ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1998

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 539.3

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ УПРУГИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Агаловян Л.А., Саакян А.В., Саркисян А.Г.

Լ.Ա. Աղալովյան, Ա.Վ. Սահակյան, Ա.Հ. Սարգսյան

Փոփոխական առաձգական բնութագրիչներ ունեցող անիզոտրոպ շերտի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի մասին

Դիտարկված է փոփոխական առաձգական գործակիցներ ունեցող անիզոտրոպ շերտի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման հարցը, երբ նրա երեսային մակերևույթների վրա տրված են լարման տենզորի բաղադրիչները: Խնդիրը լուծված է ասիմպտոտիկ մեթոդով: Ստացված է միաչափի բերված փոփոխական գործակիցներով սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ: Որպես կիրառություն դիտարկված է սիլիկոնից պատրաստված օրթոտրոպ հեծանի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման խնդիրը տարբեր բեռնավորումների դեպքում: Ենթադրվում է, որ սիլիկոնի առաձգական սիմետրիայի գլխավոր ուղղությունները թեքված են կոորդինատական առանցքների նկատմամբ կամայական φ անկյունով: Որոշված են լարման և տեղափոխության դաշտերը, ստացված են գնահատականներ Բեռնուլիի վարկածի կիրառելիության վերաբերյալ: Կախված φ անկյան մեծությունից, կառուցված են տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների փոփոխությունները բնութագրող կորեր:

L.A. Aghalovian, A.V. Sahakian, A.H. Sarkissian

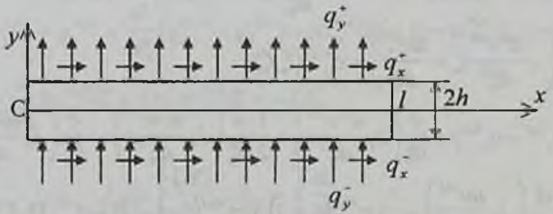
On Determination of the Stress-Strain State of an Anisotropic Strip with Variable Elastic Characteristics

Выведены рекуррентные формулы для определения компонентов тензора напряжений и вектора перемещения анизотропной полосы с переменными коэффициентами упругости. Обсуждается возможность использования гипотезы плоских сечений Бернулли для расчета подобных балок-полос. Такие конструктивные элементы изготавливаются, в частности, искусственным выращиванием кристаллов и используются в современной микротехнике.

1. Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния анизотропной полосы с переменными коэффициентами упругости, занимающей область $\Omega = \left\{x, y\colon x \in [0, l], -h \le y \le h, h << l\right\}$, когда на лицевых поверхностях заданы компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{xy} = \pm \frac{l}{h} q_x^{\pm}(x), \quad \sigma_y = \pm q_y^{\pm}(x) \qquad \text{при} \quad y = \pm h, \tag{1.1}$$

а на торцах $x = 0, l$ - пока еще произвольные граничные условия теории упругости (фиг.1).



Фиг.1.

Введем безразмерные координаты и компоненты вектора перемещения. В результате, основные уравнения теории упругости для поставленной задачи принимают вид

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial\zeta}=0,\qquad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_y}{\partial\zeta}-\varepsilon^{-1}(\rho g h)=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_x+a_{12}\sigma_y+a_{16}\sigma_{xy},\quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta}=a_{12}\sigma_x+a_{22}\sigma_y+a_{26}\sigma_{xy},\tag{1.2}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta}+\frac{\partial V}{\partial\xi}=a_{16}\sigma_x+a_{26}\sigma_y+a_{66}\sigma_{xy},$$

где $\xi=\frac{x}{l}$, $\zeta=\frac{y}{h}$, $U=\frac{u}{l}$, $V=\frac{v}{l}$, $\varepsilon=\frac{h}{l}$, $\rho=\rho(l\xi,h\zeta)$ – плотность,

$a_{ij}=a_{ij}(\xi,\zeta)$ - коэффициенты упругости, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, u, v - компоненты вектора перемещения.

Задачу решаем асимптотическим методом интегрирования. Решение системы (1.2), как системы, сингулярно возмущенной малым параметром ε, состоит из внутреннего решения и решения типа погранслоя [1-6]. Решение внутренней задачи представим в виде

$$\sigma_x=\varepsilon^{-2+s}\sigma_x^{(s)},\quad \sigma_{xy}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{xy}^{(s)},\quad \sigma_y=\varepsilon^{s}\sigma_y^{(s)},$$
$$U=\varepsilon^{-2+s}U^{(s)},\quad V=\varepsilon^{-3+s}V^{(s)},\qquad s=\overline{0,N}.\tag{1.3}$$

Подставляя (1.3) в уравнения (1.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, для компонентов напряжений и безразмерных перемещений получим следующую рекуррентную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial\sigma_x^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s)}}{\partial\zeta}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{xy}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_y^{(s)}}{\partial\zeta}-\rho^{(s)}g=0,$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_x^{(s)}+a_{12}\sigma_y^{(s-2)}+a_{16}\sigma_{xy}^{(s-1)},\tag{1.4}$$

$$\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{12}\sigma_x^{(s-2)}+a_{22}\sigma_y^{(s-4)}+a_{26}\sigma_{xy}^{(s-3)},$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\xi}=a_{16}\sigma_x^{(s-1)}+a_{26}\sigma_y^{(s-3)}+a_{66}\sigma_{xy}^{(s-2)},$$

где $\rho^{(0)}=h\rho(l\xi,h\zeta)$, $\rho^{(s)}=0,\ s\neq0$, $Q^{(s)}=0,\ s<0$ (Q - любое из напряжений и безразмерных перемещений).

Интегрируя систему (1.4) по ζ и удовлетворяя граничным условиям (1.1), получим

$$V^{(s)}=v^{(s)}(\xi)+v^{*(s)}(\xi,\zeta),\quad U^{(s)}=-\frac{dv^{(s)}}{d\xi}\zeta+u^{(s)}(\xi)+u^{*(s)}(\xi,\zeta),$$

$$\sigma_x^{(s)}=\frac{1}{a_{11}}\left(-\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\zeta+\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right)+\sigma_x^{*(s)}(\xi,\zeta),$$

$$\sigma_{xy}^{(s)}=\frac{1}{2}(q_x^{+(s)}-q_x^{-(s)})+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(J_1\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\left(J_4\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(J_0\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\left(J_5\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right)-\frac{1}{2}[\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=1)+\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=-1)]+\sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,\zeta),\tag{1.5}$$

$$\sigma_y^{(s)} = \frac{1}{2}(q_y^{+(s)} - q_y^{-(s)}) - \frac{1}{2}\zeta\frac{d}{d\xi}(q_x^{+(s)} - q_x^{-(s)}) - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(J_2\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[(J_6 - \zeta J_4)\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(J_3\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[(J_7 - \zeta J_5)\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}[\sigma_y^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_y^{*(s)}(\zeta = -1)] - \frac{1}{2}\zeta\frac{d}{d\xi}[\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta = -1)] + \sigma_y^{*(s)}(\xi, \zeta)$$

где

$$v^{*(s)} = \int_0^\zeta (a_{12}\sigma_x^{(s-2)} + a_{22}\sigma_y^{(s-4)} + a_{26}\sigma_{xy}^{(s-3)})d\zeta,$$

$$u^{*(s)} = \int_0^\zeta \left(a_{16}\sigma_x^{(s-1)} + a_{26}\sigma_y^{(s-3)} + a_{66}\sigma_{xy}^{(s-2)} - \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial\xi}\right)d\zeta,$$

$$\sigma_x^{*(s)} = \frac{1}{a_{11}}\left(-a_{12}\sigma_y^{(s-2)} - a_{16}\sigma_{xy}^{(s-1)} + \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial\xi}\right), \tag{1.6}$$

$$\sigma_{xy}^{*(s)} = -\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\int_0^\zeta \sigma_x^{*(s)}d\zeta\right), \quad \sigma_y^{*(s)} = -\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\int_0^\zeta \sigma_{xy}^{*(s)}d\zeta\right) + g\int_0^\zeta \rho^{(s)}d\zeta,$$

$$J_0 = \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{a_{11}}, \quad J_1 = \int_0^\zeta \frac{\zeta d\zeta}{a_{11}}, \quad J_2 = \int_0^\zeta d\zeta\int_0^\zeta \frac{\zeta d\zeta}{a_{11}}, \quad J_3 = \int_0^\zeta d\zeta\int_0^\zeta \frac{d\zeta}{a_{11}},$$

$$J_4 = \int_0^1 \frac{\zeta d\zeta}{a_{11}} - \int_{-1}^0 \frac{\zeta d\zeta}{a_{11}}, \quad J_5 = \int_0^1 \frac{d\zeta}{a_{11}} - \int_{-1}^0 \frac{d\zeta}{a_{11}},$$

$$J_6 = \int_0^1 d\zeta\int_0^\zeta \frac{\zeta d\zeta}{a_{11}} - \int_{-1}^0 d\zeta\int_0^\zeta \frac{\zeta d\zeta}{a_{11}}, \quad J_7 = \int_0^1 d\zeta\int_0^\zeta \frac{d\zeta}{a_{11}} - \int_{-1}^0 d\zeta\int_0^\zeta \frac{d\zeta}{a_{11}}, \tag{1.7}$$

$$q_x^{\pm(0)} = q_x^\pm, \quad q_y^{\pm(0)} = q_y^\pm, \quad q_x^{\pm(s)} = q_y^{\pm(s)} = 0, \ s \neq 0.$$

Как видно из формул (1.5), все величины выражаются через функции $u^{(s)}$ (ξ) и $v^{(s)}$ (ξ). Используя условия (1.1), для определения функций $u^{(s)}$ и $v^{(s)}$ получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d}{d\xi}\left(J_{11}\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right) - \frac{d}{d\xi}\left(J_{01}\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right) = F_x^{(s)},$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\bar{a}_1\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right) + \frac{d^2}{d\xi^2}\left(a_2\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right) = F_y^{(s)}, \tag{1.8}$$

$$F_x^{(s)} = q_x^{+(s)} + q_x^{-(s)} - [\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta = 1) - \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta = -1)],$$

$$F_y^{(s)} = q_y^{+(s)} + q_y^{-(s)} + \frac{d}{d\xi}(q_x^{+(s)} - q_x^{-(s)}) - [\sigma_y^{*(s)}(\zeta = 1) - \sigma_y^{*(s)}(\zeta = -1)] -$$

$$-\frac{d}{d\xi}[\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta = -1)],$$

где

$$J_{11} = \int_{-1}^1 \frac{\zeta d\zeta}{a_{11}}, \quad J_{01} = \int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{a_{11}},$$

$$a_1=\int_0^1\frac{\zeta d\zeta}{a_{11}}-\int_{-1}^0\frac{\zeta d\zeta}{a_{11}}-\int_{-1}^1 d\zeta\int_0^\zeta\frac{\zeta d\zeta}{a_{11}},\quad a_2=\int_{-1}^1 d\zeta\int_0^\zeta\frac{d\zeta}{a_{11}}-\int_0^1\frac{d\zeta}{a_{11}}+\int_{-1}^0\frac{d\zeta}{a_{11}}. \tag{1.9}$$

Определив из системы (1.8) функции $u^{(s)}$ и $v^{(s)}$, по формулам (1.3), (1.5)-(1.7) с предварительно заданной точностью найдем компоненты тензора напряжений и вектора перемещения.

Из полученного решения следует, что гипотезе плоских сечений Бернулли (классической теории балок) соответствует приближение $s=0$. Следовательно, для определения области применимости классической теории необходимо оценить величины, соответствующие приближению s=1. Заметим, что в случае ортотропной полосы гипотезе Бернулли соответствуют приближения $s=0,1$, и только начиная с приближения s=2, вносятся поправки к решению.

Из уравнений (1.8), (1.9) следует, что даже в случае принятия гипотезы плоских сечений Бернулли главная роль принадлежит коэффициенту a_{11}. Необходимо правильно определить этот коэффициент, так как в зависимости от его выбора возможны довольно большие погрешности. Аналитически невозможно точно определить a_{11}. Его можно определить обычным путем, например, из опыта растяжения-сжатия, так как $a_{11}=1/E_{11}$, где E_{11} - модуль Юнга для растяжения-сжатия вдоль оси Ox.

Исследуем систему (1.8) с целью установить, в каких случаях она разбивается на два отдельных уравнения.

1) Рассмотрим случай, когда $a_{ij}=\mathrm{const}$. В этом случае из (1.9) получится

$$J_{11}=0,\quad J_{01}=\frac{2}{a_{11}},\quad a_1=\frac{2}{3}\frac{1}{a_{11}},\quad a_2=0,$$

и (1.8) примет вид

$$-2\frac{1}{a_{11}}\frac{d^2u^{(s)}}{d\xi^2}=F_x^{(s)},\qquad \frac{2}{3}\frac{1}{a_{11}}\frac{d^4v^{(s)}}{d\xi^4}=F_y^{(s)}. \tag{1.10}$$

Таким образом, система (1.8) в этом случае разбивается на два уравнения, первое из которых - уравнение растяжения-сжатия стержней [7], а второе - уравнение изгиба балок [8].

2) Пусть a_{11} - четная функция относительно координаты ζ: $a_{11}(\xi,-\zeta)=a_{11}(\xi,\zeta)$. В этом случае

$$J_{11}=0,\qquad J_{01}=2\int_0^1\frac{d\zeta}{a_{11}},\quad a_1=2\int_0^1\frac{\zeta d\zeta}{a_{11}}-2\int_0^1 d\zeta\int_0^\zeta\frac{\zeta d\zeta}{a_{11}},\qquad a_2=0,$$

и система (1.8) примет вид

$$-\frac{d}{d\xi}\left(J_{01}\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right)=F_x^{(s)},\qquad \frac{d^2}{d\xi^2}\left(a_1\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right)=F_y^{(s)}. \tag{1.11}$$

3) Пусть $a_{11}(\xi,\zeta)=a_{11\xi}(\xi)a_{11\zeta}(\zeta)$. В этом случае

$$J_{11}=\frac{1}{a_{11\xi}}J_{11\zeta},\quad J_{01}=\frac{1}{a_{11\xi}}J_{01\zeta},\qquad a_1=\frac{1}{a_{11\xi}}a_{1\zeta},\quad a_2=\frac{1}{a_{11\xi}}a_{2\zeta},$$

где

$$J_{11\zeta}=\int_{-1}^1\frac{\zeta d\zeta}{a_{11\zeta}},\quad J_{01\zeta}=\int_{-1}^1\frac{d\zeta}{a_{11\zeta}},\quad a_{1\zeta}=\int_0^1\frac{\zeta d\zeta}{a_{11\zeta}}-\int_{-1}^0\frac{\zeta d\zeta}{a_{11\zeta}}-\int_{-1}^1 d\zeta\int_0^\zeta\frac{\zeta d\zeta}{a_{11\zeta}},$$

$$a_{2\zeta} = \int_{-1}^{1} d\zeta \int_{0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{a_{11\zeta}} - \int_{0}^{1} \frac{d\zeta}{a_{11\zeta}} + \int_{-1}^{0} \frac{d\zeta}{a_{11\zeta}}$$

Система (1.8) принимает вид

$$\begin{gathered} J_{11\zeta} \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{a_{11\xi}} \frac{d^2 v^{(s)}}{d\xi^2}\right) - J_{01\zeta} \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{a_{11\xi}} \frac{du^{(s)}}{d\xi}\right) = F_x^{(s)}, \\ a_{1\zeta} \frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{a_{11\xi}} \frac{d^2 v^{(s)}}{d\xi^2}\right) + a_{2\zeta} \frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{a_{11\xi}} \frac{du^{(s)}}{d\xi}\right) = F_y^{(s)}. \end{gathered} \tag{1.12}$$

4) Пусть $a_{11} = a_{11}(\xi)$. Тогда имеем

$$J_{11} = 0, \quad J_{01} = \frac{2}{a_{11}(\xi)}, \quad a_1 = \frac{2}{3}\frac{1}{a_{11}(\xi)}, \quad a_2 = 0$$

и (1.8) принимает вид

$$-2\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{a_{11}(\xi)} \frac{du^{(s)}}{d\xi}\right) = F_x^{(s)}, \qquad \frac{2}{3}\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{a_{11}(\xi)} \frac{d^2 v^{(s)}}{d\xi^2}\right) = F_y^{(s)}. \tag{1.13}$$

Таким образом, если коэффициент a_{11} не зависит от координаты ζ или относительно нее является четной функцией, то система (1.8) разбивается на два отдельных уравнения - растяжения-сжатия стержней и изгиба балок. Для приближения $s = 0$, т.е. в пределах гипотезы плоских сечений, эти уравнения независимы. Начиная с $s = 1$, уравнения системы (1.8) следует решать совместно, так как $F_x^{(1)}$ содержит слагаемые, обусловленные изгибом балок, а $F_y^{(1)}$ – члены, обусловленные растяжением-сжатием, которые являются известными величинами, определенными из предыдущего приближения.

2. В качестве приложения полученных общих результатов исследуем напряженно-деформированное состояние силиконовой балки при различных видах ее нагружения. Предположим, что главные направления упругой симметрии ортотропного силикона не совпадают с координатными осями и составляют с ними угол φ. Как известно, в этом случае такой материал проявляет все признаки анизотропности, т.е. в основных уравнениях фигурируют все коэффициенты упругости, характеризующие общую анизотропию.

Если через a_{ij}^0 обозначить упругие постоянные силикона, соответствующие случаю совпадения главных направлений упругой симметрии с координатными осями [9]:

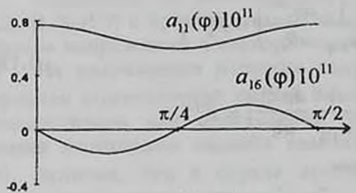
$$[a_{ij}^0] = \begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & a_{12}^0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12}^0 & a_{11}^0 & a_{12}^0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12}^0 & a_{12}^0 & a_{11}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44}^0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} a_{11}^0 &= 0.76857\cdot 10^{-11}\ \text{Па}^{-1} \\ a_{12}^0 &= -0.21375\cdot 10^{-11}\ \text{Па}^{-1} \\ a_{44}^0 &= 1.25786\cdot 10^{-11}\ \text{Па}^{-1} \end{aligned} \tag{2.1}$$

то в общем случае зависимости коэффициентов упругости силикона от угла φ будут иметь следующий вид [10,11]:

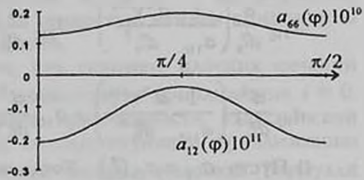
$$\begin{gathered} a_{11}(\varphi) = a_{22}(\varphi) = a_{11}^0 + \frac{1}{4}(1-\cos 4\varphi)b_1, \quad a_{12}(\varphi) = a_{12}^0 - \frac{1}{4}(1-\cos 4\varphi)b_1, \\ a_{16}(\varphi) = -a_{26}(\varphi) = \frac{1}{2}b_1 \sin 4\varphi, \quad a_{66}(\varphi) = (1+\cos 4\varphi)b_1 + 2b_2, \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$b_1 = -a^0_{11} + a^0_{12} + \frac{1}{2}a^0_{44}, \qquad b_2 = a^0_{11} - a^0_{12},$$

графики которых приведены на фиг.2-3.



Фиг. 2



Фиг. 3

При $\varphi = \mathrm{const}$ в системе (1.8) отделяются уравнение растяжения-сжатия и уравнение изгиба:

$$-2\frac{1}{a_{11}(\varphi)}\frac{d^2u^{(s)}}{d\xi^2} = F_x^{(s)}, \qquad \frac{2}{3}\frac{1}{a_{11}(\varphi)}\frac{d^4v^{(s)}}{d\xi^4} = F_y^{(s)} \tag{2.3}$$

интегрируя которые, получим

$$u^{(s)}(\xi) = -\frac{1}{2}a_{11}(\varphi)\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi F_x^{(s)}d\xi + C_5^{(s)}\xi + C_6^{(s)},$$

$$v^{(s)}(\xi) = \frac{3}{2}a_{11}(\varphi)\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi F_y^{(s)}d\xi + C_1^{(s)}\xi^3 + C_2^{(s)}\xi^2 + C_3^{(s)}\xi + C_4^{(s)}, \tag{2.4}$$

и, согласно формулам (1.5), для компонентов напряжений и перемещений приближения s получим следующие выражения:

$$V^{(s)} = \frac{3}{2}a_{11}(\varphi)\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi F_y^{(s)}d\xi + C_1^{(s)}\xi^3 + C_2^{(s)}\xi^2 + C_3^{(s)}\xi + C_4^{(s)} + v^{*(s)}$$

$$U^{(s)} = -\frac{1}{2}a_{11}(\varphi)\left[3\zeta\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi F_y^{(s)}d\xi + \int_0^\xi d\xi\int_0^\xi F_x^{(s)}d\xi\right] -$$

$$-3C_1^{(s)}\xi^2\zeta - 2C_2^{(s)}\xi\zeta - C_3^{(s)}\zeta + C_5^{(s)}\xi + C_6^{(s)} + u^{*(s)}$$

$$\sigma_x^{(s)} = -\frac{1}{2}\left[3\zeta\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi F_y^{(s)}d\xi + \int_0^\xi F_x^{(s)}d\xi\right] +$$

$$+\frac{1}{a_{11}(\varphi)}[C_5^{(s)} - 2\zeta(3C_1^{(s)}\xi + C_2^{(s)})] + \sigma_x^{*(s)}$$

$$\sigma_{xy}^{(s)} = \frac{1}{2}(q_x^{+(s)} - q_x^{-(s)}) + \frac{3}{4}(\zeta^2 - 1)\int_0^\xi F_y^{(s)}d\xi + \frac{1}{2}\zeta F_x^{(s)} +$$

$$+\frac{1}{a_{11}(\varphi)}3(\zeta^2 - 1)C_1^{(s)} - \frac{1}{2}[\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta = -1)] + \sigma_{xy}^{*(s)} \tag{2.5}$$

$$\sigma_y^{(s)} = \frac{1}{2}(q_y^{+(s)} - q_y^{-(s)}) - \frac{1}{2}\zeta\frac{d}{d\xi}(q_x^{+(s)} - q_x^{-(s)}) - \frac{1}{4}\zeta(\zeta^2 - 3)F_y^{(s)} -$$

$$-\frac{1}{4}(\zeta^2 - 1)\frac{dF_x^{(s)}}{d\xi} - \frac{1}{2}[\sigma_y^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_y^{*(s)}(\zeta = -1)] +$$

$$+\frac{1}{2}\zeta\frac{d}{d\xi}[\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=1)+\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=-1)]+\sigma_{y}^{*(s)}$$

где

$$v^{*(s)}=\int_0^{\zeta}[a_{12}(\varphi)\sigma_x^{(s-2)}+a_{11}(\varphi)\sigma_y^{(s-4)}-a_{16}(\varphi)\sigma_{xy}^{(s-3)}]d\zeta$$

$$u^{*(s)}=\int_0^{\zeta}\left[a_{16}(\varphi)(\sigma_x^{(s-1)}-\sigma_y^{(s-3)})+a_{66}(\varphi)\sigma_{xy}^{(s-2)}-\frac{\partial v^{*(s)}}{\partial\xi}\right]d\zeta$$

$$\sigma_x^{*(s)}=\frac{1}{a_{11}(\varphi)}\left[-a_{12}(\varphi)\sigma_y^{(s-2)}-a_{16}(\varphi)\sigma_{xy}^{(s-1)}+\frac{\partial u^{*(s)}}{\partial\xi}\right] \tag{2.6}$$

$$\sigma_{xy}^{*(s)}=-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\int_0^{\zeta}\sigma_x^{*(s)}d\zeta\right),\qquad \sigma_y^{*(s)}=-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\int_0^{\zeta}\sigma_{xy}^{*(s)}d\zeta\right)$$

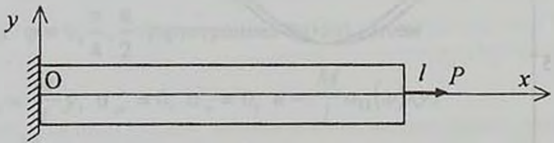
Величины $F_x^{(s)}$ и $F_y^{(s)}$ определяются по формулам (1.8).

В полученных выражениях $C_i^{(s)}$ - произвольные постоянные, которые определяются из условий в сечениях $\xi=0$ и $\xi=1$. Имея только решение внутренней задачи, этим условиям можно удовлетворить лишь в интегральной форме. Для получения более точных результатов вблизи торцов следует построить также решения погранслоя. Пограничный слой можно исследовать описанным в работах [1,3,5] путем.

В общем случае гипотезе Бернулли соответствует приближение s=0. При $\varphi=0,\pi/4,\pi/2$ имеем случай ортотропного материала $(a_{16}=a_{26}=0)$ и гипотезе Бернулли соответствуют приближения $s=0,1$, т.е. гипотеза Бернулли в этом случае имеет большую точность.

3. Рассмотрим некоторые частные задачи, преследуя цель выявить влияние изменения угла поворота главных направлений упругой симметрии силикона относительно координатных осей на напряженно-деформированное состояние балки.

а) Пусть силиконовая балка заделана одним концом и растягивается силой P (фиг.4).



Фиг. 4

Пользуясь выражениями (2.5), (2.6), найдем коэффициенты представления (1.3). Замечая, что приближения $s=0,1,2$ уже дают точное решение, для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения получим

$$\sigma_x=\frac{P}{2h},\ \sigma_{xy}=0,\ \sigma_{xy}=0$$

$$u=\frac{P}{2h}a_{11}(\varphi)x+\frac{P}{4h}a_{16}(\varphi)y,\qquad v=\frac{P}{4h}a_{16}(\varphi)x+\frac{P}{2h}a_{12}(\varphi)y \tag{3.1}$$

В случае, когда $\varphi=0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}$, получается

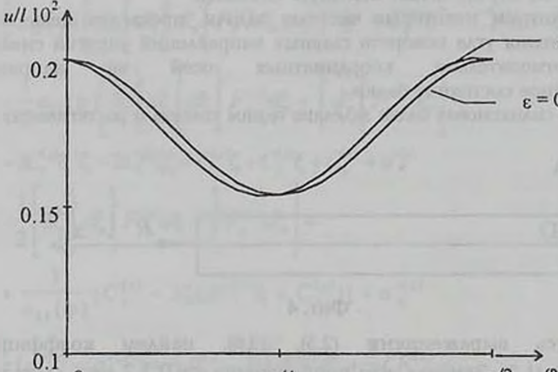
$$\sigma_x = \frac{P}{2h},\ \sigma_{xy} = 0,\ \sigma_y = 0,\ u = \frac{P}{2h} a_{11}(\varphi) x,\ \ v = \frac{P}{2h} a_{12}(\varphi) y \qquad (3.2)$$

При применении гипотезы Бернулли имеем

$$\sigma_x = \frac{P}{2h},\ \sigma_{xy} = 0,\ \sigma_y = 0,\ u = \frac{P}{2h} a_{11}(\varphi) x,\ \ v = 0, \qquad (3.3)$$

что соответствует слагаемым приближения s=0 в (3.1) и приближений s=0,1 в (3.2).

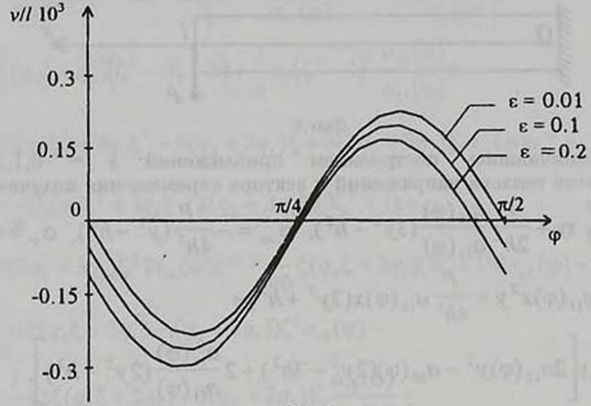
Влияние изменения угла наклона главных направлений упругой симметрии силикона относительно координатных осей на напряженно-деформированное состояние балки проследим по изменению горизонтального и вертикального перемещений некоторых точек сечения $x = l$ в зависимости от угла φ (на основании результатов (3.1)). В этой задаче горизонтальные перемещения точки $x = l, y = 0$, вычисленные по гипотезе Бернулли и без нее, совпадают. В других точках того же сечения, согласно (3.1), они различаются вследствие влияния коэффициента a_{16}, т.е. в отличие от решения по гипотезе Бернулли, сечение не остается перпендикулярным оси. Вычисления показывают, что независимо от отношения h/l, горизонтальное перемещение точки $x = l, y = 0$ балки принимает наибольшее значение при $\varphi = 0, \pi/2$, а наименьшее - при $\varphi = \pi/4$, и разница между этими значениями составляет примерно 30%. Для других точек сечения $x = l$ некоторое влияние на эти значения оказывает и изменение значения $\varepsilon = h/l$. Например, разница между максимальным и минимальным значениями горизонтального перемещения точки $x = l,\ y = h$ балки при изменении значения ε от 0.01 до 0.2 увеличивается на 1% (фиг.5).



Фиг. 5

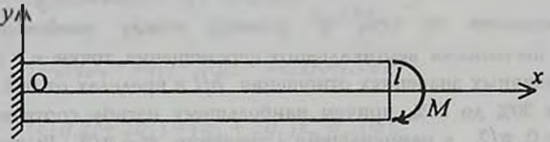
На фиг.5 представлены безразмерные горизонтальные перемещения $U = u/l$ точки (l,h), вычисленные по формуле (3.1) для случаев ε=0.01 и ε =0.2, где для удобства вычислений взято $Pa^0_{11}/(2h) = 0.2 \cdot 10^{-2}$.

Что касается вертикального перемещения, то, в то время, как при применении гипотезы Бернулли оно отсутствует, здесь в зависимости от угла φ оно может принимать отрицательные и положительные значения (фиг.6), что обусловлено соотношением коэффициентов a_{12} и a_{16}.



Фиг.6

б) Пусть балка одним концом заделана, а на другом конце загружена изгибающим моментом M (фиг.7).



Фиг. 7

Для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения получается

$$\sigma_x = \frac{M}{I}, \; \sigma_{xy} = 0, \; \sigma_y = 0, \; u = \frac{M}{I}\left[a_{11}(\varphi)xy + \frac{a_{16}(\varphi)}{2}y^2\right] \tag{3.4}$$

$$v = \frac{M}{2I}[a_{12}(\varphi)y^2 - a_{11}(\varphi)x^2] \qquad \left(I = \frac{2}{3}h^3\right)$$

При $\varphi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ (ортотропная балка) имеем

$$\sigma_x = \frac{M}{I}y, \; \sigma_{xy} = 0, \; \sigma_y = 0, \; u = \frac{M}{I}a_{11}(\varphi)xy,$$

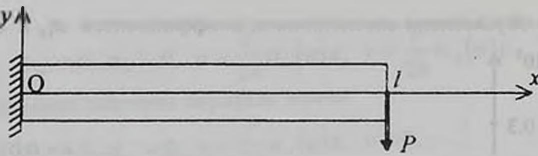
$$v = \frac{M}{2I}[a_{12}(\varphi)y^2 - a_{11}(\varphi)x^2] \tag{3.5}$$

По гипотезе Бернулли получается

$$\sigma_x = \frac{M}{I}y, \; \sigma_{xy} = 0, \; \sigma_y = 0, \; u = \frac{M}{I}a_{11}(\varphi)xy, \; v = -\frac{M}{2I}a_{11}(\varphi)x^2. \tag{3.6}$$

Наблюдая за точкой $x = l$, $y = 0$ по (3.4), замечаем, что горизонтальное перемещение отсутствует, а закон изменения вертикального перемещения при $Mla_{11}^0/(2I) = 0.002$ совпадает с законом изменения горизонтального перемещения со знаком "минус" той же точки в предыдущей задаче. Наблюдая за другими точками сечения $x = l$ балки, приходим к выводу, что сечение не остается плоским.

в) Пусть консольная балка изгибается под действием силы, изображенной на фиг.8.



Фиг.8

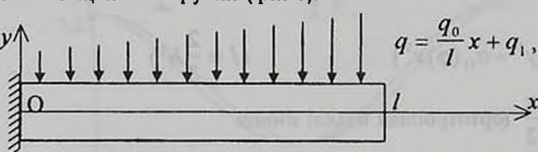
Ограничившись построением приближений $s = 0,1,2$, для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения получим

$$\sigma_x = \frac{3P}{2h^3}xy + \frac{P}{2h^3}\frac{a_{16}(\varphi)}{a_{11}(\varphi)}(3y^2 - h^2),\ \ \sigma_{xy} = -\frac{3P}{4h^3}(y^2 - h^2),\ \ \sigma_y = 0,$$

$$u = \frac{3P}{4h^3}a_{11}(\varphi)x^2y + \frac{P}{4h^3}a_{16}(\varphi)x(3y^2 + h^2) +$$
$$+\frac{P}{8h^3}y\left[2a_{12}(\varphi)y^2 - a_{66}(\varphi)(2y^2 - 3h^2) + 2\frac{a_{16}^2(\varphi)}{a_{11}(\varphi)}(2y^2 - h^2)\right], \tag{3.7}$$
$$v = -\frac{P}{4h^3}a_{11}(\varphi)x^3 + \frac{P}{8h^3}x\left[6a_{12}(\varphi)y^2 + \left(3a_{66}(\varphi) - 2\frac{a_{16}^2(\varphi)}{a_{11}(\varphi)}\right)h^2\right].$$

В зависимости от угла φ разница между наибольшим и наименьшим значениями вертикального перемещения точки $x = l$, $y = 0$ балки при различных значениях отношения h/l в пределах от 0.01 до 0.2 колеблется от 30% до 45%, причем наибольшему изгибу соответствуют значения $\varphi = 0, \pi/2$, а наименьшему - значение $\varphi = \pi/4$. Вычисления также показывают, что при $\varepsilon < 0.2$ различие значений вертикального перемещения рассматриваемой точки, вычисленных по гипотезе Бернулли и без нее, не превышает 20%.

г) Пусть консольная балка изгибается под действием линейно изменяющейся нагрузки (фиг.9).



$$q = \frac{q_0}{l}x + q_1,\quad q_0, q_1 = \text{const}$$

Фиг. 9

Ограничившись построением приближений s=0,1,2, для напряжений и перемещений будем иметь

$$\sigma_x = \frac{1}{4}\left[q_0\xi^3 + 3q_1\xi^2 - 3(q_0 + 2q_1)\xi + 2q_0 + 3q_1\right]\zeta\varepsilon^{-2} + \frac{1}{4}\left(q_0\xi^2 + 2q_1\xi - q_0 - 2q_1\right)\times$$
$$\times(3\zeta^2 - 1)\frac{a_{16}(\varphi)}{a_{11}(\varphi)}\varepsilon^{-1} - \frac{1}{20}(q_0\xi + q_1)\zeta(5\zeta^2 - 3)\left[\frac{2a_{12}(\varphi) + a_{66}(\varphi)}{a_{11}(\varphi)} - 4\frac{a_{16}^2(\varphi)}{a_{11}^2(\varphi)}\right],$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{3}{8}\left(q_0\xi^2 + 2q_1\xi - q_0 - 2q_1\right)\left(\zeta^2 - 1\right)\varepsilon^{-1} -$$
$$-\frac{1}{2}(q_0\xi + q_1)\zeta(\zeta^2 - 1)\frac{a_{16}(\varphi)}{a_{11}(\varphi)} +$$

$$+\frac{1}{80}q_0\left(5\zeta^4-6\zeta^2+1\right)\left[\frac{2a_{12}(\varphi)+a_{66}(\varphi)}{a_{11}(\varphi)}-4\frac{a_{16}^2(\varphi)}{a_{11}^2(\varphi)}\right]\varepsilon$$

$$\sigma_y=\frac{1}{4}\left(q_0\xi+q_1\right)\left(\zeta^3-3\zeta-2\right)+\frac{1}{8}q_0\left(\zeta^2-1\right)^2\frac{a_{16}(\varphi)}{a_{11}(\varphi)}\varepsilon$$

$$u=\frac{l}{16}\xi[q_0\xi^3+4q_1\xi^2-6(q_0+2q_1)\xi+4(2q_0+3q_1)]\zeta a_{11}(\varphi)\varepsilon^{-2}+$$

$$+\frac{l}{24}[\xi(q_0\xi^2+3q_1\xi-3(q_0+2q_1))(3\zeta^2+1)+$$

$$+3(2q_0+3q_1)\zeta^2]a_{16}(\varphi)\varepsilon^{-1}-\frac{l}{40}\xi(q_0\xi+2q_1)(9\zeta+10)a_{12}(\varphi)-$$

$$-\frac{l}{8}(\xi(q_0\xi+2q_1)-(q_0+2q_1))\zeta^3a_{12}(\varphi)-$$

$$-\frac{l}{40}[2\xi(q_0\xi+2q_1)-5(q_0+2q_1)]\zeta\frac{a_{16}^2(\varphi)}{a_{11}(\varphi)}+$$

$$+\frac{l}{4}(\xi(q_0\xi+2q_1)-(q_0+2q_1))\zeta^3\frac{a_{16}^2(\varphi)}{a_{11}(\varphi)}+$$

$$+\frac{3l}{80}[2\xi(q_0\xi+2q_1)-5(q_0+2q_1)]\zeta a_{66}(\varphi)-$$

$$-\frac{l}{8}(\xi(q_0\xi+2q_1)-(q_0+2q_1))\zeta^3a_{66}(\varphi), \tag{3.8}$$

$$v=-\frac{l}{80}\xi^2\left[q_0\xi^3+5q_1\xi^2-10\left(q_0+2q_1\right)\xi+10\left(2q_0+3q_1\right)\right]a_{11}(\varphi)\varepsilon^{-3}+$$

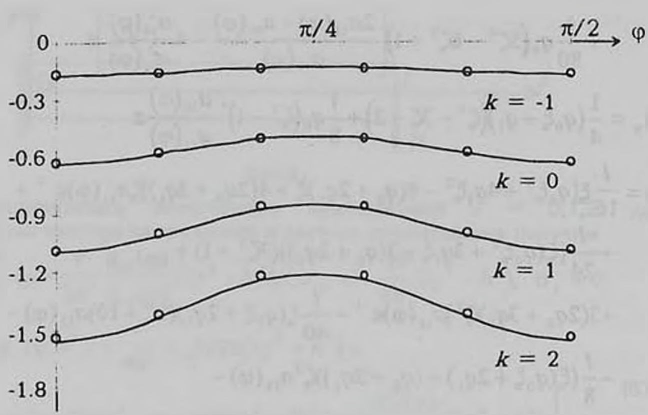
$$+\left\{\left[3\xi^2\left(q_0\xi+3q_1\right)+5\left[q_0\xi^3+3q_1\xi^2-3\left(q_0+2q_1\right)\xi+2q_0+3q_1\right]\right]\frac{l}{40}\zeta^2a_{12}(\varphi)-\right.$$

$$\left.-\frac{l}{240}\xi\left[8\xi\left(q_0\xi+3q_1\right)-15\left(q_0+2q_1\right)\right]\left[2\frac{a_{16}^2(\varphi)}{a_{11}(\varphi)}-3a_{66}(\varphi)\right]\right\}\varepsilon^{-1}$$

Зависимость от угла φ вертикального перемещения ($v/l\cdot10^2$) точки $x=l$, $y=0$ балки изображена на фиг.10, где взято $q_1a_{11}^0=0.33\cdot10^{-4}$, $k=q_0/q_1$, $\varepsilon=0.1$.

В этой задаче при $\varepsilon<0.2$ различие значений вертикального перемещения точки $(l,0)$, вычисленных по гипотезе Бернулли и без нее, не превышает 8%.

Наблюдение за различными точками одного и того же сечения приводит к выводу, что в первой из рассмотренных задач сечение, оставаясь плоским, поворачивается (т.е. не остается перпендикулярным оси), а в остальных - оно не остается плоским. Вследствие этого использование гипотезы плоских сечений в зависимости от области применения может привести к серьезным качественным ошибкам даже в случае небольшого количественного различия решений, полученных по гипотезе Бернулли и без нее.



Фиг. 10. Через o обозначены соответствующие значения, вычисленные по гипотезе Бернулли

Как показывают вычисления, при допущении применения гипотезы Бернулли очень важно правильно определить коэффициент a_{11}. В зависимости от точности его определения погрешность может достигнуть 30%.

4. Из выполненных вычислений можно сделать следующие заключения:

а) для получения точных результатов очень важен правильный выбор коэффициента $a_{11}(\varphi)$, так как в зависимости от угла φ различие значений искомых величин может достигнуть 30%;

б) если силиконовая балка нагружена только по торцам, то о ее напряженно-деформированном состоянии достаточно близкое к реальному представление можно получить из решения аналогичной задачи для изотропной балки с модулем Юнга $E_* = \dfrac{1}{a_{11}(\varphi)}$;

в) удовлетворение лишь решением, соответствующим гипотезе Бернулли, влечет к качественным ошибкам, которые могут играть определяющую роль в измерительных и других точных приборах. В подобных случаях необходимо воспользоваться полученными асимптотическими решениями, в частности, решениями типа (3.1), (3.4), (3.7), (3.8), которые учитывают качественные факторы, обусловленные реальными свойствами материала.

Авторы весьма признательны профессору А.Тер-Кюрегяну (США, ун-т Беркли), привлекшего их внимание к этой проблеме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. 272с.
2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. 464с.
3. Агаловян Л.А. О характере взаимодействия погранслоя с внутренним напряженно-деформированным состоянием полосы. – Изв. АН Армении, Механика, 1977, т.30, №5, с.48-62.
4. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. – ПММ, 1962, т.26, №4, с.668-686.
5. Хачатрян Ш.М. К определению напряженно-деформированного состояния анизотропной полосы. – Изв. АН Армении, Механика, 1976, т.29, №6, с.19-32.
6. Найфэ А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. 535с.
7. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. – М.: Наука, 1975, т. I. 832 с.
8. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1965, т. I. 363с.
9. Pampuch R. Constitution and Properties of Ceramic Materials. – Materials Science Monographs, 58, Elsevier Science Pub. Co., Inc., New York, 1991.
10. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. – М.: Физматгиз, 1961. 384с.
11. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. 415с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
14.11.1996

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 539.1

АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕЩИНЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ В АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н., Сафарян Ю.С.

Ա.Գ.Բագդոև, Ա.Ն. Մարտիրոսյան, Յու. Ս. Սաֆարյան

Համասեռ անիզոտրոպ առաձգական միջավայրում կամայական արագությամբ շարժվող կիսաանվերջ ճաքի խնդիրը

Դիտարկվում է անիզոտրոպ առաձգական միջավայրում կամայական արագությամբ շարժվող կիսաանվերջ ճաքի վերաբերյալ հակահարթ խնդիրը: Լուծումը փնտրվում է փաթեթների մեթոդով, առաջարկված Լ.Ի.Սլեպյանի աշխատանքներում, իզոտրոպ միջավայրի համար հարթ խնդրում:

Որոշվում է լարման ինտենսիվության գործակիցը:

A.G. Bagdoev, A.N. Martirosian, Ju.S. Safarian

Antiplane problem for crack moving with arbitrary velocity in anizotrop elastic homogeneous media

Рассмотрена задача распространения полубесконечной трещины в упругой анизотропной среде в антиплоской постановке, движущейся с произвольной скоростью. Решение находится методом сверток, предложенным в работах Л.И.Слепяна в случае изотропной среды в плоской задаче. Определен коэффициент интенсивности напряжений.

Рассматривается задача распространения с произвольной скоростью трещины, занимающей отрицательную полуось x в антиплоском случае. Ось Ox направлена вдоль трещины, ось Oy находится в плоскости движения, перпендикулярной к оси Ox, ось Oz нормальна к плоскости движения.

Указанная задача рассмотрена в работе [1], где применен метод разложения по малому параметру, характеризующему переменность скорости трещины и, кроме того, рассмотрено эвристическим способом решение для произвольной скорости трещины. В настоящей статье дается строгое решение задачи методом [2].

Для сдвиговых напряжений получится

$$\tau_{yz}=a_{45}\frac{\partial w}{\partial x}+a_{55}\frac{\partial w}{\partial y},\quad \tau_{xz}=a_{44}\frac{\partial w}{\partial x}+a_{45}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{1}$$

Уравнение движения имеет вид [1]

$$\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xz}+\frac{\partial}{\partial y}\tau_{yz}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2}$$

где w – перемещение вдоль оси Oz, ρ – плотность среды.

Подставляя (1) в (2), можно получить

$$a_1^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2a_{12}^2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+a_2^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$a_1^2=\frac{a_{44}}{\rho},\quad a_{12}^2=\frac{a_{45}}{\rho},\quad a_2^2=\frac{a_{55}}{\rho} \tag{3}$$

Граничные условия имеют вид $(y=0)$

$$\tau_{yz}=\tau_{yz}^{-}\qquad \text{при}\quad x<l(t)$$

$$w = w_- = 0 \text{ при } x > l(t) \tag{4}$$

где t – время, $l(t)$ – некоторая функция – положение точки раздела граничных условий.

Запишем преобразования Лапласа от w в виде

$$\overline{w} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\overline{w}}(\overline{\alpha})\exp(-i\overline{\alpha}x - i\overline{\beta}y)d\overline{\alpha}$$

Из уравнения (3) получится

$$\overline{\beta}a_2^2 = -a_{12}^2\overline{\alpha} + i\sqrt{a^2\overline{\alpha}^2 + a_2^2s^2}\,,\quad a^2 = a_2^2a_1^2 - a_{12}^4 \tag{5}$$

Рассмотрим задачу определения сдвигового напряжения на продолжении трещины. Следуя [2], нужно искать решение задачи методом сверток. Значения функций $\tau_{yz} = \tau_{yz}^+$ при $x > l(t)$ и $w = w_-$ при $x < l(t)$ неизвестны. Пусть изображения функций $\tau_{yz}(x,t)$, $w(x,t)$ связаны соотношением

$$\overline{\overline{w}} = i\left[a_{12}^2\overline{\alpha} + a_2^2\overline{\beta}\right]^{-1}\overline{\overline{\tau}}_{yz} = \overline{\overline{S}}(\overline{\alpha},s)\overline{\overline{\tau}}_{yz} \tag{6}$$

Здесь $s, \overline{\alpha}$ – параметры преобразований Лапласа по t и Фурье по x, оригинал $S(t,x)$, соответствующий S, равен $w(t,x)$ при $\tau_{yz}(x,t) = \delta(x)\delta(t)$ (δ – функция Дирака).

Уравнение (6) непосредственно решить нельзя, так как $\overline{\overline{w}} = \overline{\overline{w}}_+ + \overline{\overline{w}}_-$, $\overline{\overline{\tau}}_{yz} = \overline{\overline{\tau}}_{yz}^+ + \overline{\overline{\tau}}_{yz}^-$ в выражениях для $\overline{\overline{w}}$ и $\overline{\overline{\tau}}_{yz}$, а слагаемые $\overline{\overline{w}}_-$ и τ_{yz}^+ неизвестны.

Представим $\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{S}}_+\overline{\overline{S}}_-$ и перепишем (6) в виде

$$\overline{\overline{P}}_-\overline{\overline{w}}_- + \overline{\overline{P}}_-\overline{\overline{w}}_+ = \overline{\overline{S}}_+\overline{\overline{\tau}}_{yz}^+ + \overline{\overline{S}}_+\overline{\overline{\tau}}_{yz}^-\,,\quad \overline{\overline{P}}_\pm = 1/\overline{\overline{S}}_\pm \tag{7}$$

Предположим, что функция $\overline{\overline{S}}$ такова, что указанная выше факторизация приводит к функциям $\overline{\overline{S}}_\pm, \overline{\overline{P}}_\pm$, оригиналы которых удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &P_+(t,x) = S_+(t,x) = 0 \quad \text{при} \quad x > v_+t \\ &P_-(t,x) = S_-(t,x) = 0 \quad \text{при} \quad x < v_-t \\ &v_- < \dot{l}(t) < v_+ \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда неизвестные функции $w_-(t,x)$, $\tau_{yz}^+(t,x)$ определяются так:

$$\begin{aligned} w_- &= S_-{**}\left[\left(S_+{**}\tau_{yz}^- - P_-{**}w_+\right)H(l-x+0)\right] + S_-{**}C \\ \tau_{yz}^+ &= -P_+{**}\left[\left(S_+{**}\tau_{yz}^- - P_-{**}w_-\right)H(x-l+0)\right] + P_+{**}C \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь символ (**) означает свертку по переменным t и x, H– функция Хевисайда, C – некоторая обобщенная функция, носитель которой сосредоточен на линии $x = l(t)$.

$$C = \sum_{m=0}^{n} f_m(x)\delta^{(m)}[x - l(t)]$$

Слагаемые $S_-{**}C$, $P_+{**}C$ в (9) – решения однородной задачи, т. е. решения (7) при $w_+ = \tau_{yz}^- = 0$. Произвол, вносимый указанными слагаемыми, как обычно, в смешанных задачах устраняется привлечением дополнительных условий, например, условия ограниченности энергии.

Формулы (9) получены следующим образом. Произведению изображений $\overline{\overline{P}}_-\overline{\overline{w}}_-$ соответствует свертка оригиналов

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-0}^{t+0} P_-(\tau,\xi)w_-(t-\tau,x-\xi)H(\nu_-\tau-\xi+0)H[l(t-\tau)-x+\xi+0]d\tau d\xi \quad (10)$$

где множители (функции Хевисайда) введены, чтобы подчеркнуть наличие предельных значений для носителей P_- (8) и w_- ($w_-(t,x)=0$ при $x>l(t)$). Свертка (10) отлична от нуля для тех областей на плоскости x, t, где аргументы функций Хевисайда положительны: $\xi \le \nu\ \tau$, $\xi \ge x-l(t-\tau)$. Отсюда для $x>l(t)$ находим

$$\nu_-\tau > l(t)-l(t-\tau) \ge \dot{l}_{\min}\tau$$

Вместе с тем, по условию (8) $\dot{l} > \nu_-$. Противоречие свидетельствует о том, что $P_-{**}w_-=0$ при $x>l(t)$. Аналогично доказывается, что $S_+{**}\tau_{yz}^+=0$ при $x<l(t)$. Отсюда следует, что (7) удовлетворяются соотношениями

$$P_-{**}w_- = \left(S_+{**}\tau_{yz}^- - P_-{**}w_+\right)H(l-x+0)$$

$$S_+{**}\tau_{yz}^+ = -\left(S_+{**}\tau_{yz}^- - P_-{**}w_+\right)H(x-l+0)$$

Вновь применив преобразования Лапласа и Фурье, поделив после этого первое равенство на P_-, второе – на S_+ и перейдя затем к оригиналам, получаем первые слагаемые в равенствах (9). Прибавляя решения однородной задачи, приходим к указанному общему решению (9). При этом условия: $w_-=0$ при $x>l$, $\tau_{yz}^+=0$ при $x<l$ одновременно выполняются лишь в том случае, когда носитель C сосредоточен на линии $x=l(t)$.

Для рассматриваемой задачи с учетом (5) получится

$$\overline{\overline{S}} = \left(a_2^2 s^2 + a^2\overline{\alpha}^2\right)^{-1/2} \equiv \frac{1}{a\overline{\beta}}, \quad s=-i\omega$$

где функция $\overline{\beta}$ аналитична в комплексной плоскости $\overline{\alpha}$ с двумя полубесконечными разрезами вдоль действительной оси $(-\infty,-a_0si)$ и (a_0si,∞), подразумевается ветвь этой функции, действительная и положительная при $-a_0si<\overline{\alpha}<a_0si$, т. е. положительно мнимая на верхнем берегу левого разреза и на нижнем берегу правого разреза.

Функции $\overline{\overline{S}}$ и $\overline{\beta}$ представим в виде

$$\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{S}}_+\overline{\overline{S}}_-,\quad \overline{\beta}=\overline{\beta}_+\overline{\beta}_-,\quad \overline{\overline{S}}_+ = \frac{1}{\overline{\beta}_+},\quad \overline{\overline{S}}_- = \frac{1}{a\overline{\beta}_-}$$

$$\overline{\beta}_\pm = \sqrt{a_0 s \mp i\overline{\alpha}},\quad \nu_\pm = \pm\frac{1}{a_0},\quad a_0=\frac{a_2}{a} \quad (11)$$

Можно получить для оригиналов функций $\overline{\overline{S}}_+$, $\overline{\overline{P}}_+$

$$S_+(t,x) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty}\exp(st-i\overline{\alpha}x)\frac{d\overline{\alpha}}{\overline{\beta}_+}$$

$$P_+(t,x) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\beta}_+ \exp(st - i\overline{\alpha}x)d\overline{\alpha} \tag{12}$$

Здесь, как обычно, принято $\sigma \geq 0$, при этом для малых σ контур интегрирования по $\overline{\alpha}$ проходит вблизи оси $\operatorname{Im}\overline{\alpha} = 0$ с вышеуказанным обходом особых точек, при этом $\alpha = \frac{i\overline{\alpha}}{s}$ вещественно. Учитывая, что

$$s^\lambda = \frac{1}{\Gamma(-\lambda)}\int_0^\infty \frac{\exp(-st_1)dt_1}{t_1^{\lambda+1}}, \quad \lambda = \frac{1}{2}, \quad \lambda = \frac{3}{2}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, представляя обобщенную функцию s, можно из (12) получить

$$S_+(t,x) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_0^\infty \frac{\exp(st - st_1 - s\alpha x)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{a_0 - \alpha}\; t_1^{3/2}} dt_1$$

$$P_+(t,x) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_0^\infty \frac{\sqrt{a_0 - \alpha}\exp(st - st_1 - s\alpha x)}{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) t_1^{5/2}} dt_1$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

В формулах (12) интегралы по s дают δ-функцию от аргумента $t - t_1 - \alpha x$. После вычисления интегралов по t_1 от δ-функции получим

$$S_+(t,x) = \frac{iH(x)}{2\pi\Gamma(-1/2)}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{\sqrt{a_0 - \alpha}(t - \alpha x)^{3/2}}$$

$$P_+(t,x) = \frac{iH(x)}{2\pi\Gamma(-3/2)}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{a_0 - \alpha}}{(t - \alpha x)^{5/2}} d\alpha \tag{13}$$

Заменяя контур по α на контуры по верхним и нижним берегам разрезов на действительной оси между точками a_0 и t/x и выбирая однозначные ветви подынтегральной функции, получим

$$S_+(t,x) = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{H(x)H(t - a_0 x)}{\pi\sqrt{\pi}}\int_{a_0}^{t/x} \frac{d\alpha}{\sqrt{t - \alpha x}\sqrt{\alpha - a_0}}$$

$$P_+(t,x) = \frac{4}{3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{H(x)H(t - a_0 x)}{\pi\Gamma(-3/2)}\int_{a_0}^{t/x} \frac{\sqrt{\alpha - a_0}}{\sqrt{t - \alpha x}} d\alpha \tag{14}$$

В (12) понимаются главные конечные части интегралов в смысле обобщенных функций.

Обозначая $y = \dfrac{\sqrt{\alpha - a_0}}{\sqrt{t/x - \alpha}}$ и применяя теоремы о вычетах, можно получить

$$S_+(t,x) = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{H(x)H(t - a_0 x)}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}$$

$$P_+(t,x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(a_0\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(t - a_0 x)\frac{H(x)}{\sqrt{x}} \tag{15}$$

Функции S_-, P_- получаются из (15) заменой x на $-x$ и умножением на постоянную $1/a$ и a, соответственно.

Определим напряжение на продолжении трещины при постоянной сосредоточенной силе, действующей на берега трещины

$$\tau_{0yz}^{-}(t,\tau,x,\xi) = -\delta(x-\xi)H(t-\tau), \quad \xi < l(\tau) \tag{16}$$

Подставляя в (9) выражение (15) и учитывая, что по условию задачи $w_+ = 0$ и, что вследствие ограниченности энергии $C = 0$ и вычисляя свертку $S_+ ** \tau_{0yz}^{-}$, получим

$$S_+ ** \tau_{0yz}^{-} = \frac{H(x-\xi)H(t-\tau-a_0(x-\xi))}{\sqrt{\pi}\sqrt{x-\xi}} \tag{17}$$

Подставляя (17) в (9) и опуская громоздкие выкладки, приведем окончательный результат

$$\tau_{0yz}^{+} = \frac{H(l-\xi)H(x-l)H(L-a_0)}{\pi\sqrt{l-\xi}\sqrt{x-l}} - \frac{\sqrt{x-l}H(x-l)}{2\pi(x-\xi)\sqrt{l-\xi}} \tag{18}$$

$$L = \frac{t_0-\tau}{l(t_0)-\xi}, \quad t - t_0 = a_0(x - l(t_0)), \quad l = l(t_0)$$

Отметим, что поведение напряжения у края трещины определяется первым слагаемым формулы (18). Учитывая, что при $x \to l(t)$, $t_0 \to t$

$$\frac{x-l(t)}{x-l(t_0)} \to 1 - a_0\dot{l}(t) \quad \text{получим}$$

$$\lim_{x\to l(t)-0} \sqrt{x-l(t)}\,\tau_{0yz}^{+} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-a_0\dot{l}}{l-\xi}}H(L-a_0), \quad L = \frac{t-\tau}{l-\xi}, \quad l = l(t) \tag{19}$$

При произвольной нагрузке $\tau_{yz}^{-}(t,x)$ напряжение на продолжении полубесконечной трещины получается из решения (18) суперпозицией

$$\tau_{yz}^{+}(t,x) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{t} \frac{\partial\tau_{yz}^{-}(\tau,\xi)}{\partial\tau}\tau_{0yz}^{+}(t,\tau,x,\xi)\,d\tau d\xi \tag{20}$$

Подставляя (18) в (20) и применяя метод интегрирования по частям по переменной τ и вычисляя интеграл по ξ от δ-функции, для коэффициента интенсивности напряжений в общем случае можно получить

$$\lim_{x\to l-0} \sqrt{x-l}\,\tau_{yz}^{+} = \frac{1}{\pi a_0}\sqrt{1-a_0\dot{l}}\int_0^t \tau_{yz}^{-}\left(\tau, l - \frac{t-\tau}{a_0}\right)\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \tag{21}$$

что согласуется с полученным другим методом решением [3] для изотропной среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. Приближенное решение антиплоской анизотропной задачи о распространении трещины. – Механика, ЕГУ, 1989, вып. 7, с.3-7.
2. Сарайкин В.А., Слепян Л.И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле. – МТТ, 1979, №4, с. 54-73.
3. Костров Б.В. Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига. – ПММ, 1966, т. 30, вып.6, с. 1042-1050.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
1.04.1996

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 239.374

A PROBLEM OF LOW LEVEL STRESS IN COMPOUND PLATES

Zadoyan M.A.

Մ.Ա. Զադոյան

Բաղադրյալ սալերի քերլարվածության խնդիրը

Ֆիզիկական և երկրաչափական պարամետրերի տարածության մեջ փնտրվում են բաղադրյալ սալի կոնտակտային մակերևույթի եզրի համար քերլարվածության տիրույթները, որոնց իմացությամբ, նախագծելիս, կարելի է հասնել նշված եզրի հուսալի ամրությանը:

М.А. Задоян

Задача малонапряженности составных плит

В пространстве физических и геометрических параметров ищутся области малонапряженности для края контактной поверхности составной плиты, с помощью которых при проектировании можно обеспечить надежную прочность указанного края.

In this paper domains of low stress level [1,2] for a contact surface edge are sought in the space of physical and geometrical parameters. If these domains are known, then it will enable not only to avoid concentrations hazardous for joint strength when designing the mentioned edge, but also to exclude completely stresses in it.

1. Problem Statement. It is assumed that a plate is made of incompressible materials hardening according to a power low, which are fully connected along a cylindrical surface perpendicular to the plate middle plane. The plate is bent by external transverse forces which however are not applied in the vicinity of the edge under study. Using cylindrical coordinates let us denote values in the domains $0 \le \theta \le \alpha,\ -h/2 \le z \le h/2$, and $-\beta \le \theta \le 0,\ -h/2 \le z \le h/2$, where h is a plate thickness, within the vicinity of the rib $r=0$ by indices 1 and 2, respectively (Fig. 1).

Let us assume that intensities of stress and deformations are related by the expression

$$\sigma_0 = k\varepsilon_0^m$$

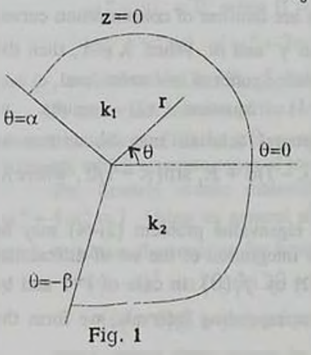


Fig. 1

where, as it is assumed within the frames of the classical theory of thin plate bending, transverse shear deformations are neglected, $\sigma_z = 0$, and $\varepsilon_z = -\varepsilon_r - \varepsilon_\theta$ are excluded from the material incompressibility condition. The hardening power $n=1/m$ of the both materials are assumed to be equal, and the deformation module k to be different.

The principal stresses σ_r, σ_θ and $\tau_{r\theta}$ for each domain may be written as follows:

$$\sigma_{ij} = \frac{M_{ij}(r,\theta)}{2J} z|z|^{m-1}, \quad J = \frac{1}{m+2}\left(\frac{h}{2}\right)^{m+2}$$

2. Differential Equations and Boundary-and-Contact Conditions. Representing a deflection in the vicinity of a rib $r=0$ as

$$w_i = r^{\lambda+1} f_i(\theta,\lambda),$$

where f_i and λ are be-sought functions and parameter, respectively, moments and tangential generalized shear force will be expressed as follows:

$$M_{ri} = -D_i r^{(\lambda-1)m}\left(\frac{1}{2}f_i''+\rho f_i\right)\chi_i, \quad M_{\theta i} = -D_i r^{(\lambda-1)m}(f_i''+\nu f_i)\chi_i$$

$$M_{r\theta i} = -\frac{D_i}{2}\lambda r^{(\lambda-1)m}f_i'\chi_i, \quad \chi_i = \left(\sqrt{f_2''+2\nu f_i'' f_i + \lambda^2 f_i'^2 + \Delta^2 f_i^2}\right)^{m-1}$$

$$V_{\theta i} = D_i r^{(\lambda-1)m-1}\left\{\left[(f_i''+\nu f_i)\chi_i\right]' + \eta f_i'\chi_i\right\}, \tag{1}$$

$$\Delta = (\lambda+1)\sqrt{\lambda^2+\lambda+1}, \ \rho = (\lambda+1)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right), \ \nu = (\lambda+1)\left(\frac{\lambda}{2}+1\right),$$

$$\eta = \lambda\left[1+(\lambda-1)m\right], \quad D_i = \frac{k_i}{m+2}h^{m+2}$$

Substituting the expressions of moments into the balance equation expressed through moments, we will obtain an ordinary differential equation of the 4th order

$$\left[(f_i''+\nu f_i)\chi_i\right]'' + \eta(f_i'\chi_i)' + (\delta f_i''+\mu f_i)\chi_i = 0 \tag{2}$$

where $2\delta = (\lambda-1)m\left[(\lambda-1)m-1\right], \quad 2\mu = (\lambda-1)m(\lambda^2-1)\left[1+(2\lambda+1)m\right]$

For freely supported edges of the plate we have $M_{\theta i} = w_i = 0$ and the boundary conditions

$$f_i'' = f_i = 0, \text{ when } \theta = \alpha; -\beta \tag{3}$$

are obtained from it. The conditions for deflection, inclination angle of deflection, bending moment and generalized shear force should be satisfied on the contact surface. It results in

$$f_1 = f_2, \ f_1' = f_2', \ (f_1''+\nu f_2)\chi_1 = \gamma(f_2''+\nu f_2)\chi_2, \quad \gamma = k_2/k_1,$$

$$[(f_1''+\nu f_1)\chi_1]' + \eta f_1'\chi_1 = \gamma\left\{[(f_2''+\nu f_2)\chi_2]' + \eta f_2'\chi_2\right\}, \text{ when } \theta = 0 \tag{4}$$

The set of differential equations (2) with the boundary-and-contact conditions (3) and (4) is a three-point eigenvalue problem, which defines in principle $f_i(\theta)$ functions up to a common uncertain multiplier and $\lambda = \lambda(\alpha,\beta,\gamma,m)$ for given values of the parameters α,β,γ and m. The corresponding expression connecting the parameters α,β,γ and m are found considering the inverse problem where $\lambda = \lambda_* < 1$ is assumed. This expression describes a hypersurface in the space of these parameters, and which leaves traces in α,β coordinate plane. These traces are families of concentration curves of the same power moments (stresses), depending on γ and m. When $\lambda = 1$, then the limiting curves of finite moments are built and they define zones of low stress level.

For linearly elastic materials (m=1) equation (2) results in $f_i^{IV} + 2(\lambda^2+1)f_i'' + (\lambda^2-1)^2 f_i = 0$, which general solution may be written as $f_i = A_i\cos(\lambda+1)\theta + B_i\sin(\lambda+1)\theta + C_i\cos(\lambda-1)\theta + E_i\sin(\lambda-1)\theta$, where λ is assumed to be a complex number in a general case.

3. Integral Method. The above mentioned eigenvalue problem (2)-(4) may be studied by a particular method which overcomes an integration of the set of differential equations. Multiplying the both sides of equation (2) by $f_1(\theta)$ in case of i=1 and by $f_2(\theta)$ in case of i=2 and integrating it over corresponding intervals, we form the identity:

$$\int_0^{\alpha}\{[(f_1''+\nu f_1)\chi_1]'' + \eta(f_1'\chi_1)' + (\delta f_1''+\mu f_1)\chi_1\}f_1 d\theta +$$

$$+\gamma\int_{-\beta}^{0}\{[(f_2''+\nu f_2)\chi_2]''+\eta(f_2'\chi_2)'+(\delta f_2''+\mu f_2)\chi_2\}f_2 d\theta=0$$

Integrating it by parts, and transforming, we obtain

$$\int_0^\alpha(f_1''+sf_1''f_1+\mu f_1^2-\eta f_1'^2)\chi_1 d\theta+\gamma\int_{-\beta}^{0}(f_2''+sf_2''f_2+\mu f_2^2-$$
$$-\eta f_2'^2)\chi_2 d\theta+L_1|_0^\alpha+\gamma L_2|_{-\beta}^0=0 \tag{5}$$

where $s=\nu+\delta$, and

$$L_i=\{[(f_i''+\nu f_i)\chi_i]'+\eta f_i'\chi_i\}f_i-(f_i''+\nu f_i)f_i'\chi_i.$$

Noting that the sum of the last two terms for the ordinary boundary-and-contact conditions (5) is equal to zero, we finally obtain

$$\eta=\frac{\int_0^\alpha(f_1''^2+sf_1''f_1+\mu f_1^2)\chi_1 d\theta+\gamma\int_{-\beta}^0(f_2''^2+sf_2''f_2+\mu f_2^2)\chi_2 d\theta}{\int_0^\alpha f_1'^2\chi_1 d\theta+\gamma\int_{-\beta}^0 f_2'^2\chi_2 d\theta} \tag{6}$$

choosing f_i functions in such a manner that they satisfy as many boundary-and-contact conditions as possible and substituting them into Eq.(6) and performing integration, we obtain a transcendental-algebraic equation with respect to λ, from which $\lambda=\lambda(\alpha,\beta,\gamma,m)$ is found.

4. Zones of Low Stress Level. Passing to the limit $\lambda\to 1$ in Eq.(2) and integrating, we obtain

$$[(f_i''+3f_i)\chi_i]'+f_i'\chi_i=H_i=\text{const} \tag{7}$$

where $$\chi_i=\left(\sqrt{f_i''^2+6f_i''f_i+f_i'^2+12f_i^2}\right)^{m-1} \tag{8}$$

Denoting $f_i=\chi|E_i|^n\psi_i(\theta)$, where $\chi=\text{sign}E_i$, from Eq.(7) we obtain

$$\psi_i'''+4\psi_i'=\frac{[(\psi_i''+3\psi_i)^2+\psi_i'^2+3\psi_i^2]^{\frac{3-m}{2}}}{m(\psi_i''+3\psi_i)^2+\psi_i'^2+3\psi_i^2} \tag{9}$$

The conditions (3) and (4), that interests us will be written as

$$\psi_i''=\psi_i=0,\ \text{when}\ \theta=\alpha,-\beta,\quad \psi_2=\gamma^n\psi_1, \tag{10}$$
$$\psi_2'=\gamma^n\psi_1',\quad (\psi_1''+3\psi_1)\omega_1=(\psi_2''+3\psi_2)\omega_2,\quad \text{when}\quad \theta=0$$

and ω_i are defined by Eq.(8), f_i being substituted by ψ_i.

A numerical solution of the set of differential equations (9) with the boundary-and-contact conditions (10) in $\alpha\beta$ coordinate plane determines curves of finite moments (stresses), which separate zones of low stress level from concentration ones (Fig.2).

For linearly elastic materials the differential equation (9) takes the form $\psi_i'''+4\psi_i'=1$. Using its general solution and satisfying the conditions (10) in case of $m=1$, we obtain the equation for limiting curves of finite moments

$$(\gamma-1)^2\sin 2\alpha\sin 2\beta+(\gamma-1)(\beta+\gamma\alpha)\sin 2(\alpha-\beta)-$$
$$-[(\gamma+1)(\beta+\gamma\alpha)+6\gamma(\alpha+\beta)]\sin 2(\alpha+\beta)=0 \tag{11}$$

Fig.2 shows these curves in $\alpha\beta$ plane for different γ. When $\gamma=1$ we obtain $\alpha+\beta=\pi/2$ and $\alpha+\beta=\pi$. It means that zone of low stress level for homogeneous plate is an area comprising the triangular domain with the apices $(0,\ 0)$, $(0,\pi/2)$ and $(\pi/2,0)$ and the segment of $\alpha+\beta=\pi$ straight line concluded between the coordinate

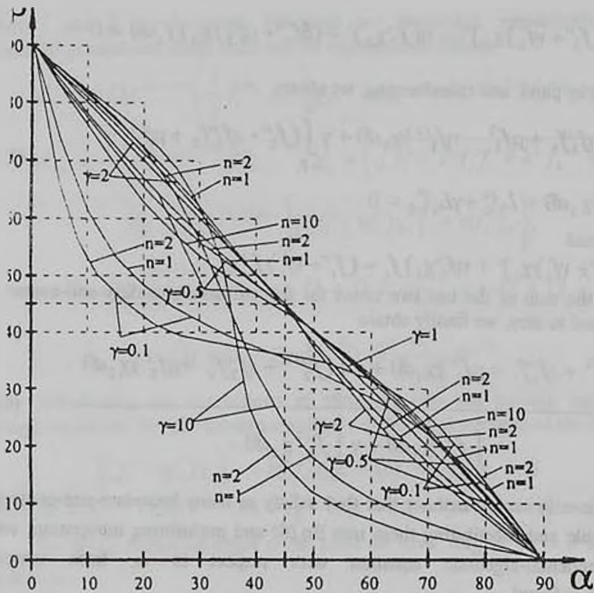


Fig. 2

axes. From the condition of shear forces finiteness we obtain that the zone of low stress level comprises the traingular area with the apices $(0, 0)$, $(0, \pi/3)$ and $(\pi/3, 0)$ and the segments of $\alpha+\beta=\pi/2$ and $\alpha+\beta=\pi$ straight lines concluded between the coordinate axes. These results fully correspond to the conclusions of B.G.Galyorkin [3], concerning a complete solution of the problem of sectorial plate with freely supported radial edges.

High concentration of shear forces compared to moments, which was mentioned by B.G.Galyorkin as long ago as 1920s, may be explained by non-perfection of the classical theory of plate bending. The study of crack edge of linearly elastic plates carried out by means of the revised theories [4-6] and comparison with the corresponding results of the classical theory [7,8] show that, first, shear forces at that edge are finite, and, second, concentrations of moments (stresses) are not changed.

Despite the usefulness of the principal conclusions obtained basing on the assumptions of the classical theory for study of compound plate joints strength, nevertheless study of the above mentioned problems taking account of plate transverse shears [9-11] are of principle interest. According to the approach stated here, zones of low stress level in case of mixed boundary conditions when one edge of plate is free and the other is freely supported, are built in [12].

REFERENCES

1. Chobanian K.S. Stress in Compound Elastic Bodies. Yerevan, Armenian Academy of Science Publishing House, 1987, 338 p. (in Russian).
2. Zadoyan M.A. Spatial Problems of The Plasticity Theory. Moscow, Nauka, 1992, 384 p. (in Russian).
3. Galyorkin B.G. Collection of Works., M.: AN SSSR, 1953, vol. 2, 438 p. (in Russian).
4. Hartranft R.J., Sih G.C. Effect of Plate Thickness on the Bending Stress Distribution Around Through Cracks // J. Math. Phys. 1968. v. 47, pp.. 276-291.
5. Pagano N.J., Sih G.C. Stress Singularities Around a Crack in a Cosserat Plate // Intern. J. Solids and Structures, 4 (1968), 531 p.
6. Belubekian E.V. Bending of transverse isotrop rectangular plate with Symmetrical Crack // Dokl. AN Arm. SSR, 1969, vol. 49, №5, pp.. 225-232 (in Russian).
7. Williams M.L. The Bending Stress Distribution at the Base of Stationary Crack // Journ. of Appl. Mechan., 1961, Ser. E, №3, pp.. 78-82.
8. Sih G.C., Rice J.R. The Bending of plates of Dissimilar Materials with Cracks // Journ. of Appl. Mech., 1964, ser. E, №3, pp.. 477-483.
9. Ambartsumian S.A. Theory of Anisotropic Plates. M.: Nauka, 1987, 360 p. (in Russian).
10. Reissner E. On Bending of Elastic Plates // Quartely of Appl. Math., 1947, №5, pp.. 55-68.
11. Washizu K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Moscow, Mir, 1987, 542 p.
12. Zadoyan M.A. On Conditions of Low Stress Level Compound Plates // Russian Academy of Sciences, Docl. AN, 1993, v.332, №3, pp.. 319-321 (in Russian).

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 34.08.1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КРУГОВОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Макарян В.С., Симонян В.В.

Վ.Ս. Մակարյան, Վ.Վ. Սիմոնյան
Վերջավոր երկարությամբ առաձգական գլանի համար մի դինամիկ խնդիր

Վերջավոր երկարությամբ առաձգական գլանը, որը ամրակցված է կոշտ հենարանի հետ, բեռնավորված է հարմոնիկ բեռով: Խնդրի լուծումը փնտրված է Հելմհոլցի ֆունկցիաների օգնությամբ և բերված է քվազի-լիովին ռեգուլյար անվերջ համակարգերի լուծման:

V.S. Makarian, V.V. Simonian
On a dynamic problem for a circular elastic cylinder of finite length

Рассматривается задача об установившихся колебаниях упругого цилиндра конечной длины под действием осесимметричной динамической нагрузки, приложенной на его верхнем торце. Решение задачи сводится к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, которые квазивполне регулярны.

Пусть упругий цилиндр совершает вынужденные колебания под действием периодически изменяющейся во времени нагрузки, приложенной к верхнему торцу цилиндра. Частотой колебания ω приложенной силы колебается и основание цилиндра. При совпадении частоты колебания приложенной силы с частотами собственных колебаний ω_0 возникает необходимость дополнительных исследований [3] .Здесь рассматривается случай, когда указанные частоты не совпадают.

Граничные условия задачи имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\sigma_z(r,h,t) = f(r)e^{-i\omega t}; \quad \tau_{rz}(r,h,t) = 0 && (0<r<R)\\
&\tau_{rz}(R,z,t) = 0; \quad \sigma_r(R,z,t) = 0 && (0<z<h)\\
&u_r(r,0,t) = 0; \quad u_z(r,0,t) = ke^{-i\omega t} && (0<r<R) \qquad (1)
\end{aligned}$$

где $f(r)$ -интегрируемая функция, h -высота цилиндра, R -радиус цилиндра, k -амплитуда колебаний основания.

Компоненты вектора перемещения будем определять по формулам

$$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\Psi}{r} \qquad (2)$$

Функции Φ и Ψ удовлетворяют уравнениям [3]

$$\nabla_0^2\Phi = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \quad \nabla_1^2\Psi = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \qquad (3)$$

где c_1 и c_2 —скорости продольных и поперечных волн соответственно, а

$$\nabla_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \qquad \nabla_1^2 = \nabla_0^2 - \frac{1}{r^2} \qquad (4)$$

r,z —цилиндрические координаты.

Решение уравнений (3) ищем в виде:

$$\Phi(r,z) = A_0 \sin a(h-z) + B_0 \cos a(h-z) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \operatorname{ch}\alpha_k z + B_k \operatorname{sh}\alpha_k z\right)J_0(\mu_k r) + \sum_{p=1}^{\infty} C_p I_0(\beta_p r)\sin\lambda_p z \tag{5}$$

$$\Psi(r,z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(E_k \operatorname{ch}\gamma_k z + F_k \operatorname{sh}\gamma_k z\right)J_1(\mu_k r) + \sum_{k=1}^{\infty} H_p I_1(d_p r)\cos\lambda_p z \tag{6}$$

где $J_i(x)$ и $I_i(x)$ $(i = 0,1)$ – функции Бесселя первого рода от действительного и мнимого аргументов соответственно, $A_0, B_0, A_k, B_k, C_k, D_k, E_k$ и F_k – неизвестные постоянные.

В формулах (5) и (6) приняты также обозначения

$$\alpha_k = \sqrt{\mu_k^2 - a^2}; \qquad \beta_k = \sqrt{\lambda_k^2 - a^2}; \tag{7}$$

$$\gamma_k = \sqrt{\mu_k^2 - b^2}; \qquad d_k = \sqrt{\lambda_k^2 - b^2}; \; a^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}, \; b^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} \tag{8}$$

Учитывая представления (5) и (6), а также формулы (2), для перемещений и напряжений получим следующие выражения:

$$u_r = -\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mu_k\left(A_k \operatorname{ch}\alpha_k z + B_k \operatorname{sh}\alpha_k z\right) + \gamma_k\left(E_k \operatorname{sh}\gamma_k z + F_k \operatorname{ch}\gamma_k z\right)\right]J_1(\mu_k r) +$$
$$+ \sum_{p=1}^{\infty}\left[\beta_p I_1(\beta_p r)C_p + \lambda_p I_1(d_p r)H_p\right]\sin\lambda_p z$$

$$u_z = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\alpha_k\left(A_k \operatorname{sh}\alpha_k z + B_k \operatorname{ch}\alpha_k z\right) + \mu_k\left(E_k \operatorname{ch}\gamma_k z + F_k \operatorname{sh}\gamma_k z\right)\right]J_0(\mu_k r) +$$
$$+ \sum_{p=1}^{\infty}\left[\lambda_p I_0(\beta_p r)C_p + d_p I_0(d_p r)H_p\right]\cos\lambda_p z -$$
$$- aA_0 \cos a(h-z) + aB_0 \sin a(h-z)$$

$$\sigma_z = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\alpha_k^2 - \nu^*\right)\left(A_k \operatorname{ch}\alpha_k z + B_k \operatorname{sh}\alpha_k z\right) +\right.$$
$$\left. + \gamma_k\mu_k\left(E_k \operatorname{sh}\gamma_k z + F_k \operatorname{ch}\gamma_k z\right)\right]J_0(\mu_k r) -$$
$$- \sum_{p=1}^{\infty}\left[\left(\lambda_p^2 + \nu^*\right)I_0(\beta_p r)C_p + \lambda_p d_p I_0(d_p r)H_p\right]\sin\lambda_p z -$$
$$- \left(a^2 + \nu^*\right)A_0 \sin a(h-z) - \left(a^2 + \nu^*\right)B_0 \cos a(h-z)$$

$$\tau_{rz} = -\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(b^2 + 2\gamma_k^2\right)\left(E_k \operatorname{ch}\gamma_k z + F_k \operatorname{sh}\gamma_k z\right) +\right.$$
$$\left. + 2\mu_k\alpha_k\left(A_k \operatorname{sh}\alpha_k z + B_k \operatorname{ch}\alpha_k z\right)\right]J_1(\mu_k r) +$$
$$+ \sum_{p=1}^{\infty}\left[\left(2\lambda_p^2 - b^2\right)I_1(d_p r)H_p + 2\beta_p\lambda_p I_1(\beta_p r)C_p\right]\cos\lambda_p z$$

$$\sigma_r = -\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\nu^* + \mu_k^2\right)\left(A_k \operatorname{ch}\alpha_k z + \mathrm{B}_k \operatorname{sh}\alpha_k z\right) +\right.$$
$$\left. + \gamma_k\mu_k\left(B_k \operatorname{sh}\gamma_k z + F_k \operatorname{ch}\gamma_k z\right)\right]J_0(\mu_k r) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mu_k\left(A_k \operatorname{ch}\alpha_k z + B_k \operatorname{sh}\alpha_k z\right) + \gamma_k\left(E_k \operatorname{sh}\gamma_k z + F_k \operatorname{ch}\gamma_k z\right)\right]\frac{J_1(\mu_k r)}{r} +$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\left\{C_p\left[\left(\beta_p^2 - \nu^*\right)I_0(\beta_p r) - \frac{\beta_p I_1(\beta_p r)}{r}\right] +\right.$$

$$\left.+\lambda_p H_p\left[d_p I_0(d_p r) - \frac{I_1(d_p r)}{r}\right]\right\}\sin\lambda_p z -$$

$$-\nu^* A_0 \sin a(h-z) - \nu^* B_0 \cos a(h-z) \tag{9}$$

Здесь введено обозначение $\nu^* = \dfrac{\nu b^2}{2(1-\nu)}$; ν-коэффициент Пуассона.

Выбрав значения для λ_k и μ_k следующим образом

$$\lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2h}; \quad J_1(\mu_k R) = 0$$

и удовлетворив граничным условиям для касательных напряжений и радиального перемещения, приходим к простым зависимостям между постоянными A_k, B_k, C_k, D_k, E_k и F_k

$$\mu_k A_k + \gamma_k F_k = 0$$

$$\left(b^2 + 2\gamma_k^2\right)\left(E_k \operatorname{ch}\gamma_k h + F_k \operatorname{sh}\gamma_k h\right) + 2\mu_k\alpha_k\left(A_k \operatorname{sh}\alpha_k h + B_k \operatorname{ch}\alpha_k h\right) = 0 \tag{10}$$

$$2\beta_k\lambda_k I_1(\beta_k R)C_k = -\left(2\lambda_k^2 - b^2\right)I_1(d_k R)H_k$$

Из оставшихся граничных условий для нормальных напряжений и осевого перемещения получаем следующую совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\Omega_m^{(1)} X_m + \Omega_m^{(2)} Y_m = \sum_{p=1}^{\infty}\chi_{mp}^{(1)}\widetilde{H}_p$$

$$\Omega_m^{(3)} X_m + \Omega_m^{(4)} Y_m = \sum_{p=1}^{\infty}\chi_{mp}^{(2)}\widetilde{H}_p + \frac{2}{R J_0(\mu_m R)}\int_0^R r f(r) J_0(\mu_m r)\,dr \tag{11}$$

$$\Omega_m^{(5)}\widetilde{H}_m = \sum_{k=1}^{\infty}\chi_{mk}^{(3)} X_k + \sum_{k=1}^{\infty}\chi_{mk}^{(4)} Y_k +$$

$$+\nu^* A_0\frac{\left[a(-1)^{m+1} + \lambda_m \sin ah\right]}{\lambda_m^2 - a^2} + \frac{\nu^* B_0 \lambda_m \cos ah}{\lambda_m^2 - a^2}$$

Неизвестные $X_m, Y_m, \widetilde{H}_m$, входящие в системы (11), связаны со старыми неизвестными следующими соотношениями:

$$X_m = \mu_m J_0(\mu_m R)\left[E_m \operatorname{ch}\gamma_m h + F_m \operatorname{sh}\gamma_m h\right]$$

$$Y_m = \frac{\gamma_m}{\mu_m} J_0(\mu_m R) F_m; \quad \widetilde{H}_m = H_m I_1(d_m R) \tag{12}$$

В системах (12) для краткости введены обозначения:

$$\Omega_m^{(1)} = \frac{1}{\operatorname{ch}\gamma_m h} - \frac{b^2 + 2\gamma_m^2}{2\mu_m^2 \operatorname{ch}\alpha_m h}; \quad \Omega_m^{(2)} = \alpha_m \operatorname{th}\alpha_m h - \frac{\mu_m^2 \operatorname{th}\gamma_m h}{\gamma_m}$$

$$\Omega_m^{(3)} = \gamma_m \operatorname{th}\gamma_m h - \frac{\left(2\mu_m^2 - b^2\right)^2 \operatorname{th}\alpha_m h}{4\mu_m^2 \alpha_m}; \quad \Omega_m^{(4)} = \frac{\mu_m^2}{\operatorname{ch}\gamma_m h} - \frac{\left(\alpha_m^2 - \nu^*\right)}{\operatorname{ch}\alpha_m h}$$

$$\Omega_m^{(5)} = \frac{h}{2}\left[\frac{\lambda_m d_m I_0(d_m R)}{I_1(d_m R)} - \frac{\left(2\lambda_m^2 - b^2\right)^2}{4\beta_m \lambda_m}\frac{I_0(\beta_m R)}{I_1(\beta_m R)} - \frac{b^2}{2\lambda_m R}\right]$$

$$\chi_{mp}^{(1)} = \frac{b^2}{R(1-\nu)}\frac{\left[(1-\nu)\mu_m^2 - \nu b^2\left(\lambda_p^2 - b^2\right)\right]}{\left(\mu_m^2 + \beta_p^2\right)\left(\mu_m^2 + d_p^2\right)}$$

$$\chi_{mp}^{(2)} = \frac{(-1)^{p+1} b^2}{2R(1-\nu)}\frac{\left[\lambda_p^2\left(\nu b^2 - 2\mu_m^2\right) + \nu b^2\left(\mu_m^2 - b^2\right)\right]}{\lambda_p\left(\beta_p^2 + \mu_m^2\right)\left(d_p^2 + \mu_m^2\right)}$$

$$\chi_{mk}^{(3)} = \frac{(-1)^{m+1} b^2}{4(1-\nu)}\frac{\left[\mu_k^2\left(\nu b^2 - 2\lambda_m^2\right) + \nu b^2\left(\lambda_m^2 - b^2\right)\right]}{\mu_k^2\left(\alpha_k^2 + \lambda_m^2\right)\left(\gamma_k^2 + \lambda_m^2\right)}$$

$$\chi_{mk}^{(4)} = \frac{\lambda_m b^2}{2(1-\nu)}\frac{\left[(1-\nu)\mu_k^2 + \nu\left(b^2 - \lambda_m^2\right)\right]}{\left(\gamma_k^2 + \lambda_m^2\right)\left(\alpha_k^2 + \lambda_m^2\right)} \tag{13}$$

Для неизвестных постоянных A_0 и B_0 из тех же граничных условий для нормального напряжения и осевого перемещения получим следующие значения:

$$\frac{b^2 R B_0}{4} = -\frac{1}{R}\int_0^R r f(r)dr - \frac{\nu^* b^2}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{\beta_p^2 \lambda_p}\widetilde{H}_p$$

$$\frac{aR\cos ah A_0}{2} = -\frac{2\sin ah}{b^2}\left[\frac{1}{R}\int_0^R r f(r)dr + \frac{kR}{2}\right] + \tag{14}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\widetilde{H}_p}{\beta_p^2 \lambda_p}\left[\left(b^2 - 2a^2\right)\lambda_p - 2\nu^*\right]$$

Для исследования разрешимости совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (11) выясним поведение выражений $\Omega_m^{(i)}$ $(i = 1,2,3,4,5)$ когда $m \to \infty$. Асимптотические разложения входящих в них функций позволяют установить следующие оценки:

$$\Omega_m^{(1)} \approx -\frac{1}{2e^m}; \quad \Omega_m^{(2)} \approx -\frac{\left(a^2 + b^2\right)}{2\mu_m}$$

$$\Omega_m^{(3)} \approx \frac{b^2 - a^2}{2\mu_m} + \frac{b^2\left(a^2 - b^2\right)}{4\mu_m^3}; \quad \Omega_m^{(4)} \approx \frac{b^2}{2e^m} \tag{15}$$

$$\Omega_m^{(5)} \approx -\frac{h\left(a^2 - b^2\right)}{4}\left[1 + \frac{a^2}{\lambda_m R\left(a^2 - b^2\right)}\right] \qquad \text{при } m >> 1$$

Исключив $\widetilde{H}_p$ из системы (11), приходим к следующей системе:

$$\Omega_m^{(1)} X_m + \Omega_m^{(2)} Y_m = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi_{mp}^{(1)}\chi_{pk}^{(3)}}{\Omega_p^{(5)}} + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi_{mp}^{(1)}\chi_{pk}^{(4)}}{\Omega_p^{(5)}} +$$

$$+\nu^{*}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi_{mp}^{(1)}}{\Omega_p^{(5)}}\left[A_0\frac{a(-1)^{p+1}+\lambda_p\sin ah}{\lambda_p^2-a^2}+B_0\frac{\lambda_p\cos ah}{\lambda_p^2-a^2}\right]$$

$$\Omega_m^{(3)}X_m+\Omega_m^{(4)}Y_m=\sum_{k=1}^{\infty}X_k\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi_{mp}^{(2)}\chi_{pk}^{(3)}}{\Omega_p^{(5)}}+\sum_{k=1}^{\infty}Y_k\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi_{mp}^{(2)}\chi_{pk}^{(4)}}{\Omega_p^{(5)}}+ \tag{16}$$

$$+\nu^{*}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi_{mp}^{(2)}}{\Omega_p^{(5)}}\left[A_0\frac{a(-1)^{p+1}+\lambda_p\sin ah}{\lambda_p^2-a^2}+B_0\frac{\lambda_p\cos ah}{\lambda_p^2-a^2}\right]$$

Для исследования регулярности системы (16) следует оценить следующие выражения:

$$Q_1=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi_{mp}^{(1)}\chi_{pk}^{(3)}}{\Omega_p^{(5)}}\right|;\qquad Q_2=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi_{mp}^{(1)}\chi_{pk}^{(4)}}{\Omega_p^{(5)}}\right|$$

$$Q_3=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi_{mp}^{(2)}\chi_{pk}^{(3)}}{\Omega_p^{(5)}}\right|;\qquad Q_4=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\chi_{mp}^{(2)}\chi_{pk}^{(4)}}{\Omega_p^{(5)}}\right| \tag{17}$$

Исследования показывают, что выражения Q_1 и Q_4 имеют более высокий порядок убывания, чем Q_2 и Q_3, оценки которых через интегралы получим:

$$Q_2\approx\frac{16d^2}{(3-4\nu)\pi^2}\left[1+O\left(m^{-2}\right)\right];\qquad Q_3\approx\frac{4}{\pi^2}\left[1+O\left(m^{-2}\right)\right] \tag{18}$$

где $$d=d(\nu)=(1-2\nu)\left[\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}\right]+\sqrt{\nu(1-\nu)} \tag{19}$$

Отсюда имеем

$$\lim_{m\to\infty}Q_2=\frac{16d^2}{(3-4\nu)\pi^2};\quad \lim_{m\to\infty}Q_3=\frac{4}{\pi^2} \tag{20}$$

Нетрудно убедиться, что числа $Q_i(\nu)$; $(i=2,3)$ в зависимости от допустимых значений коэффициента Пуассона меняются в интервале

$$0{,}26\le Q_i(\nu)\le 0{,}41 \tag{21}$$

Свободные члены в системах (16) имеют порядок $O\left(\frac{1}{m^2}\right)$.

Таким образом, полученные бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (16) квазивполне регулярны.

Значение амплитуды осевой силы в зависимости от координаты z определяется формулой

$$2\pi\int_0^R r\sigma_z(r,z)dr=-\frac{\pi R^2b^2}{2}\left[A_0\sin a(h-z)+B_0\cos a(h-z)\right]-$$

$$-\pi R\nu^{*}b^2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\widetilde{H}_p\sin\lambda_p z}{\beta_p^2\lambda_p} \tag{22}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б.Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. – Докл. АН Арм. ССР. 1954. т. 19. № 1. с. 3-12.
2. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1955. 491с.
3. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наукова думка, 1978.
4. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наукова думка, 1981.
5. Улитко А.Ф. Метод собственных вектор-функций в пространственных задачах теории упругости. – Киев: Наукова думка, 1979.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
22.09.1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механик

УДК 539.3

О ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ В ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ДВУХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Саркисян Л.С.

Լ.Ս. Սարգսյան

Օրթոտրոպ երկշերտի սեփական տատանումների խնդրում բարձր մոտավորությունների մասին

Դիտարկվում է օրթոտրոպ երկշերտի սեփական հաճախությունների և սեփական տատանումների ձևերի որոշման հարցը: Ասիմպտոտիկ մեթոդով ստացված են սեփական հաճախությունների որոշման բնութագրիչ հավասարումները: Ցույց է տրված, որ սեփական հաճախությունները որոշվում են խնդրի լուծման ասիմպտոտիկ ներկայացման սկզբնական մոտավորությունից, իսկ բարձր մոտավորությունները ազդում են տատանման ամպլիտուդների արժեքների վրա:

L.S. Sarkissian

On highest approximations in the problem of free vibrations of two-layered orthotropic strip

Рассмотрен вопрос определения собственных частот и форм собственных колебаний двухслойной ортотропной полосы. Асимптотическим методом получены уравнения частот. Доказано, что частоты определяются из уравнений для исходного приближения асимптотического разложения. Установлено, что высшие приближения не влияют на значения частот, ими обусловлены изменения амплитуд собственных колебаний.

Рассматривается задача о собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы. В работе [1] определение частот собственных колебаний в смешанной задаче для двухслойной ортотропной полосы асимптотическим методом [2-5] сведено к решению системы из двух уравнений относительно компонентов вектора перемещения. Для исходного приближения эти уравнения независимы, после их решения и удовлетворения граничным и контактным условиям получены трансцендентные уравнения, откуда определяются частоты собственных колебаний. Доказано, что в ортотропной двухслойной полосе возникают сдвиговые и продольные колебания. Собственные функции, соответствующие этим собственным частотам, составляют ортогональную систему. Возникает естественный вопрос — каков вклад высших приближений? В работе доказано, что высшие приближения не влияют на частоты собственных колебаний и не приводят к определению принципиально новых функций интегрирования. В конечном итоге эти приближения влияют на амплитуды собственных колебаний.

1. Имеем двухслойную полосу из ортотропных слоев $\Omega = \left\{(x,y): x \in [0,l],\ y \in [-h_2, h_1],\ \max(h_1, h_2) << l\right\}$. При асимптотическом подходе определение частот собственных колебаний, соответствующее граничным условиям

$$\sigma_{22}^{I} = 0, \qquad \sigma_{12}^{I} = 0 \qquad \text{при} \qquad \zeta = \zeta_1$$

$$u^{II} = 0, \qquad v^{II} = 0 \qquad \text{при} \qquad \zeta = -\zeta_2 \tag{1.1}$$

и условиям полного контакта между слоями

$$u^{I} = u^{II},\ v^{I} = v^{II},\ \sigma_{22}^{I} = \sigma_{22}^{II},\ \sigma_{12}^{I} = \sigma_{12}^{II} \qquad \text{при} \qquad \zeta = 0 \tag{1.2}$$

приводится для произвольного приближения s к решению следующей системы относительно компонентов вектора перемещения [1]:

$$\frac{\partial^2 u^{(j,s)}}{\partial\zeta^2}+a_{66}^{(j)}\rho^{(j)}\omega_*^2 u^{(j,s)}=-\frac{\partial^2 v^{(j,s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}-a_{66}^{(j)}\frac{\partial\sigma_{11}^{(j,s-1)}}{\partial\xi}$$

$$\frac{\partial^2 v^{(j,s)}}{\partial\zeta^2}+A_{11}^{(j)}\rho^{(j)}\omega_*^2 v^{(j,s)}=\frac{a_{12}^{(j)}}{a_{11}^{(j)}}\frac{\partial^2 u^{(j,s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}-A_{11}^{(j)}\frac{\partial\sigma_{12}^{(j,s-1)}}{\partial\xi} \tag{1.3}$$

где $\zeta_1=h_1/h$, $\zeta_2=h_2/h$, $\omega_*^2=h^2\omega^2$, $h=\max(h_1,h_2)$, h_1 – толщина верхнего слоя, h_2 – толщина нижнего слоя, ω – частота собственных колебаний двухслойной ортотропной полосы.

Для вычисления же компонентов тензора напряжений имеются формулы

$$\sigma_{12}^{(j)}=\frac{1}{a_{66}^{(j)}}\frac{\partial u^{(j,s)}}{\partial\zeta}+\frac{1}{a_{66}^{(j)}}\frac{\partial v^{(j,s-1)}}{\partial\xi},\quad \sigma_{22}^{(j,s)}=\frac{1}{A_{11}^{(j)}}\frac{\partial v^{(j,s)}}{\partial\zeta}-\frac{1}{A_{12}^{(j)}}\frac{\partial u^{(j,s-1)}}{\partial\xi}$$

$$\sigma_{11}^{(j,s)}=-\frac{1}{A_{12}^{(j)}}\frac{\partial v^{(j,s)}}{\partial\zeta}+\frac{1}{A_{22}^{(j)}}\frac{\partial u^{(j,s-1)}}{\partial\xi},\quad A_{11}^{(j)}=\frac{a_{11}^{(j)}a_{22}^{(j)}-\left(a_{12}^{(j)}\right)^2}{a_{11}^{(j)}}$$

$$A_{12}^{(j)}=\frac{a_{11}^{(j)}a_{22}^{(j)}-\left(a_{12}^{(j)}\right)^2}{a_{12}^{(j)}},\quad A_{22}^{(j)}=\frac{a_{11}^{(j)}a_{22}^{(j)}-\left(a_{12}^{(j)}\right)^2}{a_{22}^{(j)}} \tag{1.4}$$

При $s=0$ уравнения (1.3) однородны и независимы. После их решения и удовлетворения условиям (1.1), (1.2) получаются следующие трансцендентные уравнения для определения собственных частот:

$$\sqrt{\frac{\rho^{II}G^{II}}{\rho^{I}G^{I}}}\cos\sqrt{\frac{\rho^{I}}{G^{I}}}\omega_*\zeta_1\cdot\cos\sqrt{\frac{\rho^{II}}{G^{II}}}\omega_*\zeta_2-\sin\sqrt{\frac{\rho^{I}}{G^{I}}}\omega_*\zeta_1\cdot\sin\sqrt{\frac{\rho^{II}}{G^{II}}}\omega_*\zeta_2=0 \tag{1.5}$$

$$\sqrt{\frac{\rho^{II}E_2^{II}\left(1-\nu_{12}^{I}\nu_{21}^{I}\right)}{\rho^{I}E_2^{I}\left(1-\nu_{12}^{II}\nu_{21}^{II}\right)}}\cos\sqrt{\frac{\rho^{I}\left(1-\nu_{12}^{I}\nu_{21}^{I}\right)}{E_2^{I}}}\omega_*\zeta_1\cdot\cos\sqrt{\frac{\rho^{II}\left(1-\nu_{12}^{II}\nu_{21}^{II}\right)}{E_2^{II}}}\omega_*\zeta_2-$$

$$-\sin\sqrt{\frac{\rho^{I}\left(1-\nu_{12}^{I}\nu_{21}^{I}\right)}{E_2^{I}}}\omega_*\zeta_1\cdot\sin\sqrt{\frac{\rho^{II}\left(1-\nu_{12}^{II}\nu_{21}^{II}\right)}{E_2^{II}}}\omega_*\zeta_2=0 \tag{1.6}$$

где G, E, ν – соответственно модули сдвига, Юнга, коэффициент Пуассона.

Уравнению (1.5) соответствуют частоты сдвиговых колебаний ω^c, а уравнению (1.6) – частоты продольных колебаний ω^p.

При $s>0$ уравнения (1.3) неоднородны и они должны быть решены в двух вариантах, когда: а) $\omega=\omega_*^c$, б) $\omega=\omega_*^p$. Решение каждого уравнения (1.3) есть сумма решений однородного и частного решения неоднородного уравнения. Следовательно, будем иметь

$$u^{(j,s)}=u_c^{(j,s)}+u_p^{(j,s)}+\bar{u}_c^{(j,s)}+\bar{u}_p^{(j,s)}$$

$$v^{(j,s)}=v_c^{(j,s)}+v_p^{(j,s)}+\bar{v}_c^{(j,s)}+\bar{v}_p^{(j,s)}\qquad j=I,II \tag{1.7}$$

где черточками обозначены частные решения неоднородного уравнения, а $u_c^{(j,s)}$, $v_c^{(j,s)}$, $u_p^{(j,s)}$, $v_p^{(j,s)}$ – общие решения однородных уравнений, соответствующие ω_*^c и ω_*^p. Частные решения всегда можно найти, например, методом вариации произвольных постоянных. Используя формулы (1.4) и (1.7), а также вид решения для исходного приближения [1], для произвольного s будем иметь решение

$$u^{(j,s)} = U_{\xi}^{(j,s)}(\xi)\left[C_{1,c}^{(j,s)} \sin\sqrt{a_{66}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{c}\zeta + C_{2,c}^{(j,s)} \cos\sqrt{a_{66}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{c}\zeta\right] +$$

$$+U_{\xi}^{(j,s)}(\xi)\left[C_{1,p}^{(j,s)} \sin\sqrt{a_{66}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{p}\zeta + C_{2,p}^{(j,s)} \cos\sqrt{a_{66}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{p}\zeta\right] + \overline{u}_{c}^{(j,s)} + \overline{u}_{p}^{(j,s)}$$

$$\sigma_{12}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{66}^{(j)}}\left\{U_{\xi}^{(j,s)}(\xi)\sqrt{a_{66}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{c}\left[C_{1,c}^{(j,s)} \cos\sqrt{a_{66}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{c}\zeta - C_{2,c}^{(j,s)} \sin\sqrt{a_{66}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{c}\zeta\right] +\right.$$

$$+U_{\xi}^{(j,s)}(\xi)\sqrt{a_{66}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{p}\left[C_{1,p}^{(j,s)} \cos\sqrt{a_{66}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{p}\zeta - C_{2,p}^{(j,s)} \sin\sqrt{a_{66}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{p}\zeta\right] +$$

$$\left.+\frac{\partial\overline{u}_{c}^{(j,s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\overline{u}_{p}^{(j,s)}}{\partial\zeta}\right\} + \frac{1}{a_{66}^{(j)}}\frac{\partial v^{(j,s-1)}}{\partial\xi}$$

$$v^{(j,s)} = V_{\xi}^{(j,s)}(\xi)\left[C_{3,c}^{(j,s)} \sin\sqrt{A_{11}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{c}\zeta + C_{4,c}^{(j,s)} \cos\sqrt{A_{11}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{c}\zeta\right] +$$

$$+V_{\xi}^{(j,s)}(\xi)\left[C_{3,p}^{(j,s)} \sin\sqrt{A_{11}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{p}\zeta + C_{4,p}^{(j,s)} \cos\sqrt{A_{11}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{p}\zeta\right] + \overline{v}_{c}^{(j,s)} + \overline{v}_{p}^{(j,s)}$$

$$\sigma_{22}^{(j,s)} = \frac{1}{A_{11}^{(j)}}\left\{V_{\xi}^{(j,s)}(\xi)\sqrt{A_{11}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{c}\left[C_{3,c}^{(j,s)} \cos\sqrt{A_{11}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{c}\zeta -\right.\right.$$

$$\left.- C_{4,c}^{(j,s)} \sin\sqrt{A_{11}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{c}\zeta\right] + V_{\xi}^{(j,s)}(\xi)\sqrt{A_{11}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{p}\left[C_{3,p}^{(j,s)} \cos\sqrt{A_{11}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{p}\zeta -\right.$$

$$\left.\left.- C_{4,p}^{(j,s)} \sin\sqrt{A_{11}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{p}\zeta\right] + \frac{\partial\overline{v}_{c}^{(j,s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\overline{v}_{p}^{(j,s)}}{\partial\zeta}\right\} - \frac{1}{A_{12}^{(j)}}\frac{\partial u^{(j,s-1)}}{\partial\xi}$$

$$\sigma_{11}^{(j,s)} = -\frac{1}{A_{12}^{(j)}}\left\{V_{\xi}^{(j,s)}(\xi)\sqrt{A_{11}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{c}\left[C_{3,c}^{(j,s)} \cos\sqrt{A_{11}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{c}\zeta -\right.\right.$$

$$\left.- C_{4,c}^{(j,s)} \sin\sqrt{A_{11}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{c}\zeta\right] + V_{\xi}^{(j,s)}(\xi)\sqrt{A_{11}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{p}\left[C_{3,p}^{(j,s)} \cos\sqrt{A_{11}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{p}\zeta -\right.$$

$$\left.\left.- C_{4,p}^{(j,s)} \sin\sqrt{A_{11}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega\,\dot{:}^{p}\zeta\right] + \frac{\partial\overline{v}_{c}^{(j,s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\overline{v}_{p}^{(j,s)}}{\partial\zeta}\right\} + \frac{1}{A_{22}^{(j)}}\frac{\partial u^{(j,s-1)}}{\partial\xi} \tag{1.8}$$

2. В (1.8) первое слагаемое для $u^{(j,s)}$ и второе слагаемое для $v^{(j,s)}$ по виду совпадают с соответствующими слагаемыми при $s = 0$. Следовательно, при удовлетворении граничным и контактным условиям (1.1), (1.2) будут тождественно удовлетворены комбинации, содержащие постоянные $C_{1,c}^{(II,s)}, C_{2,c}^{(II,s)}, C_{3,p}^{(II,s)}, C_{4,p}^{(II,s)}$. В результате этого для определения постоянных $C_{1,p}^{(j,s)}, C_{2,p}^{(j,s)}$ получим систему

$$-C_{1,p}^{(II,s)} \sin\sqrt{a_{66}^{II}\rho^{II}}\,\omega\,\dot{:}^{p}\zeta_2 + C_{2,p}^{(II,s)} \cos\sqrt{a_{66}^{II}\rho^{II}}\,\omega\,\dot{:}^{p}\zeta_2 =$$

$$= -\frac{\overline{u}_{c}^{(II,s)}(-\zeta_2) + \overline{u}_{p}^{(II,s)}(-\zeta_2)}{U_{\xi}^{(II,s)}(\xi)}$$

$$C_{1,p}^{(I,s)} \cos\sqrt{a_{66}^{I}\rho^{I}}\,\omega\,\dot{:}^{p}\zeta_1 + C_{2,p}^{(I,s)} \sin\sqrt{a_{66}^{I}\rho^{I}}\,\omega\,\dot{:}^{p}\zeta_1 =$$

$$=\frac{1}{U_\xi^{(I,s)}\omega_*^p}\left[-\frac{1}{\sqrt{a_{66}^I\rho^I}}\frac{\partial v^{(I,s-1)}(\zeta_1)}{\partial\xi}-\frac{\partial\bar{u}_c^{(I,s)}(\zeta_1)}{\partial\zeta}-\frac{\partial\bar{u}_p^{(I,s)}(\zeta_1)}{\partial\zeta}\right] \quad (2.1)$$

а для определения постоянных $C_{3,c}^{(I,s)}$ и $C_{4,c}^{(I,s)}$

$$-C_{3,c}^{(II,s)}\sin\sqrt{A_{11}^{II}\rho^{II}}\,\omega_*^c\zeta_2+C_{4,c}^{(II,s)}\cos\sqrt{A_{11}^{II}\rho^{II}}\,\omega_*^c\zeta_2=$$

$$=-\frac{\bar{v}_c^{(II,s)}(-\zeta_2)+\bar{v}_p^{(II,s)}(-\zeta_2)}{V_\xi^{(II,s)}(\xi)}$$

$$C_{3,c}^{(I,s)}\cos\sqrt{A_{11}^I\rho^I}\,\omega_*^c\zeta_1-C_{4,c}^{(I,s)}\sin\sqrt{A_{11}^I\rho^I}\,\omega_*^c\zeta_1=$$

$$=\frac{1}{V_\xi^{(I,s)}(\xi)\omega_*^c}\left[\sqrt{\frac{A_{11}^I}{\rho^I}}\frac{1}{A_{12}^I}\frac{\partial u^{(I,s-1)}(\zeta_1)}{\partial\zeta}-\frac{\partial\bar{v}_c^{(I,s)}(\zeta_1)}{\partial\zeta}-\frac{\partial\bar{v}_p^{(I,s)}(\zeta_1)}{\partial\zeta}\right] \quad (2.2)$$

Используя условия полного контакта, постоянные $C_{1,p}^{(I,s)}, C_{2,p}^{(I,s)}, C_{3,c}^{(I,s)}, C_{4,c}^{(I,s)}$ можно выразить через $C_{1,p}^{(II,s)}, C_{2,p}^{(II,s)}, C_{3,c}^{(II,s)}, C_{4,c}^{(II,s)}$. В результате получим систему

$$-C_{1,p}^{(II,s)}\sin\sqrt{a_{66}^{II}\rho^{II}}\,\omega_*^p\zeta_2+C_{2,p}^{(II,s)}\cos\sqrt{a_{66}^{II}\rho^{II}}\,\omega_*^p\zeta_2=f_1^{(s)}$$

$$\sqrt{\frac{\rho^{II}a_{66}^I}{\rho^I a_{66}^{II}}}C_{1,p}^{(II,s)}\cos\sqrt{a_{66}^I\rho^I}\,\omega_*^p\zeta_1-C_{2,p}^{(II,s)}\sin\sqrt{a_{66}^I\rho^I}\,\omega_*^p\zeta_1=f_2^{(s)} \quad (2.3)$$

и

$$-C_{3,c}^{(II,s)}\sin\sqrt{A_{11}^{II}\rho^{II}}\,\omega_*^c\zeta_2+C_{4,p}^{(II,s)}\cos\sqrt{A_{11}^{II}\rho^{II}}\,\omega_*^c\zeta_2=\psi_1^{(s)}$$

$$\sqrt{\frac{A_{11}^I\rho^{II}}{A_{11}^{II}\rho^I}}C_{3,c}^{(II,s)}\cos\sqrt{A_{11}^I\rho^I}\,\omega_*^c\zeta_1-C_{4,c}^{(II,s)}\sin\sqrt{A_{11}^I\rho^I}\,\omega_*^c\zeta_1=\psi_2^{(s)} \quad (2.4)$$

где

$$f_1^{(s)}=-\frac{\bar{u}_c^{(II,s)}(-\zeta_2)+\bar{u}_p^{(II,s)}(-\zeta_2)}{U_\xi^{(II,s)}(\xi)}$$

$$f_2^{(s)}=\frac{1}{U_\xi^{(II,s)}(\xi)}\left\{-\frac{1}{\omega_*^p}\left(\frac{\partial\bar{u}_c^{(I,s)}(\zeta_1)}{\partial\zeta}+\frac{\partial\bar{u}_p^{(I,s)}(\zeta_1)}{\partial\zeta}\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\rho^I a_{66}^I}\,\omega_*^p}\frac{\partial v^{(I,s-1)}(\zeta_1)}{\partial\xi}-\sqrt{\frac{a_{66}^I}{\rho^I}}\frac{\cos\sqrt{a_{66}^I\rho^I}\,\omega_*^p\zeta_1}{\omega_*^p}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{a_{66}^{II}}\frac{\partial v^{(II,s-1)}(0)}{\partial\xi}-\frac{1}{a_{66}^I}\frac{\partial v^{(I,s-1)}(0)}{\partial\xi}+\sqrt{\frac{\rho^{II}}{a_{66}^{II}}}\left(\frac{\partial\bar{u}_c^{(II,s)}(0)}{\partial\zeta}+\frac{\partial\bar{u}_p^{(II,s)}(0)}{\partial\zeta}\right)-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\frac{\rho^I}{a_{66}^I}}\left(\frac{\partial\bar{u}_c^{(I,s)}(0)}{\partial\zeta}+\frac{\partial\bar{u}_p^{(I,s)}(0)}{\partial\zeta}\right)\right]+\sin\sqrt{a_{66}^I\rho^I}\,\omega_*^p\zeta_1\times$$

$$\left.\times\left(\bar{u}_c^{(II,s)}(0)+\bar{u}_p^{(II,s)}(0)-\bar{u}_c^{(I,s)}(0)-\bar{u}_p^{(I,s)}(0)\right)\right\}$$

$$\psi_1^{(s)}=-\frac{\bar{v}_c^{(II,s)}(-\zeta_2)+\bar{v}_p^{(II,s)}(-\zeta_2)}{V_\xi^{(II,s)}(\xi)}$$

$$\psi_2^{(s)} = \frac{1}{V_{\xi}^{(I,s)}(\xi)} \left\{ -\frac{1}{\omega_{*}^{c}} \left(\frac{\partial \overline{v}_c^{(I,s)}(\zeta_1)}{\partial \zeta} + \frac{\partial \overline{v}_p^{(I,s)}(\zeta_1)}{\partial \zeta} \right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{A_{12}^{I} \omega_{*}^{c}} \sqrt{\frac{A_{11}^{I}}{\rho^{I}}} \frac{\partial u^{(I,s-1)}(\zeta_1)}{\partial \xi} - \sqrt{\frac{A_{11}^{I}}{\rho^{I}}} \frac{\cos \sqrt{A_{11}^{I} \rho^{I}}\, \omega_{*}^{c} \zeta_1}{\omega_{*}^{c}} \times$$

$$\times \left[-\frac{1}{A_{12}^{II}} \frac{\partial u^{(II,s-1)}(0)}{\partial \xi} + \frac{1}{A_{12}^{I}} \frac{\partial u^{(I,s-1)}(0)}{\partial \xi} + \sqrt{\frac{\rho^{II}}{A_{11}^{II}}} \left(\frac{\partial \overline{v}_c^{(II,s)}(0)}{\partial \zeta} + \frac{\partial \overline{v}_p^{(II,s)}(0)}{\partial \zeta} \right) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{\rho^{I}}{A_{11}^{I}}} \left(\frac{\partial \overline{v}_c^{(I,s)}(0)}{\partial \zeta} + \frac{\partial \overline{v}_p^{(I,s)}(0)}{\partial \zeta} \right) \right] + \sin \sqrt{A_{11}^{I} \rho^{I}}\, \omega_{*}^{c} \zeta_1 \times$$

$$\left. \times \left(\overline{v}_c^{(II,s)}(0) + \overline{v}_p^{(II,s)}(0) - \overline{v}_c^{(I,s)}(0) - \overline{v}_p^{(I,s)}(0) \right) \right\}$$

будут известными функциями.

В силу (1.5), (1.6), т.е. имея в виду, что ω_{*}^{p} – корень уравнения (1.6), ω_{*}^{c} – корень уравнения (1.5), определители алгебраических систем (2.3) и (2.4) будут отличны от нуля, следовательно, из этих систем однозначно определятся постоянные $C_{1,p}^{(II,s)}$, $C_{2,p}^{(II,s)}$, $C_{3,c}^{(II,s)}$, $C_{4,c}^{(II,s)}$.

Таким образом, решение системы (1.8) будет содержать для произвольного s постоянные $C_{1,c}^{(J,s)}$, $C_{2,c}^{(J,s)}$, $C_{3,p}^{(J,s)}$, $C_{4,p}^{(J,s)}$, которые присутствуют при $s = 0$. Структура этого решения отличается от структуры для исходного приближения функциями, которые являются известными. Поскольку собственные функции, соответствующие $s = 0$, составляют ортогональную систему функций на отрезке $\left[-\zeta_2, \zeta_1\right]$, то известным приемом [6] можно удовлетворить начальным условиям, откуда будет следовать, что высшие приближения лишь влияют на амплитуды собственных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А., Саркисян Л.С. К определению частот собственных колебаний двухслойной ортотропной полосы.-Сб.: Инженерно-физические проблемы новой техники. М.: Изд. МГТУ, 1996, с.128-129.
2. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.-ПММ, 1962, т. 26, вып. 4, с.668-686.
3. Агаловян Л.А. О частотах собственных колебаний анизотропной полосы.-Сб. юбилейн. научн. конф. к 60-летию ГПИ. Армения, Гюмри. Изд. "Высшая школа", 1994, с. 23-26.
4. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.-М.: Наука, 1973. 276с.
5. Найфе А.Х. Методы возмущений.-М.: Мир, 1976. 455с.
6. Новацкий А.Х. Динамика сооружений.-М.: Госстройиздат, 1963. 376с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 21.07.1997

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 539.374

СВОБОДНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Акопян А.С.[1)], Киракосян Р.М.[2)]

Ա.Ս. Հակոբյան, Ռ.Մ. Կիրակոսյան

Գծայնորեն փոփոխական հաստության օրթոտրոպ օղակաձև սալի առանցքասիմետրիկ տատանումները ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ

Սալերի [1] ճշգրտված տեսության հիման վրա ստացվել է գծայնորեն փոփոխական հաստության օրթոտրոպ օղակաձև սալի առանցքասիմետրիկ ազատ տատանումների դիֆերենցիալ հավասարումը՝ ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ: Սալի սեփական հաճախությունների որոշման համար օգտագործվել է կոլոկացիաների մեթոդը՝ անհայտ ֆունկցիան վերածելով եռանկյունաչափական շարքի: Թվային հաշվարկները կատարվել են սալի երկրաչափական և մեխանիկական պարամետրերի մի քանի բնորոշ արժեքների համար: Վերջնական արդյունքների վերլուծման հիման վրա արվել են որակական եզրակացություններ ընդլայնական սահքի ազդեցության վերաբերյալ:

A.S. Hakobian, R.M. Kirakosian

The free axis symmetrical oscillations of orthotropic circular plates of linear variable thickness with calculation cross displacements

На основе уточненной теории пластин [1] получено дифференциальное уравнение свободных осесимметричных колебаний ортотропной кольцевой пластинки линейно-переменной толщины с учетом поперечного сдвига. Для определения собственных частот пластинки применен метод коллокаций, разложив неизвестную функцию в тригонометрический ряд. Численные расчеты проводились для некоторых характерных значений геометрических и механических параметров пластинки. На основе анализа окончательных результатов проделаны качественные заключения о влиянии поперечного сдвига.

1. Рассмотрим ортотропную кольцевую пластинку с внутренним и внешним радиусами a и b, толщина которой h меняется по закону

$$h=h_0+h_1 r,\quad h_1>-\frac{h_0}{b},\quad a\le r\le b \tag{1.1}$$

Здесь r – радиальная координата, h_0 и h_1 – геометрические параметры пластинки. Пусть осесимметричным поперечным возмущением пластинка выведена из состояния равновесия и оставлена самой себе. Исследуем возникающие свободные колебания при заданных условиях опирания пластинки с учетом влияния деформаций поперечных сдвигов. Аналогичная задача в классической постановке для изотропной пластинки рассмотрена в работе [2].

Введем обозначения:

$$r=\rho b,\quad z=h_0\delta,\quad \frac{h_0}{b}=s,\quad \frac{h_1}{s}=\gamma,\quad \frac{a}{b}=k,\quad h=h_0H,\quad \frac{B_0}{B_r}=m^2,\quad a_r B_r=\chi$$

---

1) При поддержке Американского Университета Армении.
2) При спонсорстве общества с ограниченной ответственностью "Анушик".

$$\frac{dh_0^2\omega_n^2}{B_r} = \Omega_n^2, \; u_r = h_0 u, \; w = h_0 f \cos\omega_n t, \; \varphi_1 = B_r \varphi \cos\omega_n t, \; \frac{df}{d\rho} = \alpha$$

$$s\alpha - \chi\varphi = y, \quad N_r = B_r h_0 \overline{N}_r \cos\omega_n t, \quad M_r = B_r h_0^2 \overline{M}_r \cos\omega_n t$$

$$M_\theta = B_r h_0^2 \overline{M}_\theta \cos\omega_n t \tag{1.2}$$

Здесь t – время, δ и ρ – поперечная и радиальная безразмерные координаты; d – плотность; B_0, B_r, a_r – механические параметры материала [3]; w – прогиб; φ_1 – функция, описывающая распределение по толщине поперечного сдвига [1], M_r, M_θ и N_r – изгибающие моменты и поперечная сила, ω_n – круговая частота собственных колебаний пластинки.

С учетом (1.1) и (1.2) находим

$$H = 1 + \gamma\rho, \quad u = -\delta y \tag{1.3}$$

$$\overline{N}_r = \frac{H}{12}\left[8\varphi - s^2\gamma H\left(\frac{dy}{d\rho} + \nu_{r0} m^2 \frac{y}{\rho}\right)\right] \tag{1.4}$$

$$\overline{M}_r = -\frac{sH^3}{12}\left(\frac{dy}{d\rho} + \nu_{r\theta} m^2 \frac{y}{\rho}\right) \tag{1.5}$$

$$\overline{M}_\theta = -\frac{sm^2 H^3}{12}\left(\nu_{r0}\frac{dy}{d\rho} + \frac{y}{\rho}\right) \tag{1.6}$$

где ν_{r0} – соответствующий коэффициент Пуассона материала.

Известно [3], что уравнения свободных колебаний пластинки при пренебрежении инерцией вращения и тангенциальных перемещений можно получить из соответствующих уравнений изгиба, заменив интенсивность поперечной распределенной нагрузки выражением

$$Z = -dh\frac{d^2 w}{dt^2} \tag{1.7}$$

Имея в виду это обстоятельство и осесимметричность колебаний, третье и четвертое уравнения движения дифференциального элемента срединной плоскости пластинки представим в виде

$$\frac{d\overline{N}_r}{d\rho} + \frac{\overline{N}_r}{\rho} + \frac{Hf}{s}\Omega_n^2 = 0 \tag{1.8}$$

$$\frac{d\overline{M}_r}{d\rho} + \frac{\overline{M}_r - \overline{M}_\theta}{\rho} - \frac{\overline{N}_r}{s} = 0 \tag{1.9}$$

Подставив выражения $\overline{N}_r, \overline{M}_r$ и $\overline{M}_0$ из (1.4)–(1.6) в уравнение (1.9), для функции φ получим

$$\varphi = -\frac{s^2 H}{8}\left[H\frac{d^2 y}{d\rho^2} + \left(2\gamma + \frac{H}{\rho}\right)\frac{dy}{d\rho} + \frac{m^2}{\rho}\left(2\nu_{r0}\gamma - \frac{H}{\rho}\right)y\right] \tag{1.10}$$

С учетом (1.4), (1.9) и (1.10) из уравнения (1.8) следует:

$$f = \frac{s^3}{12\Omega_n^2}\left[H^2\frac{d^3 y}{d\rho^3} + 2H\left(3\gamma + \frac{H}{\rho}\right)\frac{d^2 y}{d\rho^2} + \left(6\gamma^2 + 6\frac{\gamma H}{\rho} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 3\nu_{r0}\gamma m^2\frac{H}{\rho} - m^2\frac{H^2}{\rho^2}\right)\frac{dy}{d\rho} + m^2\left(6\nu_{r0}\gamma^2 + \frac{H^2}{\rho^2} - 3\frac{\gamma H}{\rho}\right)\frac{y}{\rho}\right] \tag{1.11}$$

Использовав (1.10) и (1.11), уравнение

$$s\frac{df}{d\rho}-\chi\varphi=y \tag{1.12}$$

можно привести к виду

$$\frac{d^4y}{d\rho^4}+A\frac{d^3y}{d\rho^3}+B\frac{d^2y}{d\rho^2}+C\frac{dy}{d\rho}+Dy=0 \tag{1.13}$$

где

$$A=\frac{2}{H}\left(4\gamma+\frac{H}{\rho}\right)$$

$$B=\frac{1}{H^2}\left(12\gamma^2+10\frac{\gamma H}{\rho}-2\frac{H^2}{\rho^2}-\frac{m^2H^2}{\rho^2}+3\nu_{r\theta}\gamma m^2\frac{H}{\rho}+\frac{3\chi H^2\Omega_n^2}{2s^2}\right)$$

$$C=\frac{1}{\rho H^2}\left[6\gamma^2-6\frac{\gamma H}{\rho}+9\nu_{r\theta}m^2\gamma^2-\frac{3\nu_{r\theta}\gamma m^2H^2}{\rho}-\frac{5\gamma m^2H}{\rho}+\right.$$

$$\left.+\frac{3m^2H^2}{\rho^2}+\frac{3\chi H\rho\Omega_n^2}{2s^2}\left(2\gamma+\frac{H}{\rho}\right)\right]$$

$$D=\frac{m^2}{H^2\rho^2}\left\{\frac{8\gamma H}{\rho}-\frac{3H^2}{\rho^2}-3\gamma^2-6\nu_{r\theta}\gamma^2+\right.$$

$$\left.+\frac{12\rho\Omega_n^2}{s^4}\left[\frac{\chi Hs^2}{8}\left(2\nu_{r\theta}\gamma-\frac{H}{\rho}\right)-\frac{\rho}{m^2}\right]\right\} \tag{1.14}$$

Будем считать, что краевые условия на внутреннем и внешнем контурах пластинки $\rho=k$ и $\rho=1$ произвольны. Они могут быть сформулированы в виде любой возможной комбинации следующих условий:

а) Условия свободного края:

$$\frac{dy}{d\rho}+\nu_{r\theta}m^2\frac{y}{\rho}=0, \qquad (M_r=0)$$

$$\rho\nu_{r\theta}\frac{d^2y}{d\rho^2}+(1+\nu_{r\theta})\frac{dy}{d\rho}=0, \qquad (N_r=0) \tag{1.15}$$

б) Условия шарнирного опирания:

$$\frac{dy}{d\rho}+\nu_{r\theta}m^2\frac{y}{\rho}=0, \qquad (M_r=0)$$

$$H\frac{d^3y}{d\rho^3}+2\left(3\gamma+\frac{H}{\rho}\right)\frac{d^2y}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho\nu_{r\theta}}\left[3\gamma\left(1+2\nu_{r\theta}+\nu_{r\theta}^2m^2\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{H}{\rho}\left(1+\nu_{r\theta}m^2\right)\right]\frac{dy}{d\rho}=0, \qquad (w=0) \tag{1.16}$$

в) Условия заделки:

$$y=0, \qquad (u_r=0)$$

$$H^2\frac{d^3y}{d\rho^3}+2H\left(3\gamma+\frac{H}{\rho}\right)\frac{d^2y}{d\rho^2}+\left[6\gamma^2+\frac{3\gamma H}{\rho}\left(2+\nu_{r\theta}m^2\right)-\right.$$

$$-\frac{m^2 h^{-2}}{\rho^2}\Bigg]\frac{dy}{d\rho}=0 \qquad (w=0) \qquad (1.17)$$

Докажем, что собственные числа краевой задачи для однородного дифференциального уравнения (1.13) являются круговыми частотами свободных колебаний пластинки при соответствующих условиях крепления и что пластинка других частот не имеет. Очевидно, что для этого достаточно показать, что из условия $y \neq 0$ вытекает условие $f \neq 0\ (w \neq 0)$, а из условия $y \equiv 0$ – условие $f \equiv 0\ (w \equiv 0)$. Рассмотрим эти два утверждения в отдельности.

Сначала докажем, что при $y \neq 0$ имеет место $f \neq 0$. Допустим обратное, то есть $f \equiv 0$. Тогда $df / d\alpha = 0$ и из (1.12) следует $\varphi \neq 0$, что означает $\tau_{rz} \neq 0$. Это противоречит физическому смыслу задачи, поскольку получится, что при отсутствии прогибов (изгиба) возникает поперечное касательное напряжение. Следовательно, обратное допущение неверно и при $y \neq 0$ справедливо $f \neq 0$.

Доказательство же другого утверждения, согласно которому при $y \equiv 0$ имеет место равенство $f \equiv 0$, непосредственно вытекает из (1.11).

Таким образом, нахождение круговых частот собственных колебаний ортотропной кольцевой пластинки линейно-переменной толщины с учетом влияния деформации поперечного сдвига сводится к решению задачи о собственных числах Ω_n соответствующей краевой задачи для однородного дифференциального уравнения (1.13).

2. Для нахождения частот свободных колебаний пластинки Ω_n удобно пользоваться методом коллокаций, решение дифференциального уравнения (1.13) представив в усеченный тригонометрический ряд

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{N}\left(a_i\cos\frac{\pi i\rho}{1-k}+b_i\sin\frac{\pi i\rho}{1-k}\right) \qquad (2.1)$$

Здесь a_i и b_i – неизвестные коэффициенты.

В нижеприведенных таблицах представлены стократно увеличенные безразмерные значения частот первых двух осесимметричных форм колебаний пластинки, внутренний край которой $\rho = k$ свободен, а внешний край $\rho = 1$ – шарнирно оперт. Эти значения найдены с точностью до четырех значащих цифр, для чего понадобилось удерживать 31 член ряда (2.1). Рассмотрены случаи некоторых характерных значений механико-геометрических параметров пластинки E_0 / E_r, χ, k, γ и s. В последних двух строках таблиц приведены поправки в процентах

$$\Delta_n=\frac{\Omega_n^{\text{кл}}-\Omega_n}{\Omega_n^{\text{кл}}}100\%, \qquad (n=1,2) \qquad (2.2)$$

вносимые в значения частот свободных колебаний пластинки с учетом поперечного сдвига. Через $\Omega_n^{\text{кл}}$ обозначены частоты, соответствующие классической постановке задачи, то есть случаю $\chi = 0$.

Данные таблиц приводят к следующим заключениям.

1. Учет влияния поперечного сдвига, как и следовало ожидать, и в случае пластин переменной толщины приводит к уменьшению значений собственных частот.

2. Величина поправки существенным образом зависит от поведения изменения относительной толщины пластинки, то есть от значений параметров s и γ. С ростом этих величин поправка увеличивается.

Таблица 1

$k = 0.2,\ \nu_{r\theta} = 0.3,\ E_\theta = 0.5E_r$							
		$s = 0.05$				$s = 0.3$	
		$\gamma = 0$		$\gamma = 1$		$\gamma = -0.5$	
		Ω_1	Ω_2	Ω_1	Ω_2	Ω_1	Ω_2
χ	0	2.14	6.09	3.57	9.82	6.45	5.09
	5	2.11	5.77	3.42	8.66	6.30	4.04
	10	2.07	5.50	3.29	7.83	6.15	3.46
Δ_1		1.72	5.19	4.21	11.9	2.25	20.5
Δ_2		3.36	9.66	7.95	20.3	4.63	32.1
$k = 0.2,\ \nu_{r\theta} = 0.3,\ E_\theta = E_r$							
χ	0	2.27	6.19	3.70	9.93	8.78	55.1
	5	2.22	5.86	3.54	8.73	8.37	42.6
	10	2.18	5.58	3.39	7.88	8.02	36.0
Δ_1		1.89	5.33	4.52	12.1	4.63	22.6
Δ_2		3.70	9.89	8.52	20.6	8.67	34.7
$k = 0.2,\ \nu_{r\theta} = 0.3,\ E_\theta = 2E_r$							
χ	0	2.48	6.38	3.95	10.1	11.7	62.3
	5	2.43	6.03	3.75	8.87	10.8	45.9
	10	2.37	5.72	3.57	7.98	10.0	38.0
Δ_1		2.28	5.59	5.18	12.5	7.95	26.3
Δ_2		4.41	10.3	9.68	21.2	14.3	39.0
$k = 0.1,\ \nu_{r\theta} = 0.3,\ E_\theta = 0.5E_r$							
χ	0	1.94	5.17	3.09	8.04	7.11	48.2
	5	1.90	4.94	2.97	7.25	6.88	38.0
	10	1.87	4.73	2.87	6.66	6.67	32.3
Δ_1		1.66	4.55	3.76	9.79	3.19	21.2
Δ_2		3.26	8.53	7.14	17.2	6.16	32.9
$k = 0.1,\ \nu_{r\theta} = 0.3,\ E_\theta = E_r$							
χ	0	2.12	5.40	3.28	8.31	9.19	54.0
	5	2.07	5.14	3.14	7.46	8.69	40.7
	10	2.03	4.91	3.01	6.82	8.27	34.0
Δ_1		1.99	4.90	4.34	10.3	5.35	24.6
Δ_2		3.88	9.14	8.18	18.0	9.96	37.0
$k = 0.1,\ \nu_{r\theta} = 0.3,\ E_\theta = 2E_r$							
χ	0	2.39	5.80	3.59	8.81	11.8	62.1
	5	2.33	5.48	3.40	7.82	10.8	44.0
	10	2.27	5.21	3.23	7.10	9.98	35.9
Δ_1		2.55	5.56	5.39	11.2	8.62	29.2
Δ_2		4.92	10.3	10.0	19.4	15.3	42.2

3. Поправка зависит от характера анизотропии материала. Как и следовало ожидать, она возрастает с уменьшением относительного модуля сдвига материала поперечного направления (с увеличением параметра χ). Величина поправки сильно зависит еще и от анизотропии материала в плоскости пластинки. Причем с ростом отношения модулей упругости кольцевого и радиального направлений E_0 / E_r она увеличивается.

4. Уменьшение радиуса внутреннего края пластинки приводит к уменьшению значений собственных частот.

5. Учет влияния поперечного сдвига на значения второй частоты сказывается качественно одинаково, но намного сильнее, чем на значения первой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киракосян Р.М. К уточненной теории цилиндрически ортотропных пластин переменной толщины. -Изв. НАН Армении, Механика, 1994, т.47, №5-6, с.64-73.
2. Сони С., Амба-Рао Ч. Осесимметричные колебания кольцевых пластинок переменной толщины.-В сб.: Механика, колебания и устойчивость многосвязных тонкостенных систем. М.: Изд. Мир, 1984, в. 32, с. 7-16.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин.-М.: Наука, 1987. 360с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
1.09.1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ПЛАСТИНОК ПРИ НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Барсегян В. М.

Վ. Մ. Բարսեղյան

Երկշերտ անիզոտրոպ ջերմաառաձգական սալերի եռաչափ ներքին խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը շերտերի ոչ լրիվ կոնտակտի դեպքում

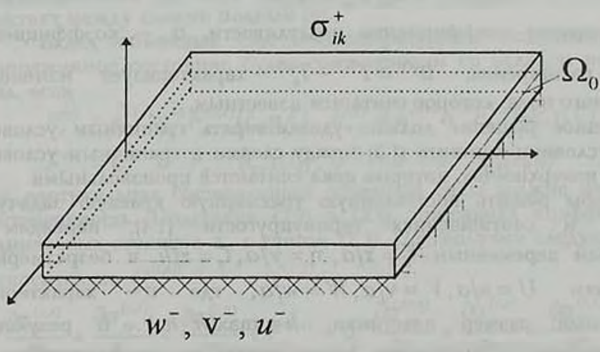
Ուսումնասիրվում է երկշերտ անիզոտրոպ սալերի ներքին լարվածադեֆորմացիոն վիճակը շերտերի միջև ոչ լրիվ կոնտակտի դեպքում: Ցույց է տրված, որ լարումների թենզորի և տեղափոխման վեկտորի ասիմպտոտիկաները սկզբունքորեն տարբերվում են սալերի դասական տեսության համապատասխան մեծությունների ասիմպտոտիկայից: Դուրս են բերված ռեկուրենտ բանաձևեր սալի ներքին խնդրին համապատասխանող լարումների և տեղափոխությունների որոշման համար:

V. M. Barsegian

The asimptonic solution of the three-dimensional interior problem for two-layered anisotropic plates in case of incomplete contact between layers

На основе уравнений трехмерной задачи теории термоупругости исследуется внутреннее напряженно-деформированное состояние двухслойной анизотропной пластинки, когда контакт между слоями неполный. Асимптотическим методом выведены рекуррентные формулы для определения компонентов тензора напряжений и вектора перемещения.

1. Требуется найти решение уравнений пространственной задачи теории термоупругости анизотропного тела в области $\Omega=\{x,y,z\colon x,y\in\Omega_0,\ -h_2\le z\le h_1,\ h<<a\}$ (фиг.1). Анизотропия самая общая. На пластинку действуют заданные объемные силы с компонентами $F_x^{(i)}(x,y,z)$, $F_y^{(i)}(x,y,z)$, $F_z^{(i)}(x,y,z)$, $i=1,2$ и температурные воздействия.



Фиг. 1

На лицевых плоскостях $z=-h_2$ и $z=h_1$ заданы условия

$$\sigma_z = \varepsilon^{-1}\sigma_z^-(x,y),\ \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^-(x,y),\ \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^-(x,y) \text{ для } z = h_1 \tag{1.1}$$

$$w = \varepsilon^{-1}w^-(x,y),\ u = \varepsilon^{-1}u^-(x,y),\ v = \varepsilon^{-1}v^-(x,y) \text{ для } z = -h_2 \tag{1.2}$$

Рассматривается неполный контакт между слоями:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)} = \tau_{x0}(x,y),\ \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} = \tau_{y0}(x,y) \\ &\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)},\quad w^{(1)} = w^{(2)} \end{aligned}\right\} \text{при } z = 0 \tag{1.3}$$

Функции $\tau_{x0}(x,y)$, $\tau_{y0}(x,y)$ считаются заданными и в зависимости от выбранной модели взаимодействия слоев могут иметь различный вид. В общем случае задача сводится к решению следующей системы уравнений и соотношений термоупругости анизотропного тела:

$$\frac{\partial\sigma_x^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}^{(i)}}{\partial z} + F_x^{(i)} = 0,\quad \frac{\partial\sigma_{xy}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{yz}^{(i)}}{\partial z} + F_y^{(i)} = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z^{(i)}}{\partial z} + F_z^{(i)} = 0$$

$$\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} = a_{11}^{(i)}\sigma_x^{(i)} + a_{12}^{(i)}\sigma_y^{(i)} + a_{13}^{(i)}\sigma_z^{(i)} + a_{14}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i)} + a_{15}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i)} + a_{16}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)} + \alpha_{11}^{(i)}\theta^{(i)}$$

$$\frac{\partial v^{(i)}}{\partial y} = a_{12}^{(i)}\sigma_x^{(i)} + a_{22}^{(i)}\sigma_y^{(i)} + a_{23}^{(i)}\sigma_z^{(i)} + a_{24}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i)} + a_{25}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i)} + a_{26}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)} + \alpha_{22}^{(i)}\theta^{(i)}$$

$$\frac{\partial w^{(i)}}{\partial z} = a_{13}^{(i)}\sigma_x^{(i)} + a_{23}^{(i)}\sigma_y^{(i)} + a_{33}^{(i)}\sigma_z^{(i)} + a_{34}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i)} + a_{35}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i)} + a_{36}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)} + \alpha_{33}^{(i)}\theta^{(i)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(i)}}{\partial y} &= a_{14}^{(i)}\sigma_x^{(i)} + a_{24}^{(i)}\sigma_y^{(i)} + a_{34}^{(i)}\sigma_z^{(i)} + a_{44}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i)} + \\ &\quad + a_{45}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i)} + a_{46}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)} + \alpha_{23}^{(i)}\theta^{(i)} \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(i)}}{\partial z} &= a_{15}^{(i)}\sigma_x^{(i)} + a_{25}^{(i)}\sigma_y^{(i)} + a_{35}^{(i)}\sigma_z^{(i)} + a_{45}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i)} + \\ &\quad + a_{55}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i)} + a_{56}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)} + \alpha_{13}^{(i)}\theta^{(i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(i)}}{\partial x} &= a_{16}^{(i)}\sigma_x^{(i)} + a_{26}^{(i)}\sigma_y^{(i)} + a_{36}^{(i)}\sigma_z^{(i)} + a_{46}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i)} + \\ &\quad + a_{56}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i)} + a_{66}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)} + \alpha_{12}^{(i)}\theta^{(i)} \end{aligned}$$

где a_{ij} – упругие коэффициенты податливости, α_{ij} – коэффициенты теплового расширения, $\theta^{(i)} = T^{(i)} - T_0^{(i)}$ характеризует изменение температурного поля, которое считается известным.

Найденное решение должно удовлетворять граничным условиям (1.1), (1.2), условиям контакта (1.3) между слоями и граничным условиям на боковых поверхностях, которые пока считаются произвольными.

2. Чтобы решить поставленную трехмерную краевую задачу, в уравнениях и соотношениях термоупругости (1.4), перейдем к безразмерным переменным $\xi = x/a$, $\eta = y/a$, $\zeta = z/h$ и безразмерным перемещениям $U = u/a$, $V = v/a$, $W = w/a$, где a – характерный тангенциальный размер пластинки, $h = \max(h_1, h_2)$. В результате получим следующую сингулярно возмущенную малым параметром ε систему:

$$\frac{\partial\sigma_x^{(i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(i)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{xz}^{(i)}}{\partial\zeta}+aF_x^{(i)}=0,\ \frac{\partial\sigma_{xy}^{(i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_y^{(i)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{yz}^{(i)}}{\partial\zeta}+aF_y^{(i)}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}^{(i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(i)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_z^{(i)}}{\partial\zeta}+aF_z^{(i)}=0,$$

$$\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\xi}=a_{11}^{(i)}\sigma_x^{(i)}+a_{12}^{(i)}\sigma_y^{(i)}+\ldots+\alpha_{11}^{(i)}\theta^{(i)},$$

$$\frac{\partial V^{(i)}}{\partial\eta}=a_{12}^{(i)}\sigma_x^{(i)}+a_{22}^{(i)}\sigma_y^{(i)}+\ldots+\alpha_{22}^{(i)}\theta^{(i)} \tag{2.1}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial W^{(i)}}{\partial\zeta}=a_{13}^{(i)}\sigma_x^{(i)}+a_{23}^{(i)}\sigma_y^{(i)}+\ldots+\alpha_{33}^{(i)}\theta^{(i)}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial V^{(i)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(i)}}{\partial\eta}=a_{14}^{(i)}\sigma_x^{(i)}+a_{24}^{(i)}\sigma_y^{(i)}+\ldots+\alpha_{23}^{(i)}\theta^{(i)}$$

$$\frac{\partial W^{(i)}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\zeta}=a_{15}^{(i)}\sigma_x^{(i)}+a_{25}^{(i)}\sigma_y^{(i)}+\ldots+\alpha_{13}^{(i)}\theta^{(i)}$$

$$\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(i)}}{\partial\xi}=a_{16}^{(i)}\sigma_x^{(i)}+a_{26}^{(i)}\sigma_y^{(i)}+\ldots+\alpha_{12}^{(i)}\theta^{(i)}$$

Решение системы (2.1) складывается из решений внутренней задачи и пограничного слоя [1-5]. Решение внутренней задачи, или проникающее решение ищем в виде:

$$Q^{(i)}=\varepsilon^{q_i+s}Q^{(i,s)}(\xi,\eta,\zeta),\quad s=\overline{0,N} \tag{2.2}$$

где Q — любая из искомых величин, а суммирование ведется по s от нуля до числа приближений, N,q_i — целые числа, которые должны быть такими, чтобы получить непротиворечивую систему относительно $Q^{(i,s)}$. Эта цель достигается при

$$q_i=-1\ \text{для}\ \sigma_x^{(i)},\sigma_y^{(i)},\sigma_z^{(i)},\sigma_{xy}^{(i)},U^{(i)},V^{(i)},W^{(i)}$$

$$q_i=0\ \text{для}\ \sigma_{xz}^{(i)},\sigma_{yz}^{(i)} \tag{2.3}$$

Асимптотика (2.2), (2.3) принципиально отличается от асимптотики тех же величин в классической теории пластинок [1-3], асимптотики неклассических краевых задач [6,7] и двухслойных пластинок, когда контакт между слоями полный [8].

Вклад объемных сил и температурных воздействий в общее напряженное состояние будет соизмеримым со вкладом поверхностных сил, если

$$F_x^{(i)}=\varepsilon^{-1+s}a^{-1}F_x^{(i,s)}(\xi,\eta,\zeta),\ F_y^{(i)}=\varepsilon^{-1+s}a^{-1}F_y^{(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

$$F_z^{(i)}=\varepsilon^{-2+s}a^{-1}F_z^{(i,s)}(\xi,\eta,\zeta),\ \theta^{(i)}=\varepsilon^{-1+s}\theta^{(i,s)}(\xi,\eta,\zeta) \tag{2.6}$$

т.е. вертикальная составляющая объемной силы должна иметь большую интенсивность. Подставив (2.2) в (2.1), приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, с учетом (2.3), (2.6) получим следующую систему относительно $Q^{(i,s)}$:

$$\frac{\partial\sigma_x^{(i,s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(i,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(i,s)}}{\partial\zeta}+F_x^{(i,s)}=0,\ \frac{\partial\sigma_{xy}^{(i,s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_y^{(i,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(i,s)}}{\partial\zeta}+F_y^{(i,s)}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}^{(i,s-2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(i,s-2)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{z}^{(i,s)}}{\partial\zeta}+F_{z}^{(i,s)}=0,$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U^{(i,s)}}{\partial\xi}=a_{11}^{(i)}\sigma_{x}^{(i,s)}+a_{12}^{(i)}\sigma_{y}^{(i,s)}+a_{13}^{(i)}\sigma_{z}^{(i,s)}+\\
&+a_{14}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-1)}+a_{15}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-1)}+a_{16}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s)}+\alpha_{11}^{(i)}\theta^{(i,s)}\\
&\frac{\partial V^{(i,s)}}{\partial\eta}=a_{12}^{(i)}\sigma_{x}^{(i,s)}+a_{22}^{(i)}\sigma_{y}^{(i,s)}+a_{23}^{(i)}\sigma_{z}^{(i,s)}+\\
&+a_{24}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-1)}+a_{25}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-1)}+a_{26}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s)}+\alpha_{22}^{(i)}\theta^{(i,s)}\\
&\frac{\partial W^{(i,s)}}{\partial\zeta}=a_{13}^{(i)}\sigma_{x}^{(i,s-1)}+a_{23}^{(i)}\sigma_{y}^{(i,s-1)}+a_{33}^{(i)}\sigma_{z}^{(i,s-1)}+\\
&+a_{34}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-2)}+a_{35}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-2)}+a_{36}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s-1)}+\alpha_{33}^{(i)}\theta^{(i,s-1)}\\
&\frac{\partial V^{(i,s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(i,s-1)}}{\partial\eta}=a_{14}^{(i)}\sigma_{x}^{(i,s-1)}+a_{24}^{(i)}\sigma_{y}^{(i,s-1)}+a_{34}^{(i)}\sigma_{z}^{(i,s-1)}+\\
&+a_{44}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-2)}+a_{45}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-2)}+a_{46}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s-1)}+\alpha_{23}^{(i)}\theta^{(i,s-1)}\\
&\frac{\partial W^{(i,s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U^{(i,s)}}{\partial\zeta}=a_{15}^{(i)}\sigma_{x}^{(i,s-1)}+a_{25}^{(i)}\sigma_{y}^{(i,s-1)}+a_{35}^{(i)}\sigma_{z}^{(i,s-1)}+\\
&+a_{45}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-2)}+a_{55}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-2)}+a_{56}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s-1)}+\alpha_{13}^{(i)}\theta^{(i,s-1)}\\
&\frac{\partial U^{(i,s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(i,s)}}{\partial\xi}=a_{16}^{(i)}\sigma_{x}^{(i,s)}+a_{26}^{(i)}\sigma_{y}^{(i,s)}+a_{36}^{(i)}\sigma_{z}^{(i,s)}+\\
&+a_{46}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-1)}+a_{56}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-1)}+a_{66}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s)}+\alpha_{12}^{(i)}\theta^{(i,s)}
\end{aligned}\tag{2.7}$$

Учитывая, что $Q^{(s)}\equiv 0$ при $s<0$, из системы (2.7) можно определить все неизвестные величины с точностью некоторых функций, зависящих только от переменных ξ,η. Приведем процедуру решения системы (2.7). Из третьего уравнения равновесия определяется $\sigma_{z}^{(i,s)}$, из восьмого, седьмого, шестого уравнений системы определяются $U^{(i,s)},V^{(i,s)},W^{(i,s)}$, а из четвертого, пятого, девятого уравнений, с учетом уже определенных величин, определяются $\sigma_{x}^{(i,s)},\sigma_{y}^{(i,s)},\sigma_{xy}^{(i,s)}$. Вернувшись затем к первым двум уравнениям равновесия (2.7), определим $\sigma_{xz}^{(i,s)},\sigma_{yz}^{(i,s)}$.

В результате имеем решение

$$\begin{aligned}
&\sigma_{z}^{(i,s)}=\sigma_{z0}^{(i,s)}(\xi,\eta)+\sigma_{z}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta),\ W^{(i,s)}=w^{(i,s)}(\xi,\eta)+w^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)\\
&V^{(i,s)}=\mathrm{v}^{(i,s)}(\xi,\eta)+\mathrm{v}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta),\ U^{(i,s)}=u^{(i,s)}(\xi,\eta)+u^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)\\
&\sigma_{x}^{(i,s)}=A_{11}^{(i)}\sigma_{z0}^{(i,s)}+l_{11}^{(i)}u^{(i,s)}+l_{12}^{(i)}\mathrm{v}^{(i,s)}+\sigma_{x}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)\\
&\sigma_{y}^{(i,s)}=A_{21}^{(i)}\sigma_{z0}^{(i,s)}+l_{21}^{(i)}u^{(i,s)}+l_{22}^{(i)}\mathrm{v}^{(i,s)}+\sigma_{y}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)\\
&\sigma_{xy}^{(i,s)}=A_{31}^{(i)}\sigma_{z0}^{(i,s)}+l_{31}^{(i)}u^{(i,s)}+l_{32}^{(i)}\mathrm{v}^{(i,s)}+\sigma_{xy}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)\\
&\sigma_{xz}^{(i,s)}=\sigma_{xz0}^{(i,s)}(\xi,\eta)-\left(A_{11}^{(i)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial\xi}+A_{31}^{(i)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial\eta}\right)\zeta+\\
&+\zeta\left(L_{11}\left(B_{ij}^{(i)}\right)u^{(i,s)}+L_{12}\left(B_{ij}^{(i)}\right)\mathrm{v}^{(i,s)}\right)+\sigma_{xz}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)
\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$\sigma_{yz}^{(i,s)} = \sigma_{yz0}^{(i,s)}(\xi,\eta) - \left(A_{21}^{(i)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial \eta} + A_{31}^{(i)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial \xi} \right)\zeta +$$

$$+\zeta\left(L_{12}\left(B_{ij}^{(i)}\right)u^{(i,s)} + L_{22}\left(B_{ij}^{(i)}\right)v^{(i,s)}\right) + \sigma_{yz}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

Здесь $A_{kj}^{(i)}$ – постоянные коэффициенты упругости, а $l_{kj}^{(i)}, L_{kj}\left(B_{kj}^{(i)}\right)$ – дифференциальные операторы:

$$A_{1,k-2}^{(i)} = -\left(a_{1k}^{(i)}B_{11}^{(i)} + a_{2k}^{(i)}B_{12}^{(i)} + a_{6k}^{(i)}B_{16}^{(i)}\right)$$

$$A_{2,k-2}^{(i)} = -\left(a_{1k}^{(i)}B_{12}^{(i)} + a_{2k}^{(i)}B_{22}^{(i)} + a_{6k}^{(i)}B_{26}^{(i)}\right)$$

$$A_{3,k-2}^{(i)} = -\left(a_{1k}^{(i)}B_{16}^{(i)} + a_{2k}^{(i)}B_{26}^{(i)} + a_{6k}^{(i)}B_{66}^{(i)}\right), \quad (k = 3,4,5)$$

$$B_{11}^{(i)} = \left(a_{22}^{(i)}a_{66}^{(i)} - \left(a_{26}^{(i)}\right)^2\right)/\Delta^{(i)}, \quad B_{22}^{(i)} = \left(a_{11}^{(i)}a_{66}^{(i)} - \left(a_{16}^{(i)}\right)^2\right)/\Delta^{(i)}$$

$$B_{12}^{(i)} = \left(a_{16}^{(i)}a_{26}^{(i)} - a_{12}^{(i)}a_{66}^{(i)}\right)/\Delta^{(i)}, \quad B_{66}^{(i)} = \left(a_{11}^{(i)}a_{22}^{(i)} - \left(a_{12}^{(i)}\right)^2\right)/\Delta^{(i)}$$

$$B_{16}^{(i)} = \left(a_{12}^{(i)}a_{26}^{(i)} - a_{22}^{(i)}a_{16}^{(i)}\right)/\Delta^{(i)}, \quad B_{26}^{(i)} = \left(a_{12}^{(i)}a_{16}^{(i)} - a_{11}^{(i)}a_{26}^{(i)}\right)/\Delta^{(i)}$$

$$\Delta^{(i)} = \left(a_{11}^{(i)}a_{22}^{(i)} - \left(a_{12}^{(i)}\right)^2\right)a_{66}^{(i)} + 2a_{12}^{(i)}a_{16}^{(i)}a_{26}^{(i)} - a_{11}^{(i)}\left(a_{26}^{(i)}\right)^2 - a_{22}^{(i)}\left(a_{16}^{(i)}\right)^2$$

$$l_{11}^{(i)} = -\left(B_{11}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi} + B_{16}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta}\right), \quad l_{12}^{(i)} = -\left(B_{16}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi} + B_{12}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta}\right) \tag{2.9}$$

$$l_{21}^{(i)} = -\left(B_{12}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi} + B_{26}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta}\right), \quad l_{22}^{(i)} = -\left(B_{26}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi} + B_{22}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)$$

$$l_{31}^{(i)} = -\left(B_{16}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi} + B_{66}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta}\right), \quad l_{32}^{(i)} = -\left(B_{66}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi} + B_{26}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)$$

$$L_{11}\left(B_{ij}^{(i)}\right) = -\left(\frac{\partial l_{11}^{(i)}}{\partial\xi} + \frac{\partial l_{31}^{(i)}}{\partial\eta}\right) = B_{11}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2B_{16}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + B_{66}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$L_{12}\left(B_{ij}^{(i)}\right) = -\left(\frac{\partial l_{12}^{(i)}}{\partial\xi} + \frac{\partial l_{32}^{(i)}}{\partial\eta}\right) = -\left(\frac{\partial l_{31}^{(i)}}{\partial\xi} + \frac{\partial l_{21}^{(i)}}{\partial\eta}\right) =$$

$$= B_{16}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \left(B_{12}^{(i)} + B_{66}^{(i)}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + B_{26}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$L_{22}\left(B_{ij}^{(i)}\right) = -\left(\frac{\partial l_{32}^{(i)}}{\partial\xi} + \frac{\partial l_{22}^{(i)}}{\partial\eta}\right) = B_{66}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2B_{26}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + B_{22}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

Величины $Q^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta)$ – известные функции для каждого приближения s, если определены величины предыдущих приближений. Они определяются по рекуррентным формулам

$$\sigma_z^{*(i,s)} = -\int_0^{\zeta}\left(F_z^{(i,s)} + \frac{\partial\sigma_{xz}^{(i,s-2)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{yz}^{(i,s-2)}}{\partial\eta}\right)d\zeta$$

$$w^{*(i,s)} = \int_0^{\zeta}\left(a_{31}^{(i)}\sigma_x^{(i,s-1)} + a_{32}^{(i)}\sigma_y^{(i,s-1)} + a_{33}^{(i)}\sigma_z^{(i,s-1)} + a_{34}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-2)} +\right.$$

$$\left. + a_{35}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-2)} + a_{36}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s-1)} + \alpha_{33}^{(i)}\theta^{(i,s-1)}\right)d\zeta$$

$$v^{*(i,s)} = \int_0^{\zeta}\left(a_{41}^{(i)}\sigma_x^{(i,s-1)} + a_{42}^{(i)}\sigma_y^{(i,s-1)} + a_{43}^{(i)}\sigma_z^{(i,s-1)} + a_{44}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-2)} +\right.$$

$$\left.+a_{45}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-2)} + a_{46}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s-1)} + \alpha_{23}^{(i)}\theta^{(i,s-1)} - \frac{\partial W^{(i,s-1)}}{\partial\eta}\right)d\zeta \tag{2.10}$$

$$u^{*(i,s)} = \int_0^{\zeta}\left(a_{51}^{(i)}\sigma_x^{(i,s-1)} + a_{52}^{(i)}\sigma_y^{(i,s-1)} + a_{53}^{(i)}\sigma_z^{(i,s-1)} + a_{54}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-2)} +\right.$$

$$\left.+a_{55}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-2)} + a_{56}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i,s-1)} + \alpha_{13}^{(i)}\theta^{(i,s-1)} - \frac{\partial W^{(i,s-1)}}{\partial\xi}\right)d\zeta$$

$$\sigma_x^{*(i,s)} = A_{11}^{(i)}\sigma_z^{*(i,s)} + l_{11}^{(i)}u^{*(i,s)} + l_{12}^{(i)}v^{*(i,s)} + A_{12}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-1)} + A_{13}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-1)} + \beta_1^{(i)}\theta^{(i,s)}$$

$$\sigma_y^{*(i,s)} = A_{21}^{(i)}\sigma_z^{*(i,s)} + l_{21}^{(i)}u^{*(i,s)} + l_{22}^{(i)}v^{*(i,s)} + A_{22}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-1)} + A_{23}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-1)} + \beta_2^{(i)}\theta^{(i,s)}$$

$$\sigma_{xy}^{*(i,s)} = A_{31}^{(i)}\sigma_z^{*(i,s)} + l_{31}^{(i)}u^{*(i,s)} + l_{32}^{(i)}v^{*(i,s)} + A_{32}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i,s-1)} + A_{33}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i,s-1)} + \beta_3^{(i)}\theta^{(i,s)}$$

$$\sigma_{xz}^{*(i,s)} = -\int_0^{\zeta} F_x^{(i,s)}d\zeta - \int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_x^{*(i,s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{*(i,s)}}{\partial\eta}\right)d\zeta$$

$$\sigma_{yz}^{*(i,s)} = -\int_0^{\zeta} F_y^{(i,s)}d\zeta - \int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial\sigma_{xy}^{*(i,s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_y^{*(i,s)}}{\partial\eta}\right)d\zeta$$

$$\beta_1^{(i)} = -\left(\alpha_{11}^{(i)}B_{11}^{(i)} + \alpha_{22}^{(i)}B_{12}^{(i)} + \alpha_{12}^{(i)}B_{16}^{(i)}\right)$$

$$\beta_2^{(i)} = -\left(\alpha_{11}^{(i)}B_{12}^{(i)} + \alpha_{22}^{(i)}B_{22}^{(i)} + \alpha_{12}^{(i)}B_{26}^{(i)}\right)$$

$$\beta_3^{(i)} = -\left(\alpha_{11}^{(i)}B_{16}^{(i)} + \alpha_{22}^{(i)}B_{26}^{(i)} + \alpha_{12}^{(i)}B_{66}^{(i)}\right)$$

В (2.8) неизвестными являются функции $u^{(i,s)}, v^{(i,s)}, w^{(i,s)}$, $\sigma_{z0}^{(i,s)}, \sigma_{xz0}^{(i,s)}, \sigma_{yz0}^{(i,s)}$, которые должны быть определены из граничных и контактных условий.

Удовлетворив условиям (1.1)-(1.3), получим

$$\sigma_{z0}^{(i,s)}(\xi,\eta) = \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)$$

$$\sigma_{xz0}^{(i,s)}(\xi,\eta) = \sigma_{xz}^{+(s)} + \zeta_1\left(A_{11}^{(i)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial\xi} + A_{31}^{(i)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial\eta}\right) -$$

$$-L_{11}\left(C_{ij}^{(1)}\right)u^{(1,s)} - L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right)v^{(1,s)} - \sigma_{xz}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)$$

$$\sigma_{yz0}^{(i,s)}(\xi,\eta) = \sigma_{yz}^{+(s)} + \zeta_1\left(A_{31}^{(i)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial\xi} + A_{21}^{(i)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(i,s)}}{\partial\eta}\right) - \tag{2.11}$$

$$-L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right)u^{(1,s)} - L_{22}\left(C_{ij}^{(1)}\right)v^{(1,s)} - \sigma_{yz}^{*(i,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)$$

$$\sigma_{xz0}^{(1,s)} = \sigma_{xz0}^{(2,s)} = \tau_{x0}^{(s)}(\xi,\eta), \quad \sigma_{yz0}^{(1,s)} = \sigma_{yz0}^{(2,s)} = \tau_{y0}^{(s)}(\xi,\eta)$$

$$\sigma_{z0}^{(2,s)} = \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi,\eta,\zeta_1)$$

$$w^{(1,s)}(\xi,\eta) = w^{(2,s)}(\xi,\eta) = w^{-(s)} - w^{*(2,s)}(\xi,\eta,-\zeta_2)$$

$$u^{(2,s)}(\xi,\eta) = u^{-(s)} - u^{*(2,s)}(\xi,\eta,-\zeta_2)$$

$$v^{(2,s)}(\xi,\eta) = v^{-(s)} - v^{*(2,s)}(\xi,\eta,-\zeta_2)$$

$$C_{ij}^{(1)} = \zeta_1 B_{ij}^{(1)}$$

$$\sigma_z^{+(0)}, \sigma_{xz}^{+(0)}, \sigma_{yz}^{+(0)} = \sigma_z^{+}(a\xi, a\eta),\ \sigma_{xz}^{+}(a\xi, a\eta),\ \sigma_{yz}^{+}(a\xi, a\eta)$$

$$u^{-(0)}, v^{-(0)}, w^{-(0)} = u^{-}(a\xi, a\eta),\ v^{-}(a\xi, a\eta),\ w^{-}(a\xi, a\eta)$$

$$\sigma_z^{-(s)} = \sigma_{xz}^{-(s)} = \sigma_{yz}^{-(s)} = 0,\quad u^{-(s)} = v^{-(s)} = w^{-(s)} = 0,\quad s > 0$$

$$\tau_{x0}^{(0)}, \tau_{y0}^{(0)} = \tau_{x0}(a\xi, a\eta),\ \tau_{y0}(a\xi, a\eta)$$

$$\tau_{x0}^{(s)} = \tau_{y0}^{(s)} = 0,\quad s > 0$$

Как следует из (2.11), все искомые величины выразились через $u^{(1,s)}, v^{(1,s)}$. Для определения же $u^{(1,s)}, v^{(1,s)}$ получаются следующие дифференциальные уравнения с частными производными:

$$L_{11}\left(C_{ij}^{(1)}\right)u^{(1,s)} + L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right)v^{(1,s)} + \tau_{x0}^{(s)}(\xi, \eta) = p_1^{(s)}$$

$$L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right)u^{(1,s)} + L_{22}\left(C_{ij}^{(1)}\right)v^{(1,s)} + \tau_{y0}^{(s)}(\xi, \eta) = p_2^{(s)} \qquad (2.12)$$

где

$$p_1^{(s)} = \sigma_{xz}^{+(s)} + \zeta_1\left(A_{11}^{(1)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(1,s)}}{\partial\xi} + A_{31}^{(1)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(1,s)}}{\partial\eta}\right) - \sigma_{xz}^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)$$

$$p_2^{(s)} = \sigma_{yz}^{+(s)} + \zeta_1\left(A_{31}^{(1)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(1,s)}}{\partial\xi} + A_{21}^{(1)}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(1,s)}}{\partial\eta}\right) - \sigma_{yz}^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)$$

$$L_{11}\left(C_{ij}^{(1)}\right) = C_{11}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2C_{16}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + C_{66}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \qquad (2.13)$$

$$L_{12}\left(C_{ij}^{(1)}\right) = C_{16}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \left(C_{12}^{(1)} + C_{66}^{(1)}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + C_{26}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$L_{22}\left(C_{ij}^{(1)}\right) = C_{66}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2C_{26}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + C_{22}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

Определив перемещения $u^{(1,s)}, v^{(1,s)}$, по формулам (2.2), (2.3), (2.8)-(2.11) определятся все искомые величины.

Отметим некоторые различительные стороны возникающих двумерных уравнений по сравнению с классическими и другими.

В случае классической теории пластинок получаются дифференциальные уравнения не только относительно тангенциальных компонентов U, V вектора перемещения, но и относительно нормальной компоненты W, при этом в задаче изгиба главную роль играет именно уравнение относительно W. В нашем же случае уравнения получаются относительно U, V, а W определяется для каждого приближения арифметическими действиями.

В случае второй и третьей краевых задач [7,8], величины $U^{(i,s)}, V^{(i,s)}, W^{(i,s)}$ полностью определяются в процессе удовлетворения условий при $y = \pm h$, в нашем же случае для $U^{(i,s)}, V^{(i,s)}$ получаются уравнения (2.12). Это означает, что граничные условия на боковой поверхности непосредственно будут влиять на значения этих величин. Процедура формулировки приведенных граничных условий такая же, что и в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. К теории изгиба ортотропных пластин //МТТ, 1966, №6, с. 116-121
2. Агаловян Л.А. К вопросу приведения граничных условий трехмерной задачи к двумерным в теории анизотропных пластинок // Уч. записки ЕГУ, 1978, №3, с. 21-30.
3. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. – ПММ, 1962, т. 26, вып.4, с. 668-686.
4. Вишик М.И. Люстерник Л.А Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений //УМН, 1960, т.15, №3, с. 3-93.
5. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений.- М.: Наука, 1973. 272с.
6. Агаловян Л. А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела. -Межвуз. Сб.. механика, изд-во ЕГУ, 1982, вып. 2, с. 7-12
7. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией-В сб: Механика конструкций из композиционных материалов. Новосибирск, Наука, 1984, с. 7-12.
8. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок. //ПММ, 1986, т. 50, вып. 2, с. 271-278.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 18.11.1996

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ

Мовсисян Л.А.

Լ.Ա. Մովսիսյան
Պիեզոէլեկտրիկ սալի համար դինամիկական կայունության մի խնդրի մասին

Դիտարկվում է հեկսագոնալ համակարգի երկու տիպի նյութերից սալի համար դինամիկական կայունության խնդիրը, երբ պարբերական շոշափող լարումները ազդում են սալի արտաքին հարթությունների վրա: Որոշվել են սեփական հաճախությունները, ստատիկական կրիտիկական լարումը և գլխավոր ռեզոնանսային տիրույթը:

L.A. Movsisian
About one problem of dynamic stability for piezoelectric plate

Исследуется динамическая устойчивость пластинки из пьезоэлектриков. Тангенциальные периодические напряжения действуют на внешних плоскостях пластинки (моментное начальное состояние) и направлены в противоположные стороны. Рассматриваются два типа пьезоэлектриков гексагональной системы классов $\bar{6}m2$ и $6mm$. Для первого материала электрическое поле индуцируется при продольном движении (плоская задача), в то время как для второго – при изгибе. Благодаря моментности начального состояния, уравнения возмущенного состояния получаются связанными.

1. Имеется прямоугольная пластинка, на внешних плоскостях которой в направлении одних из сторон действуют тангенциальные периодические напряжения (S), направленные в противоположные стороны. Принимается, что внешние стороны пластинки покрыты металлическим слоем. Изучаются два пьезоэлектрика класса $\bar{6}m2$ (число коэффициентов 5–1–2) и $6mm$ (5–3–2) [1].

Уравнения возмущенного движения пластинки в классической постановке будут [2]

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial T_{12}}{\partial y}-Sh\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x}+\frac{\partial T_2}{\partial y}-Sh\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial M_2}{\partial y^2}-Sh\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Считается, что тангенциальные напряжения $S=S_0+S_1\cos\theta t$ направлены по оси x.

В рамках принятой модели определяющие уравнения выглядят следующим образом [1]:

$$\sigma_x=B_{11}e_x+B_{12}e_y-eE_1,\quad D_1=-ee_x+ee_y+\varepsilon_1E_1$$

$$\sigma_y=B_{12}e_x+B_{11}e_y+eE_1,\quad D_2=ee_{xy}+\varepsilon_1E_2 \tag{1.2}$$

$$\sigma_{xy}=0{,}5(B_{11}-B_{12})e_{xy}+eE_2,\quad D_3=\varepsilon_2E_3$$

для первого материала и

$$\sigma_x=B_{11}e_x+B_{12}e_y-e_1E_3,\qquad D_1=\varepsilon_1E_1$$

$$\sigma_y=B_{12}e_x+B_{11}e_y-e_1E_3,\qquad D_2=\varepsilon_1E_2 \tag{1.3}$$

$$\sigma_{xy} = 0{,}5(B_{11} - B_{12})e_{xy}, \qquad D_3 = -e_1(e_x + e_y) + \varepsilon_2 E_3$$

К системе (1.1) должны быть присоединены уравнения напряженности электрического поля и электрической индукции

$$\mathrm{rot}\overline{E} = 0, \quad \mathrm{div}\overline{D} = 0 \tag{1.4}$$

По (1.2) и (1.3), вычисляя усилия и моменты, далее выражая их через перемещения, будем иметь следующую систему уравнений в перемещениях:

$$\begin{gathered}
C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12})\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x \partial y} + \\
+\delta\frac{2}{3}he\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) - Sh\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
\frac{1}{2}(C_{11} + C_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2} + C_{11}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2} - \\
-\delta\frac{4}{3}he\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - Sh\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \rho h\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} \\
D_{11}\Delta^2 w + \gamma\frac{2}{3}e_1 h\Delta F + Sh\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x \partial y}\right) + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0
\end{gathered} \tag{1.5}$$

А уравнения (1.4) дают

$$\frac{2}{3}h\varepsilon_1\Delta F - \frac{8}{h}\varepsilon_2 F + \delta he\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x \partial y}\right) - \gamma h\left(e_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{1.6}$$

При получении (1.5) и (1.6) для электрического потенциала принято

$$\Phi = F(x,y,t)\left(1 - \frac{4}{h^2}z^2\right) \tag{1.7}$$

В системах (1.5) и (1.6) для первого материала следует положить $\delta = 1$ и $\gamma = 0$, а для второго $-\ \delta = 0,\ \gamma = 1$ $\left(C_{ij} = B_{ij}h,\ D_{11} = \frac{h^3}{12}B_{11}\right)$

2. Пусть края пластинки шарнирно закреплены и покрыты металлическим слоем:

$$\begin{aligned}
&w = M_1 = u = T_{12} = F = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ x = a \\
&w = M_2 = u = T_2 = F = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\ y = b
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Условием (2.1) удовлетворим, если возьмем

$$\begin{aligned}
&u = f_1\sin\lambda x\sin\mu y, \quad w = f_3\sin\lambda x\sin\mu y \\
&\mathrm{v} = f_2\cos\lambda x\cos\mu y, \quad F = f_4\sin\lambda x\sin\mu y
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\lambda = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu = \frac{n\pi}{b}, \quad m,n = 1,2,\ldots$$

Подставляя (2.2) в (1.5) и (1.6), исключая f_4, для остальных f_i получим

$$\frac{d^2 f_i}{dt^2} + A_{ij}(t)f_i = 0, \quad (i,j = 1,2,3) \tag{2.3}$$

Для определения главных областей параметрических колебаний решение (2.3) будем искать в виде [3]

$$f_i = C_i^{(1)}\cos\frac{\theta}{2}t + C_i^{(2)}\sin\frac{\theta}{2}t \tag{2.4}$$

з условия нетривиальности решения (2.3) получим выражения для авных областей неустойчивости

$$\det\|a_{ij}\| = 0$$

$$a_{11} = \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\rho}\left[B_{11}\lambda^2 + \frac{1}{2}(B_{11} - B_{12})\mu^2 - \delta\frac{2}{3}e^2\frac{\left(\lambda^2-\mu^2\right)^2}{\Delta_1}\right]$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{2}(B_{11} + B_{12})\lambda\mu + \delta\frac{4}{3}e^2\frac{\lambda\mu\left(\lambda^2-\mu^2\right)^2}{\Delta_1}\right]$$

$$a_{13} = a_{31} = \frac{S_0}{\rho}(1 \pm \chi)\lambda^2, \; a_{23} = a_{32} = -\frac{S_0}{\rho}(1 \pm \chi)\lambda\mu$$

$$a_{22} = \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\rho}\left[B_{11}\mu^2 + \frac{1}{2}(B_{11} - B_{12})\lambda^2 - \delta\frac{8}{3}e^2\frac{\lambda^2\mu^2}{\Delta_1}\right] \tag{2.5}$$

$$a_{33} = \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{\rho}\left[\gamma\frac{2}{3}e_1\frac{e_1\lambda^2 + e_2\mu^2}{\Delta_1} - \frac{h^2}{12}B_{11}(\lambda^2+\mu^2)\right](\lambda^2+\mu^2)$$

$$\Delta_1 = \frac{8}{h^2}\varepsilon_2 + \frac{2}{3}\varepsilon_1(\lambda^2+\mu^2), \qquad \chi = \frac{1}{2}\frac{S_1}{S_0}$$

Из (2.5), в частности, получаются статическое критическое напряжение $\left(S_1 = \theta = 0\right)$ и частоты свободных колебаний $\left(S_1 = 0, \; \frac{\theta}{2} = \omega\right)$.

Нет смысла представить (2.5) в развернутом виде, так как из-за громоздкости формул невозможно будет сделать качественных выводов, поэтому приведем формулы для одномерного случая.

3. В случае цилиндрического изгиба $(b \to \infty)$ условие (2.3) превращается

$$\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) \pm \left[\frac{1}{4}\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)^2 + \frac{S_0^2}{\rho^2}(1\pm\chi)^2\lambda^4\right]^{1/2} \tag{3.1}$$

Здесь собственные частоты определяются

$$\omega_1^2 = \frac{B_{11}}{\rho}\lambda^2\left(1 - \delta E^{(1)}\xi^2\right), \; \omega_2^2 = \frac{B_{11}}{\rho}\lambda^2\xi^2\left(1 - \gamma E^{(1)}\right)$$

$$E^{(1)} = \frac{e^2}{B_{11}\varepsilon_2\Delta_2}, \quad E^{(2)} = \frac{e_1^2}{B_{11}\varepsilon_2\Delta_2}, \; \Delta_2 = 1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\xi^2, \quad \xi^2 = \frac{h^2\lambda^2}{12} \tag{3.2}$$

Как видно из (3.1) и (3.2), свободные частоты благодаря пьезоэффекту уменьшаются, и вследствие сдвигающихся напряжений продольная частота увеличивается, а поперечная – уменьшается. Из (3.2) также видно, что по χ получаются узкие области динамической неустойчивости.

Из (3.1) можно получить и выражение статического критического напряжения

$$S_0^{\text{кр}} = B_{11}\xi\left[\left(1 - \delta E^{(1)}\xi^2\right)\left(1 - \gamma E^{(2)}\right)\right]^{1/2} \tag{3.3}$$

т.е. присутствие пьезоэффекта уменьшает также критическое напряжение.

Из (3.3), в частности, получается результат [4] (при $\delta = \gamma = 0$).

4. Так как рассмотренные материалы ортотропные, то имеет смысл

изучение этих же задач в постановке, учитывающих поперечные сдвиги [5].

Приведем приближенные выражения интересующих нас величин (изгибная частота, статическое критическое напряжение и область главной динамической неустойчивости) для второго материала при одномерном случае

$$\begin{aligned} \sigma_x &= B_{11}e_x - e_1E_3, \qquad D_1 = e_3e_{xz} + \varepsilon_1E_1 \\ \sigma_{xz} &= B_{44}e_{xz} - e_3E_1, \qquad D_3 = -e_1e_x + \varepsilon_2E_3 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Вот эти формулы

$$\omega^2 = \frac{12B_{11}}{\rho h^2}\xi^4\left(X_1 - X_2\xi^2\right) \tag{4.2}$$

$$S_0^{\text{кр}} = B_{11}\xi\left[\left(X_1 - X_2\xi^2\right)/\left(1 - X_3\xi^2\right)\right]^{1/2} \tag{4.3}$$

$$\frac{\theta}{2} = \omega\left[1 - \frac{S_0^2(1\pm\chi)^2}{\left(S_0^{\text{кр}}\right)^2}\right]^{1/2} \tag{4.4}$$

Здесь

$$X_1 = 1 - \frac{e_1^2}{B_{11}\varepsilon_2}, \quad X_3 = 2\frac{B_{11}}{B_{44}}X_1$$

$$X_2 = \frac{B_{11}}{B_{44}}\left(1 - \frac{2e_1^2}{B_{11}\varepsilon_2} - \frac{e_3^4 - e_1^4}{B_{11}^2\varepsilon_2^2}\right) + \frac{e_3^2(e_3^2 - e_1^2)}{B_{11}B_{44}\varepsilon_2^2} - \frac{e_1^2\varepsilon_1}{B_{44}\varepsilon_2^2}$$

Последние формулы выведены с точностью по ξ^2. В таком же приближении главная область динамической неустойчивости из (3.1) получится по виду (4.4), где уже отсутствуют X_2 и X_3.

Как известно [5], учет сдвигов, как правило, уменьшает значение собственных частот, однако, как видно, из (4.1) при наличии пьезоэффекта возможен случай $(x_2 < 0)$, когда частоты могут увеличиваться.

В то же время, как видно из приведенных формул, учет сдвигов приводит к сужению $(x_3 > 0)$ области параметрических колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. – М.: Наука, 1982. 424с.
2. Мовсисян Л.А., Пештмалджян Д.В. Об уравнениях устойчивости и колебаний анизотропных пластин. – Изв. АН Арм ССР, Механика, 1973, т.26, №6, с.18-29.
3. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. 600с.
4. Flemming J.F., Herrman G., Mooney I. Bucling of structural Element Subject to Surface shear. – J. of Appl. Mech., 1965, vol. 32, 1.
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1987. 360с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 27.05.1996

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 539.3

СИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЕРТИКАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Тоноян В.С., Мелкумян Н.С.

Վ.Ս. Տոնոյան, Ն.Ս. Մելքումյան
Ուղղահայաց ճեղքերով պյեզոկերամիկ կիսահարթության համար էլեկտրաառաձգականության սիմետրիկ եզրային խնդիրներ

Դիտարկված է նախապես բևեռացված պյեզոկերամիկ կիսահարթության համար էլեկտրաառաձգականության տեսության հարթ սիմետրիկ երկու խնդիր, երբ կիսահարթությունը թուլացված է կամ եզրից վերջավոր հեռավորության վրա կիսաանվերջ կամ էլ եզրի դուրս եկող վերջավոր ուղղահայաց ճեղքով: Նախնական բևեռացման ուղղությունը զուգահեռ է ճեղքի առանցքին: Կիսահարթության եզրի վրա տրված են մեխանիկական լարումների վեկտորը և էլեկտրական ինդուկցիայի նորմալ բաղադրիչը, իսկ ճեղքի ափերի վրա տրված են նորմալ ճնշումը և էլեկտրական պոտենցիալը: Խնդրի լուծումը զույգ ինտեգրալ հավասարումների մեթոդով բերվել է Ֆրեդհոլմի տիպի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը: Ցույց է տրված վերջին հավասարման լուծելիությունը: Ստացված են անալիտիկ բանաձևեր մեխանիկական նորմալ լարման և էլեկտրական ինդուկցիայի նորմալ բաղադրիչի համար անջատված եզակիությամբ:

V.S. Tonoyan, N.S. Melkumian
Symmetric boundary-value problems of electroelasticity for a piezoceramic semi-plane with vertical cuts

Рассматриваются две симметричные задачи плоской теории электроупругости для предварительно поляризованной пьезокерамической полуплоскости, когда полуплоскость ослаблена или конечным, или полубесконечным вертикальным разрезом. Направление предварительной поляризации параллельно оси разреза. Решение задач методом парных интегральных уравнений сведено к решению интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода. Доказана разрешимость последнего уравнения. Получены аналитические формулы для нормального механического напряжения, касательного компонента векторов электрической индукции и напряженности на линии продолжения разреза с выделенной корневой особенностью.

Пьезокерамики в качестве активных элементов современных электромеханических преобразователей энергии для существующих типов ультразвуковых излучателей из пьезокерамики силовых пьезотрансформаторов, искровых пьезогенераторов и других ограничиваются механической и электрической прочностями керамики. Как механическая, так и электрическая прочности заметно снижаются при наличии в керамике дефектов типа трещин, полостей и инородных включений.

В связи с этим представляет интерес исследование сопряженных электроупругих полей вблизи различного типа дефектов в керамике. К настоящему времени достаточно исследованы смешанные задачи для упругих тел с указанными типами дефектов при действии механических и тепловых нагрузок. Однако смешанные задачи для упругих тел с дефектами типа трещин, полостей и инородных включений при наличии связанных полей различной природы до сих пор изучены недостаточно, нам известны лишь немногочисленные задачи, и то, для бесконечных тел.

Электроупругое состояние пьезокерамической полости, поляризованной в направлении оси симметрии, с прямолинейной трещиной конечной длины, параллельной оси симметрии, при равномерном растяжении на бесконечности в направлении, перпендикулярном оси трещин, рассмотрено в работе [1]. Симметричная задача плоской теории электроупругости для пьезокерамической полуплоскости с вертикальным полубесконечным разрезом, поляризованной в направлении, перпендикулярном к оси разреза, рассмотрена в работе [2].

В настоящей работе рассматриваются две симметричные задачи плоской теории электроупругости для предварительно поляризованной пьезокерамической полуплоскости, когда полуплоскость ослаблена или конечным, или полубесконечным вертикальным разрезом. Направление предварительной поляризации параллельно оси разреза. На границе полуплоскости заданы вектор механических напряжений и нормальная составляющая электрической индукции, а на берегах разреза – нормальное давление и нормальная составляющая электрической индукции. Полуплоскость граничит с вакуумом. Задачи решены методом Фурье. Решение каждой задачи представлено в виде суммы интегралов Фурье. Определение неизвестных функций интегрирования сведено к решению сперва парного интегрального уравнения, а затем к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода. Доказана разрешимость последнего уравнения. Получены аналитические формулы для нормального механического напряжения, касательного компонента векторов электрической индукции и напряженности на линии продолжения разреза с выделенной корневой особенностью.

Рассмотрим электроупругое состояние плоской деформации пьезокерамической полуплоскости $z \geq 0, |x| < \infty$, поляризованной в направлении оси oz, которая имеет:

1) на конечном расстоянии a от горизонтальной границы вертикальный полубесконечный разрез (первая задача);

2) начиная от горизонтальной границы конечный вертикальный разрез (вторая задача).

На границе полуплоскости с вакуумом задан вектор механических напряжений и нормальная составляющая электрической индукции, а на берегах разреза – нормальное давление и нормальная составляющая электрической индукции.

Так как задачи симметричны относительно вертикальных разрезов, то можно ограничиться рассмотрением только квадранта $(x \geq 0,\ z \geq 0)$. Известно, что поставленные электроупругие задачи математически сводятся к решению уравнений равновесия (1.72), электростатики (1.73) и состояния среды (1.74), а также соотношений Коши (1.75) работы [3] со следующими граничными условиями:

$$\sigma_z(x,0) = f_1(x),\ \tau_{xz}(x,0) = f_2(x),\ D_z(x,0) = 0 \qquad (0 \leq x < \infty) \tag{1}$$

$$\tau_{xz}(0,z) = 0,\ D_x(0,z) = 0 \qquad (0 \leq z < \infty)$$

$$U_x(0,z) = 0 \quad (0 \leq z \leq a);\quad \sigma_x(0,z) = f_3(z) \quad (a < z < \infty) \tag{2}$$

$$\sigma_x(0,z) = f_3(z) \quad (0 \leq z < a);\quad U_x(0,z) = 0 \quad (a < z < \infty) \tag{3}$$

где $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ – компоненты тензора механических напряжений, U_x, U_z – проекции вектора перемещений, D_x, D_z – компоненты вектора электрической индукции. Причем граничные условия (1) и (2) соответствуют первой задаче, а (1) и (3) – второй задаче. Решение для обеих задач ищем в виде суммы интегралов Фурье

$$U_x(x,z) = \frac{1}{c_{11}^E}\int_0^\infty \alpha\overline{U}(\alpha,z)\sin\alpha x d\alpha - \frac{1}{c_{11}^E}\int_0^\infty \beta\overline{U}(\beta,x)\sin\beta z d\beta$$

$$U_z(x,z) = \frac{1}{c_{44}^E}\int_0^\infty \alpha\overline{W}(\alpha,z)\sin\alpha x d\alpha - \frac{1}{c_{44}^E}\int_0^\infty \beta\overline{W}(\beta,x)\sin\beta z d\beta$$

полубесконечным разрезом, поляризованной в направлении, перпендикулярном к оси разреза, рассмотрена в работе [2].

В настоящей работе рассматриваются две симметричные задачи плоской теории электроупругости для предварительно поляризованной пьезокерамической полуплоскости, когда полуплоскость ослаблена или конечным, или полубесконечным вертикальным разрезом. Направление предварительной поляризации параллельно оси разреза. На границе полуплоскости заданы вектор механических напряжений и нормальная составляющая электрической индукции, а на берегах разреза — нормальное давление и нормальная составляющая электрической индукции. Полуплоскость граничит с вакуумом. Задачи решены методом Фурье. Решение каждой задачи представлено в виде суммы интегралов Фурье. Определение неизвестных функций интегрирования сведено к решению сперва парного интегрального уравнения, а затем к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода. Доказана разрешимость последнего уравнения. Получены аналитические формулы для нормального механического напряжения, касательного компонента векторов электрической индукции и напряженности на линии продолжения разреза с выделенной корневой особенностью.

Рассмотрим электроупругое состояние плоской деформации пьезокерамической полуплоскости $z \geq 0, |x| < \infty$, поляризованной в направлении оси oz, которая имеет:

1) на конечном расстоянии a от горизонтальной границы вертикальный полубесконечный разрез (первая задача);

2) начиная от горизонтальной границы конечный вертикальный разрез (вторая задача).

На границе полуплоскости с вакуумом задан вектор механических напряжений и нормальная составляющая электрической индукции, а на берегах разреза — нормальное давление и нормальная составляющая электрической индукции.

Так как задачи симметричны относительно вертикальных разрезов, то можно ограничиться рассмотрением только квадранта $(x \geq 0,\ z \geq 0)$. Известно, что поставленные электроупругие задачи математически сводятся к решению уравнений равновесия (1.72), электростатики (1.73) и состояния среды (1.74), а также соотношений Коши (1.75) работы [3] со следующими граничными условиями:

$$\sigma_z(x,0) = f_1(x),\ \tau_{xz}(x,0) = f_2(x),\ D_z(x,0) = 0 \qquad (0 \leq x < \infty) \tag{1}$$

$$\tau_{xz}(0,z) = 0,\ D_x(0,z) = 0 \qquad (0 \leq z < \infty)$$

$$U_x(0,z) = 0 \quad (0 \leq z \leq a); \quad \sigma_x(0,z) = f_3(z) \quad (a < z < \infty) \tag{2}$$

$$\sigma_x(0,z) = f_3(z) \quad (0 \leq z < a); \quad U_x(0,z) = 0 \quad (a < z < \infty) \tag{3}$$

где $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ — компоненты тензора механических напряжений, U_x, U_z — проекции вектора перемещений, D_x, D_z — компоненты вектора электрической индукции. Причем граничные условия (1) и (2) соответствуют первой задаче, а (1) и (3) — второй задаче. Решение для обеих задач ищем в виде суммы интегралов Фурье

$$U_x(x,z) = \frac{1}{c_{11}^E}\int_0^\infty \alpha\overline{U}(\alpha,z)\sin\alpha x d\alpha - \frac{1}{c_{11}^E}\int_0^\infty \beta\overline{U}(\beta,x)\sin\beta z d\beta$$

$$U_z(x,z) = \frac{1}{c_{44}^E}\int_0^\infty \alpha\overline{W}(\alpha,z)\sin\alpha x d\alpha - \frac{1}{c_{44}^E}\int_0^\infty \beta\overline{W}(\beta,x)\sin\beta z d\beta$$

и $B_k(\beta)$.

Для первой задачи, удовлетворяя граничным условиям (1) и (2), получим [4]

$$B_k(\beta) = C_k B_1(\beta), \quad A_j(\alpha) = d_j A_1(\alpha) + P_j \varphi_1(\alpha) \tag{10}$$

$$A_1(\alpha) = -\frac{m_{12}}{m_{11}}\varphi_1(\alpha) + \frac{1}{m_{11}}\varphi_2(\alpha) - \frac{2}{\pi m_{11}\alpha}\sum_{k=1}^{3} b_{2k} C_k \int_0^\infty \frac{\beta^2 B_1(\beta)}{\alpha^2 + \beta^2 t_k^{-2}} d\beta \tag{11}$$

$$\int_0^\infty \beta B_1(\beta)\sin\beta z d\beta = 0 \qquad (0 \le z \le a)$$

$$\int_0^\infty \beta^2 B_1(\beta)\sin\beta z d\beta = \frac{1}{n_{12}} f_3(z) - \frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^{3} a_{4j} P_j \int_0^\infty \alpha^2 \varphi_1(\alpha) e^{-\alpha t_j z} d\alpha -$$

$$-\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^{3} a_{4j} P_j \int_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha) e^{-\alpha t_j z} d\alpha \qquad (a < z < \infty) \tag{12}$$

где

$$C_1 = 1; \quad C_2 = \frac{b_{13}b_{21} - b_{11}b_{23}}{b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}}; \quad C_3 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}{b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}}$$

$$d_1 = 1; \quad d_2 = \frac{a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}; \quad d_3 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}$$

$$P_1 = 0; \quad P_2 = -\frac{a_{13}}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}; \quad P_3 = \frac{a_{12}}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}} \tag{13}$$

$$m_{11} = \sum_{j=1}^{3} a_{3j} d_j; \quad m_{12} = \sum_{j=1}^{3} a_{3j} P_j$$

$$b_{1k} = \Delta_1(t_k) t_k + \frac{\Delta_2(t_k)}{t_k}\frac{c_{11}^E}{c_{44}^E} + \frac{\Delta_3(t_k)}{t_k}\frac{c_{11}^E \varepsilon_{11}^s}{e_{15}^2}$$

$$b_{2k} = \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E}\Delta_1(t_k) t_k + \frac{\Delta_2(t_k)}{t_k} - \frac{\Delta_3(t_k)}{t_k}$$

$$a_{1j} = t_j\left[\frac{e_{31}}{e_{15}}\Delta_1(t_j) - \frac{c_{11}^E}{c_{44}^E}\frac{e_{33}}{e_{15}}\Delta_2(t_j) - \frac{c_{11}^E \varepsilon_{33}^s}{e_{15}^2}\Delta_3(t_j)\right]$$

$$a_{2j} = t_j\left[\frac{c_{13}^E}{c_{11}^E}\Delta_1(t_j) - \frac{c_{33}^E}{c_{44}^E}\Delta_2(t_j) + \frac{e_{33}}{e_{15}}\Delta_3(t_j)\right]$$

$$a_{3j} = \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E}\Delta_1(t_j) t_j^2 + \Delta_2(t_j) - \Delta_3(t_j)$$

$$\varphi_1(\alpha) = \frac{2}{\pi\alpha^2}\int_0^\infty f_1(x)\cos\alpha x dx, \quad \varphi_2(\alpha) = -\frac{2}{\pi\alpha^2}\int_0^\infty f_2(x)\sin\alpha x dx$$

$$n_{12} = \sum_{k=1}^{3} b_{3k} C_k; \quad b_{3k} = \Delta_1(t_k) - \frac{c_{13}^E}{c_{44}^E}\Delta_2(t_k) + \frac{e_{13}}{e_{15}}\Delta_3(t_k)$$

$$a_{4j} = t_j\left[\Delta_1(t_j) - \frac{c_{13}^E}{c_{44}^E}\Delta_2(t_j) + \frac{e_{13}}{e_{15}}\Delta_3(t_j)\right] \tag{14}$$

Решая парное интегральное уравнение (12) методом преобразующих операторов [5], имеем

$$B_1(\beta)=\frac{2}{\pi\beta}\int_a^\infty r\varphi_3(r)J_0(\beta r)dr+\frac{2}{\pi\beta}\int_a^\infty r\varphi_1^*(r)J_0(\beta r)dr+\frac{2}{\pi\beta}\int_a^\infty rF(r)J_0(\beta r)dr \quad (15)$$

Здесь

$$\varphi_3(r)=\frac{1}{n_{12}}\int_r^\infty\frac{f_3(z)}{\sqrt{z^2-r^2}}dz$$

$$\varphi_1^*(r)=-\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}P_j\int_0^\infty\alpha^2\varphi_1(\alpha)K_0\left(\alpha t_j r\right)d\alpha$$

$$F(r)=-\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}d_j\int_0^\infty\alpha^2A_1(\alpha)K_0\left(\alpha t_j r\right)d\alpha \quad (16)$$

$J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода с действительным аргументом, $K_\nu(z)$ – функция Макдональда.

Имея в виду (16), исключая $A_1(\alpha)$ из (11) и (15), для определения $B(\beta)=\beta B_1(\beta)$ получим следующее интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода:

$$B(\beta)=\Omega(\beta)+\int_0^\infty K(\beta,\gamma)B(\gamma)d\gamma \quad (17)$$

где

$$K(\beta,\gamma)=\frac{2\gamma}{\pi^2n_{12}m_{11}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}d_j\sum_{k=1}^{3}b_{2k}C_k\int_0^\infty\frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2+\gamma^2t_k^{-2}}\int_a^\infty rK_0\left(\alpha t_j r\right)J_0(\beta r)dr \quad (18)$$

$$\Omega(\beta)=\frac{2}{\pi}\int_a^\infty r\varphi_3(r)J_0(\beta r)dr-\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}P_j\int_0^\infty\alpha^2\varphi_1(\alpha)d\alpha\int_a^\infty rK_0\left(\alpha t_j r\right)J_0(\beta r)dr-$$

$$-\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}d_j\int_0^\infty\alpha^2\left[\frac{\varphi_2(\alpha)}{m_{11}}-\frac{m_{12}\varphi_1(\alpha)}{m_{11}}\right]d\alpha\int_a^\infty rK_0\left(\alpha t_j r\right)J_0(\beta r)dr \quad (19)$$

Используя результаты работы [5], имея в виду [4], что

$$\int_a^\infty rK_0\left(\alpha t_j r\right)J_0(\beta r)dr<\int_0^\infty rK_0\left(\alpha t_j r\right)J_0(\beta r)dr=\frac{1}{\alpha^2t_j^2+\beta^2}$$

$$\int_0^\infty\frac{\alpha d\alpha}{\left(\alpha^2t_k^2+\gamma^2\right)\left(\alpha^2t_j^2+\beta^2\right)}=\frac{\ln\left(t_j\gamma/t_k\beta\right)}{t_k^2\beta^2-t_j^2\gamma^2}$$

и перейдя к новым переменным $\beta=t_je^{\eta}$, $\gamma=t_ke^{\chi}$, используя значение интеграла [4] $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta d\zeta}{\mathrm{sh}\zeta}=\frac{\pi^2}{2}$, где $\zeta=\eta-\chi$, доказана разрешимость уравнения (17) для пьезокерамики $PZT-4$.

Решая уравнение (17) и используя соотношения (10), (11), можно определить все искомые функции интегрирования, а следовательно, при помощи (4), (5) и основных соотношений электроупругости, все компоненты сопряженного электроупругого поля в любой точке полуплоскости. В частности, электроупругие компоненты на продолжении линии вне разреза определяются формулами

$$\sigma_x(0,z)=\frac{2n_{12}}{\pi}z\left[\frac{\varphi_3(a)+\varphi_1^*(a)+F(a)}{\sqrt{a^2-z^2}}-\int_a^z\frac{\varphi_3'(r)+\left[\varphi_1^*(r)\right]'+F'(r)}{\sqrt{r^2-z^2}}dr\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{3}a_{4j}\int_0^\infty\alpha^2A_j(\alpha)\exp\left(-\alpha t_jz\right)d\alpha \qquad (0\le z<a) \qquad (20)$$

$$D_z(0,z)=\frac{2n_{13}e_{15}}{\pi c_{11}^E}z\left[\frac{\varphi_3(a)+\varphi_1^*(a)+F(a)}{\sqrt{a^2-z^2}}-\int_a^z\frac{\varphi_3'(r)+\left[\varphi_1^*(r)\right]'+F'(r)}{\sqrt{r^2-z^2}}dr\right]+$$

$$+\frac{e_{15}}{c_{11}^E}\sum_{j=1}^{3}a_{1j}\int_0^\infty\alpha^2A_j(\alpha)\exp\left(-\alpha t_jz\right)d\alpha \qquad (0\le z<a) \qquad (21)$$

$$E_z(0,z)=-\frac{2n_{14}}{\pi e_{15}}z\left[\frac{\varphi_3(a)+\varphi_1^*(a)+F(a)}{\sqrt{a^2-z^2}}-\int_a^z\frac{\varphi_3'(r)+\left[\varphi_1^*(r)\right]'+F'(r)}{\sqrt{r^2-z^2}}dr\right]-$$

$$-\frac{1}{e_{15}}\sum_{j=1}^{3}t_j\Delta_3\left(t_j\right)\int_0^\infty\alpha^2A_j(\alpha)\exp\left(-\alpha t_jz\right)d\alpha \qquad (0\le z<a) \qquad (22)$$

где

$$n_{14}=\sum_{k=1}^{3}\Delta_3\left(t_k\right)C_k,\quad n_{13}=\sum_{k=1}^{3}b_{4k}C_k$$

$$b_{4k}=\frac{e_{31}}{e_{15}}\Delta_1\left(t_k\right)-\frac{c_{11}^E}{c_{44}^E}\frac{e_{33}}{e_{15}}\Delta_2\left(t_k\right)-\frac{c_{11}^E}{e_{15}}\frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}}\Delta_3\left(t_k\right) \qquad (23)$$

$$F(r)=\frac{1}{n_{12}}\frac{m_{12}}{m_{11}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}d_j\int_0^\infty\alpha^2\varphi_1(\alpha)K_0\left(\alpha rt_j\right)d\alpha-$$

$$-\frac{1}{n_{12}}\frac{1}{m_{11}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}d_j\int_0^\infty\alpha^2\varphi_2(\alpha)K_0\left(\alpha rt_j\right)d\alpha-$$

$$-\frac{2}{\pi n_{12}m_{11}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}d_j\sum_{k=1}^{3}b_{2k}C_k\int_0^\infty\alpha K_0\left(\alpha rt_j\right)d\alpha\int_0^\infty\frac{\beta B(\beta)}{\alpha^2+\beta^2t_k^{-2}}d\beta \qquad (24)$$

$$A_j(\alpha)=P_j\varphi_1(\alpha)-d_j\frac{m_{12}}{m_{11}}\varphi_1(\alpha)+d_j\frac{1}{m_{11}}\varphi_2(\alpha)-$$

$$-\frac{2d_j}{\pi m_{11}\alpha}\sum_{k=1}^{3}b_{2k}C_k\int_0^\infty\frac{\beta B(\beta)}{\alpha^2+\beta^2t_k^{-2}}d\beta \qquad (25)$$

Для второй задачи, удовлетворяя граничным условиям (1) и (3), получаем соотношения (10), (11), (13), (14), а вместо парного интегрального уравнения (12) – следующее парное интегральное уравнение:

$$\int_0^\infty\beta^2B_1(\beta)\sin\beta z d\beta=\frac{1}{n_{12}}f_3(z)-\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}P_j\int_0^\infty\alpha^2\varphi_1(\alpha)e^{-\alpha t_jz}d\alpha-$$

$$-\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}P_j\int_0^\infty\alpha^2A_1(\alpha)e^{-\alpha t_jz}d\alpha \qquad (0<z<a)$$

$$\int_0^\infty\beta B_1(\beta)\sin\beta z d\beta=0 \qquad (a<z<\infty) \qquad (26)$$

Решая уравнение (26) методом преобразующих операторов [6], получим:

$$B_1(\beta)=\frac{2}{\pi\beta}\int_0^a \varphi_4(t)J_1(\beta t)dt+\frac{2}{\pi\beta}\int_0^a \varphi_5(t)J_1(\beta t)dt+\frac{2}{\pi\beta}\int_0^a \psi(t)J_1(\beta t)dt \qquad (27)$$

Здесь

$$\varphi_4(t)=\frac{1}{n_{12}}\int_0^t \frac{zf_3(z)}{\sqrt{t^2-z^2}}dz \qquad (28)$$

$$\varphi_5(t)=-\frac{t}{n_{12}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}P_j\int_0^{\infty}\alpha^2\varphi_1(\alpha)\left[L_1(\alpha t_j t)-I_1(\alpha t_j t)+\frac{2}{\pi}\right]d\alpha \qquad (29)$$

$$\psi(t)=-\frac{t}{n_{12}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}d_j\int_0^{\infty}\alpha^2 A_1(\alpha)\left[L_1(\alpha t_j t)-I_1(\alpha t_j t)+\frac{2}{\pi}\right]d\alpha \qquad (30)$$

$I_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента, $L_\nu(z)$ – функция Струве от мнимого аргумента.

Имея в виду (30), исключая из (11) и (27) $A_1(\alpha)$, для определения $B(\beta)=\beta B_1(\beta)$ получаем интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода (17), где

$$K(\beta,\gamma)=\frac{2\gamma}{\pi n_{12}m_{11}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}d_j\sum_{k=1}^{3}b_{2k}C_k\int_0^{\infty}\frac{\alpha^2 d\alpha}{\alpha^2+\gamma^2 t_k^{-2}}\times$$

$$\times\int_0^a tJ_1(\beta t)\left[L_1(\alpha t_j t)-I_1(\alpha t_j t)+\frac{2}{\pi}\right]dt \qquad (31)$$

$$\Omega(\beta)=\frac{2}{\pi}\int_0^a \varphi_4(t)J_1(\beta t)dt-\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}P_j\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\alpha^2\varphi_1(\alpha)d\alpha\int_0^a tJ_1(\beta t)\left[L_1(\alpha t_j t)-I_1(\alpha t_j t)+\frac{2}{\pi}\right]dt-\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}d_j\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\alpha^2\left[-\frac{m_{12}\varphi_1(\alpha)}{m_{11}}+\frac{\varphi_2(\alpha)}{m_{11}}\right]d\alpha\int_0^a tJ_1(\beta t)\left[L_1(\alpha t_j t)-I_1(\alpha t_j t)+\frac{2}{\pi}\right]dt \qquad (32)$$

Используя результаты работы [6] и [7], аналогичным образом доказывается разрешимость уравнения (17) для ядра (31).

Решая это уравнение методом последовательных приближений и имея в виду (11), (10), (5), (4) и соотношения электроупругости [3], можно определить все компоненты сопряженного упругого поля в любой точке полуплоскости.

В частности, эти величины на продолжении линии разреза вне разреза определяются формулами:

$$\sigma_x(0,z)=-2n_{12}\left[\frac{\varphi_4(a)/\pi+\varphi_5(a)+\psi(a)}{\sqrt{z^2-a^2}}-\int_0^a\frac{\varphi_4'(t)+\varphi_5'(t)+\psi'(t)}{\sqrt{z^2-t^2}}dt\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{3}a_{4j}\int_0^{\infty}\alpha^2 A_j(\alpha)\exp(-\alpha t_j z)d\alpha \qquad (a<z<\infty) \qquad (33)$$

$$D_z(0,z)=-\frac{2n_{13}e_{15}}{c_{11}^E}\left[\frac{\varphi_4(a)/\pi+\varphi_5(a)+\psi(a)}{\sqrt{z^2-a^2}}-\int_0^a\frac{\varphi_4'(t)+\varphi_5'(t)+\psi'(t)}{\sqrt{z^2-t^2}}dt\right]+$$

$$+\frac{e_{15}}{c_{11}^{E}}\sum_{j=1}^{3}a_{1j}\int_0^\infty \alpha^2 A_j(\alpha)\exp\left(-\alpha t_j z\right)d\alpha \qquad (a<z<\infty) \tag{34}$$

$$E_z(0,z)=\frac{2n_{14}}{e_{15}}\left[\frac{\varphi_4(a)/\pi+\varphi_5(a)+\psi(a)}{\sqrt{z^2-a^2}}-\int_0^a\frac{\varphi_4'(t)+\varphi_5'(t)+\psi'(t)}{\sqrt{z^2-t^2}}dt\right]+$$

$$-\frac{1}{e_{15}}\sum_{j=1}^{3}t_j\Delta_3\left(t_j\right)\int_0^\infty \alpha^2 A_j(\alpha)\exp\left(-\alpha t_j z\right)d\alpha \qquad (a<z<\infty) \tag{35}$$

где

$$\psi(t)=\frac{m_{12}}{n_{12}m_{11}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}d_j\int_0^\infty \alpha^2\varphi_1(\alpha)\left[L_1\left(\alpha t_j t\right)-I_1\left(\alpha t_j t\right)+\frac{2}{\pi}\right]d\alpha-$$

$$-\frac{1}{n_{12}m_{11}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}d_j\int_0^\infty \alpha^2\varphi_2(\alpha)\left[L_1\left(\alpha t_j t\right)-I_1\left(\alpha t_j t\right)+\frac{2}{\pi}\right]d\alpha+$$

$$+\frac{2}{\pi n_{12}m_{11}}\sum_{j=1}^{3}a_{4j}d_j\sum_{k=1}^{3}b_{2k}C_k\int_0^\infty \alpha\left[L_1\left(\alpha t_j t\right)-I_1\left(\alpha t_j t\right)+\frac{2}{\pi}\right]d\alpha\int_0^\infty\frac{\beta B(\beta)}{\alpha^2+\beta t_k^{-2}}d\beta$$

Как показывают формулы (20) – (23) и (33) – (35), компонент нормального механического напряжения, касательные компоненты векторов электрической индукции и напряженности обладают корневой особенностью у вершин вертикального разреза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электроупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел.-М.: Наука, 1988. 472с.
2. Тоноян В.С., Мелкумян Н.С. Об одной симметричной задаче электроупругости для пьезокерамической полуплоскости с вертикальным полубесконечным разрезом.-Докл. НАН Армении, 1997, т.97, №1.
3. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругостъ.-Киев: Наукова думка, 1989. 279с.
4. Градштейн Н.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.-М.: Физматгиз, 1971. 1108с.
5. Тоноян В.С., Мелкумян С.А. Об одной задаче для полуплоскости с вертикальным полубесконечным разрезом. — Изв.АН АрмССР, Механика, 1971, т. 24, №4, с.3-15.
6. Тоноян В.С., Минасян А.Ф. Несимметричная контактная задача для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом.-Докл. АН АрмССР, 1975, т. 61, №5, с.289-297.
7. Тоноян В.С., Мелкумян С.А. Об одной задаче для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом.-Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т. 25, №3, с.3-17.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 8.01.1996

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 532.5:532.135

НЕСИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Петросян Л.Г.

Լ.Գ. Պետրոսյան
Երկու համառանցք գլանների միջև հեղուկի հոսքի ոչ սիմետրիկ մոդելը

Օգտագործված է ոչ սիմետրիկ կառուցվածքային հեղուկի մոդելը լուծելու համակենտրոն գլանների միջև հեղուկի հոսքի ճամփին խնդիրը: Դիտարկված են հեղուկի հաստատված շարժումները ինչպես անշարժ, այնպես էլ հոսքի շարժվող սահմանների դեպքում: Ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ արագության և անկյունային արագության, ինչպես նաև օղակաձև կտրվածքով ներհոսող հեղուկի ծավալային ծախսի և ներքին գլանի (մխոցի) վրա գործող շփման ուժերի համար:

Հեղուկի միկրոկառուցվածքի ազդեցությունը հեղուկ շերտի հոսքի վրա պատկերված են գրաֆիկների վրա:

L.G. Petrosian
Non-symmetrical model of linear flow fluids between two coaxial cylinders

Использована модель структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений к решению задачи о прямолинейном течении между двумя коаксиальными цилиндрами. Рассмотрены установившиеся движения жидкости в случаях как неподвижной, так и подвижной границы течения. Получены аналитические выражения для скорости, угловой скорости, а также для расхода, протекающего через кольцевое сечение и для сил трения, действующих на внутренний цилиндр (поршень). Влияние микроструктуры на течение слоя жидкости проиллюстрировано на графиках.

1. Основные уравнения структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений

А. Уравнения поля

Общая система уравнений поля структурной несжимаемой жидкости с несимметричным тензором напряжений в векторной форме имеет вид [1]

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + (\nu + \nu_r)\nabla^2\vec{v} + 2\nu_r\nabla \times \vec{\omega} + \vec{f} \tag{1.2}$$

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 2\nu_r(\nabla \times \vec{v}^2 - 2\vec{\omega}) + (c_0 + c_d - c_a)\nabla(\nabla \cdot \vec{\omega}) + (c_d + c_a)\nabla^2\vec{\omega} + \vec{c} \tag{1.3}$$

Здесь ρ – массовая плотность жидкости, p – давление , I – скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы, $\vec{v}$ – вектор скорости точки, $\vec{\omega}$ – вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, ν – кинематическая ньютоновская вязкость, ν_r – кинематическая вращательная вязкость; c_0, c_d, c_a – коэффициенты моментной вязкости; $d(\cdots)/dt$ – полная производная по времени, ∇ – пространственный градиент, $\vec{f}$ – вектор массовой силы , $\vec{c}$ – вектор массового момента.

Б. Определяющие уравнения

Определяющие уравнения для тензоров силовых напряжений τ_{ij} и тензоров моментных напряжений μ_{ij} в декартовых координатах в случае изотропных несимметричных жидкостей имеют вид [1]

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) + \mu_r(v_{j,i} - v_{i,j}) - 2\mu_r\varepsilon_{mij}\omega_m \tag{1.4}$$

$$\mu_{ij} = c_0'\omega_{k,k}\delta_{ij} + c_d'(\omega_{i,j} + \omega_{j,i}) + c_a'(\omega_{j,i} - \omega_{i,j}) \tag{1.5}$$

где $\mu = \rho v$, $\mu_r = \rho v_r$, $c_0' = \rho c_0$, $c_d' = \rho c_d$, $c_a' = \rho c_a$ – положительные скаляры, характеризующие изотропные свойства среды. δ_{ij} – дельта-тензор Кронекера. ε_{ijk} – альтернирующий тензор Леви-Чивиты.

2. Плоско-параллельное течение несимметричной жидкости в круглой кольцевой трубе. Общее решение

Рассмотрим течение вязкой несимметричной структурной жидкости в кольцевой трубе, образованной двумя соосными круглыми цилиндрическими поверхностями: внешней – радиуса R и внутренней – радиуса R_1. Подходящей системой координат в этой задаче является цилиндрическая система (r, φ, z) с осью z, направленной вдоль оси трубы.

Тогда, пренебрегая действием массовых моментов $\bar{c}$ и принимая во внимание симметрию течения, для компонентов поступательной скорости и угловой скорости вращения частиц имеем

$$\begin{aligned} &1.\ v_r = v_\varphi = 0, \quad v_z = v(r,z) \\ &2.\ \omega_r = \omega_z = 0, \quad \omega_\varphi = \omega(r) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Уравнение неразрывности (1.1) даст $\partial v/\partial z = 0$, а уравнения поступательного движения (1.2) и вращательного движения (1.3) дают

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial r} = \dfrac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \\ \dfrac{1}{r}\left[(\mu + \mu_r)\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv}{dr}\right) + 2\mu_r\dfrac{d}{dr}(r\omega)\right] = \dfrac{dp}{dz} \end{cases} \tag{2.2}$$

$$(c_a' + c_d')\frac{d}{dr}\left(\frac{d\omega}{dr} + \frac{\omega}{r}\right) - 2\mu_r\frac{dv}{dr} - 4\mu_r\omega = 0 \tag{2.3}$$

Так как левая часть уравнений (2.2) зависит только от r, а правая часть только от z, то

$$\frac{1}{r}\left[(\mu + \mu_r)\frac{d}{d\mu}\left(\mu\frac{dv}{d\mu}\right) + 2\mu_\mu\frac{d}{d\mu}(\mu\omega)\right] = \frac{dp}{dz}, \quad \frac{dp}{dz} = \text{const} \tag{2.4}$$

Общие решения уравнений (2.3) и (2.4)имеют вид

$$\omega = C_2I_1(kr) + C_3K_1(kr) - Pr\frac{1}{k^2} - \frac{2\mu_r}{c_a' + c_d'}\frac{1}{rk^2}C_1 \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} v = {} & 2\mu_r(\mu + \mu_r)^{-1}k^{-1}\left[-C_2I_0(kr) + C_3K_0(kr)\right] + \\ & + \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}r^2 + \frac{\mu + \mu_r}{\mu}C_1\ln r + C_4 \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$k = \frac{N}{l} = \left(\frac{4\mu}{\mu + \mu_r}\frac{\mu_r}{c_a' + c_d'}\right)^{1/2}, \quad P = \frac{\mu_r}{(\mu + \mu_r)(c_a' + c_d')}\frac{dp}{dz}$$

$$N=\left(\frac{\mu_r}{\mu+\mu_r}\right)^{1/2},\quad l=\left(\frac{c'_a+c'_d}{4\mu}\right)^{1/2} \tag{2.7}$$

Здесь $I_0(kr), I_1(kr)$ и $K_0(kr), K_1(kr)$ – модифицированные цилиндрические (бесселевы) функции нулевого и первого порядка первого родов и нулевого и первого порядка второго родов; C_1, C_2, C_3 и C_4 – произвольные константы интегрирования.

3. Определение постоянных интегрирования при разных граничных условиях

А. Случай неподвижных соосных цилиндров

Так как жидкость прилипает к стенкам труб $r=R$ и $r=R_1$, то граничные условия для поступательной скорости и угловой скорости вращения частиц запишутся в форме:

при $r=R$ и $r=R_1$: $\mathrm{v}=0,\ \omega=0$ (3.1)

Определяя в (2.5) и (2.6) значения C_1, C_2, C_3 и C_4 по условиям (3.1), найдем окончательно следующие законы изменения скоростей в сечении кольцевой трубы:

$$\mathrm{v}^*=\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{v}_0}=1-r^{*2}+\frac{2\mu_r}{\mu+\mu_r}\frac{1}{\lambda}\left\{C_2^*\left[I_0(\lambda r^*)-I_0(\lambda)\right]-\right.$$
$$\left.-C_3^*\left[K_0(\lambda r^*)-K_0(\lambda)\right]\right\}-\frac{2\mu_r}{\mu+\mu_r}C_1^*\ln r^* \tag{3.2}$$

$$\omega^*=\frac{\omega R}{\mathrm{v}_0}=r^*-C_2^*I_1(\lambda r^*)-C_3^*K_1(\lambda r^*)+\frac{\mu_r}{\mu+\mu_r}\frac{C_1^*}{r^*} \tag{3.3}$$

где

$$\mathrm{v}_0=-\frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dz}$$

$$r^*=\frac{r}{R},\ \lambda=\frac{N}{l}R=kR=\left(\frac{4\mu}{\mu+\mu_r}\frac{\mu_r}{c'_a+c'_d}\right)^{1/2}R$$

$$C_1^*=\frac{1}{a}\left\{(bc+ad)\left[a-\left(1-\frac{R_1^2}{R^2}\right)I_1(\lambda)\right]+e\left(1-\frac{R_1^2}{R^2}\right)\left(a\lambda\frac{\mu+\mu_r}{\mu_2}-c\right)\right\}A$$

$$C_2^*=\frac{1}{a}\left[\left(1-\frac{R_1^2}{R^2}\right)-bAB\right],\quad C_3^*=AB$$

$$A=\left[e\lambda\ln\frac{R_1}{R}-\frac{\mu_r}{\mu+\mu_r}(bc+ad)\right]^{-1}$$

$$B=a\lambda\ln\frac{R_1}{R}+\left(1-\frac{R_1^2}{R^2}\right)\left[\frac{1}{2}a\lambda-\lambda\ln\frac{R_1}{R}I_1(\lambda)-\frac{\mu_r}{\mu+\mu_r}c\right]$$

$$a=I_1(\lambda)-\frac{R_1}{R}I_1\left(\frac{R_1}{R}\lambda\right),\quad b=K_1(\lambda)-\frac{R_1}{R}K_1\left(\frac{R_1}{R}\lambda\right)$$

$$c=I_0(\lambda)-I_0\left(\frac{R_1}{R}\lambda\right),\quad d=K_0(\lambda)-K_0\left(\frac{R_1}{R}\lambda\right)$$

$$e=aK_1(\lambda)-bI_1(\lambda) \tag{3.4}$$

Здесь v_0 – максимальная по сечению скорость на оси трубы радиуса R (при $R_1 = 0$) в классическом течении Руазейля. Решение (3.2) переходит в классическое при $\mu_r = 0$ [2–4]

$$v = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}\left[(R^2 - r^2) - \frac{(R^2 - R_1^2)}{\ln(R/R_1)}\ln\frac{r}{R_1}\right] \tag{3.5}$$

и (3.3) дает $\omega = 0$.

Заметим, что правая часть формулы (3.5) при уменьшении значения радиуса внутреннего цилиндра R_1 до нуля после раскрытия неопределенности переходит в решение прямолинейного движения вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе – течение Гагена-Пуазейля:

$$v = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}(R^2 - r^2)$$

Рассмотрим другой предельный случай

$$r = R_1\left(1 + \frac{y}{R_1}\right) \text{ и } R = R_1\left(1 + \frac{h}{R_1}\right)$$

считая отношения y/R_1 и h/R_1 малыми, разлагая отношение логарифмов $\ln(r/R_1)/\ln(R/R_1)$, входящее в правую часть (3.5), в ряд и ограничиваясь в этом ряде слагаемыми, содержащими y/R_1 и h/R_1 не выше второй степени, получим приближенное выражение для скорости движения в узкой кольцевой трубе [2,3]

$$v = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dz}(hy - y^2) \tag{3.6}$$

Обращаясь к решению (3.2), получим для расхода через сечение кольцевой трубы следующую формулу:

$$Q^* = \frac{Q}{Q_0} = 2\left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\right) - \left(1 - \frac{R_1^4}{R^4}\right) + \frac{8\mu_r}{\mu + \mu_r}\frac{1}{\lambda^2}\left\{(C_2^* a + C_3^* b) - \frac{1}{2}\lambda\left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\right) \times\right.$$

$$\left.\times\left[C_2^* I_0(\lambda) - C_3^* K_0(\lambda)\right]\right\} + \frac{2\mu_r}{\mu + \mu_r}C_1^*\left[2\frac{R_1^2}{R^2}\ln\frac{R_1}{R} + \left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\right)\right] \tag{3.7}$$

где

$$Q_0 = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{dp}{dz} \tag{3.8}$$

Здесь Q_0 – расход жидкости в классическом течении Гагена-Пуазейля через сечение трубы радиуса R. Решение (3.7) переходит в классическое при $\mu_r = 0$ [3,4]

$$Q^*_{\text{кл}} = \left(1 - \frac{R_1^2}{R^2}\right)\left[1 + \frac{R_1}{R^2} - \frac{1 - R_1^2/R^2}{\ln(R/R_1)}\right] \tag{3.9}$$

Структурные несимметричные жидкости характеризуются двумя безразмерными параметрами.

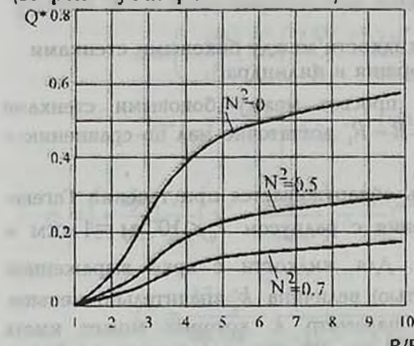
Параметр связи N, определенный формулой (2.7), характеризует связь уравнений (1.2) поступательного и (1.3) вращательного движений. Когда $v_r \to 0$, получаем $N \to 0$, эти уравнения разделяются и уравнение поступательного движения (1.2) сводится к обычному уравнению Навье-Стокса, а уравнение (1.3) ($\bar{c} = 0$) дает $\omega = \mathrm{const}$ и при любых граничных условиях $\mathrm{const} = 0$.

Второй важный безразмерный параметр L представляет собой отношение зазора между стенками внешнего и внутреннего цилиндров $(R - R_1)$ к характерной материальной длине l (определенной формулой (2.7)), то есть

$$L = \frac{R - R_1}{l}$$

Это число характеризует взаимосвязь между геометрией и свойствами жидкости.

Можно ожидать, что эффекты несимметричности жидкости будут значительными, когда либо l велико (что соответствует большому размеру подструктуры вещества. Последнее означает, что среда дисперсная – имеется несколько фаз), либо зазор между цилиндрами мал (второй случай физически ясен).



Фиг.1

Большое значение L означает большой зазор между цилиндрами или малую характерную материальную длину l. В этом случае влияние микроструктуры жидкости незначительно. Здесь, по-видимому, представляет интерес второй случай, когда зазор между цилиндрами $(R - R_1)$ мал и сравним с l.

На фиг.1 показаны графики зависимости Q^* от R/R_1 и N при $\lambda = 1$. Как видно из этого графика, расход несимметричной структурной жидкости меньше расхода классических жидкостей, где внутреннее вращение не учитывается.

В. Случай, когда внутренний цилиндр двигается поступательно

Рассмотрим течение несимметричной жидкости между двумя соосными цилиндрами, из которых внешний с радиусом R неподвижен, а внутренний с радиусом R_1 (поршень) перемещается влево со скоростью

Фиг.2

$U = \mathrm{const}$ (фиг.2). Это решение дает в первом приближении (без учета влияния концов) закон течения смазки в просвете между боковыми стенками круглого поршня и цилиндра.

Для рассматриваемой задачи граничные условия запишутся в форме:

$$\begin{aligned} &v(R) = 0, \quad \omega(R) = 0, \\ &v(R_1) = -U, \quad \omega(R_1) = 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Определяя в (2.5) и (2.6) значения C_1, C_2, C_3 и C_4 по этим условиям, найдем

$$V^* = \frac{v}{v_0} = 1 - r^{*2} + \frac{2\mu_r}{\mu+\mu_r}\frac{1}{\lambda}\left\{C_2^*\left[I_0(\lambda r^*) - I_0(\lambda)\right] - C_3^*\left[K_0(\lambda r^*) - K_0(\lambda)\right]\right\} -$$

$$-\left(\frac{2\mu_r}{\mu+\mu_r}C_1^* + e\lambda A\frac{U^*}{2}\right)\ln r^* + \frac{2\mu_r}{\mu+\mu_r}A\frac{U^*}{2}\left[I_0(\lambda) + aK_0(\lambda)\right] \qquad (3.11)$$

$$\omega^* = \frac{\omega R}{v_0} = r^* - \left(C_2^* - \lambda bA\frac{U^*}{2}\right)I_1(\lambda r^*) - \left(C_3^* - \lambda aA\frac{U^*}{2}\right)K_1(\lambda r^*) +$$

$$+\left(\frac{\mu_r}{\mu+\mu_r}C_1^* - eA\lambda\frac{U^*}{2}\right)\frac{1}{r^*} \qquad (3.12)$$

где

$$U^* = U/v_0 .$$

4. Течение несимметричной жидкости между боковыми стенками круглого поршня и цилиндра

Рассмотрим случай, когда просвет между боковыми стенками круглого поршня и цилиндра $h = R - R_1$ достаточно мал по сравнению с R_1, то есть $h/R_1 << 1$.

Для воды несимметричность обнаруживается при течении Гагена-Пуазейля в трубе круглого сечения с радиусом $r_0 \le 10^{-6}$ м $= 1$ мкм и параметром $k = 70{,}3 \cdot 10^6$ м$^{-1}$ [5]. Для жидкости с ярко выраженной структурностью (несимметричностью) величина k значительно меньше. Будем рассматривать жидкости, параметр k которых может иметь величину меньшую по сравнению с его значением для воды, не более, чем на три порядка. При течении таких жидкостей между коаксиальными цилиндрами, радиусы которых не менее 0,01м, параметр $\lambda = kR > 7 \cdot 10^2$.

Имея в виду вышеизложенное и то, что $R_1/R \approx 0{,}999$*, задачу течения смазочной жидкости в тонкой кольцевой трубе можно представить как задачу о прямолинейном движении жидкости между перемещающимися двумя параллельными стенками (течение Куэтта) на расстоянии h [2,3].

Рассмотрим установившееся ламинарное течение несимметричной жидкости, заполняющей все пространство между горизонтальными плоскостями, из которых нижняя $(r - R_1 = y = 0)$ движется влево с постоянной скоростью $U = \text{const}$, а верхняя $(r - R_1 = y = h)$ покоится. Будем считать, что скорости частиц жидкости всюду параллельны оси Ox. Тогда, пренебрегая действием массовых сил и моментов, будем иметь:

$$\begin{aligned} &v = w = 0, \qquad u = u(y) \\ &\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega(y) \end{aligned} \qquad (4.1)$$

---

* Диаметр поршня двигателей ВАЗ равен 76-76,04 мм, а зазор между поршнем и цилиндром равен 0,05÷0,07 мм.

Уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно, а уравнения поступательного и вращательного движения (1.2) и (1.3) дают

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial z}=0 \tag{4.2}$$

$$(\nu+\nu_r)\frac{d^2u}{dy^2}+2\nu_r\frac{d\omega}{dy}=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}, \qquad \frac{\partial p}{\partial x}=\mathrm{const} \tag{4.3}$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{c_a+c_d}{2\nu_r}\frac{d^2\omega}{dy^2}-2\omega \tag{4.4}$$

Граничные условия для поступательной скорости и угловой скорости вращения частиц будут:

$$u=-U, \quad \omega=0 \quad \text{при} \quad y=0$$
$$u=0, \quad \omega=0 \quad \text{при} \quad y=h \tag{4.5}$$

Решение системы уравнений (4.3) и (4.4) с учетом граничных условий (4.5) в безразмерном виде запишется так:

$$u=\left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{h^2}{2\mu}\left(\frac{2N^2}{\lambda}\frac{\mathrm{ch}\lambda y^*-1}{\mathrm{sh}\lambda}-y^{*2}\right)-U-$$
$$-C^*\left\{y^*-\frac{N^2}{\lambda}\left[\mathrm{sh}\lambda y^*-\frac{(\mathrm{ch}\lambda y^*-1)(\mathrm{ch}\lambda-1)}{\mathrm{sh}\lambda}\right]\right\} \tag{4.6}$$

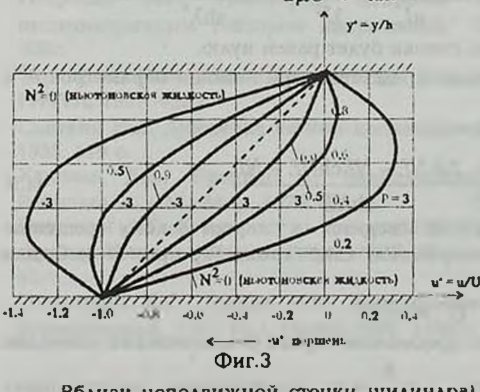
$$\omega=\left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{h}{2\mu}\left(y^*-\frac{\mathrm{sh}\lambda y^*}{\mathrm{sh}\lambda}\right)-\frac{1}{2h}C^*\left(\mathrm{ch}\lambda y^*-\frac{\mathrm{ch}\lambda-1}{\mathrm{sh}\lambda}\mathrm{sh}\lambda y^*-1\right) \tag{4.7}$$

где

$$C^*=\frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}-\frac{U}{1-\left(2N^2/\lambda\right)\left((\mathrm{ch}\lambda-1)/\mathrm{sh}\lambda\right)}$$

Форма распределения скоростей по (4.6) и (4.7) определяется градиентом давления

$$P=\frac{h^2}{2\mu U}\left(-\frac{dp}{dx}\right)$$



Фиг.3

Для $P>0$, то есть для случая падения давления в направлении движения поршня, скорость отрицательна по всей высоте канала. При отрицательных P в некоторой части поперечного сечения вблизи неподвижной стенки возможны положительные скорости, то есть возможно возвратное течение.

Вблизи неподвижной стенки (цилиндра) такое движение возникает уже при $P<-1$ (фиг. 4). Это объясняется тем, что для частиц жидкости, находящихся вблизи неподвижной стенки, увлекающее действие соседних, более быстрых слоев в состоянии преодолеть перепад давления, действующей в сторону, противоположную движению поршня.

Кривые распределения скоростей в просвете между боковыми стенками поршня и цилиндра, даваемые решением (4.6) для различных значений N^2 (при $\lambda = 1$) при градиентах давления P=3 и -3, изображены на фиг. 3.

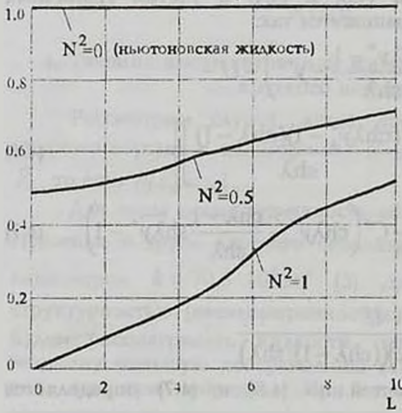
Обращаясь к формуле (4.6), получим для расхода через кольцевое сечение следующее выражение:

$$Q^* = \frac{Q}{Q_0} = 1 - U^* + \frac{6N^2}{\lambda^{*2}} \frac{2\text{sh}\lambda - \lambda\text{ch}\lambda - \lambda}{\text{sh}\lambda} \tag{4.8}$$

где

$$Q_0 = \frac{4}{3}\pi R_1 \frac{(p_0 - p_1)h^3}{\mu l_0}, \quad U^* = \frac{U}{(p_0 - p_1)h^2 / 6\mu l_0}$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{p_0 - p_1}{l_0}$$



Фиг. 4

Здесь Q_0 – расход жидкости в классическом течении Пуазейля в плоском канале, ширина которого равна $2\pi R_1$, высота – h; p_0 и p_1 – давление перед и за поршнем.

Отметим, что, если при данной разности давлений $p_0 - p_1$ поршень будет перемещаться в направлении, противоположном градиенту давления, со скоростью

$$U' = \frac{(p_0 - p_1)h^2}{6\mu l_0} + \frac{(p_0 - p_1)h^2}{\mu l_0} \frac{N^2}{\lambda^{*2}} \frac{2\text{sh}\lambda^* - \lambda^*\text{ch}\lambda^* - \lambda^*}{\text{sh}\lambda^*}$$

то, как видно из (4.8), расход смазки будет равен нулю.

Формулу (4.8) для расхода представим при помощи параметров N и $L = \frac{h}{l}$ в форме

$$Q^* = 1 - U^* + \frac{6}{L^2} \frac{2\text{sh}NL - NL\text{ch}NL - NL}{\text{sh}NL} \tag{4.9}$$

Выражение расхода (4.9) сводится к классическому решению ньютоновской жидкости, полученное С.М.Таргом [2] при $N \to 0$ или $L \to \infty$

$$Q^* = 1 - U^*$$

Это означает, что в данном предельном случае реологические аномалии отсутствуют. Заметим, что $L = \frac{h}{l} \to \infty$ соответствует исчезающему малому размеру элемента подструктуры по сравнению с толщиной слоя.

На фиг. 4 показаны графики зависимости суммы безразмерного расхода Q^* и безразмерной скорости перемещения поршня U^* от параметра L при различных значениях N^2. График показывает, что снижение L соответствует уменьшению расхода при всех значениях N, кроме $N=0$, относящегося к классическому случаю ньютоновской жидкости, в котором расход жидкости не зависит от L.

Таким образом, чем меньше вышеуказанный просвет, тем более явно выражено влияние подструктуры, вызывающее существенное уменьшение расхода смазочного вещества.

Полная сила трения, действующая на поршень длины l_0, равна

$$F = 2\pi R_1 l_0 \tau \tag{4.10}$$

где τ – напряжение силы трения на поверхности внутреннего цилиндра (поршня).

Из (1.4), с учетом (4.6), находим

$$\tau = (\mu+\mu_0)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu\frac{U}{h}\left(1-\frac{2N^2}{\lambda}\frac{\mathrm{ch}\lambda-1}{\mathrm{sh}\lambda}\right)^{-1} + \frac{p_0-p_1}{2l_0}h \tag{4.11}$$

Полная сила трения, действующая на поршень, будет

$$F = 2\pi R_1\mu\frac{U}{h}\left(1-\frac{2N^2}{\lambda}\frac{\mathrm{ch}\lambda-1}{\mathrm{sh}\lambda}\right)^{-1} + (p_0-p_1)2\pi R_1 h \tag{4.12}$$

Последним членом по сравнению с разностью сил давления, действующих на поршень, равной $\pi R_1^2(p_0-p_1)$, можно пренебречь.

Тогда силы трения в безразмерной форме запишутся так:

$$F^* = \frac{F}{F_0} = \left(1-\frac{2N^2}{\lambda}\frac{\mathrm{ch}\lambda-1}{\mathrm{sh}\lambda}\right)^{-1}$$

где F_0 – сила трения, действующая на поршень, найденная по классической теории ньютоновской жидкости [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Петросян Л.Г. Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений. –Ереван: Изд. ЕГУ, 1984. 308с.
2. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. 420 с.
3. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. –М.: ГИТТЛ, 1955. 519 с.
4. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. 630 с.
5. Петросян Л.Г. К вопросу о масштабном эффекте в асимметричной гидродинамике. – Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1984, т.37, №3, с.35-41.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Изд. Наука, 1971. 1108 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 18.04.1996

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 62.50:534.112

ЗАДАЧА НАБЛЮДЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ

Барсегян В.Р.

Վ.Ռ. Բարսեղյան
Լարի տատանման դիտման խնդիր

Հետազոտված է լարի տատանողական շարժման օպտիմալ դիտման խնդիրը: Ենթադրվում է, որ լարի դրական չափով $L_2[0,l]$ դասի ֆունկցիաներով բնութագրվող որոշ տեղամասերից ստացվում է ազդակ: Հաշվի առնելով ստացվող ազդակի որոշակի նախապատմություն, կառուցված է ունիվերսալ օպտիմալ գործողություն, որը թույլ է տալիս որոշելու լարի բոլոր կետերի ճկվածքը և արագությունը ժամանակի ցանկացած պահի:

V.R. Barseghian
The problem of a string vibrations observing

Исследована задача оптимального наблюдения колебательного движения струны. Предполагается, что из некоторых участков струны, которые характеризуются функциями из класса $L_2[0,l]$, поступает сигнал. При помощи некоторой предыстории поступающего сигнала, построен универсальный оптимальный функционал, позволяющий определить прогиб и скорость всех точек струны в любой момент времени.

1. Постановка задачи. Рассмотрим свободные колебания однородной, упругой струны длины l, края которой закреплены. Если предполагать, что каждая точка x струны колеблется строго вертикально, то ее отклонение в каждый момент времени $t \geq 0$ от положения равновесия будет функцией от x и t. Будем рассматривать малые колебания струны.

Пусть состояние струны описывается функцией $Q(x,t)$, $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$, которая удовлетворяет следующему уравнению ([1] с.26):

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

и граничным условиям

$$Q(0,t) = Q(l,t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{1.2}$$

где $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho}$, T_0 – натяжение, ρ – плотность однородной струны.

Пусть имеется возможность с помощью измерительных устройств на некоторых участках струны положительной меры измерять некоторую величину, определенную на промежутке времени $t - \vartheta \leq \tau \leq t$, где $\vartheta > 0$ – постоянное число – длина интервала, в течение которого учитывается некоторая предыстория поступающего сигнала. Число ϑ определяется из дополнительных требований, сопровождающих задачу о наблюдении, и зависит от физических возможностей измерительных устройств.

Предполагается, что участки струны, подлежащие измерению, характеризуются функциями $f(x)$ и $g(x)$ из класса $L_2[0,l]$. В частном случае они могут быть характеристическими функциями участков измерения.

Требуется по поступающему сигналу вычислить функцию состояния $Q(x,t)$ и скорость $\dot{Q}(x,t)$ струны для любой точки $x \in [0,l]$, каково бы ни было реализовавшееся в процессе (1.1) значение $Q(x,t)$. Известно, что решение уравнения (1.1) имеет следующий вид:

$$Q(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x \tag{1.3}$$

где функции $Q_k(t)$ удовлетворяют системе бесконечных уравнений

$$\ddot{Q}_k(t) = -\left(a\frac{\pi k}{l}\right)^2 Q_k(t), \quad k = 1,2,\ldots \tag{1.4}$$

Вводя обозначения

$$\lambda_k = a\frac{\pi k}{l}, \quad Q_k^{(1)}(t) = Q_k(t), \quad Q_k^{(2)}(t) = \frac{1}{\lambda_k}\dot{Q}_k(t) \tag{1.5}$$

уравнение (1.4) в нормальной форме запишется

$$\dot{Q}_k^{(1)} = \lambda_k Q_k^{(2)}, \quad \dot{Q}_k^{(2)} = -\lambda_k Q_k^{(1)} \quad k = 1,2,\ldots \tag{1.6}$$

Обозначим коэффициенты рядов Фурье функции $f(x)$ и $g(x)$ в вышеупомянутом базисе следующим образом:

$$f_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi k}{l} x dx, \quad g_k = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{\pi k}{l} x dx \tag{1.7}$$

Коэффициенты f_k и g_k известны заранее, так как известны функции $f(x)$ и $g(x)$. Предполагается, что $f_k^2 + g_k^2 \neq 0$ [2] для каждого $k = 1,2,\ldots$.

Предположим, что для каждого $k = 1,2,\ldots$ через измерительное устройство поступает сигнал с некоторой погрешностью

$$Z_k(\tau) = f_k Q_k^{(1)}(\tau) + g_k Q_k^{(2)}(\tau) + \Delta_k(\tau), \quad t - \vartheta \leq \tau \leq t \tag{1.8}$$

где погрешность $\Delta_k(\tau)$ неизвестна, однако можно принять, что из физических условий процесса наблюдения вытекает некоторая оценка этой погрешности. Пусть $\Delta_k(\tau)$ является элементом пространства L_2 и оценка возможной помехи $\Delta_k(\tau)$ выражается в виде

$$\rho[\Delta_k] = \left[\int_{t-\vartheta}^{t} \Delta_k^2(\tau) d\tau\right]^{\frac{1}{2}} \leq \delta_k \tag{1.9}$$

здесь δ_k, $k = 1,2,\ldots$ – положительные постоянные.

Требуется найти операцию $\varphi_{kt}^0[t, Z_k(\tau)]$, которая удовлетворяет условию

$$\sup_{Z_k}\left|\varphi_{kt}^0[t, Z_k(\tau)] - Q_k^{(i)}(t)\right| = \min_{\varphi_{kt}} \sup_{Z_k}\left|\varphi_{kt}[t, Z_k(\tau)] - Q_k^{(i)}(t)\right| \tag{1.10}$$

по всевозможным реализациям $Z_k(\tau)$ и по всевозможным операциям φ_{kt}.

Отметим, что операция φ_{kt}, которая при каждом t обеспечивает конечную верхнюю грань (1.10), удовлетворяет условию

$$\varphi_{kt}\left[t, f_k Q_k^{(1)}(\tau) + g_k Q_k^{(2)}(\tau)\right] = Q_k^{(1)}(t) \tag{1.11}$$

Учитывая (1.11) и линейность операции φ_{kt}, получим

$$\varphi_{kt}[t, Z_k(\tau)] - Q_k^{(1)}(t) = \varphi_{kt}[t, \Delta_k(\tau)]$$

но так как

$$\sup_{\Delta_k}\left|\varphi_{kt}[t, \Delta_k(\tau)]\right| = \delta_k \rho^*[\varphi_{kt}] \tag{1.12}$$

при условии (1.9), следовательно [3], для решения поставленной задачи надо найти операцию

$$\varphi_{kt}^0\left[t, f_k Q_k^{(1)}(\tau) + g_k Q_k^{(2)}(\tau)\right] = Q_k^{(1)}(t)$$

и имеющую при каждом рассматриваемом значении t наименьшую возможную норму $\rho^*[\varphi_{kt}^0]$. Поэтому будем строить разрешающую операцию для идеального сигнала

$$f_k Q_k^{(1)}(\tau) + g_k Q_k^{(2)}(\tau), \quad t - \vartheta \le \tau \le t \tag{1.13}$$

Вообще поступающие сигналы могут быть различными. Целесообразность выбора такого сигнала обусловлено содержанием достаточного количества информации и несложной реализацией. Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ рассматриваем по отношению к (1.13) "усиленный" сигнал

$$y_k(\tau) = \lambda_k^\alpha f_k Q_k^{(1)}(\tau) + \lambda_k^\alpha g_k Q_k^{(2)}(\tau), \quad t - \vartheta \le \tau \le t \tag{1.14}$$

реализация которого также нетрудна, здесь $\alpha = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ – малое число.

Таким образом, для каждого $k = 1, 2, \ldots$ имеем задачу наблюдения системы (1.6) с сигналом (1.14).

Для того, чтобы система (1.6) была вполне наблюдаемой по сигналу (1.14), для каждого $k = 1, 2, \ldots$ необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$K_k = \{G_k', A_k' G_k'\}$$

был равен двум [3], где

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_k \\ -\lambda_k & 0 \end{pmatrix}, \quad G_k = \left(\lambda_k^\alpha f_k, \lambda_k^\alpha g_k\right)$$

Здесь и далее штрихом обозначено транспонирование матрицы.

Так как условия полной наблюдаемости выполняются, то система (1.6) по сигналу (1.14) вполне наблюдаема для каждого $k = 1, 2, \ldots$.

Отметим, что выражение

$$\frac{l}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(f_k Q_k(\tau) + g_k \dot{Q}_k(\tau)\right)$$

общий член которого является выбранный сигнал (1.13), после постановки значения f_k и g_k из (1.7) с учетом (1.3) приводится к виду

$$\int_0^l \left(f(x) Q(x,\tau) + g(x) \dot{Q}(x,\tau)\right) dx$$

2. Приведение задачи наблюдения к проблеме моментов и ее решение. Решение системы (1.6) для каждого $k = 1,2,\ldots$ согласно формуле Коши запишется

$$\overline{Q}_k(\tau) = X_k(\tau,t)\overline{Q}_k(t) \tag{2.1}$$

где

$$\overline{Q}_k(\tau) = \begin{pmatrix} Q_k^{(1)}(\tau) \\ Q_k^{(2)}(\tau) \end{pmatrix}$$

$X_k(\tau,t)$ – нормированная фундаментальная матрица системы (1.6) и имеет вид

$$X_k(\tau,t) = \begin{pmatrix} \cos\lambda_k(\tau-t) & \sin\lambda_k(\tau-t) \\ -\sin\lambda_k(\tau-t) & \cos\lambda_k(\tau-t) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Из (1.14) и (2.1) получим

$$y_k(\tau) = G_k X_k(\tau,t)\overline{Q}_k(t), \quad t-\vartheta \le \tau \le t \tag{2..3}$$

Операции, вычисляющие функции $Q_k^{(1)}(t)$ и $Q_k^{(2)}(t)$, по сигналу (2.3) будем искать в виде

$$\begin{aligned} &\int_{t-\vartheta}^{t} y_k(\tau)\overline{V}_{k1}(t,\tau)d\tau = Q_k^{(1)}(t) \\ &\int_{t-\vartheta}^{t} y_k(\tau)\overline{V}_{k2}(t,\tau)d\tau = Q_k^{(2)}(t) \qquad k = 1,2,\ldots \end{aligned} \tag{2.4}$$

Подставляя $y_k(\tau)$ из (2.3) в (2.4), выполняя замену переменного $\tau - t = \xi$ и вводя обозначение $\overline{V}_{ki}(t,t+\xi) = V_{ki}(\xi)$, $i = 1,2$, будем иметь

$$\begin{aligned} &\int_{-\vartheta}^{0}(f_k\cos\lambda_k\xi - g_k\sin\lambda_k\xi)V_{k1}(\xi)d\xi = \frac{1}{\lambda_k^{\alpha}} \\ &\int_{-\vartheta}^{0}(f_k\sin\lambda_k\xi + g_k\cos\lambda_k\xi)V_{k1}(\xi)d\xi = 0 \\ &\int_{-\vartheta}^{0}(f_k\cos\lambda_k\xi - g_k\sin\lambda_k\xi)V_{k2}(\xi)d\xi = 0 \\ &\int_{-\vartheta}^{0}(f_k\sin\lambda_k\xi + g_k\cos\lambda_k\xi)V_{k2}(\xi)d\xi = \frac{1}{\lambda_k^{\alpha}} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Для каждого $k = 1,2,\ldots$ найдем функции $V_{k1}(\xi)$ и $V_{k2}(\xi)$, удовлетворяющие интегральным условиям (2.5) и являющимися оптимальным в смысле

$$\int_{-\vartheta}^{0}[V_{k1}^2(\xi) + V_{k2}^2(\xi)]d\xi \to \min \tag{2.6}$$

Полученную вариационную задачу (2.5), (2.6) будем решать с помощью проблемы моментов. Следуя [3], нужно найти числа l_{k1}, l_{k2}, l_{k3} и l_{k4}, связанные условием

$$l_{k1} + l_{k4} = \lambda_k^{\alpha} \tag{2.7}$$

для которых минимум квадрата нормы основного пространства

$$(\rho_k^0)^2 = \min_{l_{k1}+l_{k4}=\lambda_k^\alpha} \int_{-\vartheta}^{0} \left[\left(h_{k1}^{(l)}(\xi) \right)^2 + \left(h_{k2}^{(l)}(\xi) \right)^2 \right] d\xi \qquad (2.8)$$

где

$$h_{k1}^{(l)}(\xi) = l_{k1}(f_k \cos\lambda_k\xi - g_k \sin\lambda_k\xi) + l_{k2}(f_k \sin\lambda_k\xi + g_k \cos\lambda_k\xi)$$

$$h_{k2}^{(l)}(\xi) = l_{k3}(f_k \cos\lambda_k\xi - g_k \sin\lambda_k\xi) + l_{k4}(f_k \sin\lambda_k\xi + g_k \cos\lambda_k\xi) \qquad (2.9)$$

Норма сопряженного пространства является (2.6).

Подставляя (2.9) в (2.8) и после некоторых вычислений получим

$$(\rho_k^0)^2 = \min_{l_{k1}+l_{k4}=\lambda_k^\alpha} \left\{ \left[(f_k l_{k1} + g_k l_{k2})^2 + (f_k l_{k3} + g_k l_{k4})^2 \right] \frac{\sigma_{k1}}{2} + \right.$$
$$+ \left[(g_k l_{k1} - f_k l_{k2})^2 + (g_k l_{k3} - f_k l_{k4})^2 \right] \frac{\sigma_{k2}}{2} + \qquad (2.10)$$
$$\left. + \left[(l_{k1} l_{k2} + l_{k3} l_{k4})(f_k^2 - g_k^2) + (l_{k2}^2 - l_{k1}^2 + l_{k4}^2 - l_{k3}^2) f_k g_k \right] \sigma_{k3} \right\}$$

где

$$\sigma_{k1} = \vartheta + \frac{1}{2\lambda_k} \sin 2\lambda_k \vartheta, \ \sigma_{k2} = \vartheta - \frac{1}{2\lambda_k} \sin 2\lambda_k \vartheta, \ \sigma_{k3} = -\frac{\sin^2 \lambda_k \vartheta}{\lambda_k} \qquad (2.11)$$

Для нахождения $l_{k1}^0, l_{k2}^0, l_{k3}^0$ и l_{k4}^0 получим систему алгебраических уравнений

$$(f_k^2 \sigma_{k1} + g_k^2 \sigma_{k2} - 2 f_k g_k \sigma_{k3}) l_{k1} + \left[f_k g_k (\sigma_{k1} - \sigma_{k2}) + (f_k^2 - g_k^2) \sigma_{k3} \right] l_{k2} = -\mu_k$$
$$\left[f_k g_k (\sigma_{k1} - \sigma_{k2}) + (f_k^2 - g_k^2) \sigma_{k3} \right] l_{k1} + (g_k^2 \sigma_{k1} + f_k^2 \sigma_{k2} + 2 f_k g_k \sigma_{k3}) l_{k2} = 0$$
$$(f_k^2 \sigma_{k1} + g_k^2 \sigma_{k2} - 2 f_k g_k \sigma_{k3}) l_{k3} + \left[f_k g_k (\sigma_{k1} - \sigma_{k2}) + (f_k^2 - g_k^2) \sigma_{k3} \right] l_{k4} = 0 \qquad (2.12)$$
$$\left[f_k g_k (\sigma_{k1} - \sigma_{k2}) + (f_k^2 - g_k^2) \sigma_{k3} \right] l_{k3} + (g_k^2 \sigma_{k1} + f_k^2 \sigma_{k2} + 2 f_k g_k \sigma_{k3}) l_{k4} = -\mu_k$$

где μ_k – неопределенный множитель Лагранжа. Присоединяя к уравнениям (2.12) условие (2.7), получим замкнутую систему относительно $l_{k1}^0, l_{k2}^0, l_{k3}^0, l_{k4}^0$ и μ_k. Полученная система алгебраических уравнений допускает следующее решение:

$$l_{k1}^0 = \lambda_k^\alpha \frac{g_k^2 \sigma_{k1} + f_k^2 \sigma_{k2} + 2 f_k g_k \sigma_{k3}}{(\sigma_{k1} + \sigma_{k2})(f_k^2 + g_k^2)}$$

$$l_{k2}^0 = l_{k3}^0 = -\lambda_k^\alpha \frac{f_k g_k (\sigma_{k1} - \sigma_{k2}) + (f_k^2 - g_k^2) \sigma_{k3}}{(\sigma_{k1} + \sigma_{k2})(f_k^2 + g_k^2)} \qquad (2.13)$$

$$l_{k4}^0 = \lambda_k^\alpha \frac{f_k^2 \sigma_{k1} + g_k^2 \sigma_{k2} - 2 f_k g_k \sigma_{k3}}{(\sigma_{k1} + \sigma_{k2})(f_k^2 + g_k^2)}$$

Подставляя в (2.10) вместо $l_{k1}^0, l_{k2}^0, l_{k3}^0$ и l_{k4}^0 соответственно их значения из (2.13) и произведя некоторые упрощения, получим

$$(\rho_k^0)^2 = \frac{\lambda_k^{2\alpha} (\sigma_{k1} \sigma_{k2} - \sigma_{k3}^2)(f_k^2 + g_k^2)}{2(\sigma_{k1} + \sigma_{k2})} \qquad (2.14)$$

Выполняя аналогичную подстановку из (2.13) в (2.9), будем иметь

$$h_{k1}^{(0)}(\xi)=l_{k1}^{0}\left(f_k\cos\lambda_k\xi-g_k\sin\lambda_k\xi\right)+l_{k2}^{0}\left(f_k\sin\lambda_k\xi+g_k\cos\lambda_k\xi\right)$$
$$h_{k2}^{(0)}(\xi)=l_{k3}^{0}\left(f_k\cos\lambda_k\xi-g_k\sin\lambda_k\xi\right)+l_{k4}^{0}\left(f_k\sin\lambda_k\xi+g_k\cos\lambda_k\xi\right)\quad(2.15)$$

Для искомых функций

$$V_{ki}^{0}(\xi)=\frac{1}{\left(\rho_k^0\right)^2}h_{ki}^{0}(\xi),\quad i=1,2\quad(2.16)$$

после подстановки (2.14) и (2.15) получим

$$V_{k1}^{0}(\xi)=\frac{2}{\lambda_k^{\alpha}(\sigma_{k1}\sigma_{k2}-\sigma_{k3}^2)\left(f_k^2+g_k^2\right)^2}\times$$
$$\times\Big\{\left(g_k^2\sigma_{k1}+f_k^2\sigma_{k2}+2f_kg_k\sigma_{k3}\right)\left(f_k\cos\lambda_k\xi-g_k\sin\lambda_k\xi\right)-\quad(2.17)$$
$$-\left[f_kg_k\left(\sigma_{k1}-\sigma_{k2}\right)+\left(f_k^2-g_k^2\right)\sigma_{k3}\right]\left(f_k\sin\lambda_k\xi+g_k\cos\lambda_k\xi\right)\Big\}$$

$$V_{k2}^{0}(\xi)=\frac{2}{\lambda_k^{\alpha}(\sigma_{k1}\sigma_{k2}-\sigma_{k3}^2)\left(f_k^2+g_k^2\right)^2}\times$$
$$\times\Big\{-\left[f_kg_k\left(\sigma_{k1}-\sigma_{k2}\right)+\left(f_k^2-g_k^2\right)\sigma_{k3}\right]\left(f_k\cos\lambda_k\xi-g_k\sin\lambda_k\xi\right)+\quad(2.18)$$
$$+\left(f_k^2\sigma_{k1}+g_k^2\sigma_{k2}-2f_kg_k\sigma_{k3}\right)\left(f_k\sin\lambda_k\xi+g_k\cos\lambda_k\xi\right)\Big\}$$

Так как $\left(\rho_k^0\right)^2>0$, то найденные функции $V_{k1}^{0}(\xi)$ и $V_{k2}^{0}(\xi)$ являются оптимальными и универсальными.

3. О сходимости решений. В п. 2 для каждого $k=1,2,\ldots$ построены оптимальные в смысле (2.6) функции $V_{k1}^{0}(\xi)$ и $V_{k2}^{0}(\xi)$. Покажем ограниченность нормы бесконечномерного вектора

$$\left(V^{0}(\xi)\right)'=\left(V_{11}^{0}(\xi),V_{12}^{0}(\xi),\ldots,V_{k1}^{0}(\xi),V_{k2}^{0}(\xi),\ldots\right)\quad(3.1)$$

Вычислим норму этого вектора

$$\left\|V^{0}\right\|^2=\int_{-\vartheta}^{0}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(V_{k1}^{0}(\xi)\right)^2+\left(V_{k2}^{0}(\xi)\right)^2\right]\right\}d\xi=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\vartheta}^{0}\left[\left(V_{k1}^{0}(\xi)\right)^2+\left(V_{k2}^{0}(\xi)\right)^2\right]d\xi=\sum_{k=1}^{\infty}\left\|V_k^{0}\right\|^2\quad(3.2)$$

Учитывая (2.16), имеем

$$\left\|V_k^{0}\right\|^2=\frac{1}{\left(\rho_k^0\right)^2}.$$

Следовательно, учитывая (2.14) и (2.11) из (1.12) и (3.2) соответственно, получим

$$\left|\varphi_{ki}[t,\Delta_k(\tau)]\right|\le\frac{2\delta_k}{\lambda_k^{\alpha}\sqrt{\vartheta\left(1-\frac{\sin^2\lambda_k\vartheta}{\lambda_k^2\vartheta^2}\right)\left(f_k^2+g_k^2\right)}}$$

$$\left\|V^{0}\right\|^{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\vartheta\lambda_{k}^{2\alpha}\left(1-\frac{\sin^{2}\lambda_{k}\vartheta}{\lambda_{k}^{2}\vartheta}\right)\left(f_{k}^{2}+g_{k}^{2}\right)} \qquad (3.3)$$

Из (3.3) видно, что выбором функций $f(x)$ и $g(x)$ можно улучшить сходимость этого ряда.

Таким образом, имея оптимальные функции $V_{k1}^{0}(\xi)$ и $V_{k2}^{0}(\xi)$ в явном виде (2.17) и (2.18), а также значение измерения $y_{k}(\tau)$ по формуле (2.4), получим $Q_{k}^{(1)}(\tau)$ и $Q_{k}^{(2)}(\tau)$. Подставляя полученное значение $Q_{k}(t)$ в (1.3), будем иметь функцию состояния струны $Q(x,t)$ (аналогично и для $\dot{Q}(x,t)$) для любой точки $x\in(0,l)$. Отметим, что сходимость полученного ряда следует из сходимости нормы (3.3).

Выражаю свою искреннюю благодарноасть профессору М.С.Габриеляну за внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1.Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977.

2.Габриелян М.С. О стабилизации неустойчивых движений механических систем. – ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.

3.Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 28.03.1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 51, №1, 1998 Механика

УДК 62.50:531.8

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ ПО ЗАДАННОМУ ФАЗОВОМУ МНОГООБРАЗИЮ

Гукасян А.А., Багдасарян А.В.

Ա.Ա. Ղուկասյան, Ա.Վ. Բաղդասարյան

Տրված ֆազային բազմաձևությամբ համակարգի շարժման կայունության մասին

Ուսումնասիրվում է տրված ֆազային ծրագրով ղեկավարվող համակարգի օպտիմալ շարժման ասիմպտոտիկ կայունությունը: Եռօղակ էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի համար ստացված են տրված ծրագրով շարժման ասիմպտոտիկ կայունությունն ապահովող ղեկավարող ուժերը.

A.A. Ghukasyan, A.V. Baghdasaryan

On stability of the movement of directed system by the given phaze variety

Исследуются вопросы асимптотической устойчивости оптимального движения управляемой системы по заданному фазовому многообразию относительно возмущений начальных условий. Для трехзвенного элекромеханического манипулятора определены оптимально управляющие силы (входные напряжения приводов), которые обеспечивают асимптотическую устойчивость движения схвата по цилиндрической поверхности.

1. Пусть уравнение движения управляемой системы описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{y} = Y(y,c,Q), \quad y(t_0) = y_0, \quad Q \in \{Q\} \tag{1.1}$$

где $y - 2n$-мерный вектор фазовых координат управляемой системы; $Q - n$-мерный вектор управления; с– постоянные параметры системы; $Y(y,c,Q)$ – непрерывная, ограниченная функция, имеющая частные производные по $y_1, y_2, \dots, y_{2n}$ в области определения уравнения (1.1), и $\Phi_k(y(t_0),t_0) = 0$, $(k = 1,2,\dots,r)$.

Ставится следующая задача: определить управляющие усилия системы Q так, чтобы движение $y = y(t)$ системы проходило по заданному фазовому многообразию $\Phi_k(y,t) = 0$ $(k = 1,2,\dots,r)$ и было устойчивым по отношению к начальным возмущениям фазовых координат [1-3].

Программа движения системы (1.1) задана в виде уравнений

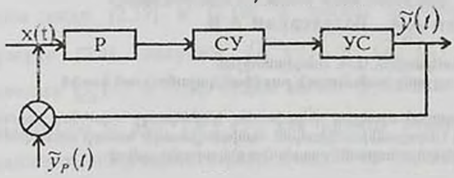
$$\Phi_k(y,t) = 0, \quad k = 1,2,\dots,r \le 2n; \qquad t \in [t_0, T] \tag{1.2}$$

где Φ_k – непрерывные функции своих аргументов, имеющие непрерывные частные производные.

Пусть при $\Phi_k(y(t_0),t_0) = 0$, $y_p = y_p(t)$ – невозмущенное движение системы (1.1), а $Q_p = Q_p(y,t)$ – закон изменения управляющей функции. Здесь необходимо предполагать, что при $Q_p = Q_p(y,t)$, $y_p = y_p(t)$ удовлетворяет условию $\Phi_k(y_p(t),t) = 0$, $(k = 1,2,\dots,r)$. Однако на практике, в силу действия различных помех и неточностей, реализация начального условия $\Phi_k(y(t_0),t_0) = 0$, $(k = 1,2,\dots,r)$ не удается. Следовательно, в реальном случае в системе (1.1) при $Q_p = Q_p(y,t)$ будет осуществляться некоторое другое движение $\tilde{y} = \tilde{y}(t)$, которое в общем случае не совпадает с заданным программным движением $y_p(t)$

$(\tilde{y}(t) - y_p(t) = x(t) \neq 0)$ и $\Phi_k(y(t),t) \neq 0$ $(k = 1,2,\ldots,r)$. Возникает необходимость иметь регулятор, подключенный к входу системы управления (фиг.1), который по принципу обратной связи вырабатывает дополнительно к $Q_p(y,t)$ управляющее усилие, не только как функцию времени, но и как функцию от возмущений $x(t)$, то есть управление в рассматриваемом случае имеет вид

$$\tilde{Q} = Q_p(y,t) + Q(x,t) \tag{1.3}$$



Р – регулятор; СУ – система управления;
УС – управляемая система
⊗ – измерительное устройство

Фиг.1

Слагаемое $Q(x,t)$ определяется из условия устойчивости программного движения $y_p = y_p(t)$ на многообразии (1.2). Наряду с критерием устойчивости программного движения можно ставить также критерий оптимальности переходного процесса $J = J[x,Q] \to \min$.

Разность значений функций $\Phi_k(y,t)$ $(k = 1,2,\ldots,r)$ в программном движении $y_p(t)$ и в действительном движении $\tilde{y}(t)$

$$x_k^* = \Phi_k(\tilde{y},t) - \Phi_k(y_p,t) \quad (k = 1,2,\ldots,r)$$

назовем возмущениями по заданному многообразию (программе), а вектор $x^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_r^*)$ – вектором возмущений. Возмущение x^* зависит от x и обращается в нуль при $x = 0$ $(x^*(0) \equiv 0)$.

Уравнение возмущенного движения по многообразии имеет вид

$$\dot{x}_k^* = X_k(x,Q,c,t) \quad (k = 1,2,\ldots,r) \tag{1.4}$$

где

$$X_k(x,Q,c,t) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \tilde{y}_i} Y_i(x + y_p, Q_p + Q, c) + \frac{\partial \Phi_k(x + y_p, t)}{\partial t} -$$

$$-\sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_{p_i}} Y_i(y_p, Q_p, c) - \frac{\partial \Phi_k(y_p,t)}{\partial t}$$

$$X_k(0,0,c,t) \equiv 0; \quad t \in [t_0, T]$$

Уравнения (1.4) допускают тривиальное решение $x^* = 0$, соответствующее невозмущенному движению $y_p = y_p(t)$. Начальное условие системы (1.4) имеет вид

$$x_k^{*0} = \Phi_k(\tilde{y}(t_0), t_0) \quad (k = 1,2,\ldots,r) \tag{1.5}$$

Таким образом, исследование устойчивости движения управляемой системы по заданной программе сводится к изучению поведения решений возмущенных дифференциальных уравнений (1.4) с начальными условиями (1.5) при $t \geq t_0$. Приведем определение устойчивости в смысле Ляпунова [4,5].

1. Если для всякого произвольно заданного положительного числа ε, как бы оно ни было мало, существует такое число δ, что при всех начальных возмущениях (при $t = t_0$), удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{r}[x_k^*(t_0)]^2 \le \delta$$

и при всех $t \ge t_0$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{r}[x_k^*(t)]^2 < \varepsilon$$

то невозмущенное движение системы $y_p = y_p(t)$ устойчиво по отношению к программе $\Phi_k(y,t) = 0$; в противном случае невозмущенное движение $y_p = y_p(t)$ неустойчиво.

2. Если невозмущенное движение $y_p = y_p(t)$ устойчиво и

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{r}[x_k^*(t)]^2 = 0;$$

то устойчивость по отношению к программе $\Phi_k(y,t)$ $(k = 1,2,\ldots,r)$ является асимптотической.

В работе для управляемых систем предлагается процедура определения управляющих (обобщенных) сил, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость программного движения $y_p = y_p(t)$ по заданному фазовому многообразию (1.2) и минимизируют при этом критерий качества, который зависит от переходного процесса. Суть алгоритма следующая. Требуется, чтобы регулятор обеспечивал возмущенное движение (1.4) управляемой системы (1.1), по закону

$$\dot{x}_k^* + \gamma_k x_k^* = 0,\ \text{где}\ \operatorname{Re}\gamma_k > 0 \quad (k = 1,2,\ldots,r) \tag{1.6}$$

и минимизировал критерий качества, типа

$$J = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i Q_i^2 \to \min \tag{1.7}$$

Физический смысл (1.7) может быть истолкован как энергетические затраты регулятора.

(1.6) в силу (1.4) можно представить в виде

$$X_k(x,Q,c,t) + \gamma_k \Phi_k^*(x,t) = 0 \tag{1.8}$$

где $\quad \Phi_k(x,t) = \Phi_k(\tilde{y},t) - \Phi_k(y_p,t) \quad (k = 1,2,\ldots,r)$

В общем случае (1.8) является системой алгебраических уравнений относительно $Q_k(x,t)$. А в целом, поставленная задача сводится к задаче условного экстремума (1.7) при (1.6), которую далее можно исследовать методом неопределенных множителей Лагранжа. Отметим, что управляющие силы, обеспечивающие асимптотическую устойчивость переходного процесса, исследованы также в работе [3].

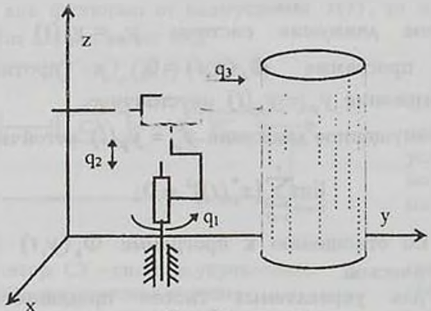
2. Рассмотрим устойчивость программного движения схвата трехзвенного электромеханического манипулятора по цилиндрической поверхности с постоянной скоростью.

Уравнение движения рассматриваемого манипулятора (фиг.2) имеет вид [6]:

$$\begin{aligned}
&\ddot{q}_1 = f_1(\dot{q}_1,\dot{q}_2,q_3) + b_{11}Q_1, \quad \ddot{q}_2 = f_2(\dot{q}_2) + b_{22}Q_2\\
&\ddot{q}_3 = f_3(\dot{q}_1,\dot{q}_3,q_3) + b_{33}Q_3)\\
&L_i\dot{I}_i + R_iI_i + k_in_i\dot{q}_i = u_i,\ Q_i = k_iI_i,\ (i = 1,2,3)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Программу движения схвата манипулятора в системе координат (q_1,q_2,q_3) представим в виде

$$\Phi_1 = Aq_3^2 \cos^2 q_1 + 2Bq_3^2 \cos q_1 \sin q_1 + Cq_3^2 \sin^2 q_1 +$$
$$+2Dq_3 \cos q_1 + 2Eq_3 \sin q + F$$
$$\Phi_2 = q_2 - \alpha(t), \quad \Phi_3 = \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_1 q_3^2 - v_0^2 \tag{2.2}$$



Фиг. 2

Пусть при выполнении начальных условий

$$\Phi_k(q(t_0), \dot{q}(t_0), t_0) = 0 \quad (k = 1,2,3) \tag{2.3}$$

управляющие усилия $Q_j^p = Q_j^p(q,t)$ (или управляющие напряжения $u_j^p = u_j^p(q,t)$) обеспечивают движения схвата по программе (2.2). Обозначая через $q_j^p = q_j^p(t)$ решение уравнений (2.1) при $Q_j^p = Q_j^p(q,t)$, выполнение программы (2.2) будет

$$\Phi_k(q^p(t), \dot{q}^p(t), t) = 0 \quad (k = 1,2,3) \tag{2.4}$$

Предположим, что в силу разных причин начальное условие (2.3) не выполняется. Следовательно, движение схвата манипулятора будет осуществляться по некоторому закону $\tilde{q} = \tilde{q}(t)$, который в общем случае не совпадает с $q^p = q^p(t)$, то есть $\tilde{q}(t) - q^p(t) = x(t) \neq 0$ и $\Phi_k(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) \neq 0 \quad (k = 1,2,3)$.

Управление манипулятором ищем в виде (1.3)

$$\tilde{Q} = Q^p(q,t) + Q(x,t) \tag{2.5}$$

где дополнительное слагаемое $Q = Q(x,t)$ определим из условий асимптотической устойчивости программного движения $q^p = q^p(t)$ на многообразии (на программе) (2.2), а также из условий минимума квадратичной формы

$$J = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i Q_i^2 \quad (\alpha_i = \mathrm{const} > 0) \tag{2.6}$$

Уравнение возмущенного движения манипулятора имеет вид

$$\ddot{x}_i = f_i(x, \dot{x}) + b_{ii} Q \quad (i = 1,2,3) \tag{2.7}$$

где

$$f_1(x,\dot{x}) = -m_3[2q_3^p \ddot{q}_1^p x_3 + \ddot{q}_1^p x_3^2 + 2q_3^p \dot{q}_3^p x_1 + 2q_3^p \dot{x}_1 \dot{x}_3 +$$
$$+2q_3^p \dot{q}_1^p x_3 + \dot{q}_1^p \dot{q}_3^p x_3 + \dot{q}_1^p x_3 \dot{x}_3 + 2\dot{q}_3^p \dot{x}_1 x_3 + 2x_3 \dot{x}_1 \dot{x}_3 +$$
$$+b_1 \dot{x}_1]/[J + m_3 (q_3^p)^2 + 2m_3 \dot{q}_3^p x_3 + m_3 x_3^2];$$

$$f_2(x,\dot{x}) = -\frac{b_2 x_2}{m_2 + m_3};$$

$$f_3(x,\dot{x}) = \frac{2a_3^p \dot{q}_1^p \dot{x}_1 + q_3^p \dot{x}_1^2 + (\dot{q}_1^p)^2 x_3 + 2\dot{q}_1^p \dot{x}_1 x_3 + \dot{x}_1^2 x_3 + b_3 \dot{x}_3}{m_3}$$

$$b_{11} = \frac{n_1}{J + m_3 (q_3^p)^2 + 2m_3 q_3^p x_3 + m_3 x_3^2}; \; b_{22} = \frac{n_2}{m_2 + m_3};$$

$$b_{33} = \frac{n_3}{m_3}$$

Возмущения относительно программы (2.2) обозначим через $x_k^* \; (k = 1,2,3)$

$$\begin{aligned} x_1^* &= \Phi_1(q^p + x) - \Phi_1(q^p) = \Phi_1^*(x) \\ x_2^* &= \Phi_2(q^p + x, t) - \Phi_2(q^p, t) = \Phi_2^*(x,t) \\ x_3^* &= \Phi_3(q^p + x, \dot{q}^p + \dot{x}) - \Phi_3(q^p, \dot{q}^p) = \Phi_3^*(x,\dot{x}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Производные от (2.8) по времени в силу уравнений (2.7) являются

$$\dot{x}_1^* = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_i} \dot{x}_i; \; \dot{x}_2^* = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial t};$$

$$\ddot{x}_1^* = \sum_{i=1}^{3} [\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_i} (f_i(x,\dot{x}) + b_{ii} Q_i) + \frac{d}{dt} (\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_i}) \dot{x}_i];$$

$$\ddot{x}_2^* = \sum_{i=1}^{3} [\frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_i} (f_i(x,\dot{x}) + b_{ii} Q_i)] + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial x_i \partial x_j} \dot{x}_i \dot{x}_j + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial x_i \partial t} \dot{x}_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial t \partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial t^2};$$

$$\dot{x}_3^* = \sum_{i=1}^{3} [\frac{\partial \Phi_3^*}{\partial \dot{x}_i} f_i(x,\dot{x}) + b_{ii} Q_i) + \frac{\partial \Phi_3^*}{\partial x_i} \dot{x}_i] \tag{2.9}$$

Найдем такие управляющие силы $Q_i(x,t) \;\; (i = 1,2,3)$, которые по каждому возмущению $x_i^* \; (i = 1,2,3)$ (2.8) обеспечивают переходный процесс в соответствии с дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1^* + \gamma_{11} \dot{x}_1^* + \gamma_{10} x_1^* &= 0 \\ \ddot{x}_2^* + \gamma_{22} \dot{x}_2^* + \gamma_{20} x_2^* &= 0 \\ \dot{x}_3^* + \gamma_{30} x_3^* &= 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Если постоянные коэффициенты уравнений (2.10) определить из условий

$$\gamma_{30} > 0, \; \gamma_{22}^2 \geq 4\gamma_{20}, \; \gamma_{11}^2 \geq 4\gamma_{10}, \; \gamma_{11} > 0, \; \gamma_{22} > 0, \; \gamma_{10} > 0, \; \gamma_{20} > 0 \tag{2.11}$$

то управляющие силы, удовлетворяющие условию (2.10), будут обеспечивать асимптотическую устойчивость переходного процесса.

Уравнения (2.10) в силу (2.9) представляют собой три линейных алгебраических уравнения относительно искомых сил $Q_i \;\; (i = 1,2,3)$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi_j^*}{\partial x_i} b_{ii} Q_i = b_j \quad (j = 1,2); \quad \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi_3^*}{\partial \dot{x}_i} b_{ii} Q_i = b_3 \tag{2.12}$$

где $b_1 = -\sum_{i=1}^{3} [\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_i} f_i(x,\dot{x}) + \frac{d}{dt} (\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_i}) \dot{x}_i + \gamma_{11} \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_i} \dot{x}_i] - \gamma_{10} \Phi_1^*(x);$

$$b_2 = -\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_i} f_i(x,\dot{x}) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial x_i \partial x_j} \dot{x}_i \dot{x}_j + \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial x_i \partial t} \dot{x}_i - \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial t \partial x_i} \dot{x}_i\right] - \text{[illegible]}$$

$$-\gamma_{22}\left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial t}\right] - \gamma_{20}\Phi_2^*(x,t)$$

$$b_3 = -\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial \Phi_3^*}{\partial \dot{x}_i} f_i(x,\dot{x}) + \frac{\partial \Phi_3^*}{\partial x_i} \dot{x}_i\right] - \gamma_{30}\Phi_3^*(x,\dot{x})$$

Управляющие силы Q_i $(i = 1,2,3)$ определим также из условий минимума квадратической формы (2.6) при (2.12). Применяя метод неопределенных множителей Лагранжа, поставленная задача сводится к определению минимума расширенного функционала

$$\bar{J} = J + \lambda_1\left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_i} b_{ii} Q_i - b_1\right] + \lambda_2\left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_i} b_{ii} Q_i - b_2\right] +$$

$$+\lambda_3\left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi_3^*}{\partial \dot{x}_i} b_{ii} Q_i - b_3\right] \tag{2.13}$$

где λ_i $(i = 1,2,3)$ –неопределенные множители Лагранжа.

Применяя обычную процедуру минимизации, будем иметь

$$Q_j = -\frac{b_{jj}}{2\alpha_j}\left[\sum_{i=1}^{2} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial x_j} + \lambda_3 \frac{\partial \Phi_3^*}{\partial \dot{x}_j}\right] \quad (j = 1,2,3) \tag{2.14}$$

Подставляя (2.14) в (2.12), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно λ_j $(j = 1,2,3)$

$$c_{i1}\lambda_1 + c_{i2}\lambda_2 + c_{i3}\lambda_3 = -b_i \quad (i = 1,2,3) \tag{2.15}$$

где

$$c_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3} \frac{b_{ss}^2}{\alpha_s} \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial x_s} \frac{\partial \Phi_j^*}{\partial \tilde{x}_s}; \quad c_{3j} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3} \frac{b_{ss}^2}{\alpha_s} \frac{\partial \Phi_3^*}{\partial \dot{x}_s} \frac{\partial \Phi_j^*}{\partial \tilde{x}_s} \qquad (j = 1,2,3;\ i = 1,2)$$

(в принятых обозначениях необходимо иметь в виду, что при $j = 3$ $\tilde{x}_s = \dot{x}_s$ $(s = 1,2,3)$).

Из (2.15) имеем $\lambda_i = \Delta_j / \Delta$ $(\Delta \neq 0)$, где Δ и Δ_j $(j = 1,2,3)$ - главные и вспомогательные определители системы (2.15).

Подставляя значение λ_j в (2.14), окончательно получим

$$Q_j = -\frac{b_{jj}}{2\alpha_j\Delta}\left[\sum_{i=1}^{2} \Delta_i \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial x_j} + \Delta_3 \frac{\partial \Phi_3^*}{\partial \dot{x}_j}\right] \quad (j = 1,2,3) \tag{2.16}$$

Из возмущенного уравнения баланса напряжений электромеханических приводов [7]

$$u_i = \frac{1}{k}(L_i\dot{Q}_i + R_iQ_i + k_i^2 n_i \dot{x}_i) \qquad (i = 1,2,3) \tag{2.17}$$

можно определить дополнительные управляющие напряжения $u_i = u_i(x,\dot{x})$ $(i = 1,2,3)$, обеспечивающие движение схвата манипулятора по вышеуказанным свойствам. Из (2.16) и (2.17) получим $(i = 1,2,3)$

$$u_i = \frac{L_i}{k_i}\frac{d}{dt}\left\{-\frac{b_{ii}}{2\alpha_i\Delta}\left[\sum_{j=1}^{2} \Delta_j \frac{\partial \Phi_j^*}{\partial x_i} + \Delta_3 \frac{\partial \Phi_3^*}{\partial \dot{x}}\right]\right\} -$$

$$-\frac{R_i b_{ii}}{2k_i \alpha_i \Delta}[\sum_{j=1}^{2}\Delta_j \frac{\partial \Phi_j^{*}}{\partial x_i} + \Delta_3 \frac{\partial \Phi_3^{*}}{\partial x_i}] + k_i n_i \dot{x}_i \qquad (2.18)$$

Для практической реализации имеет смысл в безразмерных переменных рассматривать случай, когда $L_i \ll R_i$ [7]. Это предположение выполняется практически для всех типов современных промышленных манипуляционных роботов и позволяет упростить систему управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галиуллин А.С. Обратные задачи динамики. – М.: Наука, 1981.
2. Мухарлямов Р.Г. О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию. – Дифференциальные уравнения. 1969, №4.
3. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные и нелинейные модели. – М.: Наука, 1988.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.
5. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966.
6. Гукасян А.А, Барсегян В.Р. Обратная задача динамики электромеханического манипулятора. – Изв. НАН РА, Механика, 1994, №5-6.
7. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Синтез оптимального управления транспортными движениями промышленных роботов. – Изв. АН СССР, МТТ, 1986, №4.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 11.04.1997