) приводит к уравнениям, определяющим $X_n(x)$

$$L(X_n) \equiv X_n^{IV} - 2\lambda_n^2 X_n^{II} + \lambda_n^4 X_n = 0$$

Рассмотрим всевозможные варианты граничных условий для $X_n(x)$, исходя из принципа самосопряженности. Пусть X_n удовлетворяет некоторым однородным граничным условиям при $x = \text{const}$. Пусть функция $U(x)$ имеет производные вплоть до четвертого порядка и удовлетворяет тем же граничным условиям, что и $X_n(x)$. Тогда задача определения $X_n(x)$ будет самосопряженной, если имеет место равенство

$$\int_0^a UL(X_n)dx = \int_0^a X_n L(U)dx \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует, что для самосопряженности задачи достаточно, чтобы граничные условия при $x = \text{const}$ удовлетворяли следующему условию:

$$UX_n^{III} - U^I X_n^{II} + U^{II} X_n^I - U^{III} X_n - 2\lambda_n^2 (UX_n^I - U^I X_n) = 0 \tag{1.5}$$

Если принять, что при $x = \text{const}$ удовлетворяется условие $w = 0$, то из (1.3) и (1.5) получается следующее условие самосопряженности:

$$-U^I X_n^{II} + U^{II} X_n^I = 0$$

Отсюда очевидно, что задача будет самосопряженной, если

$$\alpha X_n^{II} + \beta X_n^I = 0 \qquad \text{при } x = \text{const} \tag{1.6}$$

где α и β — произвольные постоянные.

Из (1.6), согласно (1.3), в частном случае $\beta = 0$ получаются условия заделанного края

$$w = 0, \ \partial w / \partial x = 0 \tag{1.7}$$

и в случае $\alpha = 0$ условия шарнирного опирания

$$w = 0, \ M_1 = 0 \tag{1.8}$$

Аналогично, в случае принятия условия $\partial w / \partial x = 0$ при $x = \text{const}$ получаются условия заделанного края (1.7) и скользящего контакта

$$\partial w / \partial x = 0, \ N_1 = 0 \tag{1.9}$$

Если считать, что на краю пластинки изгибающий момент равен нулю, то получаются либо условия шарнирного опирания (1.8), либо общепринятые условия для свободного края

$$M_1 = 0, \ \bar{N}_1 = 0 \tag{1.10}$$

где $\bar{N}_1 = N_1 + \partial H / \partial y$ – обобщенная перерезывающая сила.

При принятии условия равенства нулю крутящего момента из принципа самосопряженности следует

$$H = 0, \ N_1 = 0 \tag{1.11}$$

Условия (1.11) в случае однородных граничных условий совпадают с условиями (1.9) для скользящего контакта. Однако, если на краю задачи крутящий момент $H = H_0(y)$, то из (1.6) следует, что, приняв также $N_1 = 0$ как второе граничное условие, можно решать задачу кручения пластинки на основе теории Кирхгофа.

Наконец, считая на краю равной нулю перерезывающую силу, получим условия либо скользящего контакта (1.9), либо

$$N_1 = 0, \quad \Delta w = 0 \tag{1.12}$$

При решении задач изгиба пластин по теории Кирхгофа применяются все вышеперечисленные граничные условия, кроме (1.12). Возможно, условия (1.12) для некоторых задач окажутся некорректными.

Естественно считать, что на свободном краю пластинки M_1, N_1 и H равны нулю. Однако в теории пластин Кирхгофа необходимы только два условия. Поэтому считается, что для свободного края верны только условия (1.10). Но тогда ставится ограничение на класс задач, которые можно решать на основе теории Кирхгофа. В частности, нельзя решать задачи, если на этом краю приложены либо перерезывающая сила, либо крутящий момент.

Из принципа самосопряженности следует, что на свободном краю наряду с условием (1.10) можно использовать также альтернативные условия (1.11) или (1.12). Более конкретно: если на краю $x = \text{const}$ задан изгибающий момент $M_1 = M_0(y)$, то второе условие, согласно (1.10), есть $\widetilde{N}_1 = 0$, если задан крутящий момент $H = H_0(y)$, то согласно (1.11) $H = 0$, если $N_1 = N_0(y)$, то возможны два варианта – согласно (1.11) $H = 0$, согласно (1.12) $\Delta w = 0$.

2. Примеры. Пусть прямоугольная пластинка изгибается перерезывающим усилием, приложенным на краю. Общие граничные условия следующие:

$$y = 0, b: \; w = 0, \;\; \partial^2 w / \partial y^2 = 0$$

$$x = a: \quad w = 0, \;\; \partial w / \partial x = 0$$

На краю $x = 0$ сравниваются два варианта условий:
согласно (1.11)

$$H = 0, \;\; N_1 = N_0 \sin \lambda_1 y \tag{2.1}$$

и согласно (1.12)

$$N_1 = N_0 \sin \lambda_1 y, \;\; \Delta w = 0 \tag{2.2}$$

Из решения задачи в приближении $[2\pi a / b]^2 << 1$ для прогиба пластинки в точке $x = 0$, $y = b/2$ получаются следующие выражения:

$$w_0 = \frac{3ab^2}{2\pi^2 D} N_0, \;\; w_0 = \frac{a^3}{6D} N_0 \tag{2.3}$$

соответствующие вариантам граничных условий (2.1) и (2.2). Очевидно, разница существенна. Выражения из (2.3) совпадают, если $b/a = \pi/3$ (приблизительно квадратная пластинка).

Рассмотрим задачу кручения полубесконечной пластинки-полосы. Уравнение (1.1) решается при следующих граничных условиях:

$$y = 0, b: \; w = 0, \;\; \partial^2 w / \partial y^2 = 0$$

$$x = 0: \qquad H = H_0(y), \; N_x = 0, \; \lim_{x\to\infty} w = 0 \tag{2.4}$$

Решение задачи представляется в виде (1.3). Тогда, очевидно, что необходимо следующее представление:

$$H_0(y) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\lambda_n y \tag{2.5}$$

Однако условие для крутящего момента удовлетворится, если $a_0 = 0$, что существенно ограничивает класс возможных функций $H_0(y)$. Более общее решение можно получить, если условие $H = H_0(y)$ согласно (1.2) представить в виде

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{(1-\nu)D}\int_0^y H_0(\zeta)d\zeta \tag{2.6}$$

Тогда при $y = 0$ имеется соответствие с граничным условием $w = 0$, но при $y = b$ это соответствие в общем случае нарушается. Если же

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{(1-\nu)D}\int_y^b H_0(\zeta)d\zeta \tag{2.7}$$

то нарушится соответствие при $y = 0$.

Используя представление (2.5) в выражениях (2.6) и (2.7), а также разложения

$$y = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n}\sin\lambda_n y, \quad b - y = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n y$$

получим решение задачи

$$w = -\frac{1}{(1-\nu)D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\delta_n a_0 - a_n}{\lambda_n^2}\exp(-\lambda_n x)\sin\lambda_n y \tag{2.8}$$

где $\delta_n = (-1)^n$ для варианта (2.6) и $\delta_n = 1$ для (2.8). В случае $a_0 = 0$ оба решения совпадают. Если же $a_0 \neq 0$, то решения существенно разные. В частности, если $a_n = 0$, то

$$w\left(0, \frac{b}{2}\right) = \pm\frac{2a_0 b}{(1-\nu)\pi D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} \quad \left(\sum \approx 0{,}916\right) \tag{2.9}$$

Рассмотрим вопрос существования "локальной" неустойчивости полубесконечной пластинки-полосы, сжатой по направлению координаты x. Уравнение устойчивости пластинки имеет вид

$$D\Delta^2 w + P\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{2.10}$$

Пусть края $y = 0, b$ шарнирно оперты. Требуется найти решение уравнения (2.10), удовлетворяющее условию

$$\lim_{x\to\infty} w = 0 \tag{2.11}$$

при различных граничных условиях при $x = 0$.

Представление (1.3) приводит к решению уравнения

$$X_n^{IV} - 2\lambda_n^2 X_n^{II} + \lambda_n^4 (1-\alpha_n^2) X_n = 0, \quad \alpha_n^2 = \frac{P\lambda_n^2}{D} \tag{2.12}$$

Очевидно, что уравнение (2.12) будет иметь решение, удовлетворяющее условию (2.11), если

$$0 < \alpha_n < 1 \tag{2.13}$$

Тогда

$$X_n = A_n \exp(-\lambda_n \beta_1 x) + B_n \exp(-\lambda_n \beta_2 x) \tag{2.14}$$

где

$$\beta_1 = \sqrt{1+\alpha_n}, \quad \beta_2 = \sqrt{1-\alpha_n} \tag{2.15}$$

При удовлетворении граничным условиям $(x=0)$ заделки (1.7), шарнирного опирания (1.8) и скользящего контакта (1.9), легко получить, что не существует решения, удовлетворяющего условию (2.13) и следовательно, (2.11). Т.е. в этих случаях "локальная" неустойчивость невозможна.

Для граничного условия свободного края (1.10) характеристическое уравнение задачи приводится к виду

$$(\beta_1 - \beta_2)\left[\beta_1^2\beta_2^2 + 2(1-\nu)\beta_1\beta_2 - \nu^2\right] = 0 \tag{2.16}$$

Легко получить, что уравнение (2.16) всегда имеет решение $(-1 < \nu < 0{,}5)$, удовлетворяющее условию (2.13). Значение минимальной критической силы получается в виде

$$P_* = \frac{Db^2}{\pi^2}\left[2 - \nu + \sqrt{(1-\nu)^2 + \nu^2}\right] \tag{2.17}$$

Следует отметить, что для варианта граничных условий свободного края (1.12) решение типа локальной потери устойчивости также не существует.

3. Теория пластин, учитывающая поперечные сдвиговые деформации и инерции вращения, приводит к повышению порядка уравнений изгиба по сравнению с теорией Кирхгофа. Отсюда появляется проблема установления третьего дополнительного условия на краю пластины для заделки (1.7), шарнирного опирания (1.8) и скользящего контакта (1.9). Кроме того, ставится вопрос: удовлетворяют ли граничные условия равенства нулю изгибающего и крутящего моментов и перерезывающей силы принципу самосопряженности $(M_1 = 0,\ N_1 = 0,\ H = 0)$.

Однородные уравнения теории изгиба пластин С.А. Амбарцумяна [4], в которой, в частности, для поперечных сдвиговых деформаций принято

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)\varphi(x,y), \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)\psi(x,y) \tag{3.1}$$

имеют вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

$$-D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w + \frac{4(1-\nu)}{5}D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{8Gh}{3}\varphi$$

$$-D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w-\frac{4(1-\nu)}{5}D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=\frac{8Gh}{3}\psi \tag{3.2}$$

При помощи введения функции [4-6]

$$\Phi=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{3.3}$$

получаются раздельные уравнения, определяющие функцию прогиба w и Φ

$$\Delta^2 w=0\,,\ \Delta\Phi-\frac{5}{2h^2}\Phi=0 \tag{3.4}$$

В общем случае функции w и Φ связаны посредством граничных условий.

Следует отметить, что перерезывающие усилия выражаются через функции φ и ψ следующим образом:

$$N_1=\frac{8Gh}{3}\varphi\quad, N_2=\frac{8Gh}{3}\psi \tag{3.5}$$

Усилия и моменты также выражаются через функции w и Φ. В частности

$$M_1=-D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{4h^2}{5}\frac{\partial\Delta w}{\partial y}-\frac{16}{25}(1-\nu)h^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right]$$

$$H=-D(1-\nu)\left\{\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[w-\frac{4h^2}{5(1-\nu)}\Delta w\right]-\frac{4}{5}\left(\Phi-\frac{4h^2}{5}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)\right\}$$

$$\varphi=-\frac{h^2}{2(1-\nu)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\Delta w-\frac{4(1-\nu)}{5}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right] \tag{3.6}$$

В процессе преобразования выражения изгибающего момента M_1 существенно используется первое уравнение из системы (3.2) с тем, чтобы производная по x не превышала второй порядок.

Пусть на краях $y=0,\ b$ прямоугольной пластинки заданы условия

$$w=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=0 \tag{3.7}$$

Тогда решения уравнения (3.4) можно представить в виде

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\sin\lambda_n y\,,\ \ \Phi=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)\cos\lambda_n y \tag{3.8}$$

что соответствует решению по классической теории в случае шарнирного опирания.

Подстановка (3.8) в (3.4) приводит к следующим уравнениям:

$$L_1(f_n)\equiv f_n^{IV}-2\lambda_n^2 f_n^{II}+\lambda_n^4 f_n=0$$

$$L_2(g_n)\equiv g_n^{II}-\left(\lambda_n^2+\frac{5}{2h^2}\right)g_n=0 \tag{3.9}$$

Рассмотрим различные варианты линейных однородных граничных условий для системы функций f_n, g_n на краю $x=\mathrm{const}$. Пусть соответствующая система функций u, ν удовлетворяет тем же граничным условиям. Задача будет самосопряженной, если

$$\int_0^a [uL_1(f_n) + \nu L_2(g_n)]dx = \int_0^a [f_n L_1(u) + g_n L_2(\nu)]dx \tag{3.10}$$

Отсюда следует условие самосопряженности при $x = \text{const}$

$$uf_n''' - u'f_n'' + u''f_n' - u'''f_n - \lambda_n^2(uf_n' - u'f_n) + \nu g_n' - \nu' g_n = 0 \tag{3.11}$$

Пусть на краю $x = \text{const}$ заданы условия заделки (1.7). С учетом представлений (3.8) из (3.11) получаются два варианта граничных условий, удовлетворяющих условию самосопряженности

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \Phi = 0 \tag{3.12}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \tag{3.13}$$

В случае, когда заданы условия (1.8), которые с учетом (3.8) имеют вид

$$f_n = 0, \quad f_n'' + \frac{19(1-\nu)}{25}\lambda_n h^2 g_n' = 0$$

получаются следующие два варианта граничных условий:

$$w = 0, \ M_1 = 0, \ \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \tag{3.14}$$

$$w = 0, \ M_1 = 0, \ \Phi + \frac{16(1-\nu)}{25}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \tag{3.15}$$

Если принять, что на краю $x = \text{const}$ заданы условия скользящего контакта (1.9), то для уточненной теории возможны следующие варианты:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \ N_1 = 0, \ \Phi = 0 \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad N_1 = 0, \quad \frac{4(1-\nu)}{5}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \tag{3.17}$$

Необходимо отметить, что в случае вариантов граничных условий (3.12)- (3.14), (3.16) задачи определения функций w и Φ отделяются.

Наконец, рассмотрим условия для свободного края пластинки. Вначале предполагается, что при $x = \text{const}$ $M_1 = 0, \ N_1 = 0$. Соответствующие условия для функций f_n и g_n запишутся в виде

$$\left(1 + \frac{4}{5}\lambda_n^2 h^2\right) f_n'' - \lambda_n^2\left(\nu + \frac{4}{5}\lambda_n^2 h^2\right) f_n + \frac{16(1-\nu)}{25}\lambda_n h^2 g_n' = 0$$

$$f_n''' - \lambda_n^2 f_n' + \frac{4(1-\nu)}{5}\lambda_n g_n = 0 \tag{3.18}$$

Показывается, что не существует третьего дополнительного совместно с (3.18) условия, удовлетворяющего условию самосопряженности (3.11). Если же потребовать, чтобы выполнялось условие равенства нулю только изгибающего момента, то из (3.11) можно получить остальные два условия, которые вместе с $M_1 = 0$ будут удовлетворять принципу самосопряженности. Окончательно указанные условия для свободного края будут иметь вид

$$M_1 = 0$$

$$\frac{16(1-\nu)}{25}h^2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \Phi - \frac{4h^2}{5}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{16(1-\nu)}{25}h^2\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (2-\nu)\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{4h^2}{5}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} = 0 \tag{3.19}$$

П р и м е ч а н и е. Причина появления различных вариантов граничных условий, удовлетворяющих принципу самосопряженности, заключается в постановке соответствующей пространственной задачи теории упругости. Например, для пространственной задачи возможны следующие два варианта граничных условий: при $x = \text{const}$: условия полной заделки – равенство нулю всех компонент перемещения $(u_1 = u_2 = u_3 = 0)$ и условия частичной заделки $(u_1 = u_3 = 0,\ \sigma_{12} = 0)$. В обоих случаях в рамках теории Кирхгофа получаются одинаковые условия (1.7). Уточненная же теория учитывает различие этих граничных условий в соответствии с вариантами (3.12), (3.13).

Рассмотрим второй способ приведения системы уравнений уточненной теории пластин (3.2) к раздельным уравнениям. Новая функция вводится следующим способом [7]:

$$\varphi = \frac{\partial F}{\partial x},\quad \psi = \frac{\partial F}{\partial y} \tag{3.20}$$

откуда система (3.2) заменяется уравнениями

$$\Delta^2 w = 0,\quad \Delta F = 0 \tag{3.21}$$

При этом выражения для усилий, в частности, имеют вид

$$N_1 = \frac{8Gh}{3}\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$M_1 = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{4(1-\nu)}{5}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]$$

$$H = -(1-\nu)D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{4}{5}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right) \tag{3.22}$$

Поступая таким же образом, как и в случае уравнений относительно функций w и Φ (3.4), получим следующие варианты граничных условий. Граничные условия, соответствующие условиям заделки теории пластин Кирхгофа при $x = \text{const}$

$$w = 0,\quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0,\quad F = 0 \tag{3.23}$$

или

$$w = 0,\quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{3.24}$$

Шарнирное опирание

$$w = 0,\ M_1 = 0,\ F = 0 \tag{3.25}$$

или

$$w = 0,\ M_1 = 0,\ \frac{\partial}{\partial x}\left[F + \frac{4(1-\nu)}{5}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = 0 \tag{3.26}$$

Скользящий контакт

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad N_1 = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \tag{3.27}$$

Свободный край

$$M_1 = 0,\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{5}{4(1-\nu)}F\right] = 0,\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{5}{2(1-\nu)}F\right] = 0 \tag{3.28}$$

4. Рассмотрим еще одно новое полезное представление уравнений уточненной теории С.А. Амбарцумяна.

Пусть на лицевой поверхности пластины $z = h$ действует поперечная нагрузка интенсивности $q(x, y)$. Уравнение изгиба пластин с учетом поперечных сдвигов [7] можно представить в виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{3}{8Gh}q \\
-\frac{\partial}{\partial x}\Delta w + \frac{4}{5}(1-\nu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{8}{5}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{2(1-\nu)}{h^2}\varphi \\
-\frac{\partial}{\partial y}\Delta w - \frac{4}{5}(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{8}{5}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{2(1-\nu)}{h^2}\psi
\end{gathered} \tag{4.1}$$

При использовании преобразования

$$\varphi = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y},\quad \psi = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{4.2}$$

система уравнений (4.1) приводится к следующему виду:

$$\begin{gathered}
\Delta F = -\frac{3}{8Gh}q \\
\Delta^2 w - \frac{8}{5}\Delta^2 F + \frac{2(1-\nu)}{h^2}\Delta F = 0 \\
\Delta^2 \Psi - \frac{5}{2h^2}\Delta \Psi = 0
\end{gathered} \tag{4.3}$$

Общий порядок (по производным) уравнений уточненной теории пластин равняется шести, чем и определяется наобходимость трех граничных условий на краю пластины. Система уравнений (4.3) имеет повышенный порядок (десять), что обусловлено преобразованием (4.2). Поэтому вместо системы (4.3) рассматривается следующая система уравнений шестого порядка:

$$\begin{gathered}
\Delta F = -\frac{3}{8Gh}q \\
\Delta w + \frac{2(1-\nu)}{h^2}F = -\frac{3}{5Gh}q
\end{gathered}$$

$$\Delta\Psi - \frac{5}{2h^2}\Psi = 0 \tag{4.4}$$

Очевидно, что решения системы (4.4) являются также решениями для (4.3). Обратное утверждение требует доказательства, которое нам не удалось получить.

Моменты и перерезывающие усилия выражаются через функции w, F и Ψ следующим образом:

$$M_1 = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{8(1-\nu)}{5}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\right]$$

$$M_2 = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{8(1-\nu)}{5}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)\right]$$

$$H = -(1-\nu)D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{4}{5}\left(2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right)\right] \tag{4.5}$$

$$N_1 = \frac{8Gh}{3}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right), \quad N_2 = \frac{8Gh}{3}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)$$

Аналогичные предыдущему пункту выкладки показывают, что граничные условия при $x = \text{const}$, удовлетворяющие принципу самосопряженности, следующие:
условия, соответствующие закрепленному краю

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \Psi = 0 \tag{4.6}$$

или

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \tag{4.7}$$

шарнирному опиранию

$$w = 0, \quad M_1 = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \tag{4.8}$$

или

$$w = 0, \quad M_1 = 0, \quad 2(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{5}{h^2}\Psi = 0 \tag{4.9}$$

скользящему контакту

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad N_1 = 0, \quad \Psi = 0 \tag{4.10}$$

или

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad N_1 = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} - (2-\nu)\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{4.11}$$

свободному краю

$$M_1 = 0, \quad 2(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{5}{4h^2}\Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

$$2(1-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-\frac{5(2-\nu)}{4h^2}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^3}=0 \tag{4.12}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближений теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.-ПММ. 1962. 26. вып. 4. с. 668-686.
2. Агаловян Л.А. О граничных условиях в теории анизотропных пластин.-Уч. записки ЕГУ. Естественные науки. 1978. №3. с.21-30
3. Васильев В.В. К дискуссии о классической теории пластин.-МТТ 1995, №4, с. 140-151.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин.–М.: Наука, 1987. 360с.
5. Хачатрян А.А. Некоторые задачи изгиба трансверсально-изотропных круглых пластинок. -МТТ, 1966, №3, с. 110-115.
6. Ананян А.К. Влияние уточненных граничных условий в задачах изгиба и устойчивости прямоугольных пластин с учетом поперечных сдвигов (канд. диссерт.) - Ереван. Ин-т механики. 1997
7. Белубекян В.М. Определение коэффициентов особенностей в некоторых задачах теории упругости для секториальных тел. (канд. диссерт.) - Ереван, ЕГУ, 1991.

Ереванский государственный университет

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 18.12.1997

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №2, 1999 Механика

УДК 539.3:534.2

О СУЩЕСТВОВАНИИ ВОЛН ТИПА РЭЛЕЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЗАМКНУТОЙ НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Гулгазарян Г.Р.

Գ.Ռ. Ղուլղազարյան
Ոչ շրջանային փակ կիսաանվերջ գլանային թաղանթում Ռեյլեյի տիպի ալիքի գոյության մասին

Աշխատանքում հետազոտվում է հարթ (ոչ ծռման) Ռեյլեյի տիպի ալիքների տարածման հարցը, որը մարում է կիսաանվերջ ոչ շրջանային գլանային թաղանթի ազատ ծայրից ծնիչի ուղղությամբ: Հետազոտումը կատարվում է առաձգական իզոտրոպ թաղանթի համար, երբ առկա է ծռման կոշտությունը: Մասնավորապես հետազոտվում են առավելապես ծռման տատանման և առավելապես տանգենցիալ տատանման դեպքերը:

G.R. Gulgazaryan
About the existence of the waves of Rayleighs type in semiinfinite closed noncircular cylindrical shells

В работе исследуется вопрос распространения плоских волн типа Рэлея, затухающих от свободного торца полубесконечной замкнутой некруговой цилиндрической оболочки вдоль направления ее образующих. Исследование проводится для тонкой упругой изотропной оболочки при наличии изгибной жесткости. В частности, исследуется случай преимущественно изгибных колебаний и преимущественно тангенциальных колебаний.

Вопросы распространения плоской волны типа Рэлея, затухающей от свободного торца полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочки, для безмоментной задачи рассмотрены в работах [1],[2]. Аналогичная задача для круговой полубесконечной цилиндрической оболочки с учетом изгибной жесткости рассмотрена в работе [3]. Настоящая работа является логическим продолжением работы [2] для моментной задачи.

Предполагается, что радиус кривизны направляющей кривой имеет вид

$$R(\beta) = R_0(1+\varepsilon\cos(2\pi\beta/s)), \quad 0\le\varepsilon<1, \quad 0\le\beta\le s$$

где $R_0 = \mathrm{const}$, β - длина переменной дуги направляющей кривой срединной поверхности, s - полная длина. Приведен численный анализ, показывающий зависимость фазовой скорости от ε и от волнового числа m.

1.Общий случай. В качестве исходных уравнений возьмем уравнения, которые соответствуют технической теории цилиндрических оболочек [4],[5] :

$$\Gamma u_1 = \sigma\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta^2} + \frac{2\sigma\lambda}{1-\sigma}\frac{\partial w}{\partial\alpha}, \quad \Gamma u_2 = \frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3} + (2+\sigma)\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^2\partial\beta} + \frac{2\lambda}{1-\sigma}\frac{\partial w}{\partial\beta}$$

$$\mu^4\Gamma R\Delta\Delta Rw - \lambda\Gamma R^2 w + (1-\sigma^2)\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} + \lambda\Delta w + 2(1+\sigma)\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma}w = 0 \quad (1.1)$$

Здесь $u_1, u_2, u_3 = Rw$ — проекции смещения, α, β — ортогональные координаты точки срединной поверхности, $R^{-1} = R^{-1}(\beta)$ — кривизна направляющей кривой,

$$\lambda = \left(1-\sigma^2\right)\omega^2\rho/E \qquad (1.2)$$

где ρ — удельная плотность материала оболочки, E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона, ω — частота, $\mu^4 = h^2/12$ (h — толщина оболочки), Δ — оператор Лапласа, оператор Γ имеет вид

$$\Gamma = \Delta\Delta + (3-\sigma)(1-\sigma)^{-1}\lambda\Delta + 2(1-\sigma)^{-1}\lambda^2 \qquad (1.3)$$

Граничные условия принимают вид

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha^2} + \sigma\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial\beta^2} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_2}{R}\right)\right)\Bigg|_{\alpha=0} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial\alpha} + \sigma\left(\frac{\partial u_2}{\partial\beta} - \frac{u_3}{R}\right)\Bigg|_{\alpha=0} = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial\beta} + \frac{\partial u_2}{\partial\alpha} + 4\mu^4\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u_3}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_2}{R}\right)\right)\Bigg|_{\alpha=0} = 0$$

$$u_i(\alpha,\beta) = u_i(\alpha,\beta+s),\ i = \overline{1,3} \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial^3 u_3}{\partial\alpha^3} + (2-\sigma)\frac{\partial^3 u_3}{\partial\alpha\partial\beta^2} + (2-\sigma)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left(\frac{u_2}{R}\right)\Bigg|_{\alpha=0} = 0, \quad \sum_{j=1}^{3}\left|u_j\right|\Bigg|_{\alpha\to\infty} = 0$$

Периодическое решение системы (1.1) ищем в виде

$$u_1 = \exp(\chi\alpha)\left(\sum_{m=0}^{\infty} u_m \cos P_m\beta\right),\ u_2 = \exp(\chi\alpha)\sum_{m=1}^{\infty} v_m \sin P_m\beta$$
$$w = \exp(\chi\alpha)\left(w_0/2 + \sum_{m=1}^{\infty} w_m \cos P_m\beta\right) \qquad (1.5)$$

где $P_m = 2\pi m/s$. Подставим (1.5) в (1.1). Из первых двух уравнений (1.1) получим

$$u_m = A_m w_m,\ v_m = B_n w_n,\ m = \overline{0,+\infty}$$
$$A_m = \chi(\sigma\chi^2 + P_m^2 + 2\lambda\sigma/(1-\sigma))/c_m$$
$$B_m = -P_m((2-\sigma)\chi^2 - P_m^2 2\lambda/(1-\sigma))/c_m \qquad (1.6)$$
$$c_m = (\chi^2 - P_m^2)^2 + (3-\sigma)(1-\sigma)^{-1}\lambda(\chi^2 - P_m^2) + 2(1-\sigma)^{-1}\lambda^2$$

При $m = 0$ в (1.6) w_0 заменяется на $w_0/2$. Из третьего уравнения (1.1), учитывая, что $w_{-1} \equiv w_1$, получим бесконечную систему уравнений

$$(0.5a_0^{(0)} + \varepsilon^2 b_0^{(2)})w_0 + \varepsilon b_0^{(1)} w_1 + \varepsilon^2 b_0^{(2)} w_2 = 0$$
$$\varepsilon^2 a_m^{(2)} w_{m-2} + \varepsilon a_m^{(1)} w_{m-1} + (a_m^{(0)} + \varepsilon^2(a_m^{(2)} + b_m^{(2)}))w_m + \varepsilon b_m^{(1)} w_{m+1} + \qquad (1.7)$$
$$+ \varepsilon^2 b_m^{(2)} w_{m+2} = 0,\ m = \overline{1,+\infty}$$

где

$$a_m^{(2)} = 0.25c_m((\chi^2 - P_{m-1}^2)^2\mu^4 - \lambda), a_m^{(1)} = 0.5c_m(((\chi^2 - P_{m-1}^2)^2 + (\chi^2 - P_m^2)^2)\mu^4 - 2\lambda)$$

$$a_m^{(0)} = c_m((\chi^2 - P_m^2)^2\mu^4 - \lambda) + (1-\sigma^2)\chi^4 / R_0^2 + \lambda(\chi^2 - P_m^2)/R_0^2 + 2(1+\sigma)\chi^2\lambda/R_0^2 + 2\lambda^2/((1-\sigma)R_0^2) \tag{1.8}$$

$$b_m^{(1)} = 0.5c_m(((\chi^2 - P_m^2)^2 + (\chi^2 - P_{m+1}^2)^2)\mu^4 - 2\lambda)$$

$$b_m^{(2)} = 0.25 \cdot c_m((\chi^2 - P_{m+1}^2)^2\mu^4 - \lambda), \quad m = \overline{0,+\infty}$$

Чтобы система (1.7) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее бесконечный определитель (он является определителем типа Хилла) равнялся нулю

$$D(\chi^2, \varepsilon) = 0 \tag{1.9}$$

Уравнение (1.9) устанавливает функциональную зависимость: $\chi = \chi(R_0, \lambda, \sigma, m, \mu, \varepsilon)$. В явной форме эту зависимость можно установить следующим образом. Возьмем D из (1.9) при конечном n и приравняем к нулю:

$$D_{n+1}(\chi^2, \varepsilon) = 0 \tag{1.10}$$

Найдем χ_n –решение алгебраического уравнения (1.10). Точное решение получится из χ_n при $n \to +\infty$. Заметим, что при $n \geq 2$ определитель $D_{n+1}(\chi^2, \varepsilon)$ можно представить в виде

$$D_{n+1} = (a_n^{(0)} + \varepsilon^2(a_n^{(2)} + b_n^{(2)}))D_n - \varepsilon^2 a_n^{(1)} b_{n-1}^{(1)} D_{n-1} + O(\varepsilon^4) \tag{1.11}$$

Справедливы следующие утверждения:

1) При фиксированном μ, R_0, σ существует $m = m_0$ и $0 < \lambda_0 < 0.5(1-\sigma)P_{m_0}^2$, что при всех m и λ, удовлетворяющих неравенствам

$$m \geq m_0, \quad 0 < \lambda \leq \lambda_0 m^2 / m_0^2 \tag{1.12}$$

уравнение $a_m^{(0)} = 0$ имеет четыре χ-корня с отрицательными действительными частями.

2) При достаточно малом значении ε и при условиях (1.12) уравнение (1.9) имеет четыре χ^2 – формальные решения вида

$$(\chi_j)^2 = (\chi_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)}\varepsilon^2 + \beta_j^{(m)}\varepsilon^4 + \ldots, \quad j = \overline{1,4} \tag{1.13}$$

где $\chi_j^{(m)}$, $(j = \overline{1,4})$–корни уравнения $a_m^{(0)} = 0$ с отрицательными действительными частями, а

$$\alpha_j^{(m)} = (a_{m+1}^{(0)} b_m^{(1)} a_{m-1}^{(0)} + a_{m+1}^{(0)} a_m^{(1)} b_{m-1}^{(1)} - a_{m+1}^{(0)} a_{m-1}^{(0)} (a_m^{(2)} + b_m^{(2)})) / \left. /(a_{m+1}^{(0)} a_{m-1}^{(0)} a_m^{(0)'}) \right|_{\chi = \chi_j^{(m)}} \tag{1.14}$$

Здесь $a_m^{(0)'}$ – производные $a_m^{(0)}$ по χ^2.

Первое утверждение доказывается, исходя из критерия Гурвица. Второе утверждение доказывается аналогичным методом, как в [2], используя (1.11).

Пусть $(w_0^{(j)}, w_1^{(j)}, \ldots, w_m^{(j)}, \ldots)$, $(j = \overline{1,4})$ являются нетривиальными решениями системы (1.7) при $\chi = \chi_j$ $(j = \overline{1,4})$, которые определяются из (1.13) и имеют отрицательные действительные части.

Решение задачи (1.1), (1.4) представим в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^{4} u_i^{(j)}, \ i = 1,2; \ \ w = \sum_{j=1}^{4} w^{(j)} \tag{1.15}$$

где $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, w^{(j)})$, $j = \overline{1,4}$ –решения вида (1.5) системы (1.1) при $\chi = \chi_j$ $(j = \overline{1,4})$ соответственно. В дальнейшем ограничимся следующим приближением:

$$R^{-1}(\beta) \approx R_0^{-1}(1 + 0.5\varepsilon^2 - \varepsilon\cos(2\pi\beta / s) + 0.5\varepsilon^2\cos(4\pi\beta / s)) \tag{1.16}$$

которое не уменьшает общности обоснования дальнейших результатов. Подставляя (1.15) в (1.4), придем к системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{4} R_{1j}^{(0)} w_0^{(j)} + R_{1j}^{(1)} w_1^{(j)} = 0, \ \sum_{j=1}^{4} R_{2j}^{(0)} w_0^{(j)} = 0, \ \sum_{j=1}^{4} R_{4j}^{(0)} w_0^{(j)} + R_{4j}^{(1)} w_1^{(j)} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{4} \sum_{k=m-2}^{m+2} R_{1j}^{(k)} w_k^{(j)} = 0, \ \sum_{j=1}^{4} R_{2j}^{(m)} w_m^{(j)} = 0 \tag{1.17}$$

$$\sum_{j=1}^{4} \sum_{k=m-2}^{m+2} R_{3j}^{(k)} w_k^{(j)} = 0, \ \sum_{j=1}^{4} \sum_{k=m-2}^{m+2} R_{4j}^{(k)} w_k^{(j)} = 0, \ m = \overline{1,+\infty}$$

где

$$\begin{aligned}
&R_{1j}^{(0)} = 0.5\chi_j^2, \ \ R_{1j}^{(1)} = 0.5\varepsilon\chi_j^2, \ \ R_{2j}^{(0)} = 1, \\
&R_{1j}^{(m)} = \chi_j^2 - \sigma P_m^2 + (1 + \varepsilon^2/2)\sigma P_m R_0^{-2} B_m^{(j)} \\
&R_{2j}^{(m)} = \chi_j A_m^{(j)} + \sigma P_m B_m^{(j)} - \sigma \\
&R_{3j}^{(m)} = -P_m A_m^{(j)} + \chi_j B_m^{(j)} + 4\mu^4\chi_j((1 + \varepsilon^2/2)R_0^{-2} B_m^{(j)} - P_m) \\
&R_{4j}^{(m)} = \chi_j(\chi_j^2 - (2-\sigma)P_m^2 + (2-\sigma)(1 + \varepsilon^2/2)P_m R_0^{-2} B_m^{(j)}) \\
&A_m^{(j)} = A_m\big|_{\chi=\chi_j}, \ \ B_m^{(j)} = B_m\big|_{\chi=\chi_j}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

а значения остальных коэффициентов системы (1.17) для нашей цели не существенны, поэтому не приводим. Пусть $m \neq 0$. Обозначим

$$\eta^2 = 2\lambda / ((1-\sigma)P_m^2), \quad D^{(m)} = \left|R_{ij}^{(m)}\right|_{i,j=1}^{4} \tag{1.19}$$

Чтобы система (1.17) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее бесконечный определитель (он является определителем нормального типа) равнялся нулю

$$M = M(\eta, m, \sigma, \mu, R_0, \varepsilon) = 0 \tag{1.20}$$

Нули уравнения (1.20) относительно η ищем так, как поступили с уравнением (1.9). Раскроем определитель M из (1.20) при конечном $n = 4m + 3$. Легко заметить, что

$$M_{4m+3} = M_{4m-1} D^{(m)} + O(\varepsilon^2) \tag{1.21}$$

Пусть $\bar{S}(0,\eta_0)$ — замкнутый круг на комплексной η-плоскости, где $\eta_0^2 = 2\lambda_0/((1-\sigma)P_{m_0}^2)$. Так как в (1.21) левая часть и первое слагаемое правой части — регулярные функции на $\bar{S}(0,\eta_0)$, то можно утверждать, что О-член в (1.21) есть регулярная функция на $\bar{S}(0,\eta_0)$. Поэтому в силу теоремы Руше при достаточно малых ε функция M_{4m-1} обращается в нуль лишь в окрестности нулей уравнения $M_{4m-1}D^{(m)}=0$. Таким образом, мы заключаем, что приближенные значения безразмерной характеристики фазовой скорости η задачи (1.1), (1.4) надо искать среди корней уравнения

$$D^{(m)} = 0,\ m = \overline{m_0,+\infty} \tag{1.22}$$

Производя элементарные действия над столбцами определителя $D^{(m)}$, уравнения (1.22) можно привести к эквивалентным уравнениям

$$K\left|m_{ij}\right|_{i,j=1}^{4} = 0,\ m = \overline{m_0,+\infty} \tag{1.23}$$

где $m_{ij}(i,j=\overline{1,4})$ легко восстанавливаются, поэтому не приводим, а

$$K = (\chi_1-\chi_2)(\chi_1-\chi_3)(\chi_1-\chi_4)(\chi_2-\chi_3)(\chi_2-\chi_4)(\chi_3-\chi_4)/P_m \tag{1.24}$$

Заметим, что при двух значениях $0<\eta<\eta_0$ (или λ удовлетворяющих условию (1.12)) корни уравнения $a_m^{(0)}=0$ совпадают [3]. При $\varepsilon=0$ эти значения η не являются характеристиками фазовой скорости задачи (1.1), (1.4) [3]. Исходя из теоремы Руше, можем заключить, что при достаточно малом ε только η — корни уравнения

$$\left|m_{ij}\right|_{i,j=1}^{4} = 0,\quad m = \overline{m_0,+\infty} \tag{1.25}$$

являются приближенными значениями безразмерной характеристики фазовой скорости задачи (1.1), (1.4). Заметим, что уравнения (1.25) при $\varepsilon=0$ совпадают с уравнениями (1.23) из [3].

2. Преимущественно изгибные колебания. Пренебрегая тангенциальными силами инерции, система уравнений (1.1) принимает вид

$$\Delta\Delta u_1 = \sigma\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta^2},\quad \Delta\Delta u_2 = \frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3} + (2+\sigma)\frac{\partial^3 w}{\partial\beta\partial\alpha^2} \tag{2.1}$$

$$\mu^4\Delta\Delta R\Delta\Delta R w + (1-\sigma^2)\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} - \lambda\Delta\Delta R^2 w = 0$$

Периодическое решение системы (2.1) ищем в виде (1.5). Из первых двух уравнений (2.1) получим

$$u_m = \frac{\chi(\sigma\chi^2 + P_m^2)w_m}{(\chi^2 - P_m^2)^2},\quad v_m = -\frac{P_m((2+\sigma)\chi^2 - P_m^2)w_m}{(\chi^2 - P_m^2)^2} \tag{2.2}$$

Учитывая все согласованности в пункте 1, из третьего уравнения (2.1) получим бесконечную систему уравнений вида (1.7), в которой

$$a_m^{(2)} = 0.25(\chi^2 - P_m^2)^2(\mu^4(\chi^2 - P_{m-1}^2)^2 - \lambda)$$

$$a_m^{(1)} = 0.5(\chi^2 - P_m^2)^2(\mu^4((\chi^2 - P_{m-1}^2)^2 + (\chi^2 - P_m^2)^2) - 2\lambda)$$
$$a_m^{(0)} = \mu^4(\chi^2 - P_m^2)^4 + (1-\sigma^2)R_0^{-2}\chi^4 - \lambda(\chi^2 - P_m^2)^2$$
$$b_m^{(1)} = 0.5(\chi^2 - P_m^2)^2(\mu^4((\chi^2 - P_m^2)^2 + (\chi^2 - P_{m+1}^2)^2) - 2\lambda)$$
$$b_m^{(2)} = 0.25(\chi^2 - P_m^2)^2(\mu^4(\chi^2 - P_{m+1}^2)^2 - \lambda), \quad m = \overline{0,+\infty} \tag{2.3}$$

Справедливы следующие утверждения:

1) При фиксированном μ, R_0, σ, m для всех $\lambda(\eta)$, удовлетворяющих неравенству

$$0 < \lambda < P_m^4\mu^4 \ (0 < \eta^2 < 2P_m^2\mu^4/(1-\sigma)) \tag{2.4}$$

уравнение $a_m^{(0)} = 0$ имеет четыре $\chi_j^{(m)}$-корня с отрицательными действительными частями.

2) В условии (2.4) определитель системы (1.7) с учетом (2.3) имеет четыре формальных решения вида (1.13), в котором $\chi_j^{(m)}(j = \overline{1,4})$ – корни уравнения $a_m^{(0)} = 0$ с отрицательными действительными частями. $\alpha_j^{(m)}$ определяются формулой (1.14) с учетом того, что $a_k^{(j)}, b_k^{(j)}$ $(j = \overline{0,2}, i = 1,2, k = \overline{m-1, m+2})$ определяются формулами (2.3). Остальные рассуждения аналогичны общему случаю, только заметим, что здесь

$$A_m^{(j)} = \frac{\chi_j(\sigma\chi_j^2 + P_m^2)}{(\chi_j^2 - P_m^2)^2}, \ B_m^{(j)} = -\frac{P_m((2+\sigma)\chi_j^2 - P_m^2)}{(\chi_j^2 - P_m^2)^2} \tag{2.5}$$

и при решении дисперсионного уравнения (1.25) необходимо в формулах m_{ij}, $i, j = \overline{1,4}$ всюду приравнять $\eta = 0$.

3. **Преимущественно тангенциальные колебания.** Пренебрегая нормальной силой инерции, первые два уравнения системы (1.1) сохраняются, а в третьем уравнении исчезает только слагаемое: $\lambda\Gamma R^2 w$. Периодическое решение системы (1.1), с учетом изменений, ищем в виде (1.5). Тогда формулы (1.6) сохраняются, а в системе (1.7) коэффициенты принимают вид

$$a_m^{(2)} = 0.25\mu^4 c_m(\chi^2 - P_{m-1}^2)^2, \ a_m^{(1)} = 0.5\mu^4 c_m((\chi^2 - P_{m-1}^2)^2 + (\chi^2 - P_m^2)^2)$$
$$a_m^{(0)} = \mu^4 c_m(\chi^2 - P_m^2)^2 + (1-\sigma^2)R_0^{-2}\chi^4 + \lambda R_0^{-2}(\chi^2 - P_m^2) +$$
$$+ 2(1+\sigma)R_0^{-2}\chi^2\lambda + 2\lambda^2/(R_0^2(1-\sigma)) \tag{3.1}$$
$$b_m^{(1)} = 0.5\mu^4 c_m((\chi^2 - P_m^2)^2 + (\chi^2 - P_{m+1}^2)^2)$$
$$b_m^{(2)} = 0.25\mu^4 c_m(\chi^2 - P_{m+1}^2)^2, \quad m = \overline{0,+\infty}$$

с учетом (3.1) справедливы утверждения 1) и 2) из пункта 1. Остальные рассуждения аналогичны общему случаю. Здесь дисперсионные уравнения сохраняют свой вид.

В табл. 1, 2 и 3 приведены значения безразмерной характеристики фазовой скорости η в зависимости от m и ε при $\sigma = 1/3$, $\mu^4 = 1/4800$ соответственно для общего случая, преимущественно изгибных колебаний и преимущественно тангенциальных колебаний.

В качестве направляющей кривой служит улитка Паскаля:

$$\rho = 1 + \varepsilon\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 < \varepsilon < 1 \tag{3.2}$$

В численных расчетах вместо (1.13) используются приближенные формулы

$$\chi_j^2 \approx (\chi_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)}\varepsilon^2, j = \overline{1,4} \tag{3.3}$$

Анализ показывает, что в общем случае первые фазовые скорости соответствуют преимущественно изгибным (квазипоперечным) колебаниям.

Таблица 1

m	η		
	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1/10$	$\varepsilon = 1/5$
2	0.04461	0.04461	0.04417
3	0.07091	0.07073	0.07022
4	0.09669	0.09641	0.09570
5	0.12211	0.12179	0.12090
6	0.14741	0.14702	0.14595
7	0.17259	0.17215	0.17089
8	0.19774	0.19723	0.19577
9	0.22282	0.22222	0.22063
10	0.24788	0.24724	0.24544
11	0.27295	0.27221	0.27023
12	0.29782	0.29716	0.29500

Таблица 2

m	η		
	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1/10$	$\varepsilon = 1/5$
2	0.04989	0.04975	0.04940
3	0.07476	0.07457	0.07403
4	0.09965	0.09938	0.09866
5	0.12455	0.12421	0.12331
6	0.14946	0.14906	0.14798
7	0.17438	0.17392	0.17265
8	0.19931	0.19878	0.19736
9	0.22423	0.22364	0.22201
10	0.24916	0.24849	0.24669
11	0.27409	0.27336	0.27137
12	0.29902	0.29822	0.29605

Таблица 3

m	η		
	ε = 0	ε = 1 / 10	ε = 1 / 5
2	0.09950	0.09922	0.09851
3	0.22200	0.22156	0.21979
4	0.38695	0.38591	0.38324
5	0.57831	0.57693	0.57339
6	0.74408	0.74300	0.79010
7	0.83327	0.83268	0.83117
8	0.87314	0.87284	0.87204
9	0.89226	0.89208	0.89160
10	0.90236	0.90225	0.90197
11	0.90819	0.90812	0.90794
12	0.91173	0.91167	0.91156

Автор благодарит М. В. Белубекяна за обсуждение результатов статьи, а также А. В. Саакяна за помощь при расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Р.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в полубесконечной цилиндрической оболочке.-В сб.: Волновые задачи механики. Нижний Новгород, 1992, с. 87-93.
2. Гулгазарян Г.Р., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой некруговой цилиндрической оболочке. - Изв. НАН Армении, Механика, 1997, т.50, №1, с.27-33.
3 Белубекян М.В., Гулгазарян Г.Р., Саакян А.В. Волны типа Рэлея в полубесконечной круговой замкнутой цилиндрической оболочке. - Изв. НАН Армении, Механика, 1997, т.50, №3-4, с.49-55.
4. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. -М.: Наука, 1979. 383с.
5. Гулгазарян Г.Р. Приближенные частоты собственных колебаний некруговой цилиндрической оболочки. - Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т.49, №1, с.61-70.
6. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. -М.: Физматгиз., 1963, т.1, 342с.

Иститут механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
19.09.1996

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №2, 1999 Механика

УДК 539.3

К УЧЕТУ ПОПЕРЕЧНОГО ОБЖАТИЯ В ТОНКИХ ПЛАСТИНАХ

Мовсисян Л.А.

Լ.Ա.Մովսիսյան
Բարակ սալերում ընդլայնական սեղմման հաշվառման մասին

Ընդունելով տեղափոխության բաղադրիչների համար գծային մոտավորություն ըստ բարձրության կոորդինատի, ընդհանուր անիզոտրոպ նյութից բարակ սալի համար ստացված են հավասարումներ հարթ և ծռման դեֆորմացիաների համար:

L.A.Movsisian
About consideration transversal press in thin plate

В [1,2] было обнаружено интересное явление для анизотропных цилиндрических оболочек (имеется в виду, когда материал оболочки имеет лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельную ее срединной поверхности) - при осесимметричных нагрузках она претерпевает кручение и т.д. При классической постановке для пластин при цилиндрическом изгибе подобных явлений нет. По сути, уравнения изгиба (устойчивости, колебания) для ортотропных и анизотропных пластин не отличаются. Понятно, что для анизотропных пластин есть необходимость более уточненной модели. И на самом деле. Если для ортотропных пластин учет поперечных сдвигов в зависимости от величин упругих постоянных расчетные величины могут разниться по сравнению с ними же, но полученные по классической теории [3], то уже для анизотропных пластин приводит помимо этого и к качественным изменениям. Обычно при уточнении классической теории изгиба пластин (например, [3]) пренебрегают поперечным обжатием. Здесь делается попытка учета влияния этого фактора на НДС анизотропной пластинки и показывается, что она с представленной точностью влияет на продольную деформацию (плоская задача). В основу предлагаемой модели ставится единственное предположение - линейность перемещений по высоте пластинки.

§1. Во избежание длинных формул с самого начала излагается одномерная задача. Координатная система помещена в срединной плоскости пластинки: x – по длине, z – по высоте, по y пластинка простирается до бесконечности и при этом ничего не зависит от y.

Предполагается, что перемещения имеют вид:

$$
\begin{aligned}
u_x &= u(x,t) + \frac{2z}{h} u_1(x,t) \\
u_y &= v(x,t) + \frac{2z}{h} v_1(x,t) \qquad (1.1) \\
u_z &= w(x,t) + \frac{2z}{h} w_1(x,t)
\end{aligned}
$$

Закон Гука при условии $\varepsilon_y = 0$ будет [4]

$$\sigma_x = B_{11}\varepsilon_x + B_{13}\varepsilon_z + B_{16}\varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{yz} = B_{44}\varepsilon_{yz} + B_{45}\varepsilon_{xz} \qquad (1.2)$$

$$\sigma_z = B_{13}\varepsilon_x + B_{33}\varepsilon_z + B_{36}\varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{xz} = B_{45}\varepsilon_{yz} + B_{55}\varepsilon_{xz}$$

$$\sigma_{xy} = B_{16}\varepsilon_x + B_{36}\varepsilon_z + B_{66}\varepsilon_{xy}$$

Дальнейшая процедура – стандартная. Вычисляются компоненты деформации, а затем соотношение упругости: выражения для усилий и моментов. Здесь появляется необходимость двух новых величин –

$$M_{13} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} z dz, \quad T_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z dz \tag{1.3}$$

Приведенные уравнения уже выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T_1}{\partial x} + (X_1 - X_2) = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{h}{2}(X_1 + X_2) - N_1 = \rho \frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial T_{12}}{\partial x} + (Y_1 - Y_2) = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{h}{2}(Y_1 + Y_2) - N_2 = \rho \frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial N_1}{\partial x} + (Z_1 - Z_2) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_{13}}{\partial x} - T_3 + \frac{h}{2}(Z_1 + Z_2) = \rho \frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

или в перемещениях

$$\begin{aligned}
&B_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{26}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B_{13}\frac{2}{h}\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{h}(X_1 - X_2) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
&B_{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B_{36}\frac{2}{h}\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{h}(Y_1 - Y_2) = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\
&B_{55}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{6}{h}\left(B_{13}\frac{\partial u}{\partial x} + B_{36}\frac{\partial v}{\partial x} + B_{33}\frac{2}{h}w_1\right) = \rho \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}
&B_{45}\frac{2}{h}\frac{\partial v_1}{\partial x} + B_{55}\left(\frac{2}{h}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{h}(Z_1 - Z_2) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\\
&B_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + B_{16}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{6}{h}\left[B_{55}\left(\frac{2}{h}u_1 + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + B_{45}\frac{2}{h}v_1\right] + \frac{3}{h}(X_1 + X_2) = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\\
&B_{16}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + B_{66}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{6}{h}\left[B_{45}\left(\frac{2}{h}u_1 + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + B_{44}\frac{2}{h}v_1\right] + \frac{3}{h}(Y_1 + Y_2) = \rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Система (1.5) характеризует плоское состояние, а (1.6) - изгиб. Как видно из приведенных формул, учет поперечного обжатия в принятой точности влияет только на плоское напряженно-деформированное состояние. В то же время появляются новые статико-кинематические величины, в частности, при изгибе появляется кручение (v_1, M_{12}), перерезывающее усилие в сечениях $y = \text{const}$. Подобные явления наблюдаются и в плоской задаче.

Так как нас, в основном, интересует влияние поперечного обжатия на НДС пластинки, то преимущественно будем заниматься системой (1.5), к тому же, для исключения по возможности побочных факторов, будем изучать случай ортотропного материала.

Рассмотрим несколько тестообразных задач.

§2. Итак, уравнения продольных свободных колебаний ортотропной пластинки-полосы имеют вид

$$B_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B_{13}\frac{2}{h}\frac{\partial w_1}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$B_{55}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}-\frac{6}{h}\left(B_{13}\frac{\partial u}{\partial x}+B_{33}\frac{2}{h}w_1\right)=\rho\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

В классической постановке второго уравнения вовсе нет и в первом отсутствует член с $\dfrac{\partial w_1}{\partial x}$.

Если искать решение (2.1) в виде бегущих волн, то для относительной фазовой скорости $\left(\lambda=\omega/ck,\ c=\sqrt{B_{11}/\rho}\right.$ получится

$$\lambda^2=\frac{1}{2}\left\{1+\alpha_{55}+\frac{12}{k^2h^2}\alpha_3\pm\right.$$

$$\left.\pm\left[\left(1+\alpha_{55}+\frac{12}{k^2h^2}\alpha_{33}\right)^2-4\left\{\alpha_{55}+\frac{12}{k^2h^2}\left(\alpha_{33}-\alpha_{13}^2\right)\right\}\right]\right. \tag{2.2}$$

где $\alpha_{ij}=B_{ij}/B_{11}$

Как правило, скорость, возникающая вследствие w_1, больше, чем основная (в классическом случае равна единице). Анализ влияния различных α_{ij} на скорости показывает, что наибольшее значение на них влияет α_{33}. В табл. 1 приведены значения λ_i для некоторых значений α_{33} при $l=10h$; $kl=2\pi$, $\alpha_{13}=0{,}3$; $\alpha_{55}=0{,}5$.

Таблица 1

α_{33}	0,1	1	10	100
λ_1	3,372	10,03	31,63	∞
λ_2	0,3632	0,9537	0,9954	1

Как правило, учет поперечного обжатия приводит к уменьшению основной скорости ($\lambda=1$). В то же время, как видно из табл. 1, уже в поперечном направлении слабых материалов разница между величинами скоростей не такая уж разительная.

Представляет бессомненный интерес сравнения скоростей для продольных и изгибных движений. Уравнения изгибных движений для ортотропной пластинки будут

$$B_{55}\left(\frac{2}{h}\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2.3}$$

$$B_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{6}{h}B_{55}\left(\frac{2}{h}u_1+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

которые дают следующее дисперсионное уравнение:

$$\lambda^2=\frac{1}{2}\left\{1+\alpha_{55}\left(1+\frac{12}{k^2h^2}\right)\pm\left[\left(1-\alpha_{55}+\alpha_{55}\frac{12}{k^2h^2}\right)^2+\alpha_{55}\frac{48}{k^2h^2}\right]^{1/2}\right\} \quad (2.4)$$

Как влияет изменение α_{55} на скорость (частоту), можно посмотреть [3]. Здесь проведем лишь сравнение скоростей продольных и изгибных движений для изотропного материала ($B_{11}=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\alpha_{13}=\frac{\nu}{1-\nu}$, $\alpha_{33}=1$, $\alpha_{55}=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$, $\nu=0{,}3$).

Как видно из приведенной таблицы, большие скорости при продольном и изгибном движениях одного порядка, и вообще, характер изменения скоростей от h/l одинаковый. Следует отметить также, что если для тонких пластин скорости основных волн на порядок не отличаются, то уже для сравнительно больших h/l они одного порядка. Еще об одном. Часто при изучении изгибных колебаний вторым инерционным членом в (2.3) пренебрегают. Анализ показывает, что пренебрежение инерционными членами, как здесь так и $\partial^2 w_1/\partial t^2$ в (2.1), приводит к увеличению величин скоростей основных волн (частот).

Таблица 2

	0	1/25	1/20	1/15	1/10	1/5
Плоские	∞	13,80	11,05	8,299	5,556	2,843
волны	1	0,9033	0,9031	0,9027	0,9018	0,8981
Изгибные		7,453	6,001	4,562	3,153	1,836
волны	0	0,07171	0,08907	0,1172	0,1695	0,2911

§3. Теперь изучим задачу удара о полубесконечную полосу. При нулевых начальных условиях будем рассматривать два случая: в сечении $x=0$ мгновенно прикладывается продольное усилие -

$$T_1=B_{11}h\frac{\partial u}{\partial x}+2B_{13}w_1=-PH(t),\quad M_{13}=\frac{h^2}{6}B_{55}\frac{\partial w_1}{\partial x}=0 \quad (3.1)$$

и второй случай – прикладывается момент

$$T_1=0,\quad \frac{h^2}{6}B_{55}\frac{\partial w_1}{\partial x}=M \quad (3.2)$$

Система (2.1) с нулевыми начальными условиями и граничными условиями (3.1) или (3.2) решается операционным методом. В общем случае получить решения связаны с достаточно большими трудностями и здесь приведем лишь асимптотические формулы для больших и малых времен.

Для первой задачи при малых t усилие имеет вид

$$T_1 = -PH\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad c = \sqrt{B_{11}/\rho} \tag{3.3}$$

при больших

$$T_1 = -PH\left(t - \frac{x}{c'}\right), \quad c' = c\sqrt{\frac{B_{11}B_{33} - B_{13}}{B_{11}B_{33}}} \tag{3.4}$$

то есть для малых времен сжимающее усилие имеет вид классического решения, а для больших оно распространяется с меньшей скоростью.

Для второй задачи для малых времен имеем

$$T_1 = \frac{12M\alpha_{13}\sqrt{\alpha_{55}}}{h^2(1-\alpha_{55})}\left[H\left(t - \frac{x}{c}\right) + H\left(t - \frac{x}{c}\sqrt{\frac{B_{11}}{B_{55}}}\right)\right]\nu t \tag{3.5}$$

и

$$T_1 = \frac{12M(1-\alpha_{13})}{h^2\alpha_{55}P}e^{-px}, \quad p = \sqrt{\frac{12}{h^2}\frac{B_{11}B_{33} - B_{13}^2}{B_{11} - B_{55}}} \tag{3.6}$$

как и следовало ожидать, для больших времен по длине полосы усилие затухает.

§4. Здесь приведем решение простой задачи обычного растяжения полосы, когда один край неподвижен, а на другом конце задается некоторое перемещение –

$$u = w_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \tag{4.1}$$

$$u = u_0, \; w_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = l$$

Вот какие получаются выражения для продольного перемещения и усилия

$$u = \frac{C}{B_{11}}\left\{x - \frac{12\alpha_{13}^2}{h^2\alpha_{55}p^3}\left[\operatorname{sh}px - px + \frac{(1-\cos px)}{\operatorname{sh}pl}(1-\cos pl)\right]\right\} \tag{4.2}$$

$$T_1 = hC$$

$$C = u_0\frac{B_{11}}{l}\left\{1 - \frac{B_{13}^2}{(B_{11}B_{33} - B_{13}^2)pl}\left[pl + \operatorname{cth}pl(\operatorname{ch}pl - 2)\right]\right\}^{-1}$$

Напомним выражения этих величин при классической постановке

$$u = \frac{u_0 x}{l}, \quad T_1 = \frac{B_{11}h}{l}u_0$$

Фигурные скобки в выражении C больше единицы, и следовательно, полученное новое продольное усилие меньше, чем при классической постановке.

§5. В заключение рассмотрим задачу статической устойчивости полосы, при воздействии осевого сжатия: $T_1^0 = -P$ на концах полосы.

Параметрический член в этом случае имеет вид

$$Z_1 - Z_2 = -P\left(\frac{1}{h}\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{5.1}$$

Тогда из системы (1.6) после соответствующих процедур для свободно опертой полосы

$$x = 0,\ x = l,\ w = D_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} - D_{16}\frac{\partial v_1}{\partial x} = D_{16}\frac{\partial u_1}{\partial x} + D_{66}\frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \tag{5.2}$$

получим выражение критического усилия

$$P_{\text{кр}} = 2c_{44}\mu_m^2 \frac{\left(D_{11}D_{66} - D_{16}^2\right)\mu_m^2 + D_{11}c_{44}}{\left(D_{11}D_{66} - D_{16}^2\right)\mu_m^4 + c_{44}\left[\left(D_{11} + 2D_{66}\right)\mu_m^2 + 2c_{44}\right]} \tag{5.3}$$

$$D_{ij} = \frac{h^3}{12}B_{ij},\ c_{ij} = hB_{ij},\ \mu_m = \frac{m\pi}{l}$$

Как известно [5], при классической постановке критическое усилие достигает минимума при $m = 1$, а максимума - по углу поворота (направления упругости по отношению координатных линий) при максимуме B_{11} по φ.

Однако, как видно из (5.3), здесь это вовсе не очевидно и могут и не быть.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А. О некоторых специфических особенностях анизотропных оболочек. -Изв. АН АрмССР, сер. физ-мат. наук, 1958, т.XI, №4, с. 137-144.
2. Мовсисян Л.А. К расчету анизотропной (неортотропной) цилиндрической оболочки вращения. - Изв. АН АрмССР, сер. физ-мат. н., 1959, т.XII, №4, с.89-107.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. -М.: Наука, 1987. 360с.
4. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. -М.: ГИТТЛ, 1957. 463с.
5. Саркисян В.С., Мовсисян Л.А. Об одном способе определения критических нагрузок анизотропных пластинок. -Инж.ж., 1965, т.5, вып.4, с.777-783.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
12.03.1998

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №2, 1999 Механика

УДК 539.376

КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ГРАНЕЦЕНТРИРОВАННОГО КУБИЧЕСКОГО МОНОКРИСТАЛЛА

Симонян А.М.

Ա.Մ. Սիմոնյան

Նիստակենտրոնացված խորանարդային միաբյուրեղից պատրաստված բարակապատ էլեմենտների ոլորումը

Աշխատանքում դիտարկված են բարակապատ միաբյուրեղային էլեմենտների ոլորման հարցերը սահքի կոնցեպցիայի հիման վրա: Ստացված են հաշվարկային բանաձևերը և բյուրեղային առանցքների օպտիմալ կողմնորոշումը ամենամեծ ամրության պայմանից ելնելով: Ցույց է տրված, որ սահմանային ոլորող մոմենտը կարող է փոփոխվել $\sqrt{3}$ անգամ փակ պրոֆիլով էլեմենտների համար, կախված բյուրեղային առանցքների կողմնորոշվածությունից:

A.M. Simonyan

Torsion of thin-walled elements from side-centered cubic single crystal

В работе рассматриваются вопросы кручения тонкостенных монокристаллических элементов замкнутого и открытого профилей на основе концепции скольжения. Получены расчетные формулы и варианты оптимального ориентирования кристаллических осей из условия наибольшей прочности и жесткости. Показано, что предельный крутящий момент может изменяться для элементов замкнутого сечения в $\sqrt{3}$ раз в зависимости от ориентации кристаллических осей.

Как указывалось в работах [1-4], реологические деформации в монокристаллах имеют место в результате скольжения дислокаций лишь в двенадцати ситемах скольжения, ориентация которых связана с кристаллической структурой. В работе [5] рассмотрено оптимальное ориентирование кристаллических осей в случае одноосного напряжения, а также тонкостенных труб с днищами и без днищ при действии гидростатического давления.

Согласно [4], реологические соотношения записываются так:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{i,j}^{1,2}\left\{\Phi\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y + (-1)^i \tau_{yz} + (-1)^j \tau_{zx}}{\sqrt{6}}\right] + \right.$$

$$\left. + \Phi\left[\frac{\sigma_x - \sigma_z + (-1)^i \tau_{xy} + (-1)^j \tau_{yz}}{\sqrt{6}}\right]\right\}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{i,j}^{1,2}\left\{\Phi\left[\frac{\tau_{xy} + (-1)^i \tau_{zx} + (-1)^j (\sigma_y - \sigma_z)}{\sqrt{6}}\right] + \right.$$

$$+\Phi\left[\frac{\tau_{xy}+(-1)^{i}\tau_{yz}+(-1)^{j}(\sigma_x-\sigma_z)}{\sqrt{6}}\right]\Bigg\} \qquad (x,y,z) \qquad (1)$$

где суммирование производится по всем комбинациям i и j, при этом оси x,y и z соответствуют кристаллическим осям [001], [010] и [100]. Соотношения (1) имели многократные экспериментальные подтверждения при испытании алюминиевых монокристаллов [3].

При кручении тонкостенных стержней односвязного замкнутого профиля возникают касательные напряжения, определяемые по формуле [7]

$$\tau_{\xi\eta}=\frac{M_\eta}{2F\delta} \qquad (2)$$

где δ – толщина элемента, M_η – крутящий момент, F – площадь, ограниченная средней линией сечения.

Задача оптимизации заключается в выборе такой ориентации осей x,y и z относительно оси η, при которой наибольшее из касательных напряжений, соответственных 12 системам скольжения, приобретает минимальное значение.

Предположим, что направляющие косинусы оси x с осями ξ,η,ζ равны, соответственно, α_{11}, α_{21}, α_{31}, оси y с теми же осями – α_{12}, α_{22}, α_{32}, а оси z – α_{13}, α_{23}, α_{33}.

Касательные напряжения, соответствующие системам скольжения, определяются по формулам

$$\tau_1(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{6}}\left[2\alpha_{11}\alpha_{21}-2\alpha_{12}\alpha_{22}+(-1)^{i}(\alpha_{12}\alpha_{23}+\alpha_{22}\alpha_{13})+(-1)^{j}(\alpha_{13}\alpha_{21}+\alpha_{23}\alpha_{11})\right]$$

$$\tau_2(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{6}}\left[2\alpha_{12}\alpha_{22}-2\alpha_{13}\alpha_{23}+(-1)^{i}(\alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{21}\alpha_{12})+(-1)^{j}(\alpha_{13}\alpha_{21}+\alpha_{23}\alpha_{11})\right]$$

$$\tau_3(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{6}}\left[2\alpha_{13}\alpha_{23}-2\alpha_{11}\alpha_{21}+(-1)^{i}(\alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{21}\alpha_{12})+(-1)^{j}(\alpha_{12}\alpha_{23}+\alpha_{22}\alpha_{13})\right] \qquad (3)$$

Ниже рассмотрены случаи симметричного расположения продольной оси стержня относительно кристаллических осей, когда не имеет места скос поперечного сечения.

Положим, что ось η совпадает с осью z. При этом имеем $\alpha_{23}=1$, $\alpha_{13}=\alpha_{33}=\alpha_{21}=\alpha_{22}=0$, $\alpha_{11}=\alpha_{32}=\cos\beta$, $\alpha_{12}=-\alpha_{31}=\sin\beta$

где β – угол между осями x и ξ.

Касательные напряжения в системах скольжения имеют значения:

$$\tau_1(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{6}}\left[(-1)^{i}\sin\beta+(-1)^{j}\cos\beta\right]$$

$$\tau_2(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{6}}(-1)^j\cos\beta,\quad \tau_3(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{6}}(-1)^j\sin\beta \tag{4}$$

Отсюда легко видеть, что наибольшее касательное напряжение возникает в точках сечения, где касательная к контуру равно наклонена к кристаллическим осям x и y, то есть при $\sin\beta=\frac{\pi}{4}$, при этом расчетное максимальное напряжение τ_{max} определится так

$$\tau_{max}=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{3}} \tag{5}$$

Отметим, что, как показывает анализ, в случае линейно-упругого закона $\left(\Phi(x)=x/G\right)$ депланация поперечного сечения не имеет места $(u_\eta=0)$.

Рассмотрим случай, когда продольная ось стержня совпадает с осью [110]. Положим, что ось [001] перпендикулярна к продольной оси стержня η и повернута на угол β относительно оси ξ, а оси y и z составляют угол в 45^0 с осью η. В этом случае будем иметь $\alpha_{11}=\cos\beta$, $\alpha_{12}=-\alpha_{13}=-\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}$, $\alpha_{21}=0$, $\alpha_{22}=\alpha_{23}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha_{31}=-\sin\beta$, $\alpha_{32}=-\alpha_{33}=-\frac{\cos\beta}{\sqrt{2}}$.

Касательные напряжения, соответственные системам скольжения, определяются по формулам

$$\tau_1(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{6}}\left[\sin\beta+(-1)^j\frac{\cos\beta}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\tau_2(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{6}}\left[-2\sin\beta+(-1)^i\frac{\cos\beta}{\sqrt{2}}+(-1)^j\frac{\cos\beta}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\tau_3(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{\sqrt{6}}\left[\sin\beta+(-1)^i\frac{\cos\beta}{\sqrt{2}}\right] \tag{6}$$

Наибольшее абсолютное значение касательного напряжения достигается при $\beta=\pm\arcsin\sqrt{2/3}$, причем оно равно наибольшему значению касательного напряжения, возникающего в стержне вообще

$$\tau_{max}=\tau_{\xi\eta} \tag{7}$$

При использовании (1) можно показать, что депланация поперечного сечения здесь имеет место всегда, в том числе и при скольжении по линейному закону.

Рассмотрим случай, когда ось η совпадает с осью [111]. Принимая, кроме того, что ось x повернута на некоторый угол β относительно плоскости $\xi\eta$, получим следующие значения для коэффициентов α_{ij}

$$\alpha_{11}=\sqrt{2/3}\cos\beta,\quad \alpha_{21}=1/\sqrt{3},\quad \alpha_{31}=-\sqrt{2/3}\sin\beta$$

$$\alpha_{12}=-\sqrt{2/3}\sin(\beta+\pi/6),\quad \alpha_{22}=1/\sqrt{3},\quad \alpha_{32}=-\sqrt{2/3}\cos(\beta+\pi/6)$$

$$\alpha_{13}=\sqrt{2/3}\sin(\beta-\pi/6),\quad \alpha_{23}=1/\sqrt{3},\quad \alpha_{33}=\sqrt{2/3}\cos(\beta-\pi/6) \tag{8}$$

Касательные напряжения, соответствующие системам скольжения, определяются по формулам

$$\tau_1(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{3}\left[\sqrt{3}\cos\beta+\sin\beta+(-1)^i\frac{\cos\beta}{\sqrt{3}}+\frac{(-1)^j}{2}\left(\frac{\cos\beta}{\sqrt{3}}+\sin\beta\right)\right]$$

$$\tau_2(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{3}\left[-2\sin\beta+\frac{(-1)^i}{2}\left(\frac{\cos\beta}{\sqrt{3}}-\sin\beta\right)+\frac{(-1)^j}{2}\left(\frac{\cos\beta}{\sqrt{3}}+\sin\beta\right)\right].$$

$$\tau_3(i,j)=\frac{\tau_{\xi\eta}}{3}\left[\sin\beta-\sqrt{3}\cos\beta+\frac{(-1)^i}{2}\left(\frac{\cos\beta}{\sqrt{3}}-\sin\beta\right)-\frac{(-1)^j}{\sqrt{3}}\cos\beta\right] \tag{9}$$

Наибольшее касательное напряжение в системах скольжения достигается при $\beta=\pi/4$, при этом оно равно $\tau_{\xi\eta}$, как это имело место и при ориентации [110] вдоль оси η.

Анализ данных позволяет заключить, что наиболее благоприятной ориентацией продольной оси тонкостенного стержня замкнутого профиля при кручении является ориентация [100], при этом несущая способность стержня будет в $\sqrt{3}$ раз превосходить его несущую способность при наименее благоприятной ориентации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cottrell A.H. Dislocation and Plastic Flow in Crystals. Oxford. 1953.
2. Розенберг В.М. Ползучесть металлов. – М.: Металлургиздат. 1967.
3. Симонян А.М. Исследования ползучести алюминиевых монокристаллов. — Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1979, т. 32, №6, с.27-40.
4. Симонян А.М., Симонян Н.М. К вопросу о реологии монокристаллов. — Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1985, т. 38, №4, с.38-48.
5. Симонян А.М. К вопросу расчета и проектирования элементов конструкций из монокристалла. – Изв. НАН Армении, Механика, 1998, т. 51, №3, с.40-50.
6. Чалмерс Б. Физическое металловедение. — М.: Металлургиздат, 1963.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
21.01.1998

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №2, 1999 Механика

УДК 532.59.537.86

К ЗАДАЧЕ ТРАНСФОРМАЦИИ ПРИ ОТРАЖЕНИИ МАГНИТОУПРУГОЙ ВОЛНЫ

Петросян М.Р.

Մ.Ռ. Պետրոսյան
Անդրադարձված մագնիսաառաձգական ալիքի տրանսֆորմացիայի խնդրի մասին

Դիտարկվում են մագնիսաառաձգական նորմալ ալիքի կիսատարածության եզրից անդրադարձման երկու խնդիրներ: Ենթադրվում է, որ կիսատարածության եզրի վրա լարման թենզորի նորմալ և տեղափոխության շոշափող բաղադրիչները հավասար են զրոյի (Նավյեի պայման):

Առաջին դեպքում ընկնում է քվազիերկայնական իսկ երկրորդ դեպքում՝ քվազիլայնակսն ալիք: Երկու դեպքում էլ անդրադառնում են կապված քվազիերկայնական և քվազիլայնական ալիքներ:

Ստացված արդյունքները ցույց են տալիս, որ դիտարկված դեպքերի համար տեղի ունի նույն տրանսֆորմացիայի պայմանը , այսինքն՝ ընկնող մի տիպի ալիքի փոխակերպումը մյուսի: Թվային հաշվումները ցույց են տալիս, որ ալիքի տրանսֆորմացիա հնարավոր է բավականին ուժեղ մագնիսական դաշտերի առկայության դեպքում:

M.R. Petrosyan
The Problem of transformation of the reflected magnetoelastic waves

Рассматриваются две задачи отражения магнитоупругой нормальной волны от границы полупространства. Предполагается, что на границе полупространства нормальная компонента тензора напряжения и касательная составляющая перемещения равны нулю (условия Навье).

В первом случае падает квазипродольная, а во втором - квазипоперечная волна. В обоих случаях отражаются связанные квазипродольная и квазипоперечная волны.

Полученные результаты показывают, что для указанных двух случаев имеет место одно и то же условие трансформации, т.е. преобразование одного типа падающей волны в другую.

Численные вычисления показывают, что трансформация волн возможна при достаточно сильных магнитных полях.

1. Рассматривается полупространство из идеально проводящего материала, на плоскую границу которого падает нормальная волна при наличии постоянного магнитного поля. Пусть граница полупространства совпадает с плоскостью $x = 0$ и начальное магнитное поле имеет компоненты

$$H_{01} \neq 0, H_{02} \neq 0$$

$$\overline{H}_0 = H_{01}\hat{i} + H_{02}\hat{j}$$

Имеем уравнения движения задачи плоской деформации

$$\left(C_l^2+V_2^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-V_1V_2\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$\left(C_t^2+V_1^2\right)\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}-V_1V_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} \qquad (1.1)$$

где

$$V_k=\sqrt{\frac{\mu}{4\pi\rho}}H_{0k},\ k=1,2$$

$$C_l^2=\frac{\lambda+2G}{\rho},\ C_t^2=\frac{G}{\rho}$$

μ - магнитная проницаемость среды, λ и G - коэффициенты Ламе.

Система уравнений (1.1) определяет связанные квазипродольные и квазипоперечные волны.

Имеем также граничные условия Навье

$$\mathrm{v}=0,\ \sigma_{11}+t_{11}=0 \text{ при } x=0 \qquad (1.2)$$

В правой части (1.2) пренебрегается член $t_{11}^{(e)}$, где t_{11} - тензор напряжений Максвелла для полупространства, а $t_{11}^{(e)}$ - для вакуума.

На границе раздела $x=0$ падает нормальная квазипродольная волна, а отражаются квазипродольная и квазипоперечная волны. Квазипродольная падающая волна удовлетворяет общему решению (1.1) [1], откуда с учетом $B_1=0$ получается

$$u_n=A_1\exp i\omega\left(t-\frac{x}{q_1}\right),\ \mathrm{v}_n=-aA_1\exp i\omega\left(t-\frac{x}{q_1}\right) \qquad (1.3)$$

а решение для отраженной волны имеет вид

$$u_0=A_2\exp i\omega\left(t+\frac{x}{q_1}\right)-bB_2\exp i\omega\left(t+\frac{x}{q_2}\right)$$
$$\mathrm{v}_0=-aA_2\exp i\omega\left(t+\frac{x}{q_1}\right)+B_2\exp i\omega\left(t+\frac{x}{q_2}\right) \qquad (1.4)$$

Для второго случая, когда падает квазипоперечная волна, а отражаются квазипродольная и квазипоперечная волны, имеем (с учетом $A_1=0$)

$$u_n=-bB_1\exp i\omega\left(t-\frac{x}{q_2}\right),\ \mathrm{v}_n=B_1\exp i\omega\left(t-\frac{x}{q_2}\right) \qquad (1.5)$$

а решение для отраженной волны имеет вид, аналогичный (1.4), где

$$q_1=\sqrt{p+\sqrt{p^2-r}},\quad q_2=\sqrt{p-\sqrt{p^2-r}}$$

$$p=\frac{1}{2}\left(C_l^2+V_2^2+C_t^2+V_1^2\right),\ r=C_t^2C_l^2+V_1^2C_l^2+V_2^2C_t^2$$

$$a=\frac{V_1V_2}{q_1^2-C_t^2-V_1^2},\quad b=\frac{V_1V_2}{q_2^2-C_l^2-V_2^2}$$

Используя закон Гука для компонент тензора напряжений граничные условия при $x=0$ приведем к виду

$$\mathrm{v}=0,\quad \left(\lambda+2G+\frac{\mu}{4\pi}H_{02}^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\mu}{4\pi}H_{01}H_{02}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}=0 \tag{1.6}$$

Подставляя значения u и v из (1.3) и (1.4) в (1.6) и вводя обозначения

$$\frac{C_l^2+V_2^2+V_1V_2a}{q_1}\equiv M,\quad \frac{\left(C_l^2+V_2^2\right)b+V_1V_2}{q_2}\equiv N$$

для падающей квазипродольной волны получим систему алгебраических уравнений, откуда и найдем амплитуды отраженной волны A_2 и B_2 посредством заданной амплитуды падающей волны A_1

$$A_2=\frac{M+Na}{M-Na}A_1,\quad B_2=\frac{2aM}{M-Na}A_1$$

При $A_2=0$ получается условие трансформации квазипродольной волны в квазипоперечную

$$M+Na=0 \tag{1.7}$$

Аналогично первому случаю, для падающей квазипоперечной волны, подставляя значения u_n и v_n из (1.5), а u_0 и v_0 из (1.4) в (1.6), найдем A_2 и B_2 посредством заданной амплитуды падающей квазипоперечной волны B_1

$$A_2=-\frac{2N}{M-Na}B_1,\quad B_2=-\frac{M+Na}{M-Na}B_1$$

При $B_2=0$ получается то же условие трансформации (1.7) квазипоперечной волны в квазипродольную, что и в случае трансформации квазипродольной в квазипоперечную, т.е.

$$\frac{C_l^2+V_2^2+V_1V_2a}{q_1}+\frac{\left(C_l^2+V_2^2\right)b+V_1V_2}{q_2}a=0 \tag{1.8}$$

Для численных вычислений уравнение (1.8) приводится к следующему безразмерному виду:

$$2\left[(\alpha_3+\alpha_1)^2-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_2\alpha_3)\right]\sqrt{\frac{1}{4}(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_2\alpha_3)}+$$
$$+2\alpha_1\alpha_2\times\left(\frac{1}{2}(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+\sqrt{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_2\alpha_3}\right)+$$
$$+4(\alpha_3+\alpha_1)\left(\frac{1}{4}(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_2\alpha_3)\right)=0$$

где

$$\frac{V_1^2}{C_l^2}\equiv\alpha_1,\ \frac{V_2^2}{C_l^2}\equiv\alpha_2,\ \frac{C_t^2}{C_l^2}\equiv\alpha_3,\ 0<\alpha_3<0.5$$

Таблица 1

α_1	α_2	α_3
0.1	0.68	0
0.1	0.43	0.3
0.1	0.77	0.5

Таблица 2

α_1	α_2	α_3
0.1	0.43	0.3
0.01	0.31	0.3
0.001	0.30	0.3

В табл. 1 и 2 приведены значения α_1, α_2 и α_3. В табл. 1 приведены значения α_2 при постоянном α_1 и переменном α_3, а в табл. 2 – при постоянном α_3 и переменном α_1. Из табл. 1 и 2 видно, что только при существовании достаточно сильных полей выполняется вышеуказанная трансформация.

Надо отметить, что в задачах падения квазипродольной [1] и квазипоперечной волнах, когда на границе полупространства выполняется условие скользящего контакта, только при существовании более сильных магнитных полей, чем в случае Навье, выполняется условие трансформации.

2. Возвращаясь к вышесказанному предположению $t_{11}^{(e)}=0$, обсудим случай, когда в граничном условии (2) не пренебрегается член $t_{11}^{(e)}$.

Рассматриваются две среды, которые разделены плоскостью $x=0$. Одна из сред представляет собой полупространство из идеально проводящего материала $(x>0)$, а другая – вакуум $(x<0)$. Среды находятся в постоянном магнитном поле, компоненты которого $H_{01}=0$ и $H_{02}\neq 0$. На границу раздела падает нормальная одномерная продольная волна.

Уравнения задачи следующие:

$$\left(C_l^2+V_2^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\qquad x>0 \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 h_2^{(e)}}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h_2^{(e)}}{\partial t^2},\quad \frac{1}{c}\frac{\partial e_3^{(e)}}{\partial t}=\frac{\partial h_2^{(e)}}{\partial x}\qquad x<0 \tag{2.2}$$

где $h^{(e)}$ и $e^{(e)}$ – возмущения электромагнитного поля для вакуума.

На границе раздела $x=0$ должны выполняться условия

$$\sigma_{11}+t_{11}=t_{11}^{(e)},\quad e_3=e_3^{(e)},\quad x=0 \tag{2.3}$$

Падающая и отраженная волны в соответствии с решением уравнения (2.1) задаются в виде

$$u_n=A\exp i(\omega t-kx)\qquad k=\frac{\omega}{\sqrt{C_t^2+V_2^2}}$$

$$u_0=B\exp i(\omega t+kx)$$

Согласно (2.2) для прошедшей электромагнитной волны имеем

$$h_2^{(e)}=C\exp i(\omega t-k_1x)\qquad k_1=\frac{\omega}{c}$$

$$e_3^{(e)}=-C\exp i(\omega t-k_1x)$$

Подставляя решения в граничные условия (2.3), получим

$$B=\frac{1+\chi}{1-\chi}A,\quad C=-\frac{2i\omega H_{02}}{1-\chi}A$$

где

$$\chi=\frac{V_2^2}{c\sqrt{C_t^2+V_2^2}}$$

Таким образом, можно принять вышесделанное пренебрежение членом $t_{11}^{(e)}$ с точностью $\chi<<0.5$

Литература

1. Белубекян М.В. Введение в теорию магнитоупругости.- Ереван: ЕГУ, 1997. 36 с.
2. Новацкий В.М. Теория упругости. - М.: Мир, 1975. 872 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 22.12.1997

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №2, 1999 Механика

УДК 532.59

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИФРАКЦИЯ СЛАБОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ЖЕСТКОМ БАРЬЕРЕ В БЕРЕГОВОЙ ЗОНЕ

Безиргенян Г.С.

Գ.Ս.Բեզիրգենյան

Թույլ հարվածային ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ կարծր արգելքի վրա ափային գոտում

Օգտագործելով գծային դրվածքով լուծված դիֆրակցիոն խնդրի արդյունքները և հակադարձ մեթոդը, ստացված են միակողմանի ուղղված ոչ գծային բնութագրիչների ընտանիքի հավասարումը ընկնող և դիֆրակցիոն ալիքների շոշափման կետի շրջակայքում, որի հիման վրա վերականգնված է շարժման հավասարումների սիստեման: Գտնված է այդ սիստեմայի լուծումը և ցույց է տրված, որ նշված ալիքի ճակատի վրա տեղի ունեցող պայմանները ճշգրիտ բավարարվում են զրոյական մոտավորությունում: Ծանր ջրի համար հաշված է շարժման հավասարման մեջ մտնող ոչ գծային անդամի գործակիցը:

G.S.Bezirgenyan

Nonlinear diffraction of weak shake wave on the semi-infinite rigid obstacle in the sea-side zone

Используя результаты решенной линейной задачи и обратный метод, получено уравнение однонаправленного семейства нелинейных характеристик в окрестности точки касания падающей и дифракционной волн, на основании которого восстановлена нелинейная система уравнений движения. Показано, что условия на фронте слабой ударной волны удовлетворяются точно в нулевом приближении. Для мелкой воды вычислен коэффициент при нелинейном члене, входящем в уравнение движения, и показано, что он $(1+\lambda)$ равен 3/2, который хорошо известен.

§1. Описание задачи. Пусть в начальный момент $t=0$ слабая ударная волна, распространяющаяся по поверхности покоящейся весомой жидкости, сталкивается с волнорезом, имеющим острую кромку. Жидкость в декартовой системе координат (x, y, z) занимает область

$$-a^2 \le x \le \infty, \; -\infty < y < \infty, \; -h(x,y) \le z \le \zeta(t,x,y)$$

где плоскость $z=0$, $(x0y)$ совмещена с невозмущенной поверхностью жидкости, начало координат расположено на остром краю барьера, координатная ось $0z$ направлена вертикально вверх, a^2 - расстояние барьера от берега, а $h(x,y)$ - глубина воды в прибрежной зоне.

Задача изучается в локальной области, расположенной вблизи точки касания P дифракционной и распространяющейся волн. Отметим, что луч OP является предельным лучом, отделяющим дифракционную область (область "геометрической тени") от области, занятой распространяющейся волной ("освещенная" область).

Предполагается, что изучаемая нестационарная задача плоская.

Перейдем от декартовых координат x, y к лучевым координатам ϑ, τ. Координата $\vartheta = \vartheta(x,y)$ характеризует положение дифракционных лучей, излучаемых точкой O (ϑ от t не зависит, так как положение точки O фиксировано, то есть геометрическая картина лучей, исходящих из O, со временем не меняется). $\vartheta = \mathrm{const}$ вдоль лучей и отсчитывается от некоторого фиксированного направления, например, от касательной к барьеру в точке O.

Координата $\tau = \tau(t, x, y)$ характеризует время пробега от начальной точки O до текущей точки M в которой ищется решение, вдоль дифракционных лучей, $\tau = \tau_d(x, y)$ — время пробега дифракционной волны от начальной точки до текущего фронта, а t - время пробега от точки M до текущего фронта волны.

Если через K_1 обозначить кривизну кривой, образованной из пересечения обращенного характеристического коноида (с вершиной в точке M, расположенной вблизи точки P) с плоскостью $t = 0$ в пространстве t, x, y, а через K_2- кривизну начального фронта волны (фиг.1), то в силу узости (достаточно малой протяженности) области образованной из пересечения отмеченных кривых, можно принять, что $K_1 = K_1(t)$, $K_2 = \mathrm{const}$. (Узость отмеченной области следует из того, что при совпадении точки M с точкой P отмеченная область стягивается в точку).

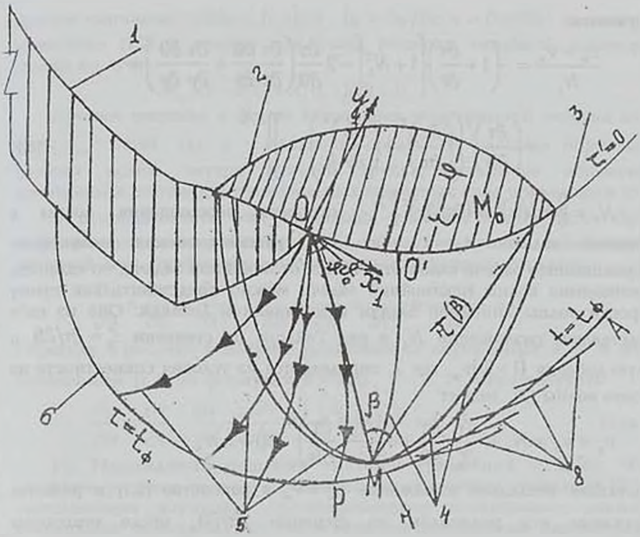
В работе [1] показано, что в окрестности точки O' (точка O' расположена вблизи точки O, так как M расположена вблизи P) имеет место приближенная формула $\varphi + \zeta \approx c_0(t - t_\phi) - \dfrac{1}{2}(K_1 - K_2)(x_1 - s)^2$, где c_0- скорость волны в точке O, t_ϕ- время пробега от начального фронта до текущей точки, находящейся вблизи распространяющейся волны, а координатная система x_1Oy_1 и расстояния φ, ζ, s показаны на фиг.1. Для достаточной малой окрестности точки O в приведенной формуле следует полагать φ, ζ и x_1, примерно равными нулям и с учетом, что $t = \tau_d$ (рассматривается дифракционная волна), а $s = -(\vartheta - \vartheta_0)/(K_1 - K_2)$ ([2] с.254, формула (5.5)), она примет вид для распространяющейся волны PA:

$$\tau = \frac{(\vartheta - \vartheta_0)^2}{2c_0(K_1 - K_2)} \tag{1.1}$$

Продифференцируя (1.1) по t, легко получить

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = -\frac{c_0}{2}\frac{d(K_1 - K_2)}{dt}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}\right)^2 \tag{1.2}$$

Следует отметить, что для произвольной гиперболической системы уравнений в [3] показано, что уравнение характеристик в лучевых координатах совпадает с уравнением (1.1), конкретизируя коэффициент при $(\partial\tau/\partial\vartheta)^2$.



Фиг. 1. Проекция пространственной геометрической картины в произвольный момент времени t_Φ на плоскость $t = t_\Phi$. 1- сечение полубесконечного барьера с острой кромкой, 2 - квазиокружность, 3 - начальный фронт падающей волны, 4 - бихарактеристики волнового уравнения, 5 - дифракционные лучи, 6 - фронт дифракционной волны, 7 - фронт распространяющей волны в момент $t = t_\Phi$, 8 - однонаправленное семейство нелинейных характеристик в освещенной области.

§2. Вывод системы эволюционных нелинейных уравнений движения в окрестности точки P. Скорость N перемещения фронта любой плоской волны $F(t,x,y)$ выражается формулой [4]

$$N = c_n + v_n = -\frac{\partial F/\partial t}{\sqrt{(\partial F/\partial x)^2 + (\partial F/\partial y)^2}}$$

где c_n - скорость распространения волны, а v_n - проекция скорости движения частиц на текущую нормаль волны.

Переходя в последней формуле от декартовых координат к лучевым координатам с учетом

$$\left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{x,y} = \left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{\tau} - \frac{\partial F}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial F}{\partial t}\Big/\frac{\partial F}{\partial \tau} = -\frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad \frac{\partial F}{\partial \vartheta}\Big/\frac{\partial F}{\partial \tau} = -\frac{\partial \tau}{\partial \vartheta},$$

получается

$$\frac{c_n+\mathrm{v}_n}{N_1}=-\left(1+\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)\left\{1+N_1^2\left[-2\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}\right)^2\left(\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)^2\right)^2\quad\right]\right\}^{-1/2} \tag{2.1}$$

где $N_1=\left[(\partial\tau/\partial x)^2+(\partial\tau/\partial y)^2\right]^{-1/2}$ - скорость перемещения волны в линейной задаче, $\tau_d=t$. Так как рассматриваемая нелинейная дифракционная задача слабо отличается от линейной задачи, то скорость перемещения волны нелинейной задачи можно представить как сумму скорости волны линейной задачи и нелинейной добавки. Она из себя представляет разложение N_1 в ряд Тейлора по степеням $\zeta=\partial\tau/\partial\vartheta$ и малую добавку $(1+\lambda)\mathrm{v}_n$, где λ определяется из условия совместности на фронте волны [3]. Значит

$$c_n+\mathrm{v}_n=N_1+\frac{\partial N_1}{\partial\zeta}\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}+\frac{\partial^2 N_1}{\partial\zeta^2}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}\right)^2+(1+\lambda)\mathrm{v}_n$$

Подставляя последнее выражение $c_n+\mathrm{v}_n$ в равенство (2.1) и разлагая выражение под радикалом по степеням $\partial\tau/\partial\vartheta$, после некоторых преобразований уравнение однонаправленного семейства характеристик нелинейной задачи можно представить в следующей форме:

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}+f\left(\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}\right)=\frac{1+\lambda}{N_1}\mathrm{v}_n \tag{2.2}$$

В случае линейной задачи правую часть равенства (2.2) следует отбросить, и она должна перейти в (1.2), то есть допускаем, что f имеет такой же вид, что и в случае линейной задачи. Следовательно,

$$f=\Gamma\left(\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}\right)^2,\ \text{где}\ \Gamma=\frac{c_0}{2}\frac{dK_1}{dt} \tag{2.3}$$

Следует отметить, что полученное уравнение (2.2), куда подставлено выражение f из (2.3), описывает однонаправленное семейство характеристик нелинейной задачи для произвольной среды в окрестности точки P.

Легко показать, что соответствующее дифференциальное уравнение, имеющее (2.2) в качестве семейства характеристик, записывается в следующей форме (где v_n обозначено через u)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial t}-\Gamma\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2}+\frac{1+\lambda}{N_1}u\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}-u\frac{\partial\ln A_\lambda}{\partial t}=0 \tag{2.4}$$

причем слагаемое $u\,\partial \ln A_\lambda(t,\tau)/\partial t$, $(u=\partial\psi/\partial\tau,\ v=\partial\psi/\partial\vartheta)$ не влияет на уравнение (2.2) и введено для учета решения линейной одномерной задачи по лучу

$$\partial u_\lambda/\partial t - u_\lambda \partial \ln A_\lambda(t,\tau)/\partial t = 0 .$$

Лучевое решение в форме сохранения возмущенной энергии волны ($\rho\sigma u_\lambda^2 c_{on} = \mathrm{const}$, где ρ - плотность среды, σ - площадь нормального сечения волны внутри лучевой трубки, остальные обозначения приведены в статье) для произвольных сплошных сред приведено в [5-7].

С использованием уже введенных величин: $u=\partial\psi/\partial\tau, v=\partial\psi/\partial\vartheta$ дифференциальное уравнение (2.4) можно заменить эквивалентной системой двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial\vartheta}=\frac{\partial v}{\partial\tau} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial t}-\Gamma\frac{\partial v}{\partial\vartheta}+\frac{1+\lambda}{N_1}u\frac{\partial u}{\partial\tau}-u\frac{\partial \ln A_\lambda}{\partial t}=0$$

Переходя в последней системе уравнений от переменных u, v к новым переменным μ, v по формулам $u=A_\lambda\mu$, $v=A_\lambda v$, легко получить

$$\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta}=\frac{\partial v}{\partial\tau},\quad \frac{\partial\mu}{\partial t}-\Gamma\frac{\partial v}{\partial\vartheta}+\frac{1+\lambda}{N_1}A_\lambda\mu\frac{\partial\mu}{\partial\tau}=0 \,^{*)} \qquad (2.5а\text{-}б)$$

§3. Нахождение решения системы уравнений (2.5а-б). Чтобы построить решение системы нелинейных эволюционных уравнений (2.5а-б), описывающих изучаемое однонаправленное возмущенное движение, необходимо: во-первых, выбрать в качестве независимых переменных μ и ϑ вместо τ и ϑ, причем искомыми функциями будут τ и v; во-вторых, использовать решение линейной задачи для скачкообразной волны, полученное в [1].

Итак, $\tau=\tau(t,\mu,\vartheta)$, $v=v(t,\mu,\vartheta)$. Следовательно,

$$\left.\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta}\right|_\mu=\left.\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta}\right|_\tau+\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}. \text{ Из } \left.\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta}\right|_\tau=0 \text{ следует } \frac{\partial\mu}{\partial\vartheta}=-\frac{\partial\tau/\partial\vartheta}{\partial\tau/\partial\mu}.$$

Но так как $\left.\frac{\partial v}{\partial\mu}\right|_\vartheta=\frac{\partial v}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\mu}$ или $\frac{\partial v}{\partial\tau}=\frac{\partial v/\partial\mu}{\partial\tau/\partial\mu}$, то на основании последних соотношений первое уравнение системы (2.5 а-б) можно переписать в следующей форме:

$$-\frac{\partial v}{\partial\mu}=\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta} \text{ или } \frac{\partial v_1}{\partial\mu_1}=\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta},$$

где $v_1=\sqrt{K_1-K_2}\,v$, $\mu_1=\sqrt{K_1-K_2}\,\mu$ (3.1)

Аналогичным образом можно показать справедливость следующих соотношений:

---

*) Здесь и в дальнейшем принимается $A_\lambda(t,\tau)\approx A_\lambda(t)$, так как текущая точка M находится вблизи P, и A_λ намного медленнее меняется по τ, чем u, v, что следует из линейного решения.

$$\left.\frac{\partial\mu}{\partial t}\right|_\tau = -\frac{\partial\tau/\partial t}{\partial\tau/\partial\mu}, \quad \left.\frac{\partial\nu}{\partial\vartheta}\right|_\tau = \left.\frac{\partial\nu}{\partial\vartheta}\right|_\mu - \frac{\partial\nu}{\partial\mu}\frac{\partial\tau/\partial\vartheta}{\partial\tau/\partial\mu}$$

Используя последние соотношения, второе уравнение системы (2.5 а-б) можно переписать в следующей форме:

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} + \Gamma\frac{\partial\nu}{\partial\vartheta}\frac{\partial\tau}{\partial\mu} - \Gamma\frac{\partial\nu}{\partial\mu}\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta} - \frac{1+\lambda}{N_1}A_\lambda\mu = 0$$

Но

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = \left.\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|_{\mu_1} + \frac{\partial\tau}{\partial\mu_1}\frac{\partial\mu_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial\mu_1}{\partial t} = \frac{1}{2(K_1-K_2)}\frac{\partial(K_1-K_2)}{\partial t}\mu_1$$

Таким образом, уравнение (2.5б), с учетом последних соотношений, окончательно примет вид:

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{1}{2(K_1-K_2)}\frac{\partial(K_1-K_2)}{\partial t}\mu_1\frac{\partial\tau}{\partial\mu_1} + \Gamma\frac{\partial\nu_1}{\partial\vartheta}\frac{\partial\tau}{\partial\mu_1} -$$

$$-\frac{\partial\nu_1}{\partial\mu_1}\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta} - \frac{1+\lambda}{N_1}\frac{A_\lambda}{\sqrt{K_1-K_2}}\mu_1 = 0 \qquad (3.2)$$

В линейной нестационарной задаче дифракции в случае скачкообразной волны показано [1], что возвышение свободной поверхности определяется формулой:

$$\eta = \frac{A}{\pi\sqrt{h_0}}\frac{1}{\sqrt{|\vec r_\beta'(P)|(K_1-K_2)}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2c_0(K_1-K_2)}\sqrt{t-\tau_d}}{\vartheta-\vartheta_0}$$

(Все обозначения взяты из работы [1], где τ заменен через τ_d, см. с.49, фор.(3.4)).

Последнюю формулу с учетом $u \approx \frac{c_0}{h_0}\eta$, а $A_\lambda = \frac{Ac_0}{h_0^{3/2}\sqrt{|\vec r_\beta'(P)|}}$ можно переписать в следующей форме:

$$\mu_1 = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2c_0(K_1-K_2)}\sqrt{-\tau}}{\vartheta-\vartheta_0}$$

Подставляя выражение μ_1 в уравнение (2.5а) и произведя интегрирование, получится

$$\nu_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{c_0}}\left[\sqrt{-\tau} - \frac{\vartheta-\vartheta_0}{\sqrt{2c_0(K_1-K_2)}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2c_0}\sqrt{K_1-K_2}\sqrt{-\tau}}{\vartheta-\vartheta_0}\right]$$

Из последних двух уравнений, исключив переменную τ, получится

$$\nu_1 = \frac{\vartheta-\vartheta_0}{\pi c_0\sqrt{K_1-K_2}}(\operatorname{tg}\pi\mu_1 - \pi\mu_1) \qquad (3.3)$$

Теперь, подставляя выражение ν_1 в уравнение (3.1) и произведя опять интегрирование, можно показать, что

$$\tau=-\frac{(\vartheta-\vartheta_0)^2}{2c_0(K_1-K_2)}\operatorname{tg}^2\pi\mu_1+\Phi(\mu_1,t) \tag{3.4}$$

где $\Phi(\mu_1,t)$ - произвольная функция интегрирования.

Подставляя (3.3)-(3.4) в уравнение (3.2), можно убедиться в том, что слагаемые, содержащие $(\vartheta-\vartheta_0)^2$, сокращаются, и для определения Φ получается следующее дифференциальное уравнение:

$$2\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{d(K_1-K_2)}{dt}\frac{\operatorname{tg}\pi\mu_1}{\pi(K_1-K_2)}\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_1}-2\frac{\lambda+1}{N_1}\frac{A_\lambda}{\sqrt{K_1-K_2}}\mu_1=0$$

Решение последнего дифференциального уравнения эквивалентно решению следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dt}{2}=\frac{d\mu_1}{d(K_1-K_2)/dt}\frac{\pi(K_1-K_2)}{\operatorname{tg}\pi\mu_1}=N_1\frac{\sqrt{K_1-K_2}}{A_\lambda\mu_1}\frac{d\Phi}{2(1+\lambda)}$$

Решив последнюю систему, получится

$$\sin\pi\mu_1=\sqrt{K_1-K_2}\,C\,,\quad \Phi=\int_0^t\frac{(1+\lambda)A_\lambda\mu_1}{N_1\sqrt{K_1-K_2}}dt+\psi(C)$$

Вблизи волны AP (фиг. 1) $\mu_1(K_1-K_2)^{-1/2}=f_1(\vartheta,\tau)$. Следовательно,

$$\Phi=\frac{\mu_1}{\sqrt{K_1-K_2}}\int_0^t\frac{(1+\lambda)A_\lambda}{N_1}dt+\psi\left(\frac{\sin\pi\mu_1}{\sqrt{K_1-K_2}}\right)$$

На основании найденного выражения для функции Φ, решение (3.4) запишется в форме

$$\tau=-\frac{(\vartheta-\vartheta_0)^2}{2c_0(K_1-K_2)}\operatorname{tg}^2\pi\mu_1+\frac{\mu_1}{\sqrt{K_1-K_2}}\int_0^t\frac{(1+\lambda)A_\lambda}{N_1}dt+\psi\left(\frac{\sin\pi\mu_1}{\sqrt{K_1-K_2}}\right)$$

Вдали от точки P решение одномерное по ϑ и записывается в форме [3]

$$\tau=-\frac{\pi(\vartheta-\vartheta_0)^2\mu_1^2}{2(K_1-K_2)c_0}+\frac{\mu_1}{\sqrt{K_1-K_2}}\int_0^t\frac{(1+\lambda)A_\lambda}{N_1}dt \tag{3.5}$$

Сравнивая решение (3.5) с асимптотическим решением при малых μ_1, согласно принципу сращивания асимптотических разложений [8], сразу можно убедиться, что $\psi\equiv 0$.

§4. Удовлетворение условий на ударной волне. Следует показать, что в окрестности точки P условия на ударной волне удовлетворяются точно в нулевом приближении.

Для этого сначала необходимо получить условия на ударной волне, использовав систему уравнений (2.5 а-б), в которых следует произвести замену переменного: $\xi=\tau-\tau(\vartheta,t)$, $\mu=\mu(\xi)$, $\nu=\nu(\xi)$ (ξ отсчитывается поперек ударной волны). Тогда система уравнений (2.5 а-б) примет вид:

$$-\mu'\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}=\nu', \quad -\mu'\frac{\partial\tau}{\partial t}+\Gamma\mu'\left(\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}\right)^2+\frac{1+\lambda}{N_1}\mu\mu'=0$$

На μ' нельзя сократить, так как μ' имеет скачок на ударной волне Интегрируя последнюю систему уравнений поперек ударной волны с учетом, что в рассматриваемом случае возмущения впереди ударной волны отсутствуют, получатся условия на ударной волне:

$$-\mu\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}=\nu, \quad \frac{\partial\tau}{\partial t}+\Gamma\left(\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}\right)^2-\frac{\lambda+1}{2N_1}A_\lambda\mu=0 \qquad (4.1а-б)$$

Для характеристик, расположенных в освещенной области, вместо τ необходимо ввести новую переменную $\delta=t-t_\Phi$ Так как для отмеченного семейства характеристик δ не зависит от ϑ, то уравнение (2.2) примет вид:

$$\frac{\partial\delta}{\partial t}=-\frac{1+\lambda}{N_1}u \qquad (\nu_n=u)$$

Следуя методу Уизема [9], линейное решение можно представить как $u=A_0\delta^\alpha$ $(\alpha=\text{const})$ и заменить δ на y_1. Тогда из последнего соотношения следует

$$\delta=-y_1^\alpha\int_0^t\frac{1+\lambda}{N_1}A_0dt+y_1 \qquad (4.2)$$

где $A_0=\dfrac{A_\lambda}{\sqrt{K_1-K_2}}$.

Согласно работе [9], скорость распространения слабой ударной волны есть среднее арифметическое скоростей распространения характеристик впереди и позади разрыва. Следовательно,

$$\frac{\partial\delta}{\partial t}=-\frac{1+\lambda}{2N_1}A_0y_1^\alpha$$

Продифференцируя (4.2) вдоль ударной волны, после некоторых вычислений с использованием последнего соотношения получится

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(y_1^{2\alpha}\int_0^t\frac{(1+\lambda)A_0}{N_1}dt\right)=y_1^\alpha\frac{dy_1}{dt}$$

Проинтегрировав последнее уравнение и подставляя полученное выражение y_1 в (4.2), получается уравнение ударной волны

$$\delta=\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^{\alpha/1-\alpha}\frac{\alpha-1}{2}\left(\int_0^t\frac{1+\lambda}{N_1}A_0dt\right)^{1/(1-\alpha)} \qquad (4.3)$$

В частном случае скачкообразной волны $\alpha=0$ и

$$\delta=-\frac{1}{2}\int_0^t\frac{1+\lambda}{N_1}A_0dt$$

Из решения (3.5), обозначая значение τ в точке P через τ_0 с учетом $\mu_1 = 1$ в этой же точке, следует

$$\tau_0 = \int_0^t \frac{1+\lambda}{N_1} A_0 dt \tag{4.4}$$

следовательно, $\delta = -\tau_0/2$. Поскольку решение на ударной волне одномерное, то последнее соотношение верно вдоль всей ударной волны. Поскольку $\delta = t - t_\Phi$, а $\tau = \tau_д - t$, то из соотношений (1.1) и (4.4) следует

$$\tau = \frac{\tau_0}{2} + \frac{(\vartheta - \vartheta_0)^2}{2c_0(K_1 - K_2)} \tag{4.5}$$

Отсюда в точке P $(\tau = \tau_0)$ следует

$$\vartheta - \vartheta_0 = \lambda_1 = -\sqrt{c_0(K_1 - K_2)\tau_0} \tag{4.6}$$

Отметим, что для дифракционной волны $\vartheta \geq \vartheta_0$, а для распространяющегося разрыва $\vartheta \leq \vartheta_0$ и поэтому перед радикалом взят знак " – ".

Из решения (3.3) в точке P следует

$$\nu_0 = -\frac{\vartheta - \vartheta_0}{c_0(K_1 - K_2)^{3/2}} \quad \text{или} \quad \nu_0 = \frac{\sqrt{\tau_0}}{\sqrt{c_0}(K_1 - K_2)} \tag{4.7}$$

Как следует из соотношений (4.5)-(4.6), условие (4.1а) на ударной волне в точке P тождественно удовлетворяется.

Докажем справедливость вышеприведенного второго утверждения, то есть условие (4.1б) на ударной волне в окрестности точки P удовлетворяется в нулевом приближении. С этой целью разложим величины $\vartheta - \vartheta_0$, τ, μ и ν в степенные ряды по ς в окрестности точки P:

$$\vartheta - \vartheta_0 = \lambda_1 + \varsigma,\ \tau = \tau_0 + \tau_1\varsigma + \tau_2\varsigma^2,\ \mu_1 = \mu_0 + \mu^1\varsigma,\ \nu_1 = \nu_0 + \nu^1\varsigma \quad \text{(4.8а-г)}$$

где $\varsigma = \varsigma(\vartheta, t)$- малый параметр, а τ_1, τ_2, μ^1, ν^1 зависят только от t.

Подставляя (4.8 б-г) в систему уравнений (4.1а-б), с учетом соотношения (4.8а), легко получить

$$-(\mu_0 + \mu^1\varsigma)(\tau_1 + 2\tau_2\varsigma) = \nu_0 + \nu^1\varsigma,$$

$$\tau_0 + \tau_1'\varsigma + \tau_2'\varsigma^2 - \lambda_1(\tau_1 + 2\tau_2\varsigma) + \Gamma(\tau_1 + 2\tau_2\varsigma)^2 - \frac{1+\lambda}{2N_1} A_\lambda(\mu_0 + \mu^1\varsigma) = 0$$

Из последних соотношений следует, что в нулевом приближении имеют место равенства:

$$-\mu_0\tau_1 = \nu_0,\ \tau_0' - \lambda_1'\tau_1 + \Gamma\tau_1^2 - \frac{1+\lambda}{2N_1} A_\lambda \mu_0 = 0 \tag{4.9а,б}$$

Согласно (4.4), $\tau_0' = [(1+\lambda)/N_1]A_0$. Из соотношений (4.9а), (4.7) и (4.6), с учетом $\mu_0 = (K_1 - K_2)^{-1/2}$ следует $\tau_1 = \dfrac{\lambda_1}{c_0(K_1 - K_2)}$. Продифференцировав соотношение (4.6) по t, можно получить

$$\lambda_1' = -\frac{1}{2}\sqrt{c_0\tau_0(K_1 - K_2)}\left(\frac{1+\lambda}{N_1}\frac{A_\lambda}{\sqrt{K_1 - K_2}}\frac{1}{\tau_0} + \frac{K_1'}{K_1 - K_2}\right)$$

Подставив выражения: τ_0', λ_1', τ_1, Γ, A_0, μ_0 в уравнение (4.9б), легко убедиться, что оно превращается в тождество.

§5. Определение коэффициента λ в случае мелкой воды.

Для прибрежной зоны с переменной глубиной $z = -h(x,y)$ уравнения нестационарного движения идеальной несжимаемой жидкости с применением гипотезы "мелкой воды" запишутся в следующей форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (5.1а\text{-}б)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (h+\eta)u}{\partial x} + \frac{\partial (h+\eta)v}{\partial y} = 0 \qquad (5.2)$$

где η - возвышение свободной поверхности.

Для получения значения λ следует вычислить скорость волны в нелинейной задаче. С этой целью в уравнениях (5.1а-б)-(5.2) производится замена производных на фронте волны согласно работе [3] по формулам:

$\dfrac{\partial}{\partial t} \to -(c_n + v_n)\delta$, $\dfrac{\partial}{\partial x} \to n_x\delta$, $\dfrac{\partial}{\partial y} \to n_y\delta$, где $c_n + v_n$ - нормальная скорость волны, n_x, n_y - компоненты единичного вектора нормали к волне, а δ - производная по нормали волны. Переходя в уравнениях (5.1а-б)-(5.2) к указанным заменам, можно получить: $c_n\delta u = gn_x\delta\eta$, $c_n\delta v = gn_y\delta\eta$, $c_n\delta\eta - (h+\eta)\delta v_n = 0$. Умножив первое уравнение на n_x, а второе - на n_y, с учетом $n_x^2 + n_y^2 = 0$, легко получить $c_n\delta v_n = g\delta\eta$. Подстановка выражения δv_n из последнего равенства в условие $c_n\delta\eta - (h+\eta)\delta v_n = 0$ дает $c_n^2 - g(h+\eta) = 0$. Представив c_n в форме $c_{0n} + \bar{c}_n$, где $\bar{c}_n$ мало, и подставив в последнее соотношение, соответственно, в нулевом и первом приближении, получается: $c_{0n} = \sqrt{gh}$, $2\sqrt{gh}\bar{c}_n = g\eta$. Положив $\bar{c}_n = \lambda\bar{v}_n$, с использованием соотношения $v_n = (g/c_{0n})\eta$, можно получить $\bar{c}_n = 1/2\, v_n$. Следовательно, $\lambda = 1/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Безиргенян Г.С. Решение дифракционной задачи вблизи касания дифракционной и падающей гравитационной волн в линейной постановке. -Изв. АН РА. Механика, 1994, т.47, №3-4, с. 37-53.
2. Бабич В.М. Распространение нестационарных волн и каустики. - Уч. записки ЛГУ. Динамические задачи теории упругости. 1958, №246, вып.32, с.228-259.
3. Багдоев А.Г. Распространение волн в сплошных средах. -Ереван: Изд. АН АрмССР, 1981. 307с.
4. Кочин Н.Е. и др. Теоретическая гидромеханика. Ч. II. -М.: Физматлит., 1960. 727с.
5. Минасян М.М. Распространение слабых ударных волн в неоднородных движущихся средах. -Уч. записки ЕГУ. Естественные науки. 1975, №1, с.55-64.
6. Минасян М.М. О распространении слабых возмущений в магнитной газодинамике. - Докл. АН АрмССР, 1972, т.55, №5, с.273-280.
7. Geffrey A., Tanuaiti T. Nonlinear wave propagation. New York, London-Toronto - 1964 -369p
8. Zahalak G. and Myers M.K. //Conical flow near singular rays. Journal of fluid mechanics. -1974. -Vol.63, p.537-561
9. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. -М.: Мир, 1977. 622с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
02.12.1997

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №2, 1999 Механика

УДК 62.50

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ПРИ ФИКСИРОВАННЫХ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ФАЗОВЫХ СОСТОЯНИЯХ

Барсéгян В. Р.

Վ.Ռ. Բարսեղյան
Գծային համակարգերի օպտիմալ ղեկավարումը ֆիքսած միջանկյալ ֆազային վիճակներով

Ուսումնասիրված է գծային հավասարումներով նկարագրվող օբյեկտների օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը ժամանակի միջանկյալ պահերին դրված ֆազային սահմանափակումներով, երբ որակի հայտանիշը տրված է ժամանակի ամբողջ միջակայքի վրա:

V.R. Barseghyan
Optimal control of linear systems under fixed intermediate phase states

Исследована задача оптимального управления линейными объектами, движения которых проходят через заранее фиксированные точки или множества фазового пространства, при заданном критерии качества на всем промежутке времени.

1.Пусть движение управляемого объекта описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t) \tag{1.1}$$

где $x(t)$ – n-мерный фазовый вектор, $A(t)$ – $(n \times n)$, $B(t)$ – $(n \times r)$-мерные матрицы, элементы которых – измеримые ограниченные функции при $t_0 \le t \le T$ (t_0 и T -заданные моменты времени), $u(t)$ – r-мерный вектор-столбец управляющих воздействий, компоненты которой считаются измеримыми ограниченными функциями, $f(t)$ – n-мерный вектор-столбец внешних воздействий (может быть измеримой ограниченной функцией).

Заданы начальное

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

и конечное

$$x(T) = x_T \tag{1.3}$$

значения фазового вектора управляемого объекта.

Предположим, что в некоторые фиксированные моменты времени

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T$$

заданы значения фазового вектора

$$x(t_k) = a_k \quad (k = 1,...,m) \tag{1.4}$$

Для $x(t)$ решения системы (1.1) условия (1.4) являются фазовыми ограничениями. Вообще для ряда практических задач (при управлении манипуляционными роботами, летательными аппаратами и т. д.) можно предположить, что фазовая точка $x(t_k)$ принадлежит некоторому компактному множеству $X_k \subset R^n$, т.е.

$$x(t_k) \in X_k \qquad (k = 1,...,m) \tag{1.5}$$

Пусть на промежутке времени $[t_0, T]$ задан критерий качества $\aleph[u]$, который может иметь смысл нормы некоторого нормированного пространства.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(t)$, $t \in [t_0, T]$, переводящее систему (1.1) из состояния $x(t_0)$ через промежуточные состояния (1.4) в конечное состояние $x(T)$ и имеющее наименьшее возможное значение критерия качества $\aleph[u^0] = \aleph[t_0, t_1, ..., t_m, T]$

Как известно [1,2], для данных краевых условий $x(t_0)$, $x(T)$ и промежутка времени $[t_0, T]$ для системы (1.1) выводится понятие вполне управляемости. Это понятие при фиксированных моментах времени с фазовыми ограничениями (1.5) (или фазовыми состояниями (1.4)) сформулируем следующим образом.

Определение. Система (1.1) называется вполне управляемой на отрезке времени $[t_0, T]$ при фиксированных моментах времени $t_0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = T$, если возможно найти управление $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, переводящее систему (1.1) из начального состояния (1.2) через промежуточные состояния (1.4) в конечное состояние (1.3), каковыми бы ни были условия (1.2)-(1.4).

Иначе говоря, вполне управляемая на отрезке времени $[t_0, T]$ при фиксированных моментах $t_0 < t_1 < ... < t_m < T$ система – это система, которая может быть переведена за время $T - t_0$ из любого начального состояния $x(t_0)$ через любые промежуточные состояния (1.4) (или через точки из X_k), в любое другое заданное состояние $x(T)$ подходящим выбором возможного управления $u(t)$.

2. Для исследования поставленной задачи напишем решение уравнения (1.1) следующим образом:

$$x(t) = X[t, t_0]x[t_0] + \int_{t_0}^{t} X[t, \tau]B(\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} X[t, \tau]f(\tau)d\tau \tag{2.1}$$

где через $X(t,\tau)$ обозначена нормированная фундаментальная матрица решения однородной части уравнения (1.1). Учитывая, что в заданные моменты времени t_k $(k=1,...,m+1)$ должны выполняться условия (1.3), из (1.4) получим следующие интегральные соотношения для определения неизвестной вектор-функции $u(t)$:

$$\int_{t_0}^{t_k} H[t_k,\tau]u(\tau)d\tau = c(t_0,t_k) \tag{2.2}$$

где $H[t_k,\tau]=X[t_k,\tau]B(\tau)$ – импульсная переходная матрица системы (1.1) размерности $(n\times r)$, элементы которой – известные измеримые ограниченные функции на промежутках времени $t_0\le\tau\le t_k$ $(k=1,...,m+1)$, а

$$c(t_0,t_k)=x(t_k)-X[t_k,t_0]x(t_0)-\int_{t_0}^{t_k} X[t_k,\tau]f(\tau)d\tau$$

известные векторы.

Для того, чтобы возможно было левую часть системы (2.2) рассматривать как линейную операцию, порожденную функцией $u(\tau)$ на отрезке $[t_0,T]$, целесообразно вместо $H[t_k,\tau]$ ввести функции $H_k[\tau]$ следующим образом:

$$H_k[\tau]=\begin{cases} H[t_k,\tau] \text{ при } t_0\le\tau\le t_k \\ 0 \quad \text{ при } t_k<\tau\le t_{m+1}=T \quad (k=1,...,m+1) \end{cases} \tag{2.3}$$

Соотношения (2.2) при помощи функции $H_k[\tau]$ (2.3) запишутся так:

$$\int_{t_0}^{T} H_k(\tau)u(\tau)d\tau = c(t_0,t_k) \quad (k=1,...,m+1) \tag{2.4}$$

При заданном критерии качества $\aleph[u]$ задачу оптимального управления с интегральными условиями (2.4) можно рассматривать как изопереметрическую задачу из вариационного исчисления, где надлежит определить минимум функционала $\aleph[u]$ при условиях (2.4). Однако, как видно из (2.3), подынтегральные функции в (2.4) являются разрывными, поэтому классические теоремы вариационного исчисления неприменимы.

Если функционал $\aleph[u]$ является нормой некоторого линейного нормированного пространства, то решение поставленной задачи, следуя [1], будем искать с помощью проблемы моментов.

При фазовом ограничении (1.5) для решения задачи 1 будем предполагать, что точки $x(t_k)$ зафиксированы, следовательно, управление $u^0(t)$ будет зависеть от выбранных точек $x(t_k)$. Значение функционала также будет зависеть от выбранных точек $x(t_k)$. Далее

[3,4] надлежит найти такие точки из множества X_k, для которых функционал $\aleph$ принимает минимальное значение, т. е.

$$\aleph[t_0, t_1, \cdots, t_m, T] = \min_{x(t_k)\in X_k} \aleph[x(t_1, \cdots, x(t_m))]$$

Учитывая следующее свойство фундаментальной матрицы

$$X[t_k, t_0] = X[t_k, t_{k-1}]X[t_{k-1}, t_0]$$

а также, что в заданные моменты времени t_k $(k = 1, \ldots, m+1)$ должны выполняться условия (1.3), (1.4), из формулы (2.1) будем иметь

$$x(t_k) = X[t_k, t_{k-1}]\left(X[t_{k-1}, t_0]x(t_0) + \int_{t_0}^{t_{k-1}} X[t_{k-1}, \tau]B(\tau)u(\tau)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t_{k-1}} X[t_{k-1}, \tau]f(\tau)d\tau \right) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} X[t_k, \tau]B(\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_{k-1}}^{t_k} X[t_k, \tau]f(\tau)d\tau$$

или

$$x(t_k) = X[t_k, t_{k-1}]x(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} X[t_k, \tau]B(\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_{k-1}}^{t_k} X[t_k, \tau]f(\tau)d\tau \qquad (2.5)$$

Из (2.5) имеем следующие отличные от (2.2) интегральные соотношения:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} H[t_k, \tau]u(\tau)d\tau = c(t_{k-1}, t_k) \qquad (2.6)$$

где

$$c(t_{k-1}, t_k) = x(t_k) - X[t_k, t_{k-1}]x(t_{k-1}) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} X[t_k, \tau]f(\tau)d\tau \quad (k = 1, \ldots, m+1) \qquad (2.7)$$

известные векторы.

С другой стороны, из свойства интегралов и вышеупомянутого свойства фундаментальной матрицы получим

$$\int_{t_0}^{t_k} X[t_k, \tau]B(\tau)u(\tau)d\tau = \sum_{i=1}^{k} X[t_k, t_i]\int_{t_{i-1}}^{t_i} X[t_i, \tau]B(\tau)u(\tau)d\tau$$

или с учетом (2.6) имеем

$$\int_{t_0}^{t_k} X[t_k, \tau]B(\tau)u(\tau)d\tau = \sum_{i=1}^{k} X[t_k, t_i]c(t_{i-1}, t_i)$$

Для системы (2.6) можно ввести следующие функции:

$$\overline{H}_k[\tau] = \begin{cases} 0 & \text{при } t_0 \le \tau \le t_{k-1} \\ H[t_k, \tau] & \text{при } t_{k-1} \le \tau \le t_k \\ 0 & \text{при } t_k < \tau \le t_{m+1} = T \quad (k = 1, \ldots, m+1) \end{cases} \qquad (2.8)$$

Соотношения (2.6) при помощи функции $\overline{H}_k[\tau]$ запишутся так:

$$\int_{t_0}^{T} \overline{H}_k[\tau]u(\tau)d\tau = c(t_{k-1}, t_k) \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{2.9}$$

Введем следующую блочную матрицу:

$$H[\tau] = \begin{pmatrix} \overline{H}_1[\tau] 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 \; \overline{H}_2[\tau] \cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \; 0 \cdots\cdots \overline{H}_{m+1}[\tau] \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

с размерностью $n(m+1) \times r(m+1)$. Тогда интегральные условия (2.9) при помощи матрицы (2.10) можно представить в виде

$$\int_{t_0}^{T} H_k[\tau]U(\tau)d\tau = C(t_0, \cdots, t_{m+1}) \tag{2.11}$$

где вектор $U(\tau)$ – $r(m+1)$-мерный, $C(t_0, \cdots, t_{m+1})$ - $n(m+1)$-мерные блочные вектор-столбцы с блоками векторов $u(\tau)$ и $c(t_{k-1}, t_k)$ соответственно.

Можно сформулировать следующее утверждение о вполне управляемости системы (1.1) на отрезке $[t_0, T]$ при фиксированных моментах времени $t_0 < t_1 < \ldots < t_m < T$, справедливость которой следует из вида матрицы $H(\tau)$ (2.10) и аналогичного утверждения [1,2] для вполне управляемости на отрезке времени $[t_0, T]$.

Для того, чтобы система, описываемая уравнением (1.1), была вполне управляемой на отрезке $[t_0, T]$ при фиксированных моментах времени $t_0 < t_1 < \ldots < t_m < T$, необходимо и достаточно, чтобы столбцы матрицы функции $H[\tau]$ были линейно независимы.

Отметим, что для линейных стационарных систем

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

условие Калмана о вполне управляемости в вышеприведенном смысле остается неизменным.

Рассмотрим следующие отдельные задачи оптимального управления для системы (1.1) и критерии качества $\aleph[u]$.

Задача 2. Требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(t)$, $t \in [t_0, T]$, переводящее систему (1.1) из состояния (1.2) в состояние (1.3) и имеющее наименьшее возможное значение критерия качества $\aleph[u^0] \equiv \aleph[t_0, T]$.

Задача 3. Требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(t)$, переводящее систему (1.1) из состояния $x(t_{k-1})$ в состояние $x(t_k)$

$(k=1,\dots,m+1)$ и имеющее возможное значение критерия качества $\aleph[u^0]=\aleph[t_{k-1},t_k]$ $(k=1,\dots,m+1)$.

Для минимальных значений критериев качеств задач 1, 2 и 3 справедливы следующие свойства.

Минимальные значения критериев качеств задач 1, 2 и 3 удовлетворяют условиям

$$\aleph[t_0,T]\le\aleph[t_0,t_1,\cdots,t_m,T]\le\sum_{k=1}^{m+1}\aleph[t_{k-1},t_k] \tag{2.12}$$

Заметим, что не обязательно, чтобы выбранный функционал $\aleph[u]$ имел смысл нормы. Предполагается только, что для $\aleph[u]$ существует решение этих трех задач.

3. Рассмотрим ситуации, когда в моменты времени t_k $(k=1,\dots,m+1)$ заданы только части фазовых координат вектора $x(t_k)$:

$$x_{i_1}(t_k),\cdots,x_{i_k}(t_k),\quad (i_k\le n,k=1,\cdots,m+1) \tag{3.1}$$

а остальные координаты в промежуточные моменты времени и в конце движения могут принимать любые значения. Это означает, что заданы множества промежуточных и конечных состояний системы (1.1). Эти множества являются гиперплоскостью в фазовом пространстве $\{x_1,\dots,x_n\}$, определяемые системой уравнений

$$x_{i_j}=x_{i_j}(t_k),\quad (j=1,\cdots,k,\ \ k=1,\cdots,m+1) \tag{3.2}$$

Следовательно, будем считать, что заданы некоторые многообразия $Q(x(t_k))$, $(k=1,\dots,m+1)$ промежуточных и конечных состояний $x(t_k)$, $(k=1,\dots,m+1)$ фазового вектора $x(t)$.

В этом случае задача об оптимальном управлении системой (1.1) сформулируется следующим образом.

Задача 4. Требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(t)$, $t\in[t_0,T]$, переводящее систему (1.1) из состояния $x(t_0)$ через какие-нибудь точки $x(t_k)=a_k$ в какую-нибудь точку $x(t_{m+1})=a_m$ из заданных многообразий $Q(x(t_k))$, $(k=1,\dots,m+1)$ и имеющее при этом наименьшее возможное значение критерия качества $\aleph^0[t_0,t_1,\cdots,t_m,T]$.

В этой задаче надо найти из каждого многообразия $Q(x(t_k))$ по одной точке $x(t_k)$ и управление $u^0(t)$, $t\in[t_0,T]$, переводящее систему (1.1) из состояния $x(t_0)$, через промежуточные состояния $x(t_k)$, $(k=1,\dots,m)$ в конечное состояние $x(T)=x(t_{m+1})$ таким образом, чтобы значение функционала $\aleph[u^0]$ оказалось наименьшим возможным.

Пусть сначала точки $x(t_k)$ из $Q(x(t_k))$, $(k=1,\dots,m+1)$ как-нибудь выбраны и временно зафиксированы. Тогда получим задачу 1, решение которой определяется по вышеизложенной схеме. В соответствии с изложенным решением задачи 1 управление $u^0(t)$, $t \in [t_0, T]$ будет зависеть от выбранных точек $x(t_k)$, $(k = 1,\dots,m+1)$, т. е.

$$u^0(t) \equiv u^0(t_0, t; x(t_k) : k = 1,\cdots,m+1).$$

Следовательно, значение функционала для управления $u^0(t_0, t, \; x(t_k) : \; k = 1,\cdots,m+1)$, решающую задачу 1, определяется так:

$$\aleph[u^0(t_0, t; \; x(t_k): \; k = 1,\cdots,m+1)] \equiv \aleph[x(t_1),\cdots,x(t_{m+1})]$$

Отсюда следует, что необходимо найти такие точки $x(t_k)$ из $Q(x(t_k))$, $(k = 1,\dots,m+1)$, для которых величина $\aleph[x(t_1),\cdots,x(t_{m+1})]$ достигает минимума. Такие векторы обозначим символом $x^0(t_k)$, $(k = 1,\dots,m+1)$.

В ситуациях, которые типичны в приложениях, эти векторы существуют, ибо существование минимума является следствием замкнутости множеств $Q(x(t_k))$ и непрерывной зависимости $\aleph[x(t_1),\cdots,x(t_{m+1})]$ от $x(t_1),\cdots,x(t_{m+1})$.

Итак, для решения задачи 4 надлежит найти векторы $x^0(t_k)$ из многообразий $Q(x(t_k))$, $(k = 1,\dots,m+1)$, для которых

$$\aleph^0[t_0, t_1, \cdots, t_m, T] = \min_{x(t_k)} \aleph[x(t_1),\cdots,x(t_{m+1})]$$

при всех $x(t_k) \in Q(x(t_k))$, $(k = 1,\dots,m+1)$

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением.- М.: Наука, 1968.
2. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. - М.: Наука, 1972.
3. Габриелян М.С. Об управлении линейным уравнением высокого порядка в смысле Штурма-Лиувилля. - Уч. записки ЕГУ, вып. 3, 1973.
4. Барсегян В.Р., Сардарян А.Г. Оптимальное управление двухзвенного манипулятора при фиксированных промежуточных состояниях. Вопросы оптимального управления устойчивости и прочности механических систем. - Сб. науч. труд., Ереван, 1997.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 25.05.1998

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №2, 1999 Механика

УДК 62.50, 531.8

ОПТИМАЛЬНОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВУХЗВЕННОГО ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО МАНИПУЛЯТОРА

Габриелян М.С., Гукасян А.А., Саркисян Н.П.

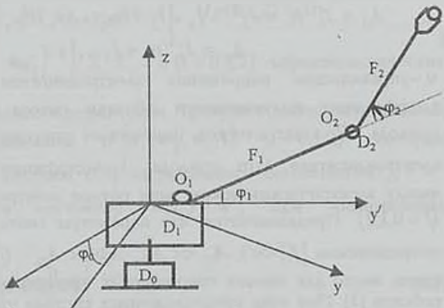
Մ.Ս.Գաբրիելյան, Ա.Ա.Ղուկասյան, Ն.Պ.Սարգսյան
Երկօղակ էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի ստոխաստիկ օպտիմալ ղեկավարում

Ուսումնասիրված է երկօղակ էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի ստոխաստիկ օպտիմալ ղեկավարման գծային խնդիրը:Որոշված է ստոխաստիկ օպտիմալ ղեկավարման անալիտիկ տեսքը և տրված է ժամանակի ֆիկսած պահին համակարգի իրական վիճակի ֆազային գնահատականը:

M.S. Gabrielyan, A.A. Ghukasyan, N.P.Sarkisyan
Optimum Stocha[illegible] Control of Doublelink Electromechanical Manipulator

Исследована задача оптимального стохастического управления движением линейной модели двухзвенного электромеханического манипулятора. Получено стохастическое оптимальное управление системой и дана оценка фазового состояния

1.Математическая модель манипулятора. Рассматривается двухзвенный манипулятор типичной конструкции [1], состоящий из неподвижной платформы и механической руки со схватом (фиг.1) Рука представляет собой два абсолютно твердых тела, соединенных шарниром O_2. Свободный конец первого звена связан посредством шарнира O_1 с платформой, а на конце второго звена расположен схват с грузом. Шарниры O_1, O_2 — идеальные цилиндрические, их оси горизонтальны и параллельны друг другу. Управление движением манипулятора осуществляется при помощи электромеханических приводов D_0, D_1, D_2, каждый из которых содержит линейный



Фиг. 1

электродвигатель постоянного тока с независимыми возбуждениями и редуктор [2]. Привод D_0 управляет поворотом платформы, а приводы D_1 и D_2 – соответственно, поворотом первого звена руки относительно платформы и второго звена относительно первого. Для описания движения манипулятора введем две прямоугольные системы координат $Oxyz$ и $Ox'y'z$ с общим началом O и осью Oz, совпадающей с осью вращения платформы. Система координат $Oxyz$ неподвижная, а $Ox'y'z$ жестко связана с платформой (плоскость $Oy'z$ совпадает с плоскостью руки манипулятора).

Введем обозначения: φ_0 – угол поворота системы $Ox'y'z$ относительно $Oxyz$ (угол поворота платформы), φ_1 – угол между первым звеном и осью Oy' (угол поворота первого звена руки относительно платформы), φ_2 – угол между звеньями манипулятора. Подробные описания расчетной модели и уравнения движения манипулятора приведены в [3]. Движение манипулятора в рамках принятой модели описывается системой уравнений Лагранжа и уравнений баланса напряжений в цепях роторов электродвигателей, которые после перехода к безразмерным переменным имеют вид [3]:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\varphi}_0 + f_0(\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi}) = \mu_0 \\
&\ddot{\varphi}_1 + A_{12}\ddot{\varphi}_2 / A_{11} + f_1(\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi}) = \mu_1 \\
&\ddot{\varphi}_2 + A_{12}\ddot{\varphi}_1 / A_{22} + f_2(\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi}) = \mu_2 \\
&L_i\dot{\mu}_i + R_i\mu_i + k_i\dot{\varphi}_i = u_i \quad (i = 0,1,2)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где $f_i(\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi})$ – нелинейные члены соответствующих уравнений, μ_i – момент электромагнитных сил, приложенных к ротору электродвигателя i-го привода относительно оси его вращения;

$$A_{11} = J_1^{(1)}n_1^2 + J_1^{(2)} + I_1 + I_2 + (m_2 + M_2)L_2^2; \quad A_{22} = J_1^{(2)}n_2^2 + I_2;$$
$$A_{12} = J_1^{(2)}n_2 + I_2$$

u_i – управляющее напряжение электродвигателя i-го привода. L_i – коэффициент индуктивности обмотки ротора электродвигателя i-го привода. R_i – электрическое (омическое) сопротивление обмотки ротора электродвигателя i-го привода, k_i – коэффициент пропорциональности между электрическим током цепи ротора электродвигателя i-го привода $(i = 0,1,2)$. Предполагается, что параметры системы (1.1) удовлетворяют соотношениям $|f_i| << 1$, $A_{12} << A_{11}$, $A_{12} << A_{22}$ $(i = 0,1,2)$, которые могут иметь место для многих современных промышленных манипуляционных роботов [2]. При этих предположениях система уравнений (1.1) в нулевом приближении распадается на три несвязанные системы третьего порядка

$$\dot{w}^i = A^i w^i + B^i u^i \quad (i = 0,1,2) \tag{1.2}$$

$$A^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_2^i & -a_1^i \end{pmatrix},\quad B^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3^i \end{pmatrix},\quad w^i = \begin{pmatrix} w_1^i \\ w_2^i \\ w_3^i \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

$$a_1^i = R_i / L_i,\ a_2^i = k_i / L_i,\ a_3^i = 1/L_i,\ w_1^i = \varphi_i,\ w_2^i = \dot{\varphi}_i,\ w_3^i = \ddot{\varphi}_i\ (i = 0,1,2) \tag{1.4}$$

Решение систем (1.2) представим по формуле Коши

$$w^i(t) = W^i\left[t - t_0\right]w^{i0} + \int_{t_0}^{t} W^i\left[t - \tau\right]B^i u^i(\tau)d\tau \tag{1.5}$$

где $W^i[t - t_0]$-фундаментальная матрица решений однородной системы (1.2); w^{i0}-начальное значение вектора $w^i(t)$. Элементы $w_{kj}^i[t - t_0]$-фундаментальной матрицы $W^i[t - t_0]$ $(i = 0,1,2)$ имеют следующий вид:

$$w_{11}^i = 1,\ w_{21}^i = w_{31}^i = 0$$

$$w_{12}^i = \frac{\left(\lambda_2^i - \lambda_1^i\right)^{-1}}{\lambda_1^i \lambda_2^i}\left[(\lambda_1^i)^2(1 - e^{\lambda_2^i(t-t_0)}) - (\lambda_2^i)^2(1 - e^{\lambda_1^i(t-t_0)})\right]$$

$$w_{13}^i = \frac{\left(\lambda_2^i - \lambda_1^i\right)^{-1}}{\lambda_1^i \lambda_2^i}\left[\lambda_2^i(1 - e^{\lambda_1^i(t-t_0)}) - \lambda_1^i(1 - e^{\lambda_2^i(t-t_0)})\right]$$

$$w_{22}^i = \left(\lambda_2^i - \lambda_1^i\right)^{-1}\left[\lambda_2^i(1 - e^{\lambda_1^i(t-t_0)}) - \lambda_1^i(1 - e^{\lambda_2^i(t-t_0)})\right]$$

$$w_{23}^i = \left(\lambda_2^i - \lambda_1^i\right)^{-1}\left[(1 + e^{\lambda_2^i(t-t_0)}) - (1 + e^{\lambda_1^i(t-t_0)})\right]$$

$$w_{32}^i = -\lambda_1^i \lambda_2^i w_{23}^i$$

$$w_{33}^i = \left(\lambda_2^i - \lambda_1^i\right)^{-1}\left[\lambda_2^i e^{\lambda_2^i(t-t_0)} - \lambda_1^i e^{\lambda_1^i(t-t_0)}\right] \quad (i = 0,1,2)$$

где $\lambda_{1,2}^i = \left\{-a_1^i + \left[(a_1^i)^2 - 4a_2^i\right]^{1/2}\right\}/2,\ \lambda_3^i = 0\ (i = 0,1,2)$ -характеристические числа уравнений (1.2).

2. Задача оптимального управления. Требуется найти оптимальный закон изменения управлений $u^i\left(w_1^i, w_2^i, w_3^i, t\right)$ $(i = 0,1,2)$, которые обеспечивают переход системы (1.1) из начального состояния $w(t_0) = w^0$ в заданное конечное состояние $w(t_1) = w^1$, при минимизации функционала

$$J^i\left[u^i, t_0, t_1\right] = \left[\int_{t_0}^{t_1}\left[u^i(\tau)\right]^2 d\tau\right]^{1/2} \tag{2.1}$$

Решая поставленную задачу с помощью проблемы моментов [4], получим

$$u^{i0}(t,t_1-t_0)=k^i(t_1-t_0)\frac{\sum_{j=1}^{3}\Delta^i_j(t_1-t_0)h^i_j(t-t_0)}{\sum_{k,s=1}^{3}\alpha^i_{ks}(t_1-t_0)\Delta^i_k(t_1-t_0)\Delta^i_s(t_1-t_0)} \qquad (2.2)$$

где

$$h^i_1(t-t_0)=a^i_3w^i_{13}(t-t_0),\quad h^i_2(t-t_0)=a^i_3w^i_{23}(t-t_0)$$

$$h^i_3(t-t_0)=a^i_3w^i_{33}(t-t_0)$$

$$c^i_j(t_1-t_0)=w^i_j(t_1)-\sum_{k=1}^{3}W^i_{jk}[t_1-t_0]w^i_k(t_0)$$

$$\Delta^i_j(t_1-t_0)=\sum_{\nu=1}^{3}\beta^i_{j\nu}(t_1-t_0)c^i_\nu(t_1-t_0) \qquad (2.3)$$

$$k^i(t_1-t_0)=\sum_{\nu,\mu=1}^{3}c^i_\nu(t_1-t_0)c^i_\mu(t_1-t_0)\beta^i_{\nu\mu}(t_1-t_0)$$

$$\beta^i_{\nu\mu}(t_1-t_0)=\beta^i_{\mu\nu}(t_1-t_0),\quad (\nu,\mu=1,2,3)$$

$$\alpha^i_{\nu\mu}(t_1-t_0)=\int_{t_0}^{t_1}h^i_\nu(t_1-t_0)h^i_\mu(t_1-t_0)d\tau$$

Здесь коэффициенты $\beta_{\nu\mu}(t_1-t_0)$ суть алгебраические дополнения элементов симметричной матрицы $\{\alpha^i_{\nu\mu}(t_1-t_0)\}^3_{\nu,\mu=1}$. Решение системы (1.1) при $u^0(t,t_1-t_0)$ (2.2) назовем программным движением системы (или поводыря).

3. **Построение стохастической модели.** Предположим, что в каждый фиксированный момент времени τ_j на узлах разбиения положение системы измеряется с ошибкой. Следовательно, источником случайных событий являются ошибки измерений. При этом предполагается, что результатом неточного измерения являются равномерно распределенные на отрезке [0, 1] случайные величины ξ^i_j, которые считаются равновероятными. Случайные величины $\omega^i_j=\{\xi^i_0,..\xi^i_j\}$, $\xi^i_j\in[0,1)$, являются элементарными событиями вероятностного пространства $\{\Omega^i_j,B^i_j,P^i_j\}$, где Ω^i_j – единичный куб в $(j+1)$-мерном пространстве $\{\xi^i_0,\xi^i_1,..\xi^i_j\}$, $B^i_j=B^i_\Omega$-борелевская σ-алгебра для этого куба, $P^i_j=P^i_j(B)-(j)$-мерная лебегова мера на этом кубе [5]. Таким образом, можно предполагать, что стохастическое управление $u^i(t,\omega)$ имеет вид

$$u^i(t,\omega^i) = u^i[t,\xi_0^i,\xi_1^i,\dots,\xi_j^i] \tag{3.1}$$

где функции $u^i(t,\omega^i) = u^i[t,\xi_0^i,\xi_1^i,\dots,\xi_j^i]$ должны быть измеримыми по совокупности аргументов $\{t,\xi_0^i,\xi_1^i,\dots,\xi_j^i\}$ на $(j+2)$-мерном множестве $[\tau_j,\tau_{j+1})\times\Omega|_{[\xi_0,\dots,\xi_j]}$ по отношению к σ-алгебре $(i=0,1,2)$ [5]. Величины воздействий $u^i(t,\omega^i)$ (3.1) при $t\in[\tau_j,\tau_{j+1})$ не зависят от будущих значений $\{\xi_{j+1}^i,\dots,\xi_k^i\}$. Пусть $t_0=\tau_0<\tau_1<\dots<\tau_j<\tau_{j+1}<\dots<\tau_k=t_1$, $(\delta_j=\tau_{j+1}-\tau_j)$ (где k-любое число) является разбиением отрезка $[t_0,t_1]$. Движение стохастической системы описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{x}^i = A^i x^i + B^i u^i(t,\omega^i) \tag{3.2}$$

Рассмотрим интервал времени $[\tau_{\nu-1},\tau_\nu)$ $(\nu=1,2,\dots,k)$. Измеряя состояния системы в момент времени $\tau_{\nu-1}$ с ошибкой, имеем позицию $x^i(\tau_{\nu-1},\xi_{\nu-1}^i)$. Требуется привести систему (3.2) из положения $x^i(\tau_{\nu-1},\xi_{\nu-1}^i)$ в заранее определенное положение $w(\tau_\nu)$. При помощи проблемы моментов [4] определим оптимальное управление, переводящее систему (3.2) из положения $x^i(\tau_{\nu-1},\xi_{\nu-1}^i)$ в положение $w(\tau_\nu)$ с минимизацией функционала

$$J^i(u^i,\tau_{\nu-1},\tau_\nu) = \left[\int_{\tau_{\nu-1}}^{\tau_\nu}(u_\nu^i)^2(\tau)d\tau\right]^{1/2}$$

Для оптимального управляющего воздействия получим следующее выражение:

$$u_\nu^{i0}(t,\tau_\nu,\tau_{\nu-1},\xi_{\nu-1}^i) = \frac{k^i(\tau_\nu-\tau_{\nu-1},\xi_{\nu-1}^i)\sum\limits_{j=1}^{3}\Delta_j^i(\tau_\nu-\tau_{\nu-1},\xi_{\nu-1}^i)h_j^i(t-\tau_{\nu-1})}{\sum\limits_{j,s=1}^{3}\alpha_{ks}^i(\tau_\nu-\tau_{\nu-1})\Delta_k^i(\tau_\nu-\tau_{\nu-1},\xi_{\nu-1}^i)\Delta_s^i(\tau_\nu-\tau_{\nu-1},\xi_{\nu-1}^i)} \tag{3.5}$$

величины α_{ks}^i, Δ_k^i, h_j^i определяются по формулам (2.3), если заменить t_1 на τ_ν, t_0 на $\tau_{\nu-1}$, $w^i(t_0)$ на $x^i(\tau_{\nu-1},\xi_{\nu-1}^i)$.

4. Оценка расстояния реального (стохастического) движения от поводыря. Для коррекции движения системы необходимо в каждый момент времени иметь мажорирующую оценку реального (стохастического) движения $(t,x(t,\omega))$, построенного в виде ломаных Эйлера, от заранее построенного поводыря (предполагается, что начальные положения поводыря и системы совпадают).

Для этого оценим следующую величину:

$$\rho'(t,\omega')=\left\|x'(t,\omega')-w'(t,)\right\|=\left[\sum_{k=1}^{3}\left[x'_k(t,\omega')-w'_k(t)\right]^2\right]^{1/2} \tag{4.1}$$

При $t\in[\tau_{k-1},\tau_k)$ имеем

$$x'(\tau_k,\xi'_0,\dots,\xi'_{k-1})=W'[\tau_k-\tau_{k-1}]x'(\tau_{k-1},\xi'_0,\dots,\xi'_{k-2})+$$

$$+\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}W'[\tau_k-\tau]B'u'^0_k(\tau,\xi'_{k-1})d\tau=$$

$$=W'[\tau_k-\tau_{k-1}]\{W'[\tau_{k-1}-\tau_{k-2}]x'(\tau_{k-2},\xi'_0,\dots,\xi'_{k-3})+$$

$$+\int_{\tau_{k-2}}^{\tau_{k-1}}W'[\tau_{k-1}-\tau]B'u'^0_{k-1}(\tau,\xi'_{k-2})d\tau\ \}+$$

$$+\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}W'[\tau_k-\tau]B'u'^0_k(\tau,\xi'_{k-1})d\tau \tag{4.2}$$

$$w'(\tau_k)=W'[\tau_k-\tau_{k-1}]w'(\tau_{k-1})+\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}W'[\tau_k-\tau]B'u'^0(\tau)d\tau=$$

$$=W'[\tau_k-\tau_{k-1}]\{W'[\tau_{k-1}-\tau_{k-2}]w'(\tau_{k-2})+\int_{\tau_{k-2}}^{\tau_{k-1}}W'[\tau_{k-1}-\tau]B'u'^0(\tau)d\tau\}+$$

$$+\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}W'[\tau_k-\tau]B'u'^0(\tau)d\tau \tag{4.3}$$

Подставляя $x'(\tau_k,\xi'_0,\xi'_1,\dots,\xi'_{k-1})$ и $w'(\tau_k)$ в (4.1), получим

$$\rho(\tau_k,\xi'_0,\dots,\xi'_{k-1})\le$$

$$\le\left\|B'\right\|\sum_{j=1}^{k}\left\|W'\left[\tau_k-\tau_j\right]\right\|\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j}\left\|W'[\tau_i-\tau]\right\|d\tau\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j}\left|u'^0_j(\tau,\xi'_{j-1})-u'(\tau)\right|d\tau \tag{4.4}$$

Здесь $\left\|W[\cdot]\right\|=\left(\sum_{i,j=1}^{k}w_{ij}^2[\cdot]\right)^{1/2}$ (4.5)

Известно, что

$$\left\|W[t,t_0]\right\|\le\left\|I\right\|-1+e^{\|A\|(t-t_0)} \tag{4.6}$$

где $W[t,t_0]$–фундаментальное нормированное матричное решение дифференциального уравнения

$$\dot W=AW$$

Поскольку

$$\left\|A'\right\|=\left[1^2+1^2+(-a'_2)^2+(-a'_1)^2\right]^{1/2}\le\sqrt{2}+a'_1+a'_2$$

$$\left\|B'\right\|=\left|a'_3\right|=a'_3,\quad \left\|I\right\|=\sqrt{3} \tag{4.7}$$

Учитывая (4.6), (4.7), получим

$$\rho^i(\tau_k,\xi_0^i,\xi_1^i,...,\xi_{k-1}^i) \le a_3^i \sum_{j=1}^{k} \left[\sqrt{3}-1+e^{\left(\sqrt{2}+a_1^i+a_2^i\right)(\tau_k-\tau_j)}\right] \times$$

$$\times \left[\left(\sqrt{3}-1\right)\delta_{j-1} + \frac{e^{\left(\sqrt{2}+a_1^i+a_2^i\right)\delta_{j-1}}-1}{\sqrt{2}+a_1^i+a_2^i}\right] \times \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \left|u_j^{i0}(\tau,\xi_{j-1}^i)-u^{i0}(\tau)\right| d\tau \qquad (4.8)$$

Уравнение движения манипулятора имеет вид

$$\dot{w} = Aw + Bu \qquad (4.9)$$

где $A = \begin{pmatrix} A^0 & 0 & 0 \\ 0 & A^1 & 0 \\ 0 & 0 & A^2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B^0 \\ B^1 \\ B^2 \end{pmatrix}$, $\begin{matrix} u = (0,0,u^0,0,0,u^1,0,0,u^2)^T \\ w = (w_1, w_2, ..., w_9)^T \end{matrix}$ (4.10)

A^i, B^i $(i = 0,1,2)$ определяются из (1.3)

$$\rho(t,\xi_0,...,\xi_{k-1}) = \|x(t,\xi_0,...,\xi_{k-1}) - w(t)\| = \left\{\sum_{j=1}^{9}\left[x_j(t,\xi_0,...,\xi_{k-1}) - w_j(t)\right]^2\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\sum_{j=1}^{3}\sum_{\nu=3j-2}^{3j}\left[x_\nu(t,\xi_0,...,\xi_{k-1}) - w_\nu(t)\right]^2\right\}^{1/2} \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{3}\left\{\sum_{\nu=3j-2}^{3j}\left[x_\nu(t,\xi_0,...,\xi_{k-1}) - w_\nu(t)\right]^2\right\}^{1/2} \le$$

$$\le \rho^0(t,\xi_0^0,...,\xi_{k-1}^0) + \rho^1(t,\xi_0^1,...,\xi_{k-1}^1) + \rho^2(t,\xi_0^2,...,\xi_{k-1}^2) \qquad (4.11)$$

Аналогично (4.8) для манипулятора получим

$$\rho(\tau_k,\xi_0,\xi_1,...,\xi_{k-1}) \le \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{k} a_3^i \left[\left(\sqrt{3}-1\right)\delta_{j-1} + \frac{e^{\left(\sqrt{2}+a_1^i+a_2^i\right)\delta_{j-1}}-1}{\sqrt{2}+a_1^i+a_2^i}\right] \times$$

$$\times \left[\sqrt{3}-1+e^{\left(\sqrt{2}+a_1^i+a_2^i\right)(\tau_k-\tau_j)}\right] \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \left|u_j^{i0}(\tau,\xi_{j-1}^i)-u^{i0}(\tau)\right| d\tau \qquad (4.12)$$

где $\xi_0 = (\xi_0^0,\xi_0^1,\xi_0^2)$, $\xi_1 = (\xi_1^0,\xi_1^1,\xi_1^2)$, $\xi_{k-1} = (\xi_{k-1}^0,\xi_{k-1}^1,\xi_{k-1}^2)$.
Полученная оценка (4.12) позволяет оценить математическое ожидание, дисперсии и т.д. отклонения движения системы от поводыря.

5. Построение стохастической модели схвата. Пусть движение схвата манипулятора поводыря в системе координат $OXYZ$ определяется радиус-вектором $R(x,y,z)$, а по истинному движению $-\ \overline{R} = \overline{R}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$. Из фиг.1 имеем

$$x = [L_1\cos\varphi_1 + L_2\cos(\varphi_1+\varphi_2) + a]\sin\varphi_0$$

$$\overline{x} = [L_1\cos\overline{\varphi}_1 + L_2\cos(\overline{\varphi}_1+\overline{\varphi}_2) + a]\sin\overline{\varphi}_0$$

$$y = [L_1 \cos\varphi_1 + L_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + a]\cos\varphi_0$$
$$\bar{y} = [L_1 \cos\bar{\varphi}_1 + L_2 \cos(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2) + a]\cos\bar{\varphi}_0$$
$$z = L_1 \sin\varphi_1 + L_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$
$$\bar{z} = L_1 \sin\bar{\varphi}_1 + L_2 \sin(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2) \qquad (5.1)$$

Стохастическую оценку состояния схвата на каждом интервале времени $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ можно определить следующим образом

$$\rho_R(t) = \left\|\bar{R}(t) - R(t)\right\| = \left[(\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2 + (\bar{z} - z)^2\right]^{1/2} \qquad (5.2)$$

при $\bar{\varphi}_i(\tau_i, \xi_0, \ldots, \xi_{i-1}) = \varphi_i(\tau_i) + \varepsilon_i(\tau_i, \xi_0, \ldots, \xi_{i-1})$ $(i = 0,1,2)$ (5.3)

Вычисляя (5.2) при (5.1), (5.3) и пренебрегая величинами, порядок которых превышает ε_i^2, получим

$$\rho_R^2(t,\omega) = \varepsilon_0^2(t,\omega)\{[L_1 \cos\varphi_1(t) + L_2 \cos(\varphi_1(t) + \varphi_2(t))]^2 + a^2 +$$
$$+ 2a[L_1 \cos(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) + L_2 \cos\varphi_2(t)]\} + \{\varepsilon_1(t,\omega)[L_1 + L_2] + \varepsilon_2(t,\omega)L_2\}^2$$

где ε_j $(j = 0,1,2)$ имеет вид

$$\varepsilon_j(\tau_k, \xi_0^j, \ldots, \xi_{k-1}^j) = a_3^j \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{i_{k-1}=1}^{3} \sum_{i_{k-2}=1}^{3} \cdots \sum_{i_\mu=1}^{3} \int_{\tau_{\mu-1}}^{\tau_\mu} w_{i_k i_{k-1}}^j [\tau_k - \tau_{k-1}] w_{i_{k-1} i_{k-2}}^j [\tau_{k-1} - \tau_{k-2}] \cdot$$
$$\times w_{i_\mu 3}^j[\tau_\mu - \tau][u_\mu^{j0}(\tau, \xi_{\mu-1}^j) - u^{j0}(\tau)]d\tau \qquad (5.4)$$

6. Пример: Рассмотрим движение первого звена робота "Универсал-5" [6] горизонтальной плоскости на интервале времени $[0,2]$ с безразмерными параметрами

$$L_1 \approx 0.0112,\ k_1 \approx 1.4977,\ R_1 \approx 0.3858 \qquad (6.1)$$

и с граничными условиями

$$\varphi_1(0) = \dot{\varphi}_1(0) = \ddot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_1(2) = \ddot{\varphi}_1(2) = 0,\ \varphi_1(2) = 1$$

Из (1.3) и (6.1) следует

$$a_1^1 = R_1 / L_1 \approx 34.4,\ a_2^1 = k_1 / L_1 \approx 133.7,\ a_3^1 = 1/L_1 \approx 89.2,\ \lambda_1^1 \approx -30,\ \lambda_2^1 \approx -4.5$$

Производим измерения состояния звена в два момента времени $(t_0 = 0, \tau_1 = 1)$. Пусть измерения будут

$$x^1(0,\xi_0^1) = w^1(0) + \varepsilon^1(0,\xi_0^1),\ x^1(1,\xi_1^1) = w^1(1) + \varepsilon^1(1,\xi_1^1)$$

где $w_1(0), w_1(1), x_1(0,\xi_1^0), x_1(1,\xi_1^1)$ – векторы состояния звена в моменты измерения $(w_1^1(1) = 0.6,\ w_2^1(1) = 0.54,\ w_3^1(1) = 0.014)$

Из (2.2) получим

$$u^{10}(2,\tau) = 0.99e^{-30(2-\tau)} - 0.99e^{-4.5(2-\tau)} + 0.72$$

$$\rho^1(2,\xi_0^1,\xi_1^1) = \left|\frac{-\varepsilon_1^1(0,\xi_1^0) + 0.001\varepsilon_1^2(0,\xi_1^0) - 0.00003\varepsilon_1^3(0,\xi_1^0)}{0.17 - [0.5\varepsilon_1^1(0,\xi_1^0) - 0.17\varepsilon_1^2(0,\xi_1^0) - 0.004\varepsilon_1^3(0,\xi_1^0)]}\right| +$$

$$+\left|\frac{-\varepsilon_1^1(1,\xi_1^1)+0.002\varepsilon_1^2(1,\xi_1^1)-0.000004\varepsilon_1^3(1,\xi_1^1)}{0.44-[1.75\varepsilon_1^1(1,\xi_1^1)-0.445\varepsilon_1^2(1,\xi_1^1)-0.001\varepsilon_1^3(1,\xi_1^1)]}\right|$$

Допустим, что плотность случайных величин распределена равномерно [7]

$$f(\xi_1^0)=\begin{cases}1, & 0\le\xi_1^0<1\\ 0, & \xi_1^0<0,\ \xi_1^0\ge 1\end{cases}\qquad f(\xi_1^1)=\begin{cases}1, & 0\le\xi_1^1<1\\ 0, & \xi_1^1<0,\ \xi_1^1\ge 1\end{cases}$$

$$\varepsilon_1^1(0,\xi_1^0)=a_1 f(\xi_1^0)\ \ \varepsilon_1^2(0,\xi_1^0)=a_2 f(\xi_1^0)\ \ \varepsilon_1^3(0,\xi_1^0)=a_3 f(\xi_1^0)$$

$$\varepsilon_1^1(1,\xi_1^1)=b_1 f(\xi_1^1)\ \ \varepsilon_1^2(1,\xi_1^1)=b_2 f(\xi_1^1)\ \ \varepsilon_1^3(1,\xi_1^1)=b_3 f(\xi_1^1)$$

где a_i, b_i $(i=1,2,3)$ - постоянные величины

Математическое ожидание оценки $\rho^1(2,\xi_0^1,\xi_1^1)$ имеет вид

$$M\left[\rho_1(2,\xi_1^0,\xi_1^1)\right]<\left[\left|-0.5a_1+0.17a_2+0.004a_3\right|+\right.$$

$$+0.17\ln\left|1-\frac{0.5a_1-0.17a_2-0.004a_3}{0.17}\right|\Bigg]\times$$

$$\times\frac{\left|-a_1+0.001a_2-0.00003a_3\right|}{\left[0.5a_1-0.17a_2-0.004a_3\right]^2}\cdot\frac{\left|-b_1+0.002b_2-0.000004b_3\right|}{\left[1.7b_1-0.44b_2-0.001b_3\right]^2}\times$$

$$\times\left[\left|-1.7b_1+0.44b_2+0.001b_3\right|+0.44\ln\left|1-\frac{1.7b_1-0.44b_2-0.001b_3}{0.44}\right|\right]$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Козырев Ю.Г. Промышленные роботы. Справочник. - М.: Машиностроение, 1983.
2. Чиликин М.Г., Ключев В.И., Сандлер А.С. Теория автоматизированного электропривода. - М.: Энергия, 1976.
3. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Синтез оптимального управления транспортными движениями манипуляционных роботов.: - Изв. АН СССР. МТТ, 1986, №4.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. - М.: Наука, 1968.
5. Красовский Н.Н. Управление динамической системой.-М.: Наука, 1985.
6. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. - М. Наука, 1989.
7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. - М.: Наука, 1988.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 23.11.1998

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 52, №2, 1999 Механика

УДК 551.31

ДВИЖЕНИЕ ОПОЛЗНЕЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ НА СКЛОНАХ ВОЗВЫШЕННОСТЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДОЖДЯ

Сагомонян А.Я.

Ա. Յա. Սագոմոնյան

Բարձրությունների լանջերին առաջացած սողանքների շարժումը անձրևի ազդեցության տակ

Օգտագործելով առաձգապլաստիկ միջավայրերի հատկությունները, հաջորդական մոտավորությունների եղանակով կառուցված են անալիտիկ լուծումներ, որոնք որոշում են շերտերում շարժման բնութագրիչները, նրանց հաստությունները և զանգվածի ծախսը:

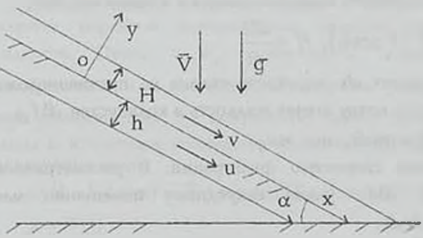
A.Ya.Sagomonian

The motion of the landslip appearing on the slope of the hill under the rain action

Жидкость капель дождя, проникая в поры почвы, образует водонасыщенную среду, которая моделируется вязкопластической средой. При определенных условиях под действием силы тяжести в вязкопластической среде образуется тонкий слой, примыкающий к поверхности склона, в котором материал приходит в движение — это явление и названо в работе оползнем. Непроникшая часть жидкости капель дождя образует над поверхностью склона слой жидкости, также стекающей к подножию склона. Поверхность склона, являющаяся поверхностью, на которой происходит взаимодействие сред в склонах, предполагается неизменной. Исследование движения сред в слоях приводится на основе уравнений Рейнольдса для движения в тонких слоях и малым значением кривизны границ слоев. Используя свойства вязкопластических сред методом последовательных приближений, построены аналитические решения, определяющие параметры движения в слоях, их толщины, а также массовый расход.

Оползень - скольжение массы грунта (почвы) вниз по поверхности склона вследствие нарушения равновесия под действием силы тяжести. Здесь рассматривается случай, когда нарушение равновесия происходит из-за сильного увлажнения почвы, вызванного дождем (ливнем). Жидкость капель дождя проникает в мельчайшие поры почвы, ослабляя ее связанность (силы сцепления). В результате образуется водонасыщенная (увлажненная) почва с физико-механическими свойствами, отличными от свойств почвы до дождя: свойствами пластичности и вязкости [1,2]. В этой сильно увлажненной среде образуется относительно тонкий слой, примыкающий к поверхности склона, в котором частицы среды стекают вниз к подножию возвышенности. Поток увлажненной почвы в слое вместе с материалом почвы уносит также жидкость, содержащуюся в порах почвы. Можно считать, что обе фазы в слое движутся с одинаковой скоростью. Задача состоит в том, чтобы определить движение увлажненной почвы в слое и его толщину. Ниже приняты следующие предположения. Увлажненная почва моделируется однородной несжимаемой линейно-вязкопластической средой. Допускается существование тонкого слоя подвижной вязкопластической среды, примыкающей к поверхности склона. Толщина слоя подлежит определению [3,4]. Оползни возможны в процессе дождя и могут продолжаться после его окончания. В первом случае необходимо определить движение слоя непроникшей в почву жидкости над поверхностью склона, так же стекающей к подножию. Так же, как и в работе [4], здесь поверхность склона считается неограниченной плоскостью, наклоненной к горизонтальной плоскости Земли под углом α (фиг.1), т.е. задача рассматривается без учета граничных условий на вершине и у подножия возвышенности.

§1. Движение оползня, возникающего в период дождя. В этот период часть жидкости капель, не проникшей в почву, образует над поверхностью склона сплошной слой воды, стекающей вниз к подножию. Благодаря диффузии и другим причинам, отдельные частицы почвы с поверхности склона попадают в слой жидкости и уносятся потоком. Определение массы уносимых частиц входит в проблему водной эрозии. Обычно концентрация этих частиц в жидкости имеет порядок 10^{-4}-10^{-6}. В рассматриваемой здесь задаче этой концентрацией пренебрегается. В дождевом пространстве над поверхностью склона объемная концентрация жидкости ω капель дождя постоянна и равномерно распределена. Скорость капель V постоянна и направлена одинаково с вектором ускорения g силы тяжести. Рассматривается плоскопараллельное движение среды. Начало координат системы (x,y) берется на поверхности склона, ось x направлена вдоль поверхности склона вниз, ось y - вдоль внешней нормали n к этой поверхности (фиг.1). Движение жидкости в слое над поверхностью склона и в слое вязкопластической среды подчиним условиям, на основе



Фиг. 1

которых получены известные приближенные уравнения Рейнольдса для движения вязкой жидкости в тонком слое [5, 6]. В обоих слоях скорости частиц вдоль оси x предполагаются однонаправленными [5]. Уравнения движения вдоль оси y в слоях без учета сил инерции имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos\alpha, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho_0 g \cos\alpha, \quad \rho_0 = m\rho + (1-m)\rho_1 \tag{1}$$

где p – давление в средах; ρ и ρ_1 – плотности жидкости и материала почвы; ρ_0 – плотность вязкопластической среды; m – объемная концентрация пор в почве (пористость) предполагается постоянной. В обоих слоях давление не зависит от координаты x. Уравнения движения частиц вдоль оси x в слое жидкости и в слое вязкопластической среды, соответственно, записываются в виде

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}=\rho g\sin\alpha+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y},\quad \tau_{xy}=\eta\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2}$$

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}=\rho_0 g\sin\alpha+\frac{\partial\tau^0_{yx}}{\partial y},\quad \tau^0_{yx}=k+\mu\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}>0 \tag{3}$$

Здесь v и u — компоненты скорости вдоль x в слоях жидкости и вязкопластической среды; η и μ — постоянные коэффициенты вязкости сред в этих слоях; τ_{xy} и τ^0_{yx} — напряжения сдвига; k — предел текучести. В ряде работ, например, в [7], принимается, что скорость проникания жидкости в поры почвы на поверхности склона линейно зависит от давления на этой поверхности. Если w_0 — истинная скорость проникания в поры, $H(t)$ - толщина жидкого слоя, то при таком предположении можно написать равенство

$$w_0=k_0\rho g\cos\alpha H(t) \tag{4}$$

где k_0 — постоянный коэффициент пропорциональности. Пусть $y(t)$ обозначает границу между слоем жидкости и пространством дождя. Эта граница является подвижной поверхностью параллельной плоскости склона (фиг. 1). Пусть ds - элемент плоскости $y=H(t)$. Через ds в единицу времени в слой втекает жидкость капель в количестве dM_1:

$$dM_1=\rho\omega ds\left(\dot H+V\cos\alpha\right),\quad \dot H=\frac{dH}{dt}$$

За это время через элемент ds плоскости склона на противоположной стороне из жидкого слоя в почву втечет жидкость в количестве dM_2:

$$dM_2=\rho m w_0 ds=\rho w ds\,,\quad w=mw_0$$

Величина w называется скоростью фильтрации. В рассматриваемой задаче разность dM_1-dM_2 равна секундному изменению массы жидкости в объеме $H\cdot 1\cdot ds$:

$$dM_1-dM_2=\frac{\partial}{\partial t}(\rho H ds)=\rho\dot H\,ds$$

После подстановок из этого равенства для скорости движения границы $y=H(t)$ получим

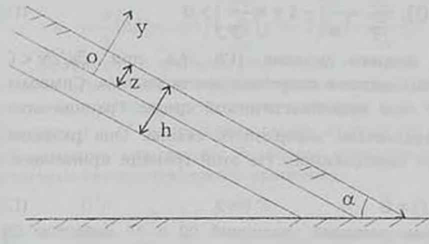
$$\dot H=\frac{\omega V\cos\alpha-mk_0\rho g\cos\alpha H(t)}{1-\omega} \tag{5}$$

Интегрирование уравнений (5) при $t=0$, $H=0$ приводит к зависимости

$$B-H(t)=B\exp(-At),\quad A=\frac{mk_0\rho g\cos\alpha}{1-\omega},\quad B=\frac{\omega V}{mk_0\rho g} \tag{6}$$

Решение (6) имеет асимптоту

$$t=\infty:\quad H=B \tag{7}$$



Фиг. 2

В реальных условиях предел текучести k в формуле (3) зависит от объемной концентрации (пористости) пор m, определяющей водонасыщенность (увлажненность) почвы. Можно предположить, что пористость убывает с глубиной почвы, а предел текучести k убывает вместе с увеличением пористости [2]. Ниже предел текучести считается постоянной величиной. Тогда уравнения (2) и (3) соответственно можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -a + \frac{1}{\nu}\frac{\partial v}{\partial t}, \quad a = \frac{g \sin\alpha}{\nu}, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -b + \frac{1}{\nu_0}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad b = \frac{g \sin\alpha}{\nu_0}, \quad \nu_0 = \frac{\mu}{\rho_0} \tag{9}$$

Граница между областью дождя и слоем жидкости над склоном является пористой поверхностью разрыва параметров несжимаемой жидкости. Пусть v_s, w_s - компоненты скорости по осям x, y непосредственно за поверхностью разрыва; p_s, p_a - давления за и перед этой поверхностью; τ_s - напряжение сдвига на ней. Законы сохранения массы и изменения количества движения на пористой границе разрыва запишутся в виде

$$\omega(\dot H + V\cos\alpha) = \dot H + w_s, \rho\omega(H + V\cos\alpha)(V\cos\alpha - w_s) = p_s - p_a$$

$$y = H(t)$$

$$\rho\omega(H + V\cos\alpha)(V\sin\alpha - v_s) = \tau_s, \quad \tau_s = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_s \tag{10}$$

Анализ условий (10) с учетом пористости границы $y = H(t)$, на которой ω имеет порядок $10^{-4} - 10^{-6}$, приводит к приближенным граничным условиям

$$y = H(t): \ \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ \text{или} \ v_s = V\sin\alpha; \ p_s = p_a \tag{11}$$

Эти приближения принимаются только для упрощения получаемых выражений для параметров среды. Принципиально не составляет труда пользоваться условиями (10). На границе между слоем жидкости и слоем вязкопластической среды - поверхности склона - должны выполняться условия равенства скоростей частиц сред и напряжений сдвига

$$y = 0:\ u = v = U(t),\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\left(-k + \eta\frac{\partial v}{\partial y}\right) > 0 \tag{12}$$

При невыполнении второго условия (12), т.е. при $\partial u/\partial y < 0$, вязкопластическая среда находится в состоянии жесткого тела. Символом $h(t)$ обозначим толщину слоя вязкопластической среды. Граница этого слоя $y = -h(t)$ также параллельна поверхности склона. Она разделяет слой подвижной среды от неподвижной. На этой границе принимается условие

$$y = -h(t):\ u(-h, t) = 0 \tag{13}$$

Математические методы решений уравнений (8) и (9) известны [8]. Здесь эти уравнения решаются методом последовательных приближений, изложенным в работе [9]. Для уравнения (8) за первое приближение берется решение квазастационарного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -a,\ a = \frac{g\sin\alpha}{\nu},\ \nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{14}$$

После двукратного интегрирования его по y получим

$$v = -\frac{a}{2}y^2 + C_1 y + C_2,\ \frac{\partial v}{\partial y} = -ay + C_1$$

Функции времени C_1, C_2 определяются первыми равенствами в условиях (11) и (12). В результате будем иметь

$$v = a\left(Hy - \frac{y^2}{2}\right) + U(t),\ \frac{\partial v}{\partial y} = a(H - y) \tag{15}$$

где скорость U на поверхности склона подлежит определению. Если же в условиях (11) воспользоваться вторым равенством, то придем к выражению

$$v = \frac{ay}{2}(H - y) + V\frac{y}{H}\sin\alpha + \left(1 - \frac{y}{H}\right)U(t)$$

Составим производную по времени от решения (15) и подставим ее в правую часть уравнения (8) вместо $\partial v/\partial t$. Полученное таким образом равенство дважды проинтегрируем по y. В результате придем к соотношению

$$v = -\frac{a}{2}y^2 + \frac{U}{2\nu}y^2 + \frac{aH}{6\nu}y^3 + \overline{C}_1 + \overline{C}_2 \tag{16}$$

Решение (15) принимается за первое приближение v_1, за второе приближение v_2 берется сумма $v_2 = v_1 + v$, где v вычисляется по формуле (16). Функции времени $\overline{C}_1, \overline{C}_2$ определяются теми же условиями: первыми равенствами в (11) и (12). После определения этих функций второе приближение принимает вид

$$v_2 = \frac{a}{2}\left(2Hy - y^2\right) + \frac{U}{2\nu}\left(y^2 - 2Hy\right) + \frac{aH}{6\nu}\left(y^3 - 3H^2 y\right) + U(t) \qquad (17)$$

Сравнения с точными решениями показали, что с хорошей точностью можно ограничиться вторым приближением [10]. Заметим, что, если за граничное условие взять второе равенство (11), то мы получили бы, что на границе $y = H$ напряжение сдвига отлично от нуля. Решение уравнения (9) строится аналогично. За первое приближение его решения берется решение квазистатического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -b, \quad b = \frac{g \sin\alpha}{\nu_0}, \quad \nu_0 = \frac{\mu}{\rho_0} \qquad (18)$$

Дважды интегрируя это уравнение по y, получим

$$u = -\frac{b}{2}y^2 + C_1 y + C_2$$

Используя граничное условие (13), это решение представим в виде

$$u = \frac{b}{2}\left(h^2 - y^2\right) + C_1(h + y), \quad -h \le y \le 0 \qquad (19)$$

Функции времени C_1 определяется из второго равенства (12) с учетом скорости сдвига в формуле (15). В итоге, решение (19) запишется так

$$u = \frac{b}{2}\left(h^2 - y^2\right) + \frac{1}{\mu}\left(\eta a H - k\right)\left(h + y\right), \quad \eta a H > k \qquad (20)$$

Второе приближение решения уравнения (9) строится аналогично второму приближению v_2 уравнения (8), приведенному в формуле (17). Ниже оно не используется и здесь не приводится.

Закон сохранения массы несжимаемой вязкопластической среды в объеме единичной ширины вдоль оси x, заключенной между границами $y = -h(t)$, $y = 0$, приводит к равенству

$$\rho_1(1 - m)\dot{h} + \rho m w_0 = \rho_0 \dot{h} \qquad (21)$$

Скорость w_0 определена в формуле (4). Из (21) определяется скорость границы $y = -h(t)$:

$$\dot{h} = \frac{dh}{dt} = w_0 = k_0 \rho g \cos\alpha H(t) \qquad (22)$$

Подставив значение H по формуле (6) в правую часть равенства (22), после интегрирования получим значение толщины слоя

$$h = E\left(t + \frac{1}{A}e^{At}\right) + C, \qquad E = B k_0 \rho g \cos\alpha \qquad (23)$$

Постоянная интегрирования C в (23) определяется ниже из начальных условий. Практически интерес представляют решения уравнений в квазистатическом приближении (14) и (18). Из решений (15) и (20) следует, что на поверхности склона должно выполняться условие

$$y = 0, \quad \eta a H(t) - k \ge 0 \qquad (24)$$

В действительности, оползень - движение среды вдоль оси x начинается внутри слоя, там, где напряжение сдвига превосходит предел текучести. Здесь принимается приближение: считается, что процесс оползня происходит при выполнении условия (24). Оно означает, что после начала дождя оползень на поверхности склона возникает в момент t_*, который определяется из равенства

$$\eta a H_* = k, \quad H_* = B\left(1 - e^{-At_*}\right) \qquad (25)$$

где k - предел текучести. При $k > \eta a B$ оползень не возникает. Из формул (24), (25) следует, что постоянная интегрирования в формуле (23) определяется из условий

$$t = t_*, \ H = H_*, \ h = h_*, \ h_* = \int_0^{t_*} w_0 dt \qquad (26)$$

В результате получим формулу, определяющую толщину слоя

$$h(t) = E\left[t - t_* - \frac{1}{A}\left(e^{-At_*} - e^{-At}\right)\right] + h_*, \quad t > t_* \qquad (27)$$

Вдоль поверхности склона $(y = 0)$ скорость определяется так.

$$u = U = \frac{b}{2}h^2 + \frac{h}{\mu}(\eta a H - k), \quad \eta a H > k \qquad (28)$$

Заметим, что скорость сдвига на границе $y = -h(t)$ определяется выражением

$$y = -h(t), \ \frac{\partial u}{\partial y} = bh + \frac{1}{\mu}(\eta a H - k), \quad \eta a H > k \qquad (29)$$

Массовый расход среды в единицу времени определяется интегралом от скорости, взятой по формуле (20)

$$Q = \rho_0 \int_{-h}^{0} u dy = \rho_0\left[\frac{bh^3}{3} + \frac{1}{2\mu}(\eta a H + k)h^2\right], \quad \eta a H > k \qquad (30)$$

В рассматриваемой задаче в слое вязкопластической среды составляющая скорости частиц по оси y является функцией только времени и направлена в отрицательную сторону. Обозначим ее заглавным символом W

$$W = W(t) \qquad (31)$$

Из условия (31) следует, что секундное количество движения, переносимое сквозь плоскость в слое параллельной плоскости склона, одинаково для всех таких сечений:

$$\rho_0 W^2(t) = C(t) \qquad (32)$$

С другой стороны, на поверхности склона $(y = 0)$ непрерывно образуется количество движения $K(t)$ равное:

$$K(t) = \rho m w_0^2 \qquad (33)$$

Скорость w_0 задана формулой (4). Таким образом:

$$\rho_0 W^2(t) = \rho m w_0^2 \tag{34}$$

Равенство (34) определяет скорость W:

$$W(t) = \left(m\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/2} w_0(t) \tag{35}$$

§2. Движение оползня после прекращения дождя. Пусть дождь продолжается в период $0 \le t \le t_0$ и в момент времени t_0 прекращается. Пусть в этот же момент мгновенно исчезает слой жидкости над поверхностью склона, а напряжение сдвига делается равным нулю:

$$t \ge t_0,\ y = 0,\ \tau_{yx}^0 = 0,\ H = 0 \tag{36}$$

Предполагается, что в момент t_0 на плоской поверхности склона возникает параллельная ей подвижная поверхность, которая движется в глубь почвы по закону $y = -z(t)$, подлежащему определению. Пусть напряжение сдвига на этой подвижной поверхности равно пределу текучести сдвига (фиг.2):

$$t > t_0,\ y = -z(t),\ \tau_{yx}^0 = k \tag{37}$$

Между границами $y = 0$ и $y = -z(t)$ среда находится в состоянии твердого тела и его движение можно определить с помощью уравнения

$$\rho_0 z(t)\dot{w} = \rho_0 g \sin\alpha z(t) - k$$

где $w(t)$ - скорость твердого тела. Запишем это уравнение в виде

$$z\dot{w} = g\sin\alpha z - v_*^2,\ \dot{w} = \frac{dw}{dt},\ v_*^2 = \frac{k}{\rho_0} \tag{38}$$

Начальное условие уравнения (38) будет установлено ниже. При $t > t_0$ в вязкопластической области движение подчинено уравнению (9), а в рассматриваемом ниже квазистатическом приближении оно определяется уравнением (18). Его решение запишем так

$$y < -z(t),\ t > t_0,\ u = -\frac{b}{2}y^2 + C_1 y + C_2$$

$$\dot{u} = \dot{C}_1 y + \dot{C}_2,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -by + C_1 \tag{39}$$

Предполагается, что при $t > t_0$ выполняются условия

$$t > t_0,\ y = -z(t),\ u = w(t),\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \tau_{yx}^0 = 0,\ H = 0 \tag{40}$$

В решении (39) функции времени C_1 и C_2 определяются условиями (40)

$$C_1 = -bz(t),\ C_2 = w(t) - \frac{b}{2}z^2(t)$$

$$u = -\frac{b}{2}\left(y^2 + z^2\right) - bzy + w(t),\ \frac{\partial u}{\partial y} = -b(y + z) \tag{41}$$

Из предположения в формуле (36) следует, что при $t \geq t_0$ скорость границы $y = h(t)$ равна нулю, а толщина слоя остается постоянной:

$$t \geq t_0,\ \dot{h} = 0,\ h = h(t_0) = h_0 \tag{42}$$

На этой границе скорость частиц среды равна нулю и решение (41) приводит к зависимостям:

$$y = -h_0,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -b(h_0 - z),\ \dot{w} = \nu_0 b - \frac{\nu_*^2}{z} \tag{43}$$

Последнее равенство (43) совместно с уравнением (38) образуют систему, определяющую функции $z(t)$ и $w(t)$:

$$2w = b(h_0 - z)^2,\ \dot{w} = \nu_0 b - \frac{\nu_*^2}{z} \tag{44}$$

Уравнения (44) решаются при условиях

$$t = t_0,\ z = 0,\ 2w_0 = bh_0^2,\ w_0 = w(t_0) \tag{45}$$

Из системы (44) нетрудно получить соотношение, определяющее функцию $z(t)$

$$b\frac{(h_0 - z)zdz}{b\nu_0 z - \nu_*^2} = -dt \tag{46}$$

Интеграл уравнения (46) при условии в формуле (45) можно представить в виде

$$h_0 z + \frac{c^2 - (c+z)^2}{2} + c(h_0 - c)\ln\left(1 - \frac{z}{c}\right) = -\nu_0(t - t_0)$$

$$t \geq t_0,\ c = \frac{\nu_*^2}{\nu_0 b} \tag{47}$$

Массовый расход в единицу времени определяется по формуле

$$Q = \rho_0 \int_{-h_0}^{-z} u dy + \rho_0 wz \tag{48}$$

где скорость u под интегралом берется по формуле (41).

ЛИТЕРАТУРА

1. Реология суспензий (сб. статей). – М.. Мир, 1975.
2. Воларович М.П. Применение метода исследований вязкости и пластичности в прикладной минералогии. //Тр. ин-та минералогии. 1934. Вып. 6.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. -М: Наука, 1970.
4. Сагомонян А.Я. К вопросу дождевой эрозии почв. //Вестник МГУ. Сер. Математика и механика. 1995, №5, с. 84-93.
5. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. -М.: Мир, 1983.
6. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. -М.: Гостехиздат, 1955.
7. Слезкин Н.А. О течении вязкой жидкости при наличии свободной границы и пористого дна. //Вестник МГУ. Сер. Математика и механика. 1957, №5, с. 3-5.
8. Карл-Слоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. -М.: Физматгиз, 1964.
9. Швец М.Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. //ПММ, 1939, т.3, №3, с. 251-266.
10. Кочетков А.М. Приближенное решение некоторых задач нестационарного движения вязкопластической среды. //ПММ, 1950, т.14, №4, с. 433-43
11. Бахшиян Ф.А. К вязкопластическому течению при ударе цилиндра по пластине. //ПММ, 1948, т 12, №1, с. 47-52
12. Шемякин Е.И. О подвижности больших оползней. //Докл. АН СССР, 1993, т.331, №6, с. 742-744

МГУ им. М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию
05.03.1998