

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ ПРОCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵԼԵԿՎԻԴԵՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1998

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

Амбарцумян С.А., Минасян М.М.

Ս. Ա. Համբարձումյան, Մ. Մ. Մինասյան
Ստացված մոդելի ուղղանկյուն սալի ոչ զմային տատանումները

Աշխատանքում դիտարկվում է դեֆորմացիաների առանցքային նկատմամբ զգայուն առանցքամոտիվի իզոտրոպ նյութից պատրաստված ուղղանկյուն սալի ազատ և հարկադրական տատանումները։ Այստեղ նյութական հավասարումները հանդես են գալիս որպես հեղինակների կողմից առաջարկված և հետազոտված [1, 2] միաշաղկ մոդելի հավասարման ընդհանրացումներ։

Մոդելի գլխավոր առանձնահատկությունն այն է, որ բեռնավորումը և բեռնաբաժանող ենթարկվում են տարբեր օրենքների, որի հետևանքով դեֆորմացիաների և յարմունքների ինտենսիվությունների հարաբերությունը դինամիկական դիսպրանսները կրում են էքստերեդիսալին բնույթ, այնպես, որ մարման և ոչ զմայնորյան մեխանիկաները համընկն են վաղիս միասնությամբ։

Կիրառելով Բուրնով-Վալյուրկինի և միջինացման մեթոդները, որոշված են ազատ տատանումների լայնույթը և համախոլայան փոփոխման օրենքները և կառուցված են ստատիկոնսո հարկադրական տատանումների ռեզոնանսի բնույթաչափ կորերը։ Բացահայտված են որակական տարբերություններ համեմատ ստանդարտ մոդելի դրան զմային մոդելների։

S.A. Ambartsumyan, M.M. Minasyan
Nonlinear vibrations of viscoelastic plates

В работе рассматриваются свободные и вынужденные колебания прямоугольной пластинки, изготовленной из изотропного вязкоупругого материала, чувствительного к скорости деформирования. Материальные уравнения здесь представляют обобщение одномерной нелинейной модели, предложенной авторами в работах [2, 3].

Главной особенностью модели является то, что нагружение и разгрузка подчиняются разным законам, из-за чего в плоскости интенсивностей напряжения и деформации диаграммы носят динамический гистерезисный характер. Таким образом, механизмы затухания и нелинейности объединены в одном выражении.

Применяя методы Бурнкова-Галеркина и методы усреднения, найдены законы изменения амплитуды и частоты свободных колебаний и построены резонансные кривые для стационарных вынужденных колебаний. Выявлены качественные отличия от случаев, когда применяются модели линейной вязкоупругости.

Рассматривается задача поперечных колебаний пластинки, изготовленной из вязкоупругого материала. Уравнение для прогиба пластинки выводится в рамках классической теории изгиба пластинок [1]. Для материала пластинки применяется модель нелинейного вязкоупругого тела, являющаяся обобщением одномерной модели, предложенной и исследованной авторами [2, 3].

1. Пластика толщиной h расположена в декартовой системе координат xOy так, что срединная плоскость совпадает с плоскостью xOy .

Уравнение поперечных движений пластинки примем в виде [1].

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + h \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma, \frac{\partial w}{\partial x} \right) + h \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma, \frac{\partial w}{\partial y} \right) + 2h \frac{\partial}{\partial x \partial y} \left(\sigma, \frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(t) \varphi(x, y) = 0 \quad (1.1)$$

где M_x, M_y, H - изгибающие и крутящие моменты, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ - осевые напряжения, ρ - плотность, $u(x, y, t)$ - нормальное перемещение срединной плоскости.

В качестве модели трехмерного вязкоупругого тела предлагается следующее обобщение одномерной модели:

$$\sigma_y = K\delta_y + 2G \left[1 + \psi \left(\frac{\dot{\epsilon}_I}{\alpha} \right) \right] \left(\epsilon_y - \frac{\theta}{3} \delta_y \right) \quad (1.2)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right), \quad \theta = \epsilon_{xx} \quad (1.3)$$

$$\epsilon_I = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + (\epsilon_{22} - \epsilon_{33})^2 + (\epsilon_{33} - \epsilon_{11})^2 + 6(\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{13}^2 + \epsilon_{23}^2) \right]^{1/2} \quad (1.4)$$

Обратим внимание на то, что здесь, в отличие от теории пластичности, фигурирует скорость интенсивности деформаций, а не интенсивность ϵ , скоростей деформаций. K, G, α - постоянные. Функция

$\psi \left(\frac{\dot{\epsilon}_I}{\alpha} \right)$ характеризует влияние скорости деформирования на напряженное состояние тела. При квазистатическом нагружении $\psi = 0$ и (1.2) переходит в соотношения изотропного упругого тела. Таким образом, функция ψ является мерой отклонения вязкоупругого тела от гукковского, вследствие влияния скорости деформирования.

Как и в одномерном случае [3], будем считать, что соотношения (1.2) верны только для процесса нагружения ($\dot{\epsilon}_I > 0$). Как показывают экспериментальные данные, для ряда полимерных материалов процесс разгрузки очень близок к упругому поведению. Основываясь на это, мы здесь для процесса разгрузки ($\dot{\epsilon}_I < 0$) примем $\psi = 0$.

На основании принятой модели можно заключить

а) изменение объема прямо пропорционально среднему напряжению, т.е.

$$\sigma_{xx} = 3K\theta,$$

б) девиаторы напряжений (D_σ) и деформаций (D_ϵ) параллельны;

в) интенсивности напряжений σ_I и деформаций ϵ_I связаны "одномерным" соотношением

$$\sigma_I = 2G \left[1 + \psi \left(\frac{\dot{\epsilon}_I}{\alpha} \right) \right] \epsilon_I \quad (1.5)$$

что позволяет процесс сложного деформирования представить "единой" кривой в плоскости (σ_I, ϵ_I) для каждого закона деформирования.

Наконец отметим, что значения постоянных K, G, α и вид функции ψ выбираются из условия наилучшего соглашения с экспериментальными данными при элементарных испытаниях (растяжение, сдвиг).

2. Отправляясь от исходных предположений классической теории пластинок [1], из соотношений [1, 2] получим

$$\sigma_{xx} = \frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2} (\epsilon_{xx} + \bar{\nu}\epsilon_{yy}), \quad \sigma_{yy} = \frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2} (\epsilon_{yy} + \bar{\nu}\epsilon_{xx}), \quad \sigma_{xy} = \frac{\bar{E}}{1+\bar{\nu}} \epsilon_{xy} \quad (2.1)$$

где

$$\bar{E} = 2(1+\bar{\nu})\bar{\mu}, \quad \bar{\nu} = \frac{\bar{\lambda}}{2(\bar{\lambda}+\bar{\mu})} \quad (2.2)$$

$$\bar{\lambda} = K - \frac{2}{3}\bar{\mu}, \quad \bar{\mu} = G \left[1 + \psi \left(\frac{\dot{\epsilon}_I}{\alpha} \right) \right]$$

Для деформаций имеем

$$\epsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \epsilon_{xy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.3)$$

Как видно из этих представлений, напряжения выражаются через прогиб $w(x, y, t)$ весьма сложными образами и непосредственное их использование в (1.1) непростительно. Выход из этой ситуации связан с возможностью линеаризации этих соотношений по функции ψ , что в свою очередь связана с возможностью пренебрежения ψ^2 по отношению к единице.

При изгибных колебаниях аргумент $\frac{\dot{\epsilon}_I}{\alpha}$ функции ψ имеет порядок $\pi^2 \frac{\omega_0}{\alpha} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \frac{w_{\max}}{l}$, где ω_0 - частота свободных колебаний упругой пластинки, l - длина полуволн колебания в срединной плоскости. Учитывая, что ω_0 имеет порядок $\pi^2 \frac{c_0}{\alpha} \left(\frac{h}{l} \right)$, где $c_0 = \sqrt{E_0/\rho}$ - скорость упругой "стержневой" волны, следует, что $\frac{\dot{\epsilon}_I}{\alpha}$ имеет порядок

$$\pi^4 \frac{c_0}{\alpha l} \left(\frac{h}{l} \right)^3 \frac{w_{\max}}{l}$$

В работе [1] показано, что для полимеров, чувствительных к малым скоростям деформации, можно принять

$$\psi \left(\frac{\dot{\epsilon}_I}{\alpha} \right) = \left(\frac{\dot{\epsilon}_I}{\alpha} \right)^{2k}, \quad (2k < 1) \quad (2.4)$$

причем, чем меньше k , тем чувствителен материал к малым $\dot{\epsilon}_I$.

Для главных колебаний l - характерный размер пластинки. Для рассмотренных в [1,2] полимеров $\frac{\dot{\epsilon}_I}{\alpha}$ имеет порядок 10^1 . При $l \sim 1$ м,

$\frac{h}{l} \sim 10^{-2}$, $\frac{w_{\max}}{h} = 10^{-2}$, аргумент $\frac{\dot{\epsilon}_I}{\alpha}$ имеет порядок 10^{-1} . Если принять $2k = 0.25$, то, согласно (2.4), $\psi \sim 0.1$ и отбрасывание ψ^2 внесет погрешность порядка 10^{-2} .

На основании вышесказанного, в соотношениях (2.1) и (2.2) будем удерживать лишь линейные по ψ поправки к "упругим" выражениям.

Тогда получим

$$\bar{v} = v_0 - \frac{1}{3}(1 - 2v_0)(1 + v_0)\psi \leq v_0 \quad (2.5)$$

$$\bar{E} = E_0 \left[1 + \frac{2}{3}(1 + v_0)\psi \right] \geq E_0$$

где E_0 , v_0 - значения модуля упругости и коэффициента Пуассона для упругого тела (вязкоупругого тела при квазистатическом испытании)

Для напряжений из (2.1) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E_0}{1 - v_0^2} \left[\varepsilon_{xx} + v_0 \varepsilon_{yy} + (A_0 \varepsilon_{xx} + B_0 \varepsilon_{yy}) \psi \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E_0}{1 - v_0^2} \left[\varepsilon_{yy} + v_0 \varepsilon_{xx} + (A_0 \varepsilon_{xx} + B_0 \varepsilon_{yy}) \psi \right] \\ \sigma_{xy} &= \frac{E_0}{1 - v_0} (1 + \psi) \varepsilon_{xy} \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$A_0 = \frac{2(v_0^2 - v_0 + 1)}{3(1 - v_0)} > 0, \quad B_0 = \frac{4v_0 - v_0^2 - 1}{3(1 - v_0)} \quad (2.7)$$

Далее на основании (1.4), (2.3) и допущений классической теории пластинок с пренебрежением e_{xz} , e_{yz} , e_{zz} имеем

$$\psi = \left(\frac{3z^2}{2\alpha^2} \right)^k \left[\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2} + 3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]^{2k} \quad (2.8)$$

Будем считать, что прогиб пластинки можно представить в виде $w(t, x, y) = F(t)\Phi(x, y)$, где $F(t)$ - амплитудная функция, $\Phi(x, y)$ - соответствующая граничным условиям "балочная" функция. Тогда функцию $\psi(t, x, y)$ можно представить в виде

$$\psi(t, x, y, z) = \left(\frac{3z^2}{2\alpha^2} \right)^k \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^{2k} \psi_1(x, y) \quad (2.9)$$

где

$$\psi_1 = \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 + 3 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \quad (2.10)$$

После принятых предположений и сделанных допущений для моментов имеем

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{3\psi_1}{2k+3} \left(\frac{3h^2 F^2}{8\alpha^2} \right)^k \left(A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \quad (2.11)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{3\psi_1}{2k+3} \left(\frac{3h^2 F^2}{8\alpha^2} \right)^k \left(A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \quad (2.12)$$

$$H = -D(1 - v_0) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{3\psi_1}{2k+3} \left(\frac{3h^2 F^2}{8\alpha^2} \right)^k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (2.13)$$

$$\text{где } D = \frac{E_0 h^3}{12(1 - \nu_0^2)}$$

3. Рассмотрим шарнирно-опертую по всему контуру прямоугольную пластинку $x \in [0; a]$, $y \in [0; b]$, $z \in [-0,5h; 0,5h]$. Будем считать, что имеется тангенциальное усилие T_0 по оси x постоянной интенсивности и по оси y возникающее из-за несмещения краев вдоль оси y . Кроме того, пусть имеется также нормальная внешняя нагрузка. Тогда, вместо (1.1) имеем уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + T_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\ & + \frac{E_0 h}{2b(1 - \nu_0^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \int_0^h \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy + q(t) \rho(x, y) = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Исследуются решения вида

$$w(x, y, t) = F(t) \sin \frac{\pi i x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} \quad (3.2)$$

Учитывая (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) и произведя обычную процедуру метода Бубнова-Галеркина и введя безразмерные переменные

$$\tau = \omega_0 t, \quad f(\tau) = h^{-1} F(\tau) \quad (3.3)$$

для амплитудной функции $f(\tau)$ получим следующее нелинейное уравнение:

$$f'' + f(1 + \lambda_0) + k_0 f^3 + \gamma_0 (f'^2)^k f = Q(\tau) = 0 \quad (3.4)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^4 D}{\rho h} \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right), \quad \lambda_0 = \frac{\pi^2 n^2 T_0}{\rho \omega_0^2}$$

$$k_0 = \frac{9}{16} \left(\frac{n^2}{m^2} \frac{b^2}{a^2} + 1 \right)^{-2}$$

$$\gamma_0 = \frac{12 \left[\sqrt{\frac{3}{8}} \frac{\pi \omega_0}{\alpha} m n \left(\frac{h}{a} \right) \left(\frac{h}{b} \right) \right]^{2k}}{\pi^2 (2k + 3) (\lambda + 2 + \lambda^{-1})} \{ [A_0 (\lambda + \lambda^{-1}) + 2B_0] J_1 + 2(1 - \nu_0) J_2 \}$$

$$J_1 = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} [(\lambda - 1 + \lambda^{-1}) \sin^2 \xi \sin^2 \eta + 3 \cos^2 \xi \cos^2 \eta]^k \sin^2 \xi \sin^2 \eta d\xi d\eta$$

$$J_2 = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} [(\lambda - 1 + \lambda^{-1}) \sin^2 \xi \sin^2 \eta + 3 \cos^2 \xi \cos^2 \eta]^k \cos^2 \xi \cos^2 \eta d\xi d\eta$$

$$\lambda = \left(\frac{n}{m} \frac{b}{a} \right)^2$$

Значения интегралов J_1 и J_2 зависят лишь от отношений $\nu_1 = n/m$, $\nu_2 = a/b$ и показателя k . Табл. 1 представляет некоторые значения J_1 и J_2 для различных ν_1, ν_2, k .

Отметим следующие свойства этих интегралов, позволяющие расширить границы таблицы:

$$J(v_1, v_2) = J(v_1, v_1) = J(v_1^{-1}, v_1^{-1}), \quad J(v_1, v_1) = J(1, 1) \quad (3.5)$$

Таблица 1

(v_1, v_2)		(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,1/3)	(2,1/2)	(3,1/3)
$k=0,5$	J_1	2,107	3,435	5,221	2,601	10,59	7,01	15,93
	J_2	3,168	3,332	3,605	3,224	4,62	3,92	5,76
$k=0,25$	J_1	2,271	2,894	3,559	2,523	5,05	4,12	6,19
	J_2	2,771	2,852	2,971	2,80	3,34	3,09	3,69
$k=0,125$	J_1	2,365	2,668	2,956	2,492	3,52	3,18	3,89
	J_2	2,609	2,649	2,705	2,623	2,86	2,76	3,0

Ниже на основании уравнения (3.4) рассмотрены свободные и вынужденные колебания пластинки. Ради простоты исключим из рассмотрения осевое усилие $T_0(\lambda = 0)$. Учет этого фактора более уместен в вопросах потери и бифуркации устойчивостей ($\lambda < 0$), а также в параметрических колебаниях, при $\lambda = \lambda(\tau)$.

Для свободных колебаний из (3.1) имеем

$$f'' + f + \gamma_0 (f'^2)^k f + k_0 f^3 = 0 \quad (3.6)$$

Из этого уравнения следует, что учет влияния скорости деформирования в рамках принятой модели, в отличие от линейных моделей вязкоупругости, приводит к увеличению частоты свободных колебаний. Это следует из неотрицательности γ_0 , благодаря чему увеличивается жесткость системы. Кроме того, принятая модель приводит к рассеянию механической энергии. Действительно, из (3.6) следует

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} f'^2 + \frac{1}{2} f^2 + \frac{k_0}{4} f^4 \right) = -\gamma_0 (f'^2)^k f f' \quad (3.7)$$

При нагружении $ff' > 0, \gamma_0 > 0$, а при разгрузке $ff' < 0, \gamma_0 = 0$, и в итоге правая часть (3.7) неположительна.

Для количественных оценок затухания и частоты колебаний применим асимптотические методы разделения переменных [4].

Приняв

$$f(\tau) = A(\tau) \cos(\tau + \varphi(\tau)), \quad f'(\tau) = -A(\tau) \sin(\tau + \varphi(\tau)) \quad (3.8)$$

и применив метод осреднения по периоду колебаний для медленно меняющихся функций $A(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\tau} &= -\frac{\gamma_0 A^{2k+1}}{2\pi(k+1)} \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \gamma_0 \frac{\Gamma(k+1,5) A^{2k}}{2\sqrt{\pi}(2k+1)\Gamma(k+2)} + \frac{3}{8} k_0 A^3 \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция

Решив систему (3.9), получим законы изменения амплитуды и частоты свободных колебаний

$$\begin{aligned} \frac{A}{A_0} &= (1 + \beta \omega_0 t)^{\frac{-1}{2k}}, \quad \beta = \frac{\gamma_0 k A_0^{2k}}{\pi(k+1)}, \quad A_0 = A(0) \\ \frac{\omega}{\omega_0} &= 1 + \frac{\gamma_0 \Gamma(k+1,5) A_0^{2k}}{2\sqrt{\pi}(2k+1)\Gamma(k+2)(1 + \beta \omega_0 t)} + \frac{3}{8} k_0 A^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

В качестве примера рассмотрим квадратную пластинку со стороной a с показателем $k = 1/8$ и коэффициентом Пуассона $\nu_0 = 0.3$. Для главных колебаний ($m = n = 1$) из (3.10) получим

$$\frac{A}{A_0} = (1 + \delta t)^{-4}, \quad \delta = 0.27\alpha \left(R_0 A_0 \left(\frac{h}{a} \right)^{0.25} \right)^{0.25}, \quad R_0 = \frac{c_0}{\alpha a}$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 + 0.24 \left(R_0 A_0 \left(\frac{h}{a} \right)^{0.25} \right)^{0.25} (1 + \delta t)^{-1} + \frac{9}{64} A^2 \quad (3.11)$$

Табл. 2 представляет числовые значения величины w_{max}/h для квадратной пластинки, изготовленной из винипласта ($\alpha = 50$ с, $R = 25/a$, $k = 1/8$) [2]. Принято $A_0 = 0.1$, т.е. $w_{max}(0) = 0.1h$. Данные относятся к главным колебаниям.

Таблица 2

a	$t, h/a$	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	4
	0,05	0,023	0,008	0,003	0,002	0,001		
1м	0,02	0,071	0,052	0,038	0,03	0,023	0,008	0,001
	0,01	0,09	0,082	0,074	0,067	0,06	0,04	0,18
	0,05	0,005	0,001					
0,5м	0,02	0,046	0,024	0,014	0,008	0,005	0,001	
	0,01	0,078	0,06	0,05	0,04	0,03	0,014	0,004

Как видно из таблицы, пластинки больших размеров при постоянстве h/a быстрее рассеивают механическую энергию. Это значит также, что для данной пластинки более высокие моды очень быстро будут затухать. Из таблицы следует также, что при прочих постоянных размерах колебания толстых пластинок затухают интенсивнее по сравнению с тонкими. Что же касается частот колебаний, то они претерпевают малые изменения со временем и практически мало отличаются от частот упругих пластинок, правда, оставаясь больше их.

Теперь рассмотрим вынужденные колебания пластинки при нормальной нагрузке, гармонической во времени.

Согласно уравнению (3.1), здесь имеем уравнение

$$f'' + f + \gamma_0 (f')^k f + k_0 f^3 = Q_0 \cos p\tau \quad (3.12)$$

Напомним, что $\gamma_0 = 0$ при $f' < 0$ [разгрузка]

Если ввести расстройку частоты $\xi = p - 1$, то уравнение (3.12) примет вид

$$f'' + p^2 f = -\gamma_0 (f')^k f + \xi f - k_0 f^3 + Q_0 \cos p\tau \quad (3.13)$$

Для вынужденных колебаний решение будем искать в виде

$$f = A(\tau) \cos(p\tau - \varphi(\tau)), \quad f' = -pA(\tau) \sin(p\tau - \varphi(\tau)) \quad (3.14)$$

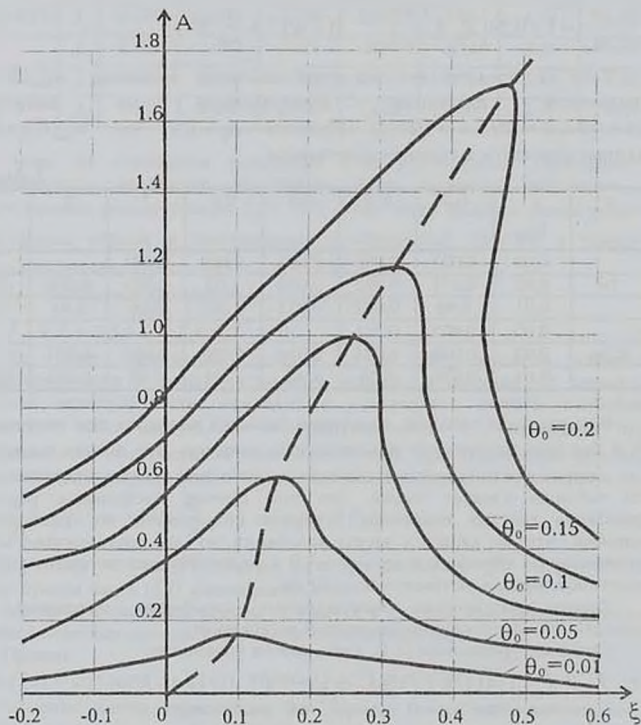
Применив метод разделения переменных и осреднив уравнения по периоду вынуждающей силы [4], для функций $A(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ получим уравнения

$$\frac{dA}{d\tau} = -\frac{\gamma_0 p^{2k+1} A^{2k+1}}{2\pi(k+1)} + \frac{Q_0 \sin \varphi}{2p}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = -\frac{\gamma_0 p^{2k+1} A^{2k} \Gamma(k+0.5)}{4\sqrt{\pi} \Gamma(k+2)} + \frac{\xi}{2p} - \frac{3}{8p} k_0 A^2 - \frac{Q_0 \cos \varphi}{2Ap} \quad (3.15)$$

Представляют интерес стационарные колебания. Приравняв правые части (3.15) к нулю и исключив фазу φ , получим уравнение резонансных кривых, содержащее амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний:

$$\left[\frac{\gamma_0 p^{2k-1}}{2\pi(k+2)} \right]^2 + \left[\frac{\gamma_0 p^{2k-1} A^{2k-1} \Gamma(k+0,5)}{4\sqrt{\pi} \Gamma(k+2)} - \frac{\xi A}{2p} + \frac{3k_0 A^3}{8p} \right]^2 = \frac{Q_0^2}{4p^2} \quad (3.16)$$



Фиг. 1

Уравнение "скелетной" кривой имеет вид

$$\xi = \frac{\gamma_0 p^{2k} A^{2k} \Gamma(k+0,5)}{2\sqrt{\pi} \Gamma(k+2)} + \frac{3}{4} k_0 A^2 \quad (3.17)$$

Нетрудно проверить, что эта кривая проходит через начало координат в плоскости (ξ, A) и касается в этой точке оси ξ при $2k < 1$. Этим она существенно отличается от кривой, построенной в рамках известных моделей линейной вязкоупругости.

Из (3.12) следует, что при малых A первое слагаемое превалирует над вторым, а при больших A - наоборот. Это означает, что в некоторой точке "скелетной" кривой происходит смена знака кривизны. Если резонансная кривая пересекает "скелетную" кривую ниже этой точки, то отсутствует явление бифуркации равновесия. При пересечении вышеуказанной точки появляются неустойчивые ветви и, как обычно, при плавном изменении

расстройки частоты, система вынужденно проскакивает зону неустойчивости.

Типичные кривые приведены на фиг. 1. Графики построены для квадратной пластинки из винипласта при $a = 1$ м, $h/a = 0,01$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. -М.: Наука, 1972.
2. Ambartsumyan S.A., Minassian M. M. On the model of bodies with their mechanical properties depending on the strain rate. -Int. J. Non-Linear Mech. 1986, v.21, №1.
3. Амбарцумян С.А., Минасян М.М. Об одной модели вязкоупругого тела. -МТТ, 1991, №4.
4. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Х.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. -М.: Наука, 1987.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
2.12.1996

ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА НА ПРОГИБЫ
 ОРТОТРОПНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ
 ТОЛЩИНЫ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ НЕКОТОРЫХ
 ФАКТОРОВ

Аревшатян Н.Г., Киракосян Р.М., Степанян С.П.

Ն.Գ. Արեշատյան, Ռ.Մ. Կիրակոսյան, Ս.Պ. Ստեփանյան
 Փոփոխական հաստություն օրթոտրոպ օղակալին սալի ճկվածքների վրա ընդլայնական սաեղի
 ազդեցությունը՝ կախված մի քանի գործոններից

Օգտվելով եզրային խնդիրը Կոշու խնդրի բերելու եղանակից [5], [6] (ուծվում է ներքին եզրը
 ազատ, իսկ արտաքինը հողակապորեն ինքված, զծայնորեն փոփոխական հաստությամբ օրթոտրոպ
 օղակալին սալի ծռման խնդիրը՝ ընդլայնական սաեղի հաշվառմամբ [2]: Բերվում են, սալի մաքսիմում
 ճկվածքի անշափ մեծությունները մեխանիկա երկրաչափական պարամետրերի մի քանի բնորոշ
 արժեքների դեպքում: Կատարվում է օղակալին և հոծ սալերի համապատասխան մեծությունների
 համեմատություն՝ եզրային տարրեր պայմանների դեպքում: Արվում են ճկվածքների վրա ընդլայնական
 սաեղի ազդեցության վերաբերյալ որակական եզրակացություններ, որոնք բացահայտում են ինչպես
 եզրային պայմանների, այնպես էլ մեխանիկա երկրաչափական մի շարք գործոնների դերը:

N.G. Arevshatyan, R.M. Kirakosyan, S.P. Stepanyan

The Influence of Cross Displacement on the Flexure of Orthotropic Circular Plate Variable
 Thickness Depend on some Factors

Пользуясь способом приведения краевой задачи к задаче Коши [5], [6], решается
 задача изгиба ортотропной кольцевой пластинки линейно-переменной толщины при учете
 поперечного сдвига [2]. Считается, что внутренний контур пластинки свободен, а
 внешний — шарнирно оперт. Приводятся безразмерные значения максимальных прогибов
 пластинки при некоторых характерных значениях механико-геометрических параметров.
 Делаются качественные заключения о влиянии поперечного сдвига на прогибы пластинки,
 которые выявляют роль как краевых условий, так и ряда механико-геометрических
 факторов.

1. Рассмотрим ортотропную кольцевую пластинку с внутренним и
 внешним радиусами a, b , толщина которой в радиальном направлении
 изменяется по линейному закону

$$h = h_0 + h_1 r, \quad h_1 > -\frac{h_0}{b} \quad (1.1)$$

Здесь h_0 и h_1 — заданные параметры, r — радиальная координата. Пусть
 пластинка несет равномерно-распределенную нормальную нагрузку
 интенсивности q . При этом внутренний край пластинки $r = a$ свободен,
 а внешний край $r = b$ — шарнирно оперт. Задачу изгиба рассматриваемой
 пластинки будем решать в рамках уточненной теории [2], учитывающей
 влияние поперечных сдвигов при переменности толщины.

Не вдаваясь в подробности, отметим, что в силу осесимметричности
 решение задачи сводится к нахождению лишь двух функций — прогиба
 пластинки w и функции φ_1 , описывающей влияние поперечного сдвига.

Следуя [2], введем обозначения:

$$r = \rho c, \quad \frac{h_0}{c} = s, \quad \frac{h_1}{s} = \gamma, \quad \frac{a}{b} = k, \quad h = h_0 H$$

$$\sqrt{\frac{B_0}{B_r}} = m, \quad \frac{B_r}{\sigma_0} = n, \quad a_r \sigma_0 = l, \quad \frac{6q}{n \sigma_0 s^3} = q^*$$

$$w = h_0 \bar{w}, \quad \frac{d\bar{w}}{d\rho} = \alpha, \quad \varphi_1 = \sigma_0 t, \quad s\alpha - lt = y$$

$$N_r = \sigma_0 h_0 \bar{N}_r, \quad M_r = \sigma_0 h_0^2 \bar{M}_r, \quad M_0 = \sigma_0 h_0^2 \bar{M}_0 \quad (1.2)$$

Здесь s — неизвестная постоянная размерности длины; B_r , B_0 , a_r — механические параметры материала [1]; σ_0 — характерное напряжение.

Введением неизвестной постоянной краевая задача изгиба пластинки сводится к задаче Коши для следующей системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [2]:

$$\frac{dy}{d\rho} = v$$

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{1}{\rho^3 H^3} \{ q^* s \rho (\rho^2 - k^2) - \rho H^2 (1 + 4\gamma \rho) v + m^2 H^2 [1 + (1 - 3\nu_r) \gamma \rho] y \} = F(\rho, y, v) \quad (1.3)$$

$$\text{где} \quad H = 1 + \gamma \rho \quad (1.4)$$

Условия свободного и шарнирно-опертого краев пластинки имеют вид [2]

$$(\rho v + \nu_r m^2 y)|_{\rho=k} = 0 \quad (M_r|_{r=a} = M_r|_{r=b} = 0) \quad (1.5)$$

Через ρ_R обозначено то значение безразмерной координаты, при котором удовлетворяется условие шарнирного опирания внешнего контура пластинки $r = b$.

Задаваясь некоторыми значениями безразмерных параметров q^* , m , s , γ , k и выбирая начальные значения V_0 , y_0 , удовлетворяющие условию свободного края пластинки (1.5) при $\rho = k$, путем перехода к конечным разностям можно вычислить значения искомых y и v в последующих друг другу сечениях $\rho_i = \rho_{i-1} + \Delta\rho$.

$$y_i = y_{i-1} + v_{i-1} \Delta\rho, \quad v_i = v_{i-1} + F_{i-1} \Delta\rho \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1.6)$$

Здесь $\Delta\rho$ — шаг численного интегрирования. Численное интегрирование системы (1.3) продолжается до того значения безразмерной координаты ρ_R , для которого удовлетворяется условие шарнирного опирания. Желательно варьированием значения параметра q^* добиться того, чтобы это условие удовлетворялось при $\rho_R = 1$. Это важно, поскольку тогда решение будет соответствовать пластинке с наперед заданными габаритными размерами. Этим фактически завершается решение задачи и можно вычислить значения расчетных величин в любом сечении пластинки. В частности, безразмерные значения прогиба и изгибающих моментов определяются формулами

$$\frac{w}{h_0} = -\frac{1}{s} \int_0^1 (y + lt) d\rho, \quad \bar{M}_r = -\frac{nsH^3}{12\rho} (\rho v + \nu_r m^2 y), \quad \bar{M}_0 = -\frac{ns m^2 H^3}{12\rho} (v, \rho v + y) \quad (1.7)$$

2. В табл. 1-3 представлены значения величин

$$w_{\kappa, \text{ш}} = \frac{w_0}{h_0} \frac{h_0^3}{b^3} \frac{B_r}{6q}, \Delta_{\kappa, \text{ш}} = \frac{w_0' - w_0^{\kappa \lambda}}{w_0^{\kappa \lambda}} 100\% \quad (2.1)$$

$$\sqrt{B_0/B_r} = 0.5; \quad \nu_r = 0.3; \quad s = 0.1$$

Таблица 1

$k = 0.1$									
шарнирное опирание									
$h_1 b / h_0$	-0.5			0			1		
B_r / G_r	0	50	100	0	30	50	0	10	20
$w_{\kappa, \text{ш}}^*$	9.74	10.0	10.3	4.16	4.32	4.42	1.17	1.21	1.24
$\Delta_{\kappa, \text{ш}}$	—	2.89	5.78	—	3.75	6.25	—	3.00	6.00
$w_{\text{спл}, \text{ш}}^*$	7.01	7.21	7.40	3.81	3.99	4.12	1.46	1.52	1.58
$\Delta_{\text{спл}, \text{ш}}$	—	2.77	5.55	—	4.92	8.20	—	4.38	8.76
$\Delta_{\kappa, \text{ш}} / \Delta_{\text{спл}, \text{ш}}$	—	1.04	1.04	—	0.76	0.76	—	0.68	0.68
защемление									
$w_{\kappa, \text{з}}^*$	2.04	2.53	3.01	0.52	0.70	0.82	0.11	0.14	0.17
$\Delta_{\kappa, \text{з}}$	—	23.8	47.6	—	33.7	56.2	—	30.5	60.7
$w_{\text{спл}, \text{з}}^*$	1.64	2.09	2.55	0.48	0.66	0.79	0.11	0.15	0.19
$\Delta_{\text{спл}, \text{з}}$	—	27.9	55.7	—	39.2	65.5	—	34.0	67.9
$\Delta_{\kappa, \text{з}} / \Delta_{\text{спл}, \text{з}}$	—	0.85	0.85	—	0.86	0.86	—	0.90	0.90
$\Delta_{\kappa, \text{з}} / \Delta_{\kappa, \text{ш}}$	—	8.23	8.23	—	9.06	8.99	—	10.2	10.1
$k = 0.01$									
шарнирное опирание									
$w_{\kappa, \text{ш}}^*$	7.13	7.34	7.56	4.69	4.89	5.03	1.28	1.34	1.39
$\Delta_{\kappa, \text{ш}}$	—	3.03	6.05	—	4.33	7.21	—	4.20	8.41
$\Delta_{\kappa, \text{ш}} / \Delta_{\text{спл}, \text{ш}}$	—	1.09	1.09	—	0.88	0.88	—	0.96	0.96
защемление									
$w_{\kappa, \text{з}}^*$	1.71	2.17	2.64	0.49	0.68	0.81	0.11	0.15	0.18
$\Delta_{\kappa, \text{з}}$	—	27.3	54.6	—	37.9	63.1	—	32.3	64.7
$\Delta_{\kappa, \text{з}} / \Delta_{\text{спл}, \text{з}}$	—	0.98	0.98	—	0.96	0.96	—	0.95	0.95
$\Delta_{\kappa, \text{з}} / \Delta_{\kappa, \text{ш}}$	—	9.01	9.02	—	8.75	8.75	—	7.69	7.69

$$\sqrt{B_0/B_c} = 1; \quad \nu_c = 0.3; \quad s = 0.1$$

Таблица 2

$k = 0.1$									
шарнирное опирание									
$h_1 b / h_0$	-0.5			0			1		
B_r / G_{rc}	0	50	100	0	30	50	0	10	20
$w_{к,ш}$	2.95	3.26	3.57	1.21	1.38	1.49	0.42	0.46	0.51
$\Delta_{к,ш}$	—	10.5	21.0	—	13.6	22.7	—	10.4	20.7
$w_{спа,ш}^*$	3.00	3.31	3.62	1.28	1.47	1.59	0.40	0.45	0.50
$\Delta_{спа,ш}$	—	10.3	20.7	—	14.8	24.2	—	12.5	25.0
$\Delta_{к,ш} / \Delta_{спа,ш}$	—	1.01	1.01	—	0.92	0.94	—	0.83	0.83
защемление									
$w_{к,з}^*$	1.08	1.52	1.97	0.33	0.51	0.63	0.08	0.11	0.15
$\Delta_{к,з}$	—	41.6	83.4	—	53.3	88.8	—	42.8	85.4
$w_{спа,з}^*$	1.00	1.36	1.73	0.31	0.50	0.62	0.08	0.12	0.16
$\Delta_{спа,з}$	—	36.1	72.1	—	61.3	100.0	—	49.0	97.9
$\Delta_{к,з} / \Delta_{спа,з}$	—	1.15	1.16	—	0.87	0.89	—	0.87	0.87
$\Delta_{к,з} / \Delta_{к,ш}$	—	3.97	3.97	—	3.91	3.91	—	4.13	4.13
$k = 0.01$									
шарнирное опирание									
$w_{к,ш}^*$	2.97	3.28	3.59	1.23	1.41	1.53	0.40	0.45	0.50
$\Delta_{к,ш}$	—	10.4	20.8	—	14.9	24.9	—	12.6	25.2
$\Delta_{к,ш} / \Delta_{спа,ш}$	—	1.00	1.00	—	1.00	0.97	—	1.00	1.00
защемление									
$w_{к,з}^*$	1.01	1.46	1.91	0.314	0.501	0.626	0.079	0.117	0.156
$\Delta_{к,з}$	—	45.1	90.1	—	59.6	99.4	—	48.5	97.1
$\Delta_{к,з} / \Delta_{спа,з}$	—	1.25	1.25	—	0.97	0.99	—	0.99	0.99
$\Delta_{к,з} / \Delta_{к,ш}$	—	4.10	4.10	—	3.93	3.93	—	3.80	3.80

$$\sqrt{B_0/B_r} = 2; \quad \nu_r = 0.3; \quad s = 0.1$$

Таблица 3

$k = 0.1$									
шарнирное опирание									
$h_1 b / h_0$	-0.5			0			1		
B_r / G_{rz}	0	20	40	0	10	20	0	5	10
$w_{к,ш}$	1.08	1.23	1.38	0.45	0.51	0.58	0.12	0.14	0.16
$\Delta_{к,ш}$	—	13.8	27.6	—	14.5	28.9	—	18.8	37.6
$w_{сдл,ш}^*$	1.07	1.22	1.38	0.38	0.44	0.50	0.10	0.13	0.15
$\Delta_{сдл,ш}$	—	14.0	27.1	—	15.8	31.6	—	30.0	50.0
$\Delta_{к,ш} / \Delta_{сдл,ш}$	—	0.98	1.02	—	0.91	0.91	—	0.63	0.75
защемление									
$w_{к,з}^*$	0.51	0.68	0.86	0.17	0.23	0.28	0.045	0.064	0.082
$\Delta_{к,з}$	—	33.9	67.8	—	35.4	70.8	—	40.7	81.5
$w_{сдл,з}^*$	0.52	0.70	0.88	0.17	0.23	0.29	0.04	0.06	0.08
$\Delta_{сдл,з}$	—	35.0	69.9	—	37.4	74.7	—	44.3	88.7
$\Delta_{к,з} / \Delta_{сдл,з}$	—	0.97	0.97	—	0.95	0.95	—	0.92	0.92
$\Delta_{к,з} / \Delta_{к,ш}$	—	2.46	2.46	—	2.45	2.45	—	2.16	2.16
$k = 0.01$									
шарнирное опирание									
$w_{к,ш}$	1.07	1.22	1.38	0.38	0.45	0.51	0.11	0.13	0.15
$\Delta_{к,ш}$	—	14.5	29.0	—	16.4	32.9	—	21.3	42.6
$\Delta_{к,ш} / \Delta_{сдл,ш}$	—	1.03	1.04	—	1.04	1.04	—	0.71	0.85
защемление									
$w_{к,з}^*$	0.51	0.69	0.88	0.17	0.23	0.29	0.045	0.065	0.085
$\Delta_{к,з}$	—	35.0	69.9	—	37.4	74.7	—	44.4	88.7
$\Delta_{к,з} / \Delta_{сдл,з}$	—	1.00	1.00	—	1.00	1.00	—	1.00	1.00
$\Delta_{к,з} / \Delta_{к,ш}$	—	2.41	2.41	—	2.28	2.27	—	2.08	2.08

подсчитанные при некоторых характерных значениях параметров $\sqrt{B_0/B_r}$, $h_1 b / h_0$, a/b . Через $w_{к,з}^*$ и w_0 обозначены прогибы на внутреннем контуре пластинок, полученные по классической и уточненной теориям. Величина $\Delta_{к,ш}$ определяет поправку к наибольшему прогибу пластинки в процентах, вносимую учетом поперечного сдвига. Для сравнения в таблицах приведены также безразмерные прогибы и соответствующие поправки для защемленной по внешнему контуру кольцевой пластинки $w_{к,з}^*$, $\Delta_{к,з}$ [4]. Представлены также аналогичные

величины сплошной пластинки как при шарнирном опирании $w_{сплш}^*$, $\Delta_{сплш}^*$, так и при защемлении контура $w_{сплз}^*$, $\Delta_{сплз}^*$ [3].

С целью выявления роли отверстия кольцевой пластинки, а также вида краевых условий в таблицах приведены отношения соответствующих поправок наибольших прогибов пластинки

На фиг. 1-3 проиллюстрированы графики изменения безразмерного изгибающего момента радиального направления шарнирно-опертой пластинки для трех характерных случаев ортотропии материала. На каждой фигуре представлены по три графика, из которых один соответствует сплошной пластинке ($k = 0$), а два — кольцевой ($k = 0,1$ и $k = 0,01$).

Данные таблиц и графики фигур приводят к следующим заключениям:

1. Подобно случаю пластинки постоянной толщины при возрастании отношения модулей крутового и радиального направлений $m^2 = E_0 / E_r$, значение наибольшего прогиба убывает. Это заключение верно как при шарнирном опирании, так и при защемлении внешнего контура пластинки для любых значений параметров $\gamma = h_1 b / h_0$, $k = a / b$ и $l = B_r / G_r$.

2. Учет влияния поперечного сдвига, как и следовало ожидать, приводит к увеличению наибольших прогибов пластинки переменной толщины.

3. Поправка, вносимая уточненной теорией, при данных краевых условиях зависит от характера анизотропии и от относительной толщины пластинки.

Она увеличивается с ростом:

а) параметра l , т.е. с уменьшением относительного модуля сдвига материала в поперечной плоскости;

б) отношения модулей Юнга крутового и радиального направлений E_0 / E_r ;

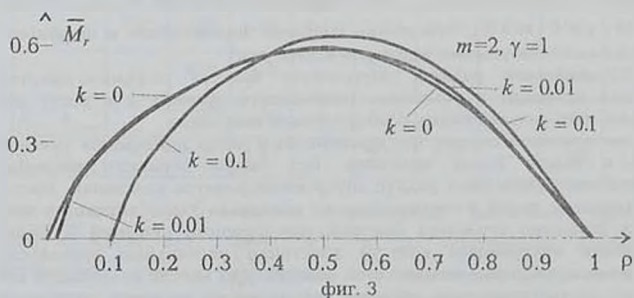
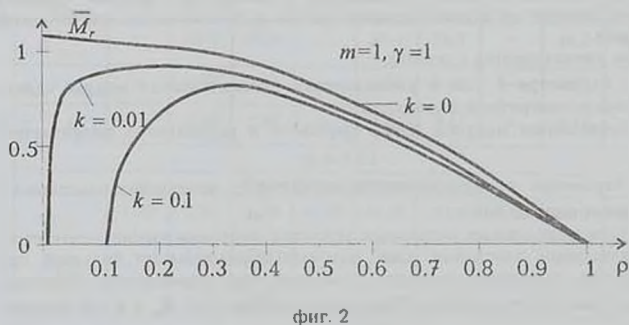
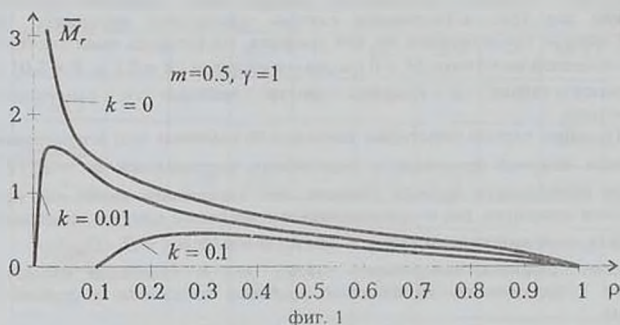
в) параметра γ , характеризующего быстроту утолщения пластинки в радиальном направлении.

4. При неизменных остальных условиях поправка сильно зависит от вида крепления пластинки. Она получается значительно большей при защемлении внешнего контура, чем при его шарнирном опирании. Причем, роль этого фактора более существенна при $E_0 < E_r$ и заметно ослабевает с возрастанием E_0 / E_r . Например, при росте E_0 / E_r от 0.25 ($m = 0.5$) до 4 ($m = 2$), отношение поправок защемленной и шарнирно-опертой пластинок убывает примерно в пять раз.

5. Уменьшение радиуса внутреннего контура шарнирно-опертой пластинки приводит к убыванию наибольшего прогиба и к росту его поправки, чего нельзя сказать о защемленной пластинке.

В заключение отметим, что применяемый метод приведения краевой задачи к задаче Коши позволяет, без ущерба точности решения, неограниченно уменьшить радиус внутреннего контура пластинки. Метод же коллокаций такой возможностью не обладает. Это объясняется тем, что для описания характера быстрой изменяемости решений в малой окрестности внутреннего контура пластинки необходимо произвести более детальную дискретизацию этой области. Для метода коллокаций это означает соответствующим образом увеличить число точек разбиения области, примыкающей к внутреннему контуру пластинки, что приводит к резкому повышению порядка разрешающей системы алгебраических уравнений. В результате этого накопление ошибок вычислений увеличивается настолько, что накладывает ограничение сверху на число разбиения. В случае же метода приведения краевой задачи к задаче Коши цель описания характера быстрой изменяемости решения достигается

путем уменьшения шага интегрирования, что приводит не к уменьшению, а, наоборот, к увеличению точности вычислений. Благодаря этому, шаг интегрирования можно уменьшить сколь угодно, что позволит решение сплошной пластинки получить из соответствующего решения кольцевой пластинки путем предельного перехода при $k \rightarrow 0$. В справедливости этого утверждения можно убедиться как из данных табл. 1+3, так и графиков фиг. 1+3.



Любопытно, что условие свободного края на внутреннем контуре пластинки $\rho_0 = k$ не мешает предельному переходу. Это физически легко объяснимо, ибо наличие бесконечно узкого отверстия в центре пластинки не должно влиять на значения расчетных величин. С этой

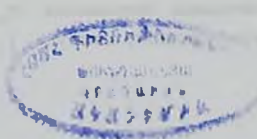
точки зрения наиболее интересным является случай $E_0 < E_r$, при котором в центре сплошной пластинки ($k=0$) изгибающие моменты имеют особенность. На фиг. 1 иллюстрирован характер изменения радиального изгибающего момента M_r в окрестности внутреннего контура пластинки для случая $E_0/E_r = 0.25$ ($m = 0.5$). При $k \rightarrow 0$ изгибающий момент M_r с удалением от внутреннего контура пластинки с огромной скоростью растет от нуля до значения, соответствующего случаю сплошной пластинки. Разумеется, это явление имеет место и в других характерных случаях ортотропии, то есть при $E_0 = E_r$ и при $E_0 > E_r$ (фиг. 2, 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. -М.: Наука, Гостехиздат, 1987. 360с.
2. Киракосян Р.М. К уточненной теории цилиндрически ортотропных пластин переменной толщины. - Изв. НАН Армении, Механика, 1994, т.47, №5-6, с.64-73.
3. Аревшатян Н.Г., Киракосян Р.М., Степанян С.П. Изгиб ортотропной круглой пластинки переменной толщины с учетом поперечного сдвига. - Изв. НАН Армении, Механика, 1997, т.50, №3-4, с.64-68.
4. Аревшатян Н.Г., Киракосян Р.М., Степанян С.П. Изгиб защемленной ортотропной кольцевой пластинки переменной толщины с учетом поперечного сдвига. - Изв. НАН Армении, Механика, 1998, т.51, №3, с.3-7.
5. Ильющин А.А. Пластичность. - М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
6. Киракосян Р.М. Об одной задаче круглой пластинки наименьшего объема за пределами упругости материала. - Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т.30, №1, с.21-32.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
29.11.1996



УДК 539.3

К ТЕОРИИ ПЛАСТИН ПО НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ

Хачатрян А.А.

Ա. Ա. Խաչատրյան

Սալերի ոչ սիմետրիկ առաձգականության տեսության շուրջ

Որոշ ոչ ավանդական նյութերից պատրաստված սալերի ծովան խնդիրներ դիտարկելիս, առաջանում է ոչ սիմետրիկ առաձգականության տեսության շրջանակներում մոմենտային լարումների հաշվի առնելու անհրաժեշտություն [1-3]: Այս խնդրի եռաչափ լուծումը կապված է որոշակի դժվարությունների հետ: Այստեղ ոչ սիմետրիկ առաձգականության տեսության եռաչափ խնդիրը երկչափ խնդրին րեդուցելու ևս մեկ փորձ է արվում [4, 5]: Ընդ որում, ի տարբերություն [5]-ի այստեղ առաջարկվում են հիպոթեզներ, որոնք տալիս են ոչ միայն ծովող սալերի այլ նաև հարթ խնդրի դիտարկման համար ամփոփ արդյունքներ:

A.A. Khachatryan

On the Non-symmetrical Elasticity Theory of Plates

При рассматривании задач изгиба пластин, изготовленных из некоторых нетрадиционных материалов возникает необходимость учета моментных напряжений на уровне несимметричной теории упругости [1-3]. Трехмерный подход к решению этой проблемы связан с некоторыми трудностями. Здесь делается еще одна попытка сведения трехмерной задачи несимметричной теории упругости к двумерной задаче пластинки [4, 5]. При этом, в отличие от [5], здесь предлагаются гипотезы, которые дают корректные результаты не только для изгибаемых пластин, но и для рассмотрения плоской задачи.

1. Рассмотрим пластинку постоянной толщины h в декартовой системе координат (x, y, z) . Пусть срединная плоскость пластинки совпадает с плоскостью координат xOy ($z = 0$). Пусть пластинка нагружена поверхностными нормальными силами, приложенными к плоскостям $z = \pm h/2$ так, что

$$\begin{aligned} \text{при } z = \frac{h}{2} \quad \sigma_z = Z', \quad \text{при } z = -\frac{h}{2} \quad \sigma_z = -Z' \\ \text{при } z = \pm \frac{h}{2} \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xy} = \mu_{xx} = \mu_{yy} = \mu_{zz} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где σ_{ik} - силовые напряжения, μ_{ik} - моментные напряжения.

В основу предлагаемой теории лежат следующие гипотезы, которые в некоторых случаях совпадают, а в некоторых случаях обобщают известные гипотезы и представления уточненной теории пластин [4]:

а) нормальные к срединной плоскости перемещения u_z и повороты относительно координаты z не зависят от z , то есть

$$u_z = w(x, y), \quad \omega_z = \psi_3(x, y) \quad (1.2)$$

где w - искомое нормальное перемещение, ψ_3 - искомый поворот относительно координаты z :

б) касательные напряжения σ_{xz} и σ_{xy} по толщине пластинки меняются по заданному закону

$$\sigma_{xz} = f(z)\varphi_1(x, y), \quad \sigma_{zy} = f(z)\varphi_2(x, y) \quad (1.3)$$

где φ_i - искомые функции, характеризующие поперечные сдвиги; $f(z)$ - заданная функция, в частности, в последующем принимаем

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (1.4)$$

в) повороты ω_x и ω_y относительно координат x и y соответственно, имеют структуру поворотов, определяемых по уточненной теории

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - f(z)\psi_2(x, y), \quad \omega_y = -\frac{\partial w}{\partial x} + f(z)\psi_1(x, y) \quad (1.5)$$

где ψ_i - искомые функции, характеризующие повороты относительно координат x и y ;

г) нормальное напряжение σ_z пренебрежимо мало, моментные напряжения $\mu_{xz}, \mu_{xy}, \mu_{yz}$ достаточно малы и при необходимости, как и σ_z , могут быть определены из уравнений равновесия с учетом условий (1.1).

2. В выбранной системе координат для силовых и моментных напряжений имеем [2,3]

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu} &= (\mu + \alpha)\gamma_{\mu} + (\mu - \alpha)\gamma_{\eta} + \lambda\gamma_{\mu\kappa}\delta_{\mu} \\ \mu_{\mu} &= (\gamma + \varepsilon)\chi_{\mu} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{\eta} + \beta\chi_{\mu\kappa}\delta_{\mu} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где для тензора деформаций и тензора изгиба-кручения имеем

$$\gamma_{\mu} = u_{i,j} - \epsilon_{kij} \omega_k, \quad \chi_{\mu} = \omega_{i,j} \quad (2.2)$$

(суммирование по k)

далее, $\mu = E/2(1 + \nu)$, $\lambda = \nu E/(1 + \nu)(1 - 2\nu)$ - постоянные Ламе; E - модуль упругости; ν - коэффициент Пуассона; $\alpha, \gamma, \varepsilon, \beta$ - новые упругие постоянные ($\mu, \lambda, E, \alpha - ML^{-1}T^{-2}$; $\gamma, \varepsilon, \beta - MLT^{-1}$); u_i - искомые перемещения; δ_{ij} - символ Кронекера; ϵ_{kij} - тензор Леви-Чивиты

Уравнения движения в напряжениях запишутся следующим образом [2,3]:

$$\sigma_{\mu,i} + X_i = \rho \ddot{u}_i, \quad \epsilon_{ijk} \sigma_{\mu} + \mu_{\mu,i} + Y_i = J \ddot{\omega}_i \quad (2.3)$$

где ρ - плотность материала (ML^{-3}); J - динамическая характеристика среды (ML^{-1}); X_i, Y_i - составляющие массовых сил и массовых моментов.

Согласно (1.2) - (2.2), для тангенциальных перемещений какой-либо точки пластинки имеем

$$\begin{aligned} u_x &= u - z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{I_0(z)}{\mu + \alpha} (\varphi_1 + 2\alpha\psi_1) \\ u_y &= v - z \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{I_0(z)}{\mu + \alpha} (\varphi_2 + 2\alpha\psi_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $u(x, y)$, $v(x, y)$ - искомые тангенциальные перемещения срединной

$$\text{плоскости пластинки, } I_0(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right).$$

Таким образом, благодаря принятым гипотезам, трехмерная задача несимметричной теории упругости свелась к двумерной задаче, то есть к определению восьми "двумерных" функций: $u, v, w, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, \psi_3$.

Подставляя в (2.1) значения γ_{ij} и χ_{ij} с учетом (1.2), (1.5), (2.2) и (2.4), для искомых напряжений (наряду с (1.3)) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= B \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_0(z)}{\mu + \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\varphi_1 + 2\alpha\psi_1) + v \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_2 + 2\alpha\psi_2) \right] \right\} \\ \sigma_{yy} &= B \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial x} - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_0(z)}{\mu + \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\varphi_2 + 2\alpha\psi_2) + v \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_1 + 2\alpha\psi_1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

При определении этих напряжений, согласно предположению г), пренебрегли напряжением σ_{zz} .

Далее имеем следующие несимметричные силовые напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= (\mu + \alpha) \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} + \theta \frac{\partial u}{\partial y} \right\} - 2\mu z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - 2\alpha\psi_3 + \\ &\quad + I_0(z) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_2 + 2\alpha\psi_2) + \theta \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_1 + 2\alpha\psi_1) \right\} \\ \sigma_{yx} &= (\mu + \alpha) \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \theta \frac{\partial v}{\partial x} \right\} - 2\mu z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2\alpha\psi_3 + \\ &\quad + I_0(z) \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_1 + 2\alpha\psi_1) + \theta \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_2 + 2\alpha\psi_2) \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= f(z) \left(\theta \varphi_1 + \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha} \psi_1 \right) \\ \sigma_{zx} &= f(z) \left(\theta \varphi_2 + \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha} \psi_2 \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для моментных напряжений получим

$$\begin{aligned} \mu_{xx} &= 2\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - f(z) \left[(2\gamma + \beta) \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \beta \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] \\ \mu_{yy} &= -2\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f(z) \left[(2\gamma + \beta) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \beta \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\mu_{xy} = (\gamma + \varepsilon) \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(z) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \eta \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) \right] \quad (2.9)$$

$$\mu_{yx} = (\gamma + \varepsilon) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - f(z) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \eta \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \right]$$

$$\mu_{xz} = (\gamma + \varepsilon) \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial x} + z \eta \psi_2 \right) \quad (2.10)$$

$$\mu_{yz} = (\gamma + \varepsilon) \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial y} - z \eta \psi_1 \right)$$

Напряжения (2.5)-(2.10) в поперечных сечениях пластинки вызывают внутренние усилия и моменты, которые на единицу длины срединной плоскости пластинки запишутся следующим образом: тангенциальные и перерезывающие усилия от силовых напряжений

$$\begin{aligned} T_{xx} &= Bh \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad T_{yy} = Bh \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ S_{xy} &= (\mu + \alpha) h \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \theta \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2\alpha h \psi_3 \\ S_{yx} &= (\mu + \alpha) h \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \theta \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2\alpha h \psi_3 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$N_x = \frac{h^3}{12} \left(\theta \varphi_1 + \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha} \psi_1 \right), \quad N_y = \frac{h^3}{12} \left(\theta \varphi_2 + \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha} \psi_2 \right)$$

Изгибающие и крутящие моменты от силовых напряжений

$$\begin{aligned} M_{xx} &= -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{h^2}{10(\mu + \alpha)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\varphi_1 + 2\alpha \psi_1) + \nu \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_2 + 2\alpha \psi_2) \right] \right\} \\ M_{yy} &= -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{h^2}{10(\mu + \alpha)} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\varphi_2 + 2\alpha \psi_2) + \nu \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_1 + 2\alpha \psi_1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$H_{xy} = -\frac{h^3}{12} \left\{ 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{h^2}{10} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\varphi_2 + 2\alpha \psi_2) + \theta \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_1 + 2\alpha \psi_1) \right] \right\}$$

$$H_{yx} = -\frac{h^3}{12} \left\{ 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{h^2}{10} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\varphi_1 + 2\alpha \psi_1) + \theta \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_2 + 2\alpha \psi_2) \right] \right\}$$

Суммарные крутящие-изгибающие моменты от моментных напряжений

$$\begin{aligned} P_{xx} &= 2\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{h^3}{12} \left[(2\gamma + \beta) \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \beta \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] \\ P_{yy} &= -2\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{h^3}{12} \left[(2\gamma + \beta) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \beta \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right] \\ R_{xy} &= -(\gamma + \varepsilon) h \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \eta \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

$$R_{11} = (\gamma + \varepsilon)h \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \eta \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \right] \quad (2.13)$$

$$Q_{12} = (\gamma + \varepsilon)h \frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \quad Q_{12} = (\gamma + \varepsilon)h \frac{\partial \psi_1}{\partial y}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$B = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Bh^3}{12}, \quad \theta = \frac{\mu - \alpha}{\mu + \alpha}, \quad \eta = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \quad (2.14)$$

где θ и η - новые безразмерные величины типа коэффициента Пуассона. Кстати, как показано в [6], диапазон изменения η : $-1 < \eta < 1$. Полагаем также, что θ - положительная величина, меньше или равно единице ($0 \leq \theta \leq 1$).

3. Осредняя уравнения движения (2.3) по толщине пластинки, после очевидных преобразований с учетом (1.1), (2.5)-(2.13), получим полную систему восьми дифференциальных уравнений относительно восьми искомых функций, с помощью которых определяются все расчетные величины задачи.

$$B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mu + \alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (B - \mu - \alpha) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2\alpha \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

$$B \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\mu + \alpha) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (B - \mu - \alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\alpha \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

$$2\alpha \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (\gamma + \varepsilon) \Delta \psi_1 - 4\alpha \psi_1 = J \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

$$- \frac{h^2}{12} \left[\theta \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) + \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) \right] - \quad (3.4)$$

$$- \frac{1}{h} (Z^+ + Z^-) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$B \frac{\partial}{\partial x} \Delta w - \frac{h^2}{10} \left\{ \Delta (\varphi_1 + 2\alpha \psi_1) + \left(\frac{B}{\mu + \alpha} - 1 \right) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\varphi_1 + 2\alpha \psi_1) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\varphi_2 + 2\alpha \psi_2) \right] \right\} + \varphi_1 = \rho \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \quad (3.5)$$

$$B \frac{\partial}{\partial y} \Delta w - \frac{h^2}{10} \left\{ \Delta (\varphi_2 + 2\alpha \psi_2) + \left(\frac{B}{\mu + \alpha} - 1 \right) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\varphi_2 + 2\alpha \psi_2) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\varphi_1 + 2\alpha \psi_1) \right] \right\} + \varphi_2 = \rho \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta w - \frac{h^2}{12} \left[\Delta \psi_1 + \left(\frac{\beta}{\gamma + \varepsilon} + \eta \right) \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} \right) + \frac{2\alpha(\varphi_1 - 2\mu\psi_1)}{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)} \right] = \frac{J}{\gamma + \varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{h^2}{12} \psi_1 \right) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \Delta w - \frac{h^2}{12} \left[\Delta \psi_2 + \left(\frac{\beta}{\gamma + \varepsilon} + \eta \right) \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \right) + \frac{2\alpha(\varphi_2 - 2\mu\psi_2)}{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)} \right] = \frac{J}{\gamma + \varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{h^2}{12} \psi_2 \right) \quad (3.8)$$

Рассматривая систему уравнений (3.1)-(3.8), замечаем, что первые три уравнения (3.1)-(3.3) отделяются, составляя полную систему относительно трех искоемых функций u, v, ψ_3 , представляя собой уравнения плоской задачи несимметричной теории упругости [1-3]. Остальные уравнения составляют полную систему относительно пяти искоемых функций $w, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ и описывают задачу изгиба пластинки по несимметричной теории упругости.

К этим уравнениям должны быть присоединены граничные условия на торцах пластинки и начальные условия.

Приведем некоторые граничные условия в случае изгиба пластинки для края $x = 0$

Свободный край: $M_{xx} = 0, N_{xx} = 0, R_{xy} = 0$

Заделанный край: $u_x|_{x=0} = 0, \omega_x|_{x=0} = 0, w = 0$

Шарнирно опертый край: $M_{xx} = 0, R_{xy} = 0, w = 0$

Здесь мы привели лишь осредненные граничные условия. Безусловно, возможны и другие варианты непротиворечащих граничных условий.

4. На основе предложенной здесь теории рассмотрим некоторые модельные задачи по изгибу пластинок.

а) Рассмотрим изгиб прямоугольной пластинки $(a \times b)$, шарнирно закрепленной по всему контуру, под действием распределенной нормальной нагрузки

$$Z^+ + Z^- = Z = q \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (4.1)$$

имеем следующую систему уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} (\mu - \alpha) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) + 4\mu\alpha \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) &= -\frac{12}{h^3} (\mu + \alpha) Z \\ B \frac{\partial}{\partial x} \Delta w - \frac{h^2}{10} \left\{ \Delta(\varphi_1 + 2\alpha\psi_1) + \left(\frac{B}{\mu + \alpha} - 1 \right) \times \right. \\ &\times \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\varphi_1 + 2\alpha\psi_1) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\varphi_2 + 2\alpha\psi_2) \right] \left. \right\} + \varphi_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B \frac{\partial}{\partial y} \Delta w - \frac{h^2}{10} \left\{ \Delta(\varphi_2 + 2\alpha\psi_2) + \left(\frac{B}{\mu + \alpha} - 1 \right) \times \right. \\
& \times \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\varphi_2 + 2\alpha\psi_2) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\varphi_1 + 2\alpha\psi_1) \right] \left. \right\} + \varphi_2 = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial x} \Delta w - \frac{h^2}{12} \left[\Delta\psi_1 + \left(\frac{\beta}{\gamma + \varepsilon} + \eta \right) \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\
& + \frac{2\alpha(\varphi_1 - 2\mu\psi_1)}{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)} \left. \right] = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial y} \Delta w - \frac{h^2}{12} \left[\Delta\psi_2 + \left(\frac{\beta}{\gamma + \varepsilon} + \eta \right) \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\
& + \frac{2\alpha(\varphi_2 - 2\mu\psi_2)}{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)} \left. \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

и граничные условия

$$\text{при } x = 0, x = a \quad w = 0, M_{xx} = 0, R_{xy} = 0$$

$$\text{при } y = 0, y = b \quad w = 0, M_{yy} = 0, R_{yx} = 0 \tag{4.3}$$

Решение системы (4.2) ищем в виде

$$\begin{aligned}
w &= w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\
\varphi_1 &= \Phi_1 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad \psi_1 = \Psi_1 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\
\varphi_2 &= \Phi_2 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}, \quad \psi_2 = \Psi_2 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

удовлетворяющее всем граничным условиям (4.3).

Подставив (4.4) в (4.2) и решив полученную систему, окончательно будем иметь

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \frac{b}{a} \Phi_2 = \frac{6ql^2}{\pi a h^3} \frac{2\alpha + (5\mu - 7\alpha)\delta\delta_1}{2\alpha(1 + 12\delta) + (5\mu + 7\alpha)\delta\delta_1} \\
\Psi_1 &= \frac{b}{a} \Psi_2 = \frac{6ql^2}{\pi a h^3 \mu} \frac{\alpha + 6\delta(\mu + \alpha + \mu\delta_1)}{2\alpha(1 + 12\delta) + (5\mu + 7\alpha)\delta\delta_1} \\
w_0 &= \frac{ql^4}{4\pi^4 D} \left\{ 1 + \delta_1 - \alpha\delta \frac{24 + \delta_1(26 + 7\delta_1)}{2\alpha(1 + 12\delta) + (5\mu + 7\alpha)\delta\delta_1} \right\}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$l^2 = \frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}, \quad \delta_1 = \frac{\pi^2 Bh^2}{5\mu l^2}, \quad \delta = \frac{\gamma + \varepsilon}{Bh^2} \tag{4.6}$$

в) Чистый изгиб пластинки-полосы ширины a , длинные стороны которой закреплены шарнирно и вдоль них действуют изгибающие моменты $M_{xx} = M_0$. Здесь все искомые величины не зависят от координаты y , отсутствует поперечная нагрузка ($Z = 0$) и $\varphi_2 = \psi_2 = 0$. Поэтому система уравнений равновесия (4.2) упрощается, принимая вид

$$(\mu - \alpha)\varphi' + 4\mu\alpha\psi' = 0$$

$$Bw''' - \frac{Bh^2}{10(\mu + \alpha)}(\varphi'' + 2\alpha\psi'') + \varphi = 0 \quad (4.7)$$

$$w''' - \frac{h^2}{12} \left[\psi'' + \frac{2\alpha}{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}(\varphi - 2\mu\psi) \right] = 0$$

Граничные условия здесь следующие:

$$\text{при } x = 0, x = a \quad M_x = M_0, R_x = 0, w = 0 \quad (4.8)$$

Интегрируя первое уравнение системы (4.7) и учитывая, что перерезывающая сила N_x (2.11) равна нулю, будем иметь

$$\varphi = -\frac{4\mu\alpha}{\mu - \alpha}\psi \quad (4.9)$$

Далее из последних двух уравнений системы (4.7) исключив w и учитывая (4.9), относительно ψ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\psi'' - \lambda^2\psi = 0, \quad \lambda^2 = \frac{2\alpha\mu(1 + 12\delta)}{Bh^2(5\mu + 7\alpha)\delta}, \quad \delta = \frac{\gamma + \alpha}{Bh^2} \quad (4.10)$$

Таким образом, имеем

$$\psi = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}, \quad \varphi = -\frac{4\mu\alpha}{\mu - \alpha}(C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}) \quad (4.11)$$

Подставляя значения φ и ψ во второе или третье уравнение системы (4.7), получим

$$w''' = \frac{\alpha}{\mu - \alpha} \left(\frac{4\mu}{B} - \frac{h^2\lambda^2}{5} \right) (C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}) \quad (4.12)$$

откуда

$$w = \frac{\alpha}{(\mu - \alpha)\lambda^3} \left(\frac{4\mu}{B} - \frac{h^2\lambda^2}{5} \right) (C_1 e^{\lambda x} - C_2 e^{-\lambda x}) + C_3 x^2 + C_4 x + C_5 \quad (4.13)$$

Удовлетворяя граничным условиям (4.8), для постоянных интегрирования получим

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{60M_0(\mu - \alpha)}{(5\mu + 7\alpha)(1 + e^{\lambda a})h^2\lambda D}, \quad C_2 = \frac{60M_0(\mu - \alpha)e^{\lambda a}}{(5\mu + 7\alpha)(1 + e^{\lambda a})h^2\lambda D} \\ C_3 &= -\frac{M_0}{2(1 + 12\delta)D}, \quad C_4 = \frac{M_0 a}{2(1 + 12\delta)D} \\ C_5 &= \frac{60M_0\alpha}{(5\mu + 7\alpha)h^2\lambda^4 D} \left(\frac{4\mu}{B} - \frac{h^2\lambda^2}{5} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Подставляя теперь (4.14) в (4.11) и (4.13), для искоемых функций будем иметь

$$\varphi = \frac{240M_0\mu\alpha}{(5\mu + 7\alpha)h^2\lambda D} \frac{\operatorname{sh}\lambda \left(x - \frac{a}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{\lambda a}{2}}$$

$$\psi = -\frac{60M_0(\mu - \alpha)}{(5\mu + 7\alpha)h^2\lambda D} \frac{\operatorname{sh}\lambda\left(x - \frac{a}{2}\right)}{\operatorname{ch}\frac{\lambda a}{2}} \quad (4.15)$$

$$w = \frac{M_0}{(1 + 12\delta)D} \left[\frac{3\delta B}{\lambda^2\mu} \left(\frac{4\mu}{B} - \frac{h^2\lambda^2}{5} \right) \left(1 - \frac{\operatorname{ch}\lambda\left(x - \frac{a}{2}\right)}{\operatorname{ch}\frac{\lambda a}{2}} \right) + \frac{1}{2}(ax^2 - x^2) \right]$$

Наибольший прогиб имеет место при $x = a/2$

$$w_{\max} = \frac{M_0 a^2}{8D} \left\{ 1 - \frac{12\delta}{1 + 12\delta} \times \right. \\ \left. \times \left[1 + \frac{2B}{5\mu} \left(1 - \frac{\delta}{\alpha} \frac{5\mu + 7\alpha}{1 + 12\delta} \right) \left(1 - \operatorname{sech}\frac{\lambda a}{2} \right) \frac{h^2}{a^2} \right] \right\} \quad (4.16)$$

с) Изгиб пластинки-полосы ширины a , длинные стороны которой закреплены шарнирно, находящейся под действием сил интенсивности P , распределенных вдоль линии $x = a/2$.

Здесь, как и в предыдущей задаче, уравнения равновесия представляются системой (4.7), а граничные условия следующие:

$$\text{при } x = 0, x = a \quad M_{xx} = 0, R_{xy} = 0, w = 0 \quad (4.17)$$

Для перерезывающей силы N_x имеем

$$N_x = \frac{h^3(\mu - \alpha)}{12(\mu + \alpha)} \left(\varphi + \frac{4\mu\alpha}{\mu - \alpha} \psi \right) = \begin{cases} P/2 & 0 \leq x < \frac{a}{2} \\ -P/2 & \frac{a}{2} < x \leq a \end{cases} \quad (4.18)$$

Поэтому придется рассмотреть участки $0 \leq x < a/2$ и $a/2 < x \leq a$ в отдельности.

Для участка $0 \leq x < a/2$, интегрируя первое уравнение системы (4.7) и учитывая (4.18), будем иметь

$$\varphi = \frac{6(\mu + \alpha)P}{(\mu - \alpha)h^3} - \frac{4\mu\alpha}{\mu - \alpha} \psi \quad (4.19)$$

Из последних двух уравнений системы (4.7), исключив w и учитывая (4.19), относительно ψ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\psi'' - \lambda^2 \psi = -\frac{5P}{Dh^2\delta} \frac{\alpha + 6(\mu + \alpha)\delta}{(5\mu + 7\alpha)} \quad (4.20)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\psi = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} + \frac{3P}{h^2\mu\alpha} \frac{\alpha + 6(\mu + \alpha)\delta}{1 + 12\delta} \quad (4.21)$$

В силу этого, из (4.19) будем иметь

$$\varphi = -\frac{4\mu\alpha}{\mu - \alpha} (C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}) + \frac{6P}{(1 + 12\delta)h^3} \quad (4.22)$$

Подставляя значения φ и ψ во второе или третье уравнение системы (4.7), получим

$$w'' = \frac{\alpha}{\mu - \alpha} \left(\frac{4\mu}{B} - \frac{h^2 \lambda^2}{5} \right) (C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}) - \frac{6P}{(1+12\delta)Bh^3}$$

откуда для w будем иметь

$$w = \frac{\alpha}{(\mu - \alpha)\lambda^3} \left(\frac{4\mu}{B} - \frac{h^2 \lambda^2}{5} \right) (C_1 e^{\lambda x} - C_2 e^{-\lambda x}) - \frac{Px^3}{(1+12\delta)Bh^3} + C_3 x^2 + C_4 x + C_5 \quad (4.23)$$

Здесь величины λ и δ определяются согласно (4.10).

Теперь аналогичные действия будем производить для участка $a/2 < x \leq a$ и здесь все искомые величины будем обозначать черточкой сверху. Опуская подробности, приведем окончательные результаты

$$\bar{\psi} = \bar{C}_1 e^{\lambda x} + \bar{C}_2 e^{-\lambda x} - \frac{3P}{h^3 \mu \alpha} \frac{\alpha + 6(\mu + \alpha)\delta}{1+12\delta}$$

$$\bar{\varphi} = -\frac{4\mu\alpha}{\mu - \alpha} (\bar{C}_1 e^{\lambda x} + \bar{C}_2 e^{-\lambda x}) - \frac{6P}{(1+12\delta)Bh^3} \quad (4.24)$$

$$\bar{w} = \frac{\alpha}{(\mu - \alpha)\lambda^3} \left(\frac{4\mu}{B} - \frac{h^2 \lambda^2}{5} \right) (\bar{C}_1 e^{\lambda x} - \bar{C}_2 e^{-\lambda x}) + \frac{Px^3}{(1+12\delta)Bh^3} + \bar{C}_3 x^2 + \bar{C}_4 x + \bar{C}_5$$

Таким образом, имеем десять постоянных интегрирования, для определения которых кроме указанных шести граничных условий (4.17) необходимо добавить также условия на контакте двух участков:

$$\text{при } x = \frac{a}{2} \quad M_{xx} = \bar{M}_{xx}, \quad w = \bar{w}, \quad w' = \bar{w}', \quad \omega|_{z=0} = \bar{\omega}|_{z=0} \quad (4.25)$$

Удовлетворяя всем граничным условиям, для постоянных интегрирования получаем

$$C_1 = C_2 = -\frac{3P}{2h^3 \mu \alpha} \frac{\alpha + 6(\mu + \alpha)\delta}{(1+12\delta)ch \frac{\lambda a}{2}}, \quad C_3 = C_5 = 0$$

$$C_4 = \frac{Pa^2}{16D(1+12\delta)} \left[1 - \frac{4B}{5\mu\alpha} \left(\frac{\alpha}{\mu - \alpha} - 5\delta \right) \frac{\alpha + 6(\mu + \alpha)\delta}{(1+12\delta)} \frac{h^2}{a^2} \right]$$

$$\bar{C}_1 = -C_1 e^{-\lambda a}, \quad \bar{C}_2 = -C_1 e^{\lambda a}, \quad \bar{C}_3 = -\frac{Pa}{4D(1+12\delta)}$$

$$\bar{C}_4 = \frac{Pa^2}{4D(1+12\delta)} - C_4, \quad \bar{C}_5 = aC_4 - \frac{Pa^3}{12D(1+12\delta)}$$

На основании этого можно определить все интересующие величины задачи. Здесь мы ограничимся приведением наибольшего значения прогиба, имеющего место при $x = a/2$

$$w_{\max} = \frac{Pa^3}{48D(1+12\delta)} \left[1 - \frac{6B}{5\mu\alpha} \left(\frac{\alpha}{\mu - \alpha} - 5\delta \right) \frac{\alpha + 6(\mu + \alpha)\delta}{1+12\delta} \left(1 - \frac{2th \frac{\lambda a}{2}}{\lambda a} \right) \frac{h^2}{a^2} \right] \quad (4.27)$$

5. Введем понятие

$$k^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{2B(1-\nu)} \left(\delta = 2(1-\nu) \frac{L^2}{h^2} \right)$$

квадрат характерного размера материала [6] и проанализируем влияния постоянного α и характерного размера L на прогиб квадратной пластинки ($l = b = a$).

Вычисления выполнены согласно третьей формуле (4.5).

Пусть $\frac{h}{a} = \frac{1}{10}$, $\nu = 0.3$, $\alpha = 0.02B$. Приводятся вычисления относи-

тельного прогиба центра пластинки, равного $w_0 \frac{4\pi^2 D}{qa^4}$, в случаях, когда

$L = 0.05\text{см}$, а $h = 0.02\text{см}$ и 0.05см .

В итоге, для относительных прогибов получаем 0.568 и 0.328 соответственно. Отсюда можно заключить, что при уменьшении абсолютной толщины пластинки увеличивается эффект учета моментных напряжений. Этот же эффект наблюдается и при меньших значениях характерного размера материала L . В частности, полагая $L = 0.01\text{см}$ (то есть в 5 раз меньше предыдущего случая) при абсолютных значениях $h = 0.2\text{см}$, 0.1см , 0.05см (относительную толщину пластинки оставляем неизменным, то есть $h/a = 0.1$ для относительного прогиба центра пластинки получаем 1.014, 0.908 и 0.664 соответственно.

Важно отметить также следующий факт, что при существенном изменении значения α прогиб центра пластинки изменяется незначительно (конечно, окрестность $\alpha = 0$ исключается). Пусть, например, $h = 0.05\text{см}$, $a = 0.5\text{см}$, $L = 0.01\text{см}$, а для α имеем $0.02B$ и $0.04B$ (т.е. увеличиваем α в два раза). В этих случаях для относительного прогиба центра пластинки получаем 0.670 и 0.686 соответственно.

Аналогичные результаты получаются и при анализе прогибов других решенных выше задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E. et F. Theorie des corps deformables. - Paris : Hermann, 1909.
2. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости// Прикладная математика и механика. - 1964, т. 28, вып. 3.
3. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1987.
5. Амбарцумян С.А. Теория поперечного изгиба пластин по несимметричной теории упругости// Механика композиционных материалов. - 1996, т. 32, №1.
6. Савин Г.Н. Основы плоской задачи моментной теории упругости. - Киев: Изд. Киевского ун-та, 1965.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
16.12.1996

КОЛЕБАНИЯ ТОКОНЕСУЩЕЙ ЛЕВИТИРУЮЩЕЙ ПЛАСТИНКИ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Варданян А. В.

Լ. Վ. Վարդանյան

Արտաքին մագնիսական դաշտում լողացող հոսանքակիր սալի տատանումները

Իարակ մարմինների մագնիսաառաճականության վարկածի հիման վրա ուսումնասիրվում է հոսանքակիր սալի մագնիսաառաճական տատանումները: Սալը գտնվում է արտաքին մագնիսական դաշտում, որը առաջանում է սալից որոշակի հեռավորության վրա գտնվող կիսատարածության մակերևույթով հոսող էլեկտրական հոսանքով:

Որոշված են գոգոված էլեկտրամագնիսական դաշտի բաղադրիչները: Ստացված է սալի մագնիսաառաճական տատանումների հաճախականությունների որոշման բնութագրիչ հավասարումը: Այդ հավասարումը ուսումնասիրված է տարբեր մասնավոր դեպքերում:

L.V. Vardanian

Vibration of current-carrying levitational plate in external magnetic field

В настоящей работе на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел [1] рассматриваются магнитоупругие колебания токонесущей пластинки в случае, когда внешнее магнитное поле создается при помощи электрического тока, протекающего по поверхности полупространства. Получено характеристическое уравнение относительно частоты магнитоупругих колебаний пластинки. Определены компоненты возмущенного электромагнитного поля. Рассмотрены одномерные колебания пластинки, когда пластинка находится вблизи полупространства и удалена от него.

1. Пусть упругая бесконечная пластинка постоянной толщины $2h$ находится на расстоянии l от поверхности полупространства. Пластинка служит проводником равномерно-распределенного электрического тока плотностью $\vec{j}_0 = \text{const}$.

Упругие и электромагнитные свойства материала пластинки характеризуются модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν , плотностью ρ , электропроводностью σ . Магнитная проницаемость пластинки, магнитная и диэлектрическая проницаемости среды, окружающей пластинку, принимаются равными единице. Токи смещения в пластинке пренебрегаются.

Декартова прямоугольная координатная система (x_1, x_2, x_3) выбирается так, чтобы плоскость $x_1 O x_2$ совпадала с срединной плоскостью пластинки, а ось $O x_1$ — с направлением электрического тока в пластинке. В выбранной координатной системе полупространство занимает область $x_3 \leq -l - h$. По границе $x_3 = -l - h$ полупространства протекает поверхностный электрический ток в направлении оси $O x_1$, с поверхностной плотностью $\vec{J}_1$.

Пластинка находится под действием магнитного поля $\vec{H}_0$. Магнитное поле $\vec{H}_0$ состоит из собственного магнитного поля, создаваемого электрическим током $\vec{j}_0$ в пластинке и из внешнего магнитного поля.

создаваемого поверхностным электрическим током $\vec{J}_1$.

Решая соответствующую задачу магнитостатики, найдем [1], [2].

$$H_{02} = \begin{cases} -\frac{2\pi}{c}(2hj_0 + j_1), & x_3 \geq h \\ -\frac{2\pi}{c}(2x_3j_0 + j_1), & |x_3| \leq h \\ \frac{2\pi}{c}(2hj_0 - j_1), & -h-l \leq x_3 \leq -h \end{cases} \quad (1.1)$$

Задача рассматривается в рамках линейной теории упругих пластин и гипотезы магнитоупругости тонких тел [3], [4], которая при указанных предположениях аналитически записывается следующим образом:

$$u_1 = u - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = V - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad u_3 = w(x_1, x_2, t) \quad (1.2)$$

$$e_1 = \varphi(x_1, x_2, t), \quad e_2 = \psi(x_1, x_2, t), \quad h_3 = f(x_1, x_2, t)$$

В (1.2) u_1, u_2, u_3 — компоненты вектора перемещения произвольной точки пластинки, u, V — тангенциальные перемещения точек срединной плоскости пластинки, w — нормальное перемещение, e_1, e_2 — тангенциальные компоненты вектора индуцированного электрического поля, h_3 — нормальная компонента вектора индуцированного магнитного поля в области, занимаемой пластинкой.

В области, занимаемой пластинкой, имеем уравнения электродинамики, в которых ток смещения пренебрегается по сравнению с током проводимости. Во внешней области имеем уравнения электродинамики для вакуума. Из уравнения электродинамики в области, занимаемой пластинкой, с учетом (1.1), (1.2) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial h_3}{\partial x_3} &= \frac{4\pi\sigma}{c} \left[\varphi + \frac{2\pi}{c^2}(2x_3j_0 + j_1) \frac{\partial w}{\partial t} \right], \quad \frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{4\pi\sigma}{c} \psi \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_2} &= \frac{4\pi\sigma}{c} \left[e_3 - \frac{2\pi}{c^2}(2x_3j_0 + j_1) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} \right) \right] \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial e_3}{\partial x_3} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho_e \end{aligned} \quad (1.3)$$

где ρ_e — плотность электрического заряда, ϵ — диэлектрическая проницаемость пластинки.

Компоненты h_1, h_2, e_3 индуцированного электромагнитного поля определяются из уравнений (1.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{h_1^+ + h_1^-}{2} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{4\pi\sigma}{c} \psi \right) x_3 \\ h_2 &= \frac{h_2^+ + h_2^-}{2} - \frac{8\pi^2\sigma}{c^3} j_0 \frac{\partial w}{\partial t} (x_3^2 - h^2) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\varphi + \frac{2\pi}{c^2} j_1 \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] x_3 \\ e_3 &= \frac{c}{4\pi\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2^+ + h_2^-}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1^+ + h_1^-}{2} \right) \right] - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{4\pi}{c^2} j_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} \right) x_3 - \end{aligned}$$

$$-\frac{2\pi}{c^2} J_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} (3x_3^2 - h^2) + \frac{2\pi}{c^2} (2x_3 j_0 + j_1) \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.4)$$

где $h_1^*, h_1^-, h_2^*, h_2^-$ - значения компонентов h_1, h_2 при $x_3 = \pm h$ соответственно.

Плотность электрического заряда определяется из последнего уравнения системы (1.3) с учетом (1.4) в виде

$$\rho_e = \frac{1}{c^2} \left[j_0 \frac{\partial u}{\partial t} - (3x_3 j_0 + j_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} \right] \quad (1.5)$$

Объемные силы электромагнитного происхождения с учетом (1.1), (1.2) и (1.5) определяются по формулам [3]

$$\begin{aligned} R_1^1 &= \frac{2\pi\sigma}{c^2} (2x_3 j_0 + j_1) \left[\epsilon_1 - \frac{2\pi}{c} (2x_3 j_0 + j_1) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} \right) \right] + \\ &+ \frac{j_0}{c^2 \sigma} \left[j_0 \frac{\partial u}{\partial t} - (3x_3 j_0 + j_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} \right], \quad R_2^1 = -\frac{j_0}{c} f \\ R_3^1 &= -\frac{2\pi\sigma}{c^2} (2x_3 j_0 + j_1) \left[\varphi + \frac{2\pi}{c} (2x_3 j_0 + j_1) \frac{\partial w}{\partial t} \right] + \frac{j_0}{c} h_2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Осредняя уравнения (1.3) путем интегрирования по x_3 в пределах $-h$ до h и присоединяя уравнения движения пластинки, с учетом (1.4), (1.6) получим следующую систему уравнений для определения функций $\varphi, \psi, f, u, V, w, h_1^*, h_1^-, h_2^*, h_2^-$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{4\pi\sigma}{c} \psi = \frac{h_1^* - h_1^-}{2h} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\varphi + \frac{2\pi}{c^2} j_1 \frac{\partial w}{\partial t} \right) &= \frac{h_2^* - h_2^-}{2h} \\ D\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{h}{c} j_0 (h_2^* + h_2^-) + \frac{j_0}{c} \frac{h^3}{3} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (h_2^* + h_2^-) - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (h_1^* + h_1^-) \right] - \\ &- \frac{4\pi\sigma h}{c^2} j_1 \left[\varphi + \frac{2\pi}{c^2} j_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial t} \right) + \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right] - \frac{2h^3}{\sigma c^2} j_0^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial t} + \\ &+ \frac{32\pi^2 \sigma h^5}{15c^4} j_0^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial t} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ &+ \frac{2\pi\sigma(1-\nu^2)}{c^2 E} \left\{ \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2^* + h_2^-}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1^* + h_1^-}{2} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) j_0 \frac{2h^3}{3} \right\} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\rho(1-\nu^2)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{2h}{c} j_0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\text{В (1.7) } D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Систему уравнений (1.7) необходимо решать совместно с уравнениями электродинамики для внешней области, окружающей

пластинку, при граничных условиях на поверхностях пластинки $x_3 = h, x_3 = -h$ и условий затухания на бесконечности ($x_3 \rightarrow +\infty$). Эти граничные условия согласно [5] имеют вид:

$$h_1 = h_1^{(e)}, \quad h_2 = h_2^{(e)} + \frac{4\pi}{c} j_0 w, \quad h_3 = h_3^{(e)}, \quad e_1 = e_1^{(e)}, \quad e_2 = e_2^{(e)} \quad (1.8)$$

Здесь $e = 1$ при $h \leq x_3, e = 2$ при $-l \leq x_3 \leq -h$. Полученная система уравнений не замкнута. Для замыкания этой системы принимаем, что значения компонентов $h_1^{(2)}, h_2^{(2)}$ индуцированного магнитного поля на поверхности полупространства $x_3 = -l - h$ равны нулю, то есть

$$h_1^{(2)}(-l - h) = 0, \quad h_2^{(2)}(-l - h) = 0 \quad (1.9)$$

2. Представим решения системы уравнений (1.7) и уравнений электродинамики для внешней области, окружающей пластинку, в виде плоских монохроматических волн

$$Q = Q_0 \exp(i\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2), \quad Q_0 = \text{const} \\ Q^{(e)} = Q_0^{(e)}(x_3) \exp(i\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2) \quad (2.1)$$

где $Q, Q^{(e)}$ — любая из искоемых функций, входящих в уравнения (1.7), и уравнения электродинамики для внешней области соответственно, ω — частота магнитоупругих колебаний, k_1, k_2 — волновые числа.

Подставляя (2.1) в систему уравнений (1.7) и уравнений электродинамики для внешней области, получим обыкновенные дифференциальные уравнения относительно $Q_0^{(e)}(x_3) (e = 1, 2)$. Решая эти уравнения и удовлетворяя граничным условиям (1.8), (1.9) и условию затухания на бесконечности ($x_3 \rightarrow +\infty$), получим систему алгебраических уравнений. Из условия равенства нулю детерминанта этой системы получим следующее характеристическое уравнение относительно частоты магнитоупругих колебаний пластинки:

$$D(k_1^2 + k_2^2)^2 - 2\rho h \omega^2 = \frac{8\pi h}{c^2} j_0^2 \left(1 - \frac{k_1^2 h^2}{3} + \frac{i\omega k_1^2 h^2}{4\pi\sigma} - \frac{4\pi\sigma i\omega k_1^2 h^4}{15c^2} \right) + \\ + \frac{8\pi^2 \sigma i\omega h j_1}{c^4 [8\pi\sigma h v_0 + i\omega(1 + \text{th} v_0 l)] [2h v_{12}^2 + v_0(1 + \text{th} v_0 l)]} \left\{ 2h(1 - \text{th} v_0 l) \times \right. \\ \times [2hk_1^2(4\pi\sigma - i\omega) - v_0(8\pi\sigma h v_0 + i\omega(1 + \text{th} v_0 l))] j_0 - \\ - 8\pi\sigma h k_2^2(2h v_0 + 1 + \text{th} v_0 l) j_1 + [2h v_{12}^2 + v_0(1 + \text{th} v_0 l)] \times \\ \times \left. \left[\frac{2k_1^2 h^3}{3} j_0(1 - \text{th} v_0 l) - \left(1 - \frac{k_1^2 h^2}{3} \right) j_1(1 + \text{th} v_0 l) \right] i\omega \right\} \quad (2.2)$$

$$\text{где } v_0^2 = k_1^2 + k_2^2 - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad v_{12}^2 = k_1^2 + k_2^2 + \frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}$$

Определяются и остальные искоемые величины. Приведем некоторые из них

$$f_0 = - \frac{16\pi^2 \sigma \omega h k_2 j_1 w_0}{c^3 [2h v_{12}^2 + v_0(1 + \text{th} v_0 l)]} \\ \varphi_0 = - \frac{16\pi^2 \sigma i\omega h [2h v_0 v_{11}^2 + v_{01}^2(1 + \text{th} v_0 l)] j_1 w_0}{c^2 [8\pi\sigma h v_0 + i\omega(1 + \text{th} v_0 l)] [2h v_{12}^2 + v_0(1 + \text{th} v_0 l)]}$$

$$h_{02} = \left[\frac{4\pi}{c} j_0 \left(1 - \frac{2\pi\sigma i\omega}{c^2} (x_3^2 - h^2) \right) + \frac{8\pi^2\sigma i\omega [2hk_1^2 (4\pi\sigma - i\omega) - v_0 (8\pi\sigma h v_0 + i\omega(1 + \text{th} v_0 l))] }{c^2 [8\pi\sigma v_0 h + i\omega(1 + \text{th} v_0 l)] [2h v_{12}^2 + v_0(1 + \text{th} v_0 l)]} \right] \times [x_3(1 + \text{th} v_0 l) + h(1 - \text{th} v_0 l)] w_0 \quad (2.3)$$

$$\text{где } v_{01}^2 = k_1^2 - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad v_{11}^2 = k_1^2 + \frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}$$

3. Рассмотрим задачу в случае, когда упругие и электромагнитные возмущения не зависят от координаты x_2 ($k_2 \equiv 0$). Тогда характеристическое уравнение (2.2) имеет вид:

$$Dk_1^4 - 2\rho h\omega^2 = \frac{8\pi h}{c^2} j_0^2 \left(1 - \frac{k_1^2 h^2}{3} + \frac{i\omega k_1^2 h^2}{4\pi\sigma} - \frac{4\pi\sigma i\omega k_1^2 h^4}{15c^2} \right) + \left(1 - \frac{k_1^2 h^2}{3} \right) \frac{8\pi^2\sigma\omega^2 h j_1 [j_1(1 + \text{th} v_{01} l) + 2h j_0(1 - \text{th} v_{01} l)]}{c^4 [8\pi\sigma h v_{01} + i\omega(1 + \text{th} v_0 l)]} \quad (3.1)$$

Здесь рассмотрим частные случаи.

а) Пусть расстояние пластинки от полупространства стремится к бесконечности, то есть $l \rightarrow +\infty$

Пренебрегаем в выражении для v_{01} членом ω^2/c^2 по сравнению с k_1^2 и принимаем допущения, имеющие место в теории магнитоупругости тонких тел:

$$k_1^2 h^2 \ll 1, \quad |i\omega| \ll 4\pi\sigma h k_1 \quad (3.2)$$

Тогда характеристическое уравнение (3.1) в силу (3.2) можно представить в следующем безразмерном виде:

$$\left(1 + \frac{\pi j_1^2}{\rho h c^4 k_1} \right) \Omega^2 + 1 - \frac{4\pi j_0^2}{\rho c^2 \Omega_0^2} = 0$$

$$\text{где } \Omega_0^2 = \frac{Dk_1^4}{2\rho h}, \quad \Omega = \frac{i\omega}{\Omega_0} \quad (3.3)$$

Из уравнения (3.3) следует, что частота упругих колебаний пластинки определяется по формуле

$$i_\omega \Omega = \frac{c}{\Omega_0} \sqrt{\frac{h k_1 (\rho c^2 \Omega_0^2 - 4\pi j_1^2)}{\rho h c^4 k_1 + \pi j_1^2}} \quad (3.4)$$

$$\text{если } f_0 < \frac{c\Omega_0}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\pi}} \quad (3.5)$$

б) Расстояние пластинки от полупространства стремится к нулю, то есть $l \rightarrow 0$, тогда характеристическое уравнение (3.1) в силу (3.2) представляется в следующем безразмерном виде:

$$\left(1 + \frac{\pi j_1 (j_1 + 2h j_0)}{2\rho h c^4 k_1} \right) \Omega_1^2 + 1 - \frac{4\pi j_1^2}{\rho c^2 \Omega_0^2} = 0 \quad (3.6)$$

$$\text{где } \Omega_1 = \frac{i\omega}{\Omega_0}$$

В силу (3.5) решение уравнения (3.6) представляется формулой

$$I_m \Omega_1 = \frac{c}{\Omega_0} \sqrt{\frac{hk_1(\rho c^2 \Omega_0^2 - 4\pi j_0^2)}{\rho h c^4 k_1 + \pi j_1(j_1 + 2hj_0)}} \quad (3.7)$$

Сравнение решений (3.4) и (3.7) характеристических уравнений (3.3) и (3.6) показывает, что

$$I_m \Omega_1 = \sqrt{2} I_m \Omega \quad (3.8)$$

если имеет место условие

$$j_1 \gg 2hj_0 \quad (3.9)$$

4. Колебания не зависят от координаты x_1 ($k_1 \equiv 0$). Тогда характеристическое уравнение (2.2) принимает вид:

$$Dk_2^4 - 2\rho h \omega^2 = \frac{8\pi h}{c^2} j_0^2 - \frac{8\pi^2 \sigma i \omega h j_1 [2h v_{02} j_0 (1 - \text{th} v_{02} l) + (2hk_2^2 + v_{02} (1 + \text{th} v_{02} l)) j_1]}{c^4 [2h v_{22}^2 + v_{02} (1 + \text{th} v_{02} l)]} \quad (4.1)$$

$$\text{В (4.1) } v_{02}^2 = k_2^2 - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad v_{22}^2 = k_2^2 + \frac{4\pi \sigma i \omega}{c^2}$$

Рассмотрим частные случаи.

а) Расстояние пластинки от полупространства стремится к бесконечности, то есть $l \rightarrow +\infty$, и пренебрегая в выражении для v_{02} членом ω^2/c^2 по сравнению с k_2^2 , характеристическое уравнение представляется в следующем безразмерном виде:

$$\theta^3 + a_0 \theta^2 + (1 - j_0^2/j_*^2 + a_1) \theta + a_0 (1 - j_0^2/j_*^2) = 0 \quad (4.2)$$

Здесь $j_* = \frac{c \Omega_0}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\pi}}$ — критическая плотность тока, получаемая при статическом подходе

$$\theta = \frac{i\omega}{\Omega_0}, \quad a_0 = \frac{k_2(1 + k_2 h) c^2}{4\pi \sigma h \Omega_0}, \quad a_1 = \frac{\pi k_2(1 + h k_2) j_1^2}{\rho h c \Omega_0^2}$$

Уравнение (4.2) совпадает с уравнением, полученным в [5]. Согласно [5] выражение для критической плотности электрического тока в пластинке при динамическом подходе имеет вид:

$$j_{**} = j_* \sqrt{1 + \frac{3\pi(1 - v^2)(1 + k_2 h) j_1^2}{E(h k_2)^3}} \quad (4.3)$$

Формула (4.3) показывает, что протекающий по границе полупространства электрический ток j_1 приводит к увеличению критической плотности тока в пластинке. Указанное влияние существенно зависит от относительной толщины пластинки, то есть величины $k_2 h$.

б) Пусть расстояние пластинки от полупространства стремится к нулю, то есть $l \rightarrow 0$, тогда характеристическое уравнение (4.1) приводится к безразмерному виду:

$$\theta^3 + b_0 \theta^2 + \left(1 - j_0^2/j_*^2 + \frac{k_2 j_0 j_1}{4 j_*^2} + b_1\right) \theta + b_0 (1 - j_0^2/j_*^2) = 0 \quad (4.4)$$

$$\text{Здесь } b_0 = \frac{k_2(1 + 2h k_2) c^2}{8\pi \sigma h \Omega_0}, \quad b_1 = \frac{\pi k_2(1 + 2h k_2) j_1^2}{2\rho h c^2 \Omega_0^2}$$

Как в предыдущем случае, легко убедиться, что для критической плотности электрического тока в пластинке при динамическом подходе

можно получить следующее выражение:

$$j_{..}^1 = j_{..} \left[\frac{k_2 j_1}{8 j_{..}} + \sqrt{\frac{k_2 j_1^2}{64 j_{..}^2} + 1 + \frac{3\pi(1-\nu^2)(1+2hk_2)j_1^2}{2E(hk_2)^3}} \right] \quad (4.5)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.-М.: Наука, 1977. 272 с.
2. Белубекян М.В. Магнитоупругие поверхностные волны в полупространстве с поверхностным электрическим током.-Изв. АН Арм ССР, Механика, 1990, т.43, №1, с.3-8.
3. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки.-ПММ, 1971, т.35, вып. 2.
4. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. К магнитоупругости тонких оболочек и пластин.-ПММ, 1973, т.37, вып 1.
5. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Колебания и устойчивость токонесущих упругих пластин.-Ереван: Изд. АН Армении, 1992. 124 с.

Армпединститут им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию
14.05.1997

УДК 539.3:534.1

ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ Я СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ РАЗРЕЗАМИ Мелкумян С.А.

Ս.Ա Մելքումյան

Կիսաանվերջ ճեղքերով բուլացված քաղաղդյալ հարրություն
էլեկտրաառաձգականության խնդիրը

Աշխատանքում դիտարկվում է կիսաանվերջ ճեղքերով բուլացված քաղաղդյալ հարրություն էլեկտրաառաձգականության համաչափ խնդիրը: Հարրությունը քաղաղացած է երկու կիսահարրությունից, որոնցից մեկը նախնական բեռնացված պիեզոկերամիկա է, իսկ մյուսը՝ օրոտոպալ հաղորդիչ: Շնորհիվ է, որ պիեզոկերամիկայի նախնական բեռնացման ուղղությանը ուղղահայաց է կիսահարրությունների լիվ կոնտակտի գծին, որի ուղղությամբ հարրությունը բուլացված է երկու կիսաանվերջ ճեղքերով: Ենթադրվում է, որ ճեղքերի անիերն համաչափ կերպով ազդում են քաղաղդյալ ինտեգրելի արտաքին նորմալ լարումներ: Դիտարկվում է հարր ղեկորմացիոն վիճակ:

Օգտվելով զույգ ինտեգրալ հավասարումների մեթոդից, խնդիր լուծված է ճշգրիտ, փակ տեսքով:

S.A. Melkumyan

A Problem of Electrical Elasticity for a Composite Plane with a Semi-Infinite Cracks

Рассматривается симметричная плоская задача электроупругости для составной плоскости с полубесконечными разрезами. Плоскость состоит из двух полуплоскостей, одна из которых представляет предварительно поляризованную упругую пьезокерамику, а другая — упругий ортотропный проводник. Принимается, что направление предварительной поляризации пьезокерамики перпендикулярно к линии сцепления полуплоскостей. Предполагается, что на линии сцепления полуплоскостей плоскость имеет два полубесконечных разреза, на берегах которых симметрично действует обсолютно интегрируемые нормальные нагрузки. Рассматривается плоское деформированное состояние.

Используя метод парных интегральных уравнений, задача решена точно в замкнутом виде.

Рассматривается симметричная плоская задача электроупругости для составной плоскости с полубесконечными разрезами ($z = 0, |x| > a$). Плоскость состоит из двух полуплоскостей, одна из которых представляет предварительно поляризованную упругую пьезокерамику ($z > 0, |x| < \infty$),

ортотроп-проводник



Ֆիգ. 1

а другая — упругий ортотропный проводник ($z < 0, |x| < \infty$), которые жестко сцепляются друг с другом на конечном участке ($|x| \leq a$). Принимается, что направление предварительной поляризации пьезокерамики перпендикулярно к линии контакта полуплоскостей ($z = 0$). Главные направления анизотропии ортотропного материала совпадают с направлениями координатных осей.

Предполагается, что на берегах

разрезов ($z = 0, |x| > a$) действуют симметрично распределенные абсолютно интегрируемые нормальные нагрузки (фиг.1).

Рассматривается плоское деформированное состояние

$$(U_y = 0, U_x = U_x(x, z), U_z = U_z(x, z))$$

Используя метод парных интегральных уравнений, задача решена точно в замкнутом виде.

Для решения задачи за основные неизвестные принимаем упругие перемещения ($U_x(x, z), U_z(x, z)$) и электростатический потенциал ($\Psi(x, z)$). Условия существования плоской задачи пьезоэлектрической среды рассмотрены в работах [1,2], а для ортотропного материала — в [3].

Система уравнений равновесия при плоской деформации пьезокерамической среды совпадает с системой уравнений (3.15)-(3.17) в книге [2].

Все величины, которые принадлежат к пьезокерамической полуплоскости ($z > 0, |x| < \infty$), будем писать с индексом один, а для упругого ортотропного проводника ($z < 0, |x| < \infty$) — с индексом два.

Имея в виду симметричность задачи относительно оси oz , решение ее ищем в виде интегралов Фурье:

$$c_{11}^E u_x^{(1)}(x, z) = \int_0^\infty \bar{U}^{(1)}(\alpha, z) \sin \alpha x d\alpha, \quad c_{44}^E u_z^{(1)}(x, z) = \int_0^\infty \alpha \bar{W}^{(1)}(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha$$

$$e_{15} \Psi(x, z) = - \int_0^\infty \alpha \bar{\Psi}(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha, \quad (|x| < \infty, 0 < z < \infty) \quad (1)$$

$$A_{44} u_x^{(2)}(x, z) = \int_0^\infty \alpha \bar{U}^{(2)}(\alpha, z) \sin \alpha x d\alpha, \quad A_{11} u_z^{(2)}(x, z) = \int_0^\infty \alpha \bar{W}^{(2)}(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha \quad (2)$$

$$(|x| < \infty, -\infty < z < 0)$$

Затухающие в бесконечности неизвестные плотности интегралов Фурье (1), (2) представляются в виде [4]:

$$\bar{U}^{(1)}(\alpha, z) = \sum_{k=1}^3 t_k \Delta_1(t_k) A_k(\alpha) e^{-\alpha t_k z}, \quad \bar{W}^{(1)}(\alpha, z) = \sum_{k=1}^3 \Delta_2(t_k) A_k(\alpha) e^{-\alpha t_k z}$$

$$\bar{\Psi}(\alpha, z) = \sum_{k=1}^3 \Delta_3(t_k) A_k(\alpha) e^{-\alpha t_k z}, \quad (z > 0) \quad (3)$$

$$\bar{U}^{(2)}(\alpha, z) = \sum_{n=1}^2 \Delta_5(\xi_n) C_n(\alpha) e^{\alpha \xi_n z}, \quad \bar{W}^{(2)}(\alpha, z) = \sum_{n=1}^2 \Delta_4(\xi_n) C_n(\alpha) e^{\alpha \xi_n z}, \quad (z < 0)$$

Определение $\Delta_1(t_k), \Delta_2(t_k), \Delta_3(t_k)$ и t_k дано в работе [4], а $\Delta_4(\xi_n), \Delta_5(\xi_n)$ и ξ_n — в [5].

Пользуясь (1), (2), (3) и уравнением электроупругости в декартовых координатах [6], а также основными соотношениями теории упругости для ортотропного материала [3], можно все компоненты сопряженного электроупругого и упругого полей выразить соответственно через неизвестные функции интегрирования $A_k(\alpha)$ и $C_n(\alpha)$:

$$\sigma_x^{(1)}(x, z) = \int_0^\infty \alpha^2 \bar{\sigma}_x^{(1)}(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha, \quad \sigma_z^{(1)}(x, z) = \int_0^\infty \alpha^2 \bar{\sigma}_z^{(1)}(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha$$

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^{(1)}(x, z) &= - \int_0^{\infty} \alpha^2 \bar{\tau}_{xz}^{(1)}(\alpha, z) \sin \alpha x d\alpha, \quad c_{11}^E D_x(x, z) = -e_{15} \int_0^{\infty} \alpha^2 \bar{D}_x(\alpha, z) \sin \alpha x d\alpha \\ c_{11}^E D_z(x, z) &= e_{15} \int_0^{\infty} \alpha^2 \bar{D}_z(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha, \quad e_{15} E_x(x, z) = - \int_0^{\infty} \alpha^2 \bar{E}_x(\alpha, z) \sin \alpha x d\alpha \\ e_{15} E_z(x, z) &= - \int_0^{\infty} \alpha^2 \bar{E}_z(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha, \quad (|x| < \infty, 0 < z < \infty)\end{aligned}\quad (4)$$

$$\begin{aligned}\text{и } \sigma_x^{(2)}(x, z) &= \int_0^{\infty} \alpha^2 \bar{\sigma}_x^{(2)}(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha, \quad \sigma_z^{(2)}(x, z) = \int_0^{\infty} \alpha^2 \bar{\sigma}_z^{(2)}(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha \\ \tau_{xz}^{(2)}(x, z) &= \int_0^{\infty} \alpha^2 \bar{\tau}_{xz}^{(2)}(\alpha, z) \sin \alpha x d\alpha, \quad (|x| < \infty, -\infty < z < 0)\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}\text{где } \bar{\sigma}_x^{(1)}(\alpha, z) &= \sum_{k=1}^3 t_k \left[\Delta_1(t_k) - \frac{c_{13}^E}{c_{44}^E} \Delta_2(t_k) + \frac{e_{31}}{e_{15}} \Delta_3(t_k) \right] A_k(\alpha) e^{-\alpha t_k z} \\ \bar{\sigma}_z^{(1)}(\alpha, z) &= \sum_{k=1}^3 t_k \left[\frac{c_{13}^E}{c_{11}^E} \Delta_1(t_k) - \frac{c_{33}^E}{c_{44}^E} \Delta_2(t_k) + \frac{e_{33}}{e_{15}} \Delta_3(t_k) \right] A_k(\alpha) e^{-\alpha t_k z} \\ \bar{\tau}_{xz}^{(1)}(\alpha, z) &= \sum_{k=1}^3 \left[\frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} \Delta_1(t_k) t_k^2 + \Delta_2(t_k) - \Delta_3(t_k) \right] A_k(\alpha) e^{-\alpha t_k z} \\ \bar{D}_x(\alpha, z) &= \sum_{k=1}^3 \left[\Delta_1(t_k) t_k^2 + \frac{c_{11}^E}{c_{44}^E} \Delta_2(t_k) + \frac{c_{11}^E \epsilon_{33}^S}{e_{15}^2 e_{15}} \Delta_3(t_k) \right] A_k(\alpha) e^{-\alpha t_k z} \\ \bar{D}_z(\alpha, z) &= \sum_{k=1}^3 t_k \left[\frac{e_{31}}{e_{15}} \Delta_1(t_k) - \frac{c_{11}^E e_{33}}{c_{44}^E e_{15}} \Delta_2(t_k) - \frac{c_{11}^E \epsilon_{33}^S}{e_{15} e_{15}} \Delta_3(t_k) \right] A_k(\alpha) e^{-\alpha t_k z} \\ \bar{E}_x(\alpha, z) &= \sum_{k=1}^3 \Delta_3(t_k) A_k(\alpha) e^{-\alpha t_k z}, \quad \bar{E}_z(\alpha, z) = \sum_{k=1}^3 t_k \Delta_3(t_k) A_k(\alpha) e^{-\alpha t_k z}, \quad (z > 0)\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}\text{и } \bar{\sigma}_x^{(2)}(\alpha, z) &= \sum_{n=1}^2 \left[\frac{A_{13}}{A_{11}} \frac{\Delta_4(\xi_n)}{\xi_n} + \frac{A_{15}}{A_{44}} \Delta_5(\xi_n) \right] C_n(\alpha) e^{\alpha z \xi_n^{-1}} \\ \bar{\sigma}_z^{(2)}(\alpha, z) &= \sum_{n=1}^2 \left[\frac{\Delta_4(\xi_n)}{\xi_n} + \frac{A_{13}}{A_{44}} \Delta_5(\xi_n) \right] C_n(\alpha) e^{\alpha z \xi_n^{-1}} \\ \bar{\tau}_{xz}^{(2)}(\alpha, z) &= \sum_{n=1}^2 \left[\frac{\Delta_5(\xi_n)}{\xi_n} - \frac{A_{44}}{A_{11}} \Delta_4(\xi_n) \right] C_n(\alpha) e^{\alpha z \xi_n^{-1}}, \quad (z < 0)\end{aligned}\quad (7)$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ — компоненты тензора механических напряжений; D_x, D_z — компоненты вектора электрической индукции; E_x, E_z — компоненты вектора напряженности электрического поля; $c_{11}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$ — модули упругости пьезокерамики при нулевом электрическом поле; e_{31}, e_{15}, e_{33} — пьезомодули; $\epsilon_{11}^S, \epsilon_{33}^S$ — диэлектрические проницаемости при нулевой деформации; $A_{11}, A_{13}, A_{33}, A_{44}$ — модули упругости ортотропного проводника; $A_k(\alpha)$ и $C_n(\alpha)$ — произвольные функции интегрирования, которые нужно определить из граничных условий [6]:

$$\Psi(x, 0) = 0 \quad (0 < x < \infty) \quad (8)$$

$$\tau_{xx}^{(1)}(x,0) = \tau_{xx}^{(2)}(x,0) = 0, \quad \sigma_z^{(1)}(x,0) = \sigma_z^{(2)}(x,0) = f(x) \quad (a < x < \infty) \quad (9)$$

и условия полного контакта полуплоскостей:

$$\tau_{xx}^{(1)}(x,0) = \tau_{xx}^{(2)}(x,0), \quad \sigma_z^{(1)}(x,0) = \sigma_z^{(2)}(x,0), \quad (0 < x < a) \quad (10)$$

$$u_x^{(1)}(x,0) = u_x^{(2)}(x,0), \quad u_z^{(1)}(x,0) = u_z^{(2)}(x,0), \quad (0 \leq x \leq a) \quad (11)$$

Из (9) и (10) вытекают условия

$$\tau_{xx}^{(1)}(x,0) = \tau_{xx}^{(2)}(x,0), \quad \sigma_z^{(1)}(x,0) = \sigma_z^{(2)}(x,0), \quad (0 < x < \infty) \quad (12)$$

Условия симметрии задачи удовлетворяются тождественно, а из условия (8) имеем:

$$A_k(\alpha) = a_k A_1(\alpha) + b_k A_2(\alpha) \quad (13)$$

где

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 \cdot \Delta_3(t_3) = -\Delta_3(t_1), \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 \cdot \Delta_3(t_3) = -\Delta_3(t_2) \quad (14)$$

Имея в виду (13), удовлетворяя условиям (12), получаем:

$$d_{11}A_1(\alpha) + d_{12}A_2(\alpha) + b_{11}C_1(\alpha) + b_{12}C_2(\alpha) = 0 \quad (15)$$

$$d_{21}A_1(\alpha) + d_{22}A_2(\alpha) - b_{21}C_1(\alpha) - b_{22}C_2(\alpha) = 0$$

Имея в виду (13), удовлетворяя условиям (9) и (11), получаем следующую систему из двух парных интегральных уравнений:

$$\int_0^x \alpha \left[d_{31}A_1(\alpha) + d_{32}A_2(\alpha) - \frac{\Delta_4(\xi_1)}{A_{11}}C_1(\alpha) - \frac{\Delta_4(\xi_2)}{A_{11}}C_2(\alpha) \right] \cos \alpha x d\alpha = 0 \quad (0 \leq x \leq a) \quad (16)$$

$$\int_0^x \alpha \left[d_{41}A_1(\alpha) + d_{42}A_2(\alpha) - \frac{\Delta_5(\xi_1)}{A_{44}}C_1(\alpha) - \frac{\Delta_5(\xi_2)}{A_{44}}C_2(\alpha) \right] \sin \alpha x d\alpha = 0$$

$$\int_0^\infty \alpha^2 [d_{11}A_1(\alpha) + d_{12}A_2(\alpha)] \sin \alpha x d\alpha = 0 \quad (17)$$

$$\int_0^\infty \alpha^2 [d_{21}A_1(\alpha) + d_{22}A_2(\alpha)] \cos \alpha x d\alpha = f(x), \quad (a < x < \infty)$$

$$\begin{cases} d_{11} \\ d_{12} \end{cases} = \sum_{k=1}^3 a_{1k} \begin{cases} a_k \\ b_k \end{cases}; \quad \begin{cases} d_{21} \\ d_{22} \end{cases} = \sum_{k=1}^3 a_{2k} \begin{cases} a_k \\ b_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{31} \\ d_{32} \end{cases} = \frac{1}{c_{44}^E} \sum_{k=1}^3 \Delta_2 t_k \begin{cases} a_k \\ b_k \end{cases}; \quad \begin{cases} d_{41} \\ d_{42} \end{cases} = \frac{1}{c_{11}^E} \sum_{k=1}^3 t_k \Delta_1(t_k) \begin{cases} a_k \\ b_k \end{cases} \quad (18)$$

$$a_{1k} = \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} \Delta_1(t_k)^2 + \Delta_2(t_k) - \Delta_3(t_k)$$

$$a_{2k} = t_k \left[\frac{c_{13}^E}{c_{11}^E} \Delta_1(t_k) - \frac{c_{33}^E}{c_{44}^E} \Delta_2(t_k) + \frac{e_{33}}{e_{15}} \Delta_3(t_k) \right]$$

$$b_{1m} = -\frac{A_{44}}{A_{11}} \Delta_4(\xi_m) - \frac{\Delta_5(\xi_m)}{\xi_m}; \quad b_{2m} = \frac{\Delta_4(\xi_m)}{\xi_m} + \frac{A_{13}}{A_{44}} \Delta_5(\xi_m), \quad (k=1,2,3; m=1,2)$$

Из (15) имеем:

$$C_1(\alpha) = d_{51}A_1(\alpha) + d_{52}A_2(\alpha), \quad C_2(\alpha) = d_{61}A_1(\alpha) + d_{62}A_2(\alpha) \quad (19)$$

где

$$\delta_0 d_{51} = d_{11}b_{22} + d_{21}b_{12}, \quad \delta_0 d_{52} = d_{12}b_{22} + d_{22}b_{12}, \quad \delta_0 = b_{12}b_{21} + b_{11}b_{22},$$

$$-\delta_0 d_{61} = b_{11}d_{21} + b_{21}d_{11}, \quad -\delta_0 d_{62} = b_{11}d_{22} + b_{21}d_{12} \quad (20)$$

Подставляя (19) в (16), получаем:

$$\int_0^a \alpha [m_{11} A_1(\alpha) + m_{12} A_2(\alpha)] \sin \alpha x d\alpha = 0$$

$$\int_0^a \alpha [m_{21} A_1(\alpha) + m_{22} A_2(\alpha)] \cos \alpha x d\alpha = 0 \quad (0 < x \leq a)$$
(21)

здесь

$$m_{11} = d_{41} - \frac{\Delta_3(\xi_1)}{A_{44}} d_{51} - \frac{\Delta_3(\xi_2)}{A_{44}} d_{61}, \quad m_{12} = d_{42} - \frac{\Delta_3(\xi_1)}{A_{44}} d_{52} - \frac{\Delta_3(\xi_2)}{A_{44}} d_{62}$$

$$m_{21} = d_{31} - \frac{\Delta_4(\xi_1)}{A_{11}} d_{51} - \frac{\Delta_4(\xi_2)}{A_{11}} d_{62}, \quad m_{22} = d_{32} - \frac{\Delta_4(\xi_1)}{A_{11}} d_{52} - \frac{\Delta_4(\xi_2)}{A_{11}} d_{62} \quad (22)$$

Решение задачи сведено к решению системы парных интегральных уравнений (21), (17). Одним из методов решения систем парных интегральных уравнений (21), (17) является введение неизвестных касательных ($\tau_x(x,0) = S(x)$), нормальных ($\sigma_x(x,0) = H(x)$) напряжений в зоне полного контакта ($0 < x < a$) квадрантов. После этого (17) допускает обратное преобразование Фурье:

$$d_{11} A_1(\alpha) + d_{12} A_2(\alpha) = \frac{2}{\pi \alpha^2} \int_0^a S(x) \sin \alpha x dx$$

$$d_{21} A_1(\alpha) + d_{22} A_2(\alpha) = \frac{2}{\pi \alpha^2} \int_0^a H(x) \cos \alpha x dx + \frac{2}{\pi \alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx \quad (23)$$

Подставим теперь $A_1(\alpha)$ и $A_2(\alpha)$ из (23) в (21), далее продифференцируем по x и воспользуемся известными соотношениями для дельта-функции Дирака [2]

$$\int_0^a \cos \alpha t \cos \alpha x dx = \frac{\pi \delta(t-x)}{2}, \quad \int_0^a \sin \alpha t \sin \alpha x dx = \frac{\pi \delta(t-x)}{2}$$

$$\int_0^a \sin \alpha t \cos \alpha x dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) \quad (24)$$

получаем следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{g_{11}}{\pi} \int_0^a S(t) \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) dt + g_{12} H(x) = 0$$

$$\frac{g_{22}}{\pi} \int_0^a H(t) \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) dt + g_{21} S(x) = f_1(x) \quad (0 < x < a) \quad (25)$$

где

$$g_{11} = m_{11} P_{11} + m_{12} P_{21}, \quad -g_{12} = m_{11} P_{12} + m_{12} P_{22}$$

$$g_{21} = m_{21} P_{11} + m_{22} P_{21}, \quad -g_{22} = m_{21} P_{12} + m_{22} P_{22}$$

$$\delta_1 \begin{Bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_{22} \\ d_{12} \end{Bmatrix}, \quad \delta_1 \begin{Bmatrix} P_{21} \\ P_{22} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} d_{21} \\ d_{11} \end{Bmatrix}, \quad \delta_1 = d_{11} d_{22} - d_{21} d_{12} \quad (26)$$

$$f_1(x) = - \frac{g_{22}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{1}{x+t} \right) f(t) dt$$

Продолжая $S(x)$ нечетно, а $H(x)$ четно на интервале $-a < x < 0$, систему (25) можно привести к виду:

$$\chi(x) + \frac{g}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\chi(t)}{t-x} dt = f^*(x) \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \chi(x) &= H(x) + iS_1(x), \quad S_1(x) = g_1 S(x), \quad f^*(x) = i\varphi(x) \\ \varphi(x) &= \frac{g_1 f_1(x)}{g_{21}}, \quad g_1 = \sqrt{\frac{g_{11}g_{21}}{g_{12}g_{22}}}, \quad g = \frac{g_{22}g_{11}}{g_{21}}, \quad (i)^2 = -1 \end{aligned} \quad (28)$$

Решая (27) в замкнутом виде [7,8], разделяя вещественные и мнимые части, получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_z(x,0) &= H(x) = \frac{c}{\sqrt{a^2-x^2}} \cos \gamma \ln \frac{a+x}{a-x} - \\ &- \frac{g}{\pi(1-g^2)\sqrt{a^2-x^2}} \sin \gamma \ln \frac{a+x}{a-x} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-x} \sin \gamma \ln \frac{a+t}{a-t} \varphi(t) dt - \\ &- \frac{g}{\pi(1-g^2)\sqrt{a^2-x^2}} \cos \gamma \ln \frac{a+x}{a-x} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-x} \cos \gamma \ln \frac{a+t}{a-t} \varphi(t) dt \\ \tau_{zx}(x,0) &= S(x) = \frac{\varphi(x)}{g_1(1-g^2)} - \frac{c}{\sqrt{a^2-x^2}} \sin \gamma \ln \frac{a+x}{a-x} + \\ &+ \frac{g}{\pi(1-g^2)g_1\sqrt{a^2-x^2}} \sin \gamma \ln \frac{a+x}{a-x} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-x} \cos \gamma \ln \frac{a+t}{a-t} \varphi(t) dt - \\ &- \frac{g}{\pi(1-g^2)g_1\sqrt{a^2-x^2}} \cos \gamma \ln \frac{a+x}{a-x} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-x} \sin \gamma \ln \frac{a+t}{a-t} \varphi(t) dt \quad (0 < x < a) \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{g+1}{g-1} \quad (30)$$

Входящая в (29) постоянная „C“ определяется из условия

$$\int_{-a}^a \sigma_z(x,0) dx = F \quad (31)$$

$$\text{где } F = 2 \int_{-a}^a f(x) dx \quad (32)$$

Используя (29), (23), (19) и (13), можно определить все искомые функции. Далее по формулам (1)-(7) можно определить все компоненты сопряженно-электроупругого поля в любой точке пьезокерамики и упругого поля в ортотропном проводнике.

Задача решена точно в замкнутом виде.

Нормальные составляющие векторов электрической индукции и напряженности в зоне сцепления квадрантов соответственно определяются по формулам [9]:

$$\begin{aligned} D_z(x,0) &= \frac{e_{11}}{c_{11}} (P_{12}n_{11} - P_{22}n_{12}) H(x) + F_1(x) \\ E_z(x,0) &= \frac{n_{21}P_{12} + n_{22}P_{22}}{e_{15}} H(x) + F_2(x) \quad (0 < x < a) \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{cases} n_{11} \\ n_{12} \end{cases} = \sum_{k=1}^3 a_{3k} \begin{cases} a_k \\ b_k \end{cases}, \quad \begin{cases} n_{21} \\ n_{22} \end{cases} = \sum_{k=1}^3 t_k \Delta_3(t_k) \begin{cases} a_k \\ b_k \end{cases}$$

$$a_{3k} = t_k \left[\frac{e_{31}}{e_{15}} \Delta_1(t_k) - \frac{c_{11}^E e_{33}}{c_{44}^E e_{15}} \Delta_2(t_k) - \frac{c_{11}^E e_{33}^S}{e_{15} e_{15}} \Delta_3(t_k) \right] \quad (34)$$

Из (29) и (33) видно, что на концах зоны полного контакта полуплоскостей механические напряжения, нормальные составляющие электрической индукции и напряженности сопровождаются осцилляциями со значительными механическими и электрическими полями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде. — Изв.АН Арм. ССР, Механика, 1985, т.38, №1, с.12-19.
2. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. — Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. — М.: Наука, 1988. 470с.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977. 415с.
4. Мелкумян С.А., Улитко А.Ф. Осесимметричная контактная задача электроупругости для полупространства. — ПМ, 1987, т.23, №9, с. 44-51.
5. Тоноян В.С., Мелкумян С.А. Симметричная контактная задача для ортотропной полуплоскости с вертикальным конечным разрезом. — Докл. НАН РА, 1991, т. 92, №3, с. 133-137.
6. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. — Киев: Наукова Думка, 1989. 479 с.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. — М.: Физматгиз. 1963. 639 с.
8. Михлин С.Г.. Интегральные уравнения. — М.-Л.: ОГИЗ, 1949. 380 с.
9. Градштейн И.С. и Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Гостехиздат, 1971. 1108 с.

Ереванский архитектурно-
строительный институт

Поступила в редакцию
2.10.1997

УДК 539.3

БЕСКОНТАКТНЫЙ СПОСОБ ВОЗБУЖДЕНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКЕ Микилян М.А.

Մ.Ա. Միկիլյան

Իդեալական հաղորդիչ սալում ռեզոնանսային տատանումներ գրգռելու ոչ կոնտակտային մեթոդ

Աշխատանքում ցույց է տրված, որ հաստատուն մագնիսական դաշտի օգնությամբ իդեալական հաղորդիչ սալի ստիպողական տատանումներն առանց կոնտակտի կարելի է հազորդել մի այլ երկրորդ իդեալական հաղորդիչ սալի: Ընդ որում, խնդրի պարամետրերի համապատասխան ընտրությամբ կարելի է հասնել այն բանին, որ տատանվի (ղեկավարվող անալիտիկայով) միայն արտաքին մեխանիկական ազդեցություններից ազատ երկրորդ սալը:

M.A. Mikilyan

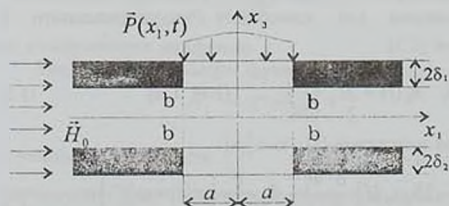
A non Contact Method of Resonant Vibration Excitement in a Reflectly Conductive Plate

Рассмотрена задача бесконтактного возбуждения вынужденных колебаний в идеально проводящей пластинке. Показано, что при помощи постоянного магнитного поля вынужденные колебания одной пластинки, на которую действует возмущающая сила, можно бесконтактно сообщить ко второй пластинке, свободной от внешних механических нагрузок. Причем, соответствующим выбором параметров задачи можно достичь того, чтобы в основном, колебалась только вторая идеально проводящая пластинка с регулируемой амплитудой. Аналогичная задача в случае сверхпроводящих пластин рассмотрена в работе [5].

1. Рассмотрим магнитоупругую систему, показанную на фиг.1. Она состоит из двух параллельных неферромагнитных идеально-проводящих диафрагм, которые находятся в постоянном магнитном поле $\vec{H}_0$, параллельном координатной линии Ox_1 (координатная система $x_1x_2x_3$ и основные геометрические параметры показаны на фиг.1). Части диафрагм $|x_1| \leq a$, $|x_2| < \infty$ являются упругими пластинками, изготовленными из различных идеально проводящих изотропных, материалов (остальные

части являются абсолютно жесткими и неподвижными). Электромагнитные свойства среды, окружающей диафрагмы, эквивалентны свойствам вакуума.

Пусть на верхней поверхности верхней пластинки действует нормально приложенная нестационарная на-



Ֆիգ. 1

рузка $\vec{P}(x_1, t)$. Граничные условия на торцах $x_1 = \pm a$ таковы, что пластинки колеблются по форме цилиндрической поверхности с образующими, параллельными координатной линии Ox_2 . Рассмотрим задачу передачи вынужденных колебаний нижней пластинке и определим условия резонанса. В дальнейшем, характеристики, относящиеся к

верхней пластинке, будем обозначать индексом "1", а к нижней - индексом "2". Индексом "+" обозначим значения соответствующих величин на верхних поверхностях диафрагм $x_3 = b + 2\delta_1$ и $x_3 = b$, а индексом "-" - на нижних поверхностях $x_3 = b$ и $x_3 = -(b + 2\delta_2)$.

Вследствие колебаний пластинок и присутствия внешнего магнитного поля в идеальном проводящих пластинках появляются индуцированные электрические токи, приводящие как к изменению напряженности магнитного поля во всем пространстве, так и к появлению массовых и поверхностных сил. Интенсивность указанных сил магнитного происхождения, с учетом идеальной проводимости материалов пластинок, определяются следующими формулами [1-3]:

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \mu_0 (\text{rot } \vec{H}) \times \vec{H} \quad (\text{объемные силы}) \\ \vec{P} &= [\hat{T}^{(e)} - \hat{T}] \cdot \vec{N} \quad (\text{поверхностные силы})\end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь μ_0 - магнитная постоянная, $\vec{N}$ - единичный вектор внешней нормали к деформированным поверхностям пластинок, $\hat{T}$ - тензор напряжений Максвелла

$$T_{jk} = \mu_0 [H_j \cdot H_k - 0.5 H^2 \delta_{jk}] \quad T_{jk}^{(e)} = \mu_0 [H_j^{(e)} \cdot H_k^{(e)} - 0.5 (H^{(e)})^2 \delta_{jk}] \quad (1.2)$$

$\vec{H}$ - вектор напряженности магнитного поля, который складывается из вектора напряженности заданного магнитного поля $\vec{H}_0$ и вектора напряженности индуцированного магнитного поля $\vec{h}$, обусловленного колебаниями пластинок ($\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$), а индекс "е" здесь и в дальнейшем обозначает принадлежность к внешней области (пространство вне диафрагм).

Пусть для рассматриваемых пластинок справедлива гипотеза Кирхгофа о недеформируемых нормалях. На основе этой гипотезы из основных линеаризованных уравнений и поверхностных условий магнитоупругости неферромагнитных тел [1-3], учитывая также идеальную проводимость материалов диафрагм и (1.1), путем осреднения получаются:

а) следующие выражения для компонент индуцированного в пластинках магнитного поля [2,3]:

$$h_1(i) = 0, \quad h_2(i) = 0, \quad h_3(i) = H_0 \frac{\partial w_i}{\partial x_1} \quad (i = 1, 2) \quad (1.3)$$

б) уравнения колебаний пластинок [1]

$$\begin{aligned}D_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_1^4} + 2\rho_i \delta_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - 2\delta_i \mu_0 H_0^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_1^2} - \delta_i \frac{\partial}{\partial x_1} [\sigma_{11}^{(i)+} + \sigma_{11}^{(i)-}] = \\ = \sigma_{33}^{(i)+} - \sigma_{33}^{(i)-}; \quad D_i = 2E_i \delta_i^3 / 3(1 - \nu_i^2)\end{aligned} \quad (1.4)$$

в) условия сопряжения на поверхностях диафрагм (здесь учтено, что части $|x_1| > a$ диафрагм являются абсолютно жесткими и неподвижными).

$$\begin{aligned}
h_j^{(e)+} &= \begin{cases} H_0 \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \text{при } |x_1| \leq a, \quad x_3 = b + 2\delta_1 \\ H_0 \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & \text{при } |x_1| \leq a, \quad x_3 = -b \\ 0 & \text{при } \begin{cases} |x_1| > a, \quad x_3 = b + 2\delta_1 \\ |x_1| > a, \quad x_3 = -b \end{cases} \end{cases} \\
h_j^{(e)-} &= \begin{cases} H_0 \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \text{при } |x_1| \leq a, \quad x_3 = b \\ H_0 \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & \text{при } |x_1| \leq a, \quad x_3 = -b - 2\delta_2 \\ 0 & \text{при } \begin{cases} |x_1| > a, \quad x_3 = b \\ |x_1| > a, \quad x_3 = -b - 2\delta_2 \end{cases} \end{cases} \\
\sigma_{13}^{(1)\pm} = 0, \quad \sigma_{13}^{(0)\pm} = -\mu_0 H_0 h_1^{(e)\pm} + \frac{[1 \pm 1]}{2} p \\
\sigma_{13}^{(2)\pm} = 0, \quad \sigma_{13}^{(2)\pm} = -\mu_0 H_0 h_1^{(e)\pm}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\sigma_{13}^{(1)\pm} = 0, \quad \sigma_{13}^{(0)\pm} = -\mu_0 H_0 h_1^{(e)\pm} + \frac{[1 \pm 1]}{2} p \\
\sigma_{13}^{(2)\pm} = 0, \quad \sigma_{13}^{(2)\pm} = -\mu_0 H_0 h_1^{(e)\pm} \tag{1.6}$$

В (1.3) - (1.5), как обычно, w_i - прогиб, D_i - цилиндрическая жесткость, E_i - модуль упругости, ν_i - коэффициент Пуассона, ρ_i - плотность материала i -той пластинки, $\sigma_{13}^{(i)\pm}$ и $\sigma_{33}^{(i)\pm}$ - упругие напряжения.

Рассматривая систему уравнений (1.4) и (1.6), замечаем, что она не замкнута. В нее, кроме прогибов w_i пластинок, входят также неизвестные граничные значения $h_1^{(e)\pm}$ индуцированного магнитного поля $\vec{h}^{(e)}$ на поверхностях пластин. Их определяем, решая уравнение Максвелла во внешней области

$$\operatorname{rot} \vec{h}^{(e)} = 0 \quad \operatorname{div} \vec{h}^{(e)} = 0 \tag{1.7}$$

при условиях

$$h_3 = h_3^{(e)} \tag{1.8}$$

на поверхностях диафрагм.

Введя потенциальную функцию посредством

$$\vec{h}^{(e)} = \operatorname{grad} \varphi \tag{1.9}$$

и учитывая, что части $|x_1| > a$ поверхностей не деформируются, задача определения индуцированного магнитного поля $\vec{h}^{(e)}$, согласно (1.5) - (1.9), сводится к решению следующих задач для уравнений Лапласа в полуплоскостях $x_3 > b + 2\delta_1$ и $x_3 < -b - 2\delta_2$ и в слое $|x_3| < b$:

в полуплоскостях $x_3 > b + 2\delta_1$ и $x_3 < -(b + 2\delta_2)$

$$\Delta \varphi = 0$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right|_{x_3 = \pm (b + 2\delta_i)} = \begin{cases} H_0 \frac{\partial w_i}{\partial x_1} & \text{при } |x_1| \leq a \\ 0 & \text{при } |x_1| > a \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} & \text{в слое } |x_1| < b \\ & \Delta\varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \begin{cases} H_0 \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \text{при } |x_1| \leq a, \quad x_3 = b \\ H_0 \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & \text{при } |x_1| \leq a, \quad x_3 = -b \\ 0 & \text{при } |x_1| > a, \quad x_3 = \pm b \end{cases} \quad (1.11)$$

Решения краевых задач (1.10) и (1.11) известны. Используя эти решения из (1.9), определено индуцированное в указанных областях магнитное поле $\vec{h}^{(e)}$ и путем предельного перехода получены следующие представления интересующих нас величин $h_1^{(e)\pm}$:

$$\begin{aligned} h_1^{(e)+} &= \begin{cases} -\frac{H_0}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \frac{d\xi}{x_1 - \xi} & \text{при } x_3 = b + 2\delta_1 \\ \frac{H_0}{4b} \int_{-a}^a \left[K \frac{\partial w_1}{\partial \xi} - \frac{1}{K} \frac{\partial w_2}{\partial \xi} \right] d\xi & \text{при } x_1 = -b \end{cases} \\ h_1^{(e)-} &= \begin{cases} \frac{H_0}{4b} \int_{-a}^a \left[\frac{1}{K} \frac{\partial w_1}{\partial \xi} - K \frac{\partial w_2}{\partial \xi} \right] d\xi & \text{при } x_3 = b \\ \frac{H_0}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\partial w_2}{\partial \xi} \frac{d\xi}{x_1 - \xi} & \text{при } x_3 = -b - 2\delta_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$K(x_1, \xi) = \ln \frac{\pi(\xi - x_1)}{4b}$$

Из (1.6), вычисляя $\sigma_{13}^{(e)+}$ и $\sigma_{33}^{(e)+}$, подставляя в (1.4) и учитывая (1.12), получим следующую систему связанных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений колебания пластинок:

$$\begin{aligned} D_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_1^4} + 2\rho_i \delta_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - 2\mu_0 \delta_i H_0^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_1^2} - \\ - \frac{1}{\pi} \mu_0 H_0^2 \int_{-a}^a \left[\frac{\pi}{4b} K \frac{\partial w_{3-i}}{\partial \xi} + \left(\frac{1}{x_1 - \xi} - \frac{\pi}{4b} \frac{1}{K} \right) \frac{\partial w_i}{\partial \xi} \right] d\xi = \frac{1 - (-1)^i}{2} p \end{aligned} \quad (1.13)$$

(i=1,2)

К системе уравнений (1.13) в каждом конкретном случае необходимо присоединить обычные однородные условия закрепления краев $x_1 = \pm a$ пластинок. Для определенности, в дальнейшем принимается, что края пластинок жестко заделаны, т.е.

$$w_i|_{x_1=\pm a} = 0, \quad \left. \frac{\partial w_i}{\partial x_1} \right|_{x_1=\pm a} = 0 \quad (1.14)$$

Из (1.13) видно, что благодаря магнитному полю, вынужденные колебания верхней пластинки (под действием возмущающей силы $\vec{P}$) передаются нижней пластинке, которая свободна от внешних

механических нагрузок

2. Рассмотрим вопрос сведения задачи вынужденных колебаний (1.13), (1.14) к решению системы интегральных уравнений. С этой целью предполагая, что $P(x_1, t) = P_0 \sin \omega t$ ($P_0 = \text{const}$) решения системы (1.15) представим в виде

$$w_i(x_1, t) = w_i(x_1) \sin \omega t \quad (2.1)$$

где $w_i(x_1)$, согласно (1.13) и (1.14), являются решениями следующей неоднородной задачи (написанной в безразмерной форме) на отрезке $[-1; 1]$:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \bar{w}_i}{dx^4} - \alpha_i \frac{d^2 \bar{w}_i}{dx^2} - \beta_i \bar{w}_i - \gamma_i \int_{-1}^1 \frac{\pi}{4b} \frac{h_{j-1}}{h_i} K \frac{d\bar{w}_{j-1}}{d\zeta} + \\ + \left(\frac{1}{x-\zeta} - \frac{\pi}{4b} \frac{1}{K} \right) \frac{d\bar{w}_i}{d\zeta} \Big|_{\zeta=x} = \frac{1-(-1)^i}{2} P_0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\bar{w}_i \Big|_{x=\pm 1} = 0, \quad \frac{d\bar{w}_i}{dx} \Big|_{x=\pm 1} = 0 \quad (2.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_i = \frac{2\mu_0 H_0^2}{E_i} \left(\frac{\delta_i}{a} \right)^2, \quad \beta_i = \frac{2\rho_i a^2 \omega^2}{E_i} \left(\frac{\delta_i}{a} \right)^2, \quad \gamma_i = \frac{\mu_0 H_0^2}{\pi E_i} \left(\frac{\delta_i}{a} \right) \\ P_0 = \frac{P_0}{E_i}, \quad \bar{E}_i = \frac{D_i \delta_i}{a^4}, \quad K(x, \zeta) = \text{th} \frac{\pi(\zeta - x)}{4b} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\bar{w}_i = \frac{w_i}{h}, \quad x = \frac{x_1}{a}, \quad \zeta = \frac{\xi}{a}, \quad b = \frac{b}{a}$$

Переходим к выводу системы интегральных уравнений, обозначая $U_i(x) = \frac{d^4 \bar{w}_i}{dx^4}$. Тогда для функций $\bar{w}_i$ и их производных получим следующие представления:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \bar{w}_i}{dx^3} &= \int_{-1}^x U_i(t) dt + C_1^{(i)} \\ \frac{d^2 \bar{w}_i}{dx^2} &= \int_{-1}^x (x-t) U_i(t) dt + C_1^{(i)} x + C_2^{(i)} \\ \frac{d \bar{w}_i}{dx} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^x (x-t)^2 U_i(t) dt + C_1^{(i)} \frac{x^2}{2} + C_2^{(i)} x + C_3^{(i)} \\ \bar{w}_i &= \frac{1}{6} \int_{-1}^x (x-t)^3 U_i(t) dt + C_1^{(i)} \frac{x^3}{6} + C_2^{(i)} \frac{x^2}{2} + C_3^{(i)} x + C_4^{(i)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.3), определяем постоянные $C_k^{(i)}$

$$\begin{aligned} C_1^{(i)} &= -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1-t)^2 (2+t) U_i(t) dt, \quad C_2^{(i)} = -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1-t)^2 U_i(t) dt \\ C_3^{(i)} &= -\frac{1}{8} \int_{-1}^1 (1-t)^2 t U_i(t) dt, \quad C_4^{(i)} = -\frac{1}{24} \int_{-1}^1 (1-t)^2 (2t+1) U_i(t) dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.5) и (2.6) в (2.2), для определения $U_i(x)$ получим

следующую систему интегральных уравнений

$$U_j(x) = \int_{-1}^1 [\alpha E_1(x, t) + \beta E_3(x, t)] U_j(t) dt + \gamma \int_{-1}^1 \left[\frac{\pi}{4b} \frac{h_{j-1}}{h_j} K(x, \zeta) \int_{-1}^1 E_2(\zeta, t) U_{j-1}(t) dt + \left(\frac{1}{x-\zeta} - \frac{\pi}{4b} \frac{1}{K(x, \zeta)} \right) \int_{-1}^1 E_1(\zeta, t) U_j(t) dt \right] d\zeta + \frac{1-(-1)^j}{2} P_0, \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} E_1(x, t) &= \chi_1(x, t) - \frac{1}{4}(1-t)^2[x(2+t)+1] \\ E_2(x, t) &= \chi_2(x, t) - \frac{1}{6}(1-t)^2[x^2(2+t)+2x-1] \\ E_3(x, t) &= \chi_3(x, t) - \frac{1}{24}(1-t)^2[x^3(2+t)+3x(x-t)-2t-1] \\ \chi_j(x, t) &= \begin{cases} (x-t)^j & \text{при } x < t \\ 0 & \text{при } x \geq t \end{cases} \quad (j=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Таким образом, рассматриваемая задача вынужденных магнитоупругих колебаний сведена к решению неоднородной системы сингулярных интегральных уравнений (2.7).

3. Предварительно рассмотрим случай одной пластинки. В этом случае уравнение и соответствующие граничные условия, описывающие вынужденные колебания, легко получить из (1.13) и (1.14) путем предельного перехода ($b \rightarrow \infty$). В результате имеем

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\mu_0 h H_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{2\mu_0 H_0^2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{d\xi}{x_1 - \xi} = P \quad (3.1)$$

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при } x_1 = \pm a$$

Аналогичным образом, как в предыдущем пункте, краевая задача (3.1) сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$v(x) - \int_{-1}^1 [K_1(x, t) \ln|x-t| + K_2(x, t)] v(t) dt = 1 \quad (3.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} K_1(x, t) &= \frac{1}{2} \gamma (t-x)^2 \\ K_2(x, t) &= \alpha E_1(x, t) + \beta E_3(x, t) - \gamma E_4(x, t) \\ E_4(x, t) &= \frac{(x-1)(x-2t+1)}{2} \ln|x-1| + \frac{(x-1)^2 - (x-t)^2}{4} - (x-t)(t-1) - \\ &\quad - \frac{1}{4}(1-t)^2 \left[\frac{(x^2-1)(2+t)+2(x-1)}{2} \ln|x-1| - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(x^2-1)(2+t)-2(x-1)}{2} \ln|x+1| + x(2+t)+2 \right] \\ \alpha &= \frac{2\mu_0 H_0^2}{E} \left(\frac{h}{a} \right)^2, \quad \beta = \left(\frac{3\pi}{4} \right)^4 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \quad \gamma = \frac{\mu_0 H_0^2}{\pi E} \left(\frac{\delta}{a} \right) \end{aligned}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{2a} \right)^2 \sqrt{\frac{E\delta^3}{12\rho(1-\nu^2)}}, \quad v(x) = \frac{1}{P_0} \frac{d^4 w}{dx^4}, \quad (3.3)$$

где ω_0 - частота собственных колебаний рассматриваемой пластинки при отсутствии магнитного поля.

Уравнение (3.2) будем решать методом, изложенным в [4]. Суть этого метода состоит в том, что при сведении интегрального уравнения (3.2) к системе линейных алгебраических уравнений для члена с логарифмической особенностью около диагонали $x=i$ принимается квадратурная формула с коэффициентами:

$$\bar{A}_{i-1} = h \left(\ln h - \frac{1}{3} \right) / 3, \quad \bar{A}_i = 4h \left(\ln h - \frac{4}{3} \right) / 3, \quad \bar{A}_{i+1} = \bar{A}_{i-1} \quad (3.4)$$

а для $K_2(x, i)$ и для всех величин i вдали от диагонали принимается любая квадратурная формула, например, формула Симпсона. В результате, решение уравнения (3.2) сводится к решению следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$v(x_i) - \sum_{n=0}^{M-1} A_n [K_1(x_i, x_n) \ln|x_i - x_n| + K_2(x_i, x_n)] v(x_n) - \\ - \sum_{n=i-1}^{i+1} [\bar{A}_n K_1(x_i, x_n) + A_n K_2(x_i, x_n)] v(x_n) = 1 \quad (3.5)$$

где A_n - коэффициенты Симпсона, x_i ($i = 0, \dots, M$) - точки гауссовой сети с шагом h , а штрих у знака суммы означает, что пропускаются слагаемые с индексами $i-1$, i и $i+1$.

На основе (3.5) и последнего уравнения из (2.5) произведены вычисления значений амплитуды w/P_0 вынужденных колебаний в различных точках срединной плоскости пластинки при различных значениях B_0 ($B_0 = \mu_0 H_0$ - величина индукции внешнего магнитного поля). Для расчета принято $E = 7.3 \times 10^{10}$ Н/м², $\nu = 0.34$ (дюралюминиевая пластинка), $\delta/a = 0.01$; $\omega^2/\omega_0^2 = 0.5$. Результаты вычисления приведены в табл.1. (первые строки). Рассмотрено также численное решение задачи собственных магнитоупругих колебаний (при тех же числовых данных что и выше). В этом случае $P=0$ и система (3.5) является однородным. Из условия существования нетривиального решения этой системы для первой частоты ω магнитоупругих колебаний при $B_0 = 1$ тесла получено следующее числовое значение

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1.183$$

Для сравнения, рассматриваемая задача решена также методом Галеркина, представляя решение задачи (3.1) в виде

$$w = w_0 (a^2 - x_1^2)^2 \sin \omega t \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.1) и ортогонализируя, для определения w_0 получим формулу

$$w_0 = \frac{\frac{112}{27\pi^4} P_0}{\frac{14}{9\pi^4} \left(64 + \frac{128}{21} \alpha + \frac{28}{9} \gamma \right) - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (3.7)$$

На основе (3.7) при тех же исходных данных вычислены значения амплитуды w/P_0 в выбранных выше точках пластинки. Результаты вычислений приведены также в табл. 1. (вторые строки)

Таблица 1.

x	0	$\frac{2}{5}$
0.5	0.047916 0.049300	0.033597 0.034786
1.0	0.033158 0.034948	0.023360 0.024659
1.5	0.022761 0.023531	0.016009 0.016604
2.0	0.015811 0.016146	0.010698 0.011393

При $P = 0$ из (3.7) легко получить следующую формулу для определения первой частоты собственных магнитоупругих колебаний

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1,022 + 0,097\alpha + 0,477\gamma \quad (3.8)$$

Используя выбранные выше исходные данные ($E = 7,3 \cdot 10^{10}$ н/м², $\nu = 0,34$, $\delta/a = 0,01$; $B_0 = 1$ тесла) из (3.8) для ω_1 получим:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 1,227$$

Сравнивая значения амплитуды вынужденных колебаний (табл. 1), а также значения первой частоты собственных магнитоупругих колебаний, полученные на основе численного метода и метода Галеркина, легко заметить, что: 1) метод Галеркина дает завышенные значения для указанных величин и 2) расхождение результатов не превышает 5%, гарантирующее применимость метода Галеркина при решении рассматриваемых типов задач магнитоупругих колебаний тонких пластин.

4. Используя рассуждения предыдущего пункта, задачу (1.13), (1.14) будем решать методом Галеркина, представляя w_1 в виде

$$w_1(x_1, t) = w_{01}(a^2 - x_1^2)^2 \sin \omega t \quad (4.1)$$

Подставляя (4.1) в (1.13) и ортогонализируя, после ряда преобразований приходим к следующей системе неоднородных алгебраических уравнений относительно w_{01} и w_{02} :

$$\begin{aligned} (\omega_{01}^2 - \omega^2)w_{01} + m_1 w_{02} &= g_1 \\ (\omega_{02}^2 - \omega^2)w_{02} + m_2 w_{01} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{01}^2 &= \frac{63}{2} \frac{\bar{E}_1}{2\rho_1 \delta_1^2} + \frac{\mu_0 H_0^2}{2\rho_1 \delta_1^2} \frac{315}{256a} \left[\frac{512}{105} \frac{\delta_1}{a} - \left(B - \frac{c}{4b} \right) \right] \\ m_1 &= \frac{\mu_0 H_0^2}{2\rho_1 \delta_1} \frac{315}{256a} \frac{1}{4b}, \quad g_1 = \frac{21}{16a^4} \frac{P_0}{2\rho_1 \delta_1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\pi(\zeta - x)}{4b} (\zeta^3 - \zeta)(1 - x^2)^2 d\zeta dx, \quad B = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{x - \zeta} (\zeta^3 - \zeta)(1 - x^2)^2 d\zeta dx \\ C &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \text{cth} \frac{\pi(\zeta - x)}{4b} (\zeta^3 - \zeta)(1 - x^2)^2 d\zeta dx \end{aligned}$$

Решив систему (4.2) относительно ω_{01} и ω_{02} , получим:

$$\begin{aligned} \omega_{01} &= \frac{g_1(\omega_{02}^2 - \omega^2)}{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) - m_1 m_2} \\ \omega_{02} &= \frac{g_1 m_2}{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) - m_1 m_2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

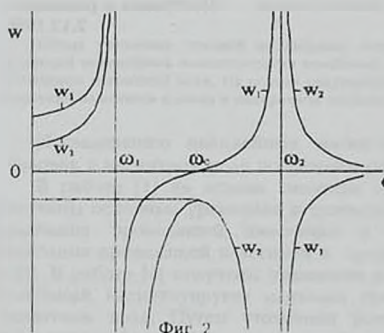
Для простоты рассмотрим случай пластин с одинаковыми физическими и геометрическими параметрами

($E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $\delta_1 = \delta_2 = h$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$) при $P_0 = \text{const}$. Тогда из (4.4) найдем

$$\omega_{01} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)g_1}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)}, \quad \omega_{02} = \frac{g_1 m_1}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{63}{2} \frac{\bar{E}}{2\rho h^2} + \frac{\mu_0 H_0^2}{2\rho h} \frac{315}{256a} \left[\frac{512}{105} \frac{h}{a} - \left(B - \frac{C}{4b} \right) \right] \\ \omega_i^2 &= \omega_0^2 + (-1)^i \frac{\mu_0 H_0^2}{2\rho h} \frac{315}{256a} \frac{1}{4b} A \end{aligned}$$



Зависимость w_1 и w_2 от частоты возмущающей силы (формула (4.5)) показана на фиг. 2 и полностью аналогична случаю магнитоупругой системы из сверхпроводящих пластин [5]. Из этой фигуры видно, что с возрастанием ω обе амплитуды монотонно увеличиваются и стремятся к бесконечности, когда ω приближается к первой собственной частоте (наступление первого резонанса). В этой области обе амплитуды положительны, т.е. обе пластинки колеблются в фазе с возмущающей силой. Когда $\omega_1 < \omega < \omega_0$ амплитуды w_1 и

w_2 имеют отрицательные значения, т.е. обе пластинки колеблются со сдвигом 180° относительно возмущающей силы, но еще находятся в одной фазе друг с другом. В интервале $\omega_0 < \omega < \omega_2$ амплитуда w_1 вновь становится положительной (переходя через нуль при $\omega = \omega_0$), тогда как w_2 остается отрицательной. Это значит, что в рассматриваемом интервале колебания обеих пластин сдвинуты по фазе 180° , причем колебание верхней пластинки находится в одной фазе с возмущающей силой. Наконец, когда ω приближается ко второй собственной частоте ω_2 , обе амплитуды неограниченно возрастают и наступают условия второго резонанса. После этого, пластинки продолжают колебаться в различных фазах, но с убывающими амплитудами, и когда ω очень велика, колебания обеих пластин почти исчезают.

Определенное практическое значение имеет $w_1 = 0$ при $\omega = \omega_0$. Это

означает, что возмущающая сила, действуя на верхнюю пластинку, вызывает колебания только нижней пластинки.

Таким образом, при помощи магнитного поля колебания (в том числе и резонансные) одной пластинки (на которой действует вынуждающая сила) бесконтактно передаются второй пластинке. Причем, соответствующим выбором параметров задачи можно достичь того, чтобы, в основном, колебалась только вторая (свободная от механических нагрузок) пластинка с регулируемой амплитудой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.- М.: Наука, 1977.272 с.
2. Kaliski S. Magnetoelastic vibration of perfectly conducting plates and bars assuming the principle of plane sections.- Proc. Vibr. Probl, 1962, 3, '4, p.225-234
3. Багдасарян Г.Е. Уравнения магнитоупругих колебаний тонких идеально проводящих пластин.-Киев: Прикладная Механика, 1983, т.XIX, №12, с. 87-91.
4. Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения -М.: Радио и связь, 1987, 272 с.
5. Багдасарян Г.Е. Бесконтактный способ возбуждения резонансных колебаний в сверхпроводящей пластинке. Изв. АН Арм ССР, Механика, 1989, т 42, №6, с. 3-9.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
2.12.1996

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ УТОЧНЕНИИ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ
МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ
ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ ПЛАСТИН

Саркисян С.В.

Ս.Վ. Սարգսյան

Էլեկտրահաղորդիչ սալերի ու գծային մագնիսաառձգական տատանումների հավասարումների մեկ ճշգրտման մասին

Ծշգրտելով սալի դիմային մակերևույթների վրա գործող պայմանները առաջարկված է հաստատուն մագնիսական դաշտում գտնվող էլեկտրահաղորդիչ սալերի ու գծային մագնիսաառձգական տատանումների հավասարումների մի տարբերակ: Մտազված հավասարումների հիման վրա լուծված է սալ-շերտի ու գծային տատանումների խնդիր լայնական մագնիսական դաշտում:

S. V. Sarkisyan

Some improvements in equations of nonlinear magnetoelastic vibrations of
electroconductive plates

Путем уточнения условий на лицевых поверхностях пластин предложен вариант уравнений нелинейных магнитоупругих колебаний электропроводящих пластин во внешнем постоянном магнитном поле. На основе полученных уравнений решена задача нелинейных колебаний пластинки-полосы в поперечном магнитном поле.

Исследованию нелинейных магнитоупругих колебаний пластин и облоочек в магнитном поле посвящены работы [1, 3-5].

В работе [1] на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел [2] получены основные уравнения и соотношения, описывающие нелинейные колебания проводящей пластинки в магнитном поле. Нелинейные колебания проводящей пластинки в продольном магнитном поле изучены в [3]. В работе [4] получены уравнения и граничные условия нелинейных колебаний магнитоупругих идеально проводящих пластин в наклонном магнитном поле. Путем уточнения условий на лицевых поверхностях пластинки в [6] предложен вариант уравнений теории гибких пластин.

В настоящей работе, исходя из гипотезы магнитоупругости тонких тел, путем уточнения условий на лицевых поверхностях пластинки, получены уравнения и граничные условия нелинейных магнитоупругих колебаний электропроводящих пластин во внешнем магнитном поле.

1. Рассмотрим упругую изотропную однородную пластинку постоянной толщины $2h$, с модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν и с конечной электропроводностью σ . Пластинка находится в постоянном магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{H}_0(H_{01}, H_{02}, H_{03})$. Принимается, что для среды, окружающей пластинку, справедливы уравнения Максвелла для вакуума. Сторонние токи и сторонние заряды отсутствуют. Одновременно считается, что задача магнитостатики для невозмущенного состояния решена. Нелинейные колебания пластинки в магнитном поле будем описывать на основе геометрически нелинейной теории, считая прогибы пластинки сопоставимы с ее толщиной, но малыми по сравнению с основными

размерами. Пусть пластинка в невозмущенном состоянии занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$.

Трехмерная задача магнитоупругости пластин сводится к совместному интегрированию систем дифференциальных уравнений [2]. Причем в этих уравнениях наряду с линейными членами будем оставлять члены, обусловленные квадратичной нелинейностью.

Уравнения электродинамики для области, занимаемой телом (внутренняя область)

$$\operatorname{rot} \bar{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{b}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \bar{h} = \frac{4\pi}{c} \bar{j}, \quad \operatorname{div} \bar{d} = 4\pi \rho_e, \quad \operatorname{div} \bar{b} = 0 \quad (1.1)$$

Функциональные связи для возмущенного электромагнитного поля

$$\bar{j} = \sigma \left(\bar{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \times (\bar{B}_0 + \bar{b}) \right) + \rho_e \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$$

$$\bar{d} = \epsilon \bar{e}, \quad \bar{b} = \mu \bar{h}, \quad \bar{B}_0 = \mu \bar{H}_0 \quad (1.2)$$

Уравнения электродинамики для среды, окружающей тело

$$\operatorname{rot} \bar{h}^{(e)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{e}^{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \bar{e}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{h}^{(e)}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \bar{h}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} \bar{e}^{(e)} = 0 \quad (1.3)$$

Уравнения теории упругости, с учетом объемных сил электромагнитного происхождения (сил Лоренца), в которых сохранены члены с квадратичной нелинейностью

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.4)$$

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z$$

$$\rho \bar{K}(F_1, F_2, F_3) = \rho_e \left(\bar{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \times \bar{B}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \times \bar{b} \right) + \quad (1.5)$$

$$+ \frac{\sigma}{c} \left(\bar{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \times \bar{B}_0 \right) \times \bar{B}_0 + \frac{\sigma}{c} \left(\bar{e} \times \bar{b} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \times \bar{B}_0 \right) \times \bar{b} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \times \bar{b} \right) \times \bar{B}_0$$

На лицевых поверхностях пластинки имеем следующие граничные условия:

$$\bar{\sigma}, \bar{n} = 0 \quad (1.6)$$

$$\bar{n} \times [\bar{H}^{(e)} - \bar{H}] = -\frac{v_n}{c} [\bar{E}^{(e)} - \epsilon \bar{E}] \quad (1.7)$$

$$\bar{n} [\bar{H}^{(e)} - \mu \bar{H}] = 0 \quad (1.8)$$

$$\bar{n} \times [\bar{E}^{(e)} - \bar{E}] = \frac{v_n}{c} [\bar{H}^{(e)} - \mu \bar{H}] \quad (1.9)$$

$$\bar{n} [\bar{E}^{(e)} - \epsilon \bar{E}] = 4\pi \rho_e \quad (1.10)$$

Здесь и в последующем величины, относящиеся к внешней области пластинки, отмечаются индексом (e) , а по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

В приведенных выше уравнениях $\bar{h}(h_1, h_2, h_3)$, $\bar{e}(e_1, e_2, e_3)$, $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\bar{d}(d_1, d_2, d_3)$ и $\bar{j}(j_1, j_2, j_3)$ - векторы индуцированного электромагнитного поля, ρ_e - объемная плотность электрического заряда, c - электродинамическая постоянная, μ и ϵ - магнитная и диэлектрическая

проницаемости материала пластинки, $\bar{u}(u_1, u_2, u_3)$ - вектор перемещения точек пластинки, ρ - плотность деформированного тела, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, $\bar{v} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$, $\bar{n}$ - нормаль к возмущенной поверхности пластинки,

$$\bar{\sigma}_i = (\sigma_{i1} + T_{i1} - T_{i1}^{(e)})\hat{i} + (\sigma_{i2} + T_{i2} - T_{i2}^{(e)})\hat{j} + (\sigma_{i3} + T_{i3} - T_{i3}^{(e)})\hat{k} \quad (1.11)$$

T_{ij} и $T_{ij}^{(e)}$ - компоненты тензоров напряжений Максвелла соответственно в пластинке и в вакууме, причем

$$\begin{aligned} T_{ik} &= \frac{1}{4\pi} (e_i d_k + H_{0i} B_{0k} + H_{0i} b_k + h_i B_{0k} + h_i b_k) - \\ &- \frac{\delta_{ik}}{8\pi} (\bar{e} \bar{d} + \bar{H}_0 \bar{B}_0 + \bar{H}_0 \bar{b} + \bar{h} \bar{B}_0 + \bar{h} \bar{b}) \\ T_{ik}^{(e)} &= \frac{1}{4\pi} (e_i^{(e)} e_k^{(e)} + H_{0i}^{(e)} H_{0k}^{(e)} + h_i^{(e)} h_k^{(e)} + H_{0i}^{(e)} h_k^{(e)} + H_{0k}^{(e)} h_i^{(e)}) - \\ &- \frac{\delta_{ik}}{8\pi} (\bar{e}^{(e)} \bar{e}^{(e)} + \bar{H}_0^{(e)} \bar{H}_0^{(e)} + 2\bar{H}_0^{(e)} \bar{h}^{(e)} + \bar{h}^{(e)} \bar{h}^{(e)}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

δ_{ik} - символ Кронекера.

Для приведения трехмерной нелинейной задачи магнитоупругости тонких пластин к двухмерной принимается гипотеза магнитоупругости тонких тел [2]. Уравнения возмущенных лицевых поверхностей пластинки примем в виде [6]

$$z = \pm h + w(x, y, t) \quad (1.13)$$

Согласно (1.13), для нормалей к срединной поверхности пластинки получим следующие выражения:

$$\bar{n} = \left(\mp \frac{\partial w}{\partial x} \hat{i} \mp \frac{\partial w}{\partial y} \hat{j} \mp \hat{k} \right) \left(1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.14)$$

при $z = \pm h + w$. Здесь $w(x, y, t)$ - искомое перемещение срединной плоскости пластинки.

Из (1.6), согласно (1.11) и (1.14), получим следующие значения напряжений σ_{13} , σ_{23} и σ_{33} при $z = \pm h + w$ [6]:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \mp \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \mp 2hG \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \sigma_{23} &= \mp 2hG \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \mp \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \\ \sigma_{33} &= 0, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь оставлены только члены с квадратичной нелинейностью и пренебрежены нелинейности, где сомножители производные u и v ($u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ - искомые перемещения срединной плоскости пластинки), а также принято, что $T_y - T_y^{(e)} = 0$ (в виду конечной проводимости).

2. Поступая обычным образом [2], вместо напряжений введем в рассмотрения статически эквивалентные им внутренние силы и моменты. Осредняя уравнения (1.4), получим следующие двумерные уравнения движения пластинки, находящейся во внешнем постоянном магнитном поле:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + \sigma_{13} \Big|_{-h+w}^{h+w} + \int_{-h+w}^{h+w} F_1 dz &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h+w}^{h+w} u_1 dz \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} + \sigma_{23} \Big|_{-h+w}^{h+w} + \int_{-h+w}^{h+w} F_2 dz &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h+w}^{h+w} u_2 dz \\ \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + \sigma_{33} \Big|_{-h+w}^{h+w} + \frac{\partial}{\partial x} (z \sigma_{13}) \Big|_{-h+w}^{h+w} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} (z \sigma_{23}) \Big|_{-h+w}^{h+w} + \int_{-h+w}^{h+w} F_3 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h+w}^{h+w} z F_1 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h+w}^{h+w} z F_2 dz &= \\ = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h+w}^{h+w} w dz + \rho \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \int_{-h+w}^{h+w} z u_1 dz + \rho \frac{\partial^3}{\partial y \partial t^2} \int_{-h+w}^{h+w} z u_2 dz \end{aligned} \quad (2.1)$$

К этим уравнениям должны быть присоединены граничные и начальные условия.

Из уравнений (1.1) и (1.2), согласно гипотезе магнитоупругости тонких тел, получим

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial h_2}{\partial z} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[\varphi + \frac{\mu}{c} \left((H_{03} + f) \left(\frac{\partial v}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) - \frac{\partial w}{\partial t} (H_{02} + h_2) \right) \right] \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[\psi + \frac{\mu}{c} \left(\frac{\partial w}{\partial t} (H_{01} + h_1) - (H_{03} + f) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \right) \right] \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} &= \frac{4\pi\sigma}{c} e_3 + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \left[(H_{02} + h_2) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) - \right. \\ &\left. - (H_{01} + h_1) \left(\frac{\partial v}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\varphi(x, y, t)$, $\psi(x, y, t)$ и $f(x, y, t)$ - искомые функции индуцированного электромагнитного поля.

Интегрируя неоднородные линейные дифференциальные уравнения (2.2) и (2.3) и удовлетворяя поверхностным условиям (1.7) - (1.10), определим возмущения тангенциальных компонент магнитного поля h_1 и h_2 . В их выражения входит функция $(\text{ch} \alpha h)^{-1} \exp(\alpha(z-w))$, где

$\alpha h = \frac{4\pi\sigma h}{c^2} \frac{\partial w}{\partial t}$, которая для тонких пластинок намного меньше единицы

[1]. Разлагая указанную функцию в ряд по степеням малого параметра αh , получим окончательные выражения для h_1 и h_2 , где учтены члены не выше второй степени малости. Ввиду громоздкости их выражения здесь не приведены, в последующем приводятся эти значения для частного случая. Имея эти значения, из (2.4) получим выражение для возмущения нормальной компоненты вектора напряженности электрического поля e_3 . Возмущения всех компонент электромагнитного поля представляются

посредством шести искомых функций $u, v, w, \varphi, \psi, f$ и значениями тангенциальных компонент магнитного поля h_1 и h_2 на поверхностях пластинки $z = \pm h + w$

3. В дальнейшем для простоты выкладок, не нарушая общности рассуждений, будем рассматривать одномерную задачу и примем, что $H_{01} = H_{02} = 0$, $H_{03} = H \neq 0$ и $\mu = 1$. В этом случае граничные условия (1.6)-(1.10) после некоторых преобразований примут вид

$$\sigma_{13} = \sigma_{11} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{21} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{33} = 0 \quad (3.1)$$

$$\mp \frac{\partial w}{\partial x} (h_1^{(e)} - h_1) \pm (h_3^{(e)} - f) = 0 \quad (3.2)$$

$$\mp \frac{\partial w}{\partial x} (e_1^{(e)} - \varepsilon \varphi) \pm (e_3^{(e)} - \varepsilon e_3) = 4\pi \rho_e \quad (3.3)$$

$$\mp (h_1^{(e)} - h_1) \pm \frac{1-\varepsilon}{c} \psi \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (3.4)$$

$$\mp (e_1^{(e)} - \psi) \pm \frac{1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} (h_1^{(e)} - h_1) = 0 \quad (3.5)$$

$$\mp (h_2^{(e)} - h_2) \pm \frac{1-\varepsilon}{c} \varphi \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (3.6)$$

$$\mp (e_1^{(e)} - \varphi) \pm \frac{\partial w}{\partial x} (e_3^{(e)} - e_3) \mp \frac{1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} (h_2^{(e)} - h_2) = 0 \quad (3.7)$$

$$\mp \frac{\partial w}{\partial x} (h_2^{(e)} - h_2) \pm \frac{1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} (e_3^{(e)} - \varepsilon e_3) = 0 \quad (3.8)$$

$$\mp \frac{\partial w}{\partial x} (e_3^{(e)} - \psi) \mp \frac{1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} (h_3^{(e)} - f) = 0 \quad (3.9)$$

при $z = \pm h + w$. Интегрируя уравнения (2.2) и (2.3) с учетом поверхностных условий (3.4) и (3.6), для возмущений тангенциальных компонент магнитного поля h_1 и h_2 получим

$$\begin{aligned} h_1 = & \frac{h_1^* + h_1^-}{2} + \frac{1-\varepsilon}{c} \psi \frac{\partial w}{\partial t} + z \left[\frac{4\pi\sigma}{c^3} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{h_1^* + h_1^-}{2} + \frac{\partial f}{\partial x} + \right. \\ & + \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\psi - \frac{H}{c} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{f}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \left. \right] - w \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\psi - \frac{H}{c} w \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \\ & + \frac{z^2 - h^2}{2} \left[\frac{4\pi\sigma H}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} f \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} + \right. \\ & + \frac{16\pi^2\sigma^2}{c^3} \frac{\partial w}{\partial t} \left(\psi - \frac{H}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \left. \right] \quad (3.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2 = & \frac{h_2^* + h_2^-}{2} + \frac{1-\varepsilon}{c} \varphi \frac{\partial w}{\partial t} + z \frac{4\pi\sigma}{c} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{h_2^* + h_2^-}{2} - \right. \\ & - \left(\varphi + \frac{H}{c} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{f}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right) \left. \right] + \frac{4\pi\sigma}{c} w \left(\varphi + \frac{H}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \\ & - \frac{16\pi^2\sigma^2}{c^3} \frac{z^2 - h^2}{2} \frac{\partial w}{\partial t} \left(\varphi + \frac{H}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right) \quad (3.11) \end{aligned}$$

Здесь $h_i^* = h_i^{(e)} (\pm h + w)$ ($i = 1, 2$). Имея значения h_1 и h_2 (3.10) и (3.11) из (2.4), можно определить значение для e_3

$$e_3 = \frac{c}{4\pi\sigma} \left[\frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \left(h_2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) - h_1 \frac{\partial v}{\partial t} \right) \right] \quad (3.12)$$

Таким образом, компоненты индуцированного электромагнитного поля выражаются посредством шести искомых функций $u, v, w, \varphi, \psi, f$ и значениями тангенциальных компонент магнитного поля h_i^* на поверхностях пластинки.

При удовлетворении поверхностных условий (3.4) и (3.6) кроме (3.10) и (3.11), получаются также следующие уравнения:

$$\frac{h_1^* - h_1^-}{2h} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\psi - \frac{H + f}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{h_1^* + h_1^-}{2} \frac{\partial v}{\partial t} + \quad (3.13)$$

$$+ \frac{4\pi\sigma}{c^2} H \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \left(w - \frac{4\pi\sigma h^2}{3c^2} \frac{\partial w}{\partial t} \right)$$

$$\frac{h_2^* - h_2^-}{2h} = -\frac{4\pi\sigma}{c} \left(\varphi + \frac{H + f}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{h_2^* + h_2^-}{2} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.14)$$

Из (1.1) с учетом гипотезы магнитоупругости тонких тел [2] для основных искомых функций будем иметь еще одно уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (3.15)$$

Отметим, что в работе [1], исходя из основных положений нелинейной теории магнитоупругости и гипотезы магнитоупругости тонких тел, выведены основные уравнения и соотношения нелинейных магнитоупругих колебаний проводящих тонких пластинок в магнитном поле. Сравнивая (3.10)–(3.14) с соответствующими выражениями, приведенными в [1], замечаем, что, в основном, эти выражения совпадают, кроме подчеркнутых нелинейных членов, которые обусловлены уточнением условий на лицевых поверхностях пластинки. В [1] имеются также нелинейные члены, обусловленные начальным и текущим состоянием пластинки.

Уравнения движения пластинки (2.1) в перемещениях при наличии внешнего поперечного магнитного поля будут представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ & + \frac{1-\nu^2}{E} \left[\rho \left(\varphi + \frac{H+f}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\sigma H}{c} \left(\psi - \frac{H}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\sigma H^2 w}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\sigma}{c} \psi f - \frac{2\sigma H f}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4\pi} \frac{h_2^* + h_2^-}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_1^* + h_1^-}{2} \right) + \frac{\sigma H}{c^2} \frac{\partial w}{\partial t} \left(\frac{h_1^* + h_1^-}{2} - \frac{4\pi\sigma h^2 H}{3c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) - \frac{\rho}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{h_2^* + h_2^-}{2} \right] = \\ & = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(w \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad (3.16) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2(1+\nu)}{E} \left[\rho_e \left(\psi - \frac{H}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\sigma H}{c} \left(\varphi + \frac{H}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\rho_e H w}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \frac{\rho_e}{c} \int \frac{\partial w}{\partial t} - \right. \\ \left. - \frac{\sigma}{c} \varphi f - \frac{2\sigma H}{c^2} f \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \frac{h_1^+ + h_1^-}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_2^+ + h_2^-}{2} \right) + \frac{\sigma H}{c^2} \frac{\partial w}{\partial t} \left(\frac{h_2^+ + h_2^-}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\rho_e}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \left(\frac{h_1^+ + h_1^-}{2} - \frac{4\pi\sigma h^2 H}{3c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \right] = \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.17)$$

$$\frac{h^2}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(w \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (uw) - \right. \\ \left. - \frac{h^2}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \frac{1-\nu^2}{E} \left\{ \rho_e \left[\frac{c}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_2^+ + h_2^-}{2} \right) - \frac{1-\varepsilon}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \right. \right. \\ \left. + \frac{4\pi\sigma h^2}{3c^2} \frac{\partial w}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{H}{c} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{h_2^+ + h_2^-}{2} + \frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{h_1^+ + h_1^-}{2} - \right. \\ \left. - \frac{4\pi\sigma h^2 H}{3c^3} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right] + \frac{h_2^+ + h_2^-}{2} \left(\frac{\rho_e}{c} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma}{c} \varphi + \frac{\sigma H}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \\ \left. + \left(\frac{h_1^+ + h_1^-}{2} - \frac{4\pi\sigma h^2 H}{3c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \cdot \left(\frac{\sigma H}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\sigma}{c} \psi - \frac{\rho_e}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \left[-\rho_e \frac{4\pi\sigma h^2}{3c} \left(\varphi + \frac{H}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\sigma H}{c} \left(\frac{h^2}{3} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma h^2}{3c} \left(\psi - \frac{H}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right) \right] \right\} - \\ - \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\sigma h^2 H^2}{3c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{2\sigma h^2 H}{3c^2} f \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \rho_e \left(w \varphi + \frac{H}{c} w \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sigma H}{c} \left(w \psi - \frac{H}{c} w \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \rho_e \frac{4\pi\sigma h^2}{3c^2} \frac{\partial w}{\partial t} \left(\varphi + \frac{H}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right) \right\} = 0 \quad (3.18)$$

Таким образом, система трехмерных уравнений внутренней задачи нелинейной теории магнитоупругости тонких пластин на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел путем уточнения условий на лицевых поверхностях пластинки свелась к интегрированию шести двумерных (одномерных) дифференциальных уравнений (3.13)–(3.18) относительно основных неизвестных функций $u, v, w, \varphi, \psi, f$. Как было уже сказано выше, в этих уравнениях наряду с нелинейными членами, обусловленные начальным и текущим состоянием пластинки [1], присутствуют также нелинейные члены, которые получены путем уточнения условий на лицевых поверхностях пластинки. Отметим, что если в этих уравнениях не учитывать влияние внешнего магнитного поля, то полученные уточненные нелинейные уравнения совпадают с уравнениями, приведенными в [6].

В нелинейные уравнения магнитоупругости тонких пластин (3.13)–(3.18) входят неизвестные граничные значения возмущений тангенциальных компонент магнитного поля на поверхностях пластинки $z = \pm h + w$. На основе некоторых допущений о характере изменения компонент электромагнитного поля в пограничной к поверхностям пластинки области внешней среды в [2] из уравнений электродинамики окружающего тела (1.3) получаются недостающие следующие четыре дифференциальных уравнения

$$\cup h_1^* = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right), \quad \cup h_1^- = -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)$$

$$\cup h_2^* = -\frac{1}{\lambda c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \cup h_2^- = \frac{1}{\lambda c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \cup = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (3.19)$$

где λ - некоторый характерный для данной задачи размер. Следовательно, пространственная задача магнитоупругих нелинейных колебаний тонких пластин свелась к решению системы десяти двумерных (одномерных) нелинейных дифференциальных уравнений (3.13) - (3.19), при обычных условиях закрепления краев пластинки и условия затухания возмущений на бесконечности.

4. Рассмотрим задачу колебания шарнирно-опертой пластинки, один из размеров которой значительно превышает второй размер, во внешнем поперечном постоянном магнитном поле. Исследуем эту задачу на основе уравнений (3.13) - (3.19). Граничные условия при $x=0$ и $x=a$ представим в виде [6]

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad T_1 = 0 \quad (4.1)$$

Для компонент индуцированного электромагнитного поля граничные условия будут [2]

$$\psi = \frac{H}{c} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad f = -H \frac{\partial u}{\partial x}, \quad h_1^* + h_1^- = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (h_1^* - h_1^-) = 0 \quad \text{при } x = 0, a \quad (4.2)$$

Представим решение системы (3.13) - (3.19), удовлетворяющее граничным условиям (4.1) и (4.2), в виде

$$u = u(t) \cos \frac{\pi x}{a}, \quad w = w(t) \sin \frac{\pi x}{a}, \quad \psi = \psi(t) \cos \frac{\pi x}{a}$$

$$f = f(t) \sin \frac{\pi x}{a}, \quad h_1^* + h_1^- = q_-(t) \sin \frac{\pi x}{a}, \quad h_1^* - h_1^- = q_+(t) \cos \frac{\pi x}{a} \quad (4.3)$$

Подставляя (4.3) в систему (3.13) - (3.19) и применяя метод Бубнова-Галеркина, получается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений. В общем виде задача интегрирования полученной нелинейной системы почти неразрешима. Целесообразно рассмотреть частный случай. Примем, что $\rho_r = 0$ и не будем учитывать инерционные члены, обусловленные тангенциальным перемещением. Для электродинамической части и для тангенциального перемещения примем квазистатическое приближение и в уравнении (3.16) отбросим нелинейные члены. Исключая из уравнений (3.13) - (3.16) u, ψ, f и q_- и

принимая $\lambda = \frac{a}{\pi}$ из (3.17), для $w(t)$ получим следующее нелинейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \omega_0^2 w = -2\alpha \frac{dw}{dt} - \beta^2 \left(\frac{dw}{dt} \right)^3 + \gamma^2 w \left(\frac{dw}{dt} \right)^2$$

$$\alpha = \frac{\sigma h^2 \pi^2 H^2}{6 \rho a^2 c^2}, \quad \beta^2 = \frac{256}{27} \frac{\sigma^3 h^5 \pi^3 H^2}{\rho a^3 c^6 (1 + h \pi a^{-1})}$$

$$\gamma^2 = \frac{64}{9} \frac{\sigma^2 h^3 \pi^2 H^2}{\rho a^3 c^4 (1 + h \pi a^{-1})}, \quad \omega_0^2 = \frac{E h^2 \pi^4}{3 \rho a^4 (1 - \nu^2)} \quad (4.4)$$

Применим к уравнению (4.4) метод гармонического баланса [7]. Выберем решение уравнения в форме

$$w(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t, \quad A_1, A_2 = \text{const} \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в уравнение (4.4) и разлагая

$$F(t) = w(t) + \frac{2\alpha}{\omega_0^2} \frac{dw}{dt} + \frac{\beta^2}{\omega_0^2} \left(\frac{dw}{dt} \right)^3 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2} w \left(\frac{dw}{dt} \right)^2$$

в ряд по косинусам (при этом ограничимся в разложении первым членом), придем к следующему уравнению:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{1}{4} \gamma^2 (A_1^2 + A_2^2) \right)^{-1} \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) выражает зависимость частоты нелинейных магнитоупругих колебаний ω и амплитуды. Учет нелинейности приводит к уменьшению частоты колебаний. В зависимости от напряженности внешнего магнитного поля, характер нелинейных магнитоупругих колебаний пластинки может быть мягким (мягкая колебательная система). При отсутствии внешнего магнитного поля $\gamma = 0$ ($H = 0$) нелинейность исчезает и пластинка совершает линейные колебания с частотой ω_0 .

Теперь построим решение нелинейного уравнения (4.4) методом усреднения [8]. Для того, чтобы применить метод усреднения к уравнению (4.4) воспользуемся идеей вариации произвольных постоянных и введем преобразование

$$w(t) = A(t) \cos \theta, \quad \frac{dw}{dt} = -A(t) \omega_0 \sin \theta, \quad \theta = \omega_0 t + \varphi(t) \quad (4.7)$$

Подставляя выражение (4.7) в исходное уравнение (4.4), после некоторых преобразований [8], получим

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} = & -\alpha A - \frac{3}{8} \omega_0^2 \beta^2 A^3 + \left(\alpha A + \frac{1}{2} \beta^2 \omega_0^2 A^3 \right) \cos 2\theta - \frac{1}{8} \beta^2 \omega_0^2 A^3 \cos 4\theta - \\ & - \frac{1}{4} \gamma^2 \omega_0 A^3 \sin 2\theta + \frac{1}{8} \gamma^2 \omega_0 A^3 \sin 4\theta \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = & -\frac{1}{8} \gamma^2 \omega_0 A^2 + \frac{1}{8} \gamma^2 \omega_0 A^2 \cos 4\theta + \frac{1}{8} \beta^2 \omega_0^2 A^2 \sin 4\theta - \\ & - \left(\alpha + \frac{1}{4} \beta^2 \omega_0^2 A^2 \right) \times \sin 2\theta \end{aligned} \quad (4.9)$$

В первом приближении, сохраняя только медленно меняющиеся члены, т.е. члены, не содержащие тригонометрических функций, уравнения (4.8) и (4.9) заменим следующими усредненными уравнениями

$$\frac{dA}{dt} = -\alpha A - \frac{3}{8} \omega_0^2 \beta^2 A^3 \quad (4.10)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{8} \gamma^2 \omega_0 A^2 \quad (4.11)$$

Интегрируя уравнения (4.10) и (4.11) с начальными условиями при $t = 0$ $A = A_0 = \text{const}$ $\varphi = 0$, согласно (4.7) и (4.3), для прогиба нелинейных магнитоупругих колебаний пластинки получим

$$\begin{aligned} w(x, t) = & A_0 e^{-\omega t} \left[1 + \chi A_0^2 (1 - e^{-2\omega t}) \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ & \times \cos \left\{ \omega_0 \left(t - \frac{c^2}{8\pi \sigma h^2 \omega_0^2} \ln \left[1 + \chi A_0^2 (1 - e^{-2\omega t}) \right] \right) \right\} \sin \frac{\pi x}{a} \end{aligned} \quad (4.12)$$

где

$$\chi = \frac{64\sigma^2 h^3 \pi \omega_0^2}{3ac^4(1 + h\pi a^{-1})}$$

Имея значения прогиба (4.12), для электродинамических величин в квазистатическом приближении, согласно (4.3), из системы уравнений (3.13) - (3.19) будем иметь

$$\begin{aligned} \psi &= 0, & h_1^+ - h_1^- &= -2f(t) \cos \frac{\pi x}{a}, & f(x, t) &= f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \\ f(t) &= \frac{16\pi\sigma h H}{3ac^2(1 + h\pi a^{-1})} \left[\frac{4\pi\sigma h^2}{3c^2} \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 - w \frac{dw}{dt} \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Настоящее исследование выполнено по гранту INTAS-94-1210.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Основные уравнения и соотношения нелинейных магнитоупругих колебаний тонких электропроводящих пластинок. -Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1985, т.38, N2, с.17-29.
2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубемян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. -М.: Наука, 1977.
3. Багдасарян Г.Е., Хачатрян Г.М. Нелинейные колебания проводящей пластинки в продольном магнитном поле. -Изв. НАН РА, Механика, 1991, т.44, N3, с.34-41.
4. Багдасарян Г.Е. Нелинейные колебания идеально проводящей пластинки в наклонном магнитном поле. -Изв. НАН РА, Механика, 1995, т.48, N3, с.5-14.
5. Мольченко Л.В. Математические основы нелинейной магнитоупругости теории оболочек. -Киев, 1988, 48с. (Препринт АН УССР. -Ин-т математики; 88, 47).
6. Белубемян М.В., Саркисян С.В. Об одном уточнении уравнений нелинейных колебаний пластин. - Уч. зап ЕГУ, 1992, N1.
7. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. -М.: Наука, 1972.
8. Найфэ А. Введение в методы возмущений. -М.: Мир, 1984.

Ереванский Госуниверситет

Поступила в редакцию

16.01.1997

ОПТИМИЗАЦИЯ КОНФИГУРАЦИЙ И НАПРАВЛЕНИЙ ПОВОРОТОВ ЗВЕНЬЕВ ДВУЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА ПО КОМБИНИРОВАННЫМ КРИТЕРИЯМ КАЧЕСТВА

Аветисян В.В.

Վ.Վ. Ավետիսյան

Երկրէ մանիպուլատորի կոնֆիգուրացիայի և բերի պտտման ուղղութիւնների օպտիմիզացիան ըստ որակի կոմբինացված ցուցանիշի

Առաջարկվում է դիագրամային եղանակ, որը ենթարկվողություն է տալիս երկրէ մանիպուլատորի վերջնական կոնֆիգուրացիայի և բերի պտտման ուղղությունների ընտրման շնորհիվ ապահովել օպտիմալ ըստ որակի կոմբինացված ցուցանիշի մանիպուլատորի բռնիքի բերելը աշխատանքային գոտու տրված դիրք:

V.V. Avetisyan

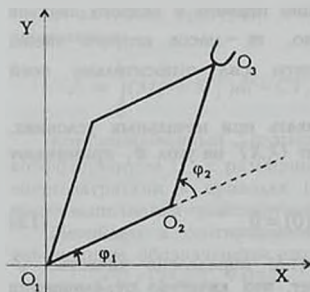
Optimization of configurations and directions of rotations of two-link manipulators by the combined criteria of quality

Предлагается диаграммный способ выбора конечной конфигурации и направлений поворотов звеньев манипулятора, обеспечивающих оптимальное по заданному критерию приведение схвата манипулятора в заданное положение в рабочей зоне.

1. В плоскопараллельном движении двухзвеного манипулятора, имеющего прямолинейные и одинаковые по длине, равные a , звенья, декартовы координаты (x, y) схвата O_3 однозначно определяются обобщенными координатами φ_1, φ_2

$$x = a[\cos \varphi_1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)], \quad y = a[\sin \varphi_1 + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad (1.1)$$

Примем, что отсчет углов φ_1 и φ_2 ведется против часовой стрелки от соответствующих прямых O_1X и O_1O_2 соответственно (фиг.1).



Փիգ. 1

Из (1.1) следует, что каждому положению (x, y) схвата отвечают две конфигурации. Обозначим их через $\{\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)\}^{(p)}$, $p = \pm 1$. В дальнейшем для краткости аргументы (x, y) функций $\varphi_i(x, y)$ будут опускаться. Значению $p = +1$ отвечает конфигурация, при которой $0 \leq \varphi_2 \leq \pi$, а значению $p = -1$ — $-\pi \leq \varphi_2 \leq 2\pi$. Между углами $\varphi_i^T, i = 1, 2$, отвечающими

различным значениям p , имеется следующая связь:

$$\varphi_1^T|_{p=-1} = \varphi_1^T|_{p=1} + \varphi_2^T|_{p=1}, \quad \varphi_2^T|_{p=-1} = 2\pi - \varphi_2^T|_{p=1} \quad (1.2)$$

Предположим, что рассматриваемый манипулятор в своем движении допускает изменение углов $\Delta\varphi_i, \Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_i^0$ в диапазонах $\Omega = \{\Delta\varphi_i: |\Delta\varphi_i| \leq 2\pi, i = 1, 2\}$. Такое допущение позволяет перемещать схват из любого начального положения в заданное положение в рабочей зоне. Отметим, что пары обобщенных координат $(\varphi_1, \varphi_2), (\varphi_1 - 2\pi, \varphi_2), (\varphi_1, \varphi_2 - 2\pi), (\varphi_1 - 2\pi, \varphi_2 - 2\pi)$ определяют одну и ту же конфигурацию манипулятора. Однако, приведенные выше различные параметрические представления этой конфигурации несут информацию о способе приведения манипулятора в данную конфигурацию из исходного положения $(\varphi_1^0 = 0, \varphi_2^0 = 0)$. Так, например, пара $(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_1 > 0, \varphi_2 > 0$ означает, что для прихода в соответствующую конфигурацию первое звено было повернуто на угол φ_1 , а второе — на угол φ_2 против часовой стрелки, в то время как $(\varphi_1 - 2\pi, \varphi_2)$ означает, что для приведения в ту же самую конфигурацию первое звено было повернуто на угол $2\pi - \varphi_1$ по часовой стрелке, а второе — на угол φ_2 против часовой стрелки.

В соответствии с этим любую конфигурацию можно задавать в одной из следующих четырех форм:

$$\begin{aligned} \{\varphi_1^T, \varphi_2^T\} &= (\varphi_1^T, \varphi_2^T)_n, \quad n = 1, 2, 3, 4, \quad (\varphi_1^T, \varphi_2^T)_1 = (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \\ (\varphi_1^T, \varphi_2^T)_2 &= (\varphi_1^T - 2\pi, \varphi_2^T), \quad (\varphi_1^T, \varphi_2^T)_3 = (\varphi_1^T, \varphi_2^T - 2\pi) \\ (\varphi_1^T, \varphi_2^T)_4 &= (\varphi_1^T - 2\pi, \varphi_2^T - 2\pi), \quad 0 \leq \varphi_1^T, \varphi_2^T \leq 2\pi \end{aligned} \quad (1.3)$$

Четыре различных способа в (1.3), отвечающие сочетаниям поворотов по часовой стрелке и против часовой стрелки и осуществляющие заданный переход на плоскости $(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$, определяют четыре различные точки вида $(\varphi_1^T, \varphi_2^T)_n, n = 1, 2, 3, 4$.

Рассмотрим модель статически уравновешенным вторым звеном двухзвенного манипулятора, движения которого описываются уравнениями и ограничениями

$$(I_1 + I_2 + ma^2)\ddot{\varphi}_1 + I_2\ddot{\varphi}_2 = M_1, \quad I_2\ddot{\varphi}_1 + I_2\ddot{\varphi}_2 = M_2 \quad (1.4)$$

$$|M_1| \leq M_1^0, \quad |M_2| \leq M_2^0, \quad M_i^0 > 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.5)$$

В (1.4), (1.5) I_1, I_2 — моменты инерции первого и второго звеньев относительно осей O_1, O_2 соответственно, m — масса второго звена, M_1, M_2 — главные управляющие моменты сил относительно осей шарниров O_1, O_2 соответственно.

Систему (1.4), (1.5) будем рассматривать при начальных условиях, которые после поворота системы координат O_1XY на угол φ_1 принимают вид

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = \varphi_2^0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0 \quad (1.6)$$

Допустим, что для системы (1.4), (1.5) определено качество J перемещения. Из вышесказанного следует, что качество перемещения системы (1.4), (1.5) зависит не только от способа задания, входящих в

(1.4), (1.5) управлений M_i , но и от значений параметров n и p , определяющих, соответственно, направление перемещения и тип конечной конфигурации рассматриваемого манипулятора. Поэтому для критерия оптимальности J имеем следующую зависимость:

$$J = J((\varphi_1^T, \varphi_2^T)_n^{(p)}; M), \quad (\varphi_1^T, \varphi_2^T)_n^{(p)} \in \Omega$$

$$M = (M_1, M_2), \quad p = \pm 1, \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (1.7)$$

Отметим, что переход манипулятора из состояния (1.6) $\{\varphi_1, \varphi_2\} = \{0, \varphi_2^0\}$ в некоторое состояние $\{\varphi_1, \varphi_2\} = \{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}$ равносильно переходу из нулевого состояния с конфигурацией $\{0, 0\}$ в состояние, определяемое конфигурацией $\{\varphi_1^T, \varphi_2^T - \varphi_2^0\}$. Поэтому, не нарушая общности, дальнейшее рассмотрение можно вести при начальной конфигурации $\{\varphi_1^0, \varphi_2^0\} = \{0, 0\}$.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления манипулятором. Пусть в начальный момент времени схват манипулятора находится в положении

$$x(0) = a[\cos \varphi_1^0 + \cos(\varphi_1^0 + \varphi_2^0)] = x^0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$y(0) = a[\sin \varphi_1^0 + \sin(\varphi_1^0 + \varphi_2^0)] = y^0, \quad \dot{y}(0) = 0 \quad (1.8)$$

Требуется выбрать способ управления $M = (M_1, M_2)$ манипулятором (1.4), (1.5), направления поворотов $l = 1, 2, 3, 4$ звеньев и тип $p = \pm 1$ конечной конфигурации, которые обеспечивают

$$J^* = \min_p \min_n \min_M J[(\varphi_1^T, \varphi_2^T)_n^{(p)}, M] \quad (1.9)$$

при приведении схвата в заданное положение в рабочей зоне с нулевой скоростью в момент окончания процесса

$$x(T) = a[\cos \varphi_1^T + \cos(\varphi_1^T + \varphi_2^T)] = x^T, \quad \dot{x}(T) = 0$$

$$y(T) = a[\sin \varphi_1^T + \sin(\varphi_1^T + \varphi_2^T)] = y^T, \quad \dot{y}(T) = 0 \quad (1.10)$$

2. Первый внутренний минимум в (1.9) есть задача построения оптимального по заданному критерию J управления $M = (M_1, M_2)$ для системы (1.4), (1.5) с начальными условиями (1.6) и конечными условиями

$$\varphi_i(T) = \varphi_i^T, \quad \dot{\varphi}_i(T) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (2.1)$$

В качестве критерия J рассмотрим функционал (в размерных переменных)

$$J = \int_0^T (M_1^2 + M_2^2) dt + CT, \quad C \geq 0 \quad (2.2)$$

Комбинированный функционал (2.2) (с постоянным весовым коэффициентом C с размерностью мощности тепловыделения) наряду с энергозатратами в приводах (интегральный член) учитывает также и время выполнения транспортной операции (терминальный член).

Перейдем в соотношениях (1.4)-(1.6), (2.1), (2.2) к безразмерным переменным, обозначенным штрихами

$$t' = (M_2^0 m^{-1} a^{-2})^{1/2} t, \quad I'_i = I_i / m a^2, \quad M'_i = M_i / M_2^0$$

$$J'_i = (m^{-1}a^{-2})^{1/2} (M_2^0)^{-3/2} J_i, \quad C' = C(M_2^0)^2, \quad T' = (M_2^0 m^{-1} a^{-2})^{1/2} T, \quad i = 1, 2 \quad (2.3)$$

Далее, опустив штрихи и сделав замену переменных

$$\psi_i = (I_1 + I_2 + 1)\varphi_i + I_2\varphi_2, \quad \psi_2 = I_2\varphi_1 + I_2\varphi_2 \quad (2.4)$$

соотношения (1.4)-(1.6), (2.1), функционал (2.2) упрощаются и задача оптимального управления преобразуется к виду

$$\dot{\psi}_i = M_i, \quad |M_i| \leq M_i^0, \quad i = 1, 2, \quad M_2^0 = 1 \quad (2.5)$$

$$\psi_i(0) = I_2\varphi_2^0, \quad \psi_i(0) = 0, \quad \psi_i(T) = 0, \quad i = 1, 2$$

$$\psi_1(T) = (I_1 + I_2 + 1)\varphi_1^T + I_2\varphi_2^T, \quad \psi_2(T) = I_2\varphi_1^T + I_2\varphi_2^T$$

$$J = \int_0^T (M_1^2 + M_2^2) dt + CT \rightarrow \min.$$

Оптимальные траектории, управления и соответствующее им значение функционала в задаче (2.5) (без учета ограничений на $M_i, i = 1, 2$) имеют вид [1]

$$\psi_i = 3\psi_i^T T^{-2} t^2 - 2\psi_i^T T^{-3} t^3, \quad M_i = -12\psi_i^T T^{-3} t + 6\psi_i^T T^{-2}, \quad i = 1, 2$$

$$J = 12T^{-1}[(\psi_1^T)^2 + (\psi_2^T)^2] + CT, \quad T = T^* = \left\{ 36[(\psi_1^T)^2 + (\psi_2^T)^2] \right\}^{1/4} \quad (2.6)$$

Оптимальные управления $M_i, i = 1, 2$ (2.6) должны удовлетворять ограничениям (2.5) при всех $t \in [0, T^*]$. Поскольку управления (2.6), как функции линейны относительно t , то выполнение ограничений (2.5) достаточно требовать при $t = 0$ и $t = T^*$, что в конечном итоге (в переменных $\varphi, i = 1, 2$ (2.4)) приводит к выполнению следующих неравенств относительно $\varphi_i^T, i = 1, 2$:

$$6\{(\alpha_1\varphi_1^T + \beta_1\varphi_2^T)\{36[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\varphi_1^T)^2 + 2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)\varphi_1^T\varphi_2^T + (\alpha_2^2 + \beta_2^2)(\varphi_2^T)^2]\}^{-1/2}\} \leq M_i^0$$

$$\alpha_1 = I_1 + I_2 + 1, \quad \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = I_2, \quad i = 1, 2, \quad M_2^0 = 1 \quad (2.7)$$

Таким образом, управления (2.6), (2.4) обеспечивают минимум функционалу качества J при ограничениях (2.5) и граничных условиях (1.6), (2.1) для тех и только тех конечных значений $\varphi_i^T, i = 1, 2$, которые удовлетворяют неравенствам (2.7).

3. Вместо многократного вычисления функционала (1.9), при определении второго и третьего минимумов (по n и p) для каждой точки $\{\varphi_1, \varphi_2\} = \{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}$, предлагается следующий диаграммный способ [2,3], позволяющий определить J в зависимости от положения точки в конфигурационной плоскости $(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$. Введем на плоскости $(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$ новые координатные системы с началами K_n в точках $K_1(0,0), K_2(2\pi,0), K_3(0,2\pi), K_4(2\pi,2\pi)$, что соответствует преобразованиям координат. При таком переходе квадратная область Ω перейдет на квадратную область $\Phi = \{(\varphi_1^T, \varphi_2^T): 0 \leq \varphi_1^T, \varphi_2^T \leq 2\pi\}$. Точки $\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}_n \in \Omega, n = 1, 2, 3, 4$ можно рассматривать как одну точку $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi$, но относительно системы координат $K_n \varphi_1^T \varphi_2^T, n = 1, 2, 3, 4$. Таким образом, все исследования можно провести в области Φ . Если в

(2.6) перейти к переменным φ , (2.4), то в итоге, согласно (1.3), в каждой точке области Φ будем иметь четыре представления для функционала (2.6). Для краткости, эти представления запишем в следующей удобной форме:

$$J^{(n)} = (2 + 6C) \cdot 6^{-1/2} \cdot [B(\psi_1^T, \psi_2^T, n)]^{1/4}$$

$$B(\psi_1^T, \psi_2^T, n) = \sum_{i=1}^n \left\{ \psi_i^T - 2\pi \left[\alpha_i \frac{1 + (-1)^n}{2} + \beta_i \frac{(-1)^{n-1} - (-1)^n \text{sign}(n-2)}{2} \right] \right\}$$

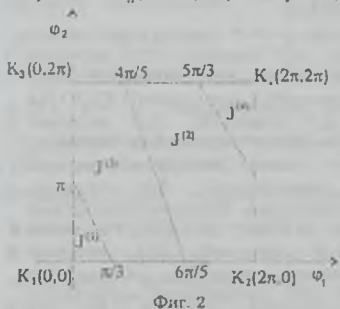
$$\psi_i^T = \alpha_i \varphi_1^T + \alpha_i \varphi_2^T, \quad i = 1, 2, \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (3.1)$$

Оптимизация функционалов (3.1) относительно начала координат K_n , $n = 1, 2, 3, 4$ качественно зависит от значений параметров задачи и требует довольно громоздких вычислений, поэтому для иллюстраций предлагаемой методики рассмотрим манипулятор со следующими размерными параметрами, фигурирующими в (1.4), (1.5) [4]:

$$a = 1\text{М}, \quad m = 10\text{кг}, \quad I_1 = I_2 = (10/3)\text{кг/м}^2 \quad (3.2)$$

$$M_1^0 = 2\text{Н} \cdot \text{м}, \quad M_2^0 = 1\text{Н} \cdot \text{м}, \quad T^* = 8\text{сек.}$$

Параметр C , входящий в выражение (3.1), для функционала $J^{(n)}$ брался равным единице. После подстановки обезразмеренных по формуле (2.3) значений параметров (3.2) в выражение для функционалов $J^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, 4$ (3.1) и их оптимизации на множестве конечных значений φ_i^T , $i = 1, 2$, удовлетворяющих неравенствам (2.7), относительно начал координат K_n , $n = 1, 2, 3, 4$ получим диаграмму, показанную на фиг. 2.



Фиг. 2

Задавшись начальным φ_2^0 и конечным значениями, из соответствующей диаграммы можно определить наилучшее в смысле минимума функционала качества направления поворотов звеньев, осуществляющие перемещения манипулятора в заданное конечное положение. Направления поворотов определяются в зависимости от верхнего индекса функционала, соответствующего той области, где лежит точка $(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$. Для

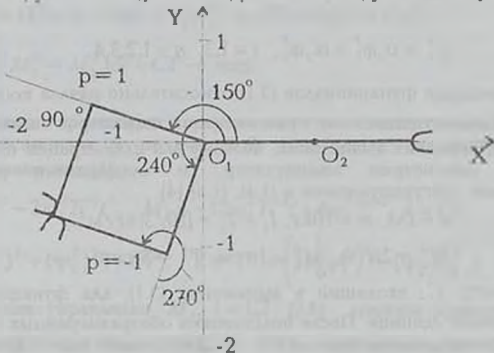
определения минимума функционала (1.9) по параметру p заметим, что конфигурации $\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}^{(i)}$ и $\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}^{(i-1)}$, отвечающие одному и тому же положению схвата манипулятора, принадлежат области с одним и тем же верхним индексом $J^{(n)}$ или принадлежат областям с различными верхними индексами $J^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, 4$. В обоих случаях простым вычислением значений функционалов с помощью (3.1) определяются оптимальные значения $p = 1$ или $p = -1$.

По предложению методики проводилась оптимизация движений по критерию (2.3) также и для электромеханической модели двухзвенного манипулятора [3,5]. Результаты расчетов (не приводимые здесь) показали,

что учет динамики приводов вносит заметное уточнение в определении оптимальных перемещений двухзвенного манипулятора.

4. Примем, что манипулятор характеризуется размерными параметрами фигурирующими в (3.2). Начальные и конечные координаты схвата манипулятора возьмем в виде $x^0 = 2\text{м}$, $y^0 = 0$, $x^T = -1.87\text{м}$, $y^T = -0.37\text{м}$. Им в первичных угловых переменных (в радианах) отвечают следующие начальные и конечные условия (1.1), (1.2), удовлетворяющие неравенствам (2.7), (фиг. 3.1):

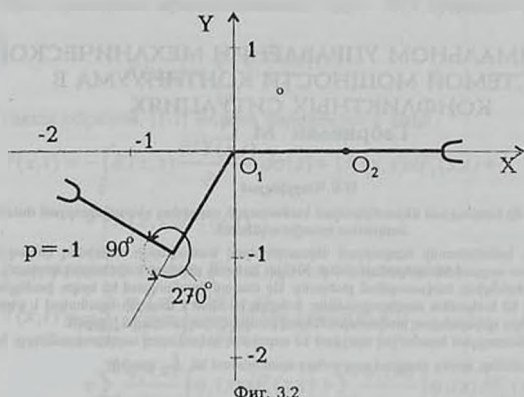
$$\varphi_1^T = 5\pi/6, \quad \varphi_2^T = \pi/2 \quad (p=1), \quad \varphi_1^T = 4\pi/3, \quad \varphi_2^T = 3\pi/2 \quad (p=-1) \quad (4.1)$$



Фиг. 3.1

Из диаграммы фиг. 2, построенной для манипулятора (3.2), (1.4), находим, что конечная точка (4.1) при $p=1$ принадлежит области, обозначенной через $J^{(1)}$, а точка (4.1) при $p=-1$ принадлежит области, обозначенной через $J^{(2)}$. Это означает, что для приведения схвата манипулятора, определяемая начальной конфигурацией $\varphi_1^0 = \varphi_2^0 = 0$ в конечную конфигурацию (4.1) ($p=1$) с минимизацией функционала J необходимо согласно (1.3) первое звено повернуть на угол $\varphi_1^T = 5\pi/6 = 150^\circ$ против часовой стрелки, а второе звено повернуть относительно первого звена на угол $\varphi_2^T = 2\pi - \pi/2 = 270^\circ$ по часовой стрелке, используя при этом оптимальные законы управления (2.6), (2.4). В конечную конфигурацию (4.1) ($p=-1$) манипулятор приводится поворотом первого звена по часовой стрелке на угол $\varphi_1^T = 2\pi - 4\pi/3 = 120^\circ$ и поворотом второго звена относительно первого на угол $\varphi_2^T = 3\pi/2 = 270^\circ$ против часовой стрелки. Если по формулам (3.1) вычислить значения функционалов $J^{(2)}$ и $J^{(3)}$, то получим, что $J^{(2)} \approx 69.5$ и $J^{(3)} \approx 232.1$. Это означает, что для приведения схвата манипулятора в заданное положение необходимо выбрать конечную конфигурацию, отвечающую значению $p=-1$. Зафиксируем теперь, конфигурацию, отвечающую значению $p=-1$ (фиг. 3.2). Здесь оптимальным, на первый взгляд, кажется поворот второго звена относительно первого на угол $\varphi_2^T = \pi/2 = 90^\circ$ по часовой стрелке,

наряду с поворотом первого звена на угол $\varphi_1^T = 2\pi/3 = 120^\circ$ по часовой стрелке. Этим значениям конечных точек φ_1^T, φ_2^T и указанным направлениям поворотов звеньев соответствует значение функционала $J^{(4)} \approx 83.8$, что намного больше от минимального значения функционала, определяемого в этой же точке согласно диаграмме фиг. 2.



Фиг. 3.2

Предложенный в работе диаграммный способ требует небольшого объема вычислений и может быть использован для расчета оптимальных и субоптимальных программных движений манипуляционных роботов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В., Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Оптимизация режимов управления манипуляционными роботами с учетом энергозатрат. — Изв. АН СССР. Техническая Кибернетика, 1987, №3.
2. Аветисян В.В., Овакимян Н.В. Оптимальные плоско-параллельные движения двухзвенного манипулятора. — Изв. РАН. Теория и Системы Управления, 1995, № 3.
3. Аветисян В.В. Оптимальные по энергозатратам перемещения электромеханического манипуляционного робота. — Изв. РАН. Теория и Системы Управления, 1996, №4.
4. Аветисян В.В., Болотник Н.Н., Черноусько Ф.А. Оптимальные программные движения двухзвенного манипулятора. — Изв. АН СССР. Техническая Кибернетика, 1985, №3.
5. Аветисян В.В. Оптимизация транспортных движений манипуляционных роботов с ограничением на мощность тепловыделения. — Изв. АН СССР. Техническая Кибернетика, 1987, №4.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
3.12.1996

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ
СИСТЕМОЙ МОЩНОСТИ КОНТИНУУМА В
КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЯХ

Габриелян М. С.

Մ.Ս. Գաբրիելյան

Կոնտինուումի հզորության մեխանիկական համակարգի օպտիմալ ղեկավարության մասին
հավանաբար իրավիճակներում

Հետազոտված է կոնտինուումի հզորության մեխանիկական համակարգի օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը, երբ նրա վրա ազդում են հակամետ ուժեր: Խնդրի լուծումը բերվում է սիմետրիկ կորիզով, և աջ մասով ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման լուծմամբ: Աջ մասում մասնակցում են երկու ֆունկցիաներ, որոնք հանդիսանում են հակամետ ազդեցություններ: Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի եղանակով և բերված է երկրորդ կարգի անվերջ դիֆերենցիալ հավասարումներով քննարկվող խաղային խնդրին:

Էքստրեմալ նշանառության եղանակով որոշված են օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունները: Նշված են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում այդ ուժերը պատկանում են L_2 դասին:

M.S.Gabrielyan

On the optimal control for the continuum power mechanical system in the conflict situations

Исследуется задача об оптимальном управлении механической системой мощности континуума, когда на континуум действуют противоборствующие силы. Решение задачи приводится к решению интегро-дифференциального уравнения с симметричным ядром и правой частью [1]. В правой части участвуют две противоборствующие силы в виде функций, действующих на континуум. Задача решается методом Фурье и приводится к игровой задаче для бесконечной системы дифференциальных уравнений второго порядка.

Применяя методы экстремального прицеливания, определяются оптимальные управляющие силы. Указываются достаточные условия, при которых действующие силы принадлежат классу L_2 .

§1. Рассмотрим упругий линейный континуум S . Пусть $Y(x, t)$ - отклонение точки с абсциссой x от положения равновесия в момент t . Допустим, что функция $K(x, s)$ есть функция влияния, т.е. прогиб точки x от единичной силы, приложенной в точке $s(x, s \in S)$ континуума. Пусть на континуум действуют дополнительные силы $dF_1(x, t)$ и $dF_2(x, t)$, приложенные к участку dx в точке x перпендикулярно к оси x .

Известно [1], что определение прогиба $Y(x, t)$ приводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$Y(x, t) = - \int_S K(x, s) \frac{\partial^2 Y(s, t)}{\partial t^2} d\sigma(s) + \int_S K(x, s) dF_1(s, t) + \int_S K(x, s) dF_2(s, t) \quad (1.1)$$

где $d\sigma(s)$ - масса, приходящаяся на элемент ds континуума. Исходя из принципа Максвелла, предположим, что функция влияния $K(x, s)$ симметрична, квадратично суммируема на континууме S по отношению к дифференциалу $d\sigma(s)$. Тогда интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_S K(x,s) \varphi(s) d\sigma(s) \quad (1.2)$$

соответствует система ортонормированных собственных функций $\{\varphi_n(x)\}$ по отношению к дифференциалу $d\sigma(s)$ с вещественными собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots$.

При сделанных предположениях ядро $K(x,s)$ можно представить в виде

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i} \quad (1.3)$$

Таким образом, (1.1) можем переписать в виде

$$Y(x,t) = - \int_S K(x,s) \frac{\partial^2 Y(s,t)}{\partial t^2} d\sigma(s) + \int_S K(x,s) dF_1(s,t) + \int_S K(x,s) dF_2(s,t) \quad (1.4)$$

Подставляя значение $K(x,s)$ (1.3) в (1.4), получим

$$Y(x,t) = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i} \int_S \frac{\partial^2 Y(s,t)}{\partial t^2} \varphi_i(s) d\sigma(s) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i} \int_S \varphi_i(s) dF_1(s,t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i} \int_S \varphi_i(s) dF_2(s,t) \quad (1.5)$$

Умножая (1.5) на $\varphi_i(x)$ и интегрируя по $d\sigma(x)$ на S , получим

$$T_i(t) = -\lambda_i T_i(t) + u_i(t) + v_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (1.6)$$

Здесь

$$T_i = \int_S Y(x,t) \varphi_i(x) d\sigma(x) \quad (1.7)$$

$$u_i(t) = \int_S \varphi_i(x) dF_1(x,t); \quad v_i(t) = \int_S \varphi_i(x) dF_2(x,t);$$

Предполагаем, что силы $dF_1(x,t)$ и $dF_2(x,t)$ ограничены в классе функций L_2 на S по следующей норме:

$$\left[\int_S \left(\frac{dF_1(x,t)}{d\sigma(x)} \right)^2 d\sigma(x) \right]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2(t) \right]^{1/2} \leq P$$

$$\left[\int_S \left(\frac{dF_2(x,t)}{d\sigma(x)} \right)^2 d\sigma(x) \right]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{\infty} v_i^2(t) \right]^{1/2} \leq Q \quad (1.8)$$

равномерно по $t \in [0, T]$.

Здесь P, Q, T — заданные положительные числа.

Пусть заданы также начальный прогиб и начальная скорость континуума

$$Y(x,0) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(0) \varphi_i(x), \quad \frac{\partial Y}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{T}_i(0) \varphi_i(x) \quad (1.9)$$

Рассмотрим следующую игровую ситуацию:

Пусть первый игрок, распоряжающийся управлениями u_i ($i = 1, 2, \dots$) стремится привести континуум S в такое положение, чтобы

$\sum_{i=1}^n (T_i^2(\vartheta) + T_i^2(\vartheta))$ принимал наименьшее значение при самом упорном сопротивлении второго игрока, распоряжающегося управляющими воздействиями v_i ($i = 1, 2, \dots$), а второй игрок в свою очередь стремится максимизировать значение величины (платы) $\sum_{i=1}^n (T_i^2(\vartheta) + T_i^2(\vartheta))$ при

самом упорном сопротивлении со стороны первого игрока. Величину ϑ ($0 < \vartheta \leq T$) определим ниже. Динамика игры определяется бесконечной системой дифференциальных уравнений (1.6). Следует отметить, что полученную игровую ситуацию можно было аккуратно исследовать разделением на три игровые задачи. Но так как метод экстремального прицеливания [2] позволяет определить оптимальные стратегии при динамике, определяемой конечномерной системой дифференциальных уравнений, то целесообразно использовать указанный метод с предельным переходом.

§2. Составим гипотетическое рассогласование. Для простоты предположим, что собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ положительны, тогда, обозначая

$$z_{1i} = T_i; \quad z_{2i} = \frac{T_i}{\sqrt{\lambda_i}} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

систему дифференциальных уравнений (1.6) можем записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1i} &= \sqrt{\lambda_i} z_{2i} \\ \dot{z}_{2i} &= -\sqrt{\lambda_i} z_{1i} + u_i + v_i \quad (i = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.2)$$

i -ый блок фундаментальной матрицы однородной части системы (2.2) будет:

$$Z_i(t, \tau) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\lambda_i} (t - \tau) & \sin \sqrt{\lambda_i} (t - \tau) \\ -\sin \sqrt{\lambda_i} (t - \tau) & \cos \sqrt{\lambda_i} (t - \tau) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Гипотетическое рассогласование для сформированной игровой ситуации будет

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(0)}(t, \{z_{1i}(t), z_{2i}(t)\}, T) &= \max_{\sum_{i=1}^n (l_{1i}^2 + l_{2i}^2) \leq P^2} \left[\sum_{i=1}^n (l_{1i} + l_{2i}) Z_i(t, T) \begin{pmatrix} z_{1i}(T) \\ z_{2i}(T) \end{pmatrix} + \right. \\ &+ \int_t^T \min_{\sum_{i=1}^n u_i^2 \leq P^2} \sum_{i=1}^n (l_{1i}, l_{2i}) Z_i(T, \tau) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda_i)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} u_i d\tau + \\ &\left. + \int_t^T \max_{\sum_{i=1}^n v_i^2 \leq Q^2} \sum_{i=1}^n (l_{1i}, l_{2i}) Z_i(T, \tau) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda_i)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} v_i d\tau \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Так как области $\sum_{i=1}^n u_i^2 \leq P^2$, $\sum_{i=1}^n v_i^2 \leq Q^2$ выпуклые, а минимизирующиеся и максимизирующиеся функции линейные, то минимум и максимум достигаются на границах, то есть

$$\varepsilon^{(0)}(t, \{z_{1i}(t), z_{2i}(t)\}, T) = \max_{\sum_{i=1}^n (l_{1i}^2 + l_{2i}^2) \leq 1} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[l_{1i} a_i + l_{2i} b_i + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\sum_{j=1}^n u_j^0 = P}^T \min_{\sum_{j=1}^n v_j^0 = Q} \sum_{j=1}^n \left(l_{1j} \sin \sqrt{\lambda_j} (T - \tau) + l_{2j} \cos \sqrt{\lambda_j} (T - \tau) \right) \frac{u_j}{\sqrt{\lambda_j}} d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\sum_{j=1}^n v_j^0 = Q}^T \max_{\sum_{j=1}^n u_j^0 = P} \sum_{j=1}^n \left(l_{1j} \sin \sqrt{\lambda_j} (T - \tau) + l_{2j} \cos \sqrt{\lambda_j} (T - \tau) \right) \frac{v_j}{\sqrt{\lambda_j}} d\tau \right] \right\} \quad (2.5)$$

где

$$a_i = z_{1i}(t) \cos \sqrt{\lambda_i} (T - \tau) + z_{2i} \sin \sqrt{\lambda_i} (T - \tau)$$

$$b_i = z_{2i}(t) \cos \sqrt{\lambda_i} (T - \tau) - z_{1i} \sin \sqrt{\lambda_i} (T - \tau)$$

Используя метод неопределенных коэффициентов Лагранжа, для u_i^0 и v_i^0 получим

$$u_i^0(\tau) = - \frac{P \left[l_{1i} \sin \sqrt{\lambda_i} (T - \tau) + l_{2i} \cos \sqrt{\lambda_i} (T - \tau) \right]}{\sqrt{\lambda_i} \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \left(l_{1j} \sin \sqrt{\lambda_j} (T - \tau) + l_{2j} \cos \sqrt{\lambda_j} (T - \tau) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.6)$$

$$v_i^0(\tau) = \frac{Q \left[l_{1i} \sin \sqrt{\lambda_i} (T - \tau) + l_{2i} \cos \sqrt{\lambda_i} (T - \tau) \right]}{\sqrt{\lambda_i} \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \left(l_{1j} \sin \sqrt{\lambda_j} (T - \tau) + l_{2j} \cos \sqrt{\lambda_j} (T - \tau) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Подставляя значения $u_i^0(\tau)$ и $v_i^0(\tau)$ из (2.6) в (2.5), получим

$$\varepsilon^{(0)}(t, \{z_{1i}(t), z_{2i}(t)\}, T) = \max_{\sum_{i=1}^n (l_{1i}^2 + l_{2i}^2) \leq 1} \left\{ \sum_{i=1}^n (l_{1i} a_i + l_{2i} b_i) - \right. \\ \left. - (P - Q) \int \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \left(l_{1j} \sin \sqrt{\lambda_j} (T - \tau) + \right. \right. \\ \left. \left. + l_{2j} \cos \sqrt{\lambda_j} (T - \tau) \right)^2 \right] d\tau \right\} \quad (2.7)$$

При условии $P > Q$ выражение в фигурных скобках в формуле (2.7) является вогнутой функцией по переменным l_{1j} и l_{2j} ($j = 1, 2, \dots$). следовательно [2], максимум в (2.7) при любых $z_{1i}(t), z_{2i}(t)$ достигается на единственном векторе l_{1i}^0, l_{2i}^0 ($i = 1, 2, \dots$), т.е. при любых начальных значениях игровая ситуация регулярна. Компоненты вектора l^0 определяются из следующих уравнений:

$$a_k + \mu l_{1k}^0 +$$

$$+ \frac{Q - P}{\lambda_k} \int_0^T \frac{(l_{1k}^0 \sin \sqrt{\lambda_k} (T - \tau) + l_{2k}^0 \cos \sqrt{\lambda_k} (T - \tau)) \sin \sqrt{\lambda_k} (T - \tau) d\tau}{\left[\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1} (l_{1i}^0 \sin \sqrt{\lambda_i} (T - \tau) + l_{2i}^0 \cos \sqrt{\lambda_i} (T - \tau))^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$b_k + \mu l_{2k}^0 + \quad (2.8)$$

$$+ \frac{Q - P}{\lambda_k} \int_0^T \frac{(l_{1k}^0 \sin \sqrt{\lambda_k} (T - \tau) + l_{2k}^0 \cos \sqrt{\lambda_k} (T - \tau)) \cos \sqrt{\lambda_k} (T - \tau) d\tau}{\left[\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1} (l_{1i}^0 \sin \sqrt{\lambda_i} (T - \tau) + l_{2i}^0 \cos \sqrt{\lambda_i} (T - \tau))^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [(l_{1k}^0)^2 + (l_{2k}^0)^2] = 1$$

Нетрудно заметить, что $\varepsilon^{(0)}(t, \{z_{1i}(t), z_{2i}(t)\}, T)$ - ограниченная величина, так как ряды, участвующие в выражениях (2.7), сходятся, следовательно, оптимальные управляющие воздействия, определяемые формулой (2.6) равномерно по $\tau \in [0, T]$, составляют сходящиеся квадратом ряды. Для определения момента ϑ в каждой ситуации нужно найти наименьший корень уравнения.

$$\min_{\tau \in [t_*, \tau]} \varepsilon^{(0)}(t_*, \{z_{1i}(t_*), z_{2i}(t_*)\}, \tau) = \varepsilon^{(0)}(t_*, \vartheta)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. Осициационные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. - М.: Гостехиздат, 1960.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. - М.: Наука, 1974.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
20.01.1997

УДК 551.31

ДОЖДЕВАЯ ЭРОЗИЯ ПОЧВ НА СКЛОНАХ ВОЗВЫШЕННОСТЕЙ

Сагомонян А.Я.

Ա.Յա. Սաղոմոնյան
Քարծուրների լանջերին բնահողի անձրևային էրոզիան

Աշխատանքում դիտարկվում է քարծուրների լանջերին անձրևաջրի հոսքի կողմից բնահողի մասնիկների տեղափոխումը: Առաջարկվում է բնահողի վրայով մածուցիկ հեղուկի շերտի շարժման մի մոդել որը կիրառելի է բնահողից մասնիկների տեղափոխման հաշվառման համար: Նշված մոդելը դիֆուզիայի հավասարումների հետ համատեղ հնարավոր է դարձնում որոշել տեղափոխված բնահողի զանգվածը:

S.Ja.Sagomonyan
The rain erosion of soils on the slopes of the hills

Исследуется задача уноса частиц почвы на склонах возвышенности потоком дождевой воды. Предлагается модель движения слоя вязкой жидкости над почвой, пригодная для учета переноса частиц из почвы.

Указанная модель с присоединением уравнения диффузии позволяет определить массу уноса почвы в зависимости от водонасыщения и физических характеристик почвы.

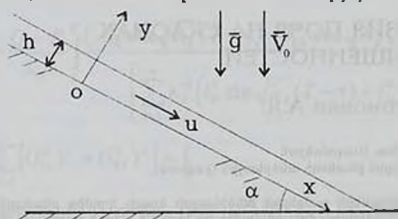
1. Часть непроникшей в почву жидкости капель дождя, достигших поверхности склона, образует на ней сплошной слой жидкости, стекающей вниз к подножию под действием силы тяжести. Водонасыщенная почва под слоем жидкости находится в состоянии вязкопластической среды. Предполагается, что напряжение сдвига в этой среде меньше предела текучести, и она находится в состоянии покоя [1, 2, 3].

Можно предположить, что образование вязкопластической среды является следствием следующих процессов. Под ударным воздействием капель дождя происходит дробление частиц почвы на более мелкие частицы, уплотнение их, что приводит к уменьшению пористости-объемной концентрации пор. Жидкость капель дождя заполняет измененные поры, а весь процесс приводит к значительному уменьшению сил сцепления между частицами. В модельной вязкопластической среде, в системе единиц килограмм-сила, метр, секунда, предел текучести имеет порядок единицы [1]. Благодаря сложному процессу взаимодействия между слоем жидкости и водонасыщенной почвой на поверхности склона: диффузии, обтекания частиц, других возможных причин, отдельные частицы почвы попадают в поток жидкости в слое. Так образуется суспензия - слой жидкости с частицами почвы, стекающей вниз к подножию. Объемная концентрация твердых частиц в слое жидкости мала: порядка $10^{-4} - 10^{-6}$. Чаше такая суспензия моделируется вязкой жидкостью, коэффициент вязкости η , которой определяется по формуле Эйнштейна [3]

$$\eta = \mu(1 + \gamma z), \quad z \ll 1$$

где μ - коэффициент вязкости воды, z - объемная концентрация частиц в суспензии, γ - постоянный множитель, для сферических твердых частиц $\gamma = 2,5$. Унос жидкостью массы частиц почвы с поверхности склона

называется водной эрозией почвы. Естественно в рассматриваемом случае эрозию называть дождевой. В списке литературы работ [4, 6] указаны исследования многих авторов по водной эрозии. В настоящей работе влияние границ поверхности склона не рассматривается, она считается неограниченной плоскостью, наклонной к горизонту (поверхности Земли) под углом α (фиг. 1). Скорость каплей дождя $\bar{V}$, имеющая величину 5-9 м/с, постоянна и параллельна вектору ускорения $\bar{g}$ силы тяжести.



Фиг. 1

Объемная концентрация ω жидкости каплей постоянна и равномерно распределена в дождевом пространстве; обычно ω имеет порядок $10^{-5} - 10^{-6}$. Пористость почвы m на поверхности склона тоже постоянна и равномерно распределена. Предполагается, что единственной причиной образования суспензии является

диффузия частиц почвы в потоке дождевой воды в слое над ней. При этом, изменением поверхности склона пренебрегается. Уравнение переноса массы частиц почвы в потоке водной суспензии запишем в виде [6, 7]

$$\rho_0 \frac{\partial c}{\partial t} + \rho_0 \bar{V} \text{grad } c = -\text{div}(\rho_0 \bar{c} \bar{V}^*) \quad (1)$$

где $\bar{V}$, ρ_0 - скорость и плотность суспензии в целом, символом c обозначена массовая концентрация частиц почвы в смеси: отношение массы частиц почвы в единице объема к плотности смеси ρ_0 . Символ $\bar{V}^*$ обозначает скорость диффузии - разность между скоростью частиц почвы и скоростью смеси. Пользуясь законом Фика [6]

$$\bar{V}^* = -\frac{D}{c} \text{grad } c \quad (2)$$

где D - коэффициент диффузии частиц почвы, из (1) получим

$$\rho_0 \frac{\partial c}{\partial t} + \rho_0 \bar{V} \text{grad } c = \text{div}(\rho_0 D \text{grad } c)$$

При постоянных ρ_0 и D последнее соотношение принимает вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \bar{V} \text{grad } c = D \nabla^2 c \quad (3)$$

При малых значениях массовой концентрации частиц почвы в водной суспензии (порядка $10^{-4} - 10^{-3}$) параметры суспензии пренебрежимо мало отличаются от параметров потока чистой воды в слое. В настоящем исследовании этим отличием пренебрегается и поток суспензии заменяется потоком несжимаемой жидкости с коэффициентом вязкости воды μ .

2. Из приведенных выше условий следует, что границей между слоем жидкости над поверхностью склона и пространством дождя будет плоскость, параллельная поверхности склона. Рассматривается плоскопараллельное, ламинарное движение. Начало координат x , y возьмем на поверхности склона, ось x направим по этой поверхности вниз к подножию, ось y - по внешней нормали к ней (фиг. 1). Из постановки задачи следует, что параметры потока в слое не зависят от x , а толщина слоя суспензии h будет функцией времени t . Граничная

плоскость $y = h(t)$ будет поверхностью разрыва концентрации ω , скорости, давления. Пусть u_x, v_x - компоненты скорости жидкости по осям x и y , непосредственно за поверхностью разрыва, P_1, P_0 - давления за и перед этой поверхностью, τ_x - напряжения сдвига за ней. Законы сохранения массы, изменения количества движения на этой границе запишутся так:

$$\begin{aligned} y = h(t), \quad \omega(\dot{h} + V \cos \alpha) &= \dot{h} + v_x \\ \rho \omega(\dot{h} + V \cos \alpha)(V \cos \alpha - v_x) &= P_1 - P_0 \\ \rho \omega(\dot{h} + V \cos \alpha)(V \sin \alpha - u_x) &= \tau_x, \quad \dot{h} = \frac{dh}{dt} \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ρ - плотность воды постоянна. На практике всегда выполняется условие $h/L \ll 1$, где L - характерная длина поверхности склона вдоль оси x . Отношение скоростей v_x/u_x имеет порядок $\omega \ll 1$ (это подтверждают результаты, полученные ниже). Эти оценки позволяют исследовать движение воды в слое над поверхностью склона на основе уравнений Рейнольдса [8]. Пусть u, v - компоненты скорости жидкости вдоль осей x и y . Уравнения движения вязкой жидкости Рейнольдса для рассматриваемой здесь задачи записываются в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -a + \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad a = \frac{g \sin \alpha}{v}, \quad v = \frac{\mu}{\rho} \quad (5)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha, \quad P - P_0 = \rho g \cos \alpha (h(t) - y) \quad (6)$$

Здесь в силу второго равенства в (4) принято, что $P_1 \approx P_0$. Отметим, что эти же уравнения описывают движение жидкости в слое малой толщины на криволинейной поверхности с малой кривизной, если координата x направлена вдоль этой поверхности, ось y - по нормали к ней [8, 9].

Уравнение параболического типа (5) здесь решается методом последовательных приближений, изложенным в работе [10]. Обратимся к квазистатическому уравнению, полученному из уравнения (5):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -a \quad (7)$$

Интегрируя уравнение (7) дважды по y , придем к выражениям

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -ay + C_1, \quad u = -\frac{a}{2} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (8)$$

Произвольные функции времени C_1, C_2 в решении (8) определяются граничными условиями уравнения (5).

На поверхности склона это условие запишется так:

$$y = 0, \quad u(0, t) = 0 \quad (9)$$

Второе граничное условие определяется последним равенством в формуле (4)

$$\begin{aligned} y = h(t), \quad \rho \omega(\dot{h} + V \cos \alpha)(V \sin \alpha - u_x) &= \tau_x, \\ \tau_x &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=h} \end{aligned} \quad (10)$$

Из условий (9) и (10) получим; $C_2 = 0$.

$$C_1 = \frac{\rho\omega(\dot{h} + V \cos \alpha) \left(\frac{a}{2} h^2 + V \sin \alpha \right) + \mu a h}{\mu + \rho\omega(\dot{h} + V \cos \alpha)} \quad (11)$$

Итак, решение квазистатического уравнения (7) представляется формулой

$$u_1 = -\frac{a}{2} y^2 + C_1(t) y \quad (12)$$

Дифференцирование по времени первого приближения (12) дает

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \dot{u}_1 = \dot{C}_1 y, \quad C_1 = \frac{dC_1}{dt} \quad (13)$$

Подставив это значение производной в правую часть уравнения (5), приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -a + \frac{1}{v} \dot{C}_1 y$$

После двукратного интегрирования его по y приходим к соотношениям

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -ay + \frac{1}{2v} \dot{C}_1 y^2 + C_3, \quad u = -\frac{a}{2} y^2 + \frac{1}{6v} \dot{C}_1 y^3 + C_3 y + C_4 \quad (14)$$

За второе приближение решения уравнения (5) берется сумма $u_1 + u$, где u дано формулой (14)

$$u_2 = u_1 + u = -ay^2 + C_1 y + \frac{\dot{C}_1}{6v} y^3 + C_3 y + C_4 \quad (15)$$

Функции времени C_3, C_4 также определяются условиями (9) и (10). Их значения следующие: $C_4 = 0$,

$$C_3 = \frac{\rho\omega(\dot{h} + V \cos \alpha) \left(V \sin \alpha + ah^2 - C_1 h - \frac{\dot{C}_1}{6v} h^3 \right) + \mu \left(ah - C_1 - \frac{\dot{C}_1}{2v} h^2 \right)}{\mu + \rho\omega(\dot{h} + V \cos \alpha) h} \quad (16)$$

Таким образом, второе приближение решения уравнения (5) записывается в виде

$$u = u_2 = -ay^2 + C_1 y + \frac{\dot{C}_1}{6v} y^3 + C_3 y \quad (17)$$

где функции времени $C_1, \dot{C}_1, C_3$ определены выше.

3. Перейдем к определению толщины слоя $h(t)$ и составляющей скорости жидкости в слое вдоль оси y . Так как параметры движения жидкости не зависят от x , в силу уравнения неразрывности несжимаемой среды, эта скорость v является только функцией времени. Из первого равенства условий (4) она определяется так:

$$v = v_x = \omega V \cos \alpha - h(1 - \omega) \quad (18)$$

В ряде работ, например в [11], принимается, что скорость проникания жидкости в поры почвы пропорционально зависит от давления на поверхности склона. На основании формулы (6) эту зависимость можно представить равенством

$$y = 0, \quad v = v_w = k \rho g \cos \alpha h(t), \quad k = \text{const} \quad (19)$$

Равенство правых частей в формулах (18) и (19) приводит к уравнению с условиями

$$\dot{h} + \frac{k\rho g \cos \alpha}{1 - \omega} h = \frac{\omega V \cos \alpha}{1 - \omega}, \quad t = 0, \quad h = 0 \quad (20)$$

Решение уравнения (20) определяется функцией

$$h = B(1 - e^{-\omega t}), \quad A = \frac{k\rho g \cos \alpha}{1 - \omega}, \quad B = \frac{\omega V}{k\rho g} \quad (21)$$

Теперь скорость жидкости по оси y , с учетом ее направления, согласно (18), представляется равенством

$$v = -\omega V \cos \alpha (1 - e^{-\omega t}), \quad \omega \ll 1 \quad (22)$$

4. Для рассматриваемой задачи уравнение (3), определяющее распределение массовой концентрации частиц почвы в смеси, принимает вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (23)$$

где v дана формулой (22). Для его решения необходимо установить граничные условия. На границе $y = h(t)$ естественно предположить, что концентрация равна нулю

$$y = h(t), \quad c(0, t) = 0 \quad (24)$$

Граничное условие на поверхности склона может быть определено путем анализа результатов экспериментальных исследований на основе теории переноса вещества. Здесь предполагается это условие заданным:

$$y = 0, \quad c = c_0 \quad (25)$$

Уравнение (23) представим в форме

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = -b(1 - e^{-\omega t}) \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial t}, \quad b = \frac{\omega V \cos \alpha}{D} \quad (26)$$

Будем решать это уравнение методом последовательных приближений, использованным выше. За первое приближение решения (26) возьмем решение уравнения

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = 0$$

Его решением, удовлетворяющим условиям (4) и (25), будет функция

$$c = c_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right), \quad h = h(t)$$

Подставим это решение в правую часть уравнения (26) и затем проинтегрируем его дважды по y . Последовательно будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial y} &= \frac{bc_0}{h} (1 - e^{-\omega t}) y + \frac{c_0}{2D} \frac{h}{h^2} y^2 + C_1 \\ c &= \frac{bc_0}{2h} (1 - e^{-\omega t}) y^2 + \frac{c_0}{6D} \frac{h}{h^2} y^3 + C_1 y + C_2 \end{aligned} \quad (27)$$

В решениях (27) величины C_1 , C_2 определяются из тех же условий (24) и (25). В результате второе приближение решения уравнения (26) записывается так:

$$c = -c_0 \frac{y}{h} + \frac{bc_0}{2h} (1 - e^{-\omega t}) (y^2 - hy) + \frac{c_0}{6D} \frac{h}{h^2} (y^3 - h^2 y) + c_0 \quad (28)$$

В работе [12] показано, что для задач, подчиненным уравнениям типа (26), второе приближение, построенное методом, использованным здесь, достаточно близко к точному решению уравнений. Из (28) следует:

$$\frac{\partial c}{\partial y} = -\frac{c_0}{h} + \frac{bc_0}{2h}(1 - e^{-u})(2y - h) + \frac{c_0}{6D} \frac{h}{h^2}(3y^2 - h^2) \quad (29)$$

Итак, при заданных граничных условиях (24), (25), распределение массовой концентрации определено в явном виде с помощью формул (28) и (21).

Пусть $\bar{V}_i$ - скорость частиц в смеси, $\bar{V}$ - скорость жидкости в слое, из определения скорости $\bar{v}^*$, в согласии с формулой (2), имеют место равенства [6]

$$\bar{v}^* = \bar{V}_i - \bar{V}, \quad \bar{v}^* = -\frac{D}{c} \text{grad} c \quad (30)$$

В нашей задаче последнее равенство принимает вид

$$\bar{v}^* = -\frac{D}{c} j \frac{\partial c}{\partial y} \quad (31)$$

где j - единичный вектор оси y . Пусть u_i, v_i - компоненты скорости $\bar{V}_i$, по осям x, y ; u, v - по-прежнему компоненты скорости $\bar{V}$. Из (31) следует

$$u_i = u, \quad v_i = v - \frac{D}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \quad (32)$$

то есть скорость частиц и скорость жидкости в слое, в направлении оси x совпадают. Скорость v во втором равенстве (32) определена формулой (22). Вектор потока частиц почвы $\bar{I}$ определяется так:

$$\bar{I} = c\bar{V}_i = c(\bar{V} + \bar{v}^*) = c\left[\bar{V} - \frac{D}{c} \text{grad} c\right]$$

В проекциях на оси координат, для рассматриваемой задачи получим

$$I_x = cu, \quad I_y = cv - D \frac{\partial c}{\partial y} \quad (33)$$

Унос массы частиц почвы потоком в единицу времени, q , вдоль поверхности склона, определяется интегралом

$$q = \int_0^h \rho_i c u dy, \quad \rho_i = \frac{\rho}{1 + c \left(\frac{\rho}{\rho_i} - 1 \right)} \quad (34)$$

где ρ_i - плотность суспензии, c и u под интегралом определены формулами (28) и (17).

5. На механико-математическом факультете МГУ проводились экспериментальные исследования по ударному сжатию образцов пористой почвы. Результаты этих исследований приведены в работе [13]. В частности, построена диаграмма, устанавливающая зависимость между давлением и плотностью пористой почвы в процессе сжатия образца в пределах изменения давления от граммов на квадратный сантиметр до 10 атмосфер. По этим данным можно определить концентрацию пор после сжатия. Если поры почвы до начала сжатия и после заполнить жидкостью, то по данным работы [13] можно определить соответствующие массовые концентрации материала почвы. Такой расчет показал, что значения этих концентраций очень близки друг к другу. Например, для образца из люберецкого песка с начальной пористостью 0,442, при динамическом сжатии (давление 3,6 кгс/см), массовые концентрации материала почвы до и после сжатия соответственно равнялись 0,770 и 0,776. При этом отношение количества вещества почвы в единице объема до и после

сжатия равнялось 0,986. Если исходить из этого результата, то в рассматриваемой здесь задаче за массовую концентрацию c_0 в условии (27) можно взять массовую концентрацию почвы до начала дождя, но с заполнением жидкостью порами. Тогда в приведенном примере $c_0 = 0,770$. Определение коэффициента D диффузии и концентрации c_0 в вязкопластическом слое на поверхности склона требует дальнейших экспериментальных исследований на основе теории переноса вещества.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (Грант 96-05-65649).

ЛИТЕРАТУРА

1. Воларович М.П. Применение методов исследования вязкости и пластичности в прикладной минералогии. Тр. Ин-та прикладной минералогии, 1934, вып. 66.
2. Сагомонян А.Я. К вопросу дождевой эрозии почв - ВМУ, мат., мех., 1995, №5, с. 85-94.
3. Ричардсон Э. Динамика реальных жидкостей. -М.: Мир, 1965.
4. Петров А.Г., Петров П.Г. Перенос взвешанных частиц турбулентным потоком над размываемым дном. -ПМТФ, 1992, №4, с. 61-69.
5. Хан К.Ю., Кузнецов М.С., Волокитин М.П., Сон Б.К., Самойлов Р.Т. Определение устойчивости агрегатов к разрушающему действию капель. -Почвоведение, 1991, №6.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. -М.: Наука, 1970.
7. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. -М.: Мир, 1973.
8. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. -М.: Гостехиздат, 1955.
9. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости (ред. Гольдштейн). -М.: ИЛ, 1948.
10. Швец М.Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. -ПММ, 1949, т. XIII, вып.3, с.257-266.
11. Слезкин Н.А. О течении вязкой жидкости при наличии свободной границы и пористого дна. -ВМУ, мат., мех., 1957, №5, с. 3-5.
12. Кочетков А.М. Приближенное решение некоторых задач нестационарного движения вязкопластической среды. -ПММ, 1950, т. XIV, вып. 4, с. 433-436.
13. Гримза Ю.И. Прямой экспериментальный метод построения ударных диаграмм сжатия грунтов. -Сб. тр. №51, НИИ оснований и подземных сооружений академии строительства и архитектуры СССР, 1950.

МГУ им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
13.12.1996