



ՄԵԽԱՆԻԿԱ  
МЕХАНИКА  
MECHANICS

УДК 539.3

**ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ АМПЛИТУДЫ ВЕРТИКАЛЬНЫХ  
 КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОГО, ВЕСОМОГО ЖЕСТКОГО  
 ФУНДАМЕНТА, ЛЕЖАЩЕГО НА ПОВЕРХНОСТИ  
 НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА  
 СО СЦЕПЛЕНИЕМ**

**Абрамян Б.А., Гаспарян А.В., Саакян А.В.**

Բ.Ա. Աբրահամյան, Ա.Վ. Գասպարյան, Ա.Վ. Սահակյան  
 Անհամասն առաձգական կիսատարածության վրա ամրակցումով զետեղված կլոր, կշռովի, կոշտ  
 ֆունդամենտի ուղղահայաց տատանումների ամպլիտուդի որոշման վերաբերյալ

Դիտարկվում է կլոր հիմքով, կշռովի, կոշտ ֆունդամենտի, որը տեղադրված է անհամասն, երկշերտ  
 կիսատարածության մակերևույթի վրա ամրակցումով, ոչ առանցքախմբերիկ տատանումների  
 վերաբերյալ կոնտակտային խնդիրը, երբ տատանումներն առաջացնող հարմոնիկ դիմաժիկ ուժը  
 կիրառված է կիսատարածության մակերևույթին ֆունդամենտից վերջավոր հեռավորության վրա

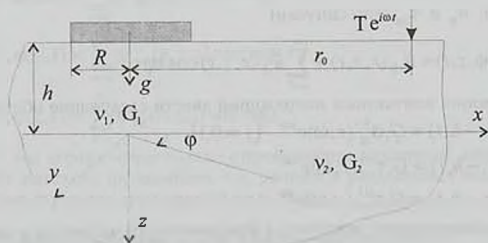
**B.I.. Abrahamyan, A.V. Gasparyan, A.V. Sahakyan**

**On determination of amplitude of vertical vibration of circular, heavy, rigid footing, lying on the surface  
 of non homogeneous elastic semi-space with cohesion.**

Рассматривается контактная задача о неосесимметричных колебаниях весомого  
 жесткого фундамента с круглым основанием, который расположен со сцеплением на  
 поверхности неоднородного двухслойного полупространства, когда возбуждающая  
 колебания гармоническая динамическая сила приложена на поверхности полупространства  
 на конечном расстоянии от фундамента.

**1. Постановка задачи.**

Рассматривается неосесимметричная контактная задача о колебаниях  
 круглого в плане, весомого, жесткого фундамента, установленного на  
 упругом, двухслойном по вертикали, полупространстве со сцеплением и  
 колеблющегося под действием гармонической динамической силы,  
 приложенной на поверхности полупространства на конечном расстоянии  
 от фундамента (фиг. 1).



Фиг. 1

Граничные условия и условия контакта слоев полупространства  
 задаются в виде

$$\begin{aligned} u_z^{(1)} \Big|_{z=-h} - \varepsilon_h &= (\varepsilon_\omega^{(h)} + \kappa_\omega^{(h)} r \cos \varphi) e^{i\omega t} \\ u_\varphi^{(1)} \Big|_{z=-h} &= \gamma_\omega^{(h)} \cos \varphi e^{i\omega t} \quad (r < R) \\ u_\varphi^{(1)} \Big|_{z=-h} &= -\gamma_\omega^{(h)} \sin \varphi e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)} \Big|_{z=-h} &= -\frac{T e^{i\omega t} \delta(r-r_0) \delta(\varphi)}{r} \\ \tau_{rz}^{(1)} \Big|_{z=-h} &= \tau_{z\varphi}^{(1)} \Big|_{z=-h} = 0 \end{aligned} \quad (r, r_0 > R) \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} \Big|_{z=0} &= u_r^{(2)} \Big|_{z=0}, \quad u_\varphi^{(1)} \Big|_{z=0} = u_\varphi^{(2)} \Big|_{z=0}, \quad u_z^{(1)} \Big|_{z=0} = u_z^{(2)} \Big|_{z=0} \\ \sigma_z^{(1)} \Big|_{z=0} &= \sigma_z^{(2)} \Big|_{z=0}, \quad \tau_{rz}^{(1)} \Big|_{z=0} = \tau_{rz}^{(2)} \Big|_{z=0}, \quad \tau_{z\varphi}^{(1)} \Big|_{z=0} = \tau_{z\varphi}^{(2)} \Big|_{z=0} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где величины, относящиеся к верхнему слою упругого полупространства, отмечены индексом "1", а величины нижнего слоя — индексом "2"

В условиях (1.1) — (1.3) использованы следующие обозначения:  $\varepsilon_h$  — осадка весомого круглого жесткого фундамента, установленного на поверхности неоднородного двухслойного полупространства со сцеплением под действием только собственного веса, эту осадку считаем известной [10];  $\varepsilon_\omega^{(h)}$ ,  $\gamma_\omega^{(h)}$  и  $\kappa_\omega^{(h)}$  — амплитуды вертикальных, горизонтальных и угловых колебаний фундамента соответственно;  $\delta(s)$  — функция Дирака

Амплитуды колебаний  $\varepsilon_\omega^{(h)}$ ,  $\gamma_\omega^{(h)}$  и  $\kappa_\omega^{(h)}$  неизвестны и должны быть определены из условий динамического равновесия фундамента.

Если перемещения и напряжения представить в виде рядов Фурье по координате  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \pi$ ) в следующем виде ( $u_r$ ,  $u_z$ ,  $\sigma_z$  и  $\tau_{rz}$  по косинусам,  $u_\varphi$  и  $\tau_{z\varphi}$  — по синусам)

$$u_r(r, \varphi, z, t) = \bar{u}_{r0}(r, z, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_{rk}(r, z, t) \cos k\varphi \quad (1.4)$$

и для гармоник контактных напряжений ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z^{(j)}(r, -h, t) &= G_1 \bar{\sigma}_z^{(j)}(r, \omega) e^{i\omega t} \quad (j=0,1) \\ \bar{\tau}_{rz1}^{(j)}(r, -h, t) &= G_1 \bar{\tau}_{rz1}^{(j)}(r, \omega) e^{i\omega t} \\ \bar{\tau}_{z\varphi1}^{(j)}(r, -h, t) &= G_1 \bar{\tau}_{z\varphi1}^{(j)}(r, \omega) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (1.5)$$

условия динамического равновесия фундамента представятся в виде

$$\begin{aligned} \int_0^R r \bar{\sigma}_{z0}^{(j)}(r, \omega) dr &= -\frac{P \omega^2 \varepsilon_\omega^{(h)}}{2\pi G_1 g} \\ \int_0^R r [\bar{\tau}_{rz1}^{(j)}(r, \omega) - \bar{\tau}_{z\varphi1}^{(j)}(r, \omega)] dr &= -\frac{P \omega^2 \gamma_\omega^{(h)}}{\pi G_1 g} \end{aligned}$$

$$\int_0^R r^2 \sigma_{z1}^{(1)}(r, \omega) dr = - \frac{16PR^2 \omega^3 \kappa_{\omega}^{(h)}}{9\pi^3 G_1 g} \quad (1.6)$$

где  $P$  – собственный вес фундамента.

Для решения общей задачи с условиями (1.1)–(1.3) и (1.6) используются скалярная и векторная потенциальные волновые функции Гельмгольца  $\Phi(r, \varphi, z, t)$  и  $\vec{\Psi}(r, \varphi, z, t)$  ( $\Psi_r, \Psi_\varphi, \Psi_z$ ) [1].

При помощи этих функций вектор перемещения  $\vec{u}(r, \varphi, z, t)$  определяется соотношением

$$\vec{u} = \text{grad}\Phi + \text{rot}\vec{\Psi} \quad (1.7)$$

где функции  $\Phi$ ,  $\Psi_r$ ,  $\Psi_\varphi$  и  $\Psi_z$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \left( \nabla^2 - a^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi &= \left( \nabla^2 - b^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi_z = 0 \\ \nabla^2 \Psi_r - \frac{\Psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial \varphi} - b^2 \frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \Psi_\varphi - \frac{\Psi_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi_r}{\partial \varphi} - b^2 \frac{\partial^2 \Psi_\varphi}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad a^2 = \frac{1}{c_1^2}, \quad b^2 = \frac{1}{c_2^2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$c_1$  и  $c_2$  – скорости распространения упругих продольных и поперечных волн соответственно.

При этом три компонента векторного потенциала  $\vec{\Psi}$  связаны друг с другом соотношением

$$\text{div}\vec{\Psi} = 0 \quad (1.9)$$

Для решения задачи с условиями (1.1)–(1.3) и (1.6) потенциальные функции также представляются в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi, z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(r, z, t) \cos(m\varphi) \\ \Psi_r(r, \varphi, z, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{rm}(r, z, t) \sin(m\varphi) \\ \Psi_\varphi(r, \varphi, z, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{\varphi m}(r, z, t) \cos(m\varphi) \\ \Psi_z(r, \varphi, z, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{zm}(r, z, t) \sin(m\varphi) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь мы ограничимся только определением амплитуды вертикальных колебаний жесткого фундамента, т.е. решается разделенная задача только для нулевых гармоник разложений вида (1.4).

## 2. Построение решения задачи для нулевой гармоники

Отметим, что задача о вертикальных колебаниях круглого штампа, лежащего на упругом двухслойном основании без трения при наличии осевой симметрии, рассматривалась в [2]. Авторы этой работы детально исследовали вопрос разрешимости интегрального уравнения задачи и привели формулы амплитудной функции контактных напряжений и перемещений поверхности верхнего слоя вне штампа.

В данной работе, учитывая разложения вида (1.4) в граничных условиях (1.1)–(1.3) для нулевых гармоник будем иметь следующие условия:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{z0}^{(1)} \Big|_{z=-h} - \varepsilon_A = \varepsilon_\omega^{(h)} e^{i\omega t}, \quad \bar{u}_{r0}^{(1)} \Big|_{z=-h} = 0 \quad (r \leq R) \\ \bar{\sigma}_{z0}^{(1)} \Big|_{z=-h} = -\frac{Te^{i\omega t} \delta(r-r_0)}{2\pi r}, \quad \bar{\tau}_{r0}^{(1)} \Big|_{z=-h} = 0 \quad (r, r_0 > R) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{z0}^{(1)} \Big|_{z=0} = \bar{\sigma}_{z0}^{(2)} \Big|_{z=0}, \quad \bar{\tau}_{rz0}^{(1)} \Big|_{z=0} = \bar{\tau}_{rz0}^{(2)} \Big|_{z=0} \quad (0 \leq r < \infty) \\ \bar{u}_{z0}^{(1)} \Big|_{z=0} = \bar{u}_{z0}^{(2)} \Big|_{z=0}, \quad \bar{u}_{r0}^{(1)} \Big|_{z=0} = \bar{u}_{r0}^{(2)} \Big|_{z=0} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для определения неизвестной величины  $\varepsilon_\omega^{(h)}$  должно быть использовано первое условие динамического равновесия фундамента из (1.6).

Для решения задачи с условиями (2.1)–(2.2) и (1.6) пользуемся волновыми функциями  $\varphi_0^{(j)}, \psi_{\varphi 0}^{(j)}$  ( $j=1,2$ ) соответственно для верхнего и нижнего слоев полупространства и формулами

$$\begin{aligned} \bar{u}_r^{(j)}(r, z, t) = \frac{\partial \varphi_0^{(j)}}{\partial r} - \frac{\partial \psi_{\varphi 0}^{(j)}}{\partial z}, \quad \bar{u}_z^{(j)}(r, z, t) = \frac{\partial \varphi_0^{(j)}}{\partial z} + \frac{\partial \psi_{\varphi 0}^{(j)}}{\partial r} + \frac{\psi_{\varphi 0}^{(j)}}{r} \\ \bar{\sigma}_{z0}^{(j)}(r, z, t) = 2G_j \left[ \frac{\nu_j}{1-2\nu_j} a_j^2 \frac{\partial^2 \varphi_0^{(j)}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0^{(j)}}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi_{\varphi 0}^{(j)}}{\partial r} + \frac{\psi_{\varphi 0}^{(j)}}{r} \right) \right] \\ \bar{\tau}_{rz0}^{(j)}(r, z, t) = G_j \left[ 2 \frac{\partial^2 \varphi_0^{(j)}}{\partial r \partial z} + b_j^2 \frac{\partial^2 \psi_{\varphi 0}^{(j)}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi_{\varphi 0}^{(j)}}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Соответствующим образом решение уравнений

$$\left( \nabla_0^2 - a_j^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi_0^{(j)} = \left( \nabla_1^2 - b_j^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi_{\varphi 0}^{(j)} = 0, \quad \nabla_n^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{n^2}{r^2} \quad (2.4)$$

для упругих слоев полупространства берутся в виде

$$\varphi_0^{(j)} = \bar{\varphi}_0^{(j)}(r, z) e^{i\omega t}, \quad \psi_{\varphi 0}^{(j)} = \bar{\psi}_{\varphi 0}^{(j)}(r, z) e^{i\omega t} \quad (j=1,2) \quad (2.5)$$

где

$$\bar{\varphi}_0^{(j)} = \int_0^\infty \beta J_0(\beta r) \bar{\varphi}_0^{(j)}(\beta, z) d\beta, \quad \bar{\psi}_{\varphi 0}^{(j)} = \int_0^\infty \beta J_1(\beta r) \bar{\psi}_{\varphi 0}^{(j)}(\beta, z) d\beta \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_0^{(1)} = A_0^{(1)}(\beta, \omega) \operatorname{sh}(\mu_{a_1} z) + C_0^{(1)}(\beta, \omega) \operatorname{ch}(\mu_{a_1} z) \Big|_{-h \leq z \leq 0} \\ \bar{\psi}_{\varphi 0}^{(1)} = A_{\varphi 0}^{(1)}(\beta, \omega) \operatorname{sh}(\mu_{b_1} z) + C_{\varphi 0}^{(1)}(\beta, \omega) \operatorname{ch}(\mu_{b_1} z) \end{aligned}$$

$$\bar{\varphi}_0^{(2)} = B_0^{(2)}(\beta, \omega) e^{-\mu_{a_2} z}, \quad \bar{\psi}_{\varphi 0}^{(2)} = B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta, \omega) e^{-\mu_{b_2} z} \quad (z \geq 0) \quad (2.7)$$

В соотношениях (2.7) введены обозначения

$$\mu_j = \sqrt{\beta^2 - s^2 \omega^2} \quad (s = a_j, b_j) \quad (j=1,2)$$

где функции  $\mu_j$  в соответствии с величиной  $\omega$  выбираются так, чтобы выполнялись условия однозначности и ограниченности решений указанных интервалах с соблюдением условий типа "условий излучения на бесконечности" [2, 3, 11].

Определив по формулам (2.3) выражения нулевых гармоник для перемещений и напряжений, учитывая в них представления (2.6) и (2.7), далее удовлетворив граничным условиям (2.1) и (2.2), для неизвестных коэффициентов получим значения

$$\begin{aligned} A_0^{(1)} &= \frac{1}{\mu_{a_1} b_1^2 \omega^2} \{ B_0^{(2)}(\beta, \omega) \mu_{a_1} (2\beta^2 - b_1^2 \omega^2 - 2m_0 \beta^2) - \\ &\quad - B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta, \omega) \beta [2\beta^2 - b_1^2 \omega^2 - m_0 (2\beta^2 - b_2^2 \omega^2)] \} \\ C_0^{(1)} &= \frac{1}{b_1^2 \omega^2} \{ B_0^{(2)}(\beta, \omega) [2\beta^2 - m_0 (2\beta^2 - b_1^2 \omega^2)] - B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta, \omega) (1 - m_0) 2\beta \mu_{b_2} \} \\ A_{\varphi 0}^{(1)} &= \frac{1}{\mu_{b_1} b_1^2 \omega^2} \{ B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta, \omega) \mu_{b_2} (2\beta^2 - b_1^2 \omega^2 - 2m_0 \beta^2) - \\ &\quad - B_0^{(2)}(\beta, \omega) \beta [2\beta^2 - b_1^2 \omega^2 - m_0 (2\beta^2 - b_2^2 \omega^2)] \} \\ C_{\varphi 0}^{(1)} &= \frac{1}{b_1^2 \omega^2} \{ B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta, \omega) [2\beta^2 - m_0 (2\beta^2 - b_2^2 \omega^2)] - B_0^{(2)}(\beta, \omega) (1 - m_0) 2\beta \mu_{a_2} \} \quad (2.8) \end{aligned}$$

где  $m_0 = \frac{G_2}{G_1}$ , а для определения коэффициентов  $B_0^{(2)}$  и  $B_{\varphi 0}^{(2)}$  получается система парных интегральных уравнений вида

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \beta J_0(\beta r) \tilde{u}_{r0}^{(1)}(\beta, -h) d\beta &= \varepsilon_\omega^{(h)} \quad (r \leq R) \\ \int_0^\infty \beta J_1(\beta r) \tilde{u}_{r0}^{(1)}(\beta, -h) d\beta &= 0 \quad (r \leq R) \\ \int_0^\infty \beta J_0(\beta r) \tilde{\sigma}_{r0}^{(1)}(\beta, -h) d\beta &= -\frac{T \delta(r - r_0)}{2\pi r G_1} \quad (r, r_0 > R) \\ \int_0^\infty \beta J_1(\beta r) \tilde{\tau}_{r0}^{(1)}(\beta, -h) d\beta &= 0 \quad (r > R) \end{aligned} \quad (2.9)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{r0}^{(1)}(\beta, -h) &= B_0^{(2)}(\beta, \omega) s_1(\beta, h) + B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta, \omega) n_1(\beta, h) \\ \tilde{u}_{r0}^{(1)}(\beta, -h) &= B_0^{(2)}(\beta, \omega) s_2(\beta, h) + B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta, \omega) n_2(\beta, h) \\ \tilde{\sigma}_{r0}^{(1)}(\beta, -h) &= B_0^{(2)}(\beta, \omega) s_3(\beta, h) + B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta, \omega) n_3(\beta, h) \\ \tilde{\tau}_{r0}^{(1)}(\beta, -h) &= B_0^{(2)}(\beta, \omega) s_4(\beta, h) + B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta, \omega) n_4(\beta, h) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Коэффициенты  $s_j$  и  $n_j$  включают в себе геометрические и физические параметры упругих слоев полупространства, а также частотный и другие параметры распространения упругих волн в этих слоях.

Введя новые обозначения

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \beta J_0(\beta r) \tilde{\sigma}_{r0}^{(1)}(\beta, -h) d\beta &= \begin{cases} -\frac{T \delta(r - r_0)}{2\pi r G_1} & (r, r_0 \geq R) \\ \sigma_{r0}^{(1)}(r, \omega) & (r < R) \end{cases} \\ \int_0^\infty \beta J_1(\beta r) \tilde{\tau}_{r0}^{(1)}(\beta, -h) d\beta &= \begin{cases} 0 & (r > R) \\ \tau_{r0}^{(1)}(r, \omega) & (r < R) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.11)$$

где  $\sigma_{z0}^{(1)}(r, \omega)$  и  $\tau_{r0}^{(1)}(r, \omega)$  являются безразмерными нулевыми гармониками контактных напряжений под фундаментом, будем иметь

$$\tilde{\sigma}_{z0}^{(1)}(\beta, -h) = \int_0^R r J_0(\beta r) \sigma_{z0}^{(1)}(r, \omega) dr - \frac{T J_0(\beta r_0)}{2\pi G_1}$$

и

$$\tilde{\tau}_{r0}^{(1)}(\beta, -h) = \int_0^R r J_1(\beta r) \tau_{r0}^{(1)}(r, \omega) dr \quad (2.12)$$

Сопоставляя соотношения (2.10) и (2.12), для искоемых неизвестных коэффициентов получим значения

$$\begin{aligned} B_0^{(2)}(\beta, \omega) &= \frac{1}{\Omega(\beta, h)} \left\{ n_4(\beta, h) \left[ \int_0^R r J_0(\beta, r) \sigma_{z0}^{(1)}(r, \omega) dr - \frac{T J_0(\beta r_0)}{2\pi G_1} \right] - \right. \\ &\quad \left. - n_3(\beta, h) \int_0^R r J_1(\beta, r) \tau_{r0}^{(1)}(r, \omega) dr \right\} \\ B_{\varphi 0}^{(2)}(\beta, \omega) &= \frac{1}{\Omega(\beta, h)} \left\{ s_1(\beta, h) \int_0^R r J_1(\beta, r) \tau_{r0}^{(1)}(r, \omega) dr - \right. \\ &\quad \left. - s_4(\beta, h) \left[ \int_0^R r J_0(\beta, r) \sigma_{z0}^{(1)}(r, \omega) dr - \frac{T J_0(\beta r_0)}{2\pi G_1} \right] \right\} \\ \Omega(\beta, h) &= n_4(\beta, h) s_1(\beta, h) - s_4(\beta, h) n_3(\beta, h) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Равенство  $\Omega(\beta, h) = 0$  представляет собой уравнение типа Рэлея. В частном случае, если  $v_1 = v_2$ ,  $G_1 = G_2$ ,  $a_1 = a_2 = a$ ,  $b_1 = b_2 = b$  и  $h = 0$ , будем иметь  $\Omega(\beta, 0) = 4\beta^2 \mu_a \mu_b - (2\beta^2 - \beta^2 \omega^2)^2$

Подставляя значения (2.13) в первые два уравнения (2.9) (остальные уравнения удовлетворяются тождественно) приведем их к виду

$$\begin{aligned} &\int_0^R r \sigma_{z0}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^\infty \beta J_0(\beta r) J_0(\beta t) L_{11}(\beta, h) d\beta + \\ &+ \int_0^R r \tau_{r0}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^\infty \beta J_0(\beta r) J_1(\beta t) L_{12}(\beta, h) d\beta = \\ &= \varepsilon_\omega^{(h)} + \frac{T}{2\pi G_1} \int_0^\infty \beta J_0(\beta r) J_0(\beta r_0) L_{11}(\beta, h) d\beta \quad (0 < r < R) \\ &\int_0^R r \sigma_{z0}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^\infty \beta J_1(\beta r) J_0(\beta t) L_{21}(\beta, h) d\beta + \\ &+ \int_0^R r \tau_{r0}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^\infty \beta J_1(\beta r) J_1(\beta t) L_{22}(\beta, h) d\beta = \\ &= \frac{T}{2\pi G_1} \int_0^\infty \beta J_1(\beta r) J_0(\beta r_0) L_{21}(\beta, h) d\beta \quad (0 < r < R) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь коэффициенты  $L_{ij}(\beta, h)$  содержат геометрические и физические параметры слоев полупространства, а также частотный параметр и параметры распространения упругих волн в упругой среде.

Далее, используя представления интегралов

$$\int_0^{\infty} J_0(\beta r) J_0(\beta t) d\beta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\min(r,t)} \frac{dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)(t^2 - x^2)}}$$

$$\int_0^{\infty} J_1(\beta r) J_1(\beta t) d\beta = \frac{2}{\pi r t} \int_0^{\min(r,t)} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)(t^2 - x^2)}}$$

система интегральных уравнений (2.14) приводится к следующей системе интегральных уравнений второго рода:

$$\begin{aligned} \tau_{r0}^{(1)}(t, \omega) &= -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^R \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - t^2)}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r \Phi_1(r) dr}{\sqrt{(x^2 - r^2)}} \\ \tau_{r0}^{(1)}(t, \omega) &= -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^R \frac{dx}{x \sqrt{(x^2 - t^2)}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r^2 \Phi_2(r) dr}{\sqrt{(x^2 - r^2)}} \end{aligned} \quad (0 < t < R) \quad (2.15)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_1(r) &= \int_0^R \tau_{r0}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} [1 - \beta L_{11}(\beta, h)] J_0(\beta r) J_0(\beta t) d\beta - \\ &- \int_0^R \tau_{r0}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} \beta L_{12}(\beta, h) J_0(\beta r) J_1(\beta t) d\beta + \\ &+ \varepsilon_{\omega}^{(h)} + \frac{T}{2\pi G_1} \int_0^{\infty} \beta L_{11}(\beta, h) J_0(\beta r) J_0(\beta r_0) d\beta \\ \Phi_2(r) &= -\int_0^R \tau_{r0}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} \beta L_{21}(\beta, h) J_1(\beta r) J_0(\beta t) d\beta + \\ &+ \int_0^R \tau_{r0}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} [1 - \beta L_{22}(\beta, h)] J_1(\beta r) J_1(\beta t) d\beta + \\ &+ \frac{T}{2\pi G_1} \int_0^{\infty} \beta L_{21}(\beta, h) J_1(\beta r) J_0(\beta r_0) d\beta \end{aligned} \quad (2.16)$$

В системе интегральных уравнений (2.15), в качестве свободного члена, содержится амплитуда вертикальных колебаний  $\varepsilon_{\omega}^{(h)}$ , которая подлежит определению.

Подставляя правую часть первого уравнения из (2.15) в первое условие из (1.6) и производя интегрирования, для определения амплитуды  $\varepsilon_{\omega}^{(h)}$  получим значение

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\omega}^{(h)} &= \frac{4G_1 g}{4G_1 g R + P\omega^2} \left\{ -\frac{T}{2\pi G_1} \int_0^{\infty} L_{11}(\beta, h) J_0(\beta r_0) \sin(\beta R) d\beta - \right. \\ &- \int_0^R \tau_{r0}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} [1 - \beta L_{11}(\beta, h)] J_0(\beta t) \sin(\beta R) \frac{d\beta}{\beta} + \\ &\left. + \int_0^R \tau_{r0}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} L_{12}(\beta, h) J_1(\beta t) \sin(\beta R) d\beta \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Учитывая это значение в первом уравнении из (2.15) и представляя систему уравнений (2.15) в развернутом виде, приведем ее к виду

$$\begin{aligned}\sigma_{z0}^{(i)}(t, \omega) &= F_{\sigma}(t, \omega) + \int_0^R \sigma_{z0}^{(i)}(z, \omega) K_{11}(t, z, \omega) dz + \int_0^R \tau_{rz0}^{(i)}(z, \omega) K_{12}(t, z, \omega) dz \\ \tau_{rz0}^{(i)}(t, \omega) &= F_{\tau}(t, \omega) + \int_0^R \sigma_{z0}^{(i)}(z, \omega) K_{21}(t, z, \omega) dz + \int_0^R \tau_{rz0}^{(i)}(z, \omega) K_{22}(t, z, \omega) dz \\ (0 < i < R)\end{aligned}\quad (2.18)$$

Здесь ядра системы интегральных уравнений (2.18) выражаются при помощи коэффициентов  $s_j$  и  $n_j$  или  $L_{ij}$  и содержат геометрические и физические параметры слоев упругого полупространства. При этом свободные члены системы (2.18) имеют вид

$$\begin{aligned}F_{\sigma}(t, \omega) &= \frac{T}{\pi^2 G_1} \int_0^{\pi} L_{11}(\beta, h) \beta J_0(\beta r_0) d\beta \left[ \frac{\pi \beta J_0(\beta t)}{2} - \beta \int_0^{\pi} \frac{\sin(\lambda + \beta) R}{\lambda + \beta} J_0(\lambda t) d\lambda + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{R^2 - t^2}} \left( \cos(\beta R) - \frac{4G_1 g \sin(\beta R)}{\beta(4G_1 g R + P\omega^2)} \right) \right] \\ F_{\tau}(t, \omega) &= -\frac{T}{\pi^2 G_1} \int_0^{\pi} L_{21}(\beta, h) \beta J_0(\beta r_0) d\beta \left[ \beta \sqrt{R^2 - t^2} \cos(\beta R) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{R \sin(\beta R)}{\sqrt{R^2 - t^2}} + \beta^2 \int_t^R \sqrt{x^2 - t^2} \sin(\beta x) dx \right]\end{aligned}\quad (2.19)$$

При получении этого выражения использовано представление [4]

$$\int_t^R \frac{\sin(\beta x) dx}{\sqrt{x^2 - t^2}} = \frac{\pi J_0(\beta t)}{2} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(\lambda + \beta) R}{\lambda + \beta} J_0(\lambda t) d\lambda \quad (\beta \geq 0) \quad (2.20)$$

Амплитуда вертикальных колебаний весоного фундамента, вызванных действием сосредоточенной гармонической силы  $Te^{i\omega t}$ , приложенной на конечном расстоянии от фундамента на поверхности слоистого полупространства, определяется по формуле (2.17) после решения системы (2.18).

Система интегральных уравнений вида (2.18), для определения амплитудных значений нулевых гармоник контактных напряжений под фундаментом может быть решена методом последовательных приближений, если выполняется условие

$$\max_{j=1,2} \left\{ \int_0^R |K_{j1}(t, z, \omega)| dt + \int_0^R |K_{j2}(t, z, \omega)| dt \right\} < 1 \quad (2.21)$$

Вопрос разрешимости интегральных уравнений динамических контактных задач математической теории упругости исследовался многими исследователями. Решению таких уравнений посвящены работы В.А. Бабешко [5-7]. Этой проблеме посвящены также монография И.И. Воровича и В.А. Бабешко [8] и работы [11, 12].

Из формулы (2.17), в частном случае, при  $v_1 = v_2 = v$ ,  $G_1 = G_2 = G$ ,  $a_1 = a_2 = a$ ,  $b_1 = b_2 = b$ ,  $\omega = 0$  и  $h = 0$ , получим значение

$$\epsilon_0^{(0)} = \frac{T(1-v)}{2\pi GR} \arcsin \frac{R}{r_0} + \frac{1-2v}{2R} \int_0^R \tau_{rz0}^{(i)}(t, 0) (R - \sqrt{R^2 - t^2}) dt \quad (2.22)$$

Результат (2.22), который впервые получен в работе [9], может быть использован для определения изменения осадки весоного фундамента от действия дополнительной сосредоточенной силы  $T$ .

Аналогичным образом определяются также амплитуды горизонтальных и угловых колебаний жесткого весоного фундамента, лежащего на двухслойном упругом полупространстве со сцеплением.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Achenbach J.D. Wave propagation in Elastic Solids.—North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1973, 425p.
2. Бабешко В.А., Ворович И.И., Селезнев М.Г. Вибрация штампа на двухслойном основании. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 1, с. 166-172.
3. Нобль Б. Применение метода Винера-Хопфа. — М.: Изд. ИЛ, 1962, 279с.
4. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть 1. М.: Изд. ИЛ, 1949, 798с.
5. Бабешко В.А. Об интегральных уравнениях некоторых динамических контактных задач теории упругости и математической физики. — ПММ, 1969, т. 33, вып. 1, с. 52-60.
6. Бабешко В.А. О единственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач. — ДАН СССР, 1973, т. 210, №6, с. 1310-1313.
7. Бабешко В.А. О системах интегральных уравнений динамических контактных задач. — ДАН СССР, 1975, т. 220, №6, с. 1293-1296.
8. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические контактные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979, 320с.
9. Абрамян Б.А., Саакян А.В., Гаспарян А.В. О действии на весомый фундамент нормальной сосредоточенной силы, приложенной на конечном расстоянии от фундамента. — Докл. НАН Армении, 1996, т. 96, №1, с. 16-20.
10. Абрамян Б.А., Саакян А.В., Гаспарян А.В. Осесимметричная контактная задача для жесткого круглого фундамента, лежащего на двухслойном упругом полупространстве со сцеплением. — Докл. НАН Армении, 1997, т. 97, №3, с. 26-31.
11. Развитие теории контактных задач в СССР. Под редакцией Л.А. Галина. — М.: Наука, 1976, 493с.
12. Бородачев Н.М. Динамическая контактная задача для штампа с плоским круглым основанием, лежащим на упругом полупространстве. — Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, №2, с. 82-90.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
22.05.1997

УДК 539.2

К ЗАДАЧЕ СДВИГОВОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ В  
НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Мухсихачоян А.Р.

Ա.Ր. Մուխսիխաչոյան

Սափրի մակերևութային ալիքի անհամասեռ միջավայրում

Ցույց է տրված, որ որոշակի տիպերի անհամասեռ միջավայրերի համար շարժման հավասարումը բերվում է հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարման Ստուպկա է դիսպերսիոն հավասարումը և բերված են դիսպերսիոն կորերը: Ցույց է տրված, որ սափրի մակերևութային ալիքի ըն փուլային արագությունը և ըն գոյություն ունեցող լայնության կախված են անհամասեռության բնութագրիչներից:

A.R. Mukhsikhachoyan

On The Shear Surface Waves In a Nonhomogeneous Solid

Для конкретных типов неоднородных сред показана возможность приведения уравнения движения к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Получено дисперсионное уравнение и приведены дисперсионные кривые. Показано, что как фазовая скорость, так и условие существования СПВ существенно зависят от характеристик неоднородностей.

Изучение распространения поверхностных акустических волн в неоднородных твердых средах становится все более актуальным в связи с тем, что задав характеристики неоднородной среды, можно управлять распространением волны.

Поперечные поверхностные волны в полупространстве с небольшой поверхностной неоднородностью рассмотрены в работе [1]. В работе [2] показано, что в слабонеоднородном по глубине упругом полупространстве распространяются сдвиговые поверхностные волны (СПВ), условия существования которых существенно зависят от параметров неоднородностей. При помощи БВК метода авторами [3] получено решение задачи о распространении упругих волн в неоднородной упругой среде, рассмотрено движение в неограниченной среде, свойства которой изменяются по гармоническому закону. В работе [4] рассмотрены поверхностные волны в слое при конкретных законах неоднородности среды, а в [5] - динамические особенности распространения волн в вертикально-неоднородных средах.

В настоящей статье исследуется как возможность приведения уравнения движения к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами (с помощью соответствующего выбора законов изменения жесткости и плотности неоднородной среды), так и возможность существования СПВ в данной среде.

1. Отнесем декартовую систему координат  $XYZ$  к упругому неоднородному полупространству таким образом, чтобы абсциссы совпали с направлением распространения волны, а ординаты - с направлением распространения в глубину полупространства  $y > 0$ . Рассматривается антиплоское напряженно-деформируемое состояние с вектором перемещения  $U = \{0; 0; W(x, y, t)\}$ . Характеристиками неоднородной

среды являются модуль сдвига  $G(y)$  и плотность  $\rho(y)$ . Как известно, уравнение движения упругой изотропной неоднородной среды имеет вид

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{G(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left[ G(y) \frac{\partial W}{\partial y} \right] = \frac{1}{c^2(y)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

где  $C(y) = [G(y)/\rho(y)]^{1/2}$  — переменная скорость сдвиговой объемной волны. Ищем решение этого уравнения в виде

$$W = \varphi(y) \exp[i(kx - \omega t)]$$

Тогда уравнение (1.1) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами

$$\varphi(y) + G(y)G^{-1}(y)\varphi(y) - k^2(1 - \eta)\varphi(y) = 0 \quad (1.2)$$

где  $\eta(y) = V^2/C^2(y)$ ,  $V = \omega/k$  — фазовая скорость СПВ. Если ввести функцию

$$\Psi(y) = G^{1/2}(y)\varphi(y) \quad (1.3)$$

то для  $\Psi(y)$  получим

$$\Psi - v^2\Psi = 0 \quad (1.4)$$

где

$$v = \left[ k^2(1 - \eta(y)) + (G^{1/2}(y))^{-1} G^{-1/2}(y) \right]^2$$

Однако видно, что при определенных неоднородностях, (1.4) можно привести к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Для этого необходимо, чтобы имели место следующие требования:

1.  $C(y) = C = \text{const}$  — скорость сдвиговой объемной волны была постоянной, т.е. жесткость и плотность среды менялись идентичным образом.

$$2. (G^{1/2}(y))^{-1} G^{-1/2}(y) = \beta = \pm \frac{1}{p^2} = \text{const} \quad (1.5)$$

второе слагаемое в выражении  $v$  также постоянно.

Интегрируя выражение (1.5), для жесткости неоднородной среды получим следующие возможные законы изменения [7]:

$$G(y) = \begin{cases} G_0 [\cosh(y/p) + A \sinh(y/p)]^2, & \beta = 1/p^2 \end{cases} \quad (1.6)$$

$$G(y) = \begin{cases} G_0 [1 + Ay]^2, & \beta = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

$$G(y) = \begin{cases} G_0 [\cos(y/p) + A \sin(y/p)]^2, & \beta = -1/p^2 \end{cases} \quad (1.8)$$

где  $p, A$  и  $G(0) = G_0 > 0$  — постоянные. По требованию 1 плотность этой среды будет меняться аналогичными (1.6)-(1.8) законами

$$\rho(y) = G(y)/C^2$$

2. С учетом требований 1 и 2 решение уравнения (1.4) запишется следующим образом [6]:

$$\Psi(y) = \Psi(0) \exp(-vy) \quad (2.1)$$

где

$$v = [k^2(1 - \eta) \pm 1/p^2]^{1/2}, \quad \eta = V^2/C^2$$

Тогда поле упругих перемещений СПВ представляется в виде

$$W(x, y, t) = W(0) [G(0)/G(y)]^{1/2} \exp(-vy) \exp[i(kx - \omega t)] \quad (2.2)$$

Исходя из (2.1), условие затухания волны примет вид

$$0 < V/C < [1 \pm 1/(kp)^2]^{1/2} \quad (2.3)$$

Очевидно, что оно зависит от волнового числа и, следовательно затухание допустимо для СПВ с длиной

$$kp > 1, \text{ если } \beta = -1/p^2 \quad (2.4)$$

$$\infty > kp > 0, \text{ если } \beta = 1/p^2 \quad (2.5)$$

По коротковолновому приближению (2.3) приводится к условию затухания волны для однородной среды, а в случае длинноволнового приближения (что приемлемо только для (2.5)) верхний предел допустимого диапазона фазовой скорости стремится к бесконечности.

Пусть граница полупространства  $y = 0$  свободна от механических нагрузок  $\sigma_{32} = 0$ . Тогда дисперсионное уравнение запишется в виде

$$2vG(0) + G(0) = 0 \quad (2.6)$$

где  $V$  определяется по (2.1), а  $G(y)$  - по (1.6)-(1.8). Из (2.6) видно, что условием существования СПВ в рассматриваемой среде является

$$G(0) \leq 0 \quad (2.7)$$

Последнее условие равносильно тому, чтобы постоянная  $A$  в (1.6)-(1.8) стала отрицательной при  $\beta = 0$  или неположительной при других значениях  $\beta$ . Из дисперсионного уравнения (2.6) определим фазовую скорость СПВ

$$V/C = [1 + H(0)/k^2]^{1/2} \quad (2.8)$$

где

$$H = \ln \sqrt{G}$$

Легко заметить, что найденная скорость удовлетворяет условию затухания волны. Требование, чтобы скорость была действительной величиной, приводит к ограниченности длины распространяющихся волн:

$$kp > K_1 = [-H(0)p^2]^{1/2} \quad (2.9)$$

если

$$H(0) < 0 \quad (2.10)$$

В обратном же случае, если

$$H(0) > 0 \quad (2.11)$$

длина этих волн не ограничивается. Однако, требование (2.9) более строго, чем (2.4), следовательно, длина СПВ определяется именно по (2.9). Для конкретных неоднородностей (1.6)-(1.8) соответственно получим

$$H(0) = \begin{cases} (1 - A^2)/p^2 \\ -A^2 \\ -(1 + A^2)/p^2 \end{cases}$$

Как и следовало ожидать, при (1.6) выполняется условие (2.10), если  $A^2 > 1$  или (2.11), если  $A^2 < 1$ . Из всего вышесказанного следует, что дисперсионные кривые, изображающие зависимость  $V(kp)$ , имеют вид, приведенный на фиг.1. Кривая 1 соответствует случаю (2.10), а кривая 2 - случаю (2.11). Первая начинается со значения  $K_1$  и при  $kp \rightarrow \infty$  приближается к 1, оставаясь меньше ее. Вторая кривая начинается с верхнего предела допустимого диапазона фазовой скорости  $V_0$  (которая

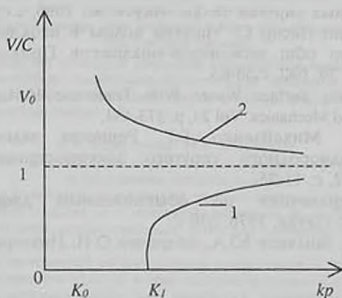
пределяется по (2.3) для определенного  $K_0$ ) и при  $kp \rightarrow \infty$  приближается 1, оставаясь больше нее.

3. Обсудим некоторые частные случаи. Пусть постоянная  $A = 1$ , тогда жесткость представится в виде

$$G(y) = \begin{cases} G_0 \exp(2y/p), & \beta > 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$G(y) = \begin{cases} G_0(1 + y/p)^2, & \beta = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$G(y) = \begin{cases} G_0[1 + \sin(2y/p)]^2, & \beta < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$



Фиг. 1

Первая из этих функций представляет из себя экспоненциально возрастающую зависимость от координаты  $y$ . Вторая функция на области определения  $G(y)$  также непрерывно возрастает. И, наконец, третья - (3.3) является периодически изменяющейся по глубине характеристикой среды. Все эти случаи характерны тем, что ни при одной из них СПВ не существует, поскольку нарушается условие существования поверхностной волны  $A < 0$ .

Теперь предположим  $A = -1$ . Тогда

$$G(y) = \begin{cases} G_0 \exp(-2y/p), & \beta > 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

$$G(y) = \begin{cases} G_0(1 - y)^2, & \beta = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$G(y) = \begin{cases} G_0[1 - \sin(2y/p)]^2, & \beta < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Здесь, в отличие от предыдущего, (3.4) характеризует по глубине убывающую жесткость. При том для всех случаев (3.4)-(3.6) СПВ существует.

В случае  $A = 0$  имеем

$$G(y) = \begin{cases} G_0 \operatorname{ch}^2(y/p), & \beta > 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$G(y) = \begin{cases} G_0, & \beta = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

$$G(y) = \begin{cases} G_0 \cos^2(y/p), & \beta < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Тут характерным является тот факт, что (3.8) соответствует случаю однородной среды, при которой, как известно, СПВ не существует, но для

(3.7) и (3.9)  $G(0) = 0$ , что вполне соответствует условию существования СПВ.

Автор благодарен доценту кафедры механики сплошной среды ЕГУ Минасяну М.М. за полезные обсуждения и советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов И.А. О поверхностной волне, вызванной неоднородностью в твердом теле. - В кн.: Акустическая спектроскопия, квантовая акустика, акустоэлектроника: Материалы X Всесоюз. конф. по квантовой акустике и акустоэлектронике. Ташкент: Фан, 1978, с. 101-103.
2. Белубекян М.В., Мухсичаоян А.Р. Сдвиговая поверхностная волна в слабонеоднородных упругих телах. - Акуст. ж., 1996, т.42, №2, с.179-182.
3. Нзйфех А., Немат-Насер С. Упругие волны в неоднородных упругих средах. - Тр. амер. общ. инженеров-механиков. Прикладная механика, серия E, 1972, т. 39, №3, с.58-65.
4. Maugin G.A. Elastic Surface Waves With Transverse Horizontal Polarization// Advances In Applied Mechanics. Vol 23, p. 373-434.
5. Алексеев А.С., Михайленко Б.Г. Решение задачи Лэмба для вертикально-неоднородного упругого полупространства. - Физика Земли, 1976, №12, с. 11-25.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. -М.: Наука, 1976. 576 с.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. -М.: Наука, 1981. 797 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
9.07.1997

**On Oscillations of Anisotropic Electroconductive Shallow Shells  
in Normal Magnetic Fields**  
Ambartsumian S.A., Belubekian M.V.

Ս. Ա. Համարձումյան, Մ Վ. Բելուբեկյան

Անիզոտրոպ էլեկտրահաղորդիչ փոքր կորություն ունեցող բաղաձնի տատանումները լայնական մագնիսական դաշտում

Անիզոտրոպ բաղաձնների տեսության ընդհանուր սկզբունքներին համապատասխան, լայնական սահմանի և բարակ մարմինների մագնիսաառաձգականության հիմնական հիպոթեզի հաշվառմամբ ստացված են ալիքների տարածման ընդհանուր հավասարումները էլեկտրահաղորդ օրթոտրոպ փոքր կորություն ունեցող բաղաձնների համար

С.А.Амбарцумян, М.В.Белубекян

Колебания анизотропной электропроводящей пологой оболочки  
в поперечном магнитном поле

В соответствии с общими принципами теории анизотропных оболочек с учетом деформаций поперечных сдвигов и с основной гипотезой магнитоупругости тонких тел получены общие уравнения распространения волны для электропроводящих ортотропных пологих оболочек.

В частном случае изотропной несъемной пологой прямоугольной сферической панели, без учета деформации поперечных сдвигов и при наличии начального поперечного магнитного поля, задача преимущественно поперечных колебаний приводится к одному уравнению относительно прогиба оболочки. При граничных условиях шарнирного опирания торцов панели определены частоты колебаний и коэффициент затухания в зависимости от напряженности начального магнитного поля.

**1.Introduction**

According to the general principles of the theory of anisotropic shells, which considers transverse shear deformations [1-3] and fundamental hypotheses of magnetoelasticity of thin bodies[2,4], the general equations of wave propagation in the electroconductive orthotropic shallow shells are obtained, and the problem of oscillations of extremely shallow shells is investigated.

A certain problem of isotropic and anisotropic electroconductive plates and shells in magnetic fields in [3-9] is considered.

**2.Initial Relationships and hypotheses**

Let us consider a thin elastic orthotropic shell of uniform thickness  $h$  and finite electroconductivity  $[\sigma](\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , oscillating in the external uniform magnetic field with vector  $H_0(0, 0, H_{03})$ , normal to the middle surface  $\alpha\beta$ .

Let the body of the shell be expressed by a triorthogonal system of curvilinear coordinates  $\alpha, \beta, \gamma$ , where  $\alpha$  and  $\beta$  coincide with the lines of principal curvature of the middle surface,  $\gamma$  being normal to the coordinate surface  $\alpha\beta$  is rectilinear.

The orthotropic material of the shell has three mutually orthogonal planes of elastic symmetry, which at each point are parallel to the coordinate surface  $\alpha = \text{const}$ ,  $\beta = \text{const}$ ,  $\gamma = \text{const}$ .

The dielectric constants outside and inside the shell are denoted by  $\epsilon^{(e)}$  and  $\epsilon$  respectively, and the magnetic permeability coefficients  $\mu^{(e)}$  and  $\mu$  are taken equal to one.

The problem of magnetostatics in an unperturbed case is assumed to be solved [4]. We shall use linearized electromagnetoelastic equations. Then we neglect the shift current.

The present problem of vibrations of a shell is investigated on the base of the following hypotheses:

—The hypotheses of the magnetoelasticity of thin bodies [4] according to which

$$e_\alpha = e_1 = \varphi(\alpha, \beta, t), \quad e_\beta = e_2 = \psi(\alpha, \beta, t), \quad h_\gamma = h_3 = f(\alpha, \beta, t) \quad (2.1)$$

where  $h(h_1, h_2, h_3)$ ,  $e(e_1, e_2, e_3)$  are the induced electromagnetic fields components,  $\varphi, \psi, f$  are desired arbitrary functions, which must satisfy the electrodynamic equations,

and the conditions on the surfaces of the shell  $\left(\gamma = \pm \frac{h}{2}\right)$  [4];

—The hypothesis of improved theory of anisotropic shells [1,3,10] according to which

$$\begin{aligned} u_1 &= u_\alpha = (1 + k_1 \gamma) u - \gamma \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \gamma \frac{h^2}{8} \left( 1 + \frac{k_1}{2} \gamma - \frac{4}{3} \frac{\gamma^2}{h^2} \right) a_{35} \Phi \\ u_2 &= u_\beta = (1 + k_2 \gamma) v - \gamma \frac{\partial w}{\partial \beta} + \gamma \frac{h^2}{8} \left( 1 + \frac{k_2}{2} \gamma - \frac{4}{3} \frac{\gamma^2}{h^2} \right) a_{36} \Psi \\ u_3 &= u_\gamma = w \end{aligned} \quad (2.2)$$

where  $u(\alpha, \beta, t), v(\alpha, \beta, t), w(\alpha, \beta, t)$  are the desired displacements of the shells middle surface,  $\Phi(\alpha, \beta, t), \Psi(\alpha, \beta, t)$  are desired functions which characterize shear deformations of the shell,  $k_1 = k_1(\alpha, \beta), k_2 = k_2(\alpha, \beta)$  are principal curvatures of the coordinate surface  $\alpha\beta$ , (For shallow shells it is assumed that the  $k_i$  upon differentiation behave as constants[1]),  $a_{35} = G_{11}^{-1}, a_{36} = G_{22}^{-1}$  are the elasticity coefficients,  $G_{11}, G_{22}$  are shear moduli.

The equations of motion of the shell are [1,2,4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_{12}}{\partial \beta} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \rho K_1 d\gamma + \int_{-h/2}^{h/2} \rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} d\gamma \\ \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S_{12}}{\partial \alpha} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \rho K_2 d\gamma + \int_{-h/2}^{h/2} \rho \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2} d\gamma \\ -(k_1 T_1 + k_2 T_2) + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_2}{\partial \beta} &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial \beta} - N_1 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \gamma \rho K_1 d\gamma + \int_{-h/2}^{h/2} \gamma \rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} d\gamma \\ \frac{\partial M_2}{\partial \beta} + \frac{\partial H}{\partial \alpha} - N_2 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \gamma \rho K_2 d\gamma + \int_{-h/2}^{h/2} \gamma \rho \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2} d\gamma \end{aligned} \quad (2.3)$$

where  $k = (1 + k_1 \gamma)(1 + k_2 \gamma)$ ,  $T_i, S_{ik}, N_i, M_i$  are the internal forces and moments,  $\rho$  is the shell material density,  $t$  is the time,  $\rho K_i$  are the components of the "cargo" term for which we have generally [2,4]

$$\rho K(K_1, K_2, K_3) = [\sigma, \epsilon] \left( \epsilon + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \times B_0 \right) \times B_0 \quad (2.4)$$

$B$  is the magnetic induction vector in shell,  $u(u_1, u_2, u_3) = u(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$  is the displacement vector,  $c$  is the electrodynamic constant.

### 3. The Equations of Magnetoelasticity for a Thin Orthotropic Shell

Integrating electrodynamic equations with the account of the surface conditions

$h_1 = h_1^+$ , when  $\gamma = \frac{h}{2}$  and  $h_1 = h_1^-$ , when  $\gamma = -\frac{h}{2}$ , for  $h_1$  we obtain [2,4]

$$h_1 = \frac{h_1^+ + h_1^-}{2} + \gamma \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{4\pi\sigma_1}{c} \varphi \right) - \frac{4\pi\sigma_1 B_0}{c^2} \left( a_1 \frac{\partial u}{\partial t} - b \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} + c_1 a_{ss} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$$

$$h_2 = \frac{h_2^+ + h_2^-}{2} + \gamma \left( \frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{4\pi\sigma_2}{c} \varphi \right) - \frac{4\pi\sigma_2 B_0}{c^2} \left( a_2 \frac{\partial v}{\partial t} - b \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial t} + c_2 a_{ss} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \quad (3.1)$$

where

$$a_1 = \gamma + \frac{\gamma^2}{2} k_1 - \frac{h^2}{8} k_1, \quad b = \frac{\gamma^2}{2} - \frac{h^2}{8}$$

$$c_1 = \frac{\gamma^2 h^2}{16} - \frac{\gamma^4}{24} - \frac{5h^4}{384} + \frac{\gamma^3 h^2}{48} k_1$$

Then we have

$$\sigma_1 \epsilon_1 = -\gamma \left( \sigma_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \sigma_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) - \frac{B_0}{c} \left[ \sigma_1 \left( a_2 \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial t} - b \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta \partial t} + c_2 a_{ss} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha \partial t} \right) - \right.$$

$$\left. - \sigma_2 \left( a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta \partial t} - b \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta \partial t} + c_1 a_{ss} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta \partial t} \right) \right] \quad (3.2)$$

Thus, we have all the components of excited electromagnetic field in the shell, given by eight functions  $u, v, w, \Phi, \Psi, \varphi, \psi, f$  and by induced magnetic field's values  $h_1$  and

$h_2$  on the shell's surfaces  $\left( \gamma = \pm \frac{h}{2} \right)$ .

Then from (2.4) for the components of the "cargo" term we obtain

$$\rho K_1 = \frac{\sigma_1}{c} \left\{ B_0 \varphi - \frac{B_0^2}{c} \left[ (1 + k_1 \gamma) \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} + 2 \left( \frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3} + \frac{\gamma h^2}{8} k_1 \right) a_{ss} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \right\}$$

$$\rho K_2 = \frac{\sigma_2}{c} \left\{ B_0 \varphi + \frac{B_0^2}{c} \left[ (1 + k_2 \gamma) \frac{\partial v}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial t} + 2 \left( \frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3} + \frac{\gamma h^2}{8} k_2 \right) a_{ss} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right] \right\} \quad (3.3)$$

Substituting the values of internal forces and moments, components of displacements and components of the "cargo" term in (2.3) we get the following equations of motion [1,2,4]

$$C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + (k_1 c_{11} + k_2 c_{12}) \frac{\partial w}{\partial \alpha} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} -$$

$$- \frac{\sigma_1}{c} \left\{ B_0 h \varphi - \frac{B_0^2}{c} \left[ h \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{h^3}{12} (k_2 + k_1) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} + \frac{h^3}{120} (1.625 k_1 + k_2) a_{ss} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \right\}$$

$$C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + (k_2 c_{22} + k_1 c_{12}) \frac{\partial w}{\partial \beta} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} +$$

$$+ \frac{\sigma_2}{c} \left\{ B_0 h \varphi + \frac{B_0^2}{c} \left[ h \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{h^3}{12} (k_1 + k_2) \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial t} + \frac{h^3}{120} (1.625 k_2 + k_1) a_{ss} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right] \right\}$$

$$- (k_1 C_{11} + k_2 C_{12}) \frac{\partial u}{\partial \alpha} - (k_2 C_{22} + k_1 C_{12}) \frac{\partial v}{\partial \beta} - (k_1^2 C_{11} + 2k_1 k_2 C_{12} + k_2^2 C_{22}) w =$$

$$\begin{aligned}
& -k_1(k_1 D_{11} + k_2 D_{12}) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - k_2(k_2 D_{22} + k_1 D_{12}) \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{h^3}{12} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \right) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
& D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta^2} - \frac{h^2}{10} \left[ a_{55} \left( D_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \Phi + \right. \\
& \left. + a_{44} (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha \partial \beta} \right] + \frac{h^3}{12} \Phi = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial t^2} - \rho \frac{h^5}{120} a_{55} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \rho \frac{h^3}{12} k_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\
& + \frac{\sigma_2}{c} \left\{ \frac{h^3}{12} B_0 (k_1 + k_2) \psi - \frac{B_0^2}{c} \left[ \frac{h^3}{12} (2k_1 + k_2) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} + \frac{h^5}{120} a_{55} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \right\} \\
& D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial \beta \partial \alpha^2} - \frac{h^2}{10} \left[ a_{44} \left( D_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \Psi + \right. \\
& \left. + a_{55} (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} \right] + \frac{h^3}{12} \Psi = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial \beta \partial t^2} - \rho \frac{h^5}{120} a_{44} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \rho \frac{h^3}{12} k_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \\
& + \frac{\sigma_1}{c} \left\{ \frac{h^3}{12} B_0 (k_1 + k_2) \varphi - \frac{B_0^2}{c} \left[ \frac{h^3}{12} (2k_2 + k_1) \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial t} + \frac{h^5}{120} a_{44} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right] \right\} \quad (3.4)
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
C_{ik} &= h B_{ik}, \quad D_{ik} = \frac{h^3}{12} B_{ik} \\
B_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B_{66} = G_{12} \\
B_{12} &= \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad a_{55} = G_{13}^{-1}, \quad a_{44} = G_{23}^{-1}
\end{aligned}$$

$E_i$  are Young's moduli in the directions  $\alpha, \beta, \gamma (1, 2, 3)$ ;  $G_{ik}$  are shear moduli for the planes parallel at each point to the coordinate surfaces  $\alpha = \text{const}$ ,  $\beta = \text{const}$ ,  $\gamma = \text{const}$ ;  $\nu_1, \nu_2$  are Poisson's ratios.

The equations of electrodynamics averaged over the shell's thickness we obtain [1, 2, 4, 5]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \alpha} &= \frac{h_1^+ - h_1^-}{h} - \frac{4\pi\sigma_2}{c} \left[ \psi - \frac{B_0}{c} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{h^4}{192} k_1 a_{55} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right] \\
\frac{\partial f}{\partial \beta} &= \frac{h_2^+ - h_2^-}{h} - \frac{4\pi\sigma_1}{c} \left[ \varphi + \frac{B_0}{c} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{h^4}{192} k_2 a_{44} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \right] \\
\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} &= 0 \quad (3.5)
\end{aligned}$$

The equations of electrodynamics for outside regions (vacuum) [4] are

$$\begin{aligned}
\text{rot} h^{(e)} &= \frac{1}{c} \frac{\partial e^{(e)}}{\partial t}, \quad \text{div} h^{(e)} = 0 \\
\text{rot} e^{(e)} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \text{div} e^{(e)} = 0 \quad (3.6)
\end{aligned}$$

The systems of equations (3.5), (3.6) are to be added to the system (3.4)

The hypothesis of magnetoelasticity of thin bodies reduces the problem of magnetoelasticity for the region occupied by the thin body itself to a two-dimensional

problem of shell. However, the obtained equations of perturbed motion contain unknown boundary (surface) values of the induced electromagnetic field components. Consequently, the problem of magnetoelasticity in most of the cases remains a spatial one. Therefore, the obtained two-dimensional equations of motion have to be solved with the equations of electrodynamics for the medium surrounding the thin body [4,11].

According to the basic statements of the hypothesis of magnetoelasticity of thin bodies, effective methods for reducing the general problem of magnetoelasticity to a two-dimensional one are proposed [4,11].

Introducing the concept of a boundary layer around the shell (with thickness  $\lambda_0$ , where  $\lambda_0$  is the length of the halfwave of the shell elastic oscillations), we obtain the following differential relations between the components of the interface of the media (shell and boundary layer) [3,11]

$$\begin{aligned} \Pi(h_1^+ - h_1^-) &= \frac{2}{\lambda_0} \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right), \quad \Pi(h_1^+ + h_1^-) = 0 \\ \Pi(h_2^+ - h_2^-) &= \frac{2}{\lambda_0} \left( \frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \quad \Pi(h_2^+ + h_2^-) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

where

$$\Pi = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

When these equations are added to the equations (3.4), (3.5), a closed system of two-dimensional equations of magnetoelasticity of thin shell for a general case is obtained.

Adding the corresponding boundary conditions, initial conditions at infinity [1,4,11], we must solve the problems of oscillations of the orthotropic shallow shells and investigate the wave propagation in shells [1-11].

#### 4. On the Transverse Oscillations of a Rectangular Spherical Panel

As an example let us consider a problem of basically transverse magnetoelastic oscillations of an isotropic

( $E_1 = E_2 = E$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ,  $G_{ik} = E/2(1 + \nu)$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ) rectangular spherical panel ( $k_1 = k_2 = k = R^{-1}$ ) without taking into account the rotatory inertia and transverse shears. According to (3.7) we assume that  $h_1^- = -h_1^+$ ,  $h_2^- = -h_2^+$ . Here we neglect the inertia terms  $\partial^2 u / \partial t^2$ ,  $\partial^2 v / \partial t^2$ ,  $\partial u / \partial t$ ,  $\partial v / \partial t$  and consequently the energy dissipation caused by longitudinal oscillation.

In this case the following solution

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi \equiv 0, \quad h_1^+ \equiv 0, \quad h_2^+ \equiv 0 \quad (4.1)$$

satisfies the equations (3.5), (3.7).

The equations of mainly transverse oscillations can be rewritten in the form

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu}{2} \Delta u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{(1-\nu^2) h^2 \sigma B_0^2}{6 E R c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} &= 0 \\ \frac{1-\nu}{2} \Delta v + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{(1-\nu^2) h^2 \sigma B_0^2}{6 E R c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial t} &= 0 \quad (4.2) \\ \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_2}{\partial \beta} - \frac{E h}{(1-\nu) R} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) - \frac{2 E h}{1-\nu} \frac{w}{R^2} &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ D \frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta w + N_1 &= \frac{h^2 \sigma B_0^2}{12 c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} \end{aligned}$$

$$D \frac{\partial}{\partial \beta} \Delta w + N_z = \frac{h^3 \sigma B_0^2}{12c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial t}$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.3)$$

Introducing the notations:

$$\theta = \frac{1+\nu}{1-\nu}, \quad \gamma_1^2 = \frac{h^3 \sigma B_0^2}{6c^2}, \quad \gamma_2^2 = \frac{(1+\nu)h^3 \sigma B_0^2}{3ERc^2}$$

we rewrite the system (4.2), (4.3) in a more convenient form

$$\Delta u + \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + \frac{\theta}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \gamma_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} = 0$$

$$\Delta v + \theta \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + \frac{\theta}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \gamma_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial t} = 0 \quad (4.4)$$

$$D \Delta^2 w - \gamma_1^2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2Eh}{1-\nu} \frac{w}{R^2} + \frac{Eh}{(1-\nu)R} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) = 0 \quad (4.5)$$

By analogy with the wave propagation theory we introduce  $\varphi_1, \psi_1$  functions

$$u = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta}, \quad v = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \quad (4.6)$$

which allow to separate the equation for  $\psi_1$ , which determines the shears of middle surface. Using the transform (4.6) we bring the system (4.4)-(4.5) into the form

$$\Delta \psi_1 = 0, \quad (1+\theta) \Delta \varphi_1 + \frac{\theta}{R} w + \gamma_2^2 \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

$$D \Delta^2 w - \gamma_1^2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2Eh}{1-\nu} \frac{w}{R^2} + \frac{Eh}{(1-\nu)R} \Delta \varphi_1 = 0 \quad (4.7)$$

The equation for  $\psi_1$  is independent from the system of two other equations for  $\varphi_1$  and  $w$ . However, in general case  $w, \varphi_1$  and  $\psi_1$  are connected by means of the boundary conditions.

Determining  $\Delta \varphi_1$  from the second equation (4.7) and substituting it into the third equation we obtain the equation for  $w$  only

$$D \Delta^2 w - \frac{h^3 \sigma B_0^2}{12c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{(1+\nu)h^3 \sigma B_0^2}{6R^2 c^2} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{(3-\nu)Eh}{2(1-\nu)} \frac{w}{R^2} = 0 \quad (4.8)$$

Although the equation for  $w$  is independent, the problem for transverse oscillations does not separate from the problem for  $\varphi_1, \psi_1$  in the case of general boundary conditions. In the case of rectangular spherical panel when the edges  $\alpha = 0, a$  and  $\beta = 0, b$  are free-supported, the separation mentioned above is valid. So the solution for  $w$  be expressed as

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{nm} e^{i\omega_{nm} t} \sin \lambda_m \alpha \sin \mu_n \beta, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{b} \quad (4.9)$$

where  $\omega_{nm}$  is determined by the characteristic equation

$$\omega_{nm}^2 + \frac{h^2 \sigma B_0^2}{12\rho c^2} \left[ \lambda_m^2 + \mu_n^2 - \frac{2(1+\nu)}{R^2} \right] \omega_{nm} + \frac{D}{\rho h} (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 + \frac{(3-\nu)E}{2(1-\nu)R^2 \rho} = 0 \quad (4.10)$$

The imaginary part of the root  $\omega_{nm}$  determines the oscillation frequency. Similar to the plate oscillations, the influence of the magnetic field on the frequency is weak in case of real limitations for the magnetic field intensity

From the expression for the coefficient  $\operatorname{Re}(\omega_{mn})$

$$\operatorname{Re}(\omega_{mn}) = -\frac{h^2 \sigma B_0^2}{24 \rho c^2} \left[ \lambda_m^2 + \mu_n^2 - \frac{2(1+\nu)}{R^2} \right] \quad (4.11)$$

it follows that the minimum damping occurs for the oscillation form  $m=1, n=1$ . In this case for shallow spherical panel the following condition is necessary:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} > \frac{2(1+\nu)}{(\pi R)^2} \quad (4.12)$$

From (4.11) it follows, that the curvature of the panel causes reduction of the dissipation. In the case of anisotropic electroconductive shell, i.e. when  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , the characteristic equation is:

$$\begin{aligned} \omega_{mn}^2 + \frac{B_0^2 h^2}{12 \rho c^2} (\sigma_2 \lambda_m^2 + \sigma_1 \mu_n^2) \left[ 1 - \frac{2(1+\nu)}{R^2 (\lambda_m^2 + \mu_n^2)} \right] \omega_{mn} + \\ + \frac{D}{\rho h} (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 + \frac{E(3-\nu)}{2(1-\nu) \rho R^3} = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

In general case the roots of equation (4.13) are complex ones. Imaginary and real parts of the root represent frequency and damping respectively. Both of these characteristics depend not only on absolute values of electroconductivity coefficients, but also on relations between these values and dimensions of the shell, i.e. on the expression:

$$\frac{\sigma_2 m^2}{a^2} + \frac{\sigma_1 n^2}{b^2} > 0 \quad (4.14)$$

In particular cases it is possible, that

$$\left\{ \frac{B_0 h}{24 \rho c} (\sigma_2 \lambda_m^2 + \sigma_1 \mu_n^2) \left[ 1 - \frac{2(1+\nu)}{R^2 (\lambda_m^2 + \mu_n^2)} \right] \right\}^2 - \frac{D}{\rho h} (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 - \frac{E(3-\nu)}{2(1-\nu) \rho R^2} > 0$$

So that  $\operatorname{Im}(\omega_{mn}) = 0$  and any disturbances will attenuate without oscillation.

**Acknowledgment.** This work was supported by INTAS under the grant INTAS-94-1210.

#### REFERENCES

1. Ambartsumian S.A. General theory of anisotropic shells. - Nauka, 1974 (in Russian). 384p.
2. Ambartsumian S.A., Belubekian M.V. Some problems of electromagnetoelasticity of plates. - Yerevan St. University, 1991 (in Russian). 144p.
3. Ambartsumian S.A. Theory of anisotropic Plates. - Hemisphere pub. Corp. 1991. 356p.
4. Ambartsumian S.A., Bagdasarian G.E., Belubekian M.V. Magnetoelasticity of thin Shells and Plates. - Nauka, 1977 (in Russian). 272p.
5. Ambartsumian S.A., Bagdasarian G.E., Belubekian M.V. On the problem of magnetoelastic vibrations of anisotropic shells and plates. - Mechanics of deformable bodies and constructions (devoted to the 60th anniversary of Y.N. Rabotnov), Nauka, 1975 (in Russian). P.26-31.
6. Ambartsumian S.A. On the problem of oscillations of the anisotropic electroconductive plates in the magnetic fields. - Mechanical behavior of anisotropic solids. Euromech. collage. 115, 1982. p. 603-623.
7. Sarkisian S.H., Barchandyan V.A. Some problems of oscillations of anisotropic plates, having anisotropic electroconductivity, in longitudinal magnetic fields. Mezhdvuzovskij sbornik. Mekhanika, Yerevan, No.4, 1986 (in Russian). p. 129-135.

8. Sarkisian V.S., Minasian M.M. On the theory magnetoelasticity of nonorthotropic plate with anisotropic electroconductivity. - *Mezhvuzovskij sbornik. Mekhanika*, Yerevan, No.2, 1982 (in Russian). p. 97-101
9. Sarkisian S.V., Petrosian S.A. On the Magnetoelasticity of Shallow Shells with the account of Transverse Shear deformations. - *Mezhvuzovskij sbornik. Mekhanika*, Yerevan, No.4, 1986 (in Russian). p. 90-96.
10. Ambartsumian S.A. Fragments of the theory of anisotropic shells. - *World Scientific*, 1991. 232p.
11. Ambartsumian S.A., Belubekian M.V. Vibration and Stability of Current Carrying Plates. - *Armenian Acad. of Sci. Publ.* 1992 (in Russian). 124p.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
15.05.1995

# THERMOMAGNETOELASTIC MODULATION WAVES IN A NON-LINEAR PLATE

Bagdov A.G., Movsisyan L.A.

Ա.Գ. Բաղդոբ, Լ.Ա. Մովսիսյան

Модуляция термоманнитоупругих волн в нелинейной пластине

Ա.Գ. Բաղդոբ, Լ.Ա. Մովսիսյան

Ջերմամագնիսաառաճակուն ալիքների մոդուլացիան ոչ գծային սալում

Դասական դրվածքով դիտարկվում է ֆիզիկորեն ոչ դժային սալում ալիքների տարածումը և մոդուլացիան: Սալը վերջավոր հաղորդիչ է, գտնվում է երկայնական աաղնիսական և կապակցված ջերմային դաշտերում: Ստացված է մադուլացիայի կայունության պայմանը Ֆուրյեի է տրվում, որ դիսիպացիան, որը պայմանավորված է վերջավոր հաղորդականությամբ և ջերմային կապակցվածությամբ, կարող է ոչ դիսիպացիոն անկայուն համակարգը դարձնել կայուն:

In the present paper the modulation equation for a non-linear magnetoelastic plate with finite conductivity in longitudinal magnetic field accounting thermal effects is derived. The obtained equation is investigated on stability.

## 1. Introduction.

The modulation waves in physics and hydrodynamics are investigated rather well [1,2]. During the last period the non-linear modulation waves for plates and shells are studied [3,4].

These waves are proved to be not stable in materials of metal type (soft non-linearity). In ideal conducting medium [4] for rather great magnetic field instability is shown to yield to stability and vice versa. In the case of finite conductivity the unstable ideal problem in the presence of dissipation term can be reduced to stable one. In this paper dissipation effects connected with finite electrothermoconductivity are studied.

The problems of non-linear vibrations of magnetoelastic plate in longitudinal and transverse fields are considered [5].

## 2. Dispersion relation.

Let us consider a non-linear elastic [6] plate in the longitudinal magnetic field  $\vec{H}_0(H_0, 0, 0)$ . It is assumed that the vibration of the plate gives rise to thermal effects. The equations of classical theory of plates motion and thermoconductivity can be written in the form [7-9].

$$D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \alpha(1 + \nu) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xz}^+ + \sigma_{xz}^-) - (\sigma_{xz}^+ - \sigma_{xz}^-) = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \left( K_z + \frac{\partial K_z}{\partial x} z \right) dz \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left( \frac{12\chi}{h^2} + \frac{6k_1^2}{\rho h c_p} \right) T - \chi \eta \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad (2.2)$$

It is assumed that the wave propagates along  $x$  axis.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad D_1 = \frac{4h^2}{45} \nu_1 \gamma_2, \quad \nu_1 = \frac{(1 - \nu + \nu^2)^2}{(1 - \nu)^3} \text{ and other notations are}$$

taken from [6-9].

The volume Lorents force is determined by formula  $\bar{K} = \mu_0(\text{rot} \bar{h} \times \bar{H}_0)$  and magnetic field is  $\bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{h}$  and takes place

$$K_x = 0, K_z = \frac{H_0 \mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial h_x}{\partial x} - \frac{\partial h_z}{\partial z} \right) \quad (2.3)$$

The terms corresponding to magnetic field are taken in linear approximation: The induction equation in plate has the form

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = (\bar{H}_0 \nabla) \bar{v} - \bar{H}_0 \text{div} \bar{v} + \frac{1}{\sigma \mu_0} \Delta \bar{h} \quad (2.4)$$

where  $\mu_0$  is the magnetic constant,  $\sigma$  is the electroconductivity and  $\bar{v} = \left( -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}, \frac{\partial w}{\partial t} \right)$  is the particles velocity.

The equation (2.4) with respect to components is as follows

$$\begin{aligned} \text{div} \bar{h} &= 0 \\ \frac{\partial h_x}{\partial t} &= H_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{1}{\sigma \mu_0} \Delta h_x \end{aligned} \quad (2.5)$$

In dielectric medium (out of the plate) the equation of electrodynamics has the form

$$\text{div} \bar{h} = 0, \text{rot} \bar{h} = 0 \quad (2.6)$$

The solution of (2.1), (2.2) and (2.5) is sought as

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} (A e^{i\tau} + c.c.), T = \frac{1}{2} (B e^{i\tau} + c.c.) \\ h_x &= \frac{1}{2} (C e^{i\tau} + c.c.) \sin \lambda z, h_z = \frac{1}{2} (G e^{i\tau} + c.c.) \cos \lambda z \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\tau = kx - \omega t, \quad \omega = \omega_L + i\omega,$$

and of (2.6) in the form

$$h_x = \frac{1}{2} (M e^{i\tau} + c.c.), h_z = \frac{1}{2} (N e^{i\tau} + c.c.) \quad (2.8)$$

Satisfying the boundary conditions  $h_j = h_j$  on  $z = \pm \frac{h}{2}$  and (2.5) we obtain

$$C = -\frac{2i}{\lambda h} G, \quad \lambda = \sqrt{\frac{2k}{h}} \quad (2.9)$$

Keeping the terms of main order  $kh$  and taking into account (2.3), (2.5), one can obtain

$$\begin{aligned} G \left[ \frac{1}{\sigma \mu_0} (\lambda^2 + k^2) - i\omega \right] &= k\omega H_0 A \\ K_z &= \frac{2iH_0 \mu_0}{\rho h} G e^{i\tau} \end{aligned} \quad (2.10)$$

and the following dispersion equation

$$\begin{aligned} &\left[ D(k^4 + D_2 k^8 A \bar{A}) - \rho h \omega^2 + \frac{2\mu_0 H_0^2 k \omega}{\omega + \frac{2ik}{h\sigma \mu_0}} \right] \times \\ &\times (\chi_1 - i\omega) - iD\alpha(1+\nu)\chi\eta\omega k^4 = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

where

$$D_2 = 3D_1 e^{2\omega_1}, \quad \chi_1 = \frac{12\chi}{h^2} + \frac{6k_1^2}{\rho h c_p}$$

The equation (2.11) with the account of smallness of amplitudes and dissipation connected with thermo and electroconductivity can be written in the form

$$\omega = \omega^0 + \frac{\partial \omega}{\partial a^2} a^2, \quad a = |A| \quad (2.12)$$

where the linear part  $\omega^0 = \omega_1^0 + i\omega_2^0$ ,  $\omega_1^0$  is linear frequency taking into account the fact that dissipation is small

$$\omega_1^0 = \frac{1}{\rho h} [Dk^4 + 2H_0^2 \mu_0 k + D\alpha(1+\nu)\chi\eta k^4]^{1/2} \quad (2.13)$$

$\omega_2^0$  is the damping coefficient

$$\omega_2^0 = -\frac{k^2}{\rho h (\omega_1^0)^2} \left[ \frac{2H_0^2}{\chi\eta} + \frac{1}{2} D(1+\nu)\chi\eta\chi_1 \alpha k^2 \right] \quad (2.14)$$

and non-linear coefficient

$$\frac{\partial \omega}{\partial a^2} = D_3 + iD_4 \quad (2.15)$$

$$D_3 = \frac{DD_2 k^8}{8\rho h \omega_1^0}, \quad D_4 = -D_3 \frac{\omega_2^0}{\omega_1^0}$$

To clarify the contribution of magnetic field and thermoconductivity in  $\omega_1^0$  and  $\omega_2^0$ , the example of cuprum is considered [8] in the case of absence of thermal currents with external medium ( $k_1 = 0$ ).

For  $kh = 10^{-1}$  the effects of magnetic field and thermoconductivity in  $\omega_1^0$  are of the same order when  $H_0 \sim 3.5 \cdot 10^3$  Gauss. On the other hand in the expression of  $\omega_2^0$  the mentioned effects are of the same order  $H_0 \sim 25$  Gauss, i.e. magnetic field plays essential role in damping.

### 3. The stability of modulation waves.

Using equation (2.12) one can write down the modulation equation [1]. For this one has to put

$$\omega \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad k \rightarrow i \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{and seek } w \text{ in the form}$$

$$w = \frac{1}{2} (\psi e^{i\tau_0} + \bar{\psi} e^{-i\tau_0}), \quad \tau_0 = kx - \omega_0 t, \quad |\psi| = |A| \quad (3.1)$$

Substituting  $\omega^0 \left( -i \frac{\partial}{\partial x} \right)$  instead of  $\omega^0(k)$  one can write [1]

$$\omega^0 \left( -i \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi e^{i\tau_0} = \omega^0(k) \psi - (\omega^0(k)) i \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{2} (\omega^0(k)) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

and obtain the following modulation equation

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{d\omega_0}{dk} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{2} i \frac{d^2 \omega_0}{dk^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - (D_4 - iD_3) \psi |\psi|^2 = 0 \quad (3.2)$$

For investigation on stability of modulation equation one can write  $\psi = \Psi \exp(i\varphi)$ .

Then, with respect to  $\Psi$  and  $\varphi$  one can obtain

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{d\omega_1^0}{dk} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{d\omega_2^0}{dk} \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_2^0}{dk^2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \Psi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} \left( 2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - D_4 \Psi^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{d\omega_1^0}{dk} \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{d\omega_2^0}{dk} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \Psi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_2^0}{dk^2} \left( \Psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + D_1 \Psi^3 = 0 \end{aligned}$$

For investigation on stability one must write

$$\Psi = \Psi_0(t) + \delta \Psi(x, t), \quad \varphi = \varphi_0(t) + \delta \varphi(x, t) \quad (3.4)$$

Then in initial approximation it is obtained

$$\frac{d\Psi_0}{dt} = D_4 \Psi_0^3 - \frac{d\varphi_0}{dt} + D_1 \Psi_0^2 = 0 \quad (3.5)$$

Because  $\Psi_0$  and  $D_4$  are small one can assume  $\Psi_0 = \text{const}$  and seek the solution of the equation for disturbances in the form

$$\delta \Psi = F \exp(i\theta), \quad \delta \varphi = \Phi \exp(i\theta), \quad \theta = Kx - \Omega t \quad (3.6)$$

Then under the assumption that  $\exp(2\omega_2^0 t) \approx 1$  which holds for  $|\omega_2^0| \ll K \frac{d\omega_1^0}{dk}$  we can obtain the following characteristic equation

$$p^2 - 3D_4 \Psi_0^2 p + p_1(p_1 + 2D_3 \Psi_0^2) = 0 \quad (3.7)$$

where

$$p = -i\Omega + iK \frac{d\omega_1^0}{dk} - \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_2^0}{dk^2} K^2 \quad (3.8)$$

$$p_1 = iK \frac{d\omega_2^0}{dk} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} K^2$$

Solution of (3.7) is as follows

$$-i\Omega + iK \frac{d\omega_1^0}{dk} = \frac{3}{2} D_4 \Psi_0^2 \pm \sqrt{\left( \frac{3}{2} D_4 \Psi_0^2 \right)^2 - \Delta_0} \quad (3.9)$$

where

$$\Delta_0 = \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} K^2 \left( \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} K^2 + 2D_3 \Psi_0^2 \right) \quad (3.10)$$

Here is taken into account that  $\left| K^2 \frac{d^2 \omega_2^0}{dk^2} \right| \ll |\omega_2^0|$ .

The amplitude of  $w$  contains multiplier  $e^{2\omega_2^0 t} \approx 1$  and if the dissipation essentially affects the stability condition, one must put  $|\omega_2^0| \ll \frac{3}{4} D_4 \Psi_0^2$ .

The last condition holds for rather short waves

$$\frac{Dhk^8 v_1}{40\rho(\omega_1^0)^2} \Psi_0^2 |\gamma_2| \gg 1 \quad (3.11)$$

The condition of modulation stability will be

$$\Omega = \Omega + i\Omega, \quad \Omega < 0 \quad (3.12)$$

In the absence of thermoconductivity for ideal conducting medium  $\omega_0^0 = D_4 = 0$  the stability condition will be in adiabatic approximation

$$\gamma_1 \frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} > 0 \quad (3.13)$$

From (2.13) one can obtain [4]

$$\frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} < 0, \quad \frac{H_0^2}{4\pi} > Dk^2 (4 + 3\sqrt{2}) \quad (3.14)$$

For bounded magnetic fields  $\frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} > 0$  and stability condition of (3.13) gives

$$\gamma_1 > 0$$

As it is seen from (3.9), the sign of  $D_4$  is essential for the dissipative problem and one must consider two cases

a) For small  $H_0$  as shows (3.14)  $\frac{d^2 \omega_1^0}{dk^2} > 0$  and in adiabatic approximation if  $\gamma_1 < 0$  the condition (3.13) is not fulfilled and  $\Delta_1 < 0$ . From (3.9) one can obtain that the dissipative waves are unstable.

If  $\gamma_1 > 0$ ,  $\Delta_0 > 0$  the nondissipative wave is stable, the dissipative wave is again unstable.

b) For strong  $H_0$  if  $\gamma_1 < 0$ ,  $\Delta_0 > 0$  (3.13) is fulfilled and  $\Omega < 0$ . The dissipative wave is stable. If  $\gamma_1 > 0$ ,  $\Delta_0 < 0$ ,  $\Omega > 0$  and in both cases there is instability.

It is surprising that for more general case of diffraction approximation where  $\Delta_0$  is given by (3.10), consideration on stability is very simple.

If  $\gamma_1 < 0$  ( $D_4 < 0$ ) from (3.9) it is seen that for  $\Delta_0 > 0$  one can obtain  $\Omega < 0$ , nondissipative and dissipative solutions are stable, for  $\Delta_0 < 0$  there is instability of both solutions.

If  $\gamma_1 > 0$  there is instability of dissipative solution.

## REFERENCES

1. V.I. Karpman. Non-linear waves in dispersive media. M., Nauka, (1973), 176.
2. G.B. Whitham. Linear and non-linear waves. M., Mir., (1977), 622.
3. A.G. Bagdadyev, I.A. Movsisian. Quasimonochromatic bending waves in non-linear elastic plates. Izv. AN SSSR. M., №4, (1982), 169-176.
4. A.G. Bagdadyev, I.A. Movsisian. Some problems of stability of propagation of non-linear waves in shells and plates. Int. J. Non-linear Mechanics, vol. 19, №3, (1984), 245-253.
5. S.A. Ambartsumian, M.V. Belubekian and M.M. Minassian. On the problem of vibrations of non-linear elastic electroconductive plates in transverse and longitudinal magnetic fields. Int. J. Non-linear Mechanics, vol. 19, №2, (1983).
6. H. Kauderer. Non-linear mechanics. M., II, (1961), 777.
7. S.A. Ambartsumian, G.E. Bagdasarian and M.V. Belubekian. Magnetoelasticity of thin shells and plates. M., "Nauka", (1977), 272.
8. W. Nowacki. The dynamical problems of thermoelasticity. M., "Mir", (1970), 256.
9. V.V. Bolotin. The equations of unsteady temperature fields in thin shells in the presence of sources of heat. PMM. Vol. 24, №2, 361-363.

УДК 539.3

# ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА КРАЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕГО УПРУГОГО СЛОЯ

Григорян Э.Х., Саркисян А.В.

Է.Խ. Գրիգորյան, Ա.Վ. Սարկիսյան  
Սահրային էլեկտրատարակալան մակերևութային ալիքների դիֆրակցիան  
էլեկտրահաղորդիլ առածգական շերտի եզրում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է ալիքզտելկարիկ կիսատարածության խնդիրը, որի եզրային մակերևութային ամրակցված է փոքր հաստություն ունեցող առածգական կիսամակվոր էլեկտրահաղորդիլ շերտ: Ենթադրվում է, որ ալիքզտելկարիկ կիսատարածության ազատ մակերևութային մետաղացված է և անվերջությունից տարածվում է էլեկտրական մակերևութային ալիք: Ստացվում են անդրադարձվող մակերևութային ալիքի, անցնող մակերևութային ալիքի և մազային ալիքի ամպլիտուդաները: Ստացված են նաև ամպլիտուդի բանաձևեր, որոնք բնութագրում են տեղափոխության և էլեկտրական պոտենցիալի վարքերը անվերջությունում:

E.K. Grigorian, L.V. Sarkisian

Diffraction of shearing electric elastic surface waves in the edge of electrical conductive elastic layer

В работе рассматривается задача пьезоэлектрического полупространства (пьезоэлектрик класса  $6mm$  гексагональной симметрии), на граничной поверхности которого прикреплен упругий полубесконечный электропроводящий слой малой толщины. Предполагается, что свободная часть поверхности пьезоэлектрического полупространства металлизирована и из бесконечности распространяется поверхностная электроупругая волна. Получены амплитуды отраженной и проходящей поверхностной волны, а также амплитуды облученной волны. Получены также асимптотические формулы, характеризующие поведения перемещений и электрического потенциала в бесконечности.

Рассмотрим пьезоэлектрическое полупространство (пьезоэлектрик класса  $6mm$  гексагональной структуры), на граничной поверхности которого прикреплен упругий полубесконечный электропроводящий слой малой толщины  $h$ . Пьезоэлектрическое полупространство отнесем к прямоугольной системе координат  $Oxyz$  так, чтобы ось  $z$  совпала с осью симметрии пьезоэлектрика, ось  $Ox$  была направлена вдоль границы раздела полупространства и полубесконечного проводящего слоя, а полуплоскость ( $y = 0, 0 < x < \infty$ ) была контактной поверхностью полупространства со слоем. Предполагается, что свободная часть поверхности пьезоэлектрического полупространства ( $y = 0, -\infty < x < 0$ ) металлизирована. Из бесконечности ( $x < 0$ ) вдоль оси  $Ox$  распространяется поверхностная электроупругая волна [1].

$$\begin{aligned} U_3(x, y, t) &= A_0 e^{-\sqrt{\sigma_n^2 - \delta^2} y} e^{i(\sigma_n x - \omega t)} \\ \Phi_3(x, y, t) &= A_0 \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} \left( e^{-\sqrt{\sigma_n^2 - \delta^2} y} - e^{-\sigma_n y} \right) e^{i(\sigma_n x - \omega t)} \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma_n = k / \sqrt{1 - \delta^2}$ ,  $\delta = A/B$ ,  $A = e_{15}^2 / \epsilon_{11}$ ,  $B = c_{44} + e_{15}^2 / \epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{11}$  — диэлектрическая постоянная пьезоэлектрика,  $e_{15}$  — пьезоэлектрическая постоянная,  $c_{44}$  — упругая постоянная,  $k = \omega/c$ ,  $c = \sqrt{G/\rho}$ ,  $G = c_{44} / (1 + \chi^2)$ ,  $\rho$  — плотность материала полупространства,

$\chi^2 = e_{15}^2 / (\epsilon_{11} c_{44})$  — коэффициент электромеханической связи,  $t$  — параметр, характеризующий время,  $\omega$  — частота колебаний,  $A_0$  — постоянная.

Сдвиговая поверхностная волна, очевидно, дифрагирует на краю упругого электропроводящего слоя. Вопрос состоит в определении амплитуды отраженной поверхностной волны при  $x < 0$ , амплитуды контактных напряжений, амплитуды проходящей поверхностной волны, а также амплитуды объемной волны.

Поле упругих перемещений пьезоэлектрического упругого полупространства представим в виде  $U = (0, 0, U_1(x, y)e^{-i\omega t})$ , перемещение упругого электропроводящего слоя — в виде  $U_1 = (0, 0, U_1^{(1)}(x, y)e^{-i\omega t})$ , а электрический потенциал пьезоэлектрического полупространства — в виде  $\bar{\Phi}(x, y)e^{-i\omega t}$ .

Поставленная задача формулируется в виде следующих граничных задач [1]:

для пьезоэлектрического полупространства

$$\Delta U_1 + k^2 U_1 = 0, \quad \Delta \bar{\Phi} = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} \Delta U_1, \quad 0 < y < \infty, \quad -\infty < x < \infty \quad (2)$$

при граничных условиях

$$\bar{\Phi}|_{y=0} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad c_{44} \frac{\partial U_1}{\partial y} \Big|_{y=0} + e_{15} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad -\infty < x < 0 \quad (3)$$

для электропроводящего слоя

$$\Delta U_1^{(1)} + k_1^2 U_1^{(1)} = 0, \quad -h < y < 0, \quad 0 < x < \infty \quad (4)$$

при граничных условиях

$$\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=-h} = 0, \quad \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (5)$$

При этом должны выполняться еще и условия контакта

$$U_1(x, 0) = U_1^{(1)}(x, 0), \quad 0 < x < \infty \quad (6)$$

$$c_{44} \frac{\partial U_1}{\partial y} \Big|_{y=0} + e_{15} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \Big|_{y=0} = \tau(x), \quad 0 < x < \infty \quad (7)$$

Причем  $k_1 = \omega/c_1$ ,  $c_1 = (G_1/\rho_1)^{1/2}$ , где  $G_1, \rho_1$  — соответственно модуль сдвига и плотность материала упругого проводящего слоя.

$$\tau(x) = G_1 \left( \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Далее, интегрируя уравнение (4) по толщине, получим

$$h \frac{d^2 \bar{U}_1^{(1)}}{dx^2} + \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=-h} + h k_1^2 \bar{U}_1^{(1)} = 0$$

где

$$\bar{U}_1^{(1)}(x) = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 U_1^{(1)}(x, y) dy$$

Учитывая, что толщина слоя  $h$  достаточно мала, предполагается  $\bar{U}_1^{(1)}(x) \approx U_1^{(1)}(x, y)$ , следовательно, (4) можно записать в виде

$$\frac{d^2 \bar{U}_3^{(1)}}{dx^2} + k_1^2 \bar{U}_3^{(1)} = -\frac{1}{hG_1} \tau(x) \quad (8)$$

т.е. уравнение (4) можно заменить уравнением (8), а условие (6) – условием

$$\bar{U}_3^{(1)}(x) = U_3(x, 0), \quad 0 \leq x < \infty \quad (9)$$

Теперь, имея в виду (1), введем функции

$$W(x, y) = U_3(x, y) - A_0 e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} e^{i\sigma_n x},$$

$$\Phi(x, y) = \bar{\Phi}(x, y) - A_0 \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} \left( e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y} - e^{-\sigma_n y} \right) e^{i\sigma_n x},$$

$$W_+^{(1)}(x) = \theta(x) U_3^{(1)}(x), \quad \tau_+(x) = \theta(x) \tau(x)$$

где  $\theta(x)$  – функция Хевисайда. Тогда граничная задача (2), (3) с учетом (7) запишется в виде

$$\Delta W + k^2 W = 0, \quad \Delta \Phi = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} \Delta W, \quad 0 < y < \infty, \quad -\infty < x < \infty \quad (10)$$

$$\Phi|_{y=0} = 0, \quad \tau_+(x) = c_{44} \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=0} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (11)$$

граничная задача (4), (5) в виде

$$\frac{d^2 W_+^{(1)}}{dx^2} + k_1^2 W_+^{(1)} = U_3^{(1)}(0) \delta(x) - \frac{1}{hG_1} \tau_+(x) \quad (12)$$

а условие контакта (9) в виде

$$W_+^{(1)}(x) = W_+(x, 0) + \theta(x) A_0 e^{i\sigma_n x}, \quad W_+(x, 0) = \theta(x) W(x, 0) \quad (13)$$

Далее, применив к (10)–(13) преобразование Фурье, получим

$$\frac{d^2 \bar{W}}{dy^2} - (\sigma^2 - k^2) \bar{W} = 0, \quad \frac{d^2 \Phi}{dy^2} - \sigma^2 \Phi = \alpha^2 \left( \frac{d^2 \bar{W}}{dy^2} - \sigma^2 \bar{W} \right) \quad (14)$$

$$\bar{\tau}_+(\sigma) = c_{44} \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \Big|_{y=0} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad \bar{\Phi}(y)|_{y=0} = 0 \quad (15)$$

$$(k_1^2 - \sigma^2) \bar{W}_+^{(1)}(\sigma) = -\frac{1}{hG_1} \bar{\tau}_+(\sigma) - i\sigma U_3^{(1)}(0) \quad (16)$$

$$\bar{W}_+^{(1)}(\sigma) = \bar{W}_+(\sigma) - \frac{A_0}{i(\sigma + \sigma_n)} \quad (17)$$

где

$$\bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx, \quad -\infty < \sigma < \infty, \quad \alpha^2 = e_{15}/\epsilon_{11}$$

Из (14) для  $\bar{W}$  и  $\bar{\Phi}$  получим

$$\bar{W}(x, y) = -\frac{\bar{\tau}_+(\sigma)}{B\sqrt{\sigma^2 - k^2} - A|\sigma|} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2} y} \quad (18)$$

$$\bar{\Phi}(\sigma, y) = -\frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} \frac{\bar{\tau}_+(\sigma)}{B\sqrt{\sigma^2 - k^2} - A|\sigma|} \left( e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2} y} - e^{-|\sigma| y} \right) \quad (19)$$

Если еще учитывать (16), (17), для определения  $\bar{\tau}_+(\sigma)$  получим следующее функциональное уравнение:

$$\bar{R}(\sigma)\bar{\tau}_-(\sigma) + \bar{W}(\sigma, 0) = -\frac{i\sigma}{\sigma^2 - k_1^2} U_1^{(1)}(0) - \frac{A_0}{i(\sigma + \sigma_n)},$$

$$(-\infty < \sigma < \infty) \quad (20)$$

где  $\bar{\tau}_-(\sigma)$  регулярна при  $\text{Im}\alpha > 0$ ,  $\bar{W}(\sigma, 0)$  регулярна при  $\text{Im}\alpha < 0$ ,

$$(\alpha = \sigma + i\tau), \quad \bar{R}(\sigma) = \frac{|\sigma|}{(\sigma^2 - k_1^2)c_{44}} \bar{K}(\sigma),$$

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{c_{44}}{|\sigma|} \frac{\sigma^2 - k_1^2 + (hG_1)^{-1} \{ B\sqrt{\sigma^2 - k^2} - A|\sigma| \}}{B\sqrt{\sigma^2 - k^2} - A|\sigma|}$$

Отметим, что выше имелось в виду условие уходящей волны, из которого следует равенство [2]  $\sqrt{\alpha^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \alpha^2}$  во всей комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$ . Это означает, что действительная ось ( $\tau = 0$ ) обходит точку ветвления  $\sigma = -k$  сверху, а точку  $\sigma = k$  - снизу.

Функциональное уравнение (20) можно решать относительно  $\bar{\tau}_-(\sigma)$  и  $\bar{W}(\sigma)$ , рассматривая его как краевую задачу Римана в теории аналитических функций. Однако здесь мы поступим иначе [3,4].

Сначала факторизуем функцию  $\bar{K}(\sigma)$ . Поскольку  $\bar{K}(\sigma) \rightarrow 1$  при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ , то в силу известной теоремы [2] ее можно записать в виде

$$\bar{K}(\sigma) = \bar{K}_+(\sigma) \bar{K}_-(\sigma) \quad (21)$$

где  $\bar{K}_+(\alpha)$  регулярна при  $\text{Im}\alpha > 0$ , и там не имеется нулей, а  $\bar{K}_-(\alpha)$  регулярна при  $\text{Im}\alpha < 0$ , и там не имеется нулей. Причем

$$\bar{K}_+(\sigma) = \exp \bar{H}_+(\sigma), \quad \bar{K}_-(\sigma) = \exp \bar{H}_-(\sigma)$$

где

$$\bar{H}_+(\sigma) = \int_0^\infty H(U) e^{i\sigma U} dU, \quad \bar{H}_-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 H(U) e^{i\sigma U} dU$$

$$H(U) = \int_{-\infty}^\infty \ln \bar{K}(\sigma) e^{-i\sigma U} d\sigma, \quad -\infty < U < \infty$$

В выражении  $H(U)$  контур интегрирования обходит точки  $-\sigma_n, -\bar{\sigma}_n, -k$  сверху, а точки  $\sigma_n, \bar{\sigma}_n, k$  снизу. Точки  $\pm\sigma_n, \pm\bar{\sigma}_n$  являются нулями функции

$$\varphi_1(\sigma) = B\sqrt{\sigma^2 - k^2} - A|\sigma|, \quad \varphi_2(\sigma) = \sigma^2 - k_1^2 + (hG_1)^{-1} \varphi_1(\sigma)$$

соответственно.

Далее заметим, что

$$\frac{|\sigma|}{\sigma^2 - k_1^2} = \frac{(\sigma - i0)^{1/2}}{\sigma - k_1} \frac{(\sigma + i0)^{1/2}}{\sigma + k_1}$$

где

$$(\sigma - i0)^{1/2} = \sigma_+^{1/2} - i\sigma_-^{1/2}, \quad (\sigma + i0)^{1/2} = \sigma_+^{1/2} + i\sigma_-^{1/2},$$

$$\sigma_+^{1/2}(\sigma) = \theta(\sigma)\sigma^{1/2}, \quad \sigma_-^{1/2}(\sigma) = \theta(-\sigma)|\sigma|^{1/2}$$

Очевидно, что аналитическое продолжение функции  $\sqrt{(\sigma - i0)/(\sigma - k_1)}$  регулярно при  $\text{Im}\alpha < 0$ , а  $\sqrt{(\sigma + i0)/(\sigma + k_1)}$  регулярно при  $\text{Im}\alpha > 0$ , (действительная ось обходит точку  $\sigma = -k_1$  сверху, а

$\sigma = k_1$  снизу). Таким образом, факторизация функции  $\bar{R}(\sigma)$  проведена и она имеет вид

$$\bar{R}(\sigma) = \bar{R}_+(\sigma) \bar{R}_-(\sigma) \quad (22)$$

где

$$\bar{R}_+(\sigma) = \frac{(\sigma + i0)^{1/2}}{\sqrt{c_{44}}(\sigma + k_1)} \bar{K}_+(\sigma) \quad \bar{R}_-(\sigma) = \frac{(\sigma - i0)^{1/2}}{\sqrt{c_{44}}(\sigma - k_1)} \bar{K}_-(\sigma)$$

Согласно формуле (22), уравнение (20) запишется в виде

$$\bar{R}_+(\sigma) \bar{\tau}_+(\sigma) + \frac{\bar{W}(\sigma)}{\bar{R}_-(\sigma)} = - \frac{i\sigma}{\sigma^2 - k_1^2} \frac{U_3^{(1)}(0)}{\bar{R}_-(\sigma)} - \frac{A_0}{i(\sigma + \sigma_n) \bar{R}_-(\sigma)} \quad (23)$$

Далее нетрудно видеть, что (23) можно представить в виде

$$\bar{L}_+(\sigma) = \bar{R}_+(\sigma) \bar{\tau}_+(\sigma) - \bar{E}_+(\sigma) = \bar{E}_-(\sigma) - \frac{\bar{W}(\sigma, 0)}{\bar{R}_-(\sigma)} = \bar{L}_-(\sigma) \quad (24)$$

где

$$\bar{E}_+(\sigma) = - \frac{\sqrt{c_{44}} \sqrt{k_1} U_3^{(1)}(0)}{\bar{K}_+(k_1)(\sigma + k_1)} + \frac{A_0 \sqrt{c_{44}}(\sigma_n + k_1)}{\sqrt{\sigma_n}(\sigma + \sigma_n) \bar{K}_+(\sigma_n)}$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_-(\sigma) = iA_0 \sqrt{c_{44}} & \left( \frac{\sigma - k_1}{(\sigma - i0)^{1/2} \bar{K}_-(\sigma)(\sigma + \sigma_n)} + \frac{i(\sigma_n + k_1)}{\sqrt{\sigma_n} \bar{K}_-(\sigma_n)(\sigma + \sigma_n)} \right) - \\ & - i\sqrt{c_{44}} U_3^{(1)}(0) \left( \frac{(\sigma - i0)^{1/2}}{(\sigma + k_1) \bar{K}_-(\sigma)} + \frac{i\sqrt{k_1}}{\bar{K}_-(k_1)(\sigma + k_1)} \right) \end{aligned}$$

Как видно из (24), в левой части равенства стоит преобразование Фурье функции, равной нулю при  $x < 0$ , а в правой части равенства стоит преобразование Фурье функции, равной нулю при  $x > 0$ , т.е.  $L_+(x) \equiv L_-(x)$ .

Вышесказанное говорит о том, что  $L_+(x)$  и  $L_-(x)$  являются обобщенными функциями, сосредоточенными в нулевой точке. Известно [5], что функция, сосредоточенная в нуле, представляется в виде конечной линейной комбинации функций  $\delta^{(k)}(x)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) ( $\delta^{(k)}(x)$  - производные функции Дирака  $\delta(x) = \delta^{(0)}(x)$ ).

Следовательно,

$$L_+(x) = L_-(x) = \sum_{k=0}^n a_k \delta^{(k)}(x) \quad (25)$$

Применив к (25) преобразование Фурье в смысле теории обобщенных функций, получим

$$\bar{L}_+(\sigma) = \bar{L}_-(\sigma) = \sum_{k=0}^n (-i)^k a_k \sigma^k \quad (26)$$

Далее определим поведение функции  $\bar{L}_\pm(\sigma)$  при  $\sigma \rightarrow \pm\infty$ .

Поскольку  $W(x, 0)$  принимает конечное значение при  $x = 0$ , то  $\bar{W}_\pm(\sigma, 0) \approx \bar{W}(0, 0)(i(\sigma - i0))^{-1}$  при  $\sigma \rightarrow \pm\infty$  ( $((\sigma - i0)^{-1} = (i\sigma)^{-1} + \pi\delta(\sigma))$ ). Далее известно, что  $\tau(x) = A/\sqrt{x}$  при  $x \rightarrow +0$ . Это говорит о том, что  $\bar{\tau}_\pm(\sigma)$  имеет порядок  $O((\sigma + i0)^{-1/2})$  при  $\sigma \rightarrow \pm\infty$ . Если еще учесть, что  $\bar{R}_\pm(\sigma)$  имеет порядок  $O((\sigma + i0)^{-1/2})$ ,  $\bar{R}_-(\sigma)$  - порядок  $O((\sigma - i0)^{1/2})$  при

$\sigma \rightarrow \pm\infty$ , а  $E_+(\sigma) \approx O(\sigma^{-1})$ ,  $E_-(\sigma) \approx O(\sigma^{-1})$  при  $\sigma \rightarrow \pm\infty$ , то для  $\bar{L}_\pm(\sigma)$  получим

$$\bar{L}_+(\sigma) \rightarrow 0, \quad \bar{L}_-(\sigma) \rightarrow 0 \quad \text{при } \sigma \rightarrow \pm\infty$$

Следовательно, из (26)  $\bar{L}_\pm(\sigma) = \bar{L}_\pm(\sigma) = 0$ . В таком случае из (24) для  $\bar{\tau}_\pm(\sigma)$ ,  $\bar{W}_\pm(\sigma, 0)$  получим

$$\bar{\tau}_\pm(\sigma) = \frac{\bar{E}_\pm(\sigma)}{\bar{R}_\pm(\sigma)}, \quad \bar{W}_\pm(\sigma, 0) = \bar{E}_\pm(\sigma) \bar{R}_\pm(\sigma)$$

Если заметить, что  $\sigma = k_1$  не может быть полюсом для  $\bar{W}_\pm(\sigma, 0)$ , то можно определить  $U_1^{(1)}(0)$  в виде

$$U_1^{(1)}(0) = \frac{2iA_0 \sqrt{k_1} \bar{K}_+(k_1) c_{44}}{\sqrt{\sigma_n} \bar{K}_+(\sigma_n) (ic_{44} + hG_1 k_1 \bar{K}_+^{-1}(k_1))}$$

Теперь приступим к исследованию функций  $\bar{W}_\pm(x, 0)$ ,  $\bar{W}_\pm(x, 0)$ .

$$\text{Имеем } \bar{W}_\pm(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{W}_\pm(\sigma, 0) e^{-i\omega x} d\sigma$$

$\bar{W}_\pm(\sigma, 0)$  представим в виде (23)

$$\bar{W}_\pm(\sigma, 0) = \frac{\sqrt{c_{44}} \bar{E}_\pm(\sigma)}{(\sigma + i0)^{1/2} (\sigma - k_1) \bar{K}_\pm(\sigma)} \frac{\sigma^2 - k_1^2 + (hG_1)^{-1} \varphi_\pm(\sigma)}{\varphi_\pm(\sigma)} \quad (27)$$

Как видно из (27), функцию  $\bar{W}_\pm(\sigma, 0)$  невозможно аналитически продолжить в комплексной плоскости, поскольку в ней участвует функция  $|\sigma|$ . Для этого представим  $\bar{W}_\pm(\sigma, 0)$  в таком виде, чтобы к ней можно было применить методы функций комплексного переменного. Оказывается, что  $\bar{W}_\pm(\sigma, 0)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{W}_\pm(\sigma, 0) = & \frac{B f_1(\sigma) \sqrt{\sigma^2 - k^2}}{\bar{K}_\pm(\sigma) (\sigma + i0)^{1/2} [(B^2 - A^2) \sigma^2 - B^2 k^2]} + \frac{A f_1(\sigma) (\sigma - i0)^{1/2}}{\bar{K}_\pm(\sigma) [(B^2 - A^2) \sigma^2 - B^2 k^2]} + \\ & + \frac{f_1(\sigma)}{hG_1 (\sigma^2 - k_1^2) \bar{K}_\pm(\sigma) (\sigma - i0)^{1/2}} - \frac{iU_1^{(1)}(0)}{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{A_0}{\sigma + \sigma_n} \end{aligned}$$

$$\text{где } f_1(\sigma) = \frac{c_{44} U_1^{(1)}(0) k_1^{1/2}}{\bar{K}_+(-k_1)} - \frac{c_{44} (\sigma_n + k_1) (\sigma + k_1) A_0}{\sigma_n^{1/2} \bar{K}_+(\sigma_n) (\sigma + \sigma_n)}$$

Тогда  $W_\pm(x, 0)$  можно представить в виде

$$W_\pm(x, 0) = \frac{B}{2\pi} I_1 + \frac{A}{2\pi} I_2 + I_3$$

$$\text{где } I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(\sigma) \sqrt{\sigma^2 - k^2} e^{-i\omega x} d\sigma}{\bar{K}_\pm(\sigma) (\sigma + i0)^{1/2} [(B^2 - A^2) \sigma^2 - B^2 k^2]}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(\sigma) (\sigma - i0)^{1/2} e^{-i\omega x} d\sigma}{\bar{K}_\pm(\sigma) [(B^2 - A^2) \sigma^2 - B^2 k^2]}$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{f_1(\sigma)}{hG_1 (\sigma^2 - k_1^2) \bar{K}_\pm(\sigma) (\sigma + i0)^{1/2}} - \frac{iU_1^{(1)}(0) \sigma}{\sigma^2 - k_1^2} + \frac{A_0}{\sigma + \sigma_n} \right] e^{-i\omega x} d\sigma$$

The present problem of vibrations of a shell is investigated on the base of the following hypotheses:

-The hypotheses of the magnetoelasticity of thin bodies [4] according to which

$$e_a = e_1 = \varphi(\alpha, \beta, t), \quad e_\beta = e_2 = \psi(\alpha, \beta, t), \quad h_\gamma = h_3 = f(\alpha, \beta, t) \quad (2.1)$$

where  $h(h_1, h_2, h_3)$ ,  $e(e_1, e_2, e_3)$  are the induced electromagnetic fields components,  $\varphi, \psi, f$  are desired arbitrary functions, which must satisfy the electrodynamic equations,

and the conditions on the surfaces of the shell  $\left(\gamma = \pm \frac{h}{2}\right)$  [4];

-The hypothesis of improved theory of anisotropic shells [1,3,10] according to which

$$\begin{aligned} u_1 &= u_\alpha = (1 + k_1 \gamma) u - \gamma \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \gamma \frac{h^2}{8} \left( 1 + \frac{k_1}{2} \gamma - \frac{4}{3} \frac{\gamma^2}{h^2} \right) a_{11} \Phi \\ u_2 &= u_\beta = (1 + k_2 \gamma) v - \gamma \frac{\partial w}{\partial \beta} + \gamma \frac{h^2}{8} \left( 1 + \frac{k_2}{2} \gamma - \frac{4}{3} \frac{\gamma^2}{h^2} \right) a_{44} \Psi \\ u_3 &= u_\gamma = w \end{aligned} \quad (2.2)$$

where  $u(\alpha, \beta, t), v(\alpha, \beta, t), w(\alpha, \beta, t)$  are the desired displacements of the shells middle surface,  $\Phi(\alpha, \beta, t), \Psi(\alpha, \beta, t)$  are desired functions which characterize shear deformations of the shell,  $k_1 = k_1(\alpha, \beta), k_2 = k_2(\alpha, \beta)$  are principal curvatures of the coordinate surface  $\alpha O \beta$ , (For shallow shells it is assumed that the  $k_i$  upon differentiation behave as constants[1]),  $a_{33} = G_{31}^{-1}, a_{44} = G_{23}^{-1}$  are the elasticity coefficients,  $G_{31}, G_{32}$  are shear moduli.

The equations of motion of the shell are [1,2,4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_{12}}{\partial \beta} &= - \int_{-h/2}^{h/2} k \rho K_1 d\gamma + \int_{-h/2}^{h/2} k \rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} d\gamma \\ \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S_{12}}{\partial \alpha} &= - \int_{-h/2}^{h/2} k \rho K_2 d\gamma + \int_{-h/2}^{h/2} k \rho \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2} d\gamma \\ -(k_1 T_1 + k_2 T_2) + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_2}{\partial \beta} &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial \beta} - N_1 &= - \int_{-h/2}^{h/2} k \gamma \rho K_1 d\gamma + \int_{-h/2}^{h/2} k \gamma \rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} d\gamma \\ \frac{\partial M_2}{\partial \beta} + \frac{\partial H}{\partial \alpha} - N_2 &= - \int_{-h/2}^{h/2} k \gamma \rho K_2 d\gamma + \int_{-h/2}^{h/2} k \gamma \rho \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2} d\gamma \end{aligned} \quad (2.3)$$

where  $k = (1 + k_1 \gamma)(1 + k_2 \gamma)$ ,  $T_i, S_{ik}, N_i, M_i$  are the internal forces and moments,  $\rho$  is the shell material density,  $t$  is the time,  $\rho K_i$  are the components of the "cargo" term for which we have generally [2,4]

$$\rho K(K_1, K_2, K_3) = [\sigma, \epsilon] \left( e + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \times B_0 \right) \times B_0 \quad (2.4)$$

$B$  is the magnetic induction vector in shell,  $u(u_1, u_2, u_3) = u(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$  is the displacement vector,  $c$  is the electrodynamic constant.

### 3. The Equations of Magnetoelasticity for a Thin Orthotropic Shell

Integrating electrodynamic equations with the account of the surface conditions

$h_1 = h_1^+$ , when  $\gamma = \frac{h}{2}$  and  $h_1 = h_1^-$ , when  $\gamma = -\frac{h}{2}$ , for  $h_1$  we obtain [2,4]

$$h_1 = \frac{h_1^+ + h_1^-}{2} + \gamma \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{4\pi\sigma_1}{c} \psi \right) - \frac{4\pi\sigma_1 B_0}{c^2} \left( a_1 \frac{\partial u}{\partial t} - b \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} + c_1 a_{55} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$$

$$h_2 = \frac{h_2^+ + h_2^-}{2} + \gamma \left( \frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{4\pi\sigma_1}{c} \varphi \right) - \frac{4\pi\sigma_1 B_0}{c^2} \left( a_2 \frac{\partial v}{\partial t} - b \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial t} + c_2 a_{44} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \quad (3.1)$$

where

$$a_1 = \gamma + \frac{\gamma^2}{2} k_1 - \frac{h^2}{8} k_1, \quad b = \frac{\gamma^2}{2} - \frac{h^2}{8}$$

$$c_1 = \frac{\gamma^2 h^2}{16} - \frac{\gamma^4}{24} - \frac{5h^4}{384} + \frac{\gamma^3 h^2}{48} k_1$$

Then we have

$$\sigma_3 e_3 = -\gamma \left( \sigma_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \sigma_2 \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right) - \frac{B_0}{c} \left[ \sigma_1 \left( a_2 \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial t} - b \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta \partial t} + c_2 a_{44} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha \partial t} \right) - \right.$$

$$\left. - \sigma_2 \left( a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta \partial t} - b \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta \partial t} + c_1 a_{55} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta \partial t} \right) \right] \quad (3.2)$$

Thus, we have all the components of excited electromagnetic field in the shell, given by eight functions  $u, v, w, \Phi, \Psi, \varphi, \psi, f$  and by induced magnetic field's values  $h_1$  and

$h_2$  on the shell's surfaces  $\left( \gamma = \pm \frac{h}{2} \right)$ .

Then from (2.4) for the components of the "cargo" term we obtain

$$\rho K_1 = \frac{\sigma_2}{c} \left\{ B_0 \psi - \frac{B_0^2}{c} \left[ (1 + k_1 \gamma) \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} + \frac{\gamma}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3} + \frac{\gamma h^2}{8} k_1 \right) a_{55} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \right\}$$

$$\rho K_2 = -\frac{\sigma_1}{c} \left\{ B_0 \varphi + \frac{B_0^2}{c} \left[ (1 + k_2 \gamma) \frac{\partial v}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial t} + \frac{\gamma}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3} + \frac{\gamma h^2}{8} k_2 \right) a_{44} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right] \right\} \quad (3.3)$$

Substituting the values of internal forces and moments, components of displacements and components of the "cargo" term in (2.3) we get the following equations of motion [1,2,4]

$$C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + (k_1 c_{11} + k_2 c_{12}) \frac{\partial w}{\partial \alpha} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} -$$

$$- \frac{\sigma_2}{c} \left\{ B_0 h \psi - \frac{B_0^2}{c} \left[ h \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{h^3}{12} (k_1 + k_2) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} + \frac{h^5}{120} (1.625 k_1 + k_2) a_{55} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \right\}$$

$$C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + (k_2 C_{22} + k_1 C_{12}) \frac{\partial w}{\partial \beta} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} +$$

$$+ \frac{\sigma_1}{c} \left\{ B_0 h \varphi + \frac{B_0^2}{c} \left[ h \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{h^3}{12} (k_1 + k_2) \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial t} + \frac{h^5}{120} (1.625 k_2 + k_1) a_{44} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right] \right\}$$

$$- (k_1 C_{11} + k_2 C_{12}) \frac{\partial u}{\partial \alpha} - (k_2 C_{22} + k_1 C_{12}) \frac{\partial v}{\partial \beta} - (k_1^2 C_{11} + 2k_1 k_2 C_{12} + k_2^2 C_{22}) w -$$

$$A_{-1}^{(-\tilde{\lambda}_n)} = i(\tilde{\sigma}_n - k_1) \sqrt{\tilde{\sigma}_n} \bar{K}_+(\tilde{\sigma}_n) \bar{E}_+(-\tilde{\sigma}_n) / \sqrt{c_{44}} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=\tilde{\sigma}_n} \quad \text{при } \varphi < \tilde{\varphi}_0$$

$$A_{-1}^{(-\tilde{\lambda}_n)} = 0 \quad \text{при } \varphi > \tilde{\varphi}_0$$

$$\left( \frac{df}{d\sigma} \right)_{\sigma=\tilde{\sigma}_n}^{-1} = \frac{A\tilde{\sigma}_n + hG_1(k_1^2 - \tilde{\sigma}_n^2)}{(hG_1)^{-1} \tilde{\sigma}_n (A^2 - B^2) + (k_1^2 - \tilde{\sigma}_n^2)(A - 2\tilde{\sigma}_n hG_1) - 2\tilde{\sigma}_n^2 A}$$

$$\text{Если } k_1 = \sigma_n = \tilde{\sigma}_n, \text{ то } A_{-1}^{(-\tilde{\lambda}_n)} = \bar{\tau}_+(-\sigma_n) A / (A^2 - B^2), \quad A_{-1}^{(-\tilde{\lambda}_n)} = 0 \quad \text{при}$$

$$\varphi < \varphi_0 = \tilde{\varphi}_0, \text{ а при } \varphi > \varphi_0 = \tilde{\varphi}_0 \quad A_{-1}^{(-\tilde{\lambda}_n)} = 0$$

Поступая аналогичным образом, как выше, для  $W(r, \varphi)$  при  $\pi/2 < \varphi < \pi$  получим

$$W(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{W}(\sigma_2, \varphi) \frac{A_{-1}^{(-\lambda_n)}}{\lambda + \lambda_n} \frac{A_{-1}^{(-\tilde{\lambda}_n)}}{\lambda + \tilde{\lambda}_n} \frac{A_{-1}^{(-\bar{\lambda}_n)}}{\lambda + \bar{\lambda}_n} \left[ e^{i\lambda r} d\lambda + i A_{-1}^{(-\bar{\lambda}_n)} e^{i\bar{\lambda}_n r} \right] \quad (31)$$

где

$$\bar{W}(\sigma_2, \varphi) = \frac{C \sqrt{\sigma_2 - i0} \bar{K}_-(\sigma_2) (a\sigma_2 + b)}{(\sigma_2 + \sigma_n) [hG_1(\sigma_2^2 - k_1^2) + B\sqrt{\sigma_2^2 - k^2} - A \operatorname{sgn}(\lambda - k \sin \varphi) \sigma_2]} \frac{d\sigma_2}{d\lambda}$$

$$C = -hG_1 / [\bar{K}_-(-k_1) \bar{K}_+(-\sigma_n) \sqrt{\sigma_n}], \quad \sigma_2(\lambda) = \lambda |\cos \varphi| - i \sqrt{\lambda^2 - k^2} \sin \varphi$$

$$\sigma_2(-\lambda_n) = -\sigma_n, \quad \sigma_2(\lambda_n) = \sigma_n$$

$$A_{-1}^{(-\lambda_n)} = -iC \sqrt{\sigma_n} \bar{K}_+(\sigma_n) (b - a\sigma_n) [hG_1(\sigma_n^2 - k_1^2)]^{-1}$$

$$A_{-1}^{(-\tilde{\lambda}_n)} = \frac{-i \sqrt{\tilde{\sigma}_n} \bar{K}_+(\tilde{\sigma}_n) (b - a\tilde{\sigma}_n) \sqrt{\tilde{\sigma}_n^2 - k^2} C}{(\sigma_n - \tilde{\sigma}_n) [\sqrt{\tilde{\sigma}_n^2 - k^2} (A - 2hG_1 \tilde{\sigma}_n) - B\tilde{\sigma}_n]}$$

$$A_{-1}^{(-\bar{\lambda}_n)} = \bar{\tau}_+(\sigma_n) A / (A^2 - B^2) \quad \text{при } \pi/2 + \psi_0 < \varphi < \pi,$$

$$A_{-1}^{(-\bar{\lambda}_n)} = 0 \quad \text{при } \pi/2 < \varphi < \pi/2 + \psi_0.$$

$$\text{где } \psi_0 = \operatorname{arctg} k/\sigma_n, \quad k/\sigma_n < 1$$

Получим асимптотические выражения для функции перемещения  $W(r, \varphi)$  с помощью метода Лайткилла [7]. При этом оказывается, что когда  $x > 0$ , функция  $W(r, \varphi)$  имеет следующее асимптотическое разложение:

$$W(r, \varphi) = \frac{2i\sqrt{\pi}}{\sqrt{r}} b_1 e^{i(3\pi/4 - \psi_0)} - \frac{2\sqrt{\pi}}{r^{3/2}} b_2 e^{i(\pi/4 + \psi_0)} + \quad (32)$$

$$+ c_4 \frac{3}{4\sqrt{\pi}} e^{i(3\pi/4 - \psi_0)} + i A_{-1}^{(-\tilde{\lambda}_n)} e^{i\tilde{\lambda}_n r} + i A_{-1}^{(-\bar{\lambda}_n)} e^{i\bar{\lambda}_n r} + O(r^{-2}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty$$

а когда  $x < 0$ , имеем

$$W(r, \varphi) = \frac{ia_1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{i(Lr - \pi/4)}}{\sqrt{r}} - \frac{\sqrt{\pi} c_2}{r^{3/2}} e^{i(Lr \sin \varphi - \pi/4)} + \frac{ia_3}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{i(\pi/4 - Lr)}}{r^{3/2}} + i A_{-1}^{(-\tilde{\lambda}_n)} e^{i\tilde{\lambda}_n r} + O(r^{-2}) \quad (33)$$

при  $r \rightarrow \infty$

Здесь выражения искомым постоянных  $b_1, c_1, a_1, b_2, c_2, a_2$  и др. приводятся.

Переходим к обсуждению  $\Phi(x, y)$ . Применив обратное преобразование Фурье к (19), получим

$$\Phi(x, y) = \frac{e_{15}}{2\pi\varepsilon_{11}} W(x, y) + \frac{e_{15}}{2\pi\varepsilon_{11}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\tau}_+(\sigma) e^{-i\sigma x - |\sigma| y}}{B\sqrt{\sigma^2 - k^2} - A|\sigma|} d\sigma \quad (34)$$

Поступая как выше и используя работу [6], для  $\Phi(x, y)$  при  $x > 0$  получим следующую асимптотическую формулу:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & \frac{e_{15}}{2\pi\varepsilon_{11}} W(x, y) + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{(b - a\sigma_n)}{\bar{K}_+(\sigma_n)(\sigma_n^2 - k^2)} e^{i\sigma_n Z_0 r} + \\ & + \frac{hG_1 e_{15} \bar{K}_+(\sigma_n) \sqrt{\sigma_n} (b - a\sigma_n) \sqrt{\sigma_n^2 - k^2}}{\varepsilon_{11} \sqrt{\sigma_n} \bar{K}_+(\sigma_n) (\sigma_n - \bar{\sigma}_n) \left( A\sqrt{\sigma_n^2 - k^2} - B\bar{\sigma}_n - 2hG_1 \bar{\sigma}_n \sqrt{\sigma_n^2 - k^2} \right)} e^{i\sigma_n Z_0 r} + \\ & + \frac{Be_{15} \sqrt{2Z_0} k^{3/2} \bar{K}_+(k) (b - ak)}{\pi\varepsilon_{11} \sqrt{\sigma_n} \bar{K}_+(k) \bar{K}_+(\sigma_n) \bar{Z}_0 (\sigma_n - k) (k^2 Z_0^2 - Z_0^2 k^2 - kZ_0 A)^2} \frac{e^{i(kZ_0 - \pi/4)}}{|x|^{3/2}} + O(|x|^{-5/2}) \end{aligned} \quad (35)$$

а при  $x < 0$

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & \frac{e_{15}}{2\pi\varepsilon_{11}} W(x, y) + \frac{e_{15} i}{\varepsilon_{11}} \frac{\sqrt{\sigma_n^2 - k^2} \bar{\tau}_+(\sigma_n)}{B\sigma_n - A\sqrt{\sigma_n^2 - k^2}} e^{i\sigma_n (x+iy)} - \frac{e_{15} B i}{\varepsilon_{11} \pi} \frac{\sqrt{2\sigma_n Z_0} \bar{\tau}_+(k)}{A^2 - k^2 Z_0^2} \times \\ & \times \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \sigma_n x + i\sigma_n y\right)}}{|x|^{3/2}} + \frac{\bar{\tau}_+(0) 2i \sin \varphi}{Bk} \frac{1}{r} + O(r^{-5/2}) \end{aligned}$$

где  $Z_0 = |\cos \varphi| + i \sin \varphi$ ,  $\bar{Z}_0 = |\cos \varphi| - i \sin \varphi$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. -М.: Наука, 1982.
2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. -М.: ИЛ, 1962.
3. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. -М.: Наука, 1971.
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. -Уч. записки ЕГУ, естеств. науки, 1979, №3.
5. Справочник математическая библиотека функциональный анализ. -М.: Наука, 1972.
6. Григорян Э.Х., Саркисян Л.В. О сдвиговых колебаниях пьезоэлектрического полупространства. -Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т. 49, №3, с.23-30.
7. Lighthill M.J. An Introduction to Fourier analysis and generalized functions. -Cambridge Univ. Press, 1959.

Ереванский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
30.06.1998

УДК 539.3 + 537.228.1

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ НАПРЯЖЕНИЙ В ДВУХ ЗАДАЧАХ  
ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ТЕЛА

Саргсян А.М., Хачикян А.С.

Ա.Մ. Սարգսյան, Ա.Ս. Խաչիկյան

Կտոր առ կտոր համասեռ մարմնի համար էլեկտրաառնականության երկու  
խնդիրներում լարումների եզակիության մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է էլեկտրական և մեխանիկական դաշտերի կապակցվածության  
ազդեցությունը բաղադրյալ սեպի միացման մակերևույթի եզրի շրջակայքում առնագական լարումների և  
էլեկտրական դաշտի լարվածության վայրի վրա:

A.M. Sargsian, A.S. Khachikyan

On the behavior of stresses in two problems of Electroelasticity  
for a piecewise homogeneous body

В работе исследуется влияние связанности электрических и механических полей на  
поведение упругих напряжений и напряженности электрического поля в окрестности края  
поверхности контакта кусочно-однородного клина.

Интерес к изучению эффектов взаимодействия механических полей с  
электромагнитными полями (пьезоэффект) связан с тем, что в различных  
областях современной техники стали широко применять функциональные  
элементы, изготовленные из высокоэффективных пьезоматериалов [1-3].

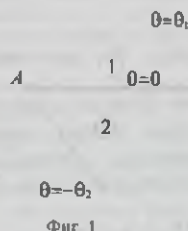
Методы же расчета таких элементов в одномерной постановке весьма  
приближены и, как правило, не дают полной картины физических  
явлений, происходящих в них. Предложенный в [3] численно-  
аналитический метод расчета в двумерной постановке, применительно к  
пьезоэлектрическим трансформаторам, не может обеспечить необходимую  
точность из-за невыделенности асимптотических поведений решений  
вблизи концентраторов (края поверхности контакта секции возбуждения  
и генераторной секции).

Определенный интерес представляет также учет влияния эффекта  
связанности механических и электромагнитных полей в горных породах  
на флуктуации фона геофизических полей, необходимых при  
электроразведке и изучении землетрясений и земной коры  
геофизическими методами [4].

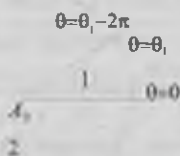
В настоящей работе исследуется влияние связанности электрических  
и механических полей на поведение характеристик этих полей (упругие  
напряжения и напряженность электрического поля) в окрестности края  
поверхности контакта кусочно-однородных тел, находящихся в условиях  
продольного сдвига. Получены условия, при которых имеет место сильная  
концентрация характеристик этих полей, и формулы, определяющие их  
асимптотическое поведение.

Рассматриваются две задачи электроупругости для кусочно-  
однородных призматических тел, поперечные сечения которых  
представлены на фиг. 1, 2.

Составные призматические тела изготовлены из пьезоматериалов  
классов 4mm, 6mm и т.д., для которых возможны состояния продольного  
сдвига. Главные оси симметрии пьезоматериалов проходят через вершины  
 $A_1$ ,  $A_2$  и совпадают с осью  $z$  цилиндрической системы координат  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

При отсутствии массовых сил решение задач электроупругости сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений [3]

$$\Delta U_j(r, \theta) = 0, \quad \Delta \Phi_j(r, \theta) = 0, \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$

при соответствующих гранично-контактных условиях: для первой задачи зададим следующие граничные

$$c_{44}^{(1)} \partial U_1 / \partial \theta + e_{15}^{(1)} \partial \Phi_1 / \partial \theta = 0, \quad \theta = \theta_1, \\ \Phi_1(r, \theta_1) = 0, \quad U_2(r, -\theta_2) = 0 \quad (2)$$

$$e_{15}^{(2)} \partial U_2 / \partial \theta - \epsilon_1 \partial \Phi_2 / \partial \theta = 0, \quad \theta = -\theta_2,$$

и контактные условия (на линии  $\theta = 0$ )

$$c_{44}^{(1)} \partial U_1 / \partial \theta + e_{15}^{(1)} \partial \Phi_1 / \partial \theta = c_{44}^{(2)} \partial U_2 / \partial \theta + e_{15}^{(2)} \partial \Phi_2 / \partial \theta \\ U_1(r, 0) = U_2(r, 0), \quad \Phi_1(r, 0) = \Phi_2(r, 0) \quad (3)$$

$$e_{15}^{(1)} \partial U_1 / \partial \theta - \epsilon_1 \partial \Phi_1 / \partial \theta = e_{15}^{(2)} \partial U_2 / \partial \theta - \epsilon_2 \partial \Phi_2 / \partial \theta$$

Для второй задачи кроме контактных условий (3) существуют аналогичные условия и на линии  $\theta = \theta_1$  (фиг.2)

$$c_{44}^{(1)} \partial U_1 / \partial \theta + e_{15}^{(1)} \partial \Phi_1 / \partial \theta \Big|_{\theta=\theta_1} = c_{44}^{(2)} \partial U_2 / \partial \theta + e_{15}^{(2)} \partial \Phi_2 / \partial \theta \Big|_{\theta=\theta_1-2\pi} \\ U_1(r, \theta_1) = U_2(r, \theta_1 - 2\pi), \quad \Phi_1(r, \theta_1) = \Phi_2(r, \theta_1 - 2\pi) \quad (4)$$

$$e_{15}^{(1)} \partial U_1 / \partial \theta - \epsilon_1 \partial \Phi_1 / \partial \theta \Big|_{\theta=\theta_1} = e_{15}^{(2)} \partial U_2 / \partial \theta - \epsilon_2 \partial \Phi_2 / \partial \theta \Big|_{\theta=\theta_1-2\pi}$$

где  $U_j(r, \theta)$  - упругие перемещения,  $\Phi_j(r, \theta)$  - электрические потенциалы,  $c_{44}^{(j)}$  - модули упругости,  $e_{15}^{(j)}$  - пьезомодули,  $\epsilon_j$  - диэлектрические проницаемости соответствующих областей.

Первые и четвертые условия в (2) - (4) получаются при помощи уравнений состояния [3]

$$\tau_{\theta\theta}^{(j)} = c_{44}^{(j)} \gamma_{\theta\theta}^{(j)} - e_{15}^{(j)} E_{\theta}^{(j)}, \quad \tau_{r\theta}^{(j)} = c_{15}^{(j)} \gamma_{r\theta}^{(j)} - e_{15}^{(j)} E_r^{(j)} \\ D_{\theta}^{(j)} = e_{15}^{(j)} \gamma_{\theta\theta}^{(j)} + \epsilon_j E_{\theta}^{(j)}, \quad D_r^{(j)} = e_{15}^{(j)} \gamma_{r\theta}^{(j)} + \epsilon_j E_r^{(j)} \quad (5)$$

$$\gamma_{\theta\theta}^{(j)} = \partial U_j / r \partial \theta, \quad \gamma_{r\theta}^{(j)} = \partial U_j / \partial r, \quad E_{\theta}^{(j)} = -\partial \Phi_j / r \partial \theta, \quad E_r^{(j)} = -\partial \Phi_j / \partial \theta$$

Здесь  $\tau_{\theta\theta}$ ,  $\tau_{r\theta}$ ,  $\gamma_{\theta\theta}$ ,  $\gamma_{r\theta}$  - компоненты упругих напряжений и деформаций,  $D_{\theta}$ ,  $D_r$ ,  $E_{\theta}$ ,  $E_r$  - компоненты векторов электрической индукции и напряженности электрического поля.

Методом разделения переменных [5] для решения уравнения (1) находим

$$\Phi_j(r, \theta) = r^2 (C_j^* \cos \lambda \theta + D_j^* \sin \lambda \theta)$$

$$U_j(r, \theta) = r^\lambda (A_j^* \cos \lambda \theta + B_j^* \sin \lambda \theta) \quad (6)$$

где  $\lambda$  — произвольный параметр,  $A_j^*$ ,  $B_j^*$ ,  $C_j^*$ ,  $D_j^*$  — неизвестные постоянные.

Удовлетворяя гранично-контактным условиям (2)-(4) для определения  $A_j^*$ ,  $B_j^*$ ,  $C_j^*$ ,  $D_j^*$ , в каждой задаче получаем систему линейных однородных уравнений. Из условий существования нетривиальных решений этих систем вытекают следующие уравнения относительно  $\lambda$ : для первой задачи

$$A_1 \cos \lambda \theta_+ + A_2 \cos \lambda \theta_- + A_3 \cos \lambda \theta_1 + A_4 \cos \lambda \theta_2 + A_5 = 0 \quad (7)$$

где

$$\theta_\pm = \theta_1 \pm \theta_2, \quad A_1 = h a_+ b_+ - g_2 e_+, \quad A_2 = h a_- b_- - g_2 e_-$$

$$A_3 = h(a_+ b_+ + a_- b_-) - 2g_2 - g_3, \quad A_4 = A_3 - g_2$$

$$A_5 = h(a_+ b_+ + a_- b_-) - g_3 + g_4, \quad h = \varepsilon(\varepsilon + a_0 e)$$

$$b = (1 + a_0) / (\varepsilon + a_0 e), \quad g_2 = a_0 \varepsilon(a - e), \quad g_3 = 4a_0 e(\varepsilon - e)$$

$$g_4 = 4a_0(1 + a_0)e^2, \quad a_\pm = a \pm 1, \quad b_\pm = b \pm 1, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$$

$$a = c_{44}^{(2)} / c_{44}^{(1)}, \quad e = e_{15}^{(2)} / e_{15}^{(1)}, \quad a_0 = (e_{15}^{(1)})^2 / c_{44}^{(1)} \varepsilon_1$$

для второй задачи

$$[\sin^2 \lambda \pi - y_1 \sin^2 \lambda(\pi - \theta_1)] [\sin^2 \lambda \pi - y_2 \sin^2 \lambda(\pi - \theta_1)] = 0 \quad (8)$$

где

$$y_{1,2} = [2A_\pm A_- - C \pm \sqrt{C(C - 4A_\pm A_-)}] / 2A_\pm^2$$

$$A_\pm = a_\pm \varepsilon_\pm + a_0 e_\pm^2, \quad C = 4[4a_0(a - e)(\varepsilon - e) + (a - \varepsilon)^2] \quad (9)$$

При конкретных значениях параметров  $\theta_j$ ,  $a$ ,  $e$ ,  $\varepsilon$ ,  $a_0$  уравнения (7) и (8) имеют бесконечное множество физически допустимых корней  $\lambda_m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ), которые могут быть пронумерованы по порядку возрастания их действительных частей ( $0 < \operatorname{Re} \lambda_1 < \operatorname{Re} \lambda_2 < \dots$ ) [5-7].

Упругое перемещение и электрический потенциал в окрестности края соединения представляется в виде суммы

$$U_j(r, \theta) = \sum_{(\lambda_m)} r^{\lambda_m} (A_{jm} \cos \lambda_m \theta + B_{jm} \sin \lambda_m \theta)$$

$$\Phi_j(r, \theta) = \sum_{(\lambda_m)} r^{\lambda_m} (C_{jm} \cos \lambda_m \theta + D_{jm} \sin \lambda_m \theta) \quad (6')$$

где суммирование распространяется на все положительные корни уравнений (7) или (8).

Из (5) и (6') следует, что если  $0 < \operatorname{Re} \lambda_1 < 1$ , то характеристики связанных полей (упругие напряжения и компоненты вектора электрической индукции) в окрестности угловых точек  $A_j$  ( $j = 1, 2$ ) стремятся к бесконечности (концентрационное состояние), при этом порядок особенности равен  $|\operatorname{Re} \lambda_1 - 1|$ . Если  $\operatorname{Re} \lambda_1 > 1$ , характеристики полей убывают до нуля при приближении к точкам  $A_j$  (малонапряженное состояние). В случае  $\operatorname{Re} \lambda_1 = 1$  эти характеристики в

угловых точках конечны и вообще отличны от нуля (предельное состояние).

Следовательно, исследование особенности характеристик полей около угловых точек  $A_j$  приводится к отысканию корней с наименьшей положительной действительной частью уравнений (7) и (8) в зависимости от параметров  $\theta_1, a, e, \varepsilon, a_0$ .

При отсутствии пьезоэффекта ( $e_{15} = 0$ ) из (7) и (8) получаются известные уравнения, определяющие особенность характеристик полей в соответствующих задачах теории упругости и электростатики [6,7].

В общем случае легко показать, что при фиксированных значениях  $a, e, \varepsilon, a_0$  предельные кривые (определяемые из (7) при условии  $\operatorname{Re} \lambda_1 = 1$ ), разделяющие в плоскости  $\theta_1, \theta_2$  области малонапряженности и концентрации, проходят через точки  $(\pi/2, 0)$  и  $(0, \pi/2)$ , пересекая прямую  $\theta_1 = \theta_2$  в точках  $\theta_1^*$ , соответствующих различным парам соединяемых пьезоматериалов. Значение  $\theta_1^*$  определяется из (7) при условии  $\operatorname{Re} \lambda_1 = 1$ .

При равенстве углов растворов однородных клиньев с помощью (7) явно определяется первый корень  $\lambda_1$  в зависимости от параметров задачи и угла  $\theta_1$ .

В предлагаемой таблице для некоторых реальных соединяемых пар [10] приведены также предельные углы  $\theta_1^*$ , меньше (больше) которых в окрестности точки  $A_1$  имеет место малонапряженное (концентрационное состояние).

Таблица

| Материалы соединяемых пар | Действительная часть первого корня   | Предельный угол               |
|---------------------------|--------------------------------------|-------------------------------|
| ЦТС4-ZnO                  | $\sigma_1 \approx \pi/8\theta_1$     | $\theta_1^* \approx \pi/8$    |
| ЦТС4-CdS                  | $\sigma_1 \approx \pi/2\theta_1$     | $\theta_1^* \approx \pi/2$    |
| ZnO-CdS                   | $\lambda_1 \approx 0,09\pi/\theta_1$ | $\theta_1^* \approx 0,09\pi$  |
| ЦТС19-ZnO                 | $\sigma_1 \approx 0,214\pi/\theta_1$ | $\theta_1^* \approx 0,214\pi$ |
| ЦТС4- ЦТС19               | $\sigma_1 \approx \pi/4\theta_1$     | $\theta_1^* \approx \pi/4$    |

Для частного случая однородного клина, полагая в (7)  $a = \varepsilon = e = 1$ , получим

$$\Delta(\lambda) = \cos 2\lambda\theta_1 + 1 + 2a_0 = 0 \quad (10)$$

Приравнивая нулю действительную и мнимую части  $\Delta(\lambda)$ , легко показать, что уравнение (10) имеет только комплексные корни и степень особенности напряжений для однородного клина при данных граничных условиях определяется формулой

$$\lambda_1 = \pi/2\theta_1 \pm i\tau_0 \quad (11)$$

где  $\tau_0$  - точки пересечения кривых  $y = \operatorname{ch} 2\tau\theta_1$  и  $y = (-1)^{k+1}(1 + 2a_0)$ .

Из (11) следует, что в случае однородного клина особенность напряжений не зависит от электроупругих параметров задачи. Этот частный случай был рассмотрен также в работах [8,9].

Как показано в работе [5], первый корень уравнения (8) при действительных значениях  $y_k < 1$  ( $k=1,2$ ) всегда меньше единицы. При других значениях  $y_k$  уравнение (8) может иметь и комплексные корни. Численные расчеты показывают, что для первых четырех вышеприведенных пар  $\text{Re} \lambda_1 < 1$ , т.е. характеристики связанных полей бесконечно возрастают при приближении к угловой точке  $A_2$ . Аналогичная ситуация имеет место в случаях  $a = \varepsilon = e$ ;  $a = e = 1$ ,  $\varepsilon \neq 1$ ;  $\varepsilon = e = 1$ ,  $a \neq 1$  и др. Для пятой пары  $\lambda_1 = 1 + i\varepsilon$  ( $\varepsilon$  - малое положительное число), т.е. соединение работает как однородный материал. Это и следовало ожидать, т.к. в этом случае отношения соответствующих параметров близки к единице ( $a = 0.973$ ,  $\varepsilon = 1.117$ ,  $e = 0.756$ ).

В частном случае, когда  $C = 4A_1 A_2$ , что эквивалентно условию

$$c_{44}^{(1)} \varepsilon_1 + e_{15}^{(1)} e_{15}^{(1)} = c_{44}^{(2)} \varepsilon_2 + (e_{15}^{(2)})^2$$

из (8) и (9) следует уравнение

$$[\sin^2 \lambda \pi - (A_- / A_+) \sin^2 \lambda (\pi - \theta_1)]^2 = 0$$

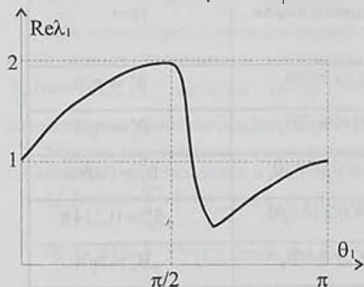
которое, как легко показать, при  $|A_-| < A_+$  ( $A_- < 0$ ) не имеет комплексных корней. Действительные корни в этом случае равны

$$\lambda_1 = nq \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

при

$$\theta_1 = \pi p / q, \quad (p = 1, 2, 3, \dots; q = 1, 2, 3, \dots)$$

Это означает, что характеристики полей в окрестности точки  $A_2$  не имеют особенностей при  $0 < \theta_1 < 2\pi$ .



Фиг.3

В общем случае зависимость  $\lambda_1$  от электромеханических и геометрических параметров составного тела достаточно сложная. На фиг. 3 приведен график изменения  $\text{Re} \lambda_1$  в зависимости от  $\theta_1$  ( $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ ) для случая  $y_1 = 4$ ,  $y_2 = 5$ , рассчитанный по (8). В интервале  $0 < \theta_1 \leq 2\pi$  график симметричен относительно линии  $\theta_1 = \pi$ . Видно, что пьезоэффект может изменить около угловой точки  $A_2$  концентрационное состояние на малонапряженное. Расчеты показывают, что малонапряженное состояние имеет место также в других случаях, например, в случае  $y_1 = -0.6$ ,  $y_2 = -4$  всегда  $\text{Re} \lambda_1 > 1$  для  $\theta_1$  из интервала  $0 < \theta_1 \leq 2\pi$ . При отсутствии пьезоэффекта ( $e_{15} = 0$ ) угловая точка  $A_2$  всегда является очагом сильной концентрации напряжений [5], если только  $a \neq 1$  и  $\theta_1 \neq \pi$ . Следовательно, в случае второй задачи пьезоэффект может существенно изменить поведения характеристик связанных полей в окрестности угловой точки кусочно-однородного тела.

Таким образом, получены решения для асимптотического поведения характеристик связанных полей в окрестности угловых точек (формулы (6')), которые могут быть использованы при построении более точных аналитических и численных решений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лавриенко В.В. Пьезоэлектрические трансформаторы. -М.: Энергия, 1975, 122с.
2. Кулиев Ю.Н и др Основы колебаний однослойных и многослойных пьезокерамических преобразователей. -Баку: ЭЛМ, 1982, 365 с.
3. Партон В.З, Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических электропроводных тел. -М.: Наука, 1988, 472 с.
4. Электроразведка. Справочник геофизика. -М. Недра, 1980, 518 с.
5. Чобанян К.С. Напряжение в составных упругих телах. -Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987, 338 с.
6. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Об одной антиплоской задаче электроупругости для составного тела //Изв. НАН Армении, Механика, 1995, т. 48, №3, с. 15-23
7. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Поведение некоторых физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела. //Докл. АН АрмССР, 1988, т.86, №4, с. 161-165.
8. Белубекян М.В., Галпчян П.В. Об особенностях электроупругого поля в окрестности угловой точки при антиплоской задаче. //Инженерно-физические проблемы новой техники. Тезисы докладов. М: 1992, с. 60-61.
9. Белубекян М.В., Галпчян П.В. Определение особенности связанного электроупругого поля в угловой точке пьезоэлектрического тела в виде двугранного угла при продольном сдвиге. //МТТ, 1994, №3, с. 102-108.
10. Акустические кристаллы (под редакцией М.П. Шаскольской). -М.: Наука, 1982, с. 632.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
13.06.1997

УДК 532.516

# НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ С ПОДВИЖНОЙ СТЕНКОЙ И С ПЕРЕПАДОМ ДАВЛЕНИЯ

Бабаджанян Г.А.

Գ.Հ. Բաբաջանյան

Իրական հեղուկի շահատարած շարժումը շարժական պատով ջրանցողում ճնշման անկման առկայությամբ

Հողվածում քննարկվում է իրական անսեղմելի հեղուկի ոչ ստացիոնար (շահատարած) շարժումը հարթ հեղուկատարում. երբ շարժման ոչ ստացիոնարությունը պայմանավորված է հեղուկատարի պատերից մեկի շարժումով և հեղուկի սեփական հոսքի առկայությամբ. Դրված խնդրի ուսումնասիրությունը պահանջում է մասնական ածանցյալներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը. Գտնվելով Լ.սայրսայի ինտեգրալ ձևափոխությունից կառուցվում են հավասարման լուծումները, որոնք հնարավորություն են տալիս որոշել շարժման ընդհանուրի մեծությունների (արագության, ճնշման, չվման ուժի) փոփոխման որոշակիությունները կախված ժամանակից և տարածության կետի կոորդինատաներից

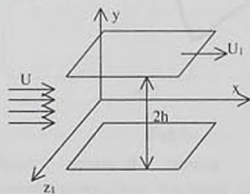
G.H. Babujanian

Unsteady motion of viscous liquid in chanal with movable wall and differental pressure

В статье рассматривается нестационарное движение реальной несжимаемой жидкости в плоском канале. Нестационарности, движения обусловлена движением одной из стенок канала и движением самой жидкости. Исследование поставленной задачи сведено к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных. Используют интегральное преобразование Лапласа, построены решения уравнений, которые дают возможность определять закономерности изменения скорости, давления и силы трения жидкости в зависимости от времени и координат.

1. Рассматривается развитие нестационарного изотермического течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с движущейся стенкой при наличии перепада давления, т.е. имеет место одновременное течение жидкости.

Исследования динамического взаимодействия таких движений вязкой жидкости с твердыми поверхностями (неподвижными и подвижными) помимо теоретического интереса имеют также и различные практические приложения.



Ֆիգ.1

Развитие только по времени движения вязкой жидкости между двумя параллельными движущимися плоскостями исследовалось в [1], где принималось, что жидкость и стенки в начале движения (при  $t \leq 0$ ) находились в покое, а с момента времени (при  $t > 0$ ) стенки перемещались с постоянными скоростями, увлекая за собой частицы жидкости. Были найдены законы изменения скорости частиц жидкости и силы трения, зависящие от времени и координат.

В настоящей работе рассматривается более общий случай. Вязкая жидкость, ограниченная двумя параллельными плоскостями на расстоянии  $2h$  друг от друга в начале времени (при  $t = 0$ ), движется с постоянной, равномерно распределенной в начальном сечении канала, скоростью  $U$ . В момент времени (при  $t > 0$ ) одна из плоскостей начинает двигаться с

постоянной скоростью  $U_1$ . Требуется определить развитие со временем и по координатам движения жидкости между плоскостями, при условии, что параллельные плоскости неограничены по осям  $ox$  и  $oz_1$ , а движение одной из них происходит в своей плоскости (фиг. 1). Пренебрегая действием сил тяжести, для решения поставленной задачи в качестве исходных уравнений примем линеаризованные уравнения движения, получаемые из уравнений Навье-Стокса с частичным учетом слагаемых от ускорения и вязкости в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + U \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

В системе уравнений (1.1)  $v_x$  и  $v_y$  — соответствующие компоненты скорости потока по осям  $ox$  и  $oy$ ,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости жидкости. Приняв начало координат на оси симметрии канала, начальные и граничные условия задачи примут вид:

$$\begin{aligned} \text{при } t = 0, x = 0 & \quad v_x = U = \text{const}, \quad p = p_H = \text{const} \\ \text{при } t > 0, x > 0, y = h & \quad v_x = U_1 = \text{const}, \quad v_y = 0 \\ \text{при } t \geq 0, x > 0, y = -h & \quad v_x = 0, \quad v_y = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $p_H$  — давление жидкости в начальном сечении канала.

Вводя новые переменные

$$z = \frac{x}{h}, \quad \xi = \frac{y}{h}, \quad u = \frac{v_x - U}{U}, \quad v = \frac{v_y}{U}, \quad \Phi = \frac{p - p_H}{\rho U^2}, \quad T = \frac{U}{h} t$$

система уравнений (1.1) и краевые условия (1.2) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial T} + \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \text{при } T = 0, z = 0 & \quad u = 0, \quad \Phi = 0 \\ \text{при } T > 0, z > 0, \xi = 1 & \quad u = \frac{U_1 - U}{U}, \quad v = 0 \\ \text{при } T \geq 0, z > 0, \xi = -1 & \quad u = -1, \quad v = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Применяя к уравнениям (1.3) и к краевым условиям (1.4) двойное преобразование Лапласа [2], получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} - R_e (s_1 + s_2) \bar{u} &= R_e s_1 \bar{\Phi} \\ \frac{d\bar{\Phi}}{d\xi} &= 0, \quad s_1 \bar{u} + \frac{d\bar{v}}{d\xi} = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \text{при } T = 0, z = 0 & \quad \bar{u} = 0, \quad \bar{\Phi} = 0 \\ \text{при } T > 0, z > 0, \xi = 1 & \quad \bar{u} = \frac{U_1 - U}{U} \frac{1}{s_1 s_2}, \quad \bar{v} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{при } T \geq 0, z > 0, \xi = -1 \quad \bar{u} = -\frac{1}{s_1 s_2}, \quad \bar{v} = 0 \quad (1.6)$$

где  $s_1$  и  $s_2$  — параметры преобразования Лапласа по переменным  $z$  и  $T$  соответственно,  $R_e = \frac{Uh}{v}$  — число Рейнольдса.

Общее решение первого уравнения системы (1.5) с учетом граничных условий (1.6) имеет вид:

$$\bar{u} = \frac{U_1 - U}{U} \frac{\text{sh} \beta (\xi + 1) + \text{sh} (\xi - 1)}{s_1 s_2 \text{sh} 2\beta} + \frac{s_1 \bar{\Phi}}{s_1 + s_2} \left( \frac{\text{ch} \beta \xi}{\text{ch} \beta} - 1 \right) \quad (1.7)$$

где  $\beta^2 = R_e (s_1 + s_2)$ .

Из последних двух уравнений системы (1.5) с учетом граничных условий (1.6) для функции  $\bar{\Phi}$  получим:

$$\bar{\Phi} = \frac{2U - U_1}{2U} \frac{(s_1 + s_2) \text{th} \beta}{s_1^2 s_2 (\text{th} \beta - \beta)} \quad (1.8)$$

Применяя двойное обратное преобразование Лапласа к уравнениям (1.7) и (1.8) и переходя к первоначальным переменным, для искомых величин  $v_x$  и  $p$  получим:

$$\begin{aligned} v_x = & U + \frac{U_1 - 2U}{2} \left\{ \frac{3y^2}{2h^2} - \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \left( 1 - \frac{\cos \lambda_n y / h}{\cos \lambda_n} \right) \exp \left( -\frac{\lambda_n^2 v x}{Uh^2} \right) + \right. \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \left[ 1 - \frac{\cos \mu_n y / h}{\cos \mu_n} \right] \exp \left( -\frac{\mu_n^2 v t}{h^2} \right) - \exp \left( -\frac{\mu_n^2 v x}{Uh^2} \right) \Bigg\} + \\ & + \frac{U_1}{2} \left\{ \frac{y}{h} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\pi y / h}{n\pi} \exp \left( -\frac{h^2 \pi^2 v x}{Uh^2} \right) + \right. \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\pi y / h}{n\pi} \left[ \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2 v t}{h^2} \right) - \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2 v x}{Uh^2} \right) \right] \Bigg\} \quad (1.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p = & p_H - \frac{\rho U^2}{2} \frac{2U - U_1}{U} \left\{ \frac{3v x}{Uh^2} + \frac{1}{5} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \exp \left( -\frac{\lambda_n^2 v x}{Uh^2} \right) - \right. \\ & - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \left[ \exp \left( -\frac{\mu_n^2 v t}{h^2} \right) - \exp \left( -\frac{\mu_n^2 v x}{Uh^2} \right) \right] + \frac{2v}{Uh^2} \sum_{n=1}^{\infty} (x - Ut) \exp \left( -\frac{\mu_n^2 v t}{h^2} \right) \Bigg\} \quad (1.10) \end{aligned}$$

Из третьего уравнения системы (1.1) определим  $v_y$ :

$$\begin{aligned} v_y = & \frac{(U_1 - 2U)v}{Uh} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{y}{h} - \frac{\sin \lambda_n y / h}{\sin \lambda_n} \right) \exp \left( -\frac{\lambda_n^2 v x}{Uh^2} \right) - \right. \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{y}{h} - \frac{\sin \mu_n y / h}{\sin \mu_n} \right) \exp \left( -\frac{\mu_n^2 v x}{Uh^2} \right) \Bigg\} + \frac{U_1 v}{Uh} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n \cos \frac{n\pi y}{h} - 1 \right] \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2 v x}{Uh^2} \right) - \right. \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n \cos \frac{n\pi y}{h} - 1 \right] \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2 v x}{Uh^2} \right) \Bigg\} \quad (1.11) \end{aligned}$$

В формулах (1.9)–(1.11)  $\lambda_n = -i\sqrt{R_e s_n}$  и  $\mu_n = -i\sqrt{R_e (s_1 + s_2)}$  являются действительными корнями уравнений  $\text{tg} \lambda_n = \lambda_n$  и  $\text{tg} \mu_n = \mu_n$ .

Сила трения между слоями жидкости определяется по следующей формуле:

$$\tau = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

В частном случае на верхней подвижной и на нижней неподвижной стенках силы трения будут:

$$\begin{aligned} \tau_{y=h} = & \frac{\mu(U_1 - 2U)}{2h} \left\{ 3 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left( -\frac{\lambda_n^2 vx}{Uh^2} \right) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \exp \left( -\frac{\mu_n^2 vt}{h^2} \right) - \exp \left( -\frac{\mu_n^2 vx}{Uh^2} \right) \right] \right\} + \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$+ \frac{\mu U_1}{2h} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2 vx}{Uh^2} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2 vt}{h^2} \right) - \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2 vx}{Uh^2} \right) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} \tau_{y=-h} = & -\frac{\mu(U_1 - 2U)}{2h} \left\{ 3 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left( -\frac{\lambda_n^2 vx}{Uh^2} \right) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \exp \left( -\frac{\mu_n^2 vt}{h^2} \right) - \exp \left( -\frac{\mu_n^2 vx}{Uh^2} \right) \right] \right\} + \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$+ \frac{\mu U_1}{2h} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2 vx}{Uh^2} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2 vt}{h^2} \right) - \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2 vx}{Uh^2} \right) \right] \right\}$$

Таким образом, определены законы изменения давления, скорости и силы трения для нестационарного движения вязкой несжимаемой жидкости при вышеуказанной постановке задачи.

В случае обеих движущихся плоскостей решение поставленной задачи можно построить тем же методом. Отметим, что во всех формулах суммы со знаком "штрих" равны нулю при  $0 \leq x < Ut$  и отличны от нуля при  $x > Ut$  [3].

Анализ полученных результатов показывает, что:

– давление, продольная скорость и сила трения зависят от времени и координат, а поперечная скорость – только от координат;

– при стремлении  $t$  к бесконечности (соблюдая условие  $x > Ut$  в суммах со знаком "штрих") из решения задачи о неустановившемся движении получается решение задачи об установившемся движении жидкости при тех же граничных условиях;

– при  $U_1 > 2U$  сила трения по абсолютной величине на подвижной стенке больше, чем на неподвижной, при  $U_1 < 2U$ , наоборот, а в случае  $U_1 = 2U$  – силы трения на обеих стенках равны;

– в начальные моменты времени силы трения на стенках стремятся к бесконечности, что свидетельствует о явлении удара плоскостей по жидкости;

– ряды, входящие в выражения  $v_x$ ,  $p$ ,  $v_y$  и  $\tau$  – равномерно сходящиеся;

— подбором скоростей стенки, основного потока жидкости и соответствующих начальных и граничных условий можно получить различные частные случаи, исследованные другими авторами [4] — [7].

Работа выполнена в рамках научной темы №94-670, финансируемой государственными источниками Республики Армения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаджанян Г.А. Неустановившееся движение вязкой жидкости между параллельными движущимися плоскостями. - Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т. 49, №4, с. 86-89.
2. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. - М.: Физматгиз, 1958. 47с.
3. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. - М.: Наука, 1968. 230с.
4. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. - М.: А. Гостехтеориздат, 1961. 249с.
5. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехтеориздат, 1955. 319с.
6. Шлихтинг Г.А. Теория пограничного слоя. - М.: Изд. иностр. лит., 1956. 74с.
7. Бабаджанян Г.А., Мнацаканян Р.Ж. О развитии течения вязкой жидкости между параллельными движущимися плоскостями. - Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1987, т. 40, №3, с. 49-53.

Ереванский  
государственный университет

Поступила в редакцию  
12.02.1996

МГД – ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ЛАМИНАРНОЕ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ  
ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ СО СВОБОДНОЙ  
ПОВЕРХНОСТЬЮ И ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ ВО ВНЕШНЕМ  
ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Безиргенян Г.С.

Գ.Ս. Բեզիրգենյան

Ավաստ մակերևութով անսեղմելի հեղուկների ՄՀԴ հարթ զուգահեռական իդրոնրմ լամինար շարժումը և  
նրա կայունությունը արտաքին լայնական համասեռ մագնիսական դաշտում

Վերնագրում նշված խնդիրը հետազոտված է անճնշումային ՄՀԴ սարքի տարրերի հոսանքային  
ոեմիմների դեպքում Որոշված են հիմնական շարժումը բնութագրող մեծությունները: Հաշված են ՄՀԴ  
սարքի քաղցրորդնակությունը և դիմադրության գործակիցը: Երկար ալիքային մոտավորությունում  
ցանկացած հոսանքային ոեմիմի համար որոշված է հիմնական շարժման կայունության սլայմանը, որում  
հաշվի են առնված Ռեհնոլդսի մագնիսական բվով պայմանավորված գոմարելիները:

G.S. Bezirgenyan

Plane parallel laminar isothermal flow of incompressible fluids and its stability in a homogeneous  
transverse magnetic field

Упомянутая в заглавии задача исследуется при разных токовых режимах работы  
безнапорного МГД-устройства. Определены МГД-величины, характеризующие основное  
течение. Вычислены пропускная способность и сопротивление безнапорного МГД-  
устройства. Получено условие устойчивости в длинноволновом приближении с учетом  
слабых, обусловленных магнитным числом Рейнольдса

Следует отметить, что имеется большое количество работ (они  
цитированы, в частности, [1]) по определению сопротивления ламинарных  
и турбулентных напорных МГД-течений (движение в трубах и закрытых  
каналах) несжимаемых проводящих потоков, но в то же время они  
отсутствуют для безнапорных МГД-течений.

Задачи гидродинамической устойчивости наиболее детально изучены  
для параллельных течений непроводящих вязких жидкостей в линейной  
постановке. Известно [2-5], что изучение этих задач сводится к  
нахождению собственных значений уравнения Орра-Зомерфельда при  
соответствующих граничных условиях.

В случае проводящей жидкости (при приложенном магнитном поле),  
как показано в работах [6-7], она сводится к нахождению собственных  
значений системы двух уравнений, одно из которых четвертого порядка, а  
другое - второго порядка.

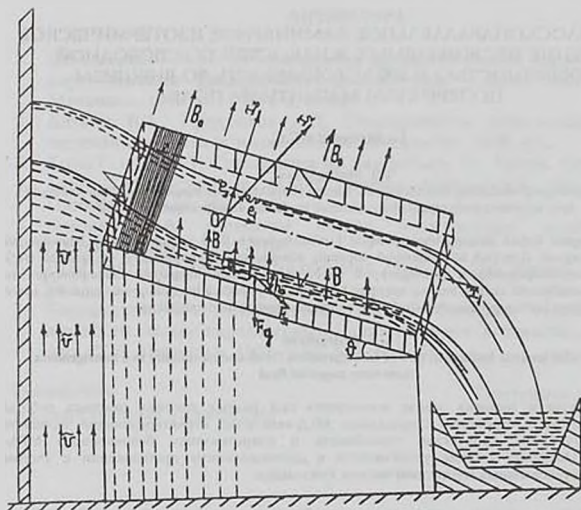
В работе [7] задача устойчивости плоскопараллельного ламинарного  
течения вязкой жидкости в поперечном магнитном поле исследована в  
частном случае энергетического режима (режим холодного хода).  
Получено условие устойчивости в длинноволновом безиндукционном  
приближении.

1. **Постановка задачи.** При решении вышесформулированной задачи  
делается допущение; МГД-лоток настолько длинный и широкий, что  
концевыми эффектами можно пренебречь. В выбранной системе  
координат (фиг. 1) МГД-характеристики рассматриваемого течения,  
согласно сделанному допущению, удовлетворяют условиям:

$$a) \vec{V} = (u(x_1), 0, 0), \quad p = p(x_1), \quad h = h_0 = \text{const},$$

$$\vec{B} = (b_{10}(x_3), 0, B_0 + b_{30}(x_3))$$

б)  $h_0/l, h_0/L, \ll 1$ , где  $l$  и  $L$  — соответственно поперечный и продольный размеры МГД-лотка<sup>1</sup>, а остальные обозначения указаны на фиг. 1.



Фиг. 1

На основании условий а) и б) основная система уравнений МГД запишется в следующей форме:

$$\eta \frac{d^2 u}{dx_3^2} - \sigma B_0^2 u + \sigma E_0 B_0 + \rho g \sin \theta = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{dp}{dx_3} + \sigma (E_0 - u B_0) b_{10} + \rho g \cos \theta = 0, \quad \frac{db_{10}}{dx_3} = \mu_0 \sigma (E_0 - u B_0) \quad (1.2a-b)$$

Систему уравнений (1.1) и (1.2a-б) необходимо решать при следующих граничных условиях:

$$\text{на дне лотка } V=0, b_{10}=0, b_{30}=0 \quad (1.3a-b)$$

(Дно лотка konstrуировано из немагнитного, непроводящего материала — футеровано [8]);

$$\text{на свободной поверхности } \tau_{31} = 0, \Pi_{33} = \Pi_{33}^{(e)}, b_{10} = b_{1e}, b_{30} = b_{3e}, \quad (1.4a-г)$$

где  $\tau_{31} = \eta u_{,1} = \eta du/dx_3$ ,  $\eta$  — динамический коэффициент вязкости,

$\Pi_{ij} = \sigma_{ij} + T_{ij}$ ,  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta(u_{i,j} + u_{j,i})$  — вязкий тензор напряжений,

<sup>1</sup> В отличие от задачи устойчивости плоскопараллельного течения непроводящей жидкости вдоль наклонной плоскости, в рассматриваемой задаче необходимо проводить поток ограничить боковыми стенками для корректности постановки задачи в отношении токовых режимов.

$T_{ij} = H_i B_j - 1/2 H_k B_k \delta_{ij}$  - тензор напряжений Максвелла, а  $\delta_{ij}$  - символы Кронекера. Индексом  $e$  обозначены значения соответствующих величин во внешней среде.

Следует отметить, что система уравнений (1.1), (1.2а-б) не замкнута. Чтобы замкнуть эту систему, необходимо либо задавать условия токовых режимов работы МГД-устройства, либо решить связанную задачу.

2. Решение системы уравнений (1.1)-(1.2а-б). Ее решение при граничных условиях (1.3а-в), (1.4а,б) записывается в форме:

$$u = C \left[ 1 - \frac{\text{ch} Ha (1 - x_3)}{\text{ch} Ha} \right], \quad v = \frac{1}{h_0} \int_0^{h_0} u dx_3 = C \frac{f(Ha)}{H \text{ach} Ha} \quad (2.1а-б)$$

$$U = \frac{u}{v} = \frac{Ha}{f(Ha)} [\text{ch} Ha - \text{ch} Ha (1 - x_3)], \quad p = p_h + p_m$$

$$p_h = p_e + \rho g (1 - \bar{x}_1) \cos \vartheta,$$

$$\bar{p}_m = (K - 1)^2 - \left\{ (K - 1) \bar{x}_3 - \frac{1}{f(Ha)} [\text{sh} Ha (1 - \bar{x}_3) + (\bar{x}_3 - 1) \text{sh} Ha] \right\}^2 \quad (2.2)$$

$$\bar{b}_{10} = \text{Re}_m \left[ (K - 1) \bar{x}_3 - \frac{(\bar{x}_3 - 1) \text{sh} Ha + \text{sh} Ha (1 - \bar{x}_3)}{f(Ha)} \right] \quad (2.3)$$

где  $f(Ha) = H \text{ach} Ha - \text{sh} Ha$ ,  $C = 1/\sigma B_0^2 (\sigma E_0 B_0 + \rho g \sin \vartheta)$ ,  $\bar{x}_3 = x_3/h_0$ .

$Ha = h_0 B_0 \sqrt{\sigma/\eta}$  - число Гартмана,  $p_h$  - гидростатическое давление,

$\bar{p}_m = 2 p_m \mu_0 / \text{Re}_m^2 B_0^2$  - магнитное давление,  $E_0 = \text{const}$ ,  $K = E_0/v B_0$  - параметр МГД-нагрузки лотка, который характеризует его токовые режимы [9],  $\bar{b}_{10} = b_{10}/B_0$ ,  $\text{Re}_m = \sigma \mu_0 h_0 v$  - магнитное число Рейнольдса.

Решения уравнений электродинамики для среды, контактирующей со свободной поверхностью проводящей жидкости, когда она является диэлектриком (воздух) и простирается до бесконечности с учетом граничного условия (1.4б,г), записываются в форме:  $b_{e3} = 0$ ,  $b_{e1} = (K - 1) \text{Re}_m$ . Следовательно, условие затухания возмущений магнитного поля на бесконечности может иметь место только при  $K = 1$ , что соответствует токовому режиму холостого хода лотка ([9], с.87).

Но в общем случае не обязательно, чтобы внешняя среда (непосредственно контактирующей с жидкостью) была диэлектриком и простиралась до бесконечности. Например, она может быть плазмой (термоядерный реактор - ТЯР типа "ТОКАМАК" [10]). В этом случае

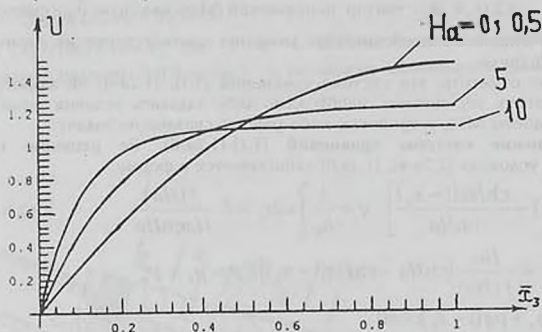
$\nabla \times \vec{B}_e = \mu_0 \vec{j}_e$  и параметр  $K$  может принимать разные значения.

Из полученных формул следует несколько МГД-эффектов:

1) на графике профилей скоростей  $(U, x_3)$  имеется весьма характерный узкий интервал; для любого значения  $Ha$  при  $0,4 \leq \bar{x}_3 \leq 0,5$  происходит их пересечение и в этом интервале  $U \approx 1$ , ( $1,08 \leq U \leq 1,16$ ), то есть течение происходит со средней скоростью;

2) до этого интервала приложенное магнитное поле приводит к разгону потока;

3) за отмеченным интервалом имеет место интенсивное торможение потока приложенным магнитным полем и впоследствии выравнивание поля скоростей (фиг. 2);



Фиг. 2

### 3а. Пропускная способность и коэффициент сопротивления лотка.

Для расчета пропускной способности лотка следует в плоскости  $x_2 O x_3$  взять сечение с шириной  $l$  и высотой  $h_0$ . Тогда  $Q = Av = ACf(Ha)/Hach Ha$ ,  $q = h_0 Cf(Ha)/Hach Ha$ , где  $A = h_0 l$  - площадь сечения, а  $q$  - удельный расход. Из полученной формулы следует:

1) для идеально проводящей жидкости пропускная способность лотка становится постоянной величиной (при  $\sigma \rightarrow \infty$   $Q \rightarrow AE_0/B_0$ , а  $q \rightarrow h_0 E_0/B_0$ );

2) при  $B_0 \rightarrow \infty$  или  $q \rightarrow 0$  происходит заклинивание лотка. Согласно определению коэффициента МГД-сопротивления

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho v^2} = \frac{2}{\rho v^2} \left. \frac{\partial u}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = \frac{2}{Re} \frac{Ha^2 sh Ha}{f(Ha)}$$

Из полученной формулы в случае непроводящей жидкости следует, что

$$c_{f0} = \frac{6}{Re}$$

В технической гидромеханике вместо  $c_{f0}$  используют коэффициент гидравлического сопротивления (или коэффициент Дарси):  $\lambda_0 = 4c_{f0}$ . Это значение  $\lambda_0$  при ламинарном режиме движения вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью по наклонной плоскости хорошо известно. Аналогично для проводящей жидкости:  $\lambda = 4c_f$ . [Для больших чисел Гартмана  $Ha \gg 1$ ,  $\lambda \approx 8Ha/Re$ ].

Сопоставление значений  $\lambda_0$  и  $\lambda$  показывает, что приложенное однородное поперечное магнитное поле значительно увеличивает сопротивление МГД-лотка, что хорошо известно для напорных течений [1].

Функциональная зависимость коэффициента сопротивления в общем случае движения проводящей жидкости со свободной поверхностью, при произвольной ориентации приложенного магнитного поля приведена в работе [11].

3б. Разные токовые режимы. а) Режим холостого хода ( $K = 1$ ).

электроэнергия не отводится и не подводится). Интегральный ток по поперечному сечению равен нулю:

$$I = \int_0^{h_2} j_z dx = \sigma v B_0 h_0 \left( K - \frac{1}{h_0} \int_0^{h_2} v dx_3 \right) = \sigma v B_0 h_0 (K - 1) = 0$$

Электрические токи замыкаются в жидкости. (Об этом режиме выше уже было написано).

б) Режим короткого замыкания:  $K = 0$ ,  $E_0 = 0$  и  $j = -\sigma v B_0$ . Весь ток течет в отрицательном направлении оси  $Ox_2$ . При этом режиме на свободной поверхности:  $\bar{x}_3 = 1$ ,  $b_1 = -Re_m$ , то есть возмущенное поле выходит в наружу и оказывает обратное влияние на приложенное.

в) Режим генератора:  $0 < K < 1$  (электроэнергия отводится) и режим насоса:  $K < 0$ ,  $K > 1$  (электроэнергия подводится). При этих режимах электрические токи текут соответственно в отрицательном и положительном направлениях оси  $Ox_2$  и замыкаются вне жидкости (на стенках). В обоих режимах индуцированное магнитное поле оказывает обратное влияние на приложенное.

На основании проведенных расчетов полученные распределения величин  $\bar{b}_{10}/Re$  и  $2\rho_m \mu_0 / B_0^2 Re_m$  в потоке показывают:

1. В токовом режиме короткого замыкания ( $K = 0$ ) наведенное магнитное поле  $\bar{b}_{10} \leq 0$  и с увеличением значений числа  $Ha$  по абсолютной величине растет, а при холостом ходе ( $K = 1$ ), наоборот, убывает ( $\bar{b}_{10} > 0$ );

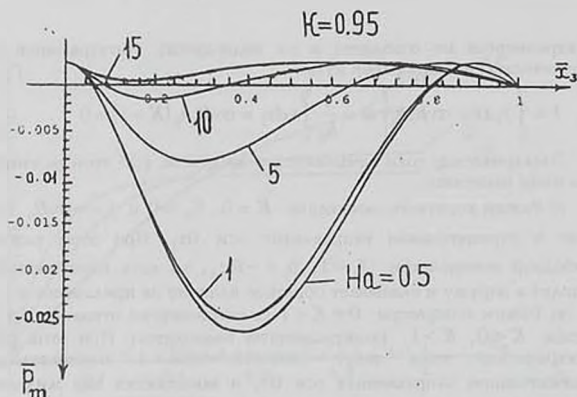
2. При одном и том же генераторном режиме  $0 < K < 1$  имеются два подинтервала:  $0 \leq \bar{x}_3 \leq \bar{x}_{30}$ ,  $\bar{x}_{30} < \bar{x}_3 \leq 1$ ,  $\left( (1/Re_m) \bar{b}_{10}(Ha, K, \bar{x}_{30}) = 0 \right)$ , в первом из которых  $\bar{b}_{10} \geq 0$ , а во втором  $\bar{b}_{10} < 0$  и с увеличением значений числа  $Ha$  в первом убывает, а во втором по абсолютной величине растет. (Значения  $\bar{x}_{30}$  определяются из решения трансцендентного уравнения:

$$[f(Ha)(K-1) - \text{sh}Ha]z + \text{sh}Ha \cdot z + f(Ha)(K-1) = 0, \quad z = \bar{x}_3 - 1$$

(с увеличением  $K$  значения  $z$  растут).

3. При  $Ha = \text{const}$  для насосных режимов:  $K < 0$  и  $K < 1$  соответственно при убывании  $K$  ( $|K|$  - растет)  $\bar{b}_{10} < 0$  - убывает ( $|\bar{b}_{10}|$  - растет), а при возрастании  $K$ ,  $\bar{b}_{10} > 0$  - растет.

4. В случае  $0 < K < 1$  для значений магнитного давления  $\bar{p}_m = \bar{p}_m(Ha, K, \bar{x}_3)$  имеются два существенно разных интервала значений  $K$ :  $(0; 0,2)$  и  $(0,2; 1)$ . В первом  $\bar{p}_m$  монотонно убывает как по  $\bar{x}_3$ , так и по  $Ha$ . В интервале  $(0,2; 1)$  кривые  $\bar{p}_m = \bar{p}_m(Ha, K, \bar{x}_3)$  осциллируют. При  $Ha \leq 12$  осцилляции практически исчезают, а значения  $|\bar{p}_m|$ , резко убывая, приближаются к значению  $0,25 \sim 0,25 \bar{x}_3^2$ . Когда значения  $K$  приближаются к единице, осцилляции сохраняются (конечно, постепенно ослабевая) до значений  $Ha \approx 15$ . С увеличением  $Ha$ ,  $|\bar{p}_m|$  резко убывает и уже при  $Ha = 10$ ,  $\max \{ |p_3(10, 1, \bar{x}_3)| \} < 0,005$  (фиг. 3).



Фиг. 3

В генераторных режимах близко к холостому ходу полное давление в МГД-течениях со свободной поверхностью распределяется почти по гидростатическому закону.

При насосных режимах:  $K > 1$  и  $K < 0$  и фиксированном числе  $Ha$  с увеличением  $|K|$  магнитное давление в МГД-лотке растет.

**4. Устойчивость плоскопараллельного ламинарного течения.** Возмущения МГД-характеристик течения проводящей вязкой жидкости по лотку при приложенном внешнем поперечном магнитном поле считаются малыми, а возмущенное течение плоским [2]. Так что задача устойчивости изучается в плоской, линейной постановке.

В таком случае возмущенные характеристики МГД-течения можно представить в форме:

$$V_1 = u_0(x_3) + u_1(t, x_1, x_3), \quad V_3 = u_3(t, x_1, x_3), \quad h = h_0 + \zeta(t, x_1)$$

$$p = p_0(x_3) + p_1(t, x_1, x_3)$$

$$\vec{B} = [b_0(x_3) + b_1(t, x_1, x_3)]\vec{e}_1 + [B_0 + b_3(t, x_1, x_3)]\vec{e}_3$$

где  $u_1, u_3$  — компоненты возмущенной скорости,  $\zeta$  — возвышение свободной поверхности,  $b_i (i = 1, 3)$  — возмущенные компоненты наведенного в жидкость магнитного поля. Для однородности обозначений через  $u_0(x_3)$  обозначена скорость прямолинейно параллельного течения, а через  $p_{m0} = p_{h0} + p_{m0}$  ( $p_{h0}$  — гидростатическое давление, а  $p_{m0}$  определяется по формуле (2.2)).

Согласно сделанному допущению исходные уравнения плоского нестационарного МГД-течения можно линеаризовать (из-за недостатка места система линеаризованных уравнений не приводится).

Упомянутую систему уравнений необходимо решать при граничных условиях: (1.3а-в) и (1.4а-г), к которым необходимо присоединить линеаризованное кинематическое условие

$$u_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \quad \text{при} \quad x_3 = h_0 + \zeta(t, x_1) \quad (4.1)$$

(Конечно, в (1.4г) вместо  $b_{30}$  необходимо писать  $b_3$ ).

Следует расшифровать граничное условие (1.4б). На свободной поверхности значения:  $\Pi_{33}$  и  $\Pi_{33}^e$  обозначим сверху индексом  $s$ , а остальные величины - снизу индексом  $s$ . Тогда, используя выражения  $\sigma_{33}$ ,  $\tau_{33}$  и  $T_{33}$ , и произведя линеаризацию, можно написать:

$$\Pi_{33}^s = -p_s + 2\eta \left. \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|_s + \frac{1}{2\mu_0} (B_0^2 + 2B_0 b_3 - b_{10}^2 - 2b_{10} b_1) \Big|_s$$

где  $p_s$  - значение полного давления на возмущенной свободной поверхности, то есть  $p_s = p|_{x_3=h_0+\zeta_s} = p_0 + p_1$ . Согласно формуле (2.2)

$$p_0 = p_e - \rho g h_0 \bar{\zeta} \cos \vartheta - \frac{1}{\mu_n} \text{Re}_m^2 B_0^2 (K-1) \left[ K-1 + \frac{1}{f(Ha)} (\text{sh} Ha - Ha) \right]$$

Для внешней среды (она считается невязкой)

$$\Pi_{33}^s = -p_e + \frac{1}{2\mu_0} (B_0^2 + 2B_0 b_{e3} - b_{e0}^2 - 2b_{e0} b_{e1}) \Big|_s$$

Подставляя выражение  $p_s$  в  $\Pi_{33}^s$  и используя граничное условие (1.4б), с учетом условий непрерывности магнитного поля, на поверхности раздела легко получить

$$p_1 = \rho g h_0 \bar{\zeta} \cos \vartheta + \text{Re}_m^2 \frac{B_0^2}{\mu_0} (K-1) \left[ K-1 + \frac{1}{f(Ha)} (\text{sh} Ha - Ha) \right] \quad (4.2)$$

Система линеаризованных уравнений МГД-плоского нестационарного течения проводящей жидкости в приложенном поперечном магнитном поле, как показано в [5-7], сводится к системе связанных уравнений четвертого относительно  $u_1$  и второго относительно  $b_1$  порядков. Решения этих уравнений ищутся в форме

$$\frac{u_1}{v} = \psi(\bar{x}_1) \exp \left\{ i\bar{k} \left( \bar{x}_1 - \frac{v}{h_0} \bar{\alpha} t \right) \right\}, \quad \frac{b_1}{B_0} = \varphi(\bar{x}_1) \exp \left\{ i\bar{k} \left( \bar{x}_1 - \frac{v}{h_0} \bar{\alpha} t \right) \right\}$$

После подстановки этих выражений в упомянутые уравнения получится:

$$\begin{aligned} \psi^{IV} - 2k^2 \psi + k^4 \psi - ik \text{Re} [ (U - \alpha) (\psi - k^2 \psi) - U \psi ] = \\ = - \frac{Ha^2}{\text{Re}_m} [\varphi - k^2 \varphi + ik b_{10} (\varphi - k^2 \varphi) - ik b_{10} \varphi] \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\varphi - k^2 \varphi = -\text{Re}_m [\psi + ik b_{10} \psi - ik (U - \alpha) \varphi] \quad (4.4)$$

(Здесь и далее черточки над соответствующими буквами опускаются).

Граничные условия (1.4а), (4.1) и (4.2) через функции  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\zeta_0$

( $\zeta = \zeta_0 \exp \{ ik(x_3 - v/h_0 t) \}$ ) записываются в следующей форме:

$$\psi(0) = \psi(0) = 0, \quad \psi(1) - ik[U(1) - \alpha]\zeta_0 = 0 \quad (4.5a-b)$$

$$\psi(1) + k^2 \psi(1) + \frac{ikHa^2}{f(Ha)} \zeta_0 = 0 \quad (4.6)$$

$$\psi(1) - 3k^2 \psi(1) + \frac{Ha^2}{\text{Re}_m} [\varphi(1) - k^2 \varphi(1)] -$$

$$-ik \left\{ \operatorname{Re}[(U - \alpha)\psi - U\psi] + \frac{Ha^2}{\operatorname{Re}_m} b_{10} \varphi \right\} \Big|_{\bar{x}_3=1} = k^2 W_0 \zeta_0 \quad (4.7)$$

$$\text{где } W_0 = \frac{1}{\eta v} \left\{ \rho g h_0 \cos \vartheta + \frac{B_0^2}{\mu_0} (K - 1) \left[ K - 1 - \frac{1}{f(Ha)} (\operatorname{sh} Ha - Ha) \right] \right\}$$

Следует отметить, что в граничных условиях (4.5в)-(4.7) значения  $\psi(1 + \zeta_0)$ ,  $\varphi(1 + \zeta_0)$  и их производных были снесены на невозмущенную поверхность раздела  $\bar{x}_3 = 1$ , то есть  $\psi(1 + \zeta_0)$ ,  $\varphi(1 + \zeta_0)$  и ее производные были разложены в ряды по степеням  $\zeta_0$  и приравнены слагаемые одного порядка. (Если считать, что  $\psi(1) = 0(k\zeta_0)$ , то тогда согласно граничному условию (4.5в)  $\psi(1) = 0$ , а  $\psi(1) = ik[U(1) - \alpha]$ , что противоречит тому, что при отсутствии возмущений свободной поверхности должны отсутствовать и возмущения скорости). Для дальнейших вычислений удобно из (4.5в) определить  $\zeta_0$  и подставить в (4.6) и (4.7).

В конце параграфа также следует отметить, что при решении системы уравнений (4.3), (4.4) в том приближении, которое в дальнейшем рассматривается, не возникает необходимости удовлетворения граничным условиям (1.4в-г), то есть отпадает необходимость в решении связанной (внутренней и внешней) задачи.

**5. Асимптотические решения системы (4.3), (4.4) в длинноволновом приближении. Условие устойчивости.** В рассматриваемом приближении все искомые величины разлагаются в ряды по степеням  $k$  ( $k \ll 1$ )

$$\psi = \psi_0 + k\psi_1 + \dots, \quad \varphi = \varphi_0 + k\varphi_1 + \dots, \quad \alpha = \alpha_0 + k\alpha_1 + \dots$$

Подстановка этих разложений в систему уравнений (4.3), (4.4) и граничные условия (4.5а-в), (4.6) и (4.7) в основном порядке  $O(1)$  приводит к решению системы уравнений

$$\psi_0'' + \frac{Ha^2}{\operatorname{Re}_m} \varphi_0 = 0, \quad \varphi_0 + \operatorname{Re}_m \psi_0 = 0 \quad (5.1а,б)$$

при следующих граничных условиях:

$$\psi(0) = \psi_0(0) = 0, \quad \left[ \frac{Ha(\operatorname{ch} Ha - 1)}{f(Ha)} - \alpha_0 \right] \psi_0(1) + \frac{Ha^3}{f(Ha)} \psi_0(1) = 0$$

$$\psi(1) + \frac{Ha^2}{\operatorname{Re}_m} \varphi(1) = 0 \quad (5.2а-г)$$

Решение уравнения (5.1а), из которого исключен  $\varphi_0$  (с использованием (5.1б)), удовлетворяющее граничным условиям (5.2а-г) (из последнего также ясно, что исключен  $\varphi(1)$ ), записывается в виде

$$\psi_0 = C_0 [\operatorname{ch} Hax_3 - 1], \quad C_0 = \text{const} \quad (5.3)$$

После подстановки найденного решения в (5.2в) определяется значение  $\alpha$

$$\alpha_0 = \frac{Ha}{\operatorname{ch} Ha} \frac{\operatorname{ch}^2 Ha - 1}{f(Ha)} \quad (5.4)$$

Подставляя решение (5.3) в уравнение (5.1б) с использованием формы решения для  $b_j$  и граничных условий (1.3в-г), можно получить

$$\varphi_0 = -C_0 \operatorname{Re}_m \left[ \frac{\operatorname{sh} Ha x_1}{Ha} - x_1 \right] \quad (5.5)$$

Следует отметить, что в [7] после долгой полемики так и не приведена форма решения для  $\varphi_0$ , поскольку в первом приближении в уравнении для  $\varphi_1$  отброшены слагаемые порядка  $\operatorname{Re}_m$ , содержащие  $\varphi_0$ , то есть рассмотрено безиндукционное приближение.

С удержанием слагаемых  $O(\operatorname{Re}_m)$  в первом приближении для определения  $\psi_1$  и  $\varphi_1$  из (4.3) и (4.4) получаются уравнения

$$\psi_1^{IV} + \frac{Ha^2}{\operatorname{Re}_m} \varphi_1 = -\frac{Ha^2}{\operatorname{Re}_m} i(b_{10}\varphi_0 + b_{10}\psi_0) + i \operatorname{Re}[(U - \alpha_0)\psi_0 - U\psi_0]$$

$$\varphi_1 = -\operatorname{Re}_m \{ \psi_1 + i[b_{10}\psi_0 + b_{10}\psi_0 - (U - \alpha_0)\varphi_0 - U\varphi_0] \}$$

которые необходимо решать при следующих граничных условиях:

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_1(1) = 0$$

$$\psi_1(1) + \frac{Ha^3}{f(Ha)U(1) - \alpha_0} \frac{\psi_1(1)}{f(Ha)} - \frac{Ha^3\psi_0(1)}{f(Ha)} \frac{\alpha_1}{[U(1) - \alpha_0]^2} = 0$$

$$\psi_1(1) + \frac{Ha^2}{\operatorname{Re}_m} \varphi_1(1) = i \operatorname{Re}[(U(1) - \alpha_0)\psi_0(1) - U(1)\psi_0(1)] +$$

$$+ i \left[ \frac{Ha^2}{\operatorname{Re}_m} b(1)\varphi_0(1) - \frac{\psi_0(1)}{U(1) - \alpha_0} W_0 \right]$$

$$W_0 = \frac{1}{\eta v} \left[ \rho g h_0 \cos \vartheta + \frac{B_0^2}{\mu_0} \operatorname{Re}_m (K - 1) \left( K - 1 - \frac{\operatorname{sh} Ha - Ha}{f(Ha)} \right) \right]$$

После соответствующих вычислений для  $\psi_1$  получается уравнение:

$$\begin{aligned} \psi_1^{IV} - Ha^2 \psi_1 = i C_0 \frac{Ha^2}{\operatorname{ch} Ha - 1} \frac{\operatorname{Re}}{\gamma} \operatorname{th} Ha \operatorname{sh} Ha (x_1 - 1) + i C_0 \frac{2Ha^3}{\operatorname{ch} Ha - 1} \times \\ \times \frac{\operatorname{Re}_m}{\gamma} [Kf(Ha)x_1 + \operatorname{sh} Ha] \operatorname{sh} Ha x_1 + \\ + \left[ \frac{1}{2Ha \operatorname{ch} Ha} (Kf(Ha) \operatorname{ch} Ha - Ha \operatorname{sh} Ha) - x_1 Ha \operatorname{sh} Ha \right] \operatorname{ch} Ha x_1 - \\ - \frac{1}{2Ha \operatorname{ch} Ha} [Kf(Ha) \operatorname{ch} Ha - Ha \operatorname{sh}^2 Ha] \end{aligned}$$

Различие  $\operatorname{Re}$ ,  $\operatorname{Re}_m$  и  $R$ ,  $R_M$  обусловлено с выбором характерных скоростей, фигурирующих в этих безразмерных числах:  $\operatorname{Re}/R = \operatorname{Re}_m/R_M = v/V_0 = \gamma$ , где  $\gamma = v/V_0 = f(Ha)/Ha(\operatorname{ch} Ha - 1)$ . В качестве характерной скорости во всех курсах теоретической и технической гидромеханики принята средняя скорость.

Решение последнего уравнения, удовлетворяющее соответствующим условиям, из-за громоздкости не приводится. В частности, для определения  $\alpha_1$  получается выражение

$$-i \frac{f(Ha)}{Ha} \operatorname{ch}^2 H \cdot \alpha_1 = \frac{\operatorname{Re}}{\gamma} \frac{\operatorname{th} Ha}{2Ha(\operatorname{ch} Ha - 1)} \left( 3 \operatorname{ch}^2 Ha - \frac{3}{Ha} \operatorname{sh} Ha \operatorname{ch} Ha - \operatorname{sh}^2 Ha \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -i \frac{f(Ha)}{Ha} \operatorname{ch}^2 Ha_1 = \frac{Re}{\gamma} \frac{\operatorname{th} Ha}{2Ha(\operatorname{ch} Ha - 1)} \left( 3 \operatorname{ch}^2 Ha - \frac{3}{Ha} \operatorname{sh} Ha \operatorname{ch} Ha - \operatorname{sh}^2 Ha \right) - \\
& - \frac{f(Ha)}{Ha^2} \operatorname{ch} Ha \operatorname{sh} Ha \operatorname{ctg} \vartheta + Re_m \left\{ \frac{K}{2Ha^2} [-5Ha \operatorname{ch} Ha \operatorname{sh} Ha + 2 \operatorname{ch} Ha \times \right. \\
& \times (Ha^2 \operatorname{ch} Ha + 2 \operatorname{ch} Ha - 2)] + \\
& + \frac{\operatorname{th} Ha}{2Ha f(Ha)} [3Ha - (20 + 16 \operatorname{sh}^2 Ha - 5 \operatorname{ch} Ha + 4Ha^2 \operatorname{ch} Ha) \operatorname{sh} Ha + \\
& + 2Ha(6 + 7 \operatorname{sh}^2 Ha) \operatorname{ch} Ha] + \frac{\operatorname{sh} Ha - Ha}{Ha^2} [Kf(Ha) + (\operatorname{ch} Ha - 1) \operatorname{th} Ha] + \\
& + \frac{1}{Ha \operatorname{ch} Ha} [Ha \operatorname{sh}^3 Ha + (Ha - \operatorname{sh} Ha) \operatorname{ch}^2 Ha] - f(Ha) \frac{\operatorname{ch} Ha \operatorname{sh} Ha}{Ha^2} Be \times \\
& \times (K - 1) \left[ K - 1 - \frac{\operatorname{sh} Ha - Ha}{f(Ha)} \right] \Bigg\} \quad (5.6)
\end{aligned}$$

$$\text{где } Be = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho g h_0 \sin \vartheta}$$

Сразу следует отметить, что последнее слагаемое, входящее в выражение (5.6) (которое при холостом входе обращается в нуль), уже для умеренных  $(3 \div 6) \cdot 10^{-2}$  тл приложенных магнитных полей играет существенную роль для устойчивости плоскопараллельных МГД-течений. Оно, начиная со значений  $B_0 \geq (3 \div 6) \cdot 10^{-2}$  тл при токовых режимах: короткое замыкание, генераторный и насосный, существенно увеличивает диапазон устойчивости плоскопараллельных МГД-течений даже при магнитных числах Рейнольдса:  $Re_m = (4 \div 7,9) \cdot 10^{-3}$ .

Для малых и больших значений числа Гартмана выражение  $\alpha_1$  (5.6) упрощается. Соответствующие асимптотические выражения  $\alpha_1$  не приводятся из-за понятной причины.

Если в выражении (5.6) отбросить слагаемые с множителем  $Re_m$ , которыми пренебрежены в [7], то полученное выражение, с учетом отмеченной разницы между  $R$  работы [7] и введенной в этой работе  $Re$ , совпадает с соответствующим выражением отмеченной работы.

Из формы решения видно, что устойчивость рассматриваемого плоскопараллельного МГД-течения с точностью первого приближения определяется знаком мнимой части  $\alpha = \alpha_0 + k\alpha_1$ , то есть знаком  $\operatorname{Im} \alpha_1$  ( $\alpha_0$  - действительное число см. (5.4)). После приравнивания нулю выражения  $\alpha_1$  (5.6) получится точное уравнение нейтральной кривой, откуда определяется соответствующее значение числа  $Re/\gamma$  (или  $R$ ). Уравнение  $-i\alpha_1 = 0$  для проводящих жидкостей эквивалентно уравнению  $[f(Ha)/Ha] \operatorname{ch}^2 Ha - i\alpha_1 = 0$ , так как множитель при  $i\alpha_1$  для значений  $Ha > 0$  больше нуля.

В [7] в уравнении (29) для  $\Psi_1$  отброшены слагаемые порядка  $O(R_M)$ , обоснуя это тем, что для всех представляющих интерес проводящих жидкостей соотношение  $R_M/R$  достаточно мало. Для ртути оно около  $1,5 \cdot 10^{-7}$ , а для натрия -  $7,5 \cdot 10^{-6}$ . (Неверно - должно быть  $2,6 \cdot 10^{-5}$ ).

Поэтому для диапазона значений числа  $R$ , обычно встречающихся в ламинарных течениях,  $R_M$  очень мал. Непонятно, чтобы оценить порядок магнитного числа Рейнольдса для конкретных проводящих жидкостей, автор работы [7] рассматривает отношение  $R_M/R$ . Ведь  $R_M$  и  $R$  — независимые безразмерные величины (их отношение дает число Этчелора). Закон подобия жидких металлов определяется числами:

$$Fr, Ha, Re_m, Be, Re.$$

Таблица

| Металлы |          | $T_m^0 K$        | $\sigma$      | $\eta$                                                      | $\rho$             | $Ha$              |
|---------|----------|------------------|---------------|-------------------------------------------------------------|--------------------|-------------------|
|         |          |                  | $10^7 (cm/m)$ | $10^{-3}$<br>(н.сек/м <sup>2</sup> )<br>(нет точных данных) | $10^4 kg/m^3$      | ЭЛ                |
| 1.      | Литий    | 453              | 4.69          |                                                             | 0.5                | —                 |
| 2.      | Галий    | 303              | 3.68          | 1.99                                                        | 6.093              | 22÷430            |
| 3.      | Алюминий | 934              | 5.08          | 2.97                                                        | 2.382              | 21÷414            |
| 4.      | Ртуть    | 234              | 1.24          | 1.91                                                        | 13.52              | 13÷255            |
| 5.      | Натрий   | 371              | 10.37         | 0.686                                                       | 0.925              | 62÷1229           |
| 6.      | Медь     | 1357             | 10.61         | 2.06                                                        | 8.217              | 36÷718            |
| 7.      | Цинк     | 693              | 2.68          | 3.24                                                        | 6.48               | 14÷288            |
| 8.      | Калий    | 337              | 7.43          | 0.515                                                       | 0.83               | 60÷1202           |
| 9.      | Олово    | 505              | 2.10          | 1.91                                                        | 6.84               | 17÷332            |
| 10.     | Железо   | 1808             | 1.067         | 7.4                                                         | 7.1                | 6÷120             |
| Металлы |          | $Re_m$           |               | $Be$                                                        |                    |                   |
|         |          | ЭЛ               | КУ            | ЭЛ                                                          | КУ                 | КУ                |
|         |          | $\times 10^{-2}$ |               | $\vartheta = 2^0$                                           | $\vartheta = 10^0$ | $\vartheta = 2^0$ |
|         |          |                  |               | $\times 10^3$                                               | $\times 10^2$      | $\times 10^6$     |
| 1.      | Литий    | 5.91             | 1.77          | 113.4÷450                                                   | 228÷910            | 37.8              |
| 2.      | Галий    | 4.637            | 1.39          | 26.9÷37                                                     | 1.87÷75            | 3.1               |
| 3.      | Алюминий | 6.4              | 1.92          | 2.38÷95                                                     | 50÷192             | 7.93              |
| 4.      | Ртуть    | 1.56             | 0.47          | 0.418÷16.7                                                  | 0.841÷33.7         | 1.4               |
| 5.      | Натрий   | 13.06            | 3.93          | 61.3÷245                                                    | 308÷490            | 20.43             |
| 6.      | Медь     | 13.37            | 4.01          | 0.69÷27                                                     | 1.39÷55.6          | 2.3               |
| 7.      | Цинк     | 3.37             | 1.01          | 0.87÷35                                                     | 1.76÷70            | 2.92              |
| 8.      | Калий    | 9.36             | 2.81          | 68.3÷273                                                    | 137÷550            | 22.8              |
| 9.      | Олово    | 2.65             | 0.79          | 0.83÷33                                                     | 1.67÷67            | 2.76              |
| 10.     | Железо   | 1.34             | 0.4           | 0.8÷31.9                                                    | 1.61÷64            | 2.66              |

Примечание I. С увеличением температуры вязкость жидкого алюминия резко падает, в то время электропроводность уменьшается незначительно. При  $T = 1073^0 K$ ,  $\eta = 1.4 \cdot 10^{-3} \text{ н} \cdot \text{сек}/\text{м}^2$ ,  $Ha = 602$

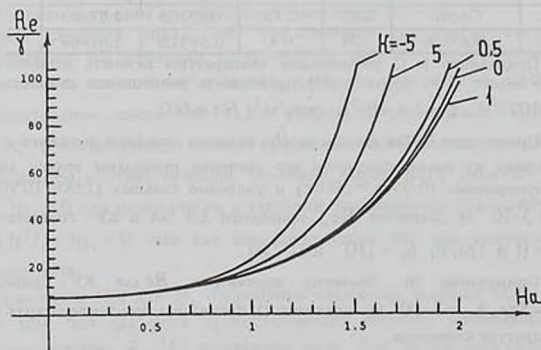
Примечание II. Так как число  $Ha$  является линейной функцией от  $Be$  и  $h_0$ , то исходя из целесообразности его значения приведены только для ЭЛ при слабоумеренных ( $0.05 T_L = 500 \text{ Гс}$ ) и умеренно сильных ( $1 T_L = 10^4 \text{ Гс}$ ) полей и  $h_0 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ . Значения  $Re_m$  приведены для ЭЛ и КУ соответственно при  $v_0 = (1 \text{ и } 3) \text{ м/с}$ ,  $h_0 = (10^{-2} \text{ и } 10^{-3}) \text{ м}$ .

Примечание III. Значения параметров  $Be$  для КУ приведены при  $B_0 = 5 T_L$ ,  $h_0 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ . Значения  $\rho$  приведены при температурах, близких к температуре плавления.

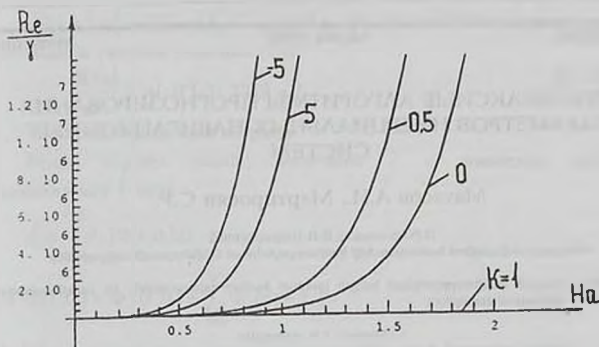
Для безнапорных МГД-устройств ("МГД-ЭЛ" [8], "КУ-ТОКОМАК" [10])

и применяемых в них ряде расплавленных металлов с использованием данных, приведенных в [12] для  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $T_{II}^0 K$  (ст. 56, 305-307) и в [13] - для  $\eta$  (с. 357), в табличной форме приведены значения характерных МГД-параметров:  $Re$ ,  $Re_m$ ,  $Ha$  и  $Be$ , необходимых для расчета уточненной нейтральной кривой. Она дает возможность при разных токовых режимах оценить погрешность безиндукционного приближения при определении диапазона значений числа  $Re$  (или  $R = Re/\gamma$ ), для которых плоскопараллельные МГД-ламинарные течения в приложенном внешнем однородном поперечном поле будут устойчивыми.

В наихудшем случае:  $K = 1$ , при любой величине приложенного магнитного поля, угле дна МГД-устройства и значений  $Re_m$ , отмеченные кривые практически совпадают. При энергетических режимах, существенно отличных от холостого хода (генераторный, насосный, короткое замыкание), минимальное расхождение между уточненной нейтральной кривой устойчивости (в которой учтены слагаемые порядка  $O(Re_m Be(K-1))$ ) и нейтральной кривой устойчивости, приведенных в [7], очевидно, получается для минимальных значений безразмерных величин:  $Re_m$ ,  $Be$ . Из перечисленных в таблице жидких металлов, используемых (или предусмотренных использовать) в "МГД-ЭЛ" и "КУ-ТОКОМАК", минимальное значение  $Re_m$  получается для железа  $4 \cdot 10^{-3}$ , не представляющего практического интереса (для ртути получается чуть больше -  $4,7 \cdot 10^{-3}$ , а максимальное значение - для натрия  $1,3 \cdot 10^{-1}$ ). Для одного и того же приложенного поля минимальное значение  $Be$  получается для ртути  $4 \cdot 10$  (для железа и олова -  $8 \cdot 10$ ), а максимальное значение - для лития  $4 \cdot 10^7$ . Графики нейтральных кривых при разных токовых режимах (кроме  $K = 1$ ) приведены для жидких металлов: ртути и натрия соответственно при значениях параметров  $Re_m = 4,7 \cdot 10^{-3}$ ,  $Be = 8,3$  ( $B_0 = 5 \cdot 10^{-2}$  тл),  $\vartheta = 10^\circ$  и  $Re_m = 13 \cdot 10^{-2}$ ,  $Be = 2,45 \cdot 10^5$  ( $B_0 = 1$  тл),  $\vartheta = 2^\circ$ . Причем для нейтральной кривой устойчивости, приведенной в [7], положено:  $Re_m = 0$ ,  $Be = 0$ .



Фиг. 4



Фиг. 5

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфгат Ю.М., Лиелаусис О.А., Щербинин Э.В. Жидкий металл под действием электромагнитных сил. — Рига: Зинатне, 1976. 246 с.
2. Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. — М.: ВИНТИ, 1991. -25. -188с.
3. Лин Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. — М.: ИЛ, 1958. 194 с.
4. Гидродинамическая неустойчивость. —Сб. статей: М.: Мир, 1964. 372 с.
5. Chia-Shun Yin. Stability of Liquid Flow Down an Inclined Plane.//Physics of Fluids, 1963, Vol. 6, №3, p. 321-334.
6. Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. — М.: Мир, 1964. 301 с.
7. Din-Yu Hsien. Stability of a Conducting Fluid Flowing Down an Inclined Plane in a Magnetic Field.// Physics of Fluids, -1966, Vol. 8, №10, p. 1785-1799.
8. Круминь Ю.К. Электромагнитные лотки. —Рига: Зинатне, 1973. 55 с.
9. Вулис Л.А., Генкин А.А., Фоменко Б.А. Теория и расчет магнитогазодинамических течений. — М.: Атомиздат, 1971. 383 с.
10. Карасев Б.Г., Лиелаусис О.А., Муравьев Е.В., Тананаев Л.В. Жидкие металлы в термоядерных реакторах с магнитным удержанием. Препринт - Саласпилс: АН Латв. ССР, Ин. Физики, 1987. 32 с.
11. Безиргения Г.С. Изотермическое движение несжимаемой проводящей жидкости со свободной поверхностью во внешнем магнитном поле.//Магнитная гидродинамика, 1990, №1, с. 67-76.
12. Таблицы физических величин. Под редакцией Кикоина И.К. — М.: Атомиздат, 1976. 1005 с.
13. Брановвер Г.Г. и Цинобер А.Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. — М.: Наука, 1970. 379 с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
02.12.1997

УДК 531.36

МИНИМАКСНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ  
ПАРАМЕТРОВ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ  
СИСТЕМ

Матасов А.И., Мартиросян С.Р.

Ա. Ի. Մատասով, Ս. Ր. Մարտիրոսյան  
Ինքնբյալ նավիգացիոն համակարգերի կանխագուշակման միմիարային ալգորիթմեր

Միմիարային կանխագուշակման խնդրի լուծման համար օգտագործվել են երաշխավորված զննահաման տեսության մեթոդները:

A.I. Matasov, S.R. Martirosovian  
Minimax algorithms of prognostication parameters of the inertial guidance systems

В предлагаемой работе излагается решение задачи прогнозирования параметров инерциальной навигационной системы с помощью дополнительной информации, доставляемой радиосистемами ближней или дальней навигации при неполной информации о вероятностных характеристиках ошибок измерений. Данная работа продолжает [1].

1. Оптимальный гарантирующий подход к решению задачи  
прогнозирования параметров линейной динамической системы.

Рассмотрим линейный динамический объект

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in [0, T_n], \quad x(0) = x_0 \quad (1.1)$$

где  $x(t) \in R^m$  - вектор состояния объекта,  $A(t) \in R^{m \times m}$  - кусочно-непрерывная матричная функция.

Пусть на интервале времени  $[0, T]$ ,  $T < T_n$  проводятся измерения компонент фазового вектора объекта

$$z(t) = H^T(t)x(t) + \rho(t), \quad t \in [0, T] \quad (1.2)$$

где  $H(t) \in R^m$  - кусочно-непрерывная вектор-функция,  $z(t)$  - непосредственно измеряемая величина,  $\rho(t)$  - ошибка измерений,  $z(t), \rho(t) \in R^1$

Предполагается, что ошибка измерений  $\rho(t)$  удовлетворяет следующим вероятностным гипотезам:

1. Математическое ожидание  $M\rho(t) = 0$

2. Дисперсия процесса неизвестна:  $M\rho^2(t) = \sigma^2(t)$ , а известно только, что  $\sigma(t) \leq \sigma$ , где  $\sigma$  - известная постоянная величина.

3. Корреляционная функция  $M\rho(t)\rho(s) = \sigma(t)\sigma(s)r(t, s)$  неизвестна. Известно только, что автокорреляционная функция  $r(t, s)$  удовлетворяет ограничениям:  $|r(t, s)| \leq 1$ .

Требуется построить линейную несмещенную оценку скалярной величины  $l = a^T x(T + \alpha)$ , где  $a \in R^m$  - заданный вектор,  $\alpha \in [0, T_n - T]$

Представим измерения (1.2) в виде

$$z(t) = \bar{H}^T(t, \alpha)q + p(t), \quad t \in [0, T] \quad (1.3)$$

где  $q = x(T + \alpha) \in R^m$  — вектор параметров объекта,

$\bar{H}(t, \alpha) = [\Gamma^{-1}(T + \alpha)]^T \Gamma^T(t)H(t) \in R^m$ ,  $\Gamma(t) \in R^{m \times m}$  — матрица фундаментальной системы решений (1.1)

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = A(t)\Gamma(t), \quad \Gamma(0) = I_m$$

$I_m$  —  $m$ -мерная единичная матрица.

Будем строить оценку величины  $l$  с помощью линейных оценивателей  $\hat{l}$  вида

$$\hat{l} = \int_0^{T+\alpha} z(t)\Phi(t, \alpha)dt \quad (1.4)$$

$$\text{где } \Phi(t, \alpha) = \Phi_n(t, \alpha) + \sum_{j=1}^n \Phi_j \delta(t - t_j) \quad (1.5)$$

$\Phi_n(t)$  — кусочно-непрерывная функция,  $\Phi_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  — числа ( $n$  — произвольно).

Из условия

$$\Phi(t, \alpha) = 0, \quad t \in (T, T_n) \quad (1.6)$$

очевидно следует, что

$$\int_0^{T+\alpha} z(t)\Phi(t, \alpha)dt = \int_0^T z(t)\Phi(t, \alpha)dt \quad (1.7)$$

В соответствии с (1.7) ошибка оценки, очевидно, задается выражением

$$\hat{l} - l = q^T \left[ \int_0^T \bar{H}(t, \alpha)\Phi(t, \alpha)dt - a \right] + \int_0^T \Phi^T(t, \alpha)p(t)dt$$

Задача оптимального гарантированного (минимаксного) прогнозирования состоит в нахождении оценивателя  $\Phi^0(t, \alpha)$  из условия

$$\min_{\Phi(t, \alpha)} \max_{|t, s| \leq 1} M(\hat{l} - l)^2 \quad (1.8)$$

$$t, s \in [0, T], \quad \alpha \in [0, T_n - T]$$

В такой постановке исходная задача сводится к задаче определения оценивателя  $\Phi^0(t, \alpha)$  из решения следующей задачи математического программирования [1-3]:

$$\sigma \int_0^T |\Phi(t, \alpha)|dt \rightarrow \min_{\Phi(t)} \quad (1.9)$$

$$\int_0^T \bar{H}(t, \alpha)\Phi(t, \alpha)dt = a, \quad \alpha \in [0, T_n - T] \quad (1.10)$$

Для получения аналитического решения задачи математического программирования (1.9), (1.10) можно воспользоваться алгоритмом, описанным в [1].

**2. Решение задачи прогнозирования параметров продольного канала корректируемой инерциальной навигационной системы.**

Исследуем продольный канал уравнений ошибок корректируемой инерциальной навигационной системы, установленной на борту объекта,

движущегося с крейсерской скоростью по траекториям, близким к ортодромии.

Продольный канал на интервалах времени, в течение которых производится коррекция, описывается уравнениями [4].

$$\dot{\gamma} = \mu, \quad \dot{\phi} = \mu - \vartheta, \quad \dot{\mu} = -\phi, \quad \dot{\vartheta} = 0 \quad (2.1)$$

Здесь  $(\dot{\phantom{x}}) \equiv \frac{d}{d\tau}$ ,  $\tau = \omega_0 t$  - безразмерное время,  $\omega_0$  - частота Шулера:

$\omega_0^2 = g/a$ ,  $g$  - гравитационное ускорение,  $a$  - радиус Земли,  $t$  - размерное время;  $\gamma$  - угловая ошибка определения местоположения в продольном направлении;  $\phi = \alpha - \varepsilon^0$ ,  $\alpha$  - угловая ошибка приборной вертикали в продольном направлении,  $\varepsilon^0$  - постоянная приведенная погрешность продольного ньютонометра;  $\mu = \Delta v / a\omega_0$ ,  $\Delta v$  - ошибка определения скорости в продольном направлении;  $\vartheta = v/\omega_0$ ,  $v$  - постоянный дрейф гиросплатформы в продольном направлении.

Сторонняя позиционная информация, дополняющая уравнения (2.1), имеет вид [4]:

$$z(\tau) = \gamma(\tau) + \rho(\tau), \quad \tau \in [0, T], \quad T \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.2)$$

где  $z(\tau)$  - непосредственно измеряемая величина,  $\rho(\tau)$  - ошибка измерения - произвольно коррелированный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и с ограниченной дисперсией:

$$M\rho(\tau) = 0, \quad M[\rho(\tau)]^2 \leq \sigma^2, \quad \sigma - \text{известная величина.}$$

Требуется построить линейные несмещенные оценки фазовых переменных системы (2.1) в момент времени  $\tau = T + \alpha$ ,  $\alpha \in [0, \pi - T]$ .

$T \leq \frac{\pi}{2}$  по измерениям (2.2).

Перейдем к новым обозначениям.

Представим измерения (2.1) в виде

$$z(\tau) = \tilde{H}^T(\tau, \alpha)q + \rho(\tau), \quad \tau \in [0, T]$$

где  $q = \lambda(T + \alpha) = (\gamma(T + \alpha), \phi(T + \alpha), \mu(T + \alpha), \vartheta(T + \alpha))^T$  - вектор параметров объекта,  $\tilde{H}(\tau, \alpha) = \exp\{A^T(\tau - T - \alpha)\}h_1$ ,  $h_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\tilde{H}(\tau, \alpha) = (1, \cos(T + \alpha - \tau) - 1, -\sin(T + \alpha - \tau), \sin(T + \alpha - \tau) - (T + \alpha - \tau))^T \quad (2.3)$$

Применяя для решения задачи математического программирования (1.9), (1.10), в которой  $\tilde{H}(\tau, \alpha)$  задается соотношением (2.3), а целевые векторы определяются выражениями  $a_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ ,  $a_2 = (0, 1, 0, 0)^T$ ,  $a_3 = (0, 0, 1, 0)^T$ ,  $a_4 = (0, 0, 0, 1)^T$ , соответствующих оцениванию параметров  $\gamma(T + \alpha)$ ,  $\phi(T + \alpha)$ ,  $\mu(T + \alpha)$ ,  $\vartheta(T + \alpha)$  соответственно, лемму и ее

следствие, сформулированных в [1], можно показать, что оптимальное решение задачи (1.9), (1.10) строится в виде

$$\Phi_j^0(\tau, \alpha) = \sum_{s=1}^4 \Phi_{js}^0 \delta(\tau - \tau_s^*), \quad s, j = \overline{1,4} \quad (2.4)$$

где  $\Phi_{js}^0$ ,  $s, j = \overline{1,4}$  - весовые коэффициенты алгоритмов оценивания;  $\tau_s^*$ ,  $j = \overline{1,4}$  - оптимальные моменты измерений, определяемые равенствами

$$\tau_1^* = 0, \quad \tau_2^* = \chi, \quad \tau_3^* = T - \chi, \quad \tau_4^* = T,$$

$\chi$  - решение уравнения.

$$\sin\left(\chi - \frac{T}{2}\right) + (T - \chi) \cos\left(\chi - \frac{T}{2}\right) - \sin \frac{T}{2} = 0, \quad \chi \in \left(0, \frac{T}{2}\right], \quad T \leq \frac{\pi}{2}$$

Весовые коэффициенты  $\Phi_{js}^0$ ,  $s, j = \overline{1,4}$  подсчитываются из условий несмещенности (1.10), или в соответствии с (2.4)

$$N \Phi_j^0 = a_j, \quad s = \overline{1,4} \quad (2.5)$$

$$N = (\tilde{H}(0, \alpha), \tilde{H}(\chi, \alpha), \tilde{H}(T - \chi, \alpha), \tilde{H}(T, \alpha)) \quad (2.6)$$

$\tilde{H}(\tau, \alpha)$  задается соотношением (2.3);  $\Phi_j^0 = (\Phi_{j1}^0, \Phi_{j2}^0, \Phi_{j3}^0, \Phi_{j4}^0)^T$ ,

$$a_j = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)^T, \quad s = \overline{1,4}.$$

Непосредственной подстановкой (2.3) в (2.6) легко убедиться, что  $\det N \neq 0$  при всех  $\alpha \in [0, \pi - T]$ ,  $T \leq \frac{\pi}{2}$ , откуда, очевидно, следует единственность оптимальных алгоритмов оценивания.

Оптимальные гарантированные среднеквадратические значения отклонений ошибок оценок параметров  $\gamma(T + \alpha)$ ,  $\varphi(T + \alpha)$ ,  $\mu(T + \alpha)$ ,  $\vartheta(T + \alpha)$  равны, соответственно, величинам:

$$d_{opt}(\gamma) = 2 \left[ \left( \frac{T}{2} + \alpha \right) \cos \left( \frac{T}{2} - \chi \right) - \sin \left( \frac{T}{2} + \alpha \right) \right] \sigma \cdot \delta$$

$$d_{opt}(\varphi) = 2 \left[ \sin \left( \frac{T}{2} + \alpha \right) \right] \sigma \cdot \delta$$

$$d_{opt}(\mu) = 2 \left[ \cos \left( \frac{T}{2} - \chi \right) - \cos \left( \frac{T}{2} + \alpha \right) \right] \sigma \cdot \delta$$

$$d_{opt}(\vartheta) = 2 \left[ \cos \left( \frac{T}{2} - \chi \right) \right] \sigma \cdot \delta$$

$$\delta = \left( T \cos \left( \frac{T}{2} - \chi \right) - 2 \sin \frac{T}{2} \right)^{-1}$$

Оптимальные гарантированные оценки параметров  $\gamma(T + \alpha)$ ,  $\varphi(T + \alpha)$ ,  $\mu(T + \alpha)$ ,  $\vartheta(T + \alpha)$ , определяемые задачей (1.9), (1.10) и обозначаемые дополнительной звездочкой, имеют вид

$$\begin{pmatrix} \gamma^*(T+\alpha) \\ \varphi^*(T+\alpha) \\ \mu^*(T+\alpha) \\ \vartheta^*(T+\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{11}^0 & \Phi_{12}^0 & \Phi_{13}^0 & \Phi_{14}^0 \\ \Phi_{21}^0 & \Phi_{22}^0 & \Phi_{23}^0 & \Phi_{24}^0 \\ \Phi_{31}^0 & \Phi_{32}^0 & \Phi_{33}^0 & \Phi_{34}^0 \\ \Phi_{41}^0 & \Phi_{42}^0 & \Phi_{43}^0 & \Phi_{44}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(0) \\ z(\chi) \\ z(T-\chi) \\ z(T) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Оценки (2.7), очевидно, могут быть легко реализованы. В силу линейности задачи выражения для оценок и ошибок оценок при переходе к размерным переменным умножаются на соответствующий масштабный множитель.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Матасов А.И., Мартиросян С.Р. Минимаксные алгоритмы позиционной коррекции инерциальных навигационных систем. - Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1988, №2.
2. Белоусов А.Ю., Крупень В.Я. О некоторых асимптотических оценках начальных параметров при измерении дальности. - Космические исследования, Т.12, 1984, №2.
3. Лидов М.Л. Минимаксная задача оценивания параметров траектории в непрерывной постановке. - Космические исследования, Т.22, 1984, №4.
4. Парусников Н.А., Морозов В.М., Борзов В.И. Задача коррекции в инерциальной навигации. -М.: Изд. МГУ, 1982.

МГУ им.М.В.Ломоносова  
Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
07.07.1997

УДК 539.3

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЯМИ  
ОРТОТРОПНОГО КРУГОВОГО СЕКТОРА

Шабоян А.Ф

Ա.Ֆ.Շաբոյան

Օրորոտրոպ կորագիծ եզրով սալի տատանումների օպտիմալ ստաբիլիզացիան

Դիտարկվում է զրանաձև անիզոտրոպիայով ուղղված կորագիծ, օրորոտրոպ սալի օպտիմալ ստաբիլիզացիայի խնդիրը, որի խտությունը փոփոխվում է նշված օրենքով՝ Սալը հողակապորեն ամրացված է եզրերով՝ Տատանումների կայունացումը տեղի է ունենում ղեկավարող ազդեցությամբ, որը կիրառվում է սալի վերին մակերևույթի վրա

Խնդիրը լուծվում է Ֆուրիեր-Բեսսելի մեթոդով, ստացվում է ժամանակից կախված, ամբաստվող փոփոխականներով երկրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների անվերջ համակարգ՝ Որոշվում է օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունը, որը ստաբիլիզացիայի է ենթարկվում տվյալ շարժումը համակարգի լրիվ շնորհիվ մինիմալ արժեք ունենալու դեպքում:

A.F. Shaboyan

On the optimal stabilization of orthotropic curvilinear plate by vibration

Рассматривается задача об оптимальной стабилизации колебаниями шарнирно-опертой по краям цилиндрически анизотропной пластинки, плотность которой изменяется по заданному закону.

Срединная плоскость пластинки имеет вид криволинейного четырехугольника

Пластинка стабилизируется при помощи управляющего воздействия, приложенного на ее верхней плоскости. Применяя метод Фурье-Бесселя, получается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнении второго порядка. Определяется оптимальное управляющее воздействие для каждого уравнения в классе  $L_2$ , стабилизирующее данное движение при минимизации полной энергии системы.

Вопросам оптимальной стабилизации ортотропной пластинки и оболочки посвящены работы [1]- [2].

§1. Рассмотрим задачу оптимальной стабилизации цилиндрически анизотропной пластинки, плотность которой изменяется по заданному закону  $\rho = \rho(r) = \rho_0 r^a$ . Срединная плоскость пластинки имеет вид криволинейного четырехугольника. На пластинку действует сила  $F(r, \theta, t) \in L_2$ .

В полярных координатах уравнение колебания имеет следующий вид [3]:

$$\begin{aligned} D_r \frac{\partial^4 W}{\partial r^4} + \frac{2D_{\theta}}{r^3} \frac{\partial^4 W}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{D_{\theta}}{r^4} \frac{\partial^4 W}{\partial \theta^4} + \frac{2D_r}{r} \frac{\partial^4 W}{\partial r^3} - \\ - \frac{2D_{\theta}}{r^3} \frac{\partial^4 W}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{D_{\theta}}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{2(D_{\theta} + D_{\theta 0})}{r^4} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \\ + \frac{D_{\theta}}{r^3} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\rho(r)h}{g} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = F(r, \theta, t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $W(r, \theta, t)$  - прогиб пластинки,  $h$  - ее толщина, а  $D_r$ ,  $D_{\theta}$ ,  $D_{\theta 0}$  - жесткости. Предположим, что пластинка шарнирно оперта по краям. Тогда прогиб пластинки удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} W &= 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} &= 0 \end{aligned} \right| \text{при} \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \alpha \end{cases} \quad c \leq r \leq b \quad (1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} W &= 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{v_0}{r} \frac{\partial W}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \right| \text{при} \begin{cases} r = c \\ r = b \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \gamma \quad (1.3)$$

Пусть  $W(r, \theta, t)$  удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$\begin{aligned} W(r, \theta, 0) &= \varphi(r, \theta) \quad c \leq r \leq b \\ \frac{\partial W}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \psi(r, \theta) \quad 0 \leq \theta \leq \gamma \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $\varphi(r, \theta)$  и  $\psi(r, \theta)$  - соответственно, начальный прогиб и скорость произвольной точки срединной плоскости.

Задача заключается в следующем:

определить закон внешней нагрузки  $F(r, \theta, t)$ , удовлетворяющей краевой задаче (1.1)-(1.3) при начальных условиях (1.4), который функционалу

$$I = K + V + \frac{\hbar \chi}{2g} \int_c^b \int_0^\gamma \int_0^\infty \rho F^2(r, \theta, t) dr d\theta dt \quad (1.5)$$

придает минимальное значение.

В выражении (1.5)  $K$  - кинетическая энергия, а  $V$  - потенциальная энергия. Третий член функционала - энергия внешней нагрузки.  $\chi$  - положительный коэффициент, обеспечивающий одинаковую размерность всех слагаемых.

Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.1), имеет следующий вид [5]:

$$W(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm}(t) R_{nm}(r) \sin \lambda_n \theta \quad (1.6)$$

$$\text{где } \lambda_n = \frac{\pi n}{\gamma}$$

$$R_{nm}(r) = r^{\alpha} \left[ C_{1n} J_{\gamma n}(p_{nm} r^{\alpha_1}) + C_{2n} Y_{\gamma n}(p_{nm} r^{\alpha_1}) + C_{3n} J_{\gamma n}(ip_{nm} r^{\alpha_1}) + C_{4n} Y_{\gamma n}(ip_{nm} r^{\alpha_1}) \right]$$

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\alpha}{4}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{4} + 1, \quad v_n^2 = \frac{2I_n - (1+\alpha)^2((2\alpha+1)^2 - K_n)}{\alpha^2((2\alpha+1)^2 - K_n)} \\ I_n &= \frac{\lambda_n^2 [D_0 \lambda_n^2 - 2(D_0 + D_{r0})]}{D_r}, \quad K_n = \frac{D_0 + 2\lambda_n^2 D_{r0}}{D_r} \end{aligned} \quad (1.7)$$

числа  $p_{nm}$  являются собственными значениями. Так как функции  $J_{\gamma n}$  и  $Y_{\gamma n}$  образуют полный ортогональный базис в классе  $L_2$  с весом  $x$ , то с помощью метода преобразования Фурье-Бесселя для внешней нагрузки получим:

$$F(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm}^*(t) R_{nm}(r) \sin \lambda_n \theta \quad (1.8)$$

где  $T_{nm}^*(t) = a_{nm} \cdot T_{1n}(t)$ , а  $a_{nm}$  - коэффициенты разложения Бесселя, которые определяются по формулам

$$a_{nm} = \frac{2}{l^2 J_{\nu_n+1}^2(p_{nm}l)} \int_0^l R_n(x) J_{\nu_n}(p_{nm}x) x dx$$

Подставляя выражения (1.6) и (1.8) в уравнение (1.1) с учетом независимости функций  $R_{nm}(r)$  и  $\sin \lambda_n \theta$  ( $n=1,2,\dots, m=1,2,\dots$ ), получим следующую систему бесконечных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{T}_{nm}(t) + H_{nm} T_{nm}(t) = H_{nm} u_{nm}(t)$$

$$\text{где } \dot{H}_{nm} = \frac{D_r g p_{nm}^2}{\rho_0 h}, \quad H_{nm} = \frac{\rho_0 h}{D_r g p_{nm}^2} \quad (1.9)$$

После ряда преобразований функционал (1.5) примет следующий вид:

$$I = \frac{h r \rho_0}{4g} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \int_0^{\tau} \left[ \dot{T}_{nm}^2(t) + \frac{D_r g}{h \rho_0} \tilde{\lambda}_{nm} T_{nm}^2(t) + u_{nm}^2(t) \right] dt \quad (1.10)$$

$$\text{где } \tilde{\lambda}_{nm} = \frac{A_{nm}}{B_{nm}}, \quad B_{nm} = \int_c^b r^{\alpha+1} R_{nm}^2(r) dr$$

$$A_{nm} = \int_c^b \left\{ R_{nm} + \sqrt{\frac{D_0 + 4D_1 \lambda_n^2}{D_1}} \frac{1}{r} R_{nm} + \sqrt{\frac{D_0 + 4D_1 \lambda_n^2}{D_1}} \frac{1}{r^2} R_{nm} \right\}^2 dr$$

Из того, что функционал (1.10) должен принимать минимальное значение, следует стабильность движения, так как в противном случае функционал примет бесконечно большое значение. Из начальных условий следует, что функции  $T_{nm}(t)$  должны удовлетворять следующим условиям:

$$T_{nm}(t)|_{t=0} = a_{nm} \quad (n, m = 1, 2, \dots) \quad (1.11)$$

$$\dot{T}_{nm}(t)|_{t=0} = b_{nm}$$

$$\text{где } a_{nm} = \frac{4}{b^2 \gamma R_{nm}^2(p_{nm}b)} \int_c^b \int_0^{\gamma} r^{2\alpha_1-1} \varphi(r, \theta) R_{nm}(r) \sin \lambda_n \theta dr d\theta$$

$$b_{nm} = \frac{4}{b^2 \gamma R_{nm}^2(p_{nm}b)} \int_c^b \int_0^{\gamma} r^{2\alpha_1-1} \psi(r, \theta) R_{nm}(r) \sin \lambda_n \theta dr d\theta$$

Общий функционал (1.10) примет минимальное значение, если минимальным будут значения каждого слагаемого, входящего в функционал.

$$I_{nm} = \lambda_{nm} \int_0^{\tau} \left[ \dot{T}_{nm}(t) + L_{nm} T_{nm}^2(t) + u_{nm}^2(t) \right] dt$$

$$\text{где } L_{nm} = \frac{D r g A_{nm}}{h \rho_0 B_{nm}} \quad (1.12)$$

Функции  $u_{nm}(t)$  ищем следующим образом:

$$u_{nm}(t) = C_{1nm} T_{nm}(t) + C_{2nm} \dot{T}_{nm}(t) \quad (1.13)$$

Введем функции Ляпунова  $V_{nm}(T_{nm}, \dot{T}_{nm})$ , которые вместе с

$u_{nm}(T_{nm}, \dot{T}_{nm})$  удовлетворяют уравнению Ляпунова-Беллмана [4].

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_{nm}}{\partial T_{nm}} \dot{T}_{nm} + \frac{\partial V_{nm}}{\partial \dot{T}_{nm}} (-H_{nm} T_{nm} + H_{nm} i_{nm}) = \\ & = -[K_{1nm} T_{nm}^2 + 2K_{2nm} T_{nm} \dot{T}_{nm} + K_{3nm} (\dot{T}_{nm})^2 + u_{nm}^2], \quad (n, m = 1, 2, \dots) \quad (1.14) \\ & \lambda_{nm} \frac{\partial V_{nm}}{\partial T_{nm}} = -2u_{nm} \end{aligned}$$

Представим  $V_{nm}$  в следующем виде:

$$V_{nm} = A_{1nm} T_{nm}^2 + 2A_{2nm} T_{nm} \dot{T}_{nm} + A_{3nm} \dot{T}_{nm}^2 \quad (1.15)$$

Подставляя (1.13) в (1.14), с учетом (1.15) получим

$$A_{1nm} = C_{1nm} C_{2nm} - C_{2nm}, \quad C_{1nm} = 1 \pm \sqrt{1 + L_{nm}} \quad (I)$$

$$A_{2nm} = -\frac{1}{H_{nm}} C_{1nm}, \quad C_{2nm} = \pm \sqrt{1 - \frac{2}{\lambda_{nm}} C_{1nm}} \quad (II)$$

$$A_{3nm} = -\frac{1}{H_{nm}} C_{2nm}$$

Знак в (I) и (II) определяется из условий Сильвестра, откуда следует, что

$$\frac{C_{1nm}}{H_{nm}} < 0; \quad \frac{C_{2nm}}{H_{nm}} < 0 \quad (1.16)$$

Таким образом, решение задачи (1.9), (1.11), (1.13) имеет следующий вид:

$$T_{nm}(t) = \frac{b_{nm} - a_{nm}}{\alpha_{1nm} - \alpha_{2nm}} e^{\alpha_{1nm} t} + \frac{b_{nm} - a_{nm} \alpha_{1nm}}{\alpha_{2nm} - \alpha_{1nm}} e^{\alpha_{2nm} t} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \alpha_{1nm} &= \frac{C_{2nm} H_{nm}}{2} + \sqrt{\frac{C_{2nm}^2 H_{nm}^2}{4} + H_{nm} (C_{1nm} - 1)} \\ \alpha_{2nm} &= \frac{C_{2nm} H_{nm}}{2} - \sqrt{\frac{C_{2nm}^2 H_{nm}^2}{4} + H_{nm} (C_{1nm} - 1)} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Для  $u_{nm}(t)$  получим

$$\begin{aligned} u_{nm}(t) &= \frac{(C_{1nm} + \alpha_{1nm} C_{2nm})(b_{nm} - a_{nm} \alpha_{2nm})}{\alpha_{1nm} - \alpha_{2nm}} e^{\alpha_{1nm} t} + \\ &+ \frac{(C_{1nm} + \alpha_{2nm} C_{2nm})(a_{nm} \alpha_{1nm} - b_{nm})}{\alpha_{1nm} - \alpha_{2nm}} e^{\alpha_{2nm} t} \end{aligned}$$

§2. Функции  $T_{nm}(t)$  и  $u_{nm}(t)$  являются решениями задачи оптимальной стабилизации для функционала  $I$ .

С помощью функций  $u_{nm}$  можно получить значения внешней нагрузки  $F(r, \theta, t)$ , которая является функцией класса  $L_2$ . Это следует из равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}^2(t) \quad (2.1)$$

Из условий (1.16) и (1.18) получаем, что

$$\operatorname{Re}(\alpha_{1nm}) < 0, \quad \operatorname{Re}(\alpha_{2nm}) < 0$$

Для доказательства равномерной сходимости ряда (2.1) достаточно показать, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_{1nm} - \alpha_{2nm}} [b_{nm} (C_{1nm} + \alpha_{1nm} C_{2nm}) - a_{nm} \alpha_{2nm} (C_{1nm} + \alpha_{1nm} C_{2nm})] \right\}^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_{1nm} - \alpha_{2nm}} [a_{nm} (C_{1nm} + \alpha_{2nm} C_{2nm}) - b_{nm} (C_{1nm} + \alpha_{2nm} C_{2nm})] \right\}^2 \quad (2.2)$$

мажорирующие ряд (2.1), сходятся.

Рассмотрим следующие величины:

$$\left| \frac{C_{1nm} + \alpha_{knm} C_{2nm}}{\alpha_{1nm} - \alpha_{2nm}} \right|, \quad \left| \frac{\alpha_{jnm} (C_{1nm} + \alpha_{knm} C_{2nm})}{\alpha_{1nm} - \alpha_{2nm}} \right| \quad (2.3)$$

где  $(j \cdot k = 2; j, k = 1, 2)$

После некоторых преобразований (2.3) можно привести к следующему виду:

$$\left| \frac{\alpha_{jnm} (C_{1nm} + \alpha_{knm} C_{2nm})}{\alpha_{1nm} - \alpha_{2nm}} \right| = \left| (C_{2nm} H_{nm} + \varepsilon_k \sqrt{C_{2nm}^2 H_{nm}^2 + 4 H_{nm} (C_{1nm} - 1)}) \times \right.$$

$$\times \frac{2 C_{1nm} C_{2nm}^2 H_{nm} + \varepsilon_k \sqrt{C_{2nm}^4 H_{nm}^2 + 4 C_{2nm} H_{nm} (C_{1nm} - 1)}}{4 \sqrt{C_{2nm}^2 H_{nm}^2 + 4 H_{nm} (C_{1nm} - 1)}} \left. \right|$$

$$\left| \frac{C_{1nm} + \alpha_{knm} C_{2nm}}{\alpha_{1nm} - \alpha_{2nm}} \right| = \left| \frac{2 C_{1nm} + C_{2nm}^2 H_{nm} + \varepsilon_k \sqrt{C_{2nm}^4 H_{nm}^2 + 4 C_{2nm} H_{nm} (C_{1nm} - 1)}}{2 \sqrt{C_{2nm}^2 H_{nm}^2 + 4 H_{nm} (C_{1nm} - 1)}} \right|$$

$$n, m = 1, 2, \dots; j, k = 1, 2; j \cdot k = 2; \varepsilon_1 = 1; \varepsilon_2 = -1 \quad (2.4)$$

Так как функции  $\frac{\partial^4 W}{\partial r^{4-j} \partial \theta^j}$  и  $\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}$  ( $j = \overline{0, 4}$ ) также принадлежат по крайней мере к классу  $L_2$  на  $[b; c] \times [0; \gamma] \times [0; \infty]$ , то ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (n^j m^{4-j} a_{nm})^2 \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (n^j m^{4-j} b_{nm})^2, \quad (j = \overline{0, 4}) \quad (2.5)$$

должны сходиться [6].

Сходимость рядов (2.2) следует из сходимости рядов (2.5), выполнение которых естественно предполагать, исходя из того, что силы, действующие на пластинку, принадлежат к классу  $L_2$ .

Следовательно, равномерная сходимость ряда (2.1) при условии сходимости рядов (2.5) установлена.

Ограниченность минимального значения функционала  $I$  тоже следует из сходимости рядов (2.5)

$$\min I = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho_0 h \gamma}{4} A_{nm} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{b_{nm} - a_{nm} \alpha_{2nm}}{\alpha_{1nm} - \alpha_{2nm}} \right)^2 \left[ \frac{L_{nm}}{\alpha_{1nm}} + \alpha_{1nm} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\alpha_{1nm}} (C_{1nm} + \alpha_{1nm} C_{2nm})^2 \right] + 2 \frac{(b_{nm} - a_{nm} \alpha_{2nm})(a_{nm} \alpha_{1nm} - b_{nm})}{(\alpha_{1nm} - \alpha_{2nm})^2} \times$$

$$\times \left[ \frac{L_{nm}}{\alpha_{1nm} + \alpha_{2nm}} + \frac{\alpha_{1nm} \alpha_{2nm}}{\alpha_{1nm} + \alpha_{2nm}} + \frac{(C_{1nm} + C_{2nm} \alpha_{1nm})(C_{1nm} + \alpha_{2nm} C_{2nm})}{\alpha_{1nm} + \alpha_{2nm}} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \frac{a_{nm} \alpha_{1nm} - b_{nm}}{\alpha_{1nm} - \alpha_{2nm}} \right)^2 \times \left[ \frac{L_{nm}}{\alpha_{2nm}} + \alpha_{2nm} + \frac{1}{\alpha_{2nm}} (C_{1nm} + \alpha_{2nm} C_{2nm})^2 \right] \} \quad (2.6)$$

Таким образом, функция  $F(r, \theta, t)$  оптимально стабилизирует колебательное движение пластинки при минимизации функционала (1.10).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян В.С., Габриелян М.С., Юсиф Ю.Дж. Об оптимальной стабилизации ортотропной прямоугольной пластинки. - Уч. зап. ЕГУ, 1987, №3.
2. Юсиф Ю.Дж. Решение задачи оптимальной стабилизации цилиндрической оболочки. - Уч. зап. ЕГУ, 1989, №2.
3. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. - Ер. изд. ЕГУ, 1976.
4. Габриелян М.С. О стабилизации механической системы мощности континуума. - Уч. зап. ЕГУ, 1975, №2.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976.
6. Колмогоров А.М., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1976.

Ереванский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
22.11.1996

УДК 539.41; 620.17

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ  
И ПРОЧНОСТИ СЛОИСТЫХ КОНСТРУКЦИЙ  
Ширинян Р.А.

Ռ.Ա. Շիրինյան

Մնացորդային լարումների բաշխման և շերտաձր  
կառուցվածքների ամրության մասին

Հետազոտվածակառույցային մեթոդով և ամրության փորձերով հետազոտվել են երկշերտ ստանդային միացությունների լարվածային վիճակը ջերմաստիճանային փոփոխության ազդեցության տակ Ստացվել և փորձնականորեն հաստատվել են միացվող նյութերի ֆիզիկա-մեխանիկական հատկությունները և նրանց եզրերում հարաբերական կոշտությունը հաշվի առնող միացության ամրության տեսակետով գերադասելի լարվածային վիճակ արտադրող պայմաններ

R.A. Shirinian

On the Distribution of Residual Stresses and Strength of  
Layer Construction

Методом фотоупругости и испытаниями на прочность исследовано напряженное состояние двухслойной клеевой конструкции, подверженной действию температурных перепадов. Получены и экспериментально подтверждены условия, обеспечивающие предпочтительное, с точки зрения прочности соединения, напряженное состояние с учетом физико-механических свойств и относительной жесткости на краях соединяемых материалов

За последние десятилетия слоистые конструкции и детали, полученные методами склеивания, пайки или контактной сварки, нашли широкое и весьма разнообразное применение: от радиоэлектронных деталей до конструкций из композитных материалов. Однако, методы их проектировочного расчета не вполне установились. В частности, расчеты на прочность слоистых конструкций [1-4] не учитывают в полной мере влияние краевых эффектов, хотя многие исследования [2,5,6] показывают, что часто именно характер распределения напряжений в окрестности выхода контактной поверхности на грань изделия определяет прочность соединения. Исследования [6,7,8] характера распределения напряжений около угловых точек края контактной поверхности с получением условий, обеспечивающих малонапряженное состояние, открывают возможность оптимального выбора материалов и геометрии стыка. Но в действительности практические ограничения на выбор материалов и геометрию стыка не всегда дают возможность осуществления оптимального - малонапряженного состояния конструкции стыка. На практике проблема решается с применением менее прочных пластичных клеев или заданием большего запаса прочности, что ведет к утяжелению и удорожанию конструкций.

В настоящей работе методом фотоупругости и испытаниями на прочность проведено исследование напряженного состояния двухслойной клеевой конструкции, подверженной действию температурных перепадов. Получены и экспериментально подтверждены условия, обеспечивающие предпочтительное, с точки зрения прочности соединения, напряженное состояние с учетом физико-механических свойств соединяемых материалов и приложенной нагрузки.

1. Рассматривается напряженное состояние двухслойной пластинки, составленной из разных материалов склеиванием (фиг.1) при температуре

$T_0$  с рабочей температурой  $T_p$ . В зависимости от разности температур  $\Delta T = T_p - T_0$  и разности  $\Delta \alpha = \alpha_1 - \alpha_2$  коэффициентов линейного температурного расширения составляющих пластин материалов в пластинке возникают внутренние напряжения. Особо важное значение имеет характер распределения напряжений на крае стыка соединения, так как по результатам многих исследований [5,6] прочность соединения во многом зависит от напряженного состояния в окрестности выхода контактной поверхности на грань составной пластинки (точки А на фиг.1).

Известно [6], что напряжения в окрестности точки А при незагруженных смежных свободных гранях можно представить как сумму функций вида

$$\sigma = Br^\lambda \quad (1)$$



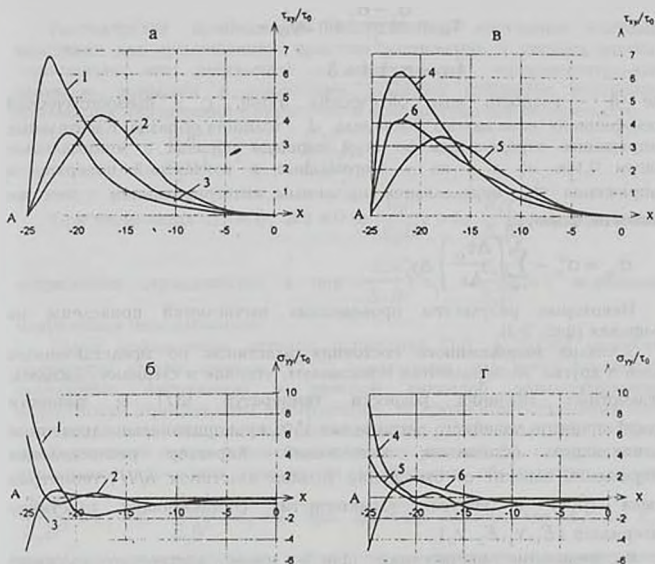
Фиг. 1. Двухслойная пластинка

$$h = 10 \text{ мм}, E_1 = 3 \text{ ГПа}, \nu_1 = 0.38, E_2 = 70 \text{ ГПа}, \nu_2 = 0.3$$

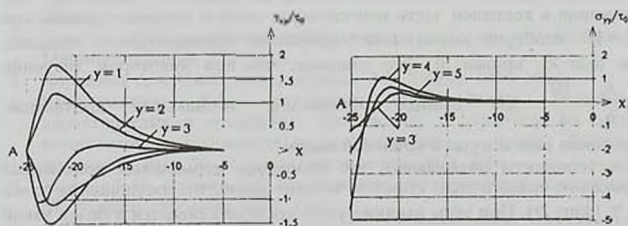
При этом  $\lambda$  определяются геометрией стыка и упругими характеристиками составляющих пластинку материалов, а коэффициенты  $B$  зависят также от всей геометрии детали и приложенной нагрузки. В работе [6] (и в других работах) получены уравнения для определения  $\lambda$  и сформулированы условия, обеспечивающие  $\lambda > 0$  и, тем самым, малонапряженное состояние окрестности точки А. Эти условия накладывают ограничения на геометрию стыка (углы  $\beta, \gamma$ ) и механические характеристики ( $E_1, \nu_1, E_2, \nu_2$ ) соединяемых материалов, что конструктивно и технологически не всегда удается соблюдать. Другим путем повышения прочности соединения может быть обеспечение малости коэффициента  $B$  в (1) при определенных свойствах приложенной внешней нагрузки. Как показывает дальнейшее обсуждение, соблюдение условия малости коэффициента  $B$  оказывается возможным в рассматриваемом случае двухслойной пластинки при описанных выше термоупругих напряжениях вне зависимости от значения нагрузки.

2 Напряженное состояние двухслойной пластинки исследовано методом фотоупругости. Один из слоев пластинки изготовлен из эпоксидного компаунда ЭД-16МА, второй - из дюралюминия Д16. Склеивание реализовано эпоксидным клеем (100 в.ч. ЭД-20, 10 в.ч. ПЭПА) при температуре  $T_0 = 65^\circ \text{C}$  по известной [3] технологии. Форма и размеры образцов приведены на фиг.1. Исследование напряженного состояния проведено при комнатной температуре ( $T_p = 20^\circ \text{C}$ ). Результаты прочностных испытаний получены охлаждением образцов до появления первых трещин или разрушения образца.

Определение напряженного состояния эпоксидного составляющего соединения проведено на поляриметре КСП-5 методом компенсации. Касательные напряжения определялись по известной [9] формуле



Фиг. 2. Распределение контактных напряжений  
а, б - образцы №1, 2, 3; в, г - образцы №4, 5, 6



Фиг. 3. Распределение контактных напряжений в образце №3

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi_{xy}$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)cd = \delta$$

где  $\delta$  - разность хода оптических путей,  $c$  - пьезооптический коэффициент эпоксидного компаунда,  $d$  - толщина образца. Касательные напряжения определялись по всей площади образца с минимальным шагом 0,1 см по  $x$  и по  $y$ . Нормальные к контактной поверхности напряжения  $\sigma_{yy}$  определялись численным интегрированием с тем же шагом по формуле

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^0 - \sum_{i=0}^k \left( \frac{\Delta \tau_{xy}}{\Delta x} \right) \Delta y_i$$

Некоторые результаты проведенных вычислений приведены на графиках (фиг. 2-3).

3. Анализ напряженного состояния пластинок по представленным здесь и другим экспериментам показывают, что, как и следовало ожидать, абсолютные значения разности температур  $|\Delta T|$  и разности коэффициентов линейного расширения  $|\Delta \alpha|$  пропорциональны значениям возникающих остаточных напряжений. Характер распределения напряжений зависит от отношений толщины пластинок  $h/H$ , геометрии стыка ( $\beta, \gamma$ ) и упругих характеристик составляющих пластинку материалов ( $E_1, \nu_1, E_2, \nu_2$ ).

Распределение напряжений (фиг.3) имеет достаточно сложный характер, однако, некоторые закономерности могут быть выявлены.

Распределение касательных напряжений вблизи контактной поверхности исследовано многими авторами [5, 10, 11]. Эти исследования, а также результаты, приведенные на фиг.2-3, показывают, что большие касательные напряжения сосредотачиваются в концевых частях пластинок. В центральной части пластинки касательные напряжения снижаются до нуля.

Распределение нормальных к контактной поверхности напряжений  $\sigma_{yy}$  имеет более сложный характер. Рассматривая изменения  $\sigma_{yy}$  для разных толщин, можно заметить, что при  $h/H = 10/16$  (фиг.2б, кривая 1) эти напряжения положительны и имеют максимальное значение на концевой части пластинки, при  $h/H = 10/3$  (фиг.2б, кривая 2) эти напряжения в концевой части относительно малы и положительны, а при  $h/H = 10$ , наоборот, нормальные напряжения отрицательны в концевой части (фиг.2б, кривая 3). Это означает, что при некотором значении  $\frac{10}{16} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{10}{1}$  для данных материалов, нормальные контактные напряжения равны нулю в концевой части.

Эксперименты показывают, что поведение нормальных контактных напряжений аналогичным образом зависит также от соотношения углов  $\beta$  и  $\gamma$  (фиг. 2г). При этом влияние углов сосредотачивается в более узкой зоне концевой части контактной поверхности.

Испытания на прочность проведены охлаждением образцов до разрушения или появления трещины на контактной поверхности. Некоторые образцы разрушались до достижения комнатной температуры. Относительная прочность образцов оценивалась значением  $|\Delta T|$ , при котором наступало разрушение с интервалом  $5^\circ \text{C}$ .

Рассматривая приближенно напряженное состояние составной пластинки как суперпозицию простого растяжения и чистого изгиба и сопоставляя эти результаты с полученными экспериментальными данными, приходим к следующим условиям минимума нормальных контактных напряжений в окрестности края контактной поверхности:

$$\frac{E_1 h^3}{E_2 H^3} = 1, \quad \frac{E_1 \gamma^3}{E_2 \beta^3} = 1 \quad (2)$$

При этом, когда  $\Delta T < 0$ ,  $\Delta \alpha > 0$  и  $\frac{E_1 h^3}{E_2 H^3} > 1$ ,  $\frac{E_1 \gamma^3}{E_2 \beta^3} > 1$ , нормальные напряжения отрицательны, а при  $\frac{E_1 h^3}{E_2 H^3} < 1$ ,  $\frac{E_1 \gamma^3}{E_2 \beta^3} < 1$  нормальные напряжения положительны.

Ранее проведенные автором испытания [14], а также некоторые результаты других авторов [12,13] показывают, что когда нормальные контактные напряжения в опасной концевой зоне контактной поверхности отрицательны (сжимающие), то прочность соединения выше, чем когда эти напряжения растягивающие. Учитывая это, а также приближенный полуэмпирический характер условий (2), следует, что для повышения прочности соединения необходимо обеспечивать условия

$$\frac{E_1 h^3}{E_2 H^3} > \varepsilon_1 + 1, \quad \frac{E_1 \gamma^3}{E_2 \beta^3} > \varepsilon_2 + 1 \quad \text{при } \Delta T < 0, \Delta \alpha > 0, \text{ где } \varepsilon_1, \text{ и } \varepsilon_2 -$$

некоторые положительные малые числа, величину которых можно выбрать конструктивно или определить экспериментально.

В случае пластинок, имеющих более двух слоев, характер поведения напряжений качественно усложняется. Для конкретных материалов удастся получить некоторые результаты и аналогичная к двухслойному ситуация наблюдается и в трехслойном случае. Однако, в общем случае результаты зависят от  $|\Delta \alpha|$  и  $|\Delta T|$ , вследствие чего аналогичные к (2) условия для трех и более слоев невозможно получить и возникает необходимость отдельного рассмотрения каждой конкретной задачи для определенных материалов и условий нагружения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Прочность, устойчивость, колебания. Т.2. -М.: Машиностроение, 1968. 464с.
2. Крысин В.Н. Слоистые клееные конструкции в самолетостроении. -М.: Машиностроение, 1980. 231с
3. Кардашев Д.А. Синтетические клеи. -М.: Химия, 1976. 504с.
4. Благоднадежин В.А., Инденбаум В.М. Расчет термоупругих характеристик и остаточных напряжений в оболочках из слоистых композитов с перекрестным армированием. - В кн.: Расчеты на прочность. Вып. 20. М.: Машиностроение, 1979. 209с.
5. Ушаков Б.Н., Фролов И.П. Напряжение в композитных конструкциях. - М.: Машиностроение, 1979. 134с.
6. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. - Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338с.
7. Хачикян А.С., Шириян Р.М. Об устойчивости малонапряженного состояния к некоторым геометрическим дефектам. - Изв. АН АрмССР, сер. техн. наук, 1983, т.36, №2, с.49-52.
8. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. -М.: Наука, 1974. 640с.
9. Адгезия, клеи, цементы, припои. Под ред. Н.Дебройна и Р.Гувинка. -

М.: Изд-во ИЛ, 1954. 584с.

10. Александров А.Я., Ахметзянов М.Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. - М.: Наука, 1973. 576с.
11. Сумцов В.С., Туровский М.А. и др. Исследование напряжений вблизи кромки стяжной втулки -Тр VII Всесоюзной конференции по поляризационно-оптическому методу исследования напряжений. - Таллин, 23-26 ноября 1971, т.3, с. 261-263
12. Кинлок Э. Адгезия и адгезивы. -М.: Мир, 1991. 484с.
13. Миленин В.Н. и др. Расчет остаточных напряжений в сварных соединениях твердых сплавов со сталями методом граничных элементов. Новосибирск - ПМТФ, 1993, №1, с.150-154.
14. Чобанян К.С., Ширинян Р.А. Исследование явления малонапряженности края стыка соединения из разнородных материалов. -Материалы VIII Всесоюзной конференции по методу фотоупругости. -Таллин, 1979, т. III, с.291-296.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
08.09.1997