ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1998

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №3, 1998 Механика

УДК 539.374

ИЗГИБ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ОРТОТРОПНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Аревшатян Н.Г., Киракосян Р.М., Степанян С.П.

Ն.Գ. Արևշատյան, Ռ.Մ. Կիրակոսյան, Ս.Պ. Ստեփանյան

Փոփոխական հաստության ամրակցված օրթոտրոպ օղակային սալի ծռումը լայնական սահքի հաշվառմամբ

Ճշգրտված [1] տեսության շրջանակներում լուծված է հավասարաչափ բաշխված նորմալ բեռի ազդեցության տակ գտնվող գծայնորեն փոփոխական հաստության օրթոտրոպ օղակային սալի ծռման խնդիրը՝ լայնական սահքի հաշվառմամբ: Ընդունվում է, որ սալի ներքին եզրն ազատ է, իսկ արտաքինը՝ կոշտ ամրակցված: Ստացված արդյունքների հիման վրա արվում են լայնական սահքի ազդեցությանը վերաբերվող որակական եզրակացություններ:

N.G. Arevshatyan, R.M.Kirakosyan, S.P. Stepanyan

The Bending of Rigidly fixed ortotropic circular plate of variable thickness with the account of transversal displacement

В рамках уточненной теории [1] решена задача изгиба ортотропной кольцевой пластинки линейно-переменной толщины при учете поперечного сдвига. Считается, что внутренний край пластинки свободен, а внешний защемлен. На основе полученных результатов делаются качественные заключения о влиянии поперечного сдвига.

Рассмотрим ортотропную кольцевую пластинку с внутренним и внешним радиусами a, b, толщина которой изменяется по закону

$$h = h_0 + h_1 r, \quad h_1 > -\frac{h_0}{b} \tag{1}$$

Здесь h_0 и h_1 - заданные параметры. Пусть пластинка несет равномерно-распределенную нормальную нагрузку интенсивности q.

Внутренний край пластинки свободен, а внешний жестко заделан. Задачу изгиба пластинки будем решать в рамках уточненной теории [1], учитывающей влияние поперечных сдвигов при переменности толщины

В силу осесимметричности решение поставленной задачи сводится к нахождению прогиба пластинки w и функции φ, описывающей влияние поперечного сдвига.

Применив способ приведения краевой задачи к задаче Коши [2], [3], приходим к следующей разрешающей системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{d\rho} = v \\
&\frac{dv}{d\rho} = \frac{1}{\rho^2(1+\gamma\rho)^3}\Big\{q^* s\rho\left(\rho^2 - k^2\right) - \rho v(1+4\gamma\rho)(1+\gamma\rho)^2 + \\
&\qquad + m^2 y(1+\gamma\rho)^2\left[1 + (1-3\nu_r)\gamma\rho\right]\Big\}
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь использованы обозначения [1], [4].

Условия свободного и заделанного краев пластинки имеют вид

$$\left(\rho v + v_r m^2 y\right)\Big|_{\rho=k} = 0, \qquad y\Big|_{\rho=\rho_b} = 0 \tag{3}$$

Задаваясь некоторыми значениями безразмерных параметров q^*, m, s, γ, k и выбирая начальные значения v_0, y_0, удовлетворяющие условию свободного края $\rho = k$, можно вычислить значения искомых y и v в последующих друг другу сечениях $\rho_i = \rho_{i-1} + \Delta\rho$. Здесь $\Delta\rho$ - шаг численного интегрирования.

Численное интегрирование системы (3) продолжается до того значения безразмерной координаты ρ_b, для которого удовлетворяется условие заделки. Желательно варьированием параметра q^* добиться того, чтобы $\rho_b = 1$. Это важно, поскольку тогда полученное решение будет соответствовать пластинке с наперед заданными размерами.

В табл. 1-3 приведены значения величин

$$w^* = \frac{w_0}{h_0}\frac{h_0^3}{b^3}\frac{B_r}{6q}, \qquad \Delta = \frac{w_0 - w_0^{\text{кл}}}{w_0^{\text{кл}}}100\% \tag{4}$$

подсчитанные при некоторых характерных значениях параметров $m = \sqrt{B_0/B_r}$, $\gamma = h_1 b/h_0$, $l = B_r/G_{rz}$. Через $w_0^{\text{кл}}$ и w_0 обозначены прогибы на внутреннем контуре пластинки, полученные по классической и уточненной теориям. Величина Δ определяет поправку к наибольшему прогибу пластинки в процентах, вносимую учетом поперечного сдвига. Для сравнения в таблицах приведены также значения $w^*_{\text{спл}}$ и $\Delta_{\text{спл}}$, соответствующие сплошной пластинке. В последних строках таблиц приведены значения отношения наибольших прогибов кольцевой и сплошной пластинок при одинаковых значениях остальных параметров. Данные, относящиеся к сплошной пластинке, заимствованы из работы [5].

На фиг. 1-3 изображены графики изменения радиального момента $M_r/\sigma_0 h_0^2$ при некоторых характерных значениях механико-геометрических параметров пластинки. Так как учет поперечного сдвига не влияет на значения изгибающих моментов кольцевой пластинки, то приведенные графики верны при любых значениях отношения B_r/G_{rz}.

Данные таблиц и графики фигур приводят к следующим выводам:

1. Учет поперечного сдвига, как и следовало ожидать, и в случае переменной толщины приводит к увеличению наибольших прогибов кольцевой пластинки.

2. Размер увеличения прогиба существенным образом зависит от характера ортотропии материала и от поведения изменения толщины пластинки.

Он растет при:

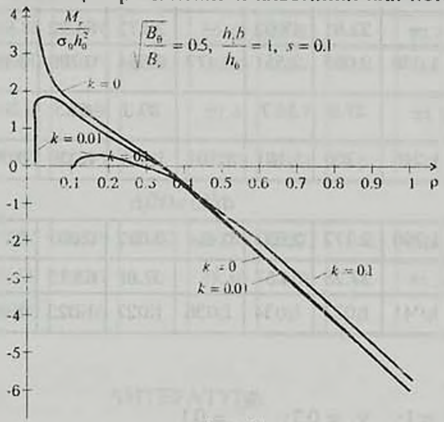
а) увеличении отношения B_r/G_{rz}, т.е. уменьшении относительного модуля поперечного сдвига;

б) росте параметра $h_1 b/h_0$, т.е. скорости утолщения пластинки вдоль радиуса;

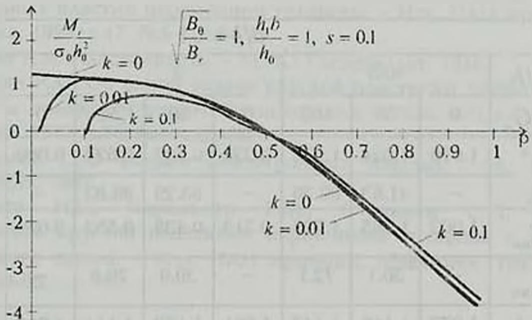
в) увеличении параметра B_0/B_r, т.е. отношения модулей упругости материала окружного и радиального направлений E_θ/E_r.

3. С уменьшением относительного радиуса внутреннего контура пластинки $k = a/b$ значения наибольшего прогиба приближаются к соответствующим значениям сплошной пластинки. Скорость стремления возрастает с увеличением отношения B_θ/B_r.

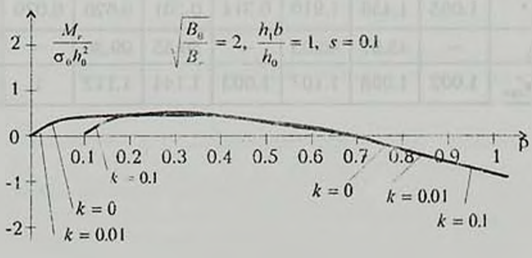
4. С удалением от свободного внутреннего контура пластинки $\rho = k$ значение радиального изгибающего момента $M_r/\sigma_0 h_0^2$ возрастает от нуля и стремится к значениям, соответствующим сплошной пластинке. В рассмотренных случаях величина M_r на защемленном контуре $\rho = 1$ получается незначительно меньшей, чем у сплошной пластинки. Разница между ними увеличивается с ростом относительного радиуса внутреннего контура пластинки. Это утверждение верно при любом значении отношения B_θ/B_r, т.е. независимо от того, имеют ли особенность изгибающие моменты в центре сплошной пластинки или нет.



фиг. 1



фиг. 2



фиг. 3

$$\sqrt{\frac{B_0}{B_r}} = 0.5; \quad \nu_r = 0.3; \quad \frac{h_0}{b} = 0.1$$

Таблица 1

$a/b = 0.1$									
$h_1 b/h_0$	-0.5			0			1		
B_r/G_{rz}	0	50	100	0	30	50	0	10	20
w^*	2.041	2.527	3.013	0.525	0.702	0.820	0.107	0.139	0.171
Δ	–	23.81	47.62	–	33.73	56.22	–	30.49	60.73
$w^*_{спл}$	1.638	2.095	2.551	0.477	0.664	0.789	0.109	0.146	0.189
$\Delta_{спл}$	–	27.9	55.7	–	39.3	65.5	–	34.0	67.9
$w^*/w^*_{спл}$	1.246	1.206	1.181	1.101	1.057	1.039	0.982	0.952	0.905
$a/b = 0.01$									
w^*	1.706	2.172	2.637	0.49[illegible]	0.682	0.807	0.112	0.149	0.185
Δ	–	27.28	54.57	–	37.88	63.13	–	32.35	64.71
$w^*/w^*_{спл}$	1.041	1.037	1.034	1.036	1.027	1.023	1.027	1.020	0.979

$$\sqrt{\frac{B_0}{B_r}} = 1; \quad \nu_r = 0.3; \quad \frac{h_0}{b} = 0.1$$

Таблица 2

$a/b = 0.1$									
$h_1 b/h_0$	-0.5			0			1		
B_r/G_{rz}	0	50	100	0	30	50	0	10	20
w^*	1.076	1.524	1.973	0.332	0.509	0.627	0.080	0.115	0.149
Δ	–	41.63	83.36	–	53.29	88.83	–	42.79	85.45
$w^*_{спл}$	1.003	1.365	1.726	0.313	0.438	0.563	0.079	0.117	0.156
$\Delta_{спл}$	–	36.1	72.1	–	39.9	79.8	–	49.0	97.9
$w^*/w^*_{спл}$	1.073	1.116	1.143	1.061	1.162	1.114	1.013	0.983	0.955
$a/b = 0.01$									
w^*	1.065	1.458	1.910	0.314	0.501	0.626	0.079	0.117	0.156
Δ	–	45.07	90.05	–	59.55	99.36	–	48.48	97.08
$w^*/w^*_{спл}$	1.002	1.068	1.10[illegible]	1.003	1.144	1.112	1	1	1

$$\sqrt{\frac{B_\theta}{B_r}} = 2; \quad \nu_r = 0.3; \quad \frac{h_0}{b} = 0.1$$

Таблица 3

$a/b = 0.1$									
$h_1 b/h_0$	-0.5			0			1		
B_r/G_{rz}	0	20	40	0	10	20	0	5	10
w^*	0.511	0.684	0.857	0.167	0.226	0.283	0.045	0.064	0.082
Δ	–	33.88	67.76	–	35.41	70.82	–	40.71	81.46
$w^*_{\text{спл}}$	0.516	0.696	0.877	0.167	0.230	0.292	0.045	0.065	0.085
$\Delta_{\text{спл}}$	–	35.0	69.9	–	37.4	74.7	–	44.3	88.7
$w^*/w^*_{\text{спл}}$	0.990	0.983	0.977	1	0.983	0.969	1	0.985	0.965
$a/b = 0.01$									
w^*	0.515	0.695	0.876	0.167	0.230	0.292	0.045	0.065	0.085
Δ	–	34.99	69.97	–	37.40	74.70	–	44.38	88.70
$w^*/w^*_{\text{спл}}$	0.998	0.999	0.999	1	1	1	1	1	1

ЛИТЕРАТУРА

1. Киракосян Р.М. К уточненной теории цилиндрически ортотропных пластин переменной толщины. – Изв. НАН Армении, Механика, 1994, т.47, №5-6, с.64-73.
2. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
3. Киракосян Р.М. Об одной задаче круглой пластинки наименьшего объема за пределами упругости материала. – Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т.30, №1, с 21-32.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. –М.: Наука, Гостехиздат, 1987
5. Аревшатян Н.Г., Киракосян Р.М., Степанян С.П. Изгиб ортотропной круглой пластинки переменной толщины с учетом поперечного сдвига. – Изв. НАН Армении, Механика, 1997, т.50, №3-4, с.64-68.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
14.08.1998

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №3, 1998 Механика

УДК 539.3

ЗАКРИТИЧЕСКАЯ ПРОЧНОСТЬ ОПТИМАЛЬНОЙ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА, УСИЛЕННОЙ ПО КРАЯМ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

Белубекян Э.В.

Է.Վ. Բելուբեկյան
Օպտիմալ ըստ կայունության, կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված և եզրերով կոշտության կողերով ուժեղացված ուղղանկյուն սալի հետկրիտիկական ամրությունը

Լուծված է կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված և եզրերով կոշտության կողերով ուժեղացված ըստ կայունության օպտիմալ ուղղանկյուն սալի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման խնդիրը:

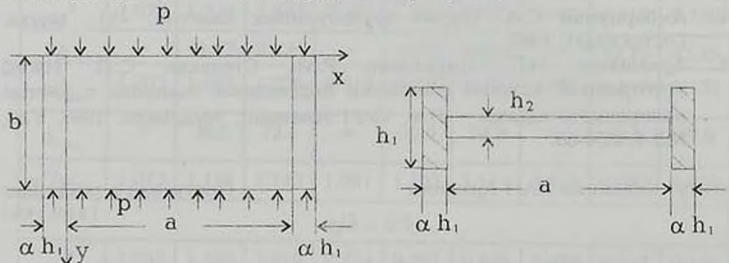
Թույլատրելով օպտիմալ կառուցվածքի աշխատանքը հետկրիտիկական վիճակում, որոշվում է մեծագույն թույլատրելի սեղմող ճիգը կառուցվածքի ընդհանուր կայունության կորստի, սալի և կողերի ամրության պայմաններից:

E.V. Beloubekyan
The Post-Critical Strength of an Optimally Staible Rectangular Plate Made of Composite Material and Strengthened on the Edges of Rigid Sides

Решается задача определения напряженно-деформированного состояния оптимальной по устойчивости прямоугольной пластинки из композиционного материала, усиленной по краям ребрами жесткости, после потери устойчивости.

Допуская работу оптимальной конструкции в послекритической стадии, определяется наибольшее допускаемое сжимающее усилие из условий общей потери устойчивости конструкции и прочности ребер и пластинки.

Рассматривается шарнирно-опертая по двум противоположным кромкам $y = 0$ и $y = b$ и усиленная ребрами жесткости по краям $x = 0$ и $x = a$, прямоугольная пластинка, загруженная сжимающими равномерно-распределенными усилиями p (фиг.1)



Фиг.1

Закритическая прочность оптимальной по устойчивости прямоугольной пластины из композиционного материала, усиленной по краям ребрами жесткости.

Считается, что ребра податливы по отношению к изгибу и абсолютно жестки на кручение.

Предполагается, что пластинка изготовлена из монослоев ортотропного композиционного материала (КМ), уложенных поочередно под углами $\pm\varphi$ к оси $0x$, а в ребрах монослои уложены вдоль оси $0y$.

В работе [1] при неизменном весе конструкции определены его оптимальные геометрические (α, h_1, h_2) и физические (φ) параметры, обеспечивающие наибольшее значение критической нагрузки.

Допуская работу оптимальной конструкции в закритической стадии, определяется наибольшее значение допускаемого сжимающего усилия p, удовлетворяющее условиям прочности пластинки и ребер, а также общей потери устойчивости конструкции

Приводятся результаты числовых расчетов.

Решение задачи определения напряженно-деформированного состояния пластинки в закритической стадии производится энергетическим методом Ритца.

Функция прогибов, удовлетворяющая условиям шарнирного опирания по краям $y = 0$ и $y = b$ и условию

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a$$

выбирается в виде [2]

$$w = f_1 \sin^2\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + f_0 \sin\frac{\pi y}{b} \tag{1}$$

Величины f_1 и f_0 равны стрелам прогиба пластинки и ребер.

Подставляя (1) в уравнение совместности деформаций в срединной поверхности пластинки

$$a_{11}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} + (a_{66} - 2a_{12})\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} + a_{22}\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 = 0 \tag{2}$$

и решая ее относительно функции усилий Φ, получается

$$\Phi = \frac{1}{32}f_1^2\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{1}{a_{11}}\cos\frac{2\pi}{a}x - \frac{1}{16a_{11}}\cos\frac{4\pi}{a}x + \frac{b^4}{a^4 a_{22}}\cos\frac{2\pi}{b}y - \frac{1}{A_0}\cos\frac{2\pi}{a}x \times\right.$$

$$\left.\times\cos\frac{2\pi}{b}y\right) + \frac{1}{16}f_1 f_0\left(\frac{1}{a_{11}}\cos\frac{2\pi}{a}x - \frac{1}{A_0}\cos\frac{2\pi}{a}x\cos\frac{2\pi}{b}y\right) - ph_2\frac{x^2}{2} \tag{3}$$

Здесь приняты обозначения:

$$a_{ik} = \frac{B_{ik}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}, \quad i,k = 1,2, \quad a_{66} = \frac{1}{B_{66}}$$

$$A_0 = a_{11} + (a_{66} - 2a_{12})\frac{a^2}{b^2} + a_{22}\frac{a^4}{b^4}$$

Общая энергия системы будет

$$Э = U_и + U_о + U_{и.р.} - W - W'$$

где $U_и$ - энергия изгиба пластинки, $U_о$ - энергия деформаций в срединной плоскости пластинки, $U_{и.р}$ - энергия изгиба ребер, W - работа внешних сил, приложенных к пластинке, W' - работа внешних сил, приложенных к ребрам.

Вычисляя энергию системы с использованием известных формул [2], [3], из условий

$$\frac{\partial Э}{\partial f_1} = 0, \quad \frac{\partial Э}{\partial f_0} = 0 \tag{4}$$

получается следующая система уравнений:

$$f_1^2\left(\bar f_0\left(3+2\bar f_0\right)\left(\frac{1}{a_{11}}+\frac{\pi^4}{a^4A_{11}}\right)+\left(\frac{17}{16a_{11}}+\frac{1}{a_{22}}\frac{b}{a^4}+\frac{\pi^4}{2a^4A_{11}}\right)\right)+$$

$$+4\left(3D_{22}+\frac{16b^4}{a^4}D_{11}+8\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{b^2}{a^2}+8D_{22}\bar f_0\right)- \qquad (5)$$

$$-4\frac{ph_2b^2}{\pi^2}\left(3+4\bar f_0\right)=0$$

$$f_1^2\left(\frac{1}{a_{11}}+\frac{\pi^4}{A_0a^4}\right)\left(1+2\bar f_0\right)+16D_{22}\left(1+2\bar f_0\right)+\frac{64}{a}EJ\bar f_0-$$

$$-\frac{16ph_2}{\pi^2}b^2\left(1+2\bar f_0\right)+\frac{64b^2}{\pi^2a}\sigma_pA_p\bar f_0=0$$

Здесь: $\bar f_0=\dfrac{f_0}{f_1}$, $A_p=\alpha h_1^2$ - площадь сечения ребра, $J=\dfrac{\alpha h_1^4}{12}$ - момент инерции сечения ребра, σ_p - сжимающее усилие в ребре пластинки, определяемое по формуле

$$\sigma_p=\frac{p}{\psi} \qquad (6)$$

где ψ - редукционный коэффициент, который до момента потери устойчивости может быть принятым, равным единице.

Напряжение σ_p может быть вычислено также по формуле

$$\sigma_p=E_1e \qquad (7)$$

где e - относительное сближение нагруженных кромок пластинки, определяемое из выражения

$$e=\frac{1}{b}\int_0^b\left(-a_{12}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+a_{11}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right)dy$$

откуда

$$e=\frac{1}{32}\frac{\pi^2}{b^2}\left(3f_1^2+8f_0f_1+8f_0^2\right)+a_{11}ph_2 \qquad (8)$$

Отбрасывая в уравнениях (5) нелинейные члены и принимая $p=\sigma_p=p_{кр}$ получится система уравнений для определения критического напряжения

$$4\left(3D_{22}+\frac{16b^4}{a^4}D_{11}+8\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{b^2}{a^2}+8D_{22}\bar f_0\right)-$$

$$-4p_{кр}\frac{h_2b^2}{\pi^2}\left(3+4\bar f_0\right)=0 \qquad (9)$$

$$16D_{22}\left(1+2\bar f_0\right)+\frac{64}{a}EJ\bar f_0-16\frac{p_{кр}h_2b^2}{\pi^2}\left(1+2\bar f_0\right)+\frac{64b^2}{\pi^2a}p_{кр}A_p\bar f_0=0$$

Определив $p_{кр}$ из системы (9) в зависимости от параметров $\alpha, h_1, h_2, \varphi$, можно решить задачу оптимизации по нахождению наибольшего критического напряжения.

Допуская работу оптимальной по устойчивости конструкции в закритической стадии, определяется наибольшее допускаемое значение сжимающей нагрузки p, удовлетворяющее условиям общей потери устойчивости конструкции, прочности пластинки и ребер.

Условие общей потери устойчивости конструкции записывается в виде

$$\sigma_p \le \sigma^0_{кр} \tag{10}$$

где σ_p - напряжение в редуцированном сечении конструкции, определяемое формулой (6), $\sigma^0_{кр}$ - критическое напряжение конструкции, рассматриваемой как балка с редуцированным сечением

$$\sigma^0_{кр} = \frac{\pi^2 D_{пр}}{A_{пр}} \tag{11}$$

где: $A_{пр}$ и $D_{пр}$ - площадь и изгибная жесткость редуцированного сечения

$$A_{пр} = 2\alpha h_1^2 + \psi a h_2$$

$$D = \frac{\alpha h_1^4}{6} E_1 + B_{22} \frac{\psi a h^3}{12}$$

Условие (10) с учетом (6) и (11) приводится к виду

$$p \le \psi \frac{\pi^2 D_{пр}}{A_{пр}} \tag{12}$$

Условие прочности пластинки принимается в виде

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{B1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{B2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\tau_{B0}}\right)^2 - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma^2_{B1}} \le 1 \tag{13}$$

где $\sigma_{B1}, \sigma_{B2}, \tau_{B0}$ - прочностные характеристики монослоев КМ, $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ - напряжения по главным физическим направлениям пластинки, определяемые по формулам

$$\sigma_{11} = B^0_{11} e_{11} + B^0_{12} e_{12}, \quad \sigma_{22} = B^0_{12} e_{11} + B^0_{22} e_{22}$$

$$\sigma_{12} = B^0_{66} e_{12}$$

e_{11}, e_{22}, e_{12} - деформации по главным физическим направлениям пластинки, которые известными формулами поворота выражаются через деформации по главным геометрическим направлениям пластинки, определяемые по формулам

$$e_x = a_{22} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - a_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$e_y = -a_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + a_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$e_{xy} = -a_{66} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Условие прочности ребра

$$\sigma_{p\max} \le \sigma_{B1} \tag{14}$$

где $\sigma_{p\max}$ - наибольшее значение в ребре, определяемое формулой

$$\sigma_{p\max} = E_1 e_{p\max}$$

$e_{p\max}$ - наибольшая деформация в ребре, принимаемая равной деформации пластинки при $x = 0$, $y = b$, $z = -h_1/2$.

Определение наибольшего допускаемого значения усилия производится в следующей последовательности.

Задается значение $p > p_{кр}$, увеличивая его с некоторым шагом. Для каждой ступени нагрузки, принимая коэффициент ψ равным его значению предыдущего шага (на первом шаге принимается $\psi = 1$), определяется из (6) σ_p, а затем из системы (5) $- \bar{f}_1$ и $\bar{f}_0$. Вычисляя по формулам (7), (8) значение σ_p, из (6) снова определяется значение ψ. Последовательными приближениями на каждом шаге уточняются значения ψ, $\bar{f}_1$, $\bar{f}_0$, после чего производится проверка условий (12)-(14). Значение усилия, увеличение которого приводит к нарушению одного из этих условий, принимается за наибольшую допускаемую нагрузку.

Числовые расчеты произведены для примера, рассмотренного в работе [1], где прочностные характеристики КМ приняты:

$$\sigma_{B1} = 188.6 \cdot 10^{-4} B_{11}^0, \ \sigma_{B2} = 77.18 \cdot 10^{-4} B_{11}^0, \ \tau_{B0} = 49.72 \cdot 10^{-4} B_{11}^0$$

Решение задачи оптимизации на основе уравнений (9) приводит к результатам, близким к приведенным в работе [1], поэтому при расчете пластинки в закритической стадии они принимаются в качестве исходных.

Как показывают расчеты, в рассмотренных случаях активным является условие общей потери устойчивости конструкции.

В табл. 1 для различных значений приведенных толщин пластинки $\bar{h}_0 = h_0/b$ приведены значения оптимальных по устойчивости параметров α, $\bar{h}_1 = h_1/b$, $\bar{h}_2 = h_2/b$, φ, соответствующие значения $\bar{p}_{кр} = p_{кр}/B_{11}^0$ [1] и полученные здесь значения наибольшей приведенной допускаемой нагрузки $\bar{p} = p/B_{11}^0$ приведенных стрел прогибов пластинки $\bar{f}_1 = f_1/h$ и ребер $\bar{f}_0 = f_0/f_1$, а также редукционного коэффициента ψ.

Таблица 1

$\bar{h}_0$	α	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	φ^0	$\bar{p}_{кр} \cdot 10^3$	$\bar{p} \cdot 10^3$	$\bar{f}_1$	$\bar{f}_0$	ψ
0.010	0.2	0.069	0.0083	45	0.211	0.297	0.64	0.4	0.22
0.015	0.2	0.090	0.0120	45	0.457	0.571	0.64	0.4	0.21
0.020	0.2	0.108	0.0160	45	0.790	0.862	0.76	0.5	0.18

Сравнение результатов табл.1 показывает, что допущение работы пластинки после потери устойчивости позволяет увеличить ее несущую способность. Причем это увеличение заметнее для более тонких пластин. Так, при $\bar{h}_0 = 0.01$ $k = p/p_{кр} = 1.3$, а при $\bar{h}_0 = 0.02$ $k = 1.1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян Э.В. Оптимизация по устойчивости прямоугольной пластинки из композиционного материала, усиленной по двум краям податливыми на изгиб ребрами жесткости. - Вопросы оптимального управления устойчивости и прочности механических систем (сб. научн. тр. конференции), Ереван, 1997, с 100-103.
2. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. - М.: Гостехтеориздат, 1956. 419с.
3. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. - М.: Гостехиздат, 1957. 463с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 6.10.1996

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №3, 1998 Механика

УДК 517.9:532

РАСПРОСТРАНЕНИЕ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В НЕСИММЕТРИЧНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

Багдоев А.Г., Петросян Л.Г., Багдасарян Ш.А.

Քվազիմոնոքրոմատիկ ոչ գծային ալիքների տարածումը ասիմետրիկ էլեկտրահաղորդիչ գազահեղուկ լուծույթում

Ա.Գ. Բագդոև, Լ.Գ. Պետրոսյան, Շ.Ա. Բաղդասարյան

Արտածված են մոդուլյացիայի հավասարումները: Առանցքասիմետրիկ խնդրում տրված է նեղ փնջերի լուծումը: Փնջի լայնության համար ստացված է սովորական դիֆերենցիալ հավասարում, որը լուծվում է թվային տեսքով:

A.G. Bagdoev, L.G. Petrosian, Sh. A. Bagdasarian

The Propagation of Quasymonochromatic Non-Linear Waves In Non-Symmetrical Electroconducting Gasfluid Mixture

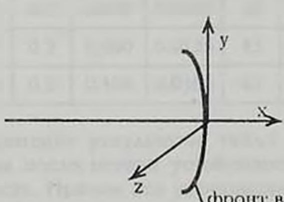
Получены уравнения модуляции для несимметричной электропроводящей газожидкостной смеси и дано решение узких пучков в осесимметричной задаче. Для безразмерной ширины пучка получается обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого дается в численном виде.

1. Для квазимонохроматической нелинейной волны, близкой к плоской распространяющейся в несимметричной электропроводящей однородной газожидкостной смеси, в уравнении коротких волн [1] можно считать лучевое решение $\Phi = \text{const}$ и записать

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} - \frac{1}{2} H_1 \left(\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_3^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) =$$

$$= -\frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\Gamma u \frac{\partial u}{\partial \tau} + D \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + E \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} + G \frac{\partial^4 u}{\partial \tau^4} \right) \tag{1.1}$$

где учтено, что $\alpha_1 \approx \alpha_3 \approx 0$ и $\alpha_1 \approx \dfrac{1}{H_1}$.



фиг. 1

Здесь u - возмущенная малая скорость частицы, t - время, $\tau = \tau_1(x_k) - t$ — эйконал, $H_1 = 1 / \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}$ — нормальная скорость невозмущенной волны [2], $\alpha_k = \partial\tau / \partial x_k$ $(k = 1,2,3)$. E - коэффициент дисперсии, зависящий от радиуса пузырька и инерции вращения частиц, D - коэффициент диссипации классической ньютоновской жидкости, G - коэффициент диссипации, учитывающий несимметричность жидкости (обусловлен моментной вязкостью c_a и c_d [3]), Γ - коэффициент нелинейности, y, z - координаты, отсчитываемые по касательной к волне невозмущенной задачи (фиг.1), x направлена по оси пучка.

В случае, когда начальное магнитное поле направлено по оси пучка (x), как следует из [4], можно считать

$$\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2\partial\alpha_3}=0,\quad \frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}=\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_3^2}$$

Выбирая ось y в качестве радиальной координаты, можно получить из (1.1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial\tau}-\frac{1}{2}H_1L(u)=\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\Gamma u\frac{\partial u}{\partial\tau}+D\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}+E\frac{\partial^3 u}{\partial\tau^3}+G_4\frac{\partial^4 u}{\partial\tau^4}\right) \tag{1.2}$$

где $L(u)=\dfrac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$.

Коэффициенты в уравнении (1.2) Γ, D, E, G для несимметричной электропроводящей жидкости с пузырьками газа конкретизированы в работе [4] и имеют вид

$$\Gamma=-\alpha^0\frac{c^2-a_1^2}{a_{*0}^2+a_1^2-2c^2}+\frac{3}{2}\frac{a_{*0}^2-c^2}{a_{*0}^2+a_1^2-2c^2} \tag{1.3}$$

$$D=-\frac{1}{H_1}M\left\{\frac{4}{3}\frac{\mu}{p_g}ca_{*0}^2+(\mu_0+2\mu)\frac{c}{\rho}\left(c^2-\frac{\mu_e}{\rho}H_x^2\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\mu\mu_e\left(c^2-a_{*0}^2\right)}{\rho^2 c}H_x^2+\nu_H c\left(c^2-a_{*0}^2\right)\right\} \tag{1.4}$$

$$E=\frac{1}{H_1^2}M\left[\frac{\rho_f R^2 ca_{*0}^2}{3p_g}\left(c^2-\frac{\mu_e}{\rho}H_x^2\right)+\frac{\mu_e I\left(c^2-a_{*0}^2\right)}{4\rho}H_x^2\right] \tag{1.5}$$

$$G=\frac{1}{H_1^3}M\frac{\mu_e(c_a+c_d)\left(c^2-a_{*0}^2\right)}{4\rho^2 c}H_x^2 \tag{1.6}$$

где

$$M=\frac{1}{2c\left[2c^2-\left(a_{*0}^2+a_1^2\right)\right]} \tag{1.7}$$

Здесь $\alpha^0=1/\beta_0$, β_0 - объем газа в единице объема смеси, c - нормальная скорость невозмущенной волны, относительно частиц, $a_1^2=\dfrac{\mu_e}{\rho}H_0^2$ - квадрат скорости Альфвена, H_0 - начальное магнитное поле, a_{*0} - невозмущенная скорость звука в газожидкостной смеси, μ - динамическая ньютоновская вязкость, p_g - давление в газе, μ_0 - объемная вязкость, ρ - массовая плотность смеси, μ_e - магнитная постоянная, H_x - проекция вектора напряженности магнитного поля на ось x, $\nu_H=1/\sigma\mu_e$ - коэффициент магнитной вязкости, σ - электропроводность среды, ρ_f - плотность жидкости, I - скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы [3], c_a и c_d - динамические моментные вязкости [3].

В случае, когда среда покоится впереди волны $V_n=0$, тогда

$H_1 = c$.

Для однородной среды в задаче стационарной дифракции для квазимонохроматической волны, уравнение которой в главных порядках имеет вид $\tau = 0$.

$$\tau = \tau_1(x_k) - t, \quad \tau_1 = \frac{x}{H_1}, \quad \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau_1}$$

2. Для медленно меняющихся амплитуд и фаз решение уравнения (1.2) можно искать в виде

$$u = U_0 + \frac{1}{2}U_1 \exp(i\alpha\tau - i\omega t - \nu\alpha^2 t) +$$

$$+\frac{1}{2}U_2 \exp(2i\alpha\tau - 2i\omega t - 2\nu\alpha^2 t) + \text{k.c.} \tag{2.1}$$

где α - основная частота волны, ν - коэффициент затухания, U_0, U_1, U_2 - медленно меняющиеся амплитуды, k.c. - комплексно сопряженные функции, ω - модуляционная частота.

Подставляя значение u из (2.1) в уравнение (1.2) и приравнивая слагаемые с нулевой, первой и второй гармониками, получим линейное дисперсионное соотношение и коэффициент затухания

$$\omega = -\frac{1}{H_1} E\alpha^3 \tag{2.2}$$

$$\nu = -\frac{1}{H_1} D + \frac{1}{H_1} G\alpha^2 \tag{2.3}$$

Уравнения для U_0, U_1 и U_2 имеют вид

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial t \partial \tau} - \frac{1}{2}L(U_0) = -\frac{1}{H_1}\left[\Gamma \frac{\partial}{\partial \tau}\left(U_0 \frac{\partial U_0}{\partial \tau}\right) + \frac{1}{4}\Gamma \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\left(U_1 \overline{U}_1\right) \times\right.$$

$$\left. \times \exp(-2\nu\alpha t^2) + D\frac{\partial^3 U_0}{\partial \tau^3} + E\frac{\partial^4 U_0}{\partial \tau^4} + G\frac{\partial^5 U_0}{\partial \tau^5}\right] \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial U_1}{\partial \tau}(i\omega + \nu\alpha^2) + i\alpha\frac{\partial U_1}{\partial t} + \omega\alpha U_1 - i\alpha^3 \nu U_1 - \frac{1}{2}L(U_1) =$$

$$= -\frac{1}{H_1}\left[-\Gamma\alpha^2 U_0 U_1 - \Gamma\frac{1}{2}\alpha^2 \overline{U}_1 U_2 \exp(-2\nu\alpha^2 t) + 3Di\alpha\frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} -\right.$$

$$-3D\alpha^2 \frac{\partial U_1}{\partial \tau} - Di\alpha^3 U_1 - 6E\alpha^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} - 4Ei\alpha^2 \frac{\partial U_1}{\partial \tau} + \alpha^4 EU_1 -$$

$$\left. -10Gi\alpha^3\frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} + 5\alpha^4 G\frac{\partial U_1}{\partial \tau} + Gi\alpha^5 U_1\right] \tag{2.5}$$

$$4\alpha\omega U_2 - 4i\alpha^3 \nu U_2 = -\frac{1}{H_1}\left[-\alpha^2 U_1^2 \Gamma - 8i\alpha^3 U_2 D +\right.$$

$$\left. +16\alpha^4 U_2 E + 32\alpha^5 i U_2 G\right] \tag{2.6}$$

При написании (2.6) опущены слагаемые, содержащие производные второй гармоники, что допустимо при $E\alpha^3 >> 1$.

Для дифракционных задач $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \sim \dfrac{1}{\varepsilon}$ и из уравнения (2.4) следует

$U_0 \sim \varepsilon^3$ (ε - малая величина порядка U_1), поэтому соответствующие слагаемые в (2.5) следует отбросить, тогда из (2.5) с учетом (2.2), (2.3) можно получить уравнение первой гармоники для произвольной однородной электропроводящей несимметричной газожидкостной смеси в магнитном поле

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial \tau} + i\alpha \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial \tau}\left[-\frac{3}{H_1} Ei\alpha^3 - \frac{2}{H_1} D\alpha^2 + \frac{4}{H_1}\alpha^4 G\right] +$$

$$+\frac{1}{H_1}\left(3Di\alpha - 6E\alpha^2 - 10Gi\alpha^3\right)\frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} = \tag{2.7}$$

$$= \frac{1}{2H_1}\frac{\Gamma^2\alpha^2 \bar{U}_1 U_1^2 \exp(-2\nu\alpha^2 t)}{-4Di\alpha + 12E\alpha^2 + 28Gi\alpha^3} - \frac{1}{2}L(U_1)$$

В неоднородной среде в (2.7) добавится член $-i\alpha U_1 \dfrac{\partial \ln \Phi}{\partial t}$.

Заметим, что из уравнения (2.6), с учетом (2.2) и (2.3), можно получить $U_2 \sim \varepsilon^2$.

3. В случае стационарной дифракционной задачи в уравнение (2.7) можно полагать $\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial t}\right)_\tau = \left(\dfrac{\partial U_1}{\partial t}\right)_{x_k} + \dfrac{\partial U_1}{\partial \tau_1} = \dfrac{\partial U_1}{\partial \tau_1}$, что следует из $\tau = \tau_1(x_k) - t$, где x_k - исходная система координат, то $\left(\partial U_1/\partial t\right)_{x_k} = 0$.

Для дифракционных задач можно $\partial^2 U_1/(\partial\tau_1)^2$ отбросить по сравнению с $\partial^2 U_1/\partial y^2$. Тогда, после замены в экспоненте t на τ_1 уравнение (2.7) примет вид

$$i\alpha\frac{\partial U_1}{\partial \tau_1}\left(1 - \frac{3}{H_1}E\alpha^2 + \frac{2}{H_1}D\alpha i - \frac{4}{H_1}G\alpha^3 i\right) =$$

$$= \frac{1}{2H_1}\frac{\Gamma^2\alpha \bar{U}_1 U_1^2 \exp(-2\nu\alpha^2\tau_1)}{-4Di + 12E\alpha + 28Gi\alpha^2} + \frac{1}{2}L(U_1) \tag{3.1}$$

Предполагая, что коэффициенты $D\alpha, E\alpha^2, G\alpha^3$ малы по сравнению с единицей, уравнение (3.1) перепишем в виде

$$i\alpha\frac{\partial U_1}{\partial \tau_1} = \frac{1}{2H_1}\frac{\Gamma^2\alpha \bar{U}_1 U_1^2 \exp(-2\nu\alpha^2\tau_1)}{-4Di + 12E\alpha + 28Gi\alpha^2} + \frac{1}{2}L(U_1) \tag{3.2}$$

Рассмотрим осесимметричную задачу при начальном магнитном поле, направленном по оси пучка x $H_{x_1} = H$, $H_{x_2} = H_{x_3} = 0$ и в качестве y берем радиальную координату.

В случае системы координат связанной с начальной волной $\alpha_2 \approx 0$, $\alpha_3 \approx 0$ и поскольку выбрано $H_{\varepsilon_1} = H_a$, можно получить

$$\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} = \frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_3^2} = -\frac{c^3}{2c^2 - a_{*0}^2 - a_1^2} \tag{3.3}$$

В линейном приближении имеет место уравнение [4]

$$c^4 - c^2[a_{*0}^2 + a_1^2] + a_1^2 a_{*0}^2 = 0 \tag{3.4}$$

Откуда получится на оси пучка для реальных условий $a_{*0} > a_1$, что $c = a_{*0}$ для быстрой волны,

Академия наук Узбекской ССР Фундаментальная библиотека

$c = a_1$ для медленной волны.

Из уравнения (3.2) можно получить

$$i\frac{\partial U_1}{\partial \tau_1} = U_1|U_1|^2(\chi_1 + i\chi_2) + \frac{1}{2\alpha}L(U_1) \tag{3.5}$$

где

$$\chi_1 = 3E\alpha^2\zeta, \quad \chi_2 = (D\alpha - 7G\alpha^3)\zeta$$

$$\zeta = \frac{1}{8H_1\alpha}\frac{\Gamma^2\exp(-2\nu\alpha^2\tau_1)}{9E^2\alpha^2 + (D - 7G\alpha^2)^2} \tag{3.6}$$

Положим

$$U_1 = ae^{i\varphi} \tag{3.7}$$

где a - амплитуда, φ - фаза.

Рассмотрим осесимметричную задачу, зависящую от (τ_1, y), тогда из (3.5) с учетом (3.4) получим для действительной части

$$-a\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_1} = a^3\chi_1 + \frac{1}{2\alpha}H_1\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left[\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{1}{y}\frac{\partial a}{\partial y}\right] \tag{3.8}$$

и для мнимой части

$$\frac{\partial a}{\partial\tau_1} = a^3\chi_2 + \frac{1}{2\alpha}H_1\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left[a\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + 2\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{1}{y}a\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] \tag{3.9}$$

Решение (3.8), (3.9) ищем в виде

$$a = \frac{K}{f}\exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2 f^2}\right), \quad \varphi = \sigma(\tau_1) + k\frac{y^2}{2} \tag{3.10}$$

где K - константа, $f(\tau_1)$, $k = k(\tau_1)$, $\frac{kH_1}{\alpha}$ - кривизна волны. $y_0 = \text{const}$ - начальный радиус пучка.

Подставляя (3.10) в (3.8) и (3.9), получим

$$\begin{aligned}-\left[\sigma'(\tau_1) + k'(\tau_1)\frac{y^2}{2}\right] &= \chi_1\frac{K^2}{f^2}\exp\left(-2\frac{y^2}{y_0^2 f^2}\right) + \\ &+ \frac{1}{2\alpha}H_1\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left[-\frac{4}{f_0^2 f^2} + \frac{4y^2}{y_0^4 f^4} - k^2 y^2\right]\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}-\frac{f'}{f} + \frac{2fy^2}{y_0^2 f^3} &= \chi_2\frac{K^2}{f^2}\exp\left(-2\frac{y^2}{y_0^2 f^2}\right) + \\ &+ \frac{1}{2\alpha}H_1\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left[2k - \frac{4y^2 k}{y_0^2 f^2}\right]\end{aligned} \tag{3.12}$$

Здесь и далее штрих - производная по τ_1.

Считая, что пучки приосевые, то есть $\frac{y}{y_0 f} << 1$, $\exp\left(-2\frac{y^2}{y_0^2 f^2}\right)$, разлагаем по степеням $\frac{y}{y_0 f}$ и приравниваем члены порядка единицы и y^2 в (3.11) и (3.12), тогда получим уравнения

$$-\sigma'(\tau_1)=\chi_1\frac{K^2}{f^2}-\frac{1}{2\alpha}H_1\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{4}{y_0^2 f^2} \tag{3.13}$$

$$-\frac{k'(\tau_1)}{2}=-\chi_1\frac{K^2}{f^2}\frac{2}{y_0^2 f^2}+\frac{1}{2\alpha}H_1\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left[\frac{4}{y_0^4 f^4}-k^2\right] \tag{3.14}$$

$$-\frac{f'}{f}=\chi_2\frac{K^2}{f^2}+\frac{1}{\alpha}H_1\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}k \tag{3.15}$$

Отметим, что уравнения, полученные из (3.12), приравниванием членов с нулевой степенью y и y^2 совпадают и приводятся к уравнению (3.15). Совпадение этих уравнений является следствием осесимметричности задачи, в плоской задаче получаются противоречивые уравнения в случае $\chi_2 \neq 0$.

Подставляя значение k из (3.5) в (3.14), получим уравнение для f в виде

$$f''=\frac{\xi}{f^3}+2\nu\alpha^2\chi_2\frac{K^2}{f} \tag{3.16}$$

$$\xi=-\chi_1 K^2\frac{4}{y_0^2\alpha}H_1\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}+\frac{4}{y_0^2}\left(\frac{H_1}{\alpha}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\right)^2-\chi_2^2K^4 \tag{3.17}$$

Таким образом, имеется решение уравнения (3.5) в виде узких (приосевых) пучков, которые приводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению (3.16). В случае малой диссипации в (3.6) можно полагать $\exp\left(-2\nu\alpha^2\tau_1\right)\approx 1$ и второе слагаемое в (3.16) можно отбросить, тогда получится уравнение нелинейной оптики [4]

$$f''=\frac{\xi}{f^3} \tag{3.18}$$

где $\xi=\mathrm{const}$, такой же результат получится для сильной диссипации, для которой $\exp\left(-2\nu\alpha^2\tau_1\right)\approx 0$ и имеет место линейное решение (3.18), в котором $\chi_1=\chi_2=0$. В обоих случаях имеет место уравнение (3.18), в котором $\xi=\mathrm{const}$. Тогда, интегрируя (3.18) при начальных условиях

$$\tau_1=0,\ f=1,\ k=\frac{1}{R_0},\ f'=-\frac{H_1}{\alpha}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{1}{R_0}-\chi_2K^2 \tag{3.19}$$

где $\frac{\alpha}{H_1}R_0$ – начальный радиус кривизны фронта волны, получим решение в виде

$$-\tau_1=\frac{\sqrt{Cf^2-\xi}}{C}-\frac{\sqrt{C-\xi}}{C} \tag{3.20}$$

где

$$C=\left(\frac{1}{R_0}\frac{H_1}{\alpha}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}+\chi_2K^2\right)^2+\xi \tag{3.21}$$

Значение τ_1 для фокуса, в котором $f=0$, действительно при $\xi<0$, причем в случае быстрой волны $\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}<0$ и $\xi>0$.

Таким образом, быстрые магнитогазодинамические волны не самофокусируются, а медленные волны, для которых $\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} > 0$, могут фокусироваться.

Согласно (1.3)-(1.7) для быстрой волны, в которой $c = a_{*0}$, в коэффициенты D, E, G магнитное поле и несимметричность жидкости не входят. Для медленной волны $c = a_1$ коэффициенты D, E, G зависят от магнитного поля и несимметричности жидкости, причем $E = 1/8a_1$.

В линейном приближении без учета диссипации и дисперсии соотношения совместности на волне имеют вид [4]

$$
\begin{aligned}
&c\delta\rho = \rho\delta u, \qquad c^2\delta\rho = a_{*0}^2\delta\rho, \qquad -\rho c\delta V_y = \mu_e H_0\delta H_y \\
&-c\delta H_y - H_0\delta V_y = 0 \qquad (c_n = c,\ V_x = 0)
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Для быстрой волны $c = a_{*0}$ и из (3.22) следует $\delta\rho \neq 0$, $\delta u \neq 0$, $\delta V_y = \delta H_y = 0$, т.е. волна продольная. Для медленной волны $c = a_1$, следовательно, как следует из (3.22) $\delta\rho = \delta u = 0$ $\rho c\delta V_y = \frac{\mu_e H_0^2}{c}\delta V_y$, откуда получится $\delta V_y \neq 0$ и $\delta H_y \neq 0$, т.е. медленная волна есть поперечная. Тогда уравнение (1.2) можно написать и для медленной волны, только в нем нужно u заменить на V_y и отбросить нелинейный член $\Gamma u \frac{\partial u}{\partial \tau}$. Поэтому все выкладки, начиная с формулы (1.3), где заменено u на V_y, остаются в силе, только следует полагать $\Gamma = 0$. Тогда, в выбранном приближении получим уравнение модуляции (3.2), где следует считать $U_1 = V_1$ и $\Gamma = 0$. Тогда, задавая начальное условие при $\tau_1 = 0$ в виде продольных колебаний в форме гауссова пучка, получим быструю волну, определяемую формулами (2.1), (3.7) и (3.16), а задавая начальное условие в форме поперечных колебаний, получим формулу (3.18), где следует полагать в ξ $\chi_1 = \chi_2 = 0$.

Таким образом, начальное возмущение в форме гауссова пучка расщепляется на квазипродольную быструю волну и квазипоперечную медленную волну.

Для произвольной диссипации имеется уравнение (3.16) и его следует решать численно при начальных условиях (3.19).

4. Для численного решения уравнений (3.16) и (3.20) запишем их в безразмерном виде. Уравнение (3.16) в безразмерной форме будет иметь вид

$$
\frac{d^2 f}{d\tau^{*2}} = \frac{\xi^*}{f^3} + 2\nu^*\chi_2^* \frac{K^{*2}}{f}
\tag{4.1}
$$

где

$$
\xi^* = -\chi_1^* K^{*2} \frac{4}{y_0^{*2}} \frac{\partial^2\alpha_1^*}{\partial\alpha_2^{*2}} + \frac{4}{y_0^{*4}} \left(\frac{\partial^2\alpha_1^*}{\partial\alpha_2^{*2}}\right)^2 - \chi_2^{*2} K^{*4}
\tag{4.2}
$$

Начальные условия (3.19) в безразмерной форме запишутся так:

$$
\tau_1^* = 0,\ f = 1,\ \frac{df}{d\tau_1^*} = -\frac{\partial^2\alpha_1^*}{\partial\alpha_2^{*2}} \frac{1}{R_0^*} - \chi_2^* K^{*2}
\tag{4.3}
$$

Здесь введены следующие безразмерные переменные и величины:

$$\tau^* = \alpha\tau_1, \quad \nu^* = \alpha\nu, \quad G^* = \frac{G\alpha^3}{H_1}$$

$$E^* = \frac{E\alpha^2}{H_1}, \quad D^* = \frac{D\alpha}{H_1}, \quad \zeta^*\frac{\alpha}{H_1^3} = \zeta \tag{4.4}$$

$$\chi_1^*\frac{\alpha}{H_1^2} = \chi_1, \quad \chi_2^*\frac{\alpha}{H_1} = \chi_2, \quad K^*H_1 = K$$

$$y_0^*\frac{H_1}{\alpha} = y_0, \quad H_1\frac{\partial^2\alpha_1^*}{\partial\alpha_2^{*2}} = \frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}, \quad \xi^*\alpha^2 = \xi$$

$$R_0^*\frac{H_1^2}{\alpha^2} = R_0$$

Тогда соотношения (3.6) в безразмерной форме будут

$$\chi_1^* = 3E^*\zeta^*, \quad \chi_2^* = \left(D^* - 7G^*\right)\zeta^*$$

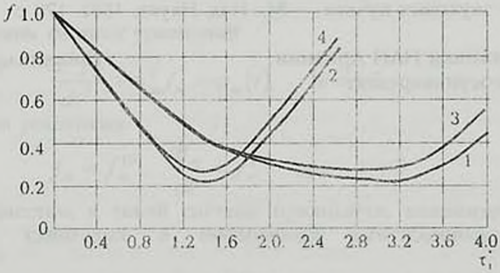
$$\zeta^* = \frac{1}{8}\frac{\Gamma^2\exp\left(-2\nu\tau_1^*\right)}{9E^{*2} + \left(D^* - 7G^*\right)^2} \tag{4.5}$$

Уравнение (3.20) в безразмерной форме имеет вид

$$\tau_1^* = \frac{\sqrt{C^* - \xi^*}}{C^*} - \frac{\sqrt{C^*f^2 - \xi^*}}{C^*} \tag{4.6}$$

Вводя безразмерное переменное $C^* = C/\alpha^2$, согласно формуле (3.21) будем иметь

$$C^* = \left(\frac{1}{R_0^*}\frac{\partial^2\alpha_1^*}{\partial\alpha_2^{*2}} + \chi_2^*K^{*2}\right)^2 + \xi^* \tag{4.7}$$



Фиг. 2

Результаты численных расчетов приведены на фиг.2, где кривая 1 соответствует случаю отсутствия магнитного поля, для которого $A = \dfrac{\partial^2\alpha_1^*}{\partial\alpha_2^{*2}} = -1$, кривая 2 соответствует учету магнитного поля и выбрано $A = -2$. При расчетах выбраны следующие значения безразмерных величин: $\Gamma = 10$, $E^* = 1$, $K^* = 0.1$, $y^* = 5$, $1/R_0^* = -0.3333$, $D^* = -1$, $\nu^* = 1$. Кривая 3 соответствует $A = -1$, кривая 4 соответствует учету магнитного поля и выбрана $A = -2$. Остальные величины те же, кроме $D^* = 0$, $\nu^* = 0$, то есть отсутствует диссипация.

Из фиг.2 видно, что наличие магнитного поля уменьшает фокальное расстояние для фокального пятна. Наличие диссипации также приводит к уменьшению фокального расстояния. При этом безразмерные ширины пучков в фокальном пятне практически остаются без изменения.

В заключение отметим, что в настоящей работе предположена значительная величина параметра дисперсии ($\omega l >> 1$, что приводит к пренебрежению производных второй гармоники и к условию $U_2 << U_1$), причем, как показано при этом, характер квазимонохроматичности профиля волны в процессе распространения не меняется. В то же время при условии конечность-дисперсии ($\omega l \approx 1$) или ее отсутствия, как показывают численные расчеты, профиль волны может стать разрывным [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Петросян Л.Г. Уравнение коротких волн для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений. II. Коэффициенты уравнений коротких волн для теплопроводящей жидкости с моментными напряжениями. – ЖТФ, 1980, т.50, вып.12, с.2512-2519.
2. Багдоев А.Г., Петросян Л.Г. Уравнения коротких волн для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений. I. Упрощенные уравнения коротких волн для произвольной нелинейной слабо-диссипативной среды – ЖТФ, 1980, т.50, вып.12, с.2504-2511.
3. Петросян Л.Г. Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений. – Ереван: Изд. ЕГУ, 1984. 308 с
4. Багдоев А.Г., Петросян Л.Г. Распространение волн в микрополярной электропроводящей жидкости – Изв. АН Арм. ССР. Механика,1983, т.36, №5, с. 3-16.
5. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. – М.: Изд. Наука, 1982. 176 с.

Институт механики НАН Армении
Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
29.11.1996

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №3, 1998 Механика

УДК 539.3:62.52

ВОЗВРАЩЕНИЕ К ВОПРОСУ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ УПРУГОЙ БАЛКИ

Мовсисян Л.А., Габриелян М.С.

Լ.Ա. Մովսիսյան, Մ.Ս. Գաբրիելյան

Վերադարձ առաձգական համակարգերի շարժման ղեկավարման հարցին

Դիտարկվում է հեծանի շարժման ղեկավարման խնդիրը երկու դրվածքով՝ երբ պահանջվում է ժամանակի որոշակի մոմենտին հեծանի որևէ կետ բերել տրված դիրքին և երբ պարզապես ժամանակի որոշակի մոմենտին հեծանի բոլոր կետերը և նրանց արագությունները բերվեն տրված արժեքներին, ըստ որում օպտիմալ ձևով: Եթե վերջին խնդիրը լուծվում է մոմենտների պրոբլեմի միջոցով միայն, ապա առաջին դրվածքի դեպքում անհրաժեշտ է լինում միաժամանակ մինիմացնել նաև ծախսված աշխատանքը:

L.A. Movsisian, M.S. Gabrielian

The return to control problems for motion of elastic systems

В работе [1] была изучена задача оптимального управления движением термоупругой пластинки (связанная задача). В качестве управляющих воздействий помимо силовых факторов рассматривалась также и температура. Так как там ставился вопрос приведения системы и ее скорость в определенные моменты времени в определенные состояния (вся система), вариационная задача решалась с помощью проблемы моментов. На практике возможны случаи, когда есть необходимость привести какую-нибудь точку объекта в данное положение. В настоящей статье исследуется этот вопрос. В отличие от [1], здесь уже помимо квадратичного функционала минимизируется также истраченная силами работа. Ради краткости изложение ведется для одномерных систем. Из хода решения видно будет, что решение двумерных задач не вносит никаких принципиальных отличий по сравнению с одномерными. Чтобы показать разницу между двумя постановками, в кратком виде приводится решение задачи, когда вся система приводится к заданным положению и скорости.

1. Возьмем систему уравнений

$$\frac{d^2 f_m}{dt^2} + \omega_m^2 f_m = \varphi_m(t), \qquad m = 1, 2 \ldots \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$f_m = f_m^{(0)}, \quad \frac{df_m}{dt} = f_m^{(1)} \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{1.2}$$

Как известно, к такой системе приводятся, например, уравнения продольных, сдвиговых и поперечных вынужденных колебаний стержней.

Для определенности в дальнейшем будем рассматривать изгибные колебания.

Если прогиб балки обозначить через $w(x,t)$, интенсивность действующей нагрузки $\phi(x,t)$ и начальные условия — $w|_{t=0} = w_1(x)$ и $\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = w_2(x)$, то разлагая w в ряд по фундаментальным функциям $X_m(x)$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) X_m(x) \tag{1.3}$$

получим (1.1) с

$$\omega_m^2=\frac{EJ}{\rho F}\lambda_m^4,\quad \varphi_m=\frac{1}{\rho F Q_m}\int_0^l \Phi(x,t)X_m(x)dx$$

$$f_m^{(0)}=\frac{1}{Q_m}\int_0^l w_1(x)X_m(x)dx,\quad f_m^{(1)}=\frac{1}{Q_m}\int_0^l w_2(x)X_m(x)dx$$

$$M_m=\int_0^l X_m^2(x)dx$$

где λ_m – собственные значения соответсвующей однородной задачи.

Вопрос ставится следующим образом: в определенный момент времени $t=T$ определенную точку балки $x=x_1$ привести в заданное положение –

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m(T)X_m(x_1)=\overline{w} \tag{1.4}$$

при этом истрачивая минимальную работу. Согласно системе (1.1), работа управляющей силы за время $0\le t\le T$ будет

$$A=\int_0^T\int_0^l \Phi(x,t)\frac{\partial w}{\partial t}dxdt \tag{1.5}$$

Согласно (1.3) и формуле Коши, для решения (1.1) выражение (1.5) получит вид

$$A=\rho F\sum_{m=1}^{\infty}\left\{-f_m^{(0)}\omega_m Y_m(T)+f_m^{(1)}Z_m(T)+\frac{1}{2}\left[Z_m^2(T)+Y_m^2(T)\right]\right\} \tag{1.6}$$

где введены обозначения

$$Y_m(t)=\int_0^t \varphi_m(\tau)\sin\omega_m\tau d\tau,\quad Z_m(t)=\int_0^t \varphi_m(\tau)\cos\omega_m\tau d\tau \tag{1.7}$$

В новых обозначениях условие (1.4) дает

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m(x_1)\left\{f_m^{(0)}\cos\omega_m T+\frac{f_m^{(1)}}{\omega_m}\sin\omega_m T+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\omega_m}\left[Z_m(T)\sin\omega_m T-Y_m(T)\cos\omega_m T\right]\right\}=\overline{w} \tag{1.8}$$

Так как (1.6) – вогнутая функция от $Y_m(T)$ и $Z_m(T)$, а выражение (1.8) линейно относительно этих же переменных, то минимум (1.6) при (1.8) достижим и его можно найти при помощи неопределенных множителей Лагранжа.

После минимизации получим

$$\begin{aligned}Y_m(T)&=f_m^{(0)}\omega_m+\frac{\lambda}{\omega_m}\cos\omega_m T\\ Z_m(T)&=-f_m^{(1)}-\frac{\lambda}{\omega_m}\sin\omega_m T\end{aligned} \tag{1.9}$$

где множитель λ определяется по формуле

$$\lambda=-\overline{w}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k(x_1)}{\omega_k^2}\right]^{-1} \tag{1.10}$$

Так как ряд в (1.10) сходится абсолютно, то λ – конечное число. Согласно (1.7), (1.9) и (1.10) имеем

$$A_m(T) = Y_m(T) = f_m^{(0)}\omega_m - \frac{\overline{w}}{\omega_m}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k(x_1)}{\omega_k^2}\right]^{-1} \cos\omega_m T$$

$$B_m(T) = Z_m(T) = -f_m^{(1)} + \frac{\overline{w}}{\omega_m}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k(x_1)}{\omega_k^2}\right]^{-1} \sin\omega_m T \qquad (1.11)$$

Отметим, что $A_m(T)$ и $B_m(T)$ имеют порядок $\sim 0(m^{-2})$.

Как видно из последних формул, из условия минимума истраченной энергии управляющее воздействие $\varphi_m(t)$ $(\Phi(x,t))$ не определяется однозначным образом и есть необходимость дополнительных условий на управляющее воздействие, то есть, затрачивая минимум энергии, систему можно привести в указанное положение различными способами.

Для однозначного определения управляющей функции $\Phi(x,t)$ целесообразно минимизировать также функционал

$$U = \int_0^T\int_0^l \Phi^2(x,t)dxdt \qquad (1.12)$$

На основании ортогональности $X_m(x)$ имеем

$$U = c\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^T \varphi_m^2(t)dt, \qquad (c = \text{const} > 0) \qquad (1.13)$$

Таким образом, задача сводится к минимизации функционала (1.13) при условии (1.11). Так как слагаемые в (1.13) не зависят друг от друга, то минимум суммы получится при минимуме каждого слагаемого. Таким образом, вопрос сводится к следующей задаче: минимизировать функционал

$$J_m = \int_0^T \varphi_m^2(t)dt \qquad (1.14)$$

при условии (1.11).

Поставленную задачу оптимального управления целесообразно решить при помощи проблемы моментов [2]. Для этого составим линейную операцию

$$\int_0^T \varphi_m(t)h_{mp}(t)dt, \quad \text{где} \quad h_{mp}(t) = p_m^{(1)}\cos\omega_m t + p_m^{(2)}\sin\omega_m t$$

и потребуем, чтобы

$$p_m^{(1)}B_m + p_m^{(2)}A_m = 1 \qquad (1.15)$$

Тогда, норма основного пространства ищется в виде

$$\rho(h_m) = \left[\int_0^T h_m^2(t)dt\right]^{1/2} \qquad (1.16)$$

Минимальное значение нормы $\rho(h)$ над подпространством $\{h_p(t)\}$ будет

$$\rho_0^2 = \min_{p_m^{(1)}B_m + p_m^{(2)}A_m = 1}\int_0^T h_{mp}^2(t)dt \qquad (1.17)$$

Совершая необходимые действия, для ρ_0^2 получим

$$\rho_0^2 = \frac{a_m b_m - c_m^2}{2M_m} \tag{1.18}$$

где

$$a_m = T + \frac{1}{2\omega_m}\sin 2\omega_m T, \quad b_m = T - \frac{1}{2\omega_m}\sin 2\omega_m T$$

$$c_m = \frac{1}{\omega_m}\sin^2\omega_m T, \quad Q_m = a_m A_m^2 - 2c_m A_m B_m + b_m B_m^2 \tag{1.19}$$

Из (1.18) и (1.19) следует, что $\rho_0^2 > 0$.

Следовательно, для оптимального управляющего воздействия будем иметь

$$\varphi_m^{(0)} = \frac{2}{a_m b_m - c_m^2}\left[\left(b_m B_m - c_m A_m\right)\cos\omega_m t + \left(A_m a_m - B_m c_m\right)\sin\omega_m t\right] \tag{1.20}$$

Таким образом, получили решение поставленной задачи и так как $\varphi_m^{(0)}$ имеют такой же порядок, что и A_m и B_m, следовательно ряд (1.13) абсолютно сходится, то есть функционал, характеризующий процесс управления, — конечная величина.

Замечание 1. Если колебание осуществляется помимо начальных условий (1.2) и силой, то уже под $\varphi_m^{(0)}$ в (1.20) следует понимать сумму, состоящую как из искомой (обеспечивает оптимальное управление) и известной частей. К этим задачам относятся также случаи, когда заданы законы движения опор балки.

2. Если же вопрос поставить следующим образом: чтобы в момент $t = T$ прогиб и скорость принимали заданные значения

$$w(x,t) = w_3(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m X_m(x)$$

$$\frac{\partial w(x,T)}{\partial t} = w_4(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\beta_m X_m(x) \tag{2.1}$$

то функции $Z_m(T)$ и $Y_m(T)$ из (1.7) определятся единственным образом

$$A_m^{(1)} = Y_m(T) = \beta_m \sin\omega_m T - \alpha_m\omega_m\cos\omega_m T + f_m^{(0)}\omega_m$$

$$B_m^{(1)} = Z_m(T) = \alpha_m\omega_m\sin\omega_m T + \beta_m\cos\omega_m T - f_m^{(1)} \tag{2.2}$$

При настоящей постановке A из (1.5) будет постоянной величиной (не варьируется). А минимизация (1.13) при (2.2) дает формулы (1.20), где уже A_m и B_m заменены на $A_m^{(1)}, B_m^{(1)}$, то есть

$$\varphi_m^{(0)} = \frac{2}{a_m b_m - c_m^2}\left[\left(b_m B_m^{(1)} - c_m A_m^{(1)}\right)\cos\omega_m t + \left(a_m A_m^{(1)} - c_m B_m^{(1)}\right)\sin\omega_m t\right] \tag{2.3}$$

Вопрос сходимости решается совершенно аналогичным образом, как в п.1

3. В качестве примера возьмем шарнирно опертую балку, которой в момент $t = 0$ сообщается прогиб по одной полуволне —

$$f_1^{(0)} = f^0, \quad f_m^{(0)} = f_m^{(1)} = 0, \quad f_1^{(1)} = 0, \quad m = 2,3,\ldots \tag{3.1}$$

Фундаментальные функции — $\left\{\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}$.

Частоты определятся

$$\omega_m = \alpha m^2, \quad \alpha = \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}\frac{\pi^2}{l^2}, \quad m = 1,2,\ldots \tag{3.2}$$

В отсутствие управляющих сил в момент $t = T = \frac{2\pi}{\omega_1}$ балка будет находиться в первоначальном положении. Теперь осуществим управления в обеих постановках.

а) В первой постановке потребуем, чтобы в момент $t = T$ точка $x = l/2$ находилась в противоположном положении –

$$w\left(\frac{l}{2}, T\right) = -f^0 \tag{3.3}$$

Произведя необходимые вычисления для управляющей функции, находим

$$\Phi = f_0\beta\left[\sin\omega_1 t \sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{G}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\omega_m t}{m^2}\sin\frac{m\pi x}{l}\right] \tag{3.4}$$

где $\beta = EJ\pi^3/l^4$, а G – постоянное Каталана

$$G = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

б) Теперь при второй постановке –

$$w_3(x) = -f^0 \sin\frac{\pi x}{l}, \quad w_4 = 0$$

для управляющей функции находим

$$\Phi = 2\beta f_0 \sin\omega_1 t \sin\frac{\pi x}{l} \tag{3.5}$$

Интересно отметить, что если бы потребовали, чтобы в момент $T = \frac{\pi}{\omega_1}$ срединная точка балки находилась в равновесном положении $\left(w\left(\frac{l}{2}, T\right) = 0\right)$ при первой постановке и $w_3(x) = w_4(x) = 0$ при втором, то для управляющих функций получили бы одинаковые выражения.

Замечание 2. По небрежности авторов [1], в качестве управляющих функций брались и граничные значения температуры – $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$, что приводит к расходящемуся ряду. Их следует брать как заданные. Коэффициенты β, γ и ε в (2.1) работы [1] – постоянные, что и предполагалось с самого начала. Но почему-то в тексте после формулы (2.20) им приписывается порядок. Ряды сходятся и при их постоянном значении.

Внимание авторов к этим фактам обратил Э.Х. Григорян, когда уже была готова первая часть настоящей статьи, за что авторы приносят ему благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А., Габриелян М.С. Об одной задаче управления движением термоупругой пластинки-полосы – Изв. НАН Армении, Механика, 1995, т.48, №3, с.15-22.

2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. 475с.

Институт механики НАН Армении
Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 2.09.1996

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №3, 1998 Механика

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДЕФОРМИРУЕМОГО МНОГОГРАННИКА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СЖАТОЙ ПЛАСТИНКИ, УСИЛЕННОЙ ПО КРАЯМ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ, ПРИ ЗАДАННОМ ЗНАЧЕНИИ ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Погосян А.Г.

Ա.Գ. Պողոսյան

Դեֆորմացվող բազմանիստի մեթոդի կիրառումը, եզրերով կոշտության կողերով ուժեղացված, սեղմված ուղղանկյուն սալի օպտիմալ նախագծման խնդրում, սեփական տատանումների առաջին հաճախականության տրված արժեքի դեպքում

Աշխատանքում առաջարկվում է դեֆորմացվող բազմանիստի մեթոդի կիրառմամբ, ոչ գծային ծրագրավորման ալգորիթմ, բարակապատ կառուցվածքների օպտիմիզացիայի համար:

Ինչպես հայտնի է, դեֆորմացվող բազմանիստի մեթոդը կիրառվում է, առանց սահմանափակումների օպտիմիզացիայի խնդիրները լուծելիս:

Աշխատանքում առաջարկվող ալգորիթմը թույլ է տալիս դեֆորմացվող բազմանիստի մեթոդը կիրառել, հավասարության և անհավասարության տեսքով սահմանափակումների առկայության դեպքում:

Ալգորիթմի կիրառումը լուսաբանվում է եզրերով կոշտության կողերով ուժեղացված ուղղանկյուն սալի օպտիմալ նախագծման խնդրում, սեփական տատանումների առաջին հաճախականության տրված արժեքի դեպքում:

A.G. Pogosian

The Application of the Deforming Polyhedron Method in Case of the Given Value of the First frequency of Own Vibration in the Problem of Optimal Design of a Pressed rectangular Plate Strengthened at Sides by Rigid Edges

В работе предлагается алгоритм решения задачи нелинейного программирования при оптимизации тонкостенных конструкций с использованием метода деформируемого многогранника (МДМ).

Как известно, МДМ разработан для решения задач оптимизации без наличия ограничений [1]. Предлагаемый в работе алгоритм позволяет обобщать МДМ на случай наличия ограничений как в виде равенств, так и неравенств. Применение данного алгоритма иллюстрируется на примере решения задачи оптимального проектирования сжатой пластинки, усиленной по краям ребрами жесткости при заданном значении первой частоты собственных колебаний.

1. Задача нелинейного программирования в общей постановке формулируется следующим образом:

Найти

$$\min_{x} f(\bar{x}), \qquad \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при ограничениях

$$h_i(\bar{x}) = 0, \qquad i = 1,2,\ldots m$$

$$g_i(\bar{x}) \geq 0, \qquad i = m+1, m+2, \ldots q \tag{1}$$

Для использования МДМ к решению задачи (1) следует свести ее к задаче без наличия ограничений.

Исключение ограничений в виде равенств возможно, если решить их относительно m переменных и подставить в целевую функцию $f(\bar{x})$ и ограничения в виде неравенств. При этом нет необходимости получения аналитического выражения целевой функции путем непосредственной подстановки переменных из ограничений в виде равенств.

Во многих случаях это оказывается невозможным. Достаточно включить в программу вычислений численное решение систем уравнений $h_i(\bar{x}) = 0$ на каждом этапе поиска и подстановку переменных в целевую функцию и ограничения в виде неравенств. В этом случае задача сводится к следующей:

Найти

$$\min_x f(\bar{x}), \qquad \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \quad p = n - m$$

при ограничениях

$$g_i(\bar{x}) \geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots q - m \tag{2}$$

Для исключения ограничений в виде неравенств вводится дополнительная функция

$$F(\bar{x}) = f(\bar{x}) \prod_{i=1}^{q-m} U_i$$

где

$$U_i = \{0 \text{ при } g_i(x) < 0; \ 1 \text{ при } g_i(x) \geq 0\}$$

Таким образом, функция $F(x)$ вне допускаемой области обращается в нуль и задача записывается в виде

Найти

$$\min_{\bar{x}} F(\bar{x}), \qquad \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \tag{3}$$

При использовании МДМ для минимизации функции $F(\bar{x})$ ограничения в виде неравенств будут удовлетворены, если при построении симплекса и его деформировании на каждом этапе потребовать, чтобы функция $F(\bar{x})$ была отлична от нуля, т.е. чтобы все вершины многогранника были допустимыми.

В случае, когда целевая функция является многоэкстремальной, оптимизация может закончиться в точке локального экстремума. В связи с этим предлагается сочетание МДМ с прямым поиском, которое заключается в сеточном разбиении области переменных и принятии внутренних допустимых узловых точек сетки в качестве стартовых для поиска методом деформируемого многогранника.

Из полученных экстремальных значений целевой функции минимальное будет принято в качестве глобального экстремума.

Такой подход приводит к увеличению числа операций при оптимизации, так как процедура минимизации будет повторяться по числу узловых точек сетки. Однако, это увеличивает вероятность достижения глобального экстремума.

Разбиение области переменных производится взаимно-перпендикулярными прямыми с равномерным шагом

$$\Delta_i = (l_i - l_i^0)/N_i$$

по каждому из переменных x_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Здесь l_i и l_i^0 - пределы изменения переменной x_i, N_i - число шагов в направлении x_i.

Таким образом, получается конечное множество внутренних узловых точек

$$\Omega = \left\{ \bar{x}_j^{(1)}(x_{1j}^{(1)}, x_{2j}^{(1)}, \ldots, x_{ij}^{(1)}, \ldots, x_{pj}^{(1)}), \ \ j = 1, 2, \ldots, \prod_{i=1}^{p}(N_i - 1) \right\}_j$$

которые находятся на пересечениях прямых

$$x_i = l_i^0 + m\Delta_i, \quad m = 1,2,\dots,N_i - 1, \quad i = 1,2,\dots,p.$$

Те точки $\bar{x}_j^{(1)}$ множества Ω, которые являются допустимыми, т.е. удовлетворяют условию $F(\bar{x}) \neq 0$, принимаются в качестве стартовых при поиске по МДМ.

Все $p+1$ вершины симплекса, построенные известным способом [1], из начальной точки $\bar{x}_j^{(1)}$ проверяются на допустимость и, если какая-либо из них $\bar{x}_j^{(k)}$ является недопустимой, строится новая вершина многогранника путем переноса точки $\bar{x}_j^{(k)}$ на надлежащее расстояние вдоль прямой

$$\bar{x}_j = \bar{x}_j^{(k)} + \theta\left(\bar{x}_j^{(c)} - \bar{x}_j^{(k)}\right),$$

проходящей через центр тяжести $\bar{x}_j^{(c)}$ остальных вершин симплекса.

Соответствующим выбором коэффициента $\theta \in (0,1)$ новая вершина многогранника сдвигается к центру тяжести до тех пор, пока не станет допустимой. Далее производится процедура деформирования многогранника методом Нелдера-Мида [1] с включением на каждом этапе недопустимых вершин в допустимую область.

Таким образом, при деформировании многогранника проводятся последовательно две операции: включение вершин многогранника в допустимую область и исключение точек, где целевая функция достигает максимального значения. В результате поиска из множества стартовых точек, могут быть получены несколько экстремальных значений целевой функции. Минимальное из этих значений может быть принято в качестве решения поставленной задачи.

2. В качестве приложения предлагаемого алгоритма решается задача проектирования оптимальной прямоугольной сжатой пластинки, усиленной по краям ребрами жесткости, при заданном значении первой частоты собственных колебаний.

Рассматривается прямоугольная изотропная пластинка размерами $a \times b \times h$, отнесенная к системе координат $0xyz$, усиленная по двум свободным кромкам $x = \pm a/2$ ребрами жесткости размерами $\alpha h_1 \times h_1 \times b$, шарнирно опертая по другим, загруженным равномерно-распределенными сжимающими силами F краям $y = 0$ и $y = b$.

Ставится задача определения оптимальных геометрических параметров α, h_1, h_2, обеспечивающих при заданных габаритных размерах $\xi = (a + 2\alpha h_1)/b$, значениях силы F и частоты загруженных колебаний Ω, минимальный вес конструкции.

Уравнение собственных колебаний сжатой пластинки имеет вид [2]

$$D\Delta^2 w + \frac{F}{A} h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \rho h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{4}$$

где $D = Eh_2^3/12(1-\nu^2)$ - цилиндрическая жесткость пластинки, $A = 2\alpha h_1^2 + ah_2$ - площадь поперечного ($y = \mathrm{const}$) сечения, ρ - плотность материала, $w(x,y,z)$ - функция прогибов, t - время.

Граничные условия запишутся в виде:

- шарнирного опирания

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{при} \quad y = 0, \ y = b \tag{5}$$

- симметрии (в случае симметричной формы колебаний)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \qquad \text{при} \quad x = 0 \tag{6}$$

- антисимметрии (в случае антисимметричной формы колебаний)

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{при} \quad x = 0 \tag{7}$$

- упругого опирания на ребро жесткости [3]:

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{F}{A}A_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \rho A_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)$$

$$C\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^3} = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad \text{при} \ \ x = a/2 \tag{8}$$

Здесь C – жесткость прямоугольного ребра на кручение, определяемая по формуле [4].

$$C = \frac{E}{2(1+\nu)}\beta h_1^4, \qquad \beta = \alpha^3\left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5}\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}\,\mathrm{th}\frac{\pi n}{2\alpha}\right]$$

$EJ = E\alpha h_1^4/12$ – жесткость ребра на изгиб, $A = \alpha h_1^2$ – площадь поперечного сечения ребра.

Решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям (5)-(7), принимается в виде:

- для симметричной формы колебаний

$$w = \left(C_1 \mathrm{ch}\mu_1\lambda_m x + C_2\cos\mu_2\lambda_m x\right)\sin\Omega t\sin\lambda_m y \tag{9}$$

- для антисимметричной формы колебаний

$$w = \left(C_1 \mathrm{sh}\mu_1\lambda_m x + C_2\sin\mu_2\lambda_m x\right)\sin\Omega t\sin\lambda_m y \tag{10}$$

где

$$\mu_1 = \sqrt{k_m + 1}, \qquad \mu_2 = \sqrt{k_m - 1}, \qquad \lambda_m = \frac{m\pi}{b}$$

$$k_m^2 = \frac{h_2}{D\lambda_m^2}\left(\frac{F}{2\alpha h_1^2 + ah_2} + \frac{\rho}{\lambda_m^2}\Omega^2\right) \tag{11}$$

Удовлетворение граничных условий (8) приводит к однородной системе уравнений относительно коэффициентов C_1 и C_2.

Условие существования нетривиального решения этой системы приводит к уравнению:

- для симметричной формы колебаний

$$H_1(x) = \mu_1\left[\left(\mu_1^2 + \nu\right)^2 - f_1 f_2\right]\mathrm{sh}\mu_1\frac{\lambda_m a}{2}\cos\mu_2\frac{\lambda_m a}{2} +$$

$$+\mu_2\left[\left(\mu_1^2 - \nu\right)^2 - f_1 f_2\right]\mathrm{ch}\mu_1\frac{\lambda_m a}{2}\sin\mu_2\frac{\lambda_m a}{2} + \mu_1\mu_2 f_1\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)\times \tag{12}$$

$$\times\mathrm{sh}\mu_1\frac{\lambda_m a}{2}\sin\mu_2\frac{\lambda_m a}{2} - f_2\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right)\mathrm{ch}\mu_1\frac{\lambda_m a}{2}\cos\mu_2\frac{\lambda_m a}{2} = 0$$

где

$$f_1 = 6\beta m\pi(1-\nu)h_1^4/h_2^3 b$$

$$f_2 = \frac{m\pi\alpha h_1^2}{h_2 b}\left((1-\nu^2)h_1^2/h_2^2 - k_m^2\right)$$

- для антисимметричной формы уравнение получается из (12) заменой

$$\mathrm{sh}\mu_1\lambda_m\frac{a}{2} \text{ на } \mathrm{ch}\mu_1\lambda_m\frac{a}{2},\ \sin\mu_2\lambda_m\frac{a}{2} \text{ на } \cos\mu_2\lambda_m\frac{a}{2}$$

$$\mathrm{ch}\mu_1\lambda_m\frac{a}{2} \text{ на } \mathrm{sh}\mu_1\lambda_m\frac{a}{2},\ \cos\mu_2\lambda_m\frac{a}{2} \text{ на } \sin\mu_2\lambda_m\frac{a}{2}$$

Определение оптимальных параметров α, h_1, h_2, обеспечивающих минимальное значение веса конструкции, сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

Найти

$$\min_x f(\bar{x}), \qquad \bar{x} = (\alpha, h_1, h_2) \tag{13}$$

где

$$f(\bar{x}) = \min_m A(\bar{x}) = \min_m(2\alpha h_1^2 + ah_2)$$

при ограничениях:

$$H_1(\bar{x}) = 0$$

$$H_2(\bar{x}) = (a + 2\alpha h_1)/b - \xi = 0$$

$$g_3(\bar{x}) = \alpha - 0.2 \geq 0$$

$$g_4(\bar{x}) = 5 - \alpha \geq 0$$

$$g_5(\bar{x}) = h_1 - h_2 \geq 0$$

$$g_6(\bar{x}) = 0.2b - h_1 \geq 0$$

$$g(\bar{x}) = h_2 - \delta \geq 0 \tag{14}$$

Ограничения (14) обусловлены пределами применимости классической теории балок и пластин. Для δ принимается $\delta = 0.01b$ при $a \geq b$, $\delta = 0.01a$ при $a < b$.

Вышеизложенным методом произведена численная реализация задачи при $\xi = (a + 2\alpha h_1)/b = 1$ для различных значений $\bar{\Omega} = \Omega b\sqrt{\rho/E} = 0.025;\ 0.05;\ 0.075;\ 0.1$ и $\bar{F}\cdot 10^4 = F/Eb^2\cdot 10^4 = 0;\ 0.25;\ 0.5;\ 0.75;\ 1.0$. Полученные значения оптимальных параметров конструкции $\bar{h}_1 = h_1/b$, $\bar{h}_2 = h_2/b$ и соответствующих наименьших площадей (весов) $\bar{A} = A/b^2$ конструкции приведены в табл.1.

Там же, для сравнения, приведены соответствующие значения площадей поперечного сечения гладкой пластинки $\bar{A}_0$.

Как следует из табл. 1, оптимальное оребрирование пластинки при заданных значениях $\bar{\Omega}$ и $\bar{F}$ приводит к уменьшению веса конструкции почти в 2.5 раза.

Таблица 1

$\overline{\Omega}$	$\overline{F}\cdot 10^4$	α	$\overline{h}_1$	$\overline{h}_2$	$\overline{A}$	$\overline{A}_0$
0.025	0	0.2	0.0141	0.0018	0.00837	0.00192
	0.25	0.2	0.051	0.0119	0.03102	0.01276
	0.50	0.2	0.0629	0.0149	0.03873	0.01611
	0.75	0.2	0.0691	0.0171	0.04416	0.01860
	1.00	0.2	0.0757	0.0187	0.04851	0.02047
0.05	0	0.2	0.0259	0.0034	0.01675	0.00363
	0.25	0.2	0.0550	0.0120	0.03333	0.01303
	0.50	0.2	0.0644	0.0151	0.04056	0.01643
	0.75	0.2	0.0719	0.0171	0.04577	0.01877
	1.00	0.2	0.0769	0.0189	0.04997	0.02076
0.075	0	0.2	0.0373	0.0045	0.02513	0.00505
	0.25	0.2	0.0599	0.0123	0.03711	0.01353
	0.50	0.2	0.0686	0.0153	0.04360	0.01686
	0.75	0.2	0.0757	0.0173	0.04844	0.01914
	1.00	0.2	0.0804	0.0191	0.05239	0.02108
0.10	0	0.2	0.0468	0.0063	0.03351	0.00712
	0.25	0.2	0.0674	0.0124	0.04218	0.01396
	0.50	0.2	0.0736	0.0157	0.04777	0.01742
	0.75	0.2	0.0802	0.0176	0.05212	0.01964
	1.00	0.2	0.0846	0.0193	0.05576	0.02159

ЛИТЕРАТУРА

1. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. - М.: Мир, 1975. 532с.
2. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостехиздат, 1956. 600с.
3. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. - М.-Л.: Гостехиздат, 1946. 532с.
4. Лурье А.И. Теория упругости. - М.: Наука, 1979. 939с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 7.10.1996

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №3, 1998 Механика

УДК 624.131:624.131.216

ДИССИПАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ГЛИНИСТЫХ ГРУНТОВ ПРИ ПРОСТОМ СДВИГЕ

Месчян С.Р.

Ս.Ռ. Մեսչյան

Պարզ սահքի դեպքում կավային գետնահողերի դիսիպատիվ հատկությունները

Բերված են ոլորման եղանակով նմուշների ցիկլիկ բեռնավորման և բեռնաթափման միջոցով պարզ սահքի դեպքում կավային գետնահողերի դիսիպատիվ հատկությունների փորձառական հետազոտությունների արդյունքները: Պարզված է որ բեռնավորման ցիկլի տևողությունից կախված կավային գետնահողերի պարզ սահքի տատանման էներգիայի մարման գործակիցը կարող է փոխվել 1-ից 0.4-ի սահմաններում:

S.R. Meschyan

Dissipative qualities of clay soils under the simple shear

В статье приведены результаты определения коэффициента поглощения энергии колебаний глинистых грунтов методом циклического загружения и разгрузки образцов при их кручении. Установлено, что при скоростях загружения и разгрузки 50 Н·см×5с коэффициент поглощения колебаний практически равен единице, а при скоростях 100 и 200 Н·см×5с этот коэффициент практически является постоянной величиной, примерно равной 0,575.

В лабораторной практике диссипативные свойства грунтов определяют динамическим и статическим методами [5]. В первом случае для этой цели используют записи свободных затухающих колебаний образцов, а во втором случае – петли гистерезиса, определяемые испытанием образцов при загружении и разгрузке. В частности, Р.Г. Ляндерс [1] показатели динамических свойств глинистых грунтов определял по результатам свободных затухающих колебаний цилиндрических образцов в условиях возможности и невозможности их бокового расширения (компрессии).

При сдвиге аналогичные исследования были выполнены Б.Ф. Рельтовым и Б.П. Ерыховым [3], О.Я. Шехтер и др. [6] методом свободных затухающих крутильных колебаний цилиндрических образцов. И.Н. Савченко [4] коэффициент поглощения энергии колебаний ψ глинистых грунтов определял при одноосном сжатии цилиндрических образцов, а песков – при двухплоскостном срезе образцов методом циклического загружения и разгрузки.

Из изложенного выше следует, что диссипативные свойства глинистых грунтов при сдвиге, которые представляют большой интерес для определения их внутреннего трения в допредельном состоянии, исследованы далеко недостаточно. Чтобы в какой-то степени восполнить этот пробел, нами выполнено их исследование в условиях простого сдвига – методом кручения сплошных плоских образцов на приборах М-5 [2]$^{\Gamma}$.

Используя метод циклического загружения и разгрузки, испытаны образцы суглинка нарушенного сложения, с плотностью твердых частиц $\rho_s = 2720\ кг/м^3$, влажностью на пределе текучести $w_L = 0{,}305$;

$^{\Gamma}$ -Опыты выполнены С.Г. Айрояном и Н.Г. Ахназаряном.

влажностью на пределе пластичности $w_p = 0{,}190$ и числом пластичности $J_p = 0{,}160$, под действием трех, различных по величине, уплотняющих давлений $\sigma_z = 0{,}1$; $0{,}3$ и $0{,}5$ МПа. Основные показатели плотности ρ, влажности w и плотности скелета ρ_d, коэффициента текучести J_L, пористости e и степени водонасыщенности S_r образцов грунта перед их испытанием на кручение приведены в табл. 1.

Испытаны образцы диаметром 101мм, высотой 24 мм.

Повторность опытов трехкратная.

Таблица 1

Данные о показателях физических свойств образцов суглинка

σ_z МПа	ρ кг/м^3	w	ρ_d кг/м^3	J_L	e	S_r
0,1	1970	0,305	1510	0,72	0,801	1,0
0,3	2020	0,272	1590	0,51	0,711	1,0
0,5	2080	0,237	1680	0,29	0,619	1,0

Определены сопротивления сдвигу τ_f образцов грунта при приложении крутящих моментов ступенями 200 Н·см через каждые 10 с (200 Н·см×10 с). Данные определения сопротивления образцов сдвигу по закону Кулона

$$\tau_f = \sigma_z \operatorname{tg}\varphi + c$$

приведены в табл. 2, где $\operatorname{tg}\varphi$ – коэффициент трения, c – сцепление.

Таблица 2

Параметры сопротивления сдвигу образцов грунта

σ_z МПа	τ_f МПа	$\operatorname{tg}\varphi$	c МПа
0,1	0,0659	0,428	0,019
0,3	0,139		
0,5	0,237		

Образцы грунта подвергались циклическому испытанию после приложения начального касательного напряжения под действием уровня крутящего момента $M_{tor} / M_{tor,\lim} = 0{,}2$ ($M_{tor,\lim}$ – предельный крутящий момент). Испытание образцов осуществлялось по двум режимам:

а) при изменяемости амплитуды уровня крутящего момента $M_{tor} / M_{tor,\lim}$ от 0,2 до 0,6 и от 0,2 до 0,8;

б) при ступенчатом режиме циклического нагружения и разгрузки под действием постоянного уровня крутящего момента $M_{tor} / M_{tor,\lim} = 0{,}2$ с интервалами: $0{,}2-0{,}4$; $0{,}4-0{,}6$ и $0{,}6-0{,}8$

В этом случае каждый цикл испытания начинался после завершения предыдущего и выдержки на несколько дней для полной стабилизации деформации сдвига.

Опыты показали, что при скорости загружения и разгрузки 200 Н·см×10с во всех случаях испытания образцов (фиг. 1) деформации сдвига практически полностью необратимы, а коэффициент поглощения энергии колебаний $\psi \cong 1$. Это означает, что в рассмотренном случае мы имеем дело с пластическими деформациями, обусловленными сдвиговой ползучестью и упрочнением грунта под действием заданных нормальных напряжений.

Чтобы проверить влияние рычажной системы механизма нормального давления прибора М-5 на результаты опытов, выполнено испытание предварительно уплотненных под действием $\sigma_{z,0} = 0{,}1$; $0{,}3$ и $0{,}5$ МПа образцов супеси ($w_L = 0{,}186$; $w_P = 0{,}123$ и $J_P = 0{,}063$) после их полной разгрузки и последующего загружения давлением $\sigma_z = 0{,}025$ МПа. Загружение части образцов осуществлялось рычажной системой, а другой части — непосредственно, без использования рычага. Опыты показали, что рычажная система загружения не оказывает влияния на результаты опытов.

С целью уменьшения влияния сдвиговой ползучести, накопления пластических деформаций и упрочнения грунта на результаты опытов осуществлено циклическое загружение и разгрузка образцов со скоростями: 50 Н·см×5с, 100 Н·см×5с, 200Н·см×5с.

В табл. 3 приведены данные о показателях физических свойств испытанных образцов супеси, а в табл. 4 — данные о предельных крутящих моментах $M^0_{tor,lim}$ и $M_{tor,lim}$ до и после их испытания на циклическое загружение и разгрузку. Повторность опытов трехкратная.

Таблица 3

Показатели физических свойств супеси

№ серии	$\sigma_{z,0}$ МПа	σ_z МПа	ρ_s кг/м^3	ρ кг/м^3	w	e
I	0,1	0,025	2700	1900	0,234	0,752
II	0,3	0,025	2700	1940	0,211	0,683
III	0,5	0,025	2700	1980	0,198	0,633

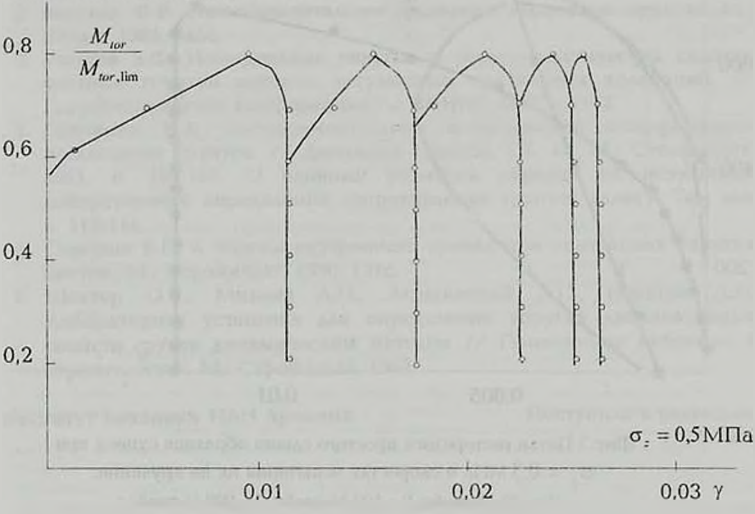
Таблица 4

Результаты испытания образцов супеси

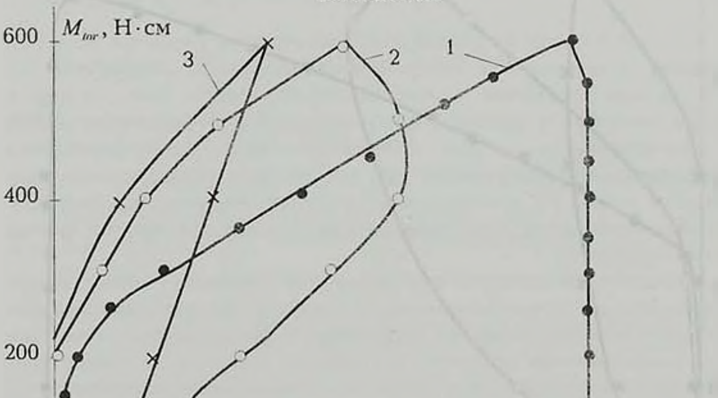
№ серии	$M^0_{tor,lim}$ Н·см	$M_{tor,lim}$ в Н·см при скоростях испытания Н·см×5с			ψ при скоростях испытания Н·см×5с		
		50	100	200	50	100	200
I	800	1000	900	850	1,0	0,582	0,433
II	1050	1200	1150	1100	1,0	0,524	0,710
III	1250	1450	1350	1250	1,0	0,704	0,498

Эксперименты показали (табл.4), что после испытания образцов на циклическое загружение и разгрузку замечается возрастание предельного крутящего момента (сопротивления сдвигу) грунта и некоторое его уменьшение по мере возрастания скорости испытания (до 15%). Эксперименты показали также, что при скорости загружения и разгрузки 50Н·см×5с длительность цикла испытания образцов, предварительно уплотненных под действием $\sigma_{z,0} = 0{,}1$ МПа, равна 55с, а при $\sigma_{z,0} = 0{,}3$ и $0{,}5$ МПа она равна 70с. В этих случаях деформация сдвига образцов практически полностью необратима (пластическая), коэффициент затухания энергии колебаний $\psi \equiv 1$. При скорости циклического испытания образцов 100Н·см×5с длительность цикла испытания почти в два раза, а при 200Н·см×5с почти в четыре раза меньше рассмотренных величин. В этих случаях деформации сдвига полностью обратимы (фиг. 2-4).

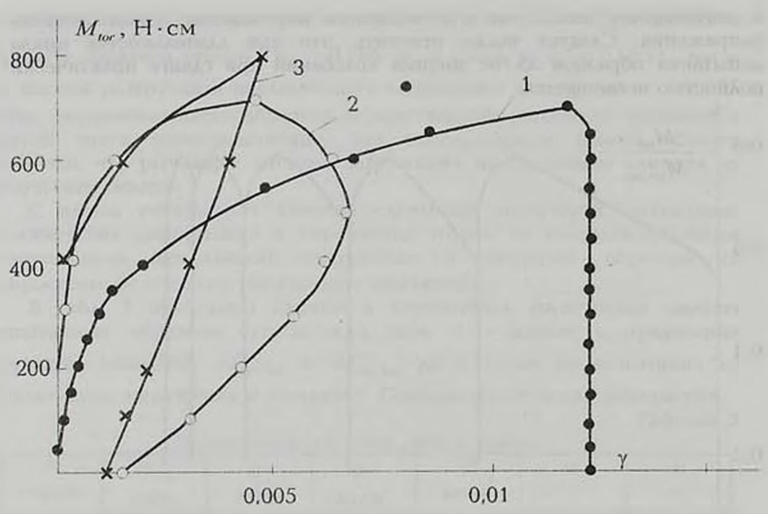
Из табл.4 следует, что при скоростях испытания 100Н·см×5с и 200Н·см×5с коэффициент ψ практически является постоянной величиной. Отмеченное его изменение от среднего значения на ±15% можно отнести к разбросу опытных данных. Это означает, что в этих случаях ψ практически не зависит как от скорости испытания образцов и длительности цикла, так и от величины нормального (уплотняющего) напряжения. Следует также отметить, что при длительностях цикла испытания образцов 55-70с энергия колебаний при сдвиге практически полностью поглощается.



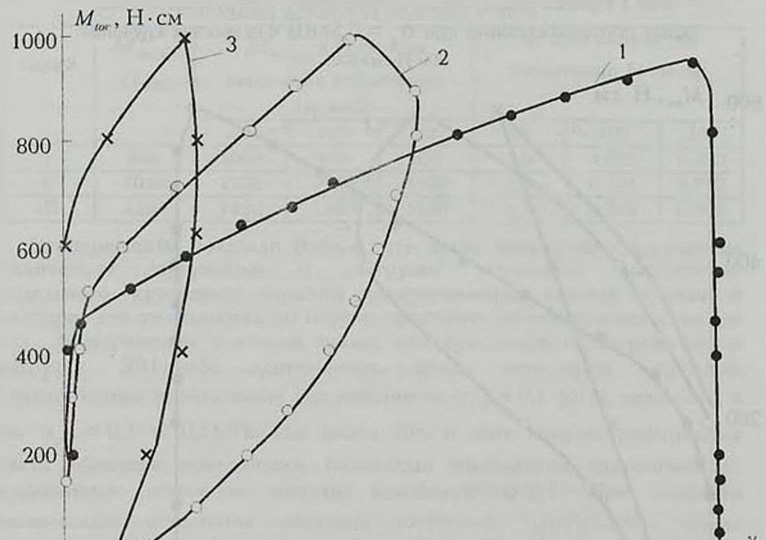
Фиг.1 Кривые циклического нагружения и разгрузки простого сдвига образцов суглинка при $\sigma_z = 0{,}5$ МПа и скоростях кручения: 200 Н·см×10с.



Фиг.2 Петли гистерезиса простого сдвига образцов супеси при $\sigma_z = 0{,}1$ МПа и скоростях испытания их на кручение: 1 – 50 Н·см×5с; 2 – 100 Н·см×5с; 3 – 200 Н·см×5с



Фиг.3 Петли гистерезиса простого сдвига образцов супеси при $\sigma_z = 0,3$ МПа и скоростях испытания их на кручение:
1 – 50 Н·см×5с; 2 – 100 Н·см×5с; 3 – 200 Н·см×5с



Фиг.4 Петли гистерезиса простого сдвига образцов супеси при $\sigma_z = 0,5$ МПа и скоростях испытания их на кручение:
1 – 50 Н·см×5с; 2 – 100 Н·см×5с; 3 – 200 Н·см×5с

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляндерс Р.Э. Лабораторные исследования упругих свойств грунтов. Тр. НИИ оснований и подземных сооружений. № 16. 1950.
2. Месчян С.Р. Экспериментальная реология глинистых грунтов.-М.: Недра, 1985. 346с.
3. Рельтов Б.Ф. Исследование упругих и упруго-пластических свойств связных грунтов методом затухающих кругильных колебаний. // Гидротехническая конференция Л.: ВНИИГ, 1957, с 1-12.
4. Савченко И.А. Экспериментальное исследование коэффициента поглощения грунтов. // Динамика грунтов. Сб. 44. М.: Стройиздат, 1961, с. 103-106. О влиянии размеров образца на результаты лабораторного определения сопротивления грунтов сдвигу. Там же. с. 112-114.
5. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем.-М.: Стройиздат, 1960. 131с.
6. Шехтер О.Я., Минаев А.Н., Левшинский Д.С., Иванова А.И. Лабораторная установка для определения упругих диссипативных свойств грунта динамическим методом // Применение вибрации в строительстве.-М.: Стройиздат, 1962.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 17.06.1996

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №3, 1998 Механика

УДК 539.376

К ВОПРОСУ РАСЧЕТА И ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ МОНОКРИСТАЛЛА

Симонян А.М.

Ա.Մ. Սիմոնյան

Միաբյուրեղից պատրաստված կոնստրուկցիաների հաշվարկի և նախագծման մասին

Ներկա աշխատանքում դիսլոկացիաների սահքի կոնցեպցիայի հիման վրա դիտարկվում են բյուրեղային առանցքների օպտիմալ օրիենտացիայի հարցերը ծռվող և ձգվող էլեմենտների համար, ինչպես նաև խողովակների համար, որոնք գտնվում են ներքին ճնշման ազդեցության վրա:

A.M. Simonian

On Calculation and Projection of Constructions Produced from Single Crystals

В последние годы определенный интерес проявляется к монокристаллам как к конструкционным материалам, что связано с отсутствием у них границ зерен, обычно являющихся очагами для третьей стадии ползучести и трещинообразования.

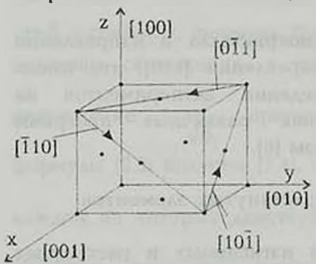
В настоящей работе на основе концепции скольжения дислокаций в системах скольжения, связанных с кристаллической структурой, анализируются вопросы оптимального ориентирования кристаллических осей гранецентрированного кубического монокристалла для изгибаемых и растягиваемых элементов, а также для труб, подверженных действию внутреннего давления. В качестве критериев для оценки работоспособности конструкции рассмотрены сдвигающие напряжения в системах скольжения, а также значения упругой энергии скольжения. Показано, что у растянутых элементов изменение несущей способности в зависимости от ориентации кристаллических осей может достигать 45.5%.

В последние десятилетия все большее внимание уделяется вопросам получения, исследования и применения металлических монокристаллов [1]. Вследствие отсутствия у монокристаллов границ зерен, которые являются очагами для третьей стадии ползучести и трещинообразования [2,3], монокристаллы в ряде случаев являются более надежными конструкционными материалами, чем аналогичные поликристаллы. Как отмечено в работе [4], монокристаллы в настоящее время используются для изготовления таких ответственных конструкций, как лопатки турбин в самолетостроении.

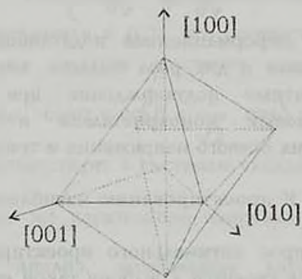
В настоящей работе анализируются вопросы оптимального ориентирования кристаллических осей гранецентрированного кубического монокристалла для изгибаемых и растягиваемых элементов и труб, подверженных действию внутреннего давления. В основе этих исследований положены теоретические предпосылки, изложенные в работе [5] и получившие экспериментальные подтверждения в работе [6].

1. Основные теоретические положения

Как известно, монокристаллы отличаются от поликристаллов постоянством ориентации атомных плоскостей, что во всяком случае предопределяет анизотропию его деформационных и прочностных свойств [7]. Деформативность и прочность монокристаллов в известной мере определяются скольжением дислокаций в так называемых системах скольжений, представляющих собой совокупность плоскостей скольжения и направлений скольжения в этих плоскостях. Как отмечено, например, в работе [8], для гранецентрированных кубических монокристаллов скольжение дислокаций имеет место, в основном, в системе плоскостей с нормалями {111} и в системе направлений <110>, то есть в октаэдрических плоскостях и в направлениях вдоль ребер октаэдра (фиг.1 и 2), построенного, соответственно ориентации плоскостей монокристалла. Таким образом, для гранецентрированного кубического монокристалла имеется всего 12 систем скольжения, причем, как вытекает из предыдущего, системы скольжения не зависят от напряженного состояния монокристалла, а определяются лишь ориентацией его атомных плоскостей. Согласно принятым предпосылкам [5], скольжение дислокаций в некоторой системе скольжения зависит лишь от соответственного этой системе касательного напряжения и от истории его изменения во времени.



Фиг.1



Фиг.2

Соотношения между деформациями и напряжениями для гранецентрированного монокристалла при произвольном сложном напряженном состоянии запишутся так [5]:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{i,j}^{1,2}\left\{\Phi\left[\frac{\sigma_x-\sigma_y+(-1)^i\tau_{yz}+(-1)^j\tau_{zx}}{\sqrt{6}}\right]+\right.$$

$$\left.+\Phi\left[\frac{\sigma_x-\sigma_z+(-1)^i\tau_{xy}+(-1)^j\tau_{yz}}{\sqrt{6}}\right]\right\} \qquad (x,y,z) \qquad (1.1)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{i,j}^{1,2}\left\{\Phi\left[\frac{\tau_{xy}+(-1)^i\tau_{zx}+(-1)^j(\sigma_y-\sigma_z)}{\sqrt{6}}\right]+\right.$$

$$\left.+\Phi\left[\frac{\tau_{xy}+(-1)^i\tau_{yz}+(-1)^j(\sigma_x-\sigma_z)}{\sqrt{6}}\right]\right\} \qquad (x,y,z) \qquad (1.2)$$

где суммирование производится по всем комбинациям i и j, принимающим значения 1 и 2, x, y и z совпадают с осями [001], [010] и [100], соответственно. Ф - оператор по времени, определяющий скольжение дислокаций в любой системе скольжения (все системы скольжения адекватны), выражения для $\varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}$ и γ_{zx} могут быть получены из (1.1) и (1.2) путем последовательной перестановки индексов x, y, z.

Определение оператора Ф может быть осуществлено из экспериментов на растяжение образцов, продольная ось которых совпадает, например, с осью z или, что то же, [100]; деформационные свойства такого образца, согласно (1.1) соответствуют соотношению

$$\varepsilon_z(t) = \frac{8}{\sqrt{6}}\Phi\left[\frac{\sigma_z(t)}{\sqrt{6}}\right] \tag{1.3}$$

Естественно, в условиях нагружения, когда реологические свойства не проявляются, оператор Φ вырождается в коэффициент, описывающий упругие свойства материала, связанные со скольжением дислокаций. В случае, когда растягивающее напряжение имеет направление [110], то деформация монокристалла в этом же направлении, согласно соотношениям (1.1) и (1.2), определяется по формуле [5].

$$\varepsilon_{[110]}(t) = \frac{4}{\sqrt{6}}\Phi\left[\frac{\sigma_{[110]}(t)}{\sqrt{6}}\right] \tag{1.4}$$

то есть деформационная податливость монокристалла в направлении [100] ровно в два раза больше, чем в направлении [110], что имело многократные подтверждения при проведении экспериментов на алюминиевых монокристаллах в условиях различных программ изменения осевого напряжения и температуры [6].

2. К проектированию изгибаемых и растянутых элементов

Вопрос оптимального проектирования изгибаемых и растянутых элементов сводится к выбору такой ориентации структуры, при которой наибольшее из касательных напряжений, возникающих в системах скольжения, является минимальным из всех ориентаций или же минимальной является потенциальная энергия деформации в наиболее нагруженной точке. Итак, положим, что ось ξ, вдоль которой действует нормальное напряжение σ_ξ, составляет углы α, β и δ, соответственно с осями [001], [010] и [100], при этом очевидно,

$$\sigma_x = \sigma_\xi \cos^2\alpha, \qquad \sigma_y = \sigma_\xi \cos^2\beta, \qquad \sigma_z = \sigma_\xi \cos^2\delta \tag{2.1}$$

$$\tau_{xy} = \sigma_\xi \cos\alpha\cos\beta,\ \tau_{yz} = \sigma_\xi \cos\beta\cos\delta,\ \tau_{zx} = \sigma_\xi \cos\delta\cos\alpha$$

При использовании равенства

$$\varepsilon_\xi = \varepsilon_x\cos^2\alpha + \varepsilon_y\cos^2\beta + \varepsilon_z\cos^2\delta + \gamma_{xy}\cos\alpha\cos\beta +$$
$$+\gamma_{yz}\cos\beta\cos\delta + \gamma_{zx}\cos\delta\cos\alpha \tag{2.2}$$

из соотношений (1.1) и (1.2) получим следующее соотношение между ε_ξ и σ_ξ, определяющее анизотропию монокристалла:

$$\varepsilon_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{i,j}^{1,2}\Big\{ (\cos\alpha + (-1)^i\cos\beta)(\cos\alpha - (-1)^i\cos\beta + (-1)^j\cos\delta)\times$$
$$\times\Phi\left[\frac{\sigma_\xi(t)}{\sqrt{6}}(\cos\alpha + (-1)^i\cos\beta)(\cos\alpha - (-1)^i\cos\beta + (-1)^j\cos\delta)\right] +$$
$$+(\cos\beta + (-1)^i\cos\delta)(\cos\beta - (-1)^i\cos\delta + (-1)^j\cos\alpha)\times$$
$$\times\Phi\left[\frac{\sigma_\xi(t)}{\sqrt{6}}(\cos\beta + (-1)^i\cos\delta)(\cos\beta - (-1)^i\cos\delta + (-1)^j\cos\alpha)\right] +$$
$$+(\cos\delta + (-1)^i\cos\alpha)(\cos\delta - (-1)^i\cos\alpha + (-1)^j\cos\beta)\times$$

$$\times\Phi\left[\frac{\sigma_\xi(t)}{\sqrt{6}}(\cos\delta+(-1)^i\cos\alpha)(\cos\delta-(-1)^i\cos\alpha+(-1)^j\cos\beta)\right]\Bigg\}$$

Формула (2.3) является основой для выбора ориентации осей кристалла в отношении к направлению нормального напряжения. Варьируя углы α, β и δ (при естественном ограничении $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\delta=1$), можно изменять напряжения сдвига, соответствующие той или иной системе скольжения и численно равные выражениям в квадратных скобках (2.3), а также в некоторых случаях изменять количество систем скольжения, в которых скольжение происходит при действии σ_ξ. Например, принимая $\cos\alpha=1$, $\cos\beta=\cos\delta=0$, формула (2.3) вырождается в (1.3), что соответствует 8 системам скольжения, в каждой из которых действует касательное напряжение $\frac{\sigma_\xi}{\sqrt{6}}$; принимая же $\cos\alpha=\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\delta=0$, из формулы (2.3) получим (1.4), что соответствует 4 системам скольжения, в каждой из которых действует такое же касательное напряжение $\frac{\sigma_\xi}{\sqrt{6}}$; отметим, что, как показывает анализ, наибольшее касательное напряжение из возникающих в системах скольжения может достигать значения $\frac{\sigma}{2}$ ($\cos\alpha=0.90515, \cos\beta=\frac{1}{6}, \cos\delta=\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$).

Принимая направление ξ, совпадающее с осью [111], получим, что напряжение сдвига в 6 системах скольжения достигает значения $\frac{2\sigma_\xi}{3\sqrt{6}}=0.27217\sigma_\xi$, в остальных же - напряжения сдвига не возникают, этот случай является самым благоприятным, отметим, что он соответствует минимальной энергии деформации.

Таким образом, при варьировании ориентации ξ наибольшие касательные напряжения в системах скольжения могут изменяться в пределах от $0.27217\sigma_\xi$ до $0.5\sigma_\xi$, при этом, в случае ориентации [111] они на 45.5% ниже возникающих в наиболее неблагоприятном случае ($\tau_{max}=0.5\sigma_\xi$).

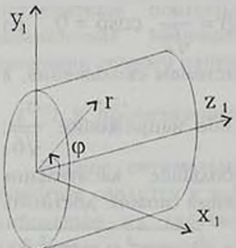
Естественно, здесь возникает вопрос о том, насколько точно должна быть обеспечена ориентация [111] и как неточность ориентации влияет на наибольшие напряжения сдвига в системах скольжения. Простейшие расчеты показывают, что если имеется место отклонения в ориентации кристаллографических осей в пределах 1^0, то максимальное напряжение сдвига в системах скольжения может увеличиться на 4.92%, если же в пределах 2^0, то увеличение составит 9.89% от значения $\frac{2\sigma_\xi}{3\sqrt{6}}$. Это предопределяет требования к точности ориентации [111] в отношении к предельной оси.

3. Оптимальное проектирование труб с внутренним давлением

Рассматриваются круглые тонкостенные цилиндрические трубы, подверженные действию внутреннего давления при наличии и при отсутствии днищ; исследуются три ориентации продольной оси трубы [100], [110] и [111], не приводящие к скосу трубы.

3.1 Трубы с днищами

Независимо от конструкции закреплений труб с днищами, здесь предполагается, что продольная осевая нагрузка передается трубе, при этом $\sigma_\varphi = \frac{qR}{\delta}$, $\sigma_z = \frac{qR}{2\delta}$, $\sigma_r = 0$ (δ - толщина, q - внутреннее давление, R - радиус трубы; r, φ, z_1 - оси цилиндрической системы координат (фиг.3)). Соответственно, системе координат (x_1, y_1, z_1) будем иметь



Фиг.3

$$\sigma_{x_1} = \frac{qR}{\delta}\sin^2\varphi,\ \sigma_{y_1} = \frac{qR}{\delta}\cos^2\varphi,$$

$$\tau_{x_1y_1} = \frac{qR}{\delta}\sin\varphi\cos\varphi\,.\,\sigma_{z_1} = \frac{qR}{2\delta},\ \tau_{x_1z_1} = \tau_{y_1z_1} = 0$$

а) Ориентация продольной оси трубы вдоль оси [100]. Принимая, что оси x_1, y_1 и z_1 совпадают соответственно с осями x, y и z, соотношения (1.1) и (1.2) перепишем так:

$$\varepsilon_x = -\frac{4}{\sqrt{6}}\Phi\left[2A\frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{6}}\right] - \frac{2}{\sqrt{6}}\left\{\Phi\left[A\frac{\cos 2\varphi + \sin 2\varphi}{\sqrt{6}}\right] - \Phi\left[A\frac{\cos 2\varphi - \sin 2\varphi}{\sqrt{6}}\right]\right\}$$

$$\varepsilon_y = \frac{4}{\sqrt{6}}\Phi\left[2A\frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{6}}\right] + \frac{2}{\sqrt{6}}\left\{\Phi\left[A\frac{\cos 2\varphi - \sin 2\varphi}{\sqrt{6}}\right] + \Phi\left[A\frac{\cos 2\varphi + \sin 2\varphi}{\sqrt{6}}\right]\right\}$$

$$\varepsilon_z = \frac{2}{\sqrt{6}}\left\{\Phi\left[\frac{A}{\sqrt{6}}(-\cos 2\varphi - \sin 2\varphi)\right] + \Phi\left[\frac{A}{\sqrt{6}}(-\cos 2\varphi + \sin 2\varphi)\right] + \right.$$

$$\left. + \Phi\left[\frac{A}{\sqrt{6}}(\cos 2\varphi - \sin 2\varphi)\right] + \Phi\left[\frac{A}{\sqrt{6}}(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi)\right]\right\} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{4}{\sqrt{6}}\Phi\left[A\frac{\cos 2\varphi + \sin 2\varphi}{\sqrt{6}}\right] + \frac{4}{\sqrt{6}}\Phi\left[A\frac{\sin 2\varphi - \cos 2\varphi}{\sqrt{6}}\right] \qquad (3.2)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{i,j}^{1,2}\Phi\left[\frac{A}{\sqrt{6}}\left((-1)^i\sin 2\varphi + (-1)^j\cos 2\varphi\right)\right] + \frac{2}{\sqrt{6}}\sum_{i}^{1,2}\Phi\left[\frac{2A}{\sqrt{6}}(-1)^i\cos 2\varphi\right] = 0$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{i,j}^{1,2}\Phi\left[\frac{A}{\sqrt{6}}\left((-1)^i\sin 2\varphi + (-1)^j\cos 2\varphi\right)\right] + \frac{2}{\sqrt{6}}\sum_{i}^{1,2}\Phi\left[\frac{2A}{\sqrt{6}}(-1)^i\cos 2\varphi\right] = 0$$

где $A = \frac{qR}{2\delta}$. Деформации ε_z, γ_{yz} и γ_{zx} равны нулю, вследствие очевидного тождества $\Phi(-f(t)) = -\Phi(f(t))$.

Наибольшее касательное напряжение, которое возникает в какой-либо из систем скольжения, как это вытекает из (3.2), равно

$\frac{2A}{\sqrt{6}} \simeq 0.8165A$.

Положим, что деформация сдвига, как результат скольжения в некоторой системе скольжения, определяется некоторым упругим модулем G_0: $\Phi(x) = \frac{x}{G_0}$. При этом получим следующее выражение для энергии $\Pi(\varphi)$ деформаций, связанных со скольжением во всех системах скольжения:

$$\Pi(\varphi) = \frac{2}{3}\frac{A^2}{G_0}(2 + \cos 4\varphi)$$

Усредненное и наибольшее значения Π определятся так:

$$\Pi_{уср} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Pi(\varphi)d\varphi = \frac{4}{3}\frac{A^2}{G_0} \simeq 1.3333\frac{A^2}{G_0}$$

$$\Pi_{max} = 2\frac{A^2}{G_0} \tag{3.3}$$

Если имеет место ползучесть, которая при действии постоянного напряжения σ в направлении [100] описывается формулой

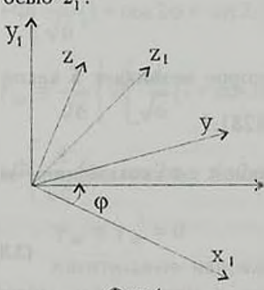
$$\varepsilon_{[100]} = \sigma^m F(t) \tag{3.4}$$

то, согласно (1.3), имеем $\Phi(x) = \frac{(\sqrt{6})^{m+1}}{8}x^m F(t)$.

Для энергии деформаций ползучести W получим нижеследующую формулу:

$$W = \frac{A^{m+1}}{2}F(t)\left[|2\cos 2\varphi|^{m+1} + |\cos 2\varphi + \sin 2\varphi|^{m+1} + |\cos 2\varphi - \sin 2\varphi|^{m+1}\right] \tag{3.5}$$

б) Ориентация продольной оси трубы вдоль оси [110]. Положим, что кристаллические оси x, y и z ориентированы следующим образом: ось x ([001]) перпендикулярна продольной оси трубы z_1 и составляет угол φ с осью x_1 (фиг.4), а оси y ([010]) и z ([100]) составляют угол 45^0 с осью z_1.



Фиг.4

Согласно опускаемым здесь выкладкам и выражениям, аналогичным (3.1) и (3.2), получим, что наибольшее касательное напряжение, которое возникает в какой-либо системе скольжения, равно

$$\max_\varphi\left[\left(2\cos 2\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\varphi\right)\frac{A}{\sqrt{6}}\right] \simeq 0.86602A$$

Для энергии деформации, связанной с упругим скольжением во всех системах скольжения, получим

$$\Pi(\varphi) = \frac{A^2}{6G_0}(7 + 3\cos 4\varphi)$$

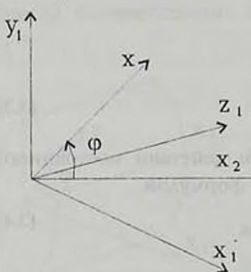
$$\Pi_{уср} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Pi(\varphi)d\varphi = \frac{7}{6}\frac{A^2}{G_0} \approx 1.1666\frac{A^2}{G_0} \tag{3.6}$$

$$\Pi_{max} = \frac{5}{3}\frac{A^2}{G_0} \approx 1.6666\frac{A^2}{G_0}$$

В случае ползучести, протекающей по степенному закону (3.4), для энергии деформации ползучести при постоянной нагрузке будем иметь

$$W = \frac{A^{m+1}}{4}F(t)\left[\left|2\cos2\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin2\varphi\right|^{m+1} + \left|2\cos2\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin2\varphi\right|^{m+1} + \right.$$

$$\left. + \left|\cos2\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin2\varphi\right|^{m+1} + \left|\cos2\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin2\varphi\right|^{m+1} + \left|\sqrt{2}\sin2\varphi\right|^{m+1}\right] \tag{3.7}$$



Фиг.5

в) Ориентация продольной оси трубы вдоль оси [111].

Принимая, что ось z_1 (фиг.5) совпадает с осью [111], получим, что она равно наклонена к осям x, y и z. Положим, что ось x составляет с плоскостью, на которой расположены оси x_1 и z_1, некоторый угол φ, при этом получим нижеследующие значения для косинусов углов между осями x, y, z и x_1, y_1, z_1:

$$\cos(x_1, x) = \sqrt{\frac{2}{3}}\cos\varphi, \quad \cos(x_1, y) = -\sqrt{\frac{2}{3}}\cos(\varphi - \frac{\pi}{3})$$

$$\cos(x_1, z) = -\sqrt{\frac{2}{3}}\cos(\varphi + \frac{\pi}{3}), \quad \cos(y_1, x) = \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\varphi$$

$$\cos(y_1, y) = \sqrt{\frac{2}{3}}\cos(\varphi + \frac{\pi}{6}), \quad \cos(y_1, z) = -\sqrt{\frac{2}{3}}\cos(\varphi - \frac{\pi}{6})$$

$$\cos(z_1, x) = \cos(z_1, y) = \cos(z_1, z) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Наибольшее касательное напряжение, которое возникает в какой-либо из систем скольжения, равно $\frac{4}{3\sqrt{2}}A \approx 0.94281A$.

Для упругой энергии деформации, связанной со скольжением во всех системах скольжения, получим

$$\Pi(\varphi) \cong \frac{20}{9}\frac{A^2}{G_0} \approx 2.2222\frac{A^2}{G_0} \tag{3.8}$$

В случае же проявления ползучести, протекающей по степенному закону (3.4), для энергии деформации ползучести будем иметь следующее выражение:

$$W = \frac{A^{m+1}F(t)}{24} 6^{\frac{m}{2}} \Big[2|4\cos 2\varphi|^{m+1} + |2\cos 2\varphi - 2\sqrt{3}\sin 2\varphi|^{m+1} +$$

$$+2|2\cos 2\varphi + 2\sqrt{3}\sin 2\varphi|^{m+1} + |4\sqrt{3}\sin 2\varphi|^{m+1} + \qquad (3.9)$$

$$+|6\cos 2\varphi - 2\sqrt{3}\sin 2\varphi|^{m+1} + |6\cos 2\varphi + 2\sqrt{3}\sin 2\varphi|^{m+1} \Big]$$

3.2 Трубы без днищ

Принимается, что продольная осевая сила трубе не передается

$\sigma_\varphi = \dfrac{qR}{\delta} = 2A$, $\sigma_{z_1} = \sigma_r = 0$ (фиг 3), то есть

$$\sigma_{x_1} = 2A\sin^2\varphi, \; \sigma_{y_1} = 2A\cos^2\varphi, \; \tau_{x_1y_1} = 2A\sin\varphi\cos\varphi \qquad (3.10)$$

$$\sigma_{z_1} = \tau_{x_1z_1} = \tau_{y_1z_1} = 0$$

а) Ориентация продольной оси трубы вдоль оси |100|.

Принимая, что оси x_1, y_1 и z_1 совпадают соответственно с кристаллическими осями x, y и z, соотношения (1.1) и (1.2) перепишем так:

$$\varepsilon_x = -\frac{4}{\sqrt{6}}\Phi\left[2A\frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{6}}\right] + \frac{2}{\sqrt{6}}\left\{\Phi\left[\frac{A}{\sqrt{6}}(1-\cos 2\varphi + \sin 2\varphi)\right] +\right.$$

$$\left. +\Phi\left[\frac{A}{\sqrt{6}}(1-\cos 2\varphi - \sin 2\varphi)\right]\right\}$$

$$\varepsilon_y = \frac{4}{\sqrt{6}}\Phi\left[2A\frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{6}}\right] + \frac{2}{\sqrt{6}}\left\{\Phi\left[\frac{A}{\sqrt{6}}(1+\cos 2\varphi + \sin 2\varphi)\right] +\right.$$

$$\left. +\Phi\left[\frac{A}{\sqrt{6}}(1+\cos 2\varphi - \sin 2\varphi)\right]\right\}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{2}{\sqrt{6}}\left\{\Phi\left[\frac{A}{\sqrt{6}}(1-\cos 2\varphi + \sin 2\varphi)\right] + \Phi\left[\frac{A}{\sqrt{6}}(1-\cos 2\varphi - \sin 2\varphi)\right] +\right.$$

$$\left. +\Phi\left[\frac{A}{\sqrt{6}}(1+\cos 2\varphi + \sin 2\varphi)\right] + \Phi\left[\frac{A}{\sqrt{6}}(1-\cos 2\varphi - \sin 2\varphi)\right]\right\} \qquad (3.11)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{6}}\left\{\Phi\left[\frac{A}{\sqrt{6}}(1+\cos 2\varphi + \sin 2\varphi)\right] - \Phi\left[\frac{A}{\sqrt{6}}(1+\cos 2\varphi - \sin 2\varphi)\right] +\right.$$

$$\left. +\Phi\left[\frac{A}{\sqrt{6}}(1-\cos 2\varphi + \sin 2\varphi)\right] - \Phi\left[\frac{A}{\sqrt{6}}(1-\cos 2\varphi - \sin 2\varphi)\right]\right\}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Касательные напряжения, соответствующие системам скольжения, равны выражениям в квадратных скобках (3.15), наибольшее из них равно

$$\max_\varphi\left[\frac{A}{\sqrt{6}}(1+\cos 2\varphi + \sin 2\varphi)\right] = \frac{A(1+\sqrt{2})}{\sqrt{6}} \simeq 0.98560A.$$

что на 20.71% превышает соответственное касательное напряжение для труб с днищами.

Для энергии упругой деформации, связанной со скольжением во всех системах скольжения, ее усредненного и наибольшего значения будем иметь

$$\Pi(\varphi) = \frac{2}{3}\frac{A^2}{G_0}(3 + \cos 4\varphi)$$

$$\Pi_{уср} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Pi(\varphi)d\varphi = 2\frac{A^2}{G_0} \qquad (3.12)$$

$$\Pi_{max} = \frac{8}{3}\frac{A^2}{G_0} \simeq 2.6667\frac{A^2}{G_0}$$

В случае ползучести, при действии постоянного напряжения σ в направлении [100] описывается формулой (3.4), для энергии деформации ползучести будем иметь

$$W = \frac{A^{m+1}}{4}F(t)\Big[2|2\cos 2\varphi|^{m+1} + |1 + \cos 2\varphi + \sin 2\varphi|^{m+1} +$$

$$+|1 - \cos 2\varphi + \sin 2\varphi|^{m+1} + |1 + \cos 2\varphi - \sin 2\varphi|^{m+1} + |1 - \cos 2\varphi - \sin 2\varphi|^{m+1} \qquad (3.13)$$

б) Ориентация продольной оси трубы вдоль оси [110].

Для напряжений, соответственных кристаллическим осям (фиг.4) будем иметь следующие выражения:

$$\sigma_x = A(1 - \cos 2\varphi), \quad \sigma_y = \sigma_z = -\tau_{yz} = \frac{A}{2}(1 + \cos 2\varphi) \qquad (3.14)$$

$$\tau_{xy} = -\tau_{zx} = -\frac{\sqrt{2}}{2}A\sin 2\varphi$$

Наибольшее касательное напряжение, возникающее в системах скольжения, достигается при $\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$ и равно

$$\tau_{max} = \max_{\varphi}\left[\frac{A}{\sqrt{6}}\left(1 + \cos 2\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\varphi\right)\right] \simeq 0.90825A$$

При этом будем иметь

$$\Pi(\varphi) = \frac{A^2}{6G_0}(9 + 3\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi) \qquad (3.15)$$

$$\Pi_{уср} = \frac{3}{2}\frac{A^2}{G_0}, \quad \Pi_{max} = \frac{8}{3}\frac{A^2}{G_0}$$

В случае ползучести, описываемой (3.4), для энергии деформации будем иметь

$$W = \frac{A^{m+1}}{4}F(t)\left[\left|2\cos 2\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\varphi\right|^{m+1} + \left|2\cos 2\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\varphi\right|^{m+1} +\right.$$

$$+\left|1-\cos 2\varphi+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\varphi\right|^{m+1}+\left|1-\cos 2\varphi-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\varphi\right|^{m+1}+\left|\sqrt{2}\sin 2\varphi\right|^{m+1}\Bigg] \quad (3.16)$$

в)Ориентация продольной оси трубы вдоль оси [111].

Соответственно кристаллическим осям x, y и z (фиг.5), аналогично (3.1), запишем следующие выражения для напряжений:

$$\sigma_x=\frac{2}{3}A(1-\cos 2\varphi),\quad \sigma_y=\frac{2}{3}A(1+\frac{1}{2}\cos 2\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\varphi)$$

$$\sigma_z=\frac{2}{3}A(1+\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\varphi),\quad \tau_{xy}=\frac{1}{3}A(-1+\cos 2\varphi+\sqrt{3}\sin 2\varphi)$$

$$\tau_{yz}=-\frac{1}{3}A(1+\cos 2\varphi),\quad \tau_{zx}=-\frac{1}{3}A(1-\cos 2\varphi+\sqrt{3}\sin 2\varphi) \quad (3.17)$$

Наибольшее касательное напряжение, возникающее в системах скольжения, равно $\tau_{max}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}A=0.9428A$.

При этом будем иметь

$$\Pi(\varphi)=\frac{A^2}{9G_0}(12-2\sqrt{3}\sin 2\varphi+\sqrt{3}\sin 4\varphi)$$

$$\Pi_{уср}=\frac{4}{3}\frac{A^2}{G_0} \quad (3.18)$$

$$\Pi_{max}=\Pi\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{11}{6}\frac{A^2}{G_0}$$

В случае ползучести, описываемой (3.4), для энергии деформации будем иметь

$$W=\frac{A^{m+1}}{8}F(t)\Bigg[2\left|\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\cos 2\varphi\right|^{m+1}+\left|2\cos 2\varphi-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin 2\varphi\right|^{m+1}+$$

$$+\left|2\cos 2\varphi+\frac{2\sqrt{3}}{2}\sin 2\varphi\right|^{m+1}+\left|4\frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2\varphi\right|^{m+1}+ \quad (3.19)$$

$$+2\left|\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cos 2\varphi+\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin 2\varphi\right|^{m+1}+2\left|\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cos 2\varphi-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin 2\varphi\right|^{m+1}\Bigg]$$

Ниже приводится сводная таблица расчетных данных для труб с ориентацией продольной оси [100], [110] и [111].

Из данных таблицы можно заключить, что из условия наибольших касательных напряжений в системах скольжения более благоприятными являются трубы с днищами, причем наибольшая несущая способность достигается при ориентации продольной оси трубы в направлении [100]; для труб без днищ наиболее благоприятной является ориентация [110]. Из энергетических же условий для труб с днищами благоприятной ориентацией продольной оси является [110], без днищ же — [111].

Таблица

Ориентация продольной оси	Наибольшие касательные напряжения		Максимальная упругая энергия $(\times\frac{G_0}{A^2})$		Усредненная упругая энергия $(\times\frac{G_0}{A^2})$	
	с днищами	без днищ	с днищами	без днищ	с днищами	без днищ
100	0.8165A	0.9856A	2.000	2.667	1.333	2.000
110	0.8543A	0.9082A	1.666	2.667	1.166	1.500
111	0.9428A	0.9428A	2.222	1.833	2.222	1.333

ЛИТЕРАТУРА

1. Металлические монокристаллы. Получение и исследование свойств. — М.: Наука, 1976.
2. Ползучесть и возврат. — М.: Металлургиздат, 1961.
3. Keown S.R. Microstructural changes occuring during the creep deformation of a simple austenic steel at 600^0C. "Creep strength steel and high-temp. alloys. — Proc. Meet. Univ. Sheffield. 1972" London. 1974.
4. Ishihara T. Strength of metal matrix composites for supersonic aeroplane engines. Composites. Fracture mechanics and technology. — Russian Composite Society. Chernogolovka. 1992.
5. Симонян А.М., Симонян Н.М. К вопросу о реологии монокристаллов. — Изв. АН Арм.ССР. Механика, 1985, т. 38, №4, с.38-48.
6. Симонян А.М. Исследования ползучести алюминиевых монокристаллов. — Изв. АН Арм.ССР. Механика, 1979, т. 32, №6, с.27-40.
7. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. — М.: Наука, 1967.
8. Чалмерс Б. Физическое металловедение. — М.: Металлургиздат, 1963.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
17.08.1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №3, 1998 Механика

УДК 534.113

О ДИНАМИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЗДАНИЯ С ЖЕСТКО СОЕДИНЕННЫМ КОНСОЛЬНЫМ СООРУЖЕНИЕМ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Хачиян Э Е., Маркарян А.Г.

Է.Ե. Խաչիյան, Ա.Հ. Մարգարյան

Շենքի և նրան կոշտ միացված կոնսոլային կառուցվածքի դինամիկական փոխազդեցության մասին երկրաշարժային ազդեցության դեպքում

Հոդվածը նվիրված է շահագործվող շենքի և նրան միացված կառուցվածքի դինամիկական փոխազդեցության հետազոտմանը: Ստացված են համակցված համակարգի դինամիկական բնութագրերի և սեյսմիկ ազդեցությունների մակարդակի փոփոխման օրինաչափությունները շենքի և միացված կառուցվածքի ազատ տատանումների պարբերությունների տարբեր հարաբերությունների դեպքում:

E.E. Khachian, A.G. Margarian

Dynamic interaction between building and rigidly attached cantilever structure

На практике при реконструкции и изменении функционального значения зданий нередко возникает необходимость связывать между собой отдельные здания или к существующим зданиям соединить новые пристройки. В частности, в работе [1] предлагается для повышения уровня сейсмической безопасности существующих каменных зданий соединить их жестко на уровне покрытия со специально проектированной и возведенной вне здания пристройкой. Данная работа посвящена исследованию динамических характеристик таких сложных систем и их поведения при сейсмических воздействиях.

Расчетная схема всей системы в целом показана на фиг. 1, где принято, что основное многоэтажное здание 1 на уровне покрытия жестко соединена с отдельным сооружением в виде консольной стойки 2 той же высоты. Будем считать, что здание при динамических воздействиях подвергается обобщенной сдвиговой деформации с приведенными жесткостными и плотностными характеристиками $k'FG$ и q_1 [3,6], а консольное сооружение деформации изгиба с обычными жесткостными и плотностными характеристиками EI и q_2.

1. Дифференциальные уравнения свободных колебаний комбинированной системы при свободных колебаниях соответственно будут

$$k'FG\frac{\partial^2 y_1(x,t)}{\partial x^2}-\frac{q_2}{g}\frac{\partial^2 y_1(x,t)}{\partial t^2}=0,\quad EI\frac{\partial^4 y_2(x,t)}{\partial x^4}+\frac{q_2}{g}\frac{\partial^2 y_2(x,t)}{\partial t^2}=0 \quad (1.1)$$

Решение системы уравнений (1.1) ищем в виде

$$y_1(x,t)=Y_1(x)\Phi(t),\quad y_2(x,t)=Y_2(x)\Phi(t) \quad (1.2)$$

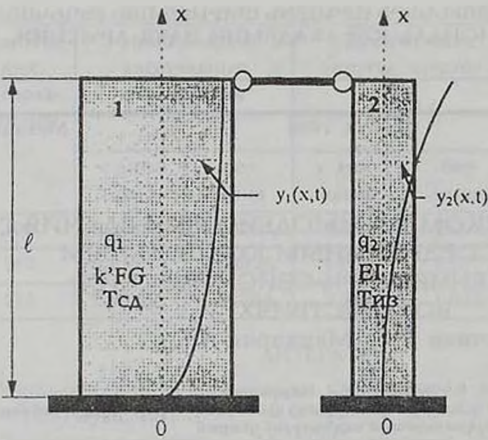
Подставляя (1.2) в (1.1) и разделяя переменные, получим следующие дифференциальные уравнения относительно $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ и $\Phi(t)$:

$$Y_1''+\lambda_1^2 Y_1=0,\ Y_2^{IV}-\lambda_2^4 Y_2=0,\ \Phi''+\omega^2\Phi=0 \quad (1.3)$$

где приняты обозначения:

$$\frac{q_1\omega^2}{gk'FG}=\lambda_1^2,\quad \frac{q_2\omega^2}{gEI}=\lambda_2^4,\quad \frac{EI}{k'FG}=\theta \quad (1.4)$$

а ω — искомая круговая частота свободных колебаний общей системы.



Фиг.1

Решение первых двух уравнений (1.3) ищем в виде

$$Y_1(x) = A\sin\lambda_1 x + B\cos\lambda_1 x$$

$$Y_2(x) = C_1\sin\lambda_2 x + C_2\cos\lambda_2 x + C_3\mathrm{sh}\lambda_2 x + C_4\mathrm{ch}\lambda_2 x \qquad (1.5)$$

Для определения 6 коэффициентов A, B, C_1, C_2, C_3, C_4 и неизвестной круговой частоты ω будем исходить из следующих граничных условий:

$$x = 0,\ \ Y_1 = 0,\ \ B = 0$$

$$x = 0,\ \ Y_2 = 0,\ \ C_2 + C_4 = 0,\ \ C_4 = -C_2$$

$$x = 0,\ \ Y_2' = 0,\ \ C_1 + C_3 = 0,\ \ C_3 = -C_1$$

$$x = l,\ \ Y_1 = Y_2,\ \ A\sin\lambda_1 l = C_1\sin\lambda_2 l + C_2\cos\lambda_2 l + C_3\mathrm{sh}\lambda_2 l + C_4\mathrm{ch}\lambda_2 l$$

$$x = l,\ \ k'FGY_1' = EIY_2''' \qquad (1.6)$$

$$k'FGA\lambda_1\cos\lambda_1 l = EI\lambda_2^3(-C_1\sin\lambda_1 l + C_2\cos\lambda_2 l + C_3\mathrm{ch}\lambda_2 l + C_4\mathrm{sh}\lambda_2 l)$$

$$x = l,\ \ Y_2'' = 0,\ \ -C_1\sin\lambda_2 l - C_2\cos\lambda_2 l + C_3\mathrm{sh}\lambda_2 l + C_4\mathrm{ch}\lambda_2 l = 0$$

из граничных условий (1.6) получим следующую систему однородных уравнений относительно коэффициентов A, C_1 и C_2:

$$A\sin\lambda_1 l - C_1(\sin\lambda_2 l - \mathrm{sh}\lambda_2 l) - C_2(\cos\lambda_2 l - \mathrm{ch}\lambda_2 l) = 0$$

$$C_1\left[\lambda_1\mathrm{ctg}\lambda_1 l(\sin\lambda_2 l - \mathrm{sh}\lambda_2 l) + \theta\lambda_2^3(\cos\lambda_2 l + \mathrm{ch}\lambda_2 l)\right] + \qquad (1.7)$$

$$+C_2\left[\lambda_1\mathrm{ctg}\lambda_1 l(\cos\lambda_2 l - \mathrm{ch}\lambda_2 l) - \theta\lambda_2^3(\sin\lambda_2 l - \mathrm{sh}\lambda_2 l)\right] = 0$$

$$C_1(\sin\lambda_2 l + \mathrm{sh}\lambda_2 l) + C_2(\cos\lambda_2 l + \mathrm{ch}\lambda_2 l) = 0$$

Нетривиальное решение системы (1.7) получается при равенстве нулю ее главного детерминанта, в результате чего получим следующее уравнение частот:

$$\lambda_1\cos\lambda_1 l(\sin\lambda_2 l\mathrm{ch}\lambda_2 l - \cos\lambda_2 l\mathrm{sh}\lambda_2 l) + \theta\lambda_2^3\sin\lambda_1 l(1 + \cos\lambda_2 l\mathrm{ch}\lambda_2 l) = 0 \qquad (1.8)$$

Заметим, что из общего уравнения частот (1.8) получим уравнения частот для частных случаев: при $\theta \to 0$ $(EI = 0)$ для чисто сдвиговых колебаний здания [4].

$$\cos\lambda_1 l = 0;\quad \lambda_{11} l = \frac{\pi}{2};\quad \lambda_{12} l = \frac{3\pi}{2};\quad \lambda_{13} l = \frac{5\pi}{2} \qquad (1.9)$$

при $\theta \to 0$ ($kFG = 0$) для чисто изгибных колебаний стойки [5]

$$1 + \cos\lambda_2 l \operatorname{ch}\lambda_2 l = 0$$

$$\lambda_{21} l = 1.875, \quad \lambda_{22} l = 4.694, \quad \lambda_{23} l = 7.855 \tag{1.10}$$

Из системы однородных уравнений для коэффициентов A, C_1, C_2 получим

$$C_2 = \frac{(\sin\lambda_2 l + \operatorname{sh}\lambda_2 l)\sin\lambda_1 l}{2(\cos\lambda_2 l \operatorname{sh}\lambda_2 l - \sin\lambda_2 l \cos\lambda_2 l)} A$$

$$C_1 = -\frac{\cos\lambda_2 l + \operatorname{ch}\lambda_2 l}{\sin\lambda_2 l + \operatorname{sh}\lambda_2 l} C_2 \tag{1.11}$$

Для вычисления корней характеристического уравнения (1.8) были приняты следующие соотношения, вытекающие из (1.4):

$$\frac{\lambda_1^2 gk'FG}{q_1} = \frac{\lambda_2^4 gEI}{q_2}, \quad \lambda_1 = \lambda_2^2 \sqrt{\frac{q_1 EI}{q_2 k'FG}} = \lambda_2^2 \sqrt{\frac{q_1}{q_2}}\theta \tag{1.12}$$

С другой стороны, обозначая периоды свободных колебаний здания через $T_{сд}$ и стойки через $T_{из}$, для первой формы колебаний будем иметь [3]

$$T_{сд} = 4l\sqrt{\frac{q_1}{gk'FG}}, \quad T_{из} = \frac{2\pi l^2}{(1.875)^2}\sqrt{\frac{q_2}{gEI}} \tag{1.13}$$

Из соотношений (1.4), (1.12) и (1.13) получим

$$\lambda_{11} = \frac{6.28l}{14}\frac{T_{сд}}{T_{из}}\lambda_{21}^2, \quad \theta_1 = 0.2\frac{q_2}{q_1}l^2\left(\frac{T_{сд}}{T_{из}}\right)^2 \tag{1.14}$$

Путем прямого сопоставления экспериментальных значений периодов каменных [2], крупнопанельных и каркасных зданий [3] до 10 этажей, работающих по схеме эквивалентного сдвигового бруса, установлено, что приведенный погонный вес q_1 таких зданий от 4 до 7 раз уступает погонному весу q_2 сплошной железобетонной стойки (объемный вес железобетона $2.2\,т/м^3$). Поэтому при вычислении корней частотного уравнения (1.8) было принято (для каменных зданий и железобетонной стойки)

$$q_2 = 6q_1 \tag{1.15}$$

Учитывая соотношения (1.12)-(1.15), были вычислены корни частотного уравнения (1.8) и значения коэффициентов C_1 и C_2 (при $A = 1$) для различных значений отношения периода консольного сооружения $T_{из}$ к периоду здания $T_{сд}$. Полученные результаты приведены в табл.1. Период колебаний комбинированной системы соответственно определится T_k по формулам

$$T_k = \frac{2\pi}{\lambda_{11}}\sqrt{\frac{q_1}{gk'FG}} \quad \text{или} \quad T_k = \frac{2\pi}{\lambda_{21}^2}\sqrt{\frac{q_2}{gEI}} \tag{1.16}$$

По данным табл.1 на фиг. 2 построены зависимости $\lambda_{11} l$ и $\lambda_{21} l$ от $T_{из}/T_{сд}$.

Как видно из данных табл. 1 и фигур, при отношениях $T_{из}/T_{сд} \le 0.3$ периоды колебаний комбинированной системы приближаются к периодам колебаний сдвигаемого здания, но с опертым верхним концом. На самом деле, для сдвигаемого здания с нижним защемленным и верхним опертыми концами граничные условия будут

$$x = 0 \quad Y_1 = 0 \quad B = 0$$

$$x = l \quad Y_2 = 0 \quad A\sin\lambda_1 l = 0 \qquad (1.17)$$

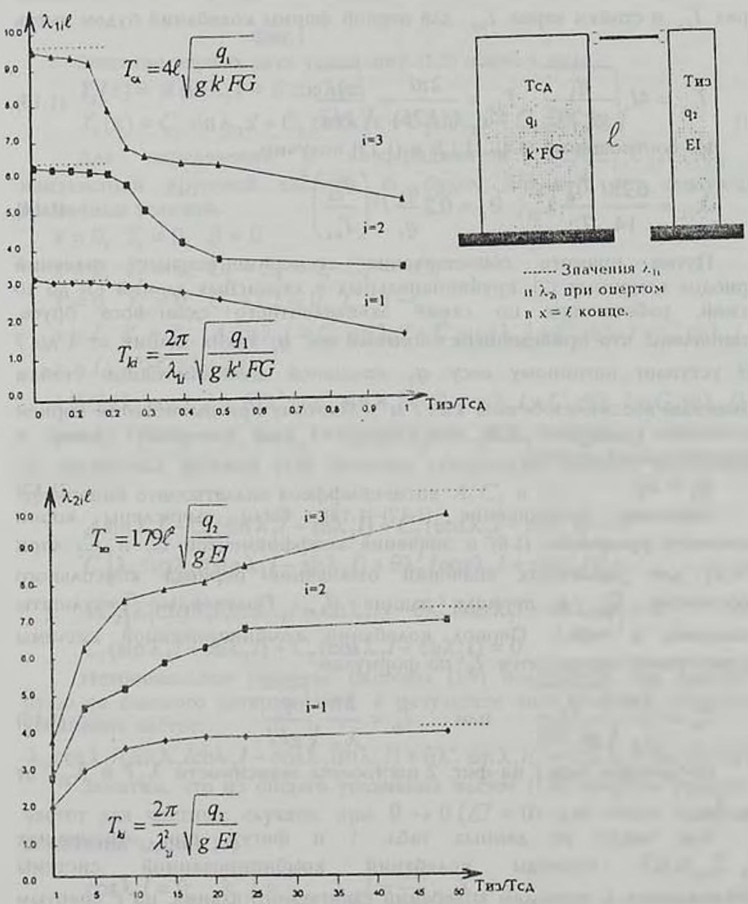
которые приводят к частотному уравнению с корнями

$$\sin\lambda_1 l = 0, \quad \lambda_{11} l = \pi, \quad \lambda_{12} l = 2\pi, \quad \lambda_{13} l = 3\pi \qquad (1.18)$$

и, следовательно, период колебаний такого здания будет

$$T_{сд}^{оп} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi l}{i\pi}\sqrt{\frac{q_1}{gk'FG}} \qquad (1.19)$$

Как видно из данных табл.1 и фиг.2, отклонение между значениями периодов T_{1i} по первой формуле (1.16) и по формуле (1.19) при $T_{из}/T_{сд} \le 0.2$ составляет соответственно для первой, второй и третьей форм свободных колебаний 1.2, 2.5 и 16.5 процентов. Для первой формы колебаний это отклонение при $T_{из}/T_{сд} \le 0.3$ не превышает 3.5%.

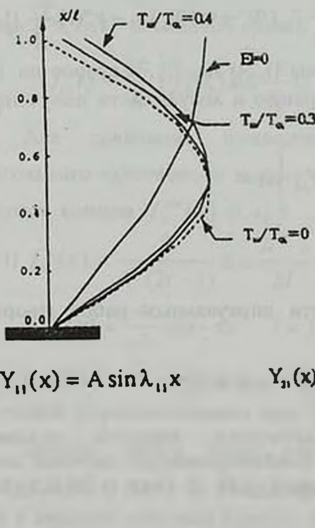


Фиг. 2

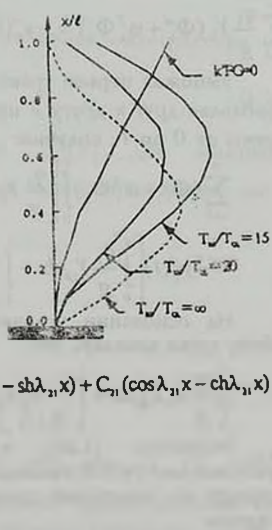
Таблица 1

	1-ая форма колебани				2-ая форма колебани				3-ая форма колебани			
$T_{м}, T_{ск}$	$\lambda_{11} l$	$\lambda_{21} l$	C_{11}	C_{21}	$\lambda_{12} l$	$\lambda_{22} l$	C_{12}	C_{22}	$\lambda_{13} l$	$\lambda_{23} l$	C_{13}	C_{23}
0 ($EI = \infty$)	3.141				6.282				9.423			
0.05	3.14	0.592	0.015	-0.009	6.277	0.837	-0.011	0.009	9.432	1.206	0.011	-0.001
0.10	3.131	0.836	0.023	-0.019	6.269	1.183	-0.020	0.022	9.393	1.448	0.023	-0.030
0.15	3.125	1.023	0.031	-0.031	6.227	1.444	-0.035	0.045	9.199	1.755	0.095	-0.129
0.20	3.103	1.177	0.04	-0.045	6.120	1.653	-0.075	0.100	7.866	1.874	0.367	-0.129
0.25	3.075	1.310	0.052	-0.062	5.754	1.792	-0.199	0.271	6.849	1.955	0.184	-0.500
0.30	3.032	1.425	0.069	-0.087	5.111	1.850	-0.345	0.470	6.560	2.096	0.086	-0.250
0.40	2.881	1.604	0.125	-0.166	4.150	1.925	-0.299	0.407	6.445	2.399	0.047	-0.116
1.00	1.575 (1.575	1.875 (1.875	0.367	-0.500	3.366 (4.725	2.741 (4.694	-0.073	0.087	6.323 (7.875	3.757 (7.855	0.061	-0.060
5.00	0.745	2.883	0.248	-0.284	1.883	4.580	-0.552	0.542	3.456	6.211	0.143	-0.062
10.0	0.565	3.550	0.488	-0.503	1.172	5.115	-0.352	0.346	2.502	7.474	0.537	-0.147
15.0	0.422	3.761	0.850	-0.858	0.990	5.759	-0.307	0.304	1.781	7.723	0.568	-0.537
20.0	0.329	3.836	1.225	-1.231	0.879	6.266	-0.379	0.372	1.435	8.003	0.435	-0.568
50.0	0.137	3.912	3.383	-3.383	0.435	6.973	-1.569	1.569	0.859	9.797	0.667	-0.435
∞ ($kFG = \infty$)		3.927				7.068				10.21		-0.667

Таким образом, если период свободных колебаний консольного сооружения в 4-5 раз меньше периода свободных колебаний здания, то консольное сооружение, жестко соединенное со зданием, играет роль опоры для него. Это обстоятельство явно видно также из фиг. 3, где показаны формы колебаний здания без консольного сооружения и при его наличии.



$$Y_{11}(x) = A \sin \lambda_{11} x$$



$$Y_{21}(x) = C_{11}(\sin \lambda_{21} x - \operatorname{sh} \lambda_{21} x) + C_{21}(\cos \lambda_{21} x - \operatorname{ch} \lambda_{21} x)$$

Фиг.3

Аналогичным образом данные табл.1 показывают, что при $T_{из}/T_{сл} \geq 15$ период колебаний общей системы, наоборот, приближается, но менее интенсивнее, к периоду колебаний изгибаемой стойки, но с опертым верхним концом.

Действительно, для такой стойки граничные условия будут

$$\begin{aligned} &x = 0 \quad Y_2 = 0 \quad Y_2' = 0 \\ &x = l \quad Y_2 = 0 \quad Y_2'' = 0 \end{aligned} \tag{1.20}$$

которые приводят к известному частотному уравнению

$\mathrm{tg}\lambda_2 l - \mathrm{th}\lambda_2 l = 0$ с корнями [5]

$$\lambda_{21} l = 3.926, \quad \lambda_{22} l = 7.068, \quad \lambda_{23} l = 10.210 \tag{1.21}$$

Заметим одно очень важное с практической точки зрения обстоятельство: для того, чтобы изгибаемая стойка играла роль неподвижной опоры для сдвигаемого здания, значение ее периода должно быть в 4 раза меньше, чем значение периода самого здания, а при изменении их ролей, т.е. для того, чтобы сдвигаемое здание служило бы неподвижной опорой для изгибаемой стойки, значение ее периода должно быть в 20 и более раза меньше, чем значение периода самой стойки.

2. Уравнения вынужденных колебаний комбинированной системы при сейсмических воздействиях будут:

$$k'FG\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - \frac{q_1}{g}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = -\frac{q_1}{g}\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2}, \quad EI\frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + \frac{q_2}{g}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = -\frac{q_2}{g}\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} \tag{1.22}$$

где $y_0''(t)$ – ускорение колебания грунта (акселерограмма землетрясения). Решение уравнений (1.22) ищем в виде

$$y_1(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_{1i}(x)\Phi_i(t), \quad y_2(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_{2i}(x)\Phi_i(t) \tag{1.23}$$

где $Y_{1i}(x)$ и $Y_{2i}(x)$ удовлетворяют уравнениям (1.3). Подставляя (1.23) в (1.22) и учитывая (1.3) и (1.4), получим

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{q_1}{g}Y_{1i}(\Phi_i''+\omega_i^2\Phi_i) = -y_0''(t)\frac{q_1}{g}, \quad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{q_2}{g}Y_{2i}(\Phi_i''+\omega_i^2\Phi_i) = -y_0''(t)\frac{q_2}{g} \tag{1.24}$$

Умножая первое уравнение системы (1.24) на Y_{1k}, а второе на Y_{2k}, прибавляя друг к другу и интегрируя правую и левую части полученной суммы от 0 до l, получим:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{\infty}(\Phi_i''+\omega_i^2\Phi_i)\int_0^l\left[\frac{q_1}{g}Y_{1i}Y_{1k} + \frac{q_2}{g}Y_{2i}Y_{2k}\right]dx = \\ &= -y_0''(t)\left[\int_0^l\frac{q_1}{g}Y_{1k}dx + \int_0^l\frac{q_2}{g}Y_{2k}dx\right] \end{aligned} \tag{1.25}$$

На основании условия взаимности виртуальных работ (теорема Бетти) легко доказать, что

$$\int_0^l\frac{q_1}{g}Y_{1i}Y_{1k}dx + \int_0^l\frac{q_2}{g}Y_{2i}Y_{2k}dx = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k = 1,2\ldots \tag{1.26}$$

Равенство (1.26), которое фактически является условием ортогональности собственных функций комбинированной системы, легко доказать на основании граничных условий (1.6). В силу (1.26) из (1.25) получим

$$\Phi_k''(t) + \omega_k^2\Phi_k(t) = -y_0''(t)W_k$$

$$W_k = \frac{\int_0^l q_1 Y_{1k} dx + \int_0^l q_2 Y_{2k} dx}{\int_0^l q_1 Y_{1k}^2 dx + \int_0^l q_2 Y_{2k}^2 dx} \tag{1.27}$$

Решение уравнения (1.27) будет:

$$\Phi_k(t) = -\frac{W_k}{\omega_k}\int_0^t y_0''(\xi)\sin\omega_k(t-\xi)d\xi \tag{1.28}$$

Таким образом, перемещения сдвигаемого здания и изгибаемой стойки при землетрясении с акселерограммой $y_0''(t)$ будут

$$y_1(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\eta_{1i}(x)\frac{1}{\omega_i}\int_0^t y_0''(\xi)\sin\omega_i(t-\xi)d\xi$$

$$y_2(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\eta_{2i}(x)\frac{1}{\omega_i}\int_0^t y_0''(\xi)\sin\omega_i(t-\xi)d\xi \tag{1.29}$$

где

$$\eta_{1i}(x) = W_k Y_{1i}(x), \quad \eta_{2i}(x) = W_k Y_{2i}(x) \tag{1.30}$$

Поперечная сила для здания будет

$$Q_1(x,t) = k'FG\frac{\partial y_1(x,t)}{\partial x} \tag{1.31}$$

которая после ряда преобразований получит следующий окончательный вид:

$$Q_1(x,t) = \frac{q_1 l}{g}\sum_{i=1}^{\infty} f_{1i}(x)\tau(T_i,t) \tag{1.32}$$

где

$$f_{1i}(x) = \frac{W_i}{\lambda_{1i} l}\cos\lambda_{1i}\frac{x}{l} \tag{1.33}$$

а через $\tau(T_i,t)$ обозначен спектр реакции (ускорения) землетрясения

$$\tau(T_i,t) = \frac{2\pi}{T_i}\int_0^t y_0''(\xi)\sin\frac{2\pi}{T_i}(t-\xi)d\xi \tag{1.34}$$

Для сравнения приведем значения $f_{1i}(x)$ для обычного консольного сдвигаемого здания $f_{1i}^{k}(x)$ и для сдвигаемого здания, но с опертым концом $f_{1i}^{оп}(x)$ [1,4]:

$$f_{1i}^{k}(x) = \frac{8}{\pi^2(2i-1)}\cos\frac{2i-1}{2l}\pi x$$

$$f_{1i}^{оп}(x) = \frac{4}{\pi^2 i}\cos\frac{i}{l}\pi x \qquad i = 1,2,3... \tag{1.35}$$

В табл.2 для сравнения приведены значения $f_{1i}(x)$, $f_{1i}^{k}(x)$, $f_{1i}^{оп}(x)$ по первой форме колебания при $T_{из}/T_{сд} = 0.2,\ 015$

Данные табл.2 тоже подтверждают, что при $T_{из}/T_{сд} \le 0.2$, ($\theta = EI/kFG \ge 30l^2$) в комбинированной системе здание работает как брус с верхним опертым концом, что для 4-5 этажных каменных зданий с периодами 0.22-0.27 сек. приводит к понижению уровня сейсмических инерционных сил более чем в 2.5 раза [1] из-за двухкратного уменьшения ординат форм колебания (табл.2) и в 1.35-разового уменьшения величины спектра реакции $\tau_{max}(T)$ комбинированной системы по сравнению с той же величиной первоначальной системы [7].

Таблица 2

x/l	f_{11}^{k}	$f_{11}^{оп}$	$T_{из}/T_{сл} = 0.2$ f_{11}	$T_{из}/T_{сл} = 015$ f_{11}
0	0.8106	0.4053	0.4660	0.4367
0.1	0.8006	0.3854	0.4436	0.4155
0.2	0.7709	0.3279	0.3788	0.3539
0.3	0.7222	0.2382	0.2777	0.2580
0.4	0.6557	0.1253	0.1501	0.1369
0.5	0.5732	0	0.0080	0.002
0.6	0.4764	-0.1253	-0.1348	-0.1319
0.7	0.3680	-0.2382	-0.2647	-0.2537
.08	0.2505	-0.3279	-0.3693	-0.3509
0.9	0.1268	-0.385	-0.4385	-0.4139
1.0	0	-0.4053	-0.4657	-0.4367

Авторы выражают свою искреннюю благодарноасть академику С.А. Амбарцумяну за внимание и интерес к данной статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Khachian E. The method of increasing the level of seismic safety of existing-buildings. – American University of Armenia, Manuscript. Yerevan. 1995.
2. Карапетян Б.К. Колебания сооружений, возведенных в Армении. – Ереван: Изд. "Айастан", 1967. 172с.
3. Хачиян Э.Е. Сейсмические воздействия на высотные здания и сооружения. – Ереван: Изд. "Айастан", 1973. 327 с.
4. Хачиян Э.Е. Некоторые прикладные задачи теории сейсмостойкости сооружений. – Ереван: АИСМ, 1963. 127с.
5. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Гостехиздат, 1958. 627с.
6. Ньюмарк Н., Розенблюет Э. Основы сейсмостойкого строительства. – М.: Стройиздат, 1980. 344с.
7. Հ.Հ. Շինարարական նորմեր, Սեյսմակայուն շինարարություն. Նախագծման նորմեր. ՀՀՇՆ II-2.02-94, Երևան, 1995, 37 էջ:

Армянский НИИ сейсмостойкого строительства
Ереванский
Архитектурно- строительный институт

Поступила в редакцию
30.05.1996

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №3, 1998 Механика

УДК 621.81

МЕТОД РАСЧЕТА ВИБРОПРОЧНОСТИ ВАЛОВ

Г.Л. Аретемян

Հ.Լ. Արտեմյան
Լիսեռների վիբրոամրության հաշվարկի մեթոդ

Առաջարկված է լիսեռների հենարանների տատանման դինամիկ մոդել մեքենաների արտաքին մակերևույթների վրա ազդող վիբրացիոն բեռների ազդեցության դեպքում, ստացված են անհրաժեշտ հաշվարկային կախվածություններ լիսեռների վիբրոամրության գնահատման համար:

H.L. Artemian
Method of calculation of vibration firm of shaft

Предложена динамическая модель колебания опор валов при воздействии на внешнюю поверхность машин вибрационной нагрузки, получены необходимые расчетные соотношения для оценки вибропрочности валов.

1. **Постановка задачи.** Вибропрочность – это свойство машины противостоять действию вибрационных нагрузок и выполнять свое функциональное назначение с сохранением выходных параметров после воздействия этих нагрузок. Вал машины считается вибропрочным, если под действием вибрационной нагрузки максимальные напряжения в любом его сечении не превосходят предел упругости материала вала.

Известные экспериментальные методы оценки вибрационной прочности машин предусматривают их установку на вибростендах (в нерабочем состоянии машины) и реализацию длительного воздействия вибрационных нагрузок. Очевидно, что динамическая модель расчета вибропрочности машин, достоверность которой может быть оценена только экспериментально, должна учитывать эту специфику проведения испытаний на вибропрочность. Сложность задачи в том, что выбранная модель должна позволить определять параметры нагрузок, непосредственно воспринимаемых отдельными элементами машины (в том числе и вала), когда на внешнюю поверхность машины действует вполне определенная вибрационная нагрузка. Эта особенность искомой расчетной модели не позволяет однозначно применять известные методы расчета динамической прочности валов [1, 2, 3], в которых величины действующих на вал нагрузок предполагаются известными.

2. **Выбор динамической модели.** Как правило, опоры валов выполняются в виде конструктивных соединений различных деталей (станины, подшипники, упругие опоры и т.д.). Выбор эквивалентной схемы колебания вала при воздействии на внешнюю поверхность машины вибрационной нагрузки нами осуществляется исходя из соображений, что массивные детали опор вала обладают только инерционным свойством, а контактные поверхности их соединения – определенной упругостью и вязкостью. Предполагается также, что каждая масса может совершить только колебательное движение по линии действия внешнего возбуждения (т.е. обладает одной степенью свободы). Построенная на таких предположениях модель колебаний опор вала приведена на фиг. 1, где введены обозначения:

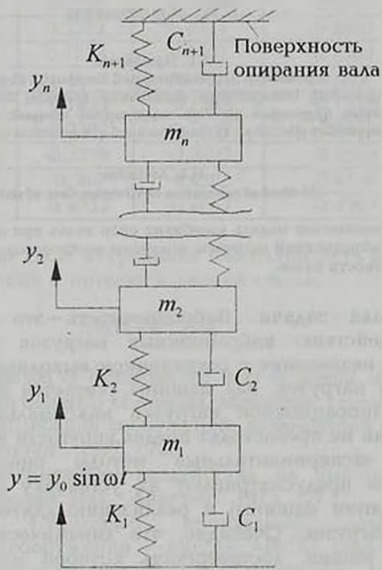
m_i -массы крупных деталей опор вала $i = 1,2,\dots,n$

K_i и C_i - коэффициенты жесткости и демпфирования контактных соединений массивных элементов опор вала, $i = 2,3,\ldots,(n+1)$,

K_1 и C_1 - соответственно коэффициенты жесткости и демпфирования элементов крепления машины,

$y = y_0 \sin\omega t$ - амплитуда вибросмещения действующей на внешнюю поверхность машины вибрационной нагрузки,

ω - угловая частота внешней вибрационной нагрузки.



Фиг.1 Модель колебания опор вала

3. Динамика опор вала. В соответствии с фиг. 1 колебания опор опишутся дифференциальными уравнениями:

$$m_1\ddot{y}_1 + y_1(K_1 + K_2) - y_2K_2 + \dot{y}_1(C_1 + C_2) - C_2\dot{y}_2 = K_1y_0\sin\omega t + C_1y_0\omega\cos\omega t$$

$$m_i\ddot{y}_i + y_i(K_i + K_{i+1}) - K_iy_{i-1} - K_{i+1}y_{i+1} + \dot{y}_i(C_i + C_{i+1}) - C_i\dot{y}_{i-1} - C_{i+1}\dot{y}_{i+1} = 0$$

$$i = 2,3,\ldots,(n-1)$$

$$m_n\ddot{y}_n + y_n(K_n + K_{n+1}) - K_ny_{n-1} + \dot{y}_n(C_n + C_{n+1}) - C_n\dot{y}_{n-1} = 0 \qquad (1)$$

Частное решение системы (1), описывающее процесс вынужденных колебаний, ищем в виде

$$y_j = A_{2j-1}\sin\omega t + A_{2j}\cos\omega t, \text{ где } j = 1,2,\ldots,n \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получим систему уравнений, из которой определяются неизвестные постоянные A_{2j-1} и A_{2j}.

$$(-m_1\omega^2 + K_2 + K_1)A_1 - (C_2 + C_1)\omega A_2 - K_2A_3 + C_2\omega A_4 = K_1y_0$$

$$(C_2 + C_1)\omega A_1 + (-m_1\omega^2 + K_2 + K_1)A_2 - C_2\omega A_3 + K_2A_4 = C_1y_0\omega$$

$$(-m_i\omega^2 + K_i + K_{i+1})A_{2i-1} - K_iA_{2i-3} - K_{i+1}A_{2i+1} - (C_i + C_{i+1})\omega A_{2i} + C_i\omega A_{2i-2} + C_{i+1}\omega A_{2i+2} = 0$$

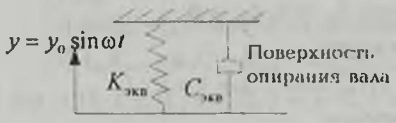
$$\left(-m_i\omega^2 + K_i + K_{i+1}\right)A_{2i} - K_i A_{2i-2} - K_{i+1}A_{2i+2} + \left(C_i + C_{i+1}\right)\omega A_{2i-1} - C_i\omega A_{2i-3} - C_{i+1}\omega A_{2i+1} = 0$$

$$\left(-m_n\omega^2 + K_n + K_{n+1}\right)A_{2n-1} - K_n A_{2n-3} - \left(C_n + C_{n+1}\right)\omega A_{2n} + C_n\omega A_{2n-2} = 0$$

$$\left(-m_n\omega^2 + K_n + K_{n+1}\right)A_{2n} - K_n A_{2n-2} + \left(C_n + C_{n+1}\right)\omega A_{2n-1} - C_n\omega A_{2n-3} = 0 \qquad (3)$$

Сила, действующая на поверхность опирания вала будет:

$$F_1 = K_{n+1}y_n + C_{n+1}\dot{y}_n = \sin\omega t\left(A_{2n-1}K_{n+1} - \omega A_{2n}C_{n+1}\right) + \cos\omega t\left(A_{2n}K_{n+1} + \omega A_{2n-1}C_{n+1}\right) \quad (4)$$



Фиг. 2 Эквивалентная система колебании опор вала

С целью упрощения дальнейших математических выкладок и построения конечных решений при рассмотрении задачи колебания вала, представленную на фиг. 1 систему заменим эквивалентной системой (фиг. 2). Тогда действующая на вал сила будет:

$$F_2 = K_{экв}y_0\sin\omega t + \omega C_{экв}y_0\cos\omega t \qquad (5)$$

Условие необходимого равенства сил F_1 и F_2 приводит к системе для определения K_{on} и C_{on}:

$$K_{экв}y_0 = A_{2n-1}K_{n+1} - \omega C_{n+1}A_{2n}$$

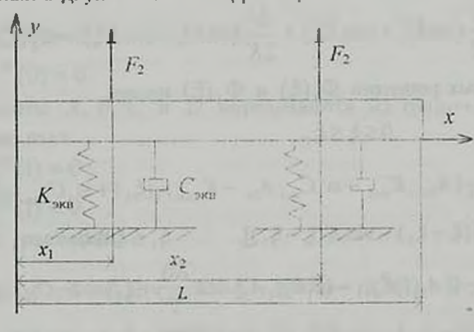
$$C_{экв}y_0\omega = A_{2n}K_{n+1} + \omega C_{n+1}A_{2n-1}$$

откуда

$$K_{экв} = \frac{A_{2n-1}K_{n+1} - \omega C_{n+1}A_{2n}}{y_0}$$

$$C_{экв} = \frac{A_{2n}K_{n+1} + \omega C_{n+1}A_{2n-1}}{y_0\omega} \qquad (6)$$

4. Вибропрочность вала. Изгибные колебания вала описываются по схеме колебания балки постоянного сечения под действием сосредоточенных в двух точках сил (фиг. 3).



Фиг. 3 Схема колебания вала

Уравнение колебания вала с учетом только упругих и инерционных сил будет:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho F}{EI}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{EI}Q(x,t) \qquad (7)$$

где I - момент инерции вала м^4; E -модуль упругости материала вала Н/м^2; F -площадь поперечного сечения вала м^2; ρ -масса единицы объема кг/м^3; t -время, с.

$$Q(x,t)=\begin{cases} 0 - \text{во всех сечениях вала, кроме сечении } x=x_1 \text{ и } x=x_2 \\ F_2 - K_{экв}y(x,t) - C_{экв}\dot{y}(x,t), x\in[x_1,x_1+\delta_1]\cup[x_2,x_2+\delta_2] \end{cases}$$

Сосредоточенные силы $Q(x,t)$ рассматриваются как предельные положения сил, распределенных в интервалах $[x_1,x_1+\delta_1]$ и $[x_2,x_2+\delta_2]$ с интенсивностями q_1 и q_2 на единицу длины, при условии, что [3]

$$q_1\delta_1 \to Q,\ q_2\delta_2 \to Q \text{ при } \delta_1 \to 0,\ \delta_2 \to 0$$

Решение уравнения (7) ищем в виде:

$$y(\xi,t) = y_1(\xi)\sin\omega_1 t + y_2(\xi)\cos\omega_1 t, \text{ где } \xi = x/L \tag{8}$$

Тогда сила определится по формуле

$$\begin{aligned} Q(x,t) = {} & [A_{2n-1}K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1}A_{2n} - K_{nn}y_1(\xi) + \omega_1 C_{nn}y_2(\xi)]\sin\omega_1 t + \\ & +[A_{2n-1}K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1}A_{2n} - K_{nn}y_2(\xi) - \omega_1 y_1(\xi)]\cos\omega_1 t \end{aligned} \tag{9}$$

Подставляя (8) и (9) в уравнение (7), получим два уравнения для определения $y_1(\xi)$ и $y_2(\xi)$:

$$y_1^{IV}(\xi) - K^4 y_1(\xi) = \frac{L^4}{EI}[A_{2n-1}K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1}A_{2n} - K_{экв}y_1(\xi) + \omega_1 C_{экв}y_2(\xi)]$$

$$y_2^{IV}(\xi) - K^4 y_2(\xi) = \frac{L^4}{EI}[A_{2n}K_{n+1} + \omega_1 C_{n+1}A_{2n-1} - K_{экв}y_2(\xi) - \omega_1 C_{экв}y_2(\xi)] \tag{10}$$

где $K^4 = \dfrac{\rho F\omega_1^2 L^4}{EI}$

Решение системы (10) ищем в виде

$$y_1(\xi) = \frac{A}{2}(\mathrm{ch}K\xi + \cos K\xi) + \frac{B}{2K}(\mathrm{sh}K\xi + \sin K\xi) + \Phi_1(\xi)$$

$$y_2(\xi) = \frac{C}{2}(\mathrm{ch}K\xi + \cos K\xi) + \frac{D}{2K}(\mathrm{sh}K\xi + \sin K\xi) + \Phi_2(\xi) \tag{11}$$

Для частных решений $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\xi)$ имеем

$$\Phi_1(\xi)=\begin{cases} 0, \quad 0\le\xi\le\xi_1 \\ \dfrac{L^3}{2EIK^3}[A_{2n-1}K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1}A_{2n} - K_{экв}y_1(\xi_1) + \omega_1 C_{экв}y_2(\xi_1)]\times \\ \times[\mathrm{sh}K(\xi-\xi_1) - \sin K(\xi-\xi_1)], \quad \xi_1\le\xi\le\xi_2 \\ \dfrac{L^3}{2EIK^3}\{[A_{2n-1}K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1}A_{2n} - K_{экв}y_1(\xi_1) + \omega_1 C_{экв}y_2(\xi_1)]\times \\ \times[\mathrm{sh}K(\xi-\xi_1) - \sin K(\xi-\xi_1)] + [\mathrm{sh}K(\xi-\xi_2) - \sin K(\xi-\xi_2)]\times \\ \times[A_{2n-1}K_{n+1} - \omega_1 C_{n+1}A_{2n} - K_{экв}y_1(\xi_2) + \omega_1 C_{экв}y_2(\xi_2)]\}, \quad \xi_2\le\xi\le 1 \end{cases} \tag{12}$$

где $\xi_1 = x_1/L;\ \xi_2 = x_2/L$

$$
\Phi_2(\xi)=\begin{cases}
0, & 0\le\xi\le\xi_1\\
\dfrac{L^3}{2EIK^3}[A_{2n}K_{n+1}+\omega_1 C_{n-1}A_{2n-1}-K_{экв}y_2(\xi_1)-\omega_1 C_{экв}y_1(\xi_1)]\times & \\
\times[\mathrm{sh}K(\xi-\xi_1)-\sin K(\xi-\xi_1)], & \xi_1\le\xi<\xi_2\\
\dfrac{L^3}{2EIK^3}\{[A_{2n}K_{n+1}+\omega_1 C_{n+1}A_{2n-1}-K_{экв}y_2(\xi_1)-\omega_1 C_{экв}y_1(\xi_1)]\times & \\
\times[\mathrm{sh}K(\xi-\xi_1)-\sin K(\xi-\xi_1)]+[\mathrm{sh}K(\xi-\xi_2)-\sin K(\xi-\xi_2)]\times & \\
\times[A_{2n}K_{n+1}+\omega_1 C_{n+1}A_{2n-1}-K_{экв}y_2(\xi_2)-\omega_1 C_{экв}y_1(\xi_2)]\}, & \xi_2\le\xi\le 1
\end{cases}
\tag{13}
$$

Для $y_1(\xi_1)$, $y_1(\xi_2)$, $y_2(\xi_1)$ и $y_2(\xi_2)$ имеем

$$y_1(\xi_1)=\frac{A}{2}(\mathrm{ch}K\xi_1+\cos K\xi_1)+\frac{B}{2K}(\mathrm{sh}K\xi_1-\sin K\xi_1)$$

$$y_1(\xi_2)=\frac{A}{2}(\mathrm{ch}K\xi_2+\cos K\xi_2)+\frac{B}{2K}(\mathrm{sh}K\xi_2-\sin K\xi_2)+$$

$$+\frac{L^3}{2K^3EI}[A_{2n-1}K_{n+1}-\omega_1 C_{n+1}A_{2n}-K_{экв}y_1(\xi_1)+C_{экв}y_2(\xi_1)]\times$$

$$\times[\mathrm{sh}K(\xi_2-\xi_1)-\sin K(\xi_2-\xi_1)]$$

$$y_2(\xi_1)=\frac{C}{2}(\mathrm{ch}K\xi_1+\cos K\xi_1)+\frac{D}{2K}(\mathrm{sh}K\xi_1-\sin K\xi_1)$$

$$y_2(\xi_2)=\frac{C}{2}(\mathrm{ch}K\xi_2+\cos K\xi_2)+\frac{D}{2K}(\mathrm{sh}K\xi_2-\sin K\xi_2)+$$

$$+\frac{L^3}{2K^3EI}[A_{2n}K_{n+1}+\omega_1 C_{n+1}A_{2n}-K_{экв}y_2(\xi_1)-\omega_1 C_{экв}y_1(\xi_1)]\times \tag{14}$$

$$\times[\mathrm{sh}K(\xi_2-\xi_1)-\sin K(\xi_2-\xi_1)]$$

Граничные условия на левом конце вала удовлетворяются тождественно:

$$y_1''(0)=y_1'''(0)=0$$

$$y_2''(0)=y_2'''(0)=0$$

Коэффициенты A, B, C и D определяются из граничных условий на правом конце вала:

$$
\begin{aligned}
y_1''(1)=y_1'''(1)=0\\
y_2''(1)=y_2'''(1)=0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

т.е. из системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{AK^2}{2}(\mathrm{ch}K-\cos K)+\frac{BK}{2}(\mathrm{sh}K-\sin K)+\Phi_1''(1)=0\\
&\frac{AK^3}{2}(\mathrm{sh}K+\sin K)+\frac{BK^2}{2}(\mathrm{ch}K-\cos K)+\Phi_1'''(1)=0\\
&\frac{CK^2}{2}(\mathrm{ch}K-\cos K)+\frac{DK}{2}(\mathrm{sh}K-\sin K)+\Phi_2''(1)=0\\
&\frac{CK^3}{2}(\mathrm{sh}K+\sin K)+\frac{DK^2}{2}(\mathrm{ch}K-\cos K)+\Phi_2'''(1)=0
\end{aligned}
\tag{16}
$$

где

$$\Phi_1^{II}(1)=\frac{L^3}{2EIK}\{[A_{2n-1}K_{n+1}-\omega_1C_{n+1}A_{2n}-K_{экв}y_1(\xi_1)+\omega_1C_{экв}y_2(\xi_1)]\times$$
$$\times[\text{sh}K(1-\xi_1)+\sin K(1-\xi_1)]+[\text{sh}K(1-\xi_2)+\sin K(1-\xi_2)]\times$$
$$\times[A_{2n-1}K_{n+1}-\omega_1C_{n+1}A_{2n}-K_{экв}y_1(\xi_2)+\omega_1C_{экв}y_1(\xi_2)]\}$$
$$\Phi_1^{III}(1)=\frac{L^3}{2EI}\{[A_{2n-1}K_{n+1}-\omega_1C_{n+1}A_{2n}-K_{экв}y_1(\xi_1)-\omega_1C_{экв}y_1(\xi_1)]\times$$
$$\times[\text{ch}K(1-\xi_1)+\cos K(1-\xi_1)]+[\text{ch}K(1-\xi_2)-\cos K(1-\xi_2)]\times$$
$$\times[A_{2n-1}K_{n+1}-\omega_1C_{n+1}A_{2n}-K_{экв}y_1(\xi_2)+\omega_1C_{экв}y_2(\xi_2)]\}$$
$$\Phi_2^{II}(1)=\frac{L^3}{2EIK}[A_{2n}K_{n+1}+\omega_1C_{n-1}A_{2n-1}-K_{экв}y_2(\xi_1)-\omega_1C_{экв}y_1(\xi_1)]\times$$
$$\times[\text{sh}K(1-\xi_1)+\sin K(1-\xi_1)]$$
$$\Phi_2^{III}(1)=\frac{L^3}{2EI}\{[A_{2n}K_{n+1}+\omega_1C_{n+1}A_{2n-1}-K_{экв}y_2(\xi_1)-\omega_1C_{экв}y_1(\xi_1)]\times$$
$$\times[\text{ch}K(1-\xi_1)+\cos K(1-\xi_1)]+[\text{ch}K(1-\xi_2)+\cos K(1-\xi_2)]\times \qquad (17)$$
$$\times[A_{2n}K_{n+1}+\omega_1C_{n+1}A_{2n}-K_{экв}y_2(\xi_2)-\omega_1C_{экв}y_2(\xi_2)]\}$$

Максимальные напряжения в любом сечении вала определяются формулой

$$\sigma_{max}=\frac{EI}{W}\sqrt{[y_1^{II}(\xi)]^2+[y_2^{II}(\xi)]^2} \qquad (18)$$

где W - момент сопротивления сечения вала м^4.

Сечение $\xi=\xi_0$ с наибольшим напряжением определяется из условия

$$y_1^{III}(\xi)+y_2^{III}(\xi)=0 \qquad (19)$$

Условие прочности будет

$$\sigma(\xi_0)<\frac{\sigma_y}{K_n} \qquad (20)$$

где σ_y -предел пропорциональности материала вала, Н/м^2; K_n - коэффициент запаса прочности, который выбирается с учетом неточностей расчетного определения максимальных напряжений, неоднородностей материала вала, износа и старения опорных конструкций вала, технологических концентраторов напряжений: $K=1{,}4\div3{,}0$.

Проверка предложенного метода расчета вибропрочности вала была осуществлена на электрических машинах типа АИ50В2. Для испытания на вибропрочность машины жестко установились на платформе вибростенда типа JMV (Япония) с широким диапазоном вариации частот и амплитуд вибрационных нагрузок. Испытания были проведены на трех машинах последовательно, при фиксированной нагрузке с частотой 100Гц и амплитудой ускорения 2000Н. Опора вала машины АИ50В2 из себя представляет трехмассовую систему (масса подшипника m_1, подшипникового щита m_2 и корпуса m_3), соединенных между собой упруговязкими элементами, имитирующих прессовую посадку соединения вала с внутренним кольцом подшипника (K_2 и C_2), скользящие посадки наружного кольца подшипника с подшипниковым гнездом щита (K_3 и C_3), подшипникового щита и корпуса машины (K_4

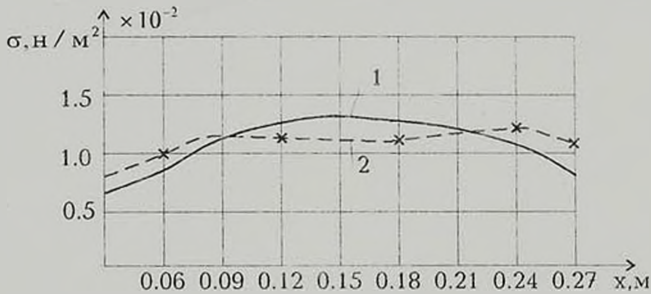
и C_4). На валу каждой испытуемой машины были наклеены проволочные тензодатчики для замера деформаций точек поверхности различных сечений вала. Измерения деформаций проводились прибором СИД−1. Испытания осуществлялись в нерабочем состоянии испытуемых машин.

Исходные данные для расчетной оценки напряженного состояния вала:

$E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Н / м^2; $I = 2 \cdot 10^{-9}$ м^4; $F = 0.154 \cdot 10^{-3}$ м^2; $m_1 = 0.028$кг; $m_2 = 0.125$кг;

$m_3 = 2.75$кг; $K_1 = 0$; $K_2 = 0.432 \cdot 10^9$ Н / м; $K_3 = 0.09 \cdot 10^9$ Н / м; $K_4 = 0.13 \cdot 10^9$ Н / м

$C_1 = 0$; $C_2 = 1{,}2$ Н·сек/ м; $C_3 = 0.156$ Н·сек/ м; $C_4 = 0{,}26$ Н·сек/ м



Фиг. 4 Распределение максимального напряжения в сечении вала
1 − теоретическое, 2 − экспериментальное.

Сравнительные результаты экспериментов и теоретических расчетов, представленные на фиг. 4, свидетельствуют о достаточно высокой точности разработанного метода расчета вибропрочности вала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаков И.М. Теория колебаний.-М.: Наука, 1965.
2. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов. -М.: Изд. АН СССР, 1969.
3. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем.-М.: Машиностроение, 1970

Военный институт МО РА

Поступила в редакцию
17.04.1996