

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ ПРОCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՄԱՅԻՆԵՂԵՎԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1997

3

токи смещения пренебрежимо малы (ϵ — коэффициент диэлектрической проницаемости). Предполагается, что для рассматриваемой задачи справедливы линеаризованные уравнения электродинамики для внешней и внутренней (оболочки) областей и линейные уравнения теории упругости для оболочки [1, 2].

Считается справедливой гипотеза магнитоупругости тонких тел, согласно которой [2, 3]:

$$e_1 = \varphi(\alpha, \beta, t), \quad e_2 = \psi(\alpha, \beta, t), \quad h_3 = f(\alpha, \beta, t) \quad (1.1)$$

где e — тангенциальные компоненты вектора напряженности возбуждаемого в оболочке электрического поля, h_3 — нормальная компонента вектора напряженности возбуждаемого в оболочке магнитного поля. Здесь и в последующем индексы α, β, γ при необходимости, заменяются цифрами 1, 2, 3 соответственно.

В рассматриваемой постановке для уравнений магнитоупругости оболочки получим [2, 3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_3}{\partial \beta} - \frac{\partial h_2}{\partial \gamma} &= \frac{4\pi}{c} \sigma_1 \left[e_1 - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} B_{02} \right) \right] \\ \frac{\partial h_1}{\partial \gamma} - \frac{\partial h_2}{\partial \alpha} &= \frac{4\pi}{c} \sigma_2 \left[e_2 + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} B_{01} \right) \right] \\ \frac{\partial h_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial h_1}{\partial \beta} &= \frac{4\pi}{c} \sigma_3 \left[e_3 + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} B_{02} - \frac{\partial u_2}{\partial t} B_{01} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.2)$$

где e_i — компоненты вектора напряженности возбуждаемого в оболочке электрического поля, h_i — компоненты вектора напряженности возбуждаемого в оболочке магнитного поля, c — электродинамическая постоянная ($c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек), σ_i — коэффициенты тензора электропроводности среды, B_{0i} — тангенциальные компоненты вектора магнитной индукции, u_i — перемещения какой-либо точки оболочки.

Далее принимается уточненная теория оболочек [1, 4], согласно которой для перемещений какой-либо точки оболочки имеем

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_1 = u - \gamma \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \gamma \frac{h^2}{8} a_{55} \Phi - \gamma^3 \frac{a_{55}}{6} \Phi \\ u_\beta &= u_2 = v + \gamma k v - \gamma \frac{\partial w}{\partial \beta} + \gamma \frac{h^2}{8} a_{44} \Psi - \gamma^2 k \frac{h^2}{16} a_{44} \Psi - \gamma^3 \frac{a_{44}}{6} \Psi \\ u_\gamma &= u_3 = w \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $u = u(\alpha, \beta, t)$, $v = v(\alpha, \beta, t)$, $w = w(\alpha, \beta, t)$ — компоненты перемещения срединной поверхности оболочки, $\Phi = \Phi(\alpha, \beta, t)$, $\Psi = \Psi(\alpha, \beta, t)$ — искомые функции, характеризующие деформации поперечного сдвига, $a_{55} = G_{13}^{-1}$, $a_{44} = G_{23}^{-1}$ — коэффициенты упругости, G_{13} — модули поперечного сдвига.

Обобщенный закон Гука принимается в форме [1, 4]

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= B_{11}e_\alpha + B_{12}e_\beta, & \sigma_\beta &= B_{22}e_\beta + B_{12}e_\alpha \\ \tau_{\alpha\beta} &= B_{66}e_{\alpha\beta}, & \tau_{\alpha\gamma} &= B_{55}e_{\alpha\gamma}, & \tau_{\beta\gamma} &= B_{44}e_{\beta\gamma}\end{aligned}\quad (1.4)$$

где для упругих коэффициентов имеем

$$\begin{aligned}B_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2}, & B_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_1\nu_2}, & B_{12} &= \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1\nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1\nu_2} \\ B_{66} &= G_{12}, & B_{55} &= G_{13}, & B_{44} &= G_{23}\end{aligned}\quad (1.5)$$

E_i — модули упругости, G_{ik} — модули сдвига, ν_i — коэффициенты Пуассона.

Согласно (1.3) для компонент тензора деформаций имеем

$$\begin{aligned}e_\alpha &= \varepsilon_1 + \gamma\chi_1^* + \gamma^2\eta_1 + \gamma^3\theta_1, & e_\beta &= \varepsilon_2 + \gamma\chi_2^* + \gamma^2\eta_2 + \gamma^3\theta_2 \\ e_{\alpha\beta} &= \omega + \gamma\tau^* + \gamma^2\nu + \gamma^3\lambda \\ e_{\alpha\gamma} &= a_{55}\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2\right)\Phi, & e_{\beta\gamma} &= a_{44}\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2\right)\Psi\end{aligned}\quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}, & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial \beta} + kw, & \omega &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \\ \chi_1^* &= \chi_1 + \frac{h^2}{8}a_{55}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}, & \chi_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\end{aligned}\quad (1.7)$$

$$\chi_2^* = \chi_2 + \frac{h^2}{8}a_{44}\frac{\partial \Psi}{\partial \beta}, \quad \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - k^2 w \quad (1.8)$$

$$\tau^* = \tau + \frac{h^2}{8}\left(a_{55}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + a_{44}\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right), \quad \tau = -2\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - k\left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)$$

$$\begin{aligned}\eta_1 &= 0, & \eta_2 &= -k\chi_2 - \frac{h^2}{16}ka_{44}\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \\ \nu &= -\frac{k}{2}\tau - \frac{h^2}{16}\left[2ka_{55}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - ka_{44}\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right]\end{aligned}\quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}\theta_1 &= -\frac{1}{6}a_{55}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}, & \theta_2 &= -\frac{1}{6}a_{44}\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \\ \lambda &= -\frac{1}{6}\left(a_{55}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + a_{44}\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right)\end{aligned}\quad (1.10)$$

Очевидно, что к приведенным уравнениям должны быть присоединены трехмерные уравнения электродинамики для окружающей среды (вакуум). Для приведения общей пространственной задачи магнитоупругости оболочки к двумерной предполагаем, что, при относительно больших R , вне оболочки существуют внешние области (толщина которых отсчитывается от поверхностей оболочки $\gamma = \pm h/2$ по внешней нормали), в которых можно допускать, что тангенциальные компоненты возмущенного магнитного поля не зависят от γ , а тангенциальные компоненты возмущенного электрического поля и нормальная компонента возмущенного магнитного поля быстро затухают при удалении от наружных поверхностей оболочки [1, 5].

В этой постановке, при весьма малых значениях отношения λ_0/R , с достаточно высокой точностью, для возмущенного электромагнитного поля вокруг оболочки, имеем следующие уравнения [1, 5]

$$\begin{aligned} \square(h_1^+ - h_1^-) &= \frac{2}{\lambda_0} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \\ \square(h_2^+ - h_2^-) &= \frac{2}{\lambda_0} \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \square(h_1^+ + h_1^-) &= 0, \quad \square(h_2^+ + h_2^-) = 0 \\ \square &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.12)$$

где h_1^+, h_1^- — значения h_1 при $\gamma = \pm h/2$ соответственно, λ_0 — некоторый характерный для данной задачи размер толщины пограничного слоя вокруг оболочки (включая область внутри замкнутой оболочки). В частности, λ_0 может быть равно длине полуволны упругих колебаний оболочки λ_1 .

2. Внутренним напряжениям оболочки (1.4) соответствуют эквивалентные силы и моменты, приведенные на единицу длины срединной поверхности [1, 4]

$$\begin{aligned} T_1 &= c_{11}\epsilon_1 + D_{11}\eta_1 + c_{12}\epsilon_2 + D_{12}\eta_2 \\ T_2 &= c_{22}\epsilon_2 + D_{22}\eta_2 + c_{12}\epsilon_1 + D_{12}\eta_1 \\ S_{12} &= c_{66}\omega + D_{66}v + k \left(D_{66}\tau^* + \frac{3h^2}{20} D_{66}\lambda \right) \\ S_{21} &= c_{66}\omega + D_{66}v \\ M_1 &= D_{11}\chi_1^* + \frac{3h^2}{20} D_{11}\theta_1 + D_{12}\chi_2^* + \frac{3h^2}{20} D_{12}\theta_2 \\ M_2 &= D_{22}\chi_2^* + \frac{3h^2}{20} D_{22}\theta_2 + D_{12}\chi_1^* + \frac{3h^2}{20} D_{12}\theta_1 \\ H &= H_{12} = H_{21} = D_{66}\tau^* + \frac{3h^2}{20} D_{66}\lambda \\ N_1 &= \frac{h^3}{12} \Phi, \quad N_2 = \frac{h^3}{12} \Psi \end{aligned} \quad (2.1)$$

где для жесткостей имеем

$$G_{ik} = hB_{ik}, \quad D_{ik} = \frac{h^3}{12} B_{ik} \quad (2.2)$$

Уравнения движения оболочки запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_{21}}{\partial \beta} &= P_1 + U_1, & \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S_{12}}{\partial \alpha} + kN_2 &= P_2 + U_2, \\ -kT_2 + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_2}{\partial \beta} &= P_3 + U_3 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial \beta} - N_1 = R_1 + V', \quad \frac{\partial M_2}{\partial \beta} + \frac{\partial H}{\partial \alpha} - N_2 = R_2 + V',$$

где

$$P_i = - \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1 + k\gamma) K_i d\gamma, \quad U_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1 + k\gamma) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} d\gamma$$

$$R_i = - \int_{-h/2}^{h/2} \gamma \rho(1 + k\gamma) K_i d\gamma, \quad V_i = \int_{-h/2}^{h/2} \gamma \rho(1 + k\gamma) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} d\gamma$$
(2.4)

ρK_i — компоненты объемной силы электромагнитного происхождения, отнесенные к единице объема тела, ρ — плотность материала оболочки.

Объемные силы электромагнитного происхождения, вызванные движением оболочки в магнитном поле, определяются формулами [2,3,5]:

$$\rho K_1 = - \frac{B_{02}}{c} \sigma_1 e_3 + \frac{\sigma_1}{c^2} \left(B_{01} B_{02} \frac{\partial u_2}{\partial t} - B_{02}^2 \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)$$

$$\rho K_2 = \frac{B_{01}}{c} \sigma_2 e_3 + \frac{\sigma_2}{c^2} \left(B_{01} B_{02} \frac{\partial u_1}{\partial t} - B_{01}^2 \frac{\partial u_2}{\partial t} \right)$$

$$\rho K_3 = \frac{1}{c} (B_{02} \sigma_1 e_1 - B_{01} \sigma_2 e_2) - \frac{1}{c^2} (B_{02}^2 \sigma_1 + B_{01}^2 \sigma_2) \frac{\partial w}{\partial t}$$
(2.5)

Из уравнений (1.2) с учетом (1.1), после некоторых преобразований получим

$$\frac{4\pi}{c} \sigma_1 e_3 = \frac{\partial h_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial h_1}{\partial \beta} - 4\pi \frac{\sigma_1}{c^2} \left(B_{02} \frac{\partial u_1}{\partial t} - B_{01} \frac{\partial u_2}{\partial t} \right)$$
(2.6)

$$h_1 = \frac{h_1^+ + h_1^-}{2} + \gamma \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{4\pi \sigma_2}{c} \left(\psi + \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right]$$

$$h_2 = \frac{h_2^+ + h_2^-}{2} + \gamma \left[\frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{4\pi \sigma_1}{c} \left(\varphi - \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right]$$
(2.7)

Из (2.5) согласно (2.6) получим

$$\rho K_1 = - \frac{B_{02}}{4\pi} \left(\frac{\partial h_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial h_1}{\partial \beta} \right), \quad \rho K_2 = \frac{B_{01}}{4\pi} \left(\frac{\partial h_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial h_1}{\partial \beta} \right)$$
(2.8)

Заметим, что ρK_1 и ρK_2 отличаются лишь знаком и величиной интенсивности соответствующих компонент магнитной индукции. В отличие от случая колебаний оболочек и пластин в поперечном магнитном поле, здесь ρK_i не зависят от характеристик деформаций поперечного сдвига.

Наконец, согласно (1.1), (2.7) из (2.5) и (2.8) для компонент объемной силы электромагнитного происхождения получим:

$$\rho K_1 = \gamma \frac{B_{02}}{c} \left[\sigma_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} \right) + \sigma_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial t} \right) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{B_{02}}{8\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (h_2^+ + h_2^-) - \frac{\partial}{\partial \beta} (h_1^+ + h_1^-) \right] \\
\rho K_2 = & -\gamma \frac{B_{01}}{c} \left[\sigma_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} \right) + \sigma_2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} + \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial t} \right) \right] - \\
& - \frac{B_{01}}{8\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (h_2^+ + h_2^-) - \frac{\partial}{\partial \beta} (h_1^+ + h_1^-) \right] \\
\rho K_3 = & \frac{B_{02}}{c} \sigma_1 \left(\Phi - \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) - \frac{B_{01}}{c} \sigma_2 \left(\Psi + \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right)
\end{aligned} \quad (2.9)$$

Наконец, преобразуя уравнения внутренней задачи магнитоупругости (1.2) с учетом (1.1), (2.6), (2.7), получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \alpha} &= \frac{h^+ - h^-}{h} - \frac{4\pi\sigma_2}{c} \left(\Psi + \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \\
\frac{\partial f}{\partial \beta} &= \frac{h_2^+ - h_2^-}{h} + \frac{4\pi\sigma_1}{c} \left(\Phi - \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \\
\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} &= 0
\end{aligned} \quad (2.10)$$

а для определения нормальной компоненты возбуждаемого электрического поля получим

$$\begin{aligned}
e_3 = & -\gamma \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} \right) - \gamma \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} + \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial t} \right) - \\
& - \frac{B_{02}}{c} \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} - \frac{h^2}{8} a_{55} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{\gamma^3}{6} a_{55} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] + \\
& + \frac{B_{01}}{c} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \gamma \left(k \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial t} + \frac{h^2}{8} a_{44} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - \gamma \frac{a_{44}}{6} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right]
\end{aligned} \quad (2.11)$$

Рассматривая (2.11), замечаем, что здесь мы, наряду с членами обычного взаимодействия, имеем также члены типа $\gamma \frac{h^2}{8} a_{55} \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial \Phi(\Psi)}{\partial t}$

или $\gamma \frac{a_{44}}{6} \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial \Phi(\Psi)}{\partial t}$, представляющие взаимодействия нового типа [3].

Окончательно из (2.3), (2.10) и (1.11), после очевидных подстановок и преобразований, согласно (1.1), (1.3)–(1.10), (2.1), (2.4), (2.7) и (2.9), получим следующую полную систему десяти дифференциальных уравнений магнитоупругих колебаний рассматриваемой оболочки, относительно десяти функций $u, v, w, \Phi, \Psi, f, \varphi, \psi,$

$$(h_1^+ - h_1^-), (h_2^+ - h_2^-)$$

$$\begin{aligned}
& C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + k C_{12} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \\
& + k (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta^2} - k \frac{h^2}{16} (D_{12} - D_{66}) a_{44} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha \partial \beta} -
\end{aligned}$$

(2.12)

$$\begin{aligned}
& -k \frac{h^2}{8} D_{66} a_{55} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k \frac{h^3}{12} \rho \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial t^2} + \\
& + k \frac{h^4}{120} \rho a_{55} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - k \frac{B_{02}}{c} \frac{h^3}{12} \left[\sigma_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} \right) + \right. \\
& \left. + \sigma_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial t} \right) \right] \\
& C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + k C_{22} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \\
& + k \frac{\partial}{\partial \beta} \left(D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) - k \frac{h^2}{40} D_{66} a_{55} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} - \\
& - k \frac{h^2}{16} \left(D_{22} a_{44} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \beta^2} - \frac{13}{5} D_{66} a_{44} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha^2} \right) + k \frac{h^3}{12} \Psi = \quad (2.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - k \frac{h^3}{12} \rho \frac{\partial^3 w}{\partial \beta \partial t^2} + k \frac{h^3}{120} \rho a_{44} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \\
& + k \frac{B_{01}}{c} \frac{h^3}{12} \left[\sigma_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial t} \right) + \sigma_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} \right) \right] \\
& k C_{22} \frac{\partial v}{\partial \beta} + k C_{12} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + k^2 C_{22} w + k^2 D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \\
& - k^2 \frac{h^2}{16} D_{66} a_{44} \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{h^3}{12} \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} = \quad (2.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{B_{02}}{c} h \sigma_1 \left(\varphi - \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) - \frac{B_{01}}{c} h \sigma_2 \left(\psi + \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \\
& D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta^2} + k^2 D_{12} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \\
& + k D_{66} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} \right) - \frac{h^2}{10} \left[a_{55} \left(D_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \right) + \right. \\
& \left. + a_{44} (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha \partial \beta} \right] + \frac{h^3}{12} \Phi = \quad (2.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial t^2} - \rho \frac{h^5}{120} a_{55} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - k \frac{h^3}{12} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\
& + \frac{B_{02}}{c} \frac{h^3}{12} \left[\sigma_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} \right) + \sigma_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} \right) \right] \\
& D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + k^2 D_{22} \frac{\partial w}{\partial \beta} +
\end{aligned}$$

$$+kL_{66}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}\right)-\frac{h^2}{10}\left[a_{44}\left(D_{22}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\beta^2}+D_{66}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha^2}\right)+\right. \\ \left.+a_{55}(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\partial\beta}\right]+\frac{h^3}{12}\Psi= \quad (2.16)$$

$$=\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta\partial t^2}-\rho\frac{h^5}{120}a_{44}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}-2k\frac{h^3}{12}\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}- \\ -\frac{B_{01}}{c}\frac{h^3}{12}\left[\sigma_1\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial t}\right)+\sigma_2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\partial t}\right)\right] \\ \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}-\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}-\frac{h_1^*-h_1^-}{h}-\frac{4\pi\sigma_2}{c}\left(\Psi+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial\beta}-\frac{h_2^*-h_2^-}{h}+\frac{4\pi\sigma_1}{c}\left(\Phi-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=0 \quad (2.19)$$

$$\Pi(h_1^*-h_1^-)-\frac{2}{\lambda_{01}}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)=0 \quad (2.20)$$

$$\Pi(h_2^*-h_2^-)-\frac{2}{\lambda_{02}}\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}-\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)=0 \quad (2.21)$$

К полученной системе уравнений (2.12)–(2.21), присоединяя граничные и начальные условия задачи [1–5], можно решать задачи колебаний и распространения волны в ортотропной, электропроводящей круговой цилиндрической оболочке в продольном магнитном поле. Однако, в общем виде задачи эти почти неразрешимы. Целесообразнее рассматривать отдельные частные случаи.

3. Рассмотрим осесимметричную задачу круговой цилиндрической оболочки. Пусть в оболочке реализуется такое осесимметричное напряженное состояние, при котором все искомые величины функции — лишь координаты α и времени t . В этом случае, очевидно, функция Ψ , характеризующая поперечные сдвиги в плоскостях $\gamma O\beta$, равна нулю.

Ограничиваясь точностью технической уточненной теории оболочек [1, 4], т. е. строго придерживаясь точности $1 \pm h^2/R^2 \approx 1$, из (2.12)–(2.21), получим следующую систему разрешающих уравнений задачи:

$$C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+C_{12}\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\alpha}=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\rho\frac{h^3}{12R}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial t^2}+ \\ +\rho\frac{h^5}{120R}a_{44}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\frac{B_{02}}{c}\frac{h^3}{12R}\sigma_1\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial t}\right) \quad (3.1)$$

$$C_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}=\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{B_{01}}{c}\frac{h^3}{12R}\sigma_1\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial t}\right) \quad (3.2)$$

$$C_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + C_{22} \frac{w}{R^2} - \frac{h^3}{12} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} +$$

$$+ \frac{B_{02}}{c} h \sigma_1 \left(\varphi - \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) - \frac{B_{01}}{c} h \sigma_2 \left(\psi + \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (3.3)$$

$$D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} + D_{12} \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{h^2}{10} D_{11} a_{55} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + \frac{h^3}{12} \Phi =$$

$$= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial t^2} - \rho \frac{h^3}{120} a_{55} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \rho \frac{h^3}{12 R} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} +$$

$$+ \frac{B_{02}}{c} \frac{h^3}{12} \sigma_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} \right) \quad (3.4)$$

$$- D_{66} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} = -2\rho \frac{h^3}{12 R} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{B_{01}}{c} \frac{h^3}{12} \sigma_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} \right) \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{h_1^+ - h_1^-}{h} + \frac{4\pi\sigma_2}{c} \left(\psi + \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{h_2^+ - h_2^-}{h} + \frac{4\pi\sigma_1}{c} \left(\varphi - \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.8)$$

$$[\]_1 (h_1^+ - h_1^-) - \frac{2}{\lambda_0} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.9)$$

$$[\]_1 (h_2^+ - h_2^-) + \frac{2}{\lambda_0} \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (3.10)$$

где

$$[\]_1 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (3.11)$$

Совместно рассматривая уравнения (3.2) и (3.5), после примитивных преобразований с учетом (2.2), приходим к известному уравнению

$$C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (3.12)$$

т. е. в рассматриваемой осесимметричной задаче волновые процессы по координате β (напомним, что v — перемещение срединной поверхности по направлению координаты β) не зависят от электромагнитных характеристик оболочки и внешнего магнитного поля. Таким образом, имея ввиду лишь электромагнитоупругие взаимодействия, мы приходим к системе восьми уравнений (3.1), (3.3), (3.4), (3.6) — (3.11) относительно восьми искомых функций $u, w, \Phi, f, \varphi, \psi, (h_1^+ - h_1^-)$ и $(h_2^+ - h_2^-)$.

Пусть искомые функции представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} [w, f, \varphi, (h_2^+ - h_2^-)] &= [w_0, f_0, \varphi_0, h_{20}] e^{i\omega t} \sin k\alpha \\ [u, \Phi, \psi, (h_1^+ - h_1^-)] &= [u_0, \Phi_0, \psi_0, h_{10}] e^{i\omega t} \cos k\alpha \end{aligned} \quad (3.13)$$

где величины с индексом "0" — искомые постоянные, $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ — величина, характеризующая частоту колебаний и затухание, $k = \pi\lambda_1^{-1}$ — волновое число, λ_1 — длина полуволны.

Подставляя (3.13) в систему уравнений (3.1) — (3.10) и введя безразмерные параметры

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \frac{\rho h \omega_0^2}{c_{11} k^2}, \quad \gamma = Rk, \quad \eta = \frac{h^2}{12R^2}, \quad \varepsilon = \frac{2}{k^2 \lambda_1 h} \\ \theta^2 &= \frac{h^2}{10} \alpha_{55} \rho \omega_0^2, \quad \mu = \frac{c_{11}}{c_{22}}, \quad \nu_1 = \frac{c_{12}}{c_{11}} \\ \Phi_1 &= \frac{\Phi_0}{\rho \omega_0^2 k}, \quad \chi = \frac{4\pi\sigma_2 \omega_0}{c^2 k^2}, \quad f_1 = f_0 \frac{\beta}{kB_{01}} \\ \beta &= \frac{B_{01}^2 \sigma_2 h R^2 \omega_0}{c^2 C_{11}}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}\end{aligned} \quad (3.14)$$

где ω_0 — частота свободных преимущественно поперечных колебаний оболочки без учета поперечных сдвигов

$$\omega_0^2 = \frac{C_{11} h}{12\rho} \left(k^4 - \nu_1 \frac{k^2}{R^2} + \frac{c_{22}}{c_{11}} \frac{12}{R^2 h^2} \right) \quad (3.15)$$

после серии несложных преобразований приходим к следующей системе алгебраических уравнений относительно u_0, w_0, Φ_1, f_1 :

$$\begin{aligned}-u_0(1 + \alpha^2 \Omega^2) + w_0 \left(\frac{\nu_1}{\gamma} + \alpha^2 \eta^2 \gamma \Omega^2 \right) - \Phi_1 \alpha^2 \eta \gamma \theta^2 \Omega^2 &= 0 \\ -u_0 \nu_1 \gamma + w_0 (\mu + \alpha^2 \gamma \Omega^2 + \beta \Omega) + \Phi_1 \alpha^2 \eta \gamma^4 + f_1 \Omega &= 0 \\ u_0 \frac{\alpha^2}{\gamma} \Omega^2 - w_0 \left(1 - \frac{\nu_1}{\gamma^2} + \alpha^2 \Omega^2 \right) + \Phi_1 (\alpha^2 + \theta^2 + \alpha^2 \theta^2 \Omega^2) &= 0 \\ w_0 \chi \beta \Omega + f_1 (1 + \varepsilon + \chi \Omega) &= 0\end{aligned} \quad (3.16)$$

Приравнявая определитель этой системы к нулю, с точностью

$$1 \pm \frac{\nu_1}{\gamma^2} \approx 1, \quad 1 \pm \nu_1 \eta \approx 1, \quad 1 \pm \frac{\alpha^2 + \theta^2}{\alpha^2} \frac{\nu_1}{\gamma^2} \approx 1, \quad 1 \pm \alpha^4 \Omega^4 \approx 1$$

приходим к следующему характеристическому уравнению для определения относительной частоты колебаний Ω :

$$\begin{aligned}(1 + \alpha^2 \Omega^2) \{ \Omega^2 \alpha^2 \gamma^2 \chi (\alpha^2 + \theta^2 + \alpha^2 \eta \gamma^2) + \Omega^2 (1 + \varepsilon) \alpha^2 \gamma^2 \times \\ \times (\alpha^2 + \theta^2 + \alpha^2 \eta \gamma^2) + \Omega [(\alpha^2 + \theta^2) (\mu - \nu_1^2) \chi + \alpha^2 \eta \gamma^4 \chi + \\ + \beta (\alpha^2 + \theta^2) (1 + \varepsilon)] + (1 + \varepsilon) [(\alpha^2 + \theta^2) (\mu - \nu_1^2) + \alpha^2 \eta \gamma^4] \} = 0\end{aligned} \quad (3.17)$$

Отсюда легко заметить, что первое уравнение $(1 + \alpha^2 \Omega^2) = 0$ описывает продольные колебания рассматриваемой оболочки, с указанной выше точностью. В частности, переходя к частоте колебаний ω , получим

$$1 + \frac{\rho h \omega^2}{c_{11} k^2} = 0 \quad \text{или} \quad \omega_{1,2} = \pm \frac{\pi}{\lambda_1} \sqrt{\frac{E_1}{\rho(1 - \nu_1^2)}}$$

Частоты преимущественно поперечных колебаний получим из второго уравнения $\{ \} = 0$. В этом случае, очевидно, разумнее пользоваться численным анализом.

Пусть, в частности, оболочка изготовлена из трансверсального изотропного материала и имеет следующие исходные параметры:

$E = 7.68 \cdot 10^{11}$ дин/см², $\nu_1 = 0.25$, $G' = 10^{11}$ дин/см² (и $G' = 4 \cdot 10^{10}$ дин/см²), $\rho = 3$ г/см³, $h = 0.1$ см (и $h = 0.01$ см), $R = 5$ см, $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек, $\sigma_2 = 2.5 \cdot 10^{17}$ сек⁻¹ (и $\sigma_2 = 5 \cdot 10^{17}$ сек⁻¹). А волновое число пусть будет равно 5, т.е. $k = \pi \lambda_1^{-1} = 5$, $\lambda_1 = 2\pi h$.

В нижеследующих двух таблицах приводятся значения Ω_i в зависимости от β при $G' = 10^{11}$ дин/см², когда $\sigma_2 = 2.5 \cdot 10^{17}$ сек⁻¹ (табл. 1.3) и $\sigma_2 = 5 \cdot 10^{17}$ сек⁻¹ (табл. 2, 4).

Таблица 1

β	Ω_1	Ω_2		Ω_3		$B_{01} \cdot 10^{-4}$ Д
	Re	Re	Im	Re	Im	
10	-0.0405	-0.0008	0.8839	-0.0008	-0.8839	5.4584
20	-0.0390	-0.0015	0.9004	-0.0015	-0.9004	7.7194
40	-0.0364	-0.0029	0.9327	-0.0029	-0.9327	10.9169
60	-0.0341	-0.0040	0.9638	-0.0040	-0.9638	13.3704
80	-0.0320	-0.0050	0.9940	-0.0050	-0.9940	15.4388
100	-0.0302	-0.0059	1.0234	-0.0059	-1.0234	17.2611
120	-0.0286	-0.0068	1.0519	-0.0068	-1.0519	18.9085

Таблица 2

β	Ω_1	Ω_2		Ω_3		$B_{01} \cdot 10^{-4}$ Д
	Re	Re	Im	Re	Im	
10	-0.0267	-0.0002	0.8755	-0.0002	-0.8755	3.8597
20	-0.0203	-0.0004	0.8839	-0.0004	-0.8839	5.4584
40	-0.0195	-0.0008	0.9005	-0.0008	-0.9005	7.7194
60	-0.0188	-0.0011	0.9167	-0.0011	-0.9167	9.4543
80	-0.0182	-0.0014	0.9327	-0.0014	-0.9327	10.9169
100	-0.0176	-0.0017	0.9485	-0.0017	-0.9485	12.2054
120	-0.0170	-0.0020	0.9639	-0.0020	-0.9639	13.3704

Далее рассмотрим два других случая, когда $G' = 4 \cdot 10^{10}$ дин/см², т. е. когда модуль поперечного сдвига в 2.5 раза меньше.

Таблица 3

β	Ω_1	Ω_2		Ω_3		$B_{01} \cdot 10^{-13}$
	Re	Re	Im	Re	Im	
10	-0.0402	-0.0010	0.8039	-0.0010	-0.8039	5.4584
20	-0.0384	-0.0019	0.8221	-0.0019	-0.8221	7.7194
40	-0.0353	-0.0034	0.8574	-0.0034	-0.8574	10.9169
60	-0.0327	-0.0047	0.8913	-0.0047	-0.8913	13.3704
80	-0.0304	-0.0059	0.9240	-0.0059	-0.9240	15.4388
100	-0.0284	-0.0068	0.9556	-0.0068	-0.9556	17.2611
120	-0.0267	-0.0077	0.9861	-0.0077	-0.9861	18.9085

Таблица 4

β	Ω_1	Ω_2		Ω_3		$B_{01} \cdot 10^{-13}$
	Re	Re	Im	Re	Im	
10	-0.0206	-0.0003	0.7946	-0.0003	-0.7946	3.8597
20	-0.0201	-0.0005	0.8038	-0.0005	-0.8038	5.4584
40	-0.0192	-0.0009	0.8220	-0.0009	-0.8220	7.7194
60	-0.0184	-0.0013	0.8398	-0.0013	-0.8398	9.4543
80	-0.0177	-0.0017	0.8573	-0.0017	-0.8573	10.9169
100	-0.0170	-0.0020	0.8743	-0.0020	-0.8743	12.2054
120	-0.0164	-0.0024	0.8911	-0.0024	-0.8911	13.3704

Рассматривая таблицы, во-первых, замечаем, что с уменьшением модуля поперечного сдвига уменьшается частота колебаний $\text{Im}(\Omega_1)$, что же касается затухания $\text{Re}(\Omega_1)$, то оно, наоборот, увеличивается, когда рассматриваем корни Ω_2 и Ω_3 и уменьшается в случае Ω_1 . Наблюдается некоторое увеличение частоты колебаний (примерно в 20% при $\sigma_2 = 25 \cdot 10^7$ и 10% при $\sigma_2 = 5 \cdot 10^{17}$) с увеличением напряженности магнитного поля примерно в 3.5 раза. При увеличении напряженности магнитного поля (в 3.5 раза) существенно увеличиваются коэффициенты затухания при Ω_2 и Ω_3 - примерно в 8-10 раз, а коэффициенты затухания, соответствующие Ω_1 , уменьшаются примерно в 1.5 раза.

Увеличение коэффициента электропроводимости в два раза незначительно влияет на частоту колебаний, но приводит к уменьшению коэффициентов затухания примерно в два раза.

Посмотрим, что произойдет при существенном изменении геометрических параметров оболочки. Пусть теперь относительная толщина оболочки уменьшится в десять раз, т. е. пусть $h = 0.01$ см при $R = 5$ см, а волновое число в 1.5 раза, т. е. пусть теперь $k = 3.3333$ (вместо пяти). Остальные величины неизменны, при этом рассмотрим лишь одно значение для модуля поперечного сдвига $G' = 10^{11}$ дин/см².

Результаты подсчета корней характеристического уравнения в зависимости от β (примерно в тех же диапазонах изменения B_{01}) приводятся в нижеследующих таблицах, при двух значениях коэффициента электропроводности σ_2 : $\sigma_2 = 2.5 \cdot 10^{17}$ сек⁻¹ (табл. 5.) и $\sigma_2 = 5 \cdot 10^{17}$ сек⁻¹ (табл. 6.)

Таблица 5

β	Ω_1	Ω_2		Ω_3		$B_{01} \cdot 10^{-4}$
	Re	Re	Im	Re	Im	
0.2	-0.5583	-0.0267	1.0124	-0.0267	-1.0124	4.6933
0.4	-0.5099	-0.0587	1.0584	-0.0587	-1.0584	6.6373
0.6	-0.4669	-0.0724	1.1031	-0.0724	-1.1031	8.1291
0.8	-0.4289	-0.0914	1.1517	-0.0914	-1.1517	9.3866
1.0	-0.3957	-0.1080	1.1981	-0.1080	-1.1981	10.4945
2.0	-0.2813	-0.1652	1.4172	-0.1652	-1.4172	14.8416
3.0	-0.2169	-0.1974	1.6126	-0.1974	-1.6126	18.1771
4.0	-0.1765	-0.2176	1.7881	-0.2176	-1.7881	20.9891

Таблица 6

β	Ω_1	Ω_2		Ω_3		$B_{01} \cdot 10^{-4}$
	Re	Re	Im	Re	Im	
0.2	-0.2889	-0.0085	0.9954	-0.0085	-0.9954	3.3187
0.4	-0.2735	-0.0162	1.0229	-0.0162	-1.0229	4.6933
0.6	-0.2595	-0.0232	1.0500	-0.0232	-1.0500	5.7481
0.8	-0.2468	-0.0295	1.0767	-0.0295	-1.0767	6.6373
1.0	-0.2351	-0.0354	1.1029	-0.0354	-1.1029	7.4208
2.0	-0.1895	-0.0582	1.2276	-0.0582	-1.2276	10.4946
3.0	-0.1584	-0.0737	1.3423	-0.0737	-1.3423	12.8531
4.0	-0.1359	-0.0849	1.4486	-0.0849	-1.4486	14.8416

Рассматривая табл. 5 и 6, замечаем, что в случае весьма тонкой оболочки увеличение напряженности магнитного поля примерно в три

раза приводит к увеличению частоты колебаний примерно на 40% (два-четыре раза больше, чем в предыдущих случаях). Что же касается коэффициентов затухания ($\text{Re}\Omega_1$ и $\text{Re}\Omega_2$), то в этом случае, (в тех же пределах изменения напряженности магнитного поля) повышаются не в 8-10 раз, а только в 4-5 раз. А коэффициенты затухания, соответствующие Ω_2 , уменьшаются несколько больше - в два раза (в предыдущих случаях было 1.5 раза).

В п.3 мы рассмотрели весьма частный пример осесимметричных колебаний крутовой цилиндрической оболочки в осевом магнитном поле и привели результаты некоторых приближенных подсчетов частот колебаний и затуханий. Здесь мы не претендуем на полноту решений. Полную картину колебания и распространения волн можно получить из подробного анализа системы уравнений (3.1)-(3.10) или, в крайнем случае, из системы (3.16) без каких-либо приближений.

Настоящее исследование выполнено по гранту INTAS-94-1210.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. - М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.-М.: Наука, 1977. 272 с.
3. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин.-Ереван: Из-во ЕГУ, 1991. 143 с.
4. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. - М.: Наука, 1974. 448 с.
5. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Колебания и устойчивость токонесущих упругих пластин.-Ереван: Из-во АН Армении, 1992. 124с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
8.05.1996

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ
ПОЛУПЛОСКОСТИ, НА ГРАНИЦЕ КОТОРОЙ ПРИКЛЕЕН
НЕЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМЫЙ СТРИНГЕР КОНЕЧНОЙ
ДЛИНЫ

Саркисян В.С., Керопян А.В.

Վ.Ս. Սարգսյան, Ա.Վ. Ջերոպյան

Անիզոտրոպ կիսահարթության համար խնդրի լուծման մասին, որի եզրին
ստեղծված է ոչ գծայնորեն դեֆորմացվող վերջավոր երկարության ուղղանկյուն փրափյուղ, ընդ
որում կապը վերադիրքի և կիսահարթության միջև իրականացվում է բարակ ստեղծաշերտի միջոցով՝ Հալիլի և
ասեմվադ վերջինիս ֆիզիկամեխանիկական ընդհանրությունը

Խնդրի լուծումը, վերադիրքի մյուրի նկատմամբ ոչ գծային դրվածքով, հանգեցված է սանույտ
շաշափող կոնտակտային լարումների նկատմամբ Կոշու կորիզով ոչ գծային սինգուլյար
ինտեգրալի ֆորմենցիալ հավասարման լուծման: Վերջինիս լուծումը կատարված է փոքր սխալմաների
մեթոդով:

V.S. Sarkisian, A.V. Keropian

On the solution of the problem for anisotropic half-plane on the edge of which a nonlinear deformable
stringer of finite length is glued

Рассматривается задача о контактном взаимодействии нелинейно-деформируемого по
степенному закону стрингера (накладки) конечной длины с линейно-деформируемым
основанием в виде анизотропной полуплоскости, когда контакт между ними осуществляется
через тонкий слой клея с другими физико-механическими характеристиками.

Контактная задача для бесконечной пластины, усиленной через
тонкий слой клея стрингером конечной длины, рассмотрена в работе [1],
а в [2] – задача о передаче нагрузки от степенно-упрочняющегося
стрингера конечной длины к анизотропной полуплоскости.

В настоящей работе рассматривается задача о контактном
взаимодействии нелинейно-деформируемого по степенному закону
стрингера (накладки) конечной длины с линейно-деформируемым
основанием в виде анизотропной (неортогортной) полуплоскости, когда
контакт между ними осуществляется через тонкий слой клея (с другими
упругими и геометрическими характеристиками).

Решение задачи, в постановке нелинейной теории установившейся
ползучести относительно стрингера при степенном законе связи между
напряжениями и деформациями, предложенном Н.Х.Арутюняном [3],
сводится к решению нелинейного сингулярного интегро-
дифференциального уравнения с ядром Коши относительно неизвестных
тангенциальных контактных напряжений при определенных граничных
условиях. Далее, с помощью малого параметра строится решение этого
уравнения.

§1. Постановка задачи и вывод основного разрешающего
уравнения. Пусть анизотропная, имеющая одну плоскость упругой
симметрии, полуплоскость на отрезке своей границы усилена

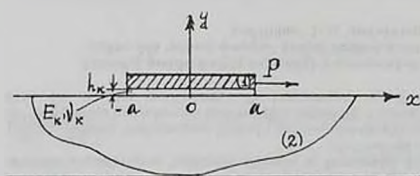
стрингером (накладкой) малой толщины h , причем предполагается, что для материала ее имеет место нелинейное соотношение вида:

$$\varepsilon_x^{(1)}(x) = K_0 [\sigma^{(1)}(x)]^v \quad (v > 1) \quad (1.1)$$

где $\varepsilon_x^{(1)}(x)$ — деформация точек стрингера, $\sigma^{(1)}(x)$ — осевое напряжение, K_0 — коэффициент ползучести, $v > 1$ — показатель ползучести.

Здесь предполагается, что контакт между стрингером и полуплоскостью осуществляется через тонкий слой клея (модуль упругости E_k , коэффициент Пуассона ν_k и толщина h_k).

Предполагая, что слой клея находится в условиях чистого сдвига [1], задача заключается в определении тангенциальных контактных напряжений, когда к одному из концов стрингера (в точке $x = a$) приложена горизонтальная сила P (фиг.1).



Фиг. 1

Из уравнения равновесия элемента стрингера и соотношения (1.1), после интегрирования, для горизонтальных перемещений $u^{(1)}(x)$ точек стрингера будем иметь

$$u^{(1)}(x) = \frac{K_0}{h^v} \int_{-a}^x \left(\int_{-a}^s \tau(s) ds \right)^v dy + u^{(1)}(-a) \quad (1.2)$$

где $\tau(x)$ — интенсивность тангенциальных контактных напряжений.

С другой стороны известно [4,5], что горизонтальные перемещения $u^{(2)}(x,0)$ граничных точек анизотропной (неортогтронной) полуплоскости, когда на отрезке $[-a, a]$ ее границы действуют тангенциальные напряжения интенсивности $\tau(x)$, определяется формулой:

$$u^{(2)}(x,0) = \frac{A^{(2)}}{\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} \tau(s) ds + c \quad (1.3)$$

где c — некоторая константа, $A^{(2)} = A_2 = \frac{i}{2} \beta_{11} [\mu_1 + \mu_2 - \bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2]$, а μ_1 и μ_2 и их сопряженные $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$, являются корнями уравнения:

$$\beta_{11} \xi^4 - 2\beta_{16} \xi^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \xi^2 - 2\beta_{26} \xi + \beta_{22} = 0$$

β_{ij} — упругие коэффициенты материала полуплоскости. В случае, когда анизотропное тело является ортогтронным, коэффициенты $\beta_{16} = \beta_{26} = 0$.

Далее полагая, что каждый дифференциальный элемент слоя клея находится в условиях чистого сдвига [1,6,7], будем иметь:

$$u^{(1)}(x) - u^{(2)}(x,0) = k^* \tau(x), \quad -a \leq x \leq a \quad (1.4)$$

где $k^* = h_k / G_k$,

$$G_k = E_k / 2(1 + \nu_k)$$

Теперь, подставляя (1.2) и (1.3) в (1.4), после замены переменных x и ax , y на ay , s на as , получим следующее нелинейное интегральное уравнение относительно $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \lambda^* \int_{-1}^x \left(\int_{-1}^y \psi(s) ds \right)^v dy - \frac{\alpha^*}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{a|x-s|} \psi(s) ds + c_1 \quad (1.5)$$

Здесь введены обозначения

$$\psi(x) = \frac{a\tau(ax)}{P}, \quad \lambda^* = \frac{a^2 K_0 P^{v-1}}{k^* h^v},$$

$$\alpha^* = \frac{aA^{(2)}}{k^*}, \quad c_1 = \frac{a(u^{(1)}(-a) - c)}{Pk^*} \quad (1.6)$$

где неизвестная постоянная c_1 будет определяться из условия

$$\int_{-1}^1 \psi(s) ds = 1 \quad (1.7)$$

Далее из (1.5) следует, что $\psi(x)$ в точках стрингера $x = \pm 1$ имеет конечные значения.

Отметим также, что при $\lambda^* = 0$, т.е. когда материал стрингера становится жестким, вместо (1.5) будем иметь:

$$\psi(x) = -\frac{\alpha^*}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{a|x-s|} \psi(s) ds + c_1^* \quad (1.8)$$

где $c_1^* = -ac/Pk^*$.

С другой стороны, после дифференцирования (1.5) и ввода функции

$$\varphi(x) = \int_{-1}^x \psi(s) ds \quad (1.9)$$

вместо уравнения (1.5), будем иметь:

$$\alpha \varphi''(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi'(s)}{s-x} ds = \lambda [\varphi(x)]^v \quad (1.10)$$

которое, согласно (1.7), должно рассматриваться при граничных условиях

$$\varphi(-1) = 0, \quad \varphi(1) = 1 \quad (1.11)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{1}{\alpha^*} = \frac{k^*}{aA^{(2)}}, \quad \lambda = \frac{\lambda^*}{\alpha^*} = \frac{aK_0 P^{v-1}}{A^{(2)} h^v}$$

В (1.10) интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Таким образом, задача определения тангенциальных контактных напряжений сведена к решению нелинейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.10) при граничных условиях (1.11).

Отметим, что при $v = 1$ имеем случай линейно-упругого стрингера, решение которой приведено в [7], а при $\alpha = 0$, т.е. без учета материала склеивания, решение задачи приведено в [2.4].

§2. Решение нелинейного, сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.10). Решение уравнения (1.10) при



условиях (1.11) будем искать методом малого параметра. При этом будем рассматривать два случая:

а) α является малым параметром (т.е. ослабевает влияние материала склеивания).

в) λ является малым параметром (т.е. материал стрингера становится жестким).

1°. Сначала представим решение уравнения (1.10) в виде ряда по степеням малого параметра α :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \varphi_k(x) \quad (2.1)$$

Подставляя значения $\varphi(x)$ из (2.1) в (1.10) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях α , находим:

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_0'(s)}{s-x} ds = \lambda [\varphi_1(x)]' \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_k'(s)}{s-x} ds &= \lambda A_k^{(v)} [\varphi_0(x)]^{v-k} [\varphi_1(x)]^k + \\ &+ \lambda \sum_{m=1}^{k-1} A_{km}^{(v)} [\varphi_0(x)]^{v-k-m} [\varphi_1(x)]^{k-(m+1)} \varphi_{m+1}(x) - \\ &- \varphi_{k-1}''(x) \quad (k \geq 1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$A_k^{(v)} = \frac{v(v-1)\dots(v-k+1)}{k!}, \quad A_{km}^{(v)} = \frac{v(v-1)\dots(v-k+m+1)}{(k-m-1)!}$$

$$A_{km}^{(v)} = 0 \quad \text{при } k=1; 2$$

Следовательно, из (1.11) в силу (2.1), будем иметь следующие граничные условия:

$$\varphi_0(-1) = 0, \quad \varphi_0(1) = 1, \quad (2.4)$$

$$\varphi_k(-1) = 0, \quad \varphi_k(1) = 0 \quad \text{при } k \geq 1 \quad (2.5)$$

Итак, решение нелинейного, сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.10) сводится к решению систем рекуррентных систем сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (2.2) и (2.3) при условиях (2.4) и (2.5).

Решение уравнения (2.2) при условиях (2.4), после обращения сингулярного интеграла и интегрирования его обеих частей сводится к решению следующего нелинейного интегрального уравнения и приведена в [2,4]:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= -\frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1-sx + \sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}}{1-sx - \sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}} \times \\ &\times [\varphi_0(s)]^v ds + \frac{1}{\pi} \arcsin x + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

которое после замены переменных $x = \cos \pi y$, $s = \cos \pi t$, $0 \leq y, t \leq 1$ преобразуется к виду:

$$\phi(y) + \int_0^1 K(y; t) F[t, \phi(t)] dt = 0 \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned}\phi(y) &= \eta(y) + y - 1, \quad \eta(y) = \varphi_0(\cos \pi y) \\ F[y, \phi(y)] &= \frac{\lambda}{\pi} \sin \pi y [\phi(y) - y + 1], \\ K(y, t) &= \ln \left| \frac{\sin \frac{\pi(t+y)}{2}}{\sin \frac{\pi(t-y)}{2}} \right|, \quad (0 < y, t < 1)\end{aligned}\tag{2.8}$$

Решение и исследование нелинейного интегрального уравнения (2.7) типа Гаммерштейна приведена в [2, 4, 5].

Не останавливаясь на подробностях, отметим, что решение уравнения (2.7) представляется в виде:

$$\phi(y) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \xi_m(y) \quad (0 < y < 1)\tag{2.9}$$

где согласно спектральному соотношению

$$m \int_0^1 \ln \left| \frac{\sin \frac{\pi(t+y)}{2}}{\sin \frac{\pi(t-y)}{2}} \right| \sin \pi t dt = \sin \pi y \quad (m = 1, 2, \dots)$$

будем иметь следующие:

$$\xi_m(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \pi y \quad (0 < y < 1; m = 1, 2, \dots)$$

ортонормированные собственные функции ядра $K(y, t)$, отвечающие собственным значениям $\lambda_m = m$ ($m = 1, 2, \dots$), а x_m - неизвестные коэффициенты, которые определяются из следующей эквивалентной исходному уравнению (2.7) нелинейной бесконечной системы уравнений:

$$x_m = -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^1 F \left[t, \sum_{k=1}^{\infty} x_k \xi_k(t) \right] \xi_m(t) dt \quad (m = 1, 2, \dots)\tag{2.10}$$

Далее, отправляясь от (2.9), приближенное решение уравнения (2.7) представим в виде:

$$\phi_n(y) = \sum_{m=1}^n x_{n,m} \xi_m(y) \quad (n = 1, 2, \dots)\tag{2.11}$$

аналогично предыдущей, задачу определения неизвестных коэффициентов $x_{n,m}$ ($m = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots$) сведем к решению следующей конечной нелинейной системы:

$$x_{n,m} = -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^1 F \left[t, \sum_{k=1}^n x_{n,k} \xi_k(t) \right] \xi_m(t) dt \quad (m = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots)\tag{2.12}$$

Как и в [2], на основе известной теории нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна, доказывается, что решение систем (2.10) и (2.12) существует и единственное.

Кроме того, доказывается, что решение $\phi_n(y)$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к решению $\phi(y)$ - исходному уравнению. Тем самым доказывается, что решение нелинейного уравнения (2.7) существует,

единственно и его со сколь угодно большой точностью можно аппроксимировать функцией $\phi_n(y)$ по формуле (2.11).

Определив таким способом $\phi(y)$, согласно (2.8) определяется и $\phi_0(x)$.

Далее, после определения $\phi_0(x)$, решение (2.3) при условиях (2.5), последовательно можно получить, представляя эти решения в виде [8,9]:

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(k)} T_n(x) \quad (|x| < 1, k \geq 1) \quad (2.13)$$

где $T_n(x)$ — многочлены Чебышева первого рода [10],

$X_n^{(k)}$ ($k \geq 1; n = 0, 1, 2, \dots$) — неизвестные коэффициенты.

Не останавливаясь на подробностях, отметим, что после интегрирования (2.13) и удовлетворяя граничным условиям (2.5), находим, что $X_0^{(k)} = 0$ ($k \geq 1$) и, следовательно,

$$\phi_k(x) = -\sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^{(k)}}{n} U_{n-1}(x) \quad (k \geq 1) \quad (2.14)$$

где $U_{n-1}(x)$ — многочлены Чебышева второго рода [10].

Теперь, подставляя (2.13) и (2.14) в (2.3), для определения коэффициентов $X_n^{(k)}$ ($k \geq 1, n = 1, 2, \dots$), известным способом [4,8,9], получим следующую совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$X_m^{(k)} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} R_{m,n} X_n^{(k)} = a_m^{(k)} \quad (k \geq 1; m = 1, 2, \dots) \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} R_{m,n} &= \frac{2\nu}{\pi n} \int_{-1}^1 U_{n-1}(x) U_{m-1}(x) \sqrt{1-x^2} [\phi_0(x)]^{\nu-1} dx \\ a_m^{(k)} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{m-1}(x) \phi_{k-1}''(x) dx + \\ &+ \frac{2\lambda}{\pi} A_k^{(\nu)} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{m-1}(x) \cdot [\phi_0(x)]^{\nu-k} \times \\ &\times [\phi_1(x)]^k dx + \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{m=1}^{k-1} A_{km}^{(\nu)} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{m-1}(x) \times \\ &\times [\phi_0(x)]^{\nu-k+m} [\phi_1(x)]^{k-m-1} \phi_{m+1}(x) dx \quad (k \geq 1; m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Далее традиционным способом [4,8,9] доказывается квазивполнерегулярность системы (2.15).

2°. Теперь представим решение уравнения (1.10) в виде ряда по степеням малого параметра λ :

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k g_k(x) \quad (2.17)$$

Подставляя (2.17) в (1.10) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , находим:

$$\alpha g_0''(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_0'(s)}{s-x} ds = 0 \quad (2.18)$$

$$\alpha g_k''(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_k'(s)}{s-x} ds = B_k^{(v)} [g_0(x)]^{v-k+1} [g_1(x)]^{k-1} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{k-2} B_{km}^{(v)} [g_0(x)]^{v-k+m+1} [g_1(x)]^{k-m-2} g_{m+1}(x) \quad (k \geq 1)$$

$$\text{где } B_k^{(v)} = \frac{v(v-1)\dots[v-(k-2)]}{(k-1)!}, \quad B_{km}^{(v)} = \frac{v(v-1)\dots[v-(k-m-2)]}{(k-m-2)!}$$

$$B_k^{(v)} = 1 \text{ при } k=1; B_{km}^{(v)} = 0 \text{ при } k=1, 2$$

при граничных условиях

$$g_0(-1) = 0, \quad g_0(1) = 1 \quad (2.20)$$

$$g_k(-1) = 0, \quad g_k(1) = 0 \quad k \geq 1 \quad (2.21)$$

Таким образом, решение нелинейного, сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.10), при граничных условиях (1.11), сводится к решению систем рекуррентных линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (2.18) и (2.19) при граничных условиях (2.20) и (2.21). Сначала рассмотрим (2.18). Решение (2.18), при условиях (2.20), сведем к бесконечной системе линейных уравнений.

Как уже было сказано, из (1.5) следует, что тангенциальные контактные напряжения в точках стрингера $x = \pm 1$ имеют конечные значения. Поэтому будем искать такое решение (2.18), которое в точках $x = \pm 1$ имело конечные значения [1,6,7]. Как и в [7], представим решение в виде

$$g_0'(x) = A_0 + B_0 x + \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^{(0)}}{n} U_{n-1}(x) \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (2.22)$$

где

$$A_0 = [g_0'(1) + g_0'(-1)]/2, \quad B_0 = [g_0'(1) - g_0'(-1)]/2$$

$U_{n-1}(x)$ - многочлены Чебышева второго рода, $y_n^{(0)}$ - неизвестные коэффициенты.

Теперь интегрируя (2.22) и удовлетворяя первому граничному условию (2.20), получим:

$$g_0(x) = A_0(x+1) + \frac{B_0}{2}(x^2-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^{(0)}}{n} Q_n(x) \quad (2.23)$$

где

$$Q_n(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-s^2} U_{n-1}(s) ds \quad (n=1, 2, \dots)$$

или после вычисления

$$Q_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\pi - \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right), & n=1 \\ \frac{\sin(n+1)\theta}{2(n+1)} - \frac{\sin(n-1)\theta}{2(n-1)}, & n=2, 3, \dots \end{cases}$$

Удовлетворяя второму условию (2.20), находим $y_1^{(0)} = \frac{2}{\pi}(1 - 2A_0)$

Вычисляя теперь $g_0'(x)$, будем иметь:

$$g_0'(x) = B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^{(0)} T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2.24)$$

Подставляя теперь (2.22), (2.24) в (2.18) и вычисляя интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{g_0'(s)}{s-x} ds = 2B_0 + (A_0 + B_0 x) \ln \frac{1-x}{1+x} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^{(0)}}{n} T_n(x)$$

после элементарных выкладок приходим к соотношению

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n^{(0)} \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^{(0)}}{n} T_n(x) = f_0(x) \quad (2.25)$$

где

$$f_0(x) = \left(1 + \frac{2}{\pi\alpha}\right) B_0 + \frac{1}{\pi\alpha} (A_0 + B_0 x) \ln \frac{1-x}{1+x}$$

Теперь умножим обе части равенства (2.25) на $T_m(x)$ ($m = 1, 2, \dots$), проинтегрируем в пределах от -1 до 1 и используя условие ортогональности многочленов Чебышева первого рода [10], известным способом получим бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$y_m^{(0)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n}^{(1)} y_n^{(0)} = f_m^{(0)} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.26)$$

где

$$K_{m,n}^{(1)} = \frac{2}{\pi m} \int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta \sin \theta d\theta, \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (2.27)$$

$$f_m^{(0)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_0(\cos \theta) \cos m\theta \sin \theta d\theta, \quad \theta = \arccos x$$

$$f_0(\cos \theta) = \left(1 + \frac{2}{\pi\alpha}\right) B_0 + \frac{2}{\pi\alpha} (A_0 + B_0 \cos \theta) \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

Далее, после вычисления интегралов (2.27), бесконечную систему (2.26) можно представить в виде:

$$y_m^{(0)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} K_{m,n}^{(1)} y_n^{(0)} = b_m^{(0)} \quad (m = 2, 3, \dots) \quad (2.28)$$

где

$$K_{m,n}^{(1)} = \frac{4m[1 + (-1)^{n+m}]}{\pi[(m-n)^2 - 1][(m+n)^2 - 1]} \quad (n \neq m \pm 1) \quad (2.29)$$

$$K_{m,1}^{(1)} = \frac{4[1 + (-1)^m]}{\pi m[(m^2 - 4)]}, \quad K_{m,n}^{(1)} = 0 \quad (n = m \pm 1)$$

$$b_m^{(0)} = f_m^{(0)} - \frac{2}{\pi\alpha} (1 - 2A_0) K_{m,1}^{(1)} \quad (m = 2, 3, \dots)$$

Теперь после составления сумм

$$S_m^{(1)} = \frac{1}{\alpha} \left[|K_{m,1}^{(1)}| + \sum_{n=2}^{\infty} |K_{m,n}^{(1)}| \right]$$

известным способом [4,8,9] можем показать, что эти суммы и свободные члены $b_m^{(0)}$ стремятся к нулю при $m \rightarrow \infty$, которое непосредственно следует из (2.29). Следовательно, бесконечная система (2.28) при любых конечных значениях параметра α квазивполне регулярна.

Далее отметим, что после определения коэффициентов $y_m^{(0)}$ из (2.28), $g_0(1)$ и $g_0(-1)$ будут определяться из (1.8), постановкой в ней $x = 1$ и $x = -1$.

Теперь, после определения $g_0(x)$, вполне аналогичным образом, можем найти решение уравнения (2.19) при граничных условиях (2.21). С этой целью представим их решения в виде

$$g_k'(x) = A_k + B_k x + \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^{(k)}}{n} U_{n-1}(x) \quad (k \geq 1, |x| \leq 1) \quad (2.30)$$

где

$$A_k = [g_k'(1) + g_k'(-1)]/2, \quad B_k = [g_k'(1) - g_k'(-1)]/2$$

$U_{n-1}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) – многочлены Чебышева второго рода, $y_n^{(k)}$ ($k \geq 1$) – неизвестные коэффициенты.

Теперь, не останавливаясь на подробностях, отметим, что вполне аналогичным образом для определения неизвестных коэффициентов $y_n^{(k)}$, где $y_1^{(k)} = -4A_k/\pi$ ($k \geq 1$), получим совокупность бесконечных систем алгебраических уравнений, которые отличаются друг от друга лишь свободными членами:

$$y_m^{(k)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} K_{m,n} y_n^{(k)} = b_m^{(k)} \quad (k \geq 1; m = 2, 3, \dots) \quad (2.31)$$

где ядро $K_{m,n} = K_{m,n}^{(1)}$, т.е. имеет вид (2.29), а свободные члены имеют вид:

$$b_m^{(k)} = f_m^{(k)} + \frac{4A_k}{\pi\alpha} K_{m,1} \quad (k \geq 1; m = 2, 3, \dots) \quad (2.32)$$

где

$$f_m^{(k)} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f_k(x) T_m(x) dx \quad (k \geq 1)$$

$$f_k(x) = \left(1 + \frac{2}{\pi\alpha}\right) B_k + \frac{1}{\pi\alpha} (A_k + B_k x) \ln \frac{1-x}{1+x} - \frac{B_k^{(v)}}{\alpha} [g_0(x)]^{v-k-1} \times \\ \times [g_1(x)]^{k-1} - \frac{1}{\alpha} \sum_{m=1}^{k-2} B_{km}^{(v)} [g_0(x)]^{v-k+m-1} [g_1(x)]^{k-m-2} g_{m+1}(x) \quad (k \geq 1)$$

Далее, аналогичным способом доказывается квазивполн регулярность бесконечных систем (2.31) при любых конечных значениях параметра α . Отметим также, что после определения $y_n^{(k)}$ из (2.31), определяются и значения контактных напряжений в точках $x = \pm 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lubkin J.L. and Lewis L.C. Adhesive shear flow for an axially loaded, finite stringer bonded to an infinite sheet. — Quart. J. of Mech. and Applied Math. vol. XXIII, p. 521(1970).
2. Саркисян В.С., Мхитарян В.Г., Овсепян Л.О. Передача нагрузки от степенно упрочняющейся накладки к деформируемому основанию. — Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975. т.28, №5.
3. Арутюнян Н.Х. Плоская контактная задача теории пластичности со степенем упрочнением материала. — Изв. АН Арм ССР, сер.ф.-м.н., 1959. №2, с.77-105.
4. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. — Ереван: Изд-во ЕГУ, 1976. 534с.
5. Галин А.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. — М.:Наука, 1980. 304с.
6. Григорян Э.Х., Керопян А.В., Саркисян В.С. Контактная задача для упругой полуплоскости, граница которой усилена склеенными с ней полубесконечными накладками. — Изв. РАН, МТТ, 1992, №3, с.180-184.
7. Керопян А.В., Саркисян В.С. Решение задачи для анизотропной полуплоскости, на границе которой приклеена накладка конечной длины. — Юбилейная научная конф., посвящ. 60-летию основания института им. М. Налбандяна. Сб. научных трудов, т. 1. Высшая школа, Гюмри, 1994, с.73-76.
8. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. — М.:Наука, 1983. 487с.
9. Григолюк Э.И., Толкачев В.М., Контактные задачи теории пластин и оболочек. — М.:Машиностроение, 1980. 416с.
10. Градигтейн И.С. и Рыжик Н.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.:Наука, 1971. 1108с.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
5.12.1995

ЗОНА УПРОЧНЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ ЛИСТА

Задоян М.А.

Մ.Ա. Զադոյան
Աճրապնդման գոտիները շերտի ծռման ժամանակ

Հետազոտվում է աճրապնդման գոտիները շերտի ծռման ժամանակ, երբ նյութի ձգման դիտարկման օժտված է հետ-հոտոնության գծային աճրապնդման միջավայրով: Խնդիրը քննարկվում է հարթ դեֆորմացիայի պայմաններում, առանց օգտագործելու ուղիղ երրանյանի եկապրկը: Ստացված են լարումների բազալիքները սկզբնական և ձգվող գոտիներում, ուղղված է շիգոր գոտու շառավիղը: Էյլ գոտին հանդիսանում է լարումների լավան մակերևույթ:

Որոշված է առանձնային մոնենտի արժեքը, որը կարող է կրել շերտը:

M.A. Zadoyan
The Areas of Hardening in the case of Plate Bending

Исследуются зоны упрочнения при изгибе листа, когда после площадки текучести в диаграмме растяжения материала наступает этап линейного упрочнения.

Задача рассматривается в рамках плоской деформации, без использования гипотезы прямых нормалей. Получены компоненты напряжений в сжатой и растянутой зонах, определен радиус нейтрального слоя, являющийся поверхностью разрыва напряжений.

Определен предельный момент, который может выдержать лист.

В работе Р.Хилла [1] рассмотрен чистый изгиб прямоугольного листа из несжимаемого идеально-пластичного материала. Задача рассматривается в рамках плоской деформации, без использования гипотезы прямых нормалей. Получены компоненты напряжений в сжатой и растянутой зонах, определен радиус нейтрального слоя, который является поверхностью разрыва напряжений, и, наконец, предельный момент, который может выдержать лист.

Многие металлические материалы после зоны текучести приобретают способность заметно понижать свою сопротивляемость дальнейшему пластическому деформированию. На фиг.1 приведена схематизированная диаграмма растяжения такого жесткопластического материала, имеющего после текучести, для простоты, этап линейного упрочнения.

По такой же схеме, а также по диаграмме, имеющей начальную упругую зону, в работах [2,3] исследованно запредельное состояние пластинки под воздействием сосредоточенной силы, состояние пластинки, с круговым отверстием, находящегося под воздействием силы, приложенной в ее плоскости в бесконечности.

Величины σ_y , ϵ_y , σ_u , ϵ_u – механические параметры, определяемые из экспериментов по одноосному растяжению или по испытанию тонкостенных труб на кручение. Точка (σ_u, ϵ_u) на диаграмме соответствует временному сопротивлению материала.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается запредельное напряженное состояние толстого листа из несжимаемого, идеально-жесткопластического упрочняющегося материала, находящегося в состоянии плоской деформации под

воздействием изгибающих моментов M , приложенных на торцевых сечениях. Задача заключается в определении напряженного состояния листа и предельного значения момента, соответствующего временному сопротивлению материала.

В случае плоской деформации имеем уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} = 0 \quad (1)$$

соотношения между компонентами деформаций и перемещений

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Между интенсивностями напряжений и деформаций принимаем зависимость

$$\sigma_\theta = f(\varepsilon_\theta) \varepsilon_\theta \quad \text{где} \quad f(\varepsilon_\theta) = \begin{cases} \frac{\sigma_s}{\varepsilon_s} & \text{при } 0 \leq \varepsilon_\theta \leq \varepsilon_s \\ H & \text{при } \varepsilon_s \leq \varepsilon_\theta \leq \varepsilon_e \end{cases}$$

причем $\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{H}$, $H = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_s}$ — параметры, характеризующие деформативные свойства материала.

Зависимости между компонентами деформаций и напряжений при условии несжимаемости материала $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0$ принимаются в виде

$$\sigma_y - \delta_{ij} \sigma = 2f(\varepsilon_\theta) \varepsilon_{ij}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, а σ — среднее давление

$$\sigma = \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta)$$

Компоненты перемещений ищем в виде

$$u = Ar + \frac{C}{r}, \quad v = 2Ar\theta$$

Соответственно, деформации будут

$$\varepsilon_\theta = -\varepsilon_r = -A + \frac{C}{r^2}, \quad \gamma_{r\theta} = 0$$

Полагаем, что при $r = \rho$ деформации равны нулю, тогда $C = A\rho^2$. Находим

$$\varepsilon_\theta = -\varepsilon_r = -A \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2} \right), \quad \varepsilon_\theta = 2 \left| \varepsilon_\theta \right|$$

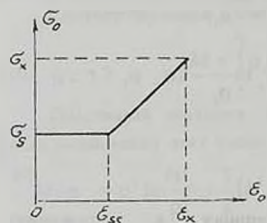
Это означает, что

$$\varepsilon_\theta = \begin{cases} 2A \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2} \right) & \text{при } r \geq \rho \\ -2A \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2} \right) & \text{при } r \leq \rho \end{cases}$$

Когда лист целиком находится в состоянии текучести, т.е. до появления зон упрочнения, имеем $\rho = \sqrt{ab}$. Тогда легко заметить, что в состоянии текучести ε_θ принимает свое наибольшее значение во

внутренних полках $r = a$. Таким образом, зона упрочнения начинается распространяться с внутренней стороны при $M > M_s = \sigma_s h^2 / 2$, где $h = b - a$.

2. Одностороннее упрочнение



Фиг. 1

При $M > M_s$ с внутренней стороны распространяется зона упрочнения (фиг.2). Тогда, учитывая, что

$$\sigma_u = \frac{\chi}{2} (\sigma_\theta - \sigma_r), \quad \chi = \text{sign} \varepsilon_\theta$$

будем иметь

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \begin{cases} -4AH \left(\frac{\rho^2}{r^2} - 1 \right) & \text{при } a \leq r \leq \rho_1 \\ -\sigma_s & \text{при } \rho_1 \leq r \leq \rho \\ \sigma_s & \text{при } \rho \leq r \leq b \end{cases}$$

где $r = \rho_1$ — границная цилиндрическая поверхность между зонами упрочнения и текучести. Значение ρ_1 , а также и ρ , следует определять в ходе решения задачи

1) Решение в зоне упрочнения. Принимая

$$\sigma_r - \sigma_u = 4AH \left(\frac{\rho^2}{r^2} - 1 \right) \quad \text{при } a \leq r \leq \rho_1 \quad (2)$$

и подставляя в уравнения равновесия (1), которые при $\tau_{\theta\theta} = 0$ примут вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (3)$$

и интегрируя с учетом граничного условия $\sigma_r = 0$ при $r = a$, находим

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2AH \left(2 \ln \frac{r}{a} + \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \\ \sigma_\theta &= 2AH \left(2 + 2 \ln \frac{r}{a} - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \quad a \leq r \leq \rho_1 \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь A, ρ, ρ_1 — неизвестные постоянные.

2) Решение в зоне текучести $\rho_1 \leq r \leq \rho$. Принимая в уравнении

(3) $\sigma_r - \sigma_\theta = 2\sigma_s$ и интегрируя, получаем

$$\sigma_r = B - 2\sigma_s \ln \frac{r}{\rho_1}, \quad \rho_1 \leq r \leq \rho$$

где B - произвольная постоянная. Используя условия непрерывности σ_r и σ_θ на граничной поверхности $r = \rho_1$, находим выражения напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2AH \left(2 \ln \frac{\rho_1}{a} + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - 2\sigma_s \ln \frac{r}{\rho_1} \\ \sigma_\theta &= 2AH \left(2 \ln \frac{\rho_1}{a} + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - 2\sigma_s \ln \frac{r}{\rho_1} - 2\sigma_s, \quad \rho_1 \leq r \leq \rho \quad (5)\end{aligned}$$

а также соотношение между параметрами

$$2AH \left(\frac{\rho^2}{\rho_1^2} - 1 \right) = \sigma_s \quad (6)$$

Неизвестные постоянные, содержащиеся в выражениях напряжений, определяется в дальнейшем.

3) *Решение в зоне текучести* $\rho \leq r \leq b$. Полагая в уравнении равновесия (3) $\sigma_\theta - \sigma_r = 2\sigma_s$ и интегрируя с учетом граничного условия $\sigma_r = 0$ при $r = b$, получаем

$$\sigma_r = -2\sigma_s \ln \frac{b}{r}, \quad \sigma_\theta = 2\sigma_s - 2\sigma_s \ln \frac{b}{r}, \quad \rho \leq r \leq b \quad (7)$$

Условие непрерывности σ_r при $r = \rho$ дает

$$AH \left(2 \ln \frac{\rho_1}{a} + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) = \sigma_s \ln \frac{\rho^2}{b\rho_1} \quad (8)$$

4) *Условие разрушения*. Когда на диаграмме σ_θ приближается к значению σ_s , т.е. при временном сопротивлении материала, в листе появляется тенденция к разрушению. Условие $\sigma_\theta = \sigma_s$ назовем интегральным условием разрушения или просто условием разрушения.

Принимая $\sigma_\theta = \sigma_s$ на внутренних волокнах, т.е. $\sigma_r - \sigma_\theta = 2\sigma_s$ при $r = a$ из (2) получаем

$$A = \frac{\sigma_s}{2H \left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1 \right)} \quad (9)$$

Далее, вводя обозначение $\mu = \sigma_s / \sigma$ и подставляя значение A в уравнения (6) и (8), получаем

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu - 1 + \rho^2/a^2}} \quad (10)$$

$$2 \left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1 \right) \ln \frac{\rho}{b} \frac{\sqrt{\mu - 1 + \frac{\rho^2}{a^2}}}{\sqrt{\mu}} = (\mu - 1) \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) + 2\mu \frac{\ln \frac{\rho}{a} \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu - 1 + \frac{\rho^2}{a^2}}} \quad (11)$$

Таким образом, для заданного значения $\mu > 1$ из (11) определяется ρ , а из (10) значение ρ_1 . Принимая в (11) $\mu = 1$, находим $\rho = \sqrt{ab}$, а из (10) $\rho_1 = a$.

Соответствующий изгибающий момент определяется формулой

$$M = \int_a^{\rho_1} \sigma_0 r dr + \int_{\rho_1}^{\rho} \sigma_0 r dr + \int_{\rho}^b \sigma_0 r dr$$

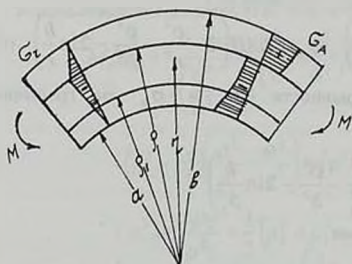
Подставляя значение A из (9) в формулы (4), (5), (7) для σ_0 , после вычисления этих интегралов получим

$$M/\sigma_a = \rho^2 \ln \frac{b\rho_1}{\rho^2} + \frac{1}{2}(b^2 + \rho_1^2 - 2\rho^2) + \frac{\mu\rho^2}{2\left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1\right)} \left(\frac{\rho_1^2}{\rho^2} - \frac{a^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right)$$

Полученные формулы справедливы до значения $\mu = \mu_1$, при котором впервые на внешнем волокне $r = b$ появляются деформации упрочнения.

Значение μ_1 , а также соответствующие величины ρ_{10} , ρ_0 и M_1 определяются в дальнейшем.

3. Двухстороннее упрочнение



Фиг. 2

1) Решение в зоне упрочнения $a \leq r \leq \rho_1$. Аналогичным образом получаем

$$\sigma_r = 2AH \left(2 \ln \frac{r}{a} + \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \quad (12)$$

$$\sigma_\theta = 2AH \left(2 + 2 \ln \frac{r}{a} - \frac{\rho^2}{a^2} - \frac{\rho^2}{r^2} \right) \quad a \leq r \leq \rho_1$$

где A , ρ , ρ_1 - неизвестные постоянные.

2) Решение в зоне текучести $\rho_1 \leq r \leq \rho$. Для компонентов напряжений получаем

$$\sigma_r = 2AH \left(2 \ln \frac{\rho_1}{a} + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - 2\sigma_1 \frac{r}{\rho_1}$$

$$\sigma_0 = 2AH \left(2 \ln \frac{\rho_1}{a} + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - 2\sigma_s \ln \frac{r}{\rho_1} - 2\sigma_s, \quad \rho_1 \leq r \leq \rho \quad (13)$$

Из условия непрерывности σ_0 на граничной поверхности $r = \rho_1$ находим

$$2AH \left(\frac{\rho^2}{\rho_1^2} - 1 \right) = \sigma_s \quad (14)$$

3) Решение в зоне текучести $\rho \leq r \leq \rho_2$. Принимая в дифференциальном уравнении равновесия (3) $\sigma_0 - \sigma_r = 2\sigma_s$ и интегрируя, будем иметь

$$\sigma_r = D - 2\sigma_s \ln \frac{\rho_2}{r}, \quad \sigma_0 = \sigma_r + 2\sigma_s \quad (15)$$

где D - произвольная постоянная.

4) Решение в зоне упрочнения $\rho_2 \leq r \leq b$. В этой зоне имеем

$$\sigma_0 = H\epsilon_0, \quad \text{т.е.} \quad \sigma_0 - \sigma_r = 4AH \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_1^2} \right)$$

Подставляя в уравнение (3) и интегрируя с использованием граничного условия $\sigma_r = 0$ при $r = b$, получим

$$\sigma_r = 2AH \left(\frac{\rho^2}{r^2} - \frac{\rho^2}{b^2} - 2 \ln \frac{b}{r} \right), \quad \sigma_0 = 2AH \left(2 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{\rho^2}{b^2} - 2 \ln \frac{b}{r} \right) \quad (16)$$

Далее, из условия непрерывности σ_r и σ_0 на граничной поверхности $r = \rho_2$ определим

$$D = 2AH \left(\frac{\rho^2}{\rho_2^2} - \frac{\rho^2}{b^2} - 2 \ln \frac{b}{\rho_2} \right)$$

и соотношение между параметрами

$$2AH \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_2^2} \right) = \sigma_s \quad (17)$$

Имеем также условие непрерывности σ_r на нейтральной поверхности $r = \rho$. Получим

$$AH \left(2 \ln \frac{b}{a} \frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{\rho_2^2} - \frac{\rho^2}{a^2} + \frac{\rho^2}{b^2} \right) = \sigma_s \ln \frac{\rho^2}{\rho_1 \rho_2}$$

Используя условие разрушения $\sigma_0 = \sigma_s$, для A находим значение согласно (9). Для радиусов граничных поверхностей получаем

$$\rho_i = \frac{\sqrt{\mu} \rho}{\sqrt{\mu} \mp 1 \pm \rho^2/a^2} \quad (i = 1, 2) \quad (18)$$

где верхние знаки для $i = 1$, а нижние для $i = 2$, а также уравнение нейтрального слоя

$$\mu \ln \frac{b^2}{a^2} \frac{\mu + 1 - \rho^2/a^2}{\mu - 1 + \rho^2/a^2} + (2 - \mu) \frac{\rho^2}{a^2} + \mu \frac{\rho^2}{b^2} =$$

$$= 2 + \left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1 \right) \ln \left[1 - \frac{1}{\mu^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^2 \right] \quad (19)$$

Принимая в формуле ρ_2 по (18) $\mu = \mu_1$ при $\rho_2 = b$, получаем

$$\mu_1 = \frac{b^2 \rho_0^2 - a^2}{a^2 b^2 - \rho_0^2}$$

Далее, подставляя это значение $\mu = \mu_1$ в (19) и полагая в нем $\rho = \rho_0$, находим уравнение относительно ρ_0 .

Предельное положение нейтральной поверхности $\rho = \rho_*$ получается из (19) предельным переходом при $\mu \rightarrow \infty$

$$\rho_* = ab \sqrt{\frac{2 \ln \frac{b}{a}}{b^2 - a^2}}$$

Соответственно, из (18) при $\mu \rightarrow \infty$ находим $\rho_{1*} = \rho_{2*} = \rho_*$.

Вычисляя изгибающий момент при $\mu > \mu_1$

$$M = \int_a^{\rho_1} \sigma_0 r dr + \int_{\rho_1}^{\rho} \sigma_0 r dr + \int_{\rho}^{\rho_2} \sigma_0 r dr + \int_{\rho_2}^b \sigma_y r dr$$

с использованием формул (12), (13), (15), (16), получаем

$$\begin{aligned} M/\sigma_y = & \frac{\mu}{2 \left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1 \right)} \left[\left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) (\rho_1^2 - a^2) + \left(1 - \frac{\rho^2}{b^2} \right) (b^2 - \rho_2^2) + \right. \\ & + (\rho^2 - \rho_1^2) \left(\frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) + (\rho^2 - \rho_2^2) \left(\frac{\rho^2}{b^2} - \frac{\rho^2}{\rho_2^2} \right) \Big] + \\ & + \rho^2 \ln \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho^2} + \frac{1}{2} (\rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho^2) \end{aligned}$$

Определенный практический интерес представляет график функции $M = M(\mu)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. — М.: Гостехиздат, 1956. 408с.
2. Ключников В.В. Запредельное состояние пластинки с отверстием. — В межвуз. сб.: Статическая и динамическая прочность элементов машиностроительных констр. М.: ВЗМИ, 1986.
3. Ключников В.В. Упрочняющаяся пластинка под действием сосредоточенной силы. Деп.ВИНИТИ, 1986.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
1.02.1996

О ДВУХ ЗАДАЧАХ АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ПОЛОСЫ ПРИ НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ Агалавян Л.А., Хачатрян А.М.

Լ.Ա. Աղալովյան, Ա.Մ. Խաչատրյան

Անիզոտրոպ երկշերտի երկու խնդիրների մասին շերտերի միջև ոչ լրիվ կոնտակտի դեպքում

Աշխատանքը նվիրված է անիզոտրոպ երկշերտ շերտ-ինժամին լարվածային դեֆորմացիան վիճակի աստիճանականությանը, երբ կոնտակտի գծի վրա որևիճակում է սահմանափակ տեղափոխությունների սարքերության (լուրջիկ) բաշխման օրենքը:

L.A. Aghalovian, A.M. Khachatryan

On two problems of an anisotrope two-layered strip with an
incomplete contact between the strips

Рассматриваются вопросы определения и анализа напряженно-деформированного состояния двухслойной анизотропной полосы-балки, когда на линии контакта задается закон распределения разности (скачка) тангенциального перемещения.

Многие прикладные задачи для слоистых структур приводят к рассмотрению случаев неполного контакта между слоями. Например, сейсмологические наблюдения указывают, что динамические характеристики отраженных и преломленных волн на сейсмических границах не всегда соответствуют представлениям о границе, как о жестком контакте между двумя средами. Для описания полей сейсмических волн, образующихся на тонких границах, используют граничные условия, отличные от условий жесткого контакта, в частности, условия, учитывающие скачок тангенциальных смещений [1,2].

Работа посвящена определению и анализу напряженно-деформированного состояния (НДС) двухслойной анизотропной полосы-балки при неполном контакте между слоями. Считается, что слои в плоскости полосы обладают анизотропией общего вида. В работах [3,4] асимптотическим методом построены решения слоистых анизотропных балок, когда между слоями имеется полный контакт, а на продольных сторонах заданы значения соответствующих компонентов тензора напряжений. Когда контакт между слоями неполный, аналогичные исследования проведены для двухслойной анизотропной балки-полосы в [5,6]. Асимптотические решения смешанных краевых задач для двухслойных анизотропных балок-полос получены в работе [7]. Во всех упомянутых задачах, где имеется неполный контакт между слоями, считается, что на линии контакта задан закон распределения касательного напряжения.

В настоящей работе, на линии контакта задается закон распределения разности (скачка) тангенциального перемещения [1,2].

1. Рассматриваются задачи определения НДС анизотропной двухслойной балки-полосы

$\Omega = \{(x, y): x \in [0, l], -h_2 \leq y \leq h_1, h_1, h_2 \ll l\}$, когда на продольных

сторонах заданы условия первой или смешанной краевых задач теории упругости, между слоями — условия неполного контакта, а на торцах

$x = 0$, l – производные условия краевых задач теории упругости. Слои имеют толщины h_k , коэффициенты упругости $a_y^{(k)}$ ($k = 1, 2$).

Условиями на продольных краях являются:

Задача 1 –

$$\sigma_{xy} = l/h \quad X^+(x), \quad \sigma_y = \pm Y^+(x) \quad \text{при} \quad y = h_1, -h_2 \quad (1.1)$$

Задача 2 –

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(1)} &= \sigma_{xy}^+(x), \quad \sigma_y^{(1)} = l/h \sigma_y^+(x) & \text{при} & \quad y = h_1 \\ \sigma_{xy}^{(2)} &= \sigma_{xy}^-(x), \quad v^{(2)} = l/h v^-(x) & \text{при} & \quad y = -h_2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

На линии раздела слоев $y = 0$ должны быть выполнены следующие условия неполного контакта:

$$u_2 - u_1 = f(x), \quad v_1 = v_2, \quad \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \quad \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} \quad (1.3)$$

Функция $f(x)$ считается заданной в зависимости от выбранной модели.

Для решения поставленных задач вводится безразмерная система координат ξ, ζ и малый параметр ε

$$\xi = x/l, \quad \zeta = y/h, \quad \varepsilon = h/l, \quad h = (h_1 + h_2)/2 \quad (1.4)$$

В силу сингулярной возмущенности основных уравнений, решения складываются из двух типов решений-внутреннего, т.е. незатухающего при удалении от торцов в глубь области и типа пограничного слоя [8-10].

Решения внутренних задач будем искать в виде

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{-q_k} \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(k,s)} \quad (1.5)$$

$Q^{(k)}$ – любое из напряжений или безразмерных перемещений $U_k = u_k/l, V_k = v_k/l$, s – номер приближения, k – номер слоя. Целые числа q_k должны быть такими, чтобы после подстановки (1.5) и преобразованные уравнения плоской задачи получить непротиворечивую систему для определения $Q^{(k,s)}$. Они характеризуют также интенсивность (порядок) соответствующей величины. В рассмотренных задачах для q_k можно установить такие значения:

задача 1 [3,8] –

$$\begin{aligned} q_k &= 2 & \text{для} & \quad \sigma_y^{(k)}, U_k, & q_k &= 0 & \text{для} & \quad \sigma_y^{(k)} \\ q_k &= 1 & \text{для} & \quad \sigma_{xy}^{(k)}, & q_k &= 3 & \text{для} & \quad V_k, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

задача 2 [7] –

$$q_k = 0 \quad \text{для} \quad \sigma_{xy}^{(k)}, \quad q_k = 1 \quad \text{для} \quad \sigma_y^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, U_k, V_k \quad (1.7)$$

Сравнение асимптотик (1.6) и (1.7) показывает, что характер НДС чутко реагирует на тип условий на продольных краях и даже, заменив одно условие другим, что имеет место в (1.2) по сравнению с (1.1), как убедимся ниже, качественно и принципиально меняется картина напряженно-деформированного состояния.

Подставив (1.5) в преобразованные по (1.4) уравнения плоской задачи теории упругости анизотропного тела, используя для каждого случая (1.6) или (1.7), получим систему относительно $Q^{(k,s)}$, решив которую, будем иметь:

задача 1 –

$$\begin{aligned}
V_i^{(k,s)} &= w^{(k,s)}(\xi) + v^{(k,s)}(\xi, \zeta), \quad U_i^{(s)} = -w_{\zeta}^{(k,s)} \zeta + u^{(k,s)}(\xi) + u^{(k,s)}(\xi, \zeta) \\
\sigma_{\zeta}^{(k,s)} &= 1/a_{11}^{(k)} \left(u_{\zeta}^{(k,s)} - w_{\zeta\zeta}^{(k,s)} \zeta \right) + \sigma_{\zeta}^{(k,s)}(\xi, \zeta) \\
\sigma_{xy}^{(k,s)} &= 1/a_{11}^{(k)} \left(w_{\zeta\zeta}^{(k,s)} \zeta^2/2 - u_{\zeta\zeta}^{(k,s)} \zeta \right) + \sigma_{xy0}^{(k,s)}(\xi) + \sigma_{xy}^{(k,s)}(\xi, \zeta) \\
\sigma_v^{(k,s)} &= 1/a_{11}^{(k)} \left(u_{\zeta\zeta}^{(k,s)} \zeta^2/2 - w_{\zeta\zeta}^{(k,s)} \zeta^3/6 \right) - \sigma_{xy\zeta}^{(k,s)} + \sigma_{\zeta}^{(k,s)}(\xi) + \sigma_{\zeta}^{(k,s)}(\xi, \zeta)
\end{aligned}
\tag{1.8}$$

Задача 2 —

$$\begin{aligned}
V_k^{(s)} &= w^{(k,s)}(\xi) + v^{(k,s)}(\xi, \zeta), \quad U_k^{(s)} = u^{(k,s)}(\xi) + u^{(k,s)}(\xi, \zeta) \\
\sigma_y^{(k,s)} &= \sigma_{y0}^{(k,s)}(\xi) + \sigma_y^{(k,s)}(\xi, \zeta) \\
\sigma_x^{(k,s)} &= 1/a_{11}^{(k)} u_{\zeta}^{(k,s)} - a_{12}^{(k)} / a_{11}^{(k)} \sigma_{y0}^{(k,s)} + \sigma_x^{(k,s)}(\xi, \zeta) \\
\sigma_{xy}^{(k,s)} &= - \left(1/a_{11}^{(k)} u_{\zeta\zeta}^{(k,s)} - a_{12}^{(k)} / a_{11}^{(k)} \sigma_{y\zeta}^{(k,s)} \right) + \sigma_{xy0}^{(k,s)}(\xi) + \sigma_{xy}^{(k,s)}(\xi, \zeta)
\end{aligned}
\tag{1.9}$$

Входящие в (1.8) и (1.9) неизвестные функции $w^{(k,s)}, u^{(k,s)}, \sigma_{xy}^{(k,s)}, \sigma_v^{(k,s)}$ подлежат определению из условий (1.1)-(1.3), а величины со звездочкой, как обычно, являются известными, если построены приближения меньше s и определяются по формулам:

Задача 1 —

$$\begin{aligned}
v^{(k,s)} &= \int_0^{\zeta} \left(a_{12}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-2)} + a_{22}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-3)} + a_{26}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-3)} \right) d\zeta \\
u^{(k,s)} &= \int_0^{\zeta} \left(a_{16}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-2)} + a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-2)} - v_{\zeta}^{(k,s)} \right) d\zeta \\
\sigma_x^{(k,s)} &= 1/a_{11}^{(k)} \left(u_{\zeta}^{(k,s)} - a_{12}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-2)} - a_{16}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} \right) \\
\sigma_{xy}^{(k,s)} &= - \int_0^{\zeta} \sigma_{x\zeta}^{(k,s)} d\zeta, \quad \sigma_y^{(k,s)} = - \int_0^{\zeta} \sigma_{xy\zeta}^{(k,s)} d\zeta
\end{aligned}
\tag{1.10}$$

Задача 2 —

$$\begin{aligned}
v^{(k,s)} &= \int_0^{\zeta} \left(a_{12}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{22}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-2)} \right) d\zeta \\
u^{(k,s)} &= \int_0^{\zeta} \left(a_{16}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-2)} - v_{\zeta}^{(k,s-1)} \right) d\zeta \\
\sigma_x^{(k,s)} &= - \int_0^{\zeta} \sigma_{x\zeta}^{(k,s-2)} d\zeta \\
\sigma_x^{(k,s)} &= -a_{16}^{(k)} / a_{11}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-1)} - a_{12}^{(k)} / a_{11}^{(k)} \sigma_y^{(k,s)} + 1/a_{11}^{(k)} u_{\zeta}^{(k,s)} \\
\sigma_{xy}^{(k,s)} &= - \int_0^{\zeta} \sigma_{x\zeta}^{(k,s)} d\zeta
\end{aligned}
\tag{1.11}$$

Полагая, что с самого начала ($s=0$) должно проявляться влияние неполного контакта, т.е. функции $f(x)$, последняя должна быть представима в виде

$$f(x) = \varepsilon^{q+s} f^{(s)}, \quad s=0, N \tag{1.12}$$

где $q = -2$ и -1 для задач 1, 2, соответственно. Удовлетворив условиям контакта (1.3), получим

$$\begin{aligned} u^{(2,s)} &= u^{(1,s)} + f^{(s)}, \quad w^{(1,s)} = w^{(2,s)} = w^{(s)} \\ \sigma_{xy0}^{(1,s)} &= \sigma_{xy0}^{(2,s)}, \quad \sigma_{y0}^{(1,s)} = \sigma_{y0}^{(2,s)} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Удовлетворив также граничным условиям (1.1) или (1.2), получим следующие дифференциальные уравнения для определения перемещений:

задача 1 —

$$\begin{aligned} C \frac{d^2 u^{(1,s)}}{d\xi^2} + K \frac{d^3 w^{(s)}}{d\xi^3} + C_2 \frac{d^2 f^{(s)}}{d\xi^2} &= p_1^{(s)} \\ D \frac{d^4 w^{(s)}}{d\xi^4} + K_1 \frac{d^3 u^{(1,s)}}{d\xi^3} + K_2 \frac{d^3 f^{(s)}}{d\xi^3} &= q^{(s)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

задача 2 —

$$C \frac{d^2 u^{(1,s)}}{d\xi^2} + C_2 \frac{d^2 f^{(s)}}{d\xi^2} = p_2^{(s)} \quad (1.15)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \zeta_1 / a_{11}^{(1)}, \quad C_2 = -\zeta_2 / a_{11}^{(2)}, \quad C = C_1 + C_2 \\ K_k &= -1 / (2a_{11}^{(k)}) \zeta_k^2, \quad K = K_1 - K_2, \quad \zeta_1 = h_1 / h, \quad \zeta_2 = -h_2 / h \\ D_1 &= \zeta_1^3 / (3a_{11}^{(1)}), \quad D_2 = -\zeta_2^3 / (3a_{11}^{(2)}), \quad D = D_1 + D_2 \\ p_1^{(s)} &= -(X^{+(s)} - X^{-s}) + \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\zeta_1) - \sigma_{xy}^{*(2,s)}(\zeta_2) \\ q^{(s)} &= -(Y^{+(s)} + Y^{-s}) - \zeta_1 X_{,\xi}^{+(s)} + \zeta_2 X_{,\xi}^{-s} + \sigma_y^{*(1,s)}(\zeta_1) - \\ &\quad - \sigma_y^{*(2,s)}(\zeta_2) + \zeta_1 \sigma_{xy,\xi}^{*(1,s)}(\zeta_1) - \zeta_2 \sigma_{xy,\xi}^{*(2,s)}(\zeta_2) \\ p_2^{(s)} &= -(\sigma_{xy}^{+(s)} - \sigma_{xy}^{-s}) + \left(\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \zeta_1 - \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} \zeta_2 \right) \left(\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\zeta_1)}{d\xi} \right) + \\ &\quad + \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\zeta_1) - \sigma_{xy}^{*(2,s)}(\zeta_2) \\ X^{\pm(0)} &= X^{\pm}, \quad Y^{\pm(0)} = Y^{\pm}, \quad \sigma_{xy}^{\pm(0)} = \sigma_{xy}^{\pm}, \quad \sigma_y^{\pm(0)} = \sigma_y^{\pm} \\ X^{\pm(s)} &= Y^{\pm(s)} = \sigma_{xy}^{\pm(0)} = \sigma_y^{\pm(s)} = 0 \quad \text{при} \quad s > 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Имеем также формулы

$$\begin{aligned} \sigma_{xy0}^{(1,s)} &= X^{+(s)} - \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\zeta_1) + K_1 w_{,xxx}^{(s)} + C_1 u_{,xx}^{(1,s)} \\ \sigma_{y0}^{(1,s)} &= Y^{+(s)} + \zeta_1 X_{,\xi}^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\zeta_1) - \zeta_1 \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\zeta_1) - D_1 w_{,xxxx}^{(s)} - K_1 u_{,xxx}^{(1,s)} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Для задачи 2 получаются

$$\begin{aligned} v^{(1,s)} &= v^{(2,s)} = v^{-s} - v^{*(2,s)}(\zeta_2), \quad \sigma_{y0}^{(1,s)} = \sigma_{y0}^{(2,s)} = \sigma_y^{+(s)}(\xi) - \sigma_y^{*(1,s)}(\zeta_1) \\ \sigma_{xy0}^{(1,s)} &= \sigma_{xy0}^{(2,s)} = \sigma_{xy}^{+(s)}(\xi) - \zeta_1 / a_{11}^{(1)} u_{,xx}^{(1,s)} - a_{12}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \zeta_1 \sigma_{y0,\xi}^{(1,s)} - \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\zeta_1) \\ v^{-1(0)} &= v^{-}, \quad v^{-s} = 0 \quad \text{при} \quad s > 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Система уравнений (1.14) и (1.16) вместе с соотношениями (1.8)–(1.11), (1.17) и (1.18) позволяют определять все величины внутренней задачи. Однако, решением только внутренней задачи можно

удовлетворить торцевым условиям лишь интегрально. Для полного удовлетворения этим условиям необходимо построить еще решение типа пограничного слоя. Напомним, что решение типа пограничного слоя удовлетворяет однородным условиям как на продольных сторонах двухслойной балки-полосы, так и на линии контакта. Следовательно, решения типа пограничного слоя для рассматриваемых задач совпадают с соответствующими решениями для двухслойных балок-полос при полном контакте между слоями. Для задачи 1 это решение построено в [4].

2. Модель нежесткого контакта интерпретируют как включение тонкого слоя с исчезающе малой сдвиговой жесткостью μ_0 (μ_0 - константа Аяме) между контактирующими средами. Толщина этого слоя $h_0 \rightarrow 0$, а отношение $\chi = \lim_{\substack{h_0 \rightarrow 0 \\ \mu_0 \rightarrow 0}} h_0 / \mu_0$ может принимать любое значение

от 0 до ∞ .

Предельному случаю $\chi \rightarrow 0$ соответствует жесткий контакт, другому предельному случаю $\chi \rightarrow \infty$ - скользящий контакт ($\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} = 0$). Для промежуточного состояния принимается [1,2]

$$u_2 - u_1 = \chi \sigma_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0} \quad (2.1)$$

Остальные же условия контакта (1.3) остаются неизменными. Принимая условие (2.1), тем самым, мы задаем функцию $f(x) = \chi l / h \sigma_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0}$, что, в свою очередь, второе условие (1.13) превращает в условие

$$u^{(2,s)} = u^{(1,s)} + \chi \sigma_{xy}^{(1,s)} \quad (2.2)$$

В итоге система уравнений (1.14) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} C \frac{d^2 u^{(1,s)}}{d\xi^2} + \chi C_1 C_2 \frac{d^4 u^{(1,s)}}{d\xi^4} + K \frac{d^3 w^{(s)}}{d\xi^3} + \chi K_1 K_2 \frac{d^5 w^{(s)}}{d\xi^5} &= \bar{p}_1^{(s)} \\ D \frac{d^4 w^{(s)}}{d\xi^4} + K \frac{d^3 u^{(1,s)}}{d\xi^3} + \chi K_1 K_2 \frac{d^6 w^{(s)}}{d\xi^6} + \chi C_1 K_2 \frac{d^5 u^{(1,s)}}{d\xi^5} &= \bar{q}^{(s)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{p}_1^{(s)} &= p_1^{(s)} - \chi C_2 \left(\frac{d^2 X^{(s)}}{d\xi^2} - \frac{d^2 \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi_1, \zeta_1)}{d\xi^2} \right) \\ \bar{q}^{(s)} &= q^{(s)} - \chi K_2 \left(\frac{d^3 X^{(s)}}{d\xi^3} - \frac{d^3 \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi_1, \zeta_1)}{d\xi^3} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

а уравнение (1.15) принимает вид

$$C \frac{d^2 u^{(1,s)}}{d\xi^2} - \chi C_1 C_2 \frac{d^4 u^{(1,s)}}{d\xi^4} = \bar{p}_2^{(s)} \quad (2.5)$$

где

$$\bar{p}_2^{(s)} = p_2^{(s)} + \chi C_2 \left[\frac{d^2 \sigma_y^{(s)}}{d\xi^2} - \frac{d^2 \sigma_y^{(1,s)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi^2} - \right. \\ \left. - \zeta \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \left(\frac{d^3 \sigma_y^{(s)}}{d\xi^3} - \frac{d^3 \sigma_y^{(1,s)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi^3} \right) \right] \quad (2.6)$$

Из системы (2.3) вытекает

$$\bar{D} \frac{d^6 w^{(s)}}{d\xi^6} - (K^2 - CD) \frac{d^4 w^{(s)}}{d\xi^4} = q_0^{(s)} \\ \frac{d^3 u^{(1,s)}}{d\xi^3} = \frac{1}{CK_2 - KC_2} \left[K_2 \frac{d\bar{p}_1^{(s)}}{d\xi} - C_2 \bar{q}^{(s)} - (KK_2 - C_2 D) \frac{d^4 w^{(s)}}{d\xi^4} \right] \quad (2.7)$$

где

$$\bar{D} = \chi [C_1 C_2 D + K_1 K_2 C - K(C_1 K_2 + C_2 K_1)] \\ q_0^{(s)} = C\bar{q}^{(s)} + \chi C_1 C_2 \frac{d^2 \bar{q}^{(s)}}{d\xi^2} - K \frac{d\bar{p}_1^{(s)}}{d\xi} - \chi C_1 K_2 \frac{d^3 \bar{p}_1^{(s)}}{d\xi^3} \quad (2.8)$$

Решение дифференциального уравнения (2.7) имеет вид

$$\text{а) } (K^2 - CD)/\bar{D} > 0 \\ w^{(s)} = C_1^{(s)} \text{sh} \lambda \xi + C_2^{(s)} \text{ch} \lambda \xi + C_3^{(s)} \xi^3/3! + C_4^{(s)} \xi^2/2! + C_5^{(s)} \xi + C_6^{(s)} + w_0^{(s)} \\ \text{б) } (K^2 - CD)/\bar{D} < 0 \\ w^{(s)} = C_1^{(s)} \cos \lambda \xi + C_2^{(s)} \sin \lambda \xi + C_3^{(s)} \xi^3/3! + C_4^{(s)} \xi^2/2! + C_5^{(s)} \xi + C_6^{(s)} + w_0^{(s)} \\ \text{в) } K^2 - CD = 0, \quad w^{(s)} = \sum_{n=0}^5 C_{6-n}^{(s)} \xi^n/n! + w_0^{(s)} \quad (2.9)$$

Здесь $\lambda = \sqrt{(K^2 - CD)/\bar{D}}$, $w_0^{(s)}$ - некоторое частное решение первого уравнения (2.7).

Общим решением дифференциального уравнения (2.5) является

$$u^{(1,s)} = C_1^{(s)} \cos \lambda \xi + C_2^{(s)} \sin \lambda \xi + C_3^{(s)} \xi + C_4^{(s)} + u_0^{(s)}(\xi) \quad (2.10)$$

где

$$\lambda = \sqrt{h(E_1^{(1)} h_1 + E_1^{(2)} h_2) / (\chi h_1 h_2 E_1^{(1)} E_1^{(2)})}, \quad u_0^{(s)} - \text{некоторое частное}$$

решение неоднородного уравнения (2.5).

Перемещения и напряжения, соответствующие первому слою, определяются по формулам

$$U^{(1,s)} = u^{(1,s)} + u^{(1,s)}(\xi, \zeta), \quad V^{(1,s)} = v^{(s)} - v^{(2,s)}(\xi, \zeta) + v^{(2,s)}(\xi, \zeta) \\ \sigma_x^{(1,s)} = \lambda/a_{11}^{(1)} \left(-C_1^{(s)} \sin \lambda \xi + C_2^{(s)} \cos \lambda \xi \right) + C_3^{(s)} / a_{11}^{(1)} - \\ - a_{21}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \left(\sigma_y^{(s)} - \sigma_y^{(1,s)}(\xi, \zeta) \right) + \sigma_x^{(1,s)} + \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \frac{d^2 u_0^{(s)}}{d\xi^2}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^{(1,1)} &= \lambda^2 / a_{11}^{(1)} \left(C_1^{(1)} \cos \lambda \xi + C_2^{(1)} \sin \lambda \xi \right) (\zeta - \zeta_1) + \\
&+ \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \left(\frac{d\sigma_y^{+(1)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(1,1)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi} \right) (\zeta - \zeta_1) + \sigma_{xy}^{-(1)} + \\
&+ \sigma_{xy}^{*(1,1)}(\xi, \zeta) - \sigma_{xy}^{*(1,1)}(\xi, \zeta_1) - \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \frac{d^2 u_0^{(1)}}{d\xi^2} (\zeta - \zeta_1) \\
\sigma_y^{(1,1)} &= \sigma_y^{+(1)} - \sigma_y^{*(1,1)}(\xi, \zeta_1) + \sigma_y^{*(1,1)}(\xi, \zeta)
\end{aligned} \quad (2.11)$$

а для второго слоя имеем

$$\begin{aligned}
V^{(2,1)} &= v^{-(1)} - v^{*(2,1)}(\xi, \zeta_2) + v^{*(1,1)}(\xi, \zeta) \\
U^{(2,1)} &= \left(C_1^{(1)} \cos \lambda \xi + C_2^{(1)} \sin \lambda \xi \right) \left(1 - \lambda^2 \chi \zeta_1 / a_{11}^{(1)} \right) + \\
&+ \chi \left(\sigma_{xy}^{+(1)} - \zeta_1 \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \left(\frac{d\sigma_y^{+(1)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(1,1)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi} \right) - \sigma_{xy}^{*(1,1)}(\xi, \zeta_1) \right) + \\
&+ C_3^{(1)} \xi + C_4^{(1)} + u_0^{(1)} + \chi \frac{\zeta_1}{a_{11}^{(1)}} \frac{d^2 u_0^{(1)}}{d\xi^2} + u^{*(2,1)}(\xi, \zeta) \\
\sigma_x^{(2,1)} &= \frac{\lambda}{a_{11}^{(1)}} \left(-C_1^{(1)} \sin \lambda \xi + C_2^{(1)} \cos \lambda \xi \right) + \frac{1}{a_{11}^{(2)}} C_3^{(1)} + \\
&+ \frac{\chi}{a_{11}^{(2)}} \left(\sigma_{xy}^{+(1)} + \zeta_1 \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \left(\frac{d\sigma_y^{+(1)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(1,1)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi} \right) - \right. \\
&- \sigma_{xy}^{*(1,1)}(\xi, \zeta_1) - \frac{\chi \lambda^2 \zeta_1}{a_{11}^{(1)} a_{11}^{(2)}} \left(C_1^{(1)} \cos \lambda \xi + C_2^{(1)} \sin \lambda \xi \right) - \\
&- \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} \left(\sigma_y^{+(1)}(\xi) - \sigma_y^{*(1,1)}(\xi, \zeta_1) \right) + \sigma_x^{*(2,1)}(\xi, \zeta) + \frac{1}{a_{11}^{(2)}} \frac{d u_0^{(1)}}{d\xi} \cdot \\
\sigma_{xy}^{(2,1)} &= \lambda^2 \left(C_1^{(1)} \cos \lambda \xi + C_2^{(1)} \sin \lambda \xi \right) \left(\left(1 - \lambda^2 \chi \zeta_1 / a_{11}^{(1)} \right) \zeta_1 / a_{11}^{(1)} - \right. \\
&- \frac{\zeta_1}{a_{11}^{(1)}} \left. \right) + \left(\frac{\zeta_1}{a_{11}^{(1)}} - \frac{\zeta}{a_{11}^{(2)}} \right) \frac{d^2 u_0^{(1)}}{d\xi^2} - \chi \frac{\zeta_1 \zeta}{a_{11}^{(1)} a_{11}^{(2)}} \frac{d^4 u_0^{(1)}}{d\xi^4} - \\
&- \chi \frac{\zeta}{a_{11}^{(2)}} \left(\frac{d^2 \sigma_{xy}^{+(1)}}{d\xi^2} - \zeta_1 \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \left(\frac{d^3 \sigma_y^{+(1)}}{d\xi^3} - \frac{d^3 \sigma_y^{*(1,1)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi^3} \right) - \right. \\
&- \frac{d^3 \sigma_{xy}^{*(1,1)}}{d\xi^3} \left. \right) + \left(\frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} \zeta - \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \zeta_1 \right) \left(\frac{d\sigma_y^{+(1)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(1,1)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi} \right) + \\
&+ \sigma_{xy}^{+(1)} - \sigma_{xy}^{*(1,1)}(\xi, \zeta_1) + \sigma_{xy}^{*(2,1)}(\xi, \zeta) \\
\sigma_y^{(2,1)} &= \sigma_y^{+(1)} - \sigma_y^{*(1,1)}(\xi, \zeta_1) + \sigma_y^{*(2,1)}(\xi, \zeta)
\end{aligned} \quad (2.12)$$

Из (2.11), (2.12) следует, что в значения напряжений входят три неизвестные константы $C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, C_3^{(n)}$. Между тем, когда имеется полный контакт между слоями, в выражения напряжений входит только одна константа [7].

Таким образом, в отличие от случаев полного контакта, контакт типа (2.1) приводит в обоих случаях к повышению порядка разрешающих дифференциальных уравнений и, как следствие, увеличению числа произвольных констант в решении внутренней задачи. Значения этих постоянных могут быть определены из граничных условий при $x = 0, l$ с привлечением решения пограничного слоя, т.е. пограничный слой будет непосредственно влиять на решение внутренней задачи. Для удовлетворения граничных условий можно употреблять приближенные методы, например, метод наименьших квадратов, метод Тресфца и др. [11].

The research described in this publication was made possible in part by Grant № NIVS000 from the International Science Foundation.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анисимов А.А., Ермаков С.Ю., Фролова Е.Н., Яновская Т.Б. Исследование отражения-преломления упругих волн на границе нежесткого контакта и контакта с трением.-Росс. АН, Физика земли, 1993, №11, с.37-44.
2. Подьяпольский С.Г. Отражение и преломление на границе двух упругих сред в случае нежесткого контакта.-Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1963, №4, с.525-531.
3. Агаловян А.А., Хачатрян А.М. Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния анизотропной слоистой балки.- Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1986, т.39, №2, с.3-14.
4. Хачатрян А.М. О пограничном слое слоистых балок.- Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1987, т.40, №2, с.19-25.
5. Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряженно-деформированного состояния анизотропной двухслойной балки с проскальзыванием.-В сб.: "Акт. пробл. неоднородной мех.". Материалы Всес. науч. семинара, Ереван, 1991. 390 с.
6. Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. О пограничном слое для двухслоя с проскальзыванием.- Изв. НАН Армении, Механика, 1993, т. 46, №3-4, с.12-19.
7. Агаловян А.А., Товмасыян А.Б. Об асимптотическом решении смешанной краевой задачи для двухслойной термоупругой полосы. - В сб.: "Акт. пробл. неоднородной мех.", Материалы Всес. науч. семинара, Ереван, 1991. 390 с.
8. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.- ПММ, 1962, т.26, вып.4, с.668-686.
9. Васильева А.Б., Бугузов В.Ф. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.- М.: Наука, 1973. 272 с.
10. Найфэ А.Х. Методы возмущений.-М.: Мир, 1976.
11. Лурье А.И. Теория упругости.-М.: Наука, 1970.

К СВОБОДНЫМ КОЛЕБАНИЯМ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН

Мовсисян Л.А.

Լ. Ա. Մովսիսյան

Անհամասեռ սալի ուղղորդված ճնշման ճնշման մասին

Դիտարկվում է երկայնական կամ ընդայնական անհամասեռության սալի ազատ ստատանոններ (զլանային ճնշում) ընդդայնական սալերի հաշվառման ռատմանաիրված օրինակները քայլ են սալի լատերի դատման անհամասեռության հիշատակության անհամասեռների մասին:

Քննարկվում է նաև այն դիպքը, երբ անհամասեռությունը կետի դիրքի ստոխաստիկ խանգարում է լատերի ճնշմանը: Մեզին տրված հատվածայինների միջոցով կարելի է որոշել անհամասեռությունը:

L.A. Movsisian

About the free vibration of nonhomogeneous plate

Исследуются свободные колебания неоднородных пластин. Начиная с [1], авторами были рассмотрены многочисленные задачи определения собственных чисел (критических параметров, частоты) упругих и упруго-пластических систем с различными неоднородностями. Здесь, в отличие от них, уравнение движения берется с учетом поперечных сдвигов. Последний не является самоцелью, а в какой-то степени позволяет определить пределы применимости классической теории и для неоднородных пластин. Продольная и поперечная неоднородности изучаются в отдельности.

Всего изучаются еще два вопроса: случай, когда неоднородность является стохастической и обратная задача - как по частотам определить неоднородность.

1. Имеется изотропная неоднородная пластинка. Координатная плоскость xu находится в срединной плоскости пластинки. Для перемещений принимается

$$u_x = u(x, y) + \frac{2z}{h} \varphi(x, y), \quad u_y = v(x, y) + \frac{2z}{h} \psi(x, y), \quad u_z = w(x, y) \quad (1.1)$$

которым соответствуют деформации

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 + \frac{2z}{h} \chi_1, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_2 + \frac{2z}{h} \chi_2, \quad \varepsilon_{xy} = \omega + \frac{2z}{h} \tau \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_z = \gamma_1, \quad \varepsilon_{yz} = \gamma_2$$

Здесь h - толщина пластинки

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \chi_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \chi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \gamma_1 &= \frac{2}{h} \varphi + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_2 = \frac{2}{h} \psi + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Если предполагать, что модуль упругости - функция от трех координат, а коэффициент Пуассона постоянен (обычно по понятным соображениям так и принимается, например [2], к тому же это не

существенно и можно было обойтись без такого предположения) и представить его в виде суммы четной и нечетной функций относительно

$$E(x, y, z) = E_0(x, y, z) + E_1(x, y, z) \quad (1.4)$$

то соотношения упругости запишутся

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ S \\ M_1 \\ M_2 \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 & \nu I_0 & 0 & I_1 & \nu I_1 & 0 \\ & I_0 & 0 & \nu I_1 & I_1 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2} I_0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} I_1 \\ & & & I_2 & \nu I_2 & 0 \\ & & & & I_2 & 0 \\ & & & & & \frac{1-\nu}{2} I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \omega \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \tau \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

$$N_1 = \frac{1-\nu}{2} I_0 \gamma_1, \quad N_2 = \frac{1-\nu}{2} I_0 \gamma_2$$

где

$$I_0 = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} E_0 dz, \quad I_1 = \frac{2}{h(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} E_1 z dz, \quad I_2 = \frac{2}{h(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} E_2 z^2 dz$$

Если плотность материала также представить в виде (1.4), то уравнения движения будут

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + X &= R_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + R_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} + Y = R_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + R_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + Z &= R_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = N_1 - Q_1 + R_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + R_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} &= N_2 - Q_2 + R_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + R_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Нет смысла записывать уравнение в перемещениях, отметим лишь, что, как и следовало ожидать, в общем случае плоская задача и задача изгиба не распадаются.

Для выяснения характера влияния неоднородности на частоты и пределы применимости классической теории изгиба

$\left(\varphi = -\frac{h}{2} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \psi = -\frac{h}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ будет изучен ряд одномерных задач. По этим

же соображениям в отдельности будут рассмотрены поперечная и продольная неоднородности.

Рассмотрение двумерных задач принципиальных трудностей не вызывает и можно провести совершенно аналогичным образом [3].

2. Здесь будем рассматривать две задачи свободных колебаний, когда имеется поперечная неоднородность. Пусть коэффициент упругости есть

$$E = E_0 + \frac{2}{h} z E_1, \quad E_0, E_1 = \text{const} \quad (2.1)$$

Уравнения движения будут

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \delta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a^2 \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = a^2 \left(\frac{12}{h^2} \varphi + \frac{6}{h} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

Здесь

$$c^2 = \frac{E_0}{\rho(1-\nu^2)}, \quad a^2 = \frac{E_0}{2(1+\nu)\rho}, \quad \delta = \frac{E_1}{E_0}$$

Так как нет определенной зависимости между коэффициентом упругости и плотностью материала, для простоты здесь и в дальнейшем последняя принимается постоянной.

Для граничных условий свободного опирания частотное уравнение будет

$$\omega^6 - \left[2c^2\lambda^2 + a^2 \left(\frac{12}{h^2} - \lambda^2 \right) \right] \omega^4 + \left[a^2 c^2 \lambda^2 \left(\frac{12}{h^2} + 2\lambda^2 \right) + c^4 \lambda^4 \left(1 - \frac{1}{3} \delta^2 \right) \right] \omega^2 - a^2 c^4 \lambda^6 \left(1 - \frac{1}{3} \delta^2 \right) = 0 \quad (2.3)$$

$$\lambda = \frac{m\pi}{l}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

В табл. 1 приведены величины, пропорциональные значениям безразмерной частоты $\left(\Omega = \frac{\omega h}{2\sqrt{3}a} \right)$ для различных δ и $\xi = \frac{\pi h}{2\sqrt{3}l}$. Для

каждого случая наибольшие значения Ω соответствуют инерции поворота, средние – продольному движению и наименьшие – изгибу. Коэффициент Пуассона взят равным 0.3.

Для сравнения значений изгибной частоты, полученных по (2.3) и по классической постановке в табл. 2 приведены их значения для некоторых δ для балки ($\nu = 0$). В каждой клетке в первых строках помещены значения с учетом сдвига, а во вторых – без него. Истинные значения Ω есть приведенные в таблицах, умноженные на 10^{-4} . В последних столбцах таблиц здесь и в дальнейшем помещены значения n .

Таблица 1

$\xi \backslash \delta$	0	0.25	0.5	0.75	1	n
1/5	1.072	1.073	1.073	1.074	1.073	0
	3.317	3.379	3.372	3.358	3.379	1
	0.6306	0.6244	0.6054	0.5719	0.5204	1
1/10	1.019	1.019	1.019	1.019	1.019	0
	1.691	1.691	1.690	1.688	1.686	1
	1.659	1.642	1.590	1.498	1.358	2
1/15	1.027	1.027	1.027	1.027	1.027	0
	1.069	1.069	1.069	1.069	1.068	1
	0.6727	0.6652	0.6431	0.6053	0.5504	2

Из таблиц видно, что помимо известных выводов относительно частот, определенных по классической и уточненным теориям, увеличение неоднородности (δ) увеличивает разность между ними.

Таблица 2

$\xi \backslash \delta$	0	0.5	1	n
1/5	0.5348	0.5128	0.4393	1
	0.5657	0.5514	0.4669	
1/10	1.393	1.534	1.140	2
	1.483	1.360	1.162	
1/15	0.5666	0.5357	0.4582	3
	0.5666	0.5422	0.4628	

Частоты, соответствующие инерции поворота и растяжению, менее чувствительные к изменению неоднородности в отличие от изгибной частоты. Частоты инерции поворота с увеличением неоднородности увеличиваются, в то время как изгибная частота, наоборот, — уменьшается.

Рассмотрим теперь симметричную относительно срединной плоскости случай неоднородности:

$$E = E_0 + \frac{4z^2}{h^2} E_1 \quad (2.4)$$

Изгиб здесь не сопровождается продольным движением и уравнения движения будут:

$$a^2 A \left(\frac{2}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad A = 1 + \frac{1}{3} \delta \quad (2.5)$$

$$c^2 B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a^2 A \left(\frac{12}{h^2} \varphi + \frac{6}{h} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad B = 1 + \frac{3}{5} \delta$$

Частотное уравнение для тех же граничных условий будет

$$\omega^4 - \omega^2 \left[A(1 + \xi^2) + B\delta\xi^2 \right] + AB\delta\xi^4 = 0 \quad (2.6)$$

В табл. 3 приведены значения Ω для некоторых ξ и δ для балки. Для каждой ξ в первых строках помещены частоты инерции поворота, а во вторых — изгибные. Для последних в каждой клетке первые числа получены по (2.6), а во вторые — по классической теории.

В отличие от предыдущего случая здесь и сдвиговые частоты чувствительны к неоднородности.

Таблица 3

$\xi \backslash \delta$	-1	0	1	10	n
1/5	0.8382	1.057	1.229	2.246	0
	0.3425	0.5348	0.6723	1.387	1
	0.3578	0.5657	0.7155	1.497	
1/10	0.8254	1.015	1.174	2.125	0
	0.8849	1.393	1.752	3.665	2
	0.8944	1.414	1.788	3.742	

Рассматривая приведенные таблицы, можно заключить, что даже при существенной неоднородности для тонких пластин можно пользоваться классической теорией (для $\xi = 0.1$ разница между

частотами, вычисленная по классической и по уточненной теориях для первой при $\delta = 1$, а для второй при $\delta = 10$, отличаются не более 2%)

3. Теперь рассмотрим движение пластинки, для которой неоднородность только продольная. Тогда уравнениями движения будут:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[G_0(x) \left(\frac{2}{h} \varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{E_0(x)}{1-\nu^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = G_0(x) \left(\frac{12}{h^2} \varphi + \frac{6}{h} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Для свободно опертой пластинки решение (3.1) будем искать, как

$$w = e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \lambda_m x, \quad \varphi = e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \lambda_m x \quad (3.2)$$

Тогда, представляя известную безразмерную функцию $f(x)$ в виде ряда

$$E_0 = \bar{E}_0 f(x), \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \lambda_k x, \quad G_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu)} \quad (3.3)$$

для неизвестных w_m и φ_m получим бесконечную систему однородных алгебраических уравнений. Из условия разрешимости последней определяются частоты. Вот эта система:

$$\begin{aligned} a_0 \varphi_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (2\varphi_0 + \varphi_n + n\xi \sqrt{3} w_n) &= \Omega^2 \varphi_0 \\ \sum_{\substack{n=1 \\ m \neq n}}^{\infty} m\xi (a_{m-n} + a_{m+n}) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \varphi_n + n\xi w_n \right) &+ (2a_0 + a_{2m}) m\xi \times \\ \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \varphi_m + m\xi w_m \right) - 2\Omega^2 w_m &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \{ [a_{m-n} (1 + A_{mn}) + a_{m+n} (1 - A_{mn})] \varphi_n + \sqrt{3} (a_{m-n} + a_{m+n}) \xi m w_n \} &+ \\ + [2a_0 (1 + A_{mm}) + a_{2m} (1 - A_{mm}) - 2\Omega^2] \varphi_m + \sqrt{3} (2a_0 + a_{2m}) \xi m w_m &= 0 \\ A_{mn} = \frac{2}{1-\nu} m n \xi^2 & \end{aligned}$$

В качестве примеров изучены следующие случаи неоднородности:

- а) $f(x) = a_0 + a_m \cos \lambda_m x$, $m = 1, 2, \dots$
 б) $f(x) = a + b \frac{x}{l}$, $a_0 = a + \frac{b}{2}$, $a_k = \frac{2b}{k^2 \pi^2} [(-1)^k - 1]$ (3.5)
 в) $f(x) = A e^{\frac{\gamma x}{l}}$, $a_0 = \frac{A}{\gamma} (e^\gamma - 1)$, $a_k = \frac{A \gamma}{\gamma^2 + k^2 \pi^2} [(-1)^k e^\gamma - 1]$

Для выяснения вклада неоднородности на значения частот, а также вопроса применимости классической теории эти же задачи были изучены и в классической постановке.

Тогда вместо (3.4) имеем

$$[(2a_0 - a_{2m}) m^2 \xi^2 - \Omega^2 (1 - \nu)] w_m + \sum_{\substack{n=1 \\ m \neq n}}^{\infty} (a_{m-n} - a_{m+n}) m^2 n^2 \xi^4 w_n = 0 \quad (3.6)$$

Можно показать [4], что в общих предположениях относительно $f(x)$ детерминант системы (3.6) нормальный [5]. Для системы (3.4) сходимость процесса определения собственных значений показана численно.

В табл. 4 размещены значения Ω ($\nu = 0.3$) для трех случаев в (3.5) при различных m и α $\left(\alpha = \frac{a_m}{a_0}, \frac{b}{a}, \gamma\right)$ и вычисленные по (3.4) и (3.6)

($\alpha = 0$ соответствует однородной пластинке). И здесь видно, что поправка уточненной теории для приведенных неоднородностей, в общем, имеет почти тот же порядок, что и для однородной пластинки.

4. В пп.2,3 предполагалась неоднородность детерминированной. Однако, если она случайная функция от координат и заданы ее вероятные характеристики, то по известным формулам преобразований [6] можно определить эти же характеристики и для частот.

Таблица 4

ξ	m α	1			2			5			$\alpha = 0$	n
		a	b	c	a	b	c	a	b	c		
1/5		0.652	0.822	0.877	0.558	0.939	1.164	0.629	1.214	3.144	0.676	1
		0.607	0.766	0.819	0.532	0.874	1.088	0.587	1.127	2.964	0.630	
1/10		1.629	2.055	2.194	1.397	2.347	2.909	1.573	3.035	7.861	1.961	2
		1.599	2.016	2.154	1.379	2.303	2.857	1.544	2.975	7.738	1.659	
1/15		7.243	9.133	9.751	6.210	10.43	12.93	6.994	13.49	34.94	7.524	3
		7.181	9.055	9.670	6.173	10.34	12.82	6.936	13.36	34.70	7.476	

Для примеров типа п.2 это очень просто, а для продольной неоднородности по п.3, если, например, предполагать, что упругий коэффициент является стационарной функцией от x , то в разложениях типа (3.3) случайными окажутся коэффициенты a_k с известными вероятностными характеристиками. Тогда, хотя бы принципиально, можно определить данные для частот. Практическую реализацию лучше осуществить, довольствуясь приближенными формулами для частот. Однако, здесь нас интересует такой вопрос - при заданных a_k как ведут себя частоты, определенные по классической и по уточненной постановках? Поэтому будем изучать простой случай и простой закон функции распределения случайных величин. Возьмем случай 1 из (3.5) при $m = 2$. Тогда основная изгибная частота в предположении малости ξ^2 по сравнению с единицей будет

$$\bar{\Omega} = (a_0 - 0.5a_2) \left(1 - \frac{2}{1-\nu} \xi^2 \frac{a_0 - 0.5a_2}{a_0 + 0.5a_2} \right), \quad \bar{\Omega} = \frac{1-\nu}{2\xi^4} \Omega^2 \quad (4.1)$$

В классической постановке второй член во второй скобке отсутствует.

Пусть случайной величиной окажется только a_0 и пусть для нее верен закон равномерного распределения с предельными значениями - $a_0^{(1)}$ и $a_0^{(2)}$. Тогда плотность вероятности $\bar{\Omega}$ будет

$$F(\bar{\Omega}) = \frac{1}{a_0^{(2)} - a_0^{(1)}} \left[1 + \frac{2}{1-\nu} \xi^2 \frac{\bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 2a_2)}{(\bar{\Omega} + a_2)^2} \right] \quad (4.2)$$

Если вопрос поставить следующим образом, имеем средние значения частот ($\langle \bar{\Omega} \rangle$), определенные по классической и по

уточненной теориям (с средним значением $a_0 = \frac{a_0^{(1)} + a_0^{(2)}}{2}$).

Какова вероятность, чтобы каждая из этих частот находилась в интервале $\pm \Delta(\langle \bar{\Omega} \rangle)$ от соответствующих средних своих значений?

Так как

$$P(\bar{\Omega}_1 < \bar{\Omega} < \bar{\Omega}_2) = \frac{\bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1}{a_0^{(2)} - a_0^{(1)}} \left\{ 1 + \frac{2}{1-\nu} \xi^2 \left[1 - \frac{a_2^2}{(\bar{\Omega}_1 + a_2)(\bar{\Omega}_2 + a_2)} \right] \right\} \quad (4.3)$$

то понятно, что вероятность для частот, определенных по уточненной теории, будет больше, чем по классической.

5. Процедура определения частот по заданной неоднородности (п.3) можно использовать также для решения обратной задачи - по заданным частотам определить неоднородность. Следует отметить, однако, что в общем случае это невозможно. Дело в том, что при определении m частот, например из (3.6) присутствуют $2m+1$ коэффициентов a_k . Так что, при решении обратной задачи для определения $2m+1$ коэффициентов имеем всего m уравнений. Другое дело, если известен вид неоднородности, но неизвестны необходимые параметры, характеризующие ее. Для второго примера (3.5), когда неизвестными являются величины a и b , зная две частоты $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2$, легко получить их приближенные значения

$$a + \frac{b}{2} = \frac{\bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}_2}{17}, \quad b = \frac{9\pi^2}{64} \left[\bar{\Omega}_1^2 - \frac{(17\bar{\Omega}_1 - 16)(\bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}_2)}{17} \right]^{1/2} \quad (5.1)$$

Выполнение работы поддерживалось фирмой "Анушик". Основная часть вычислительной работы проведена Г.З.Геворкяном. Им приношу благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян А.А. Об устойчивости упругой балки при продольном ударе.- Докл. АН АрмССР, 1969, т.49, №3, с.124-130.
2. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. - М.: Изд.-во МГУ, 1976.
3. Мовсисян А.А. К термовязкоупругой устойчивости пластин из композитов.-Мат. Всес. н. сем. "Актуальные проблемы неоднородной механики". Ереван, 1991, с.180-186.
4. Мовсисян А.А. К определению частот неоднородной балки.-Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т.49, №4, с.19-28.
5. Канторович Л.В. и Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 695 с.
6. Вейгцель Е.С. Теория вероятностей.- М.: Наука, 1969. 576 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
21.12.1995

ВОЛНЫ ТИПА РЭЛЕЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ КРУГОВОЙ ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Белубекян М.В., Гулгазарян Г.Р., Саакян А.В.

Մ.Վ. Բելուբեկյան, Գ.Ր. Դուլգազարյան, Ա.Վ. Սահակյան
Ռևելյի տիպի ալիքները կիսաանվերջ փակ շրջանային զրանային
բաղանջում

Աշխատանքում հետազոտվում է հարթ (ոչ ծածան), օւելիյի ալիքի ալիքների տարածման հարթը, որը
մարում է կիսաանվերջ շրջանային զրանային բաղանջի ազատ ծայրից ծնիչի աղղղությամբ:

Հետազոտումը կատարվում է ճկուն իզոտրոպ կիսաանվերջ բաղանջի համար, հաշվի առնելով
ծածան լոշտոտյան առկայությունը:

Ասայցուցվում է, որ բաղանջի ցանկացած հարաբերական հաստոտյան և երկայնից ծնծ ալիքային
բլիի դեպքում զոյություն ունի փոփային արագություն ոչ չափողական η բնութագրիչ, որը բավարարում է

$0 < \eta < 1$ անհավասարությունը:

M.V. Belubekyan, G.R. Gulgazaryan, A.V. Sahakyan
The waves of rayleigh type in semi - infinite closed circular
cylindrical shells

В работе исследуется вопрос распространения плоской (не изгибной) волны гина
Рэлея, затухающей от свободного торца полубесконечной круговой цилиндрической
оболочки вдоль направления ее образующих. Исследование проводится для изотропной
упругой полубесконечной оболочки с учетом изгибной жесткости.

Доказывается, что при любой относительной толщине оболочки и числе волн больше
двух, существует безразмерная характеристика фазовой скорости η , удовлетворяющая
неравенству $0 < \eta < 1$.

1.Моментная задача. В качестве исходных уравнений возьмем
следующие уравнения, которые соответствуют технической теории
цилиндрических оболочек [1]:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - \frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\sigma}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} &= \lambda u_1 \\ -\frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} - \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \beta} &= \lambda u_2 \\ \mu^4 \Delta^2 u_3 - \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{\sigma}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{u_3}{R^2} &= \lambda u_3 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь R - радиус направляющей окружности, u_1, u_2, u_3 - проекции
смещения точки срединной поверхности, α и β - ортогональные
координаты точки срединной поверхности

$$\lambda = (1 - \sigma^2) \omega^2 \rho / E \quad (1.2)$$

где ρ - удельная плотность материала оболочки, E - модуль Юнга, σ -
коэффициент Пуассона, ω - угловая частота, $\mu^4 = h^2 / 12$ (h -

относительная толщина оболочки], Δ - оператор Лапласа, $\Delta^2 = \Delta\Delta$ - бигармонический оператор.

Для дальнейшей цели удобно систему (1.1) заменить системой уравнений [2]

$$\begin{aligned} \left(\Delta^2 + \frac{3-\sigma}{1-\sigma} \lambda \Delta + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} \right) u_1 &= -\frac{1}{R} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \frac{\sigma}{R} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha^3} + \frac{2\lambda \sigma}{(1-\sigma)R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} \\ \left(\Delta^2 + \frac{3-\sigma}{1-\sigma} \lambda \Delta + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} \right) u_2 &= \frac{2+\sigma}{R} \frac{\partial^3 u_1}{\partial \beta \partial \alpha^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + \frac{2\lambda}{(1-\sigma)R} \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \\ u_1 \left(\Delta^2 \Delta^2 u_3 + \frac{3-\sigma}{1-\sigma} \lambda \Delta \Delta^2 u_3 + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} \Delta^2 u_3 \right) - \\ - \lambda \Delta^2 u_1 - \frac{3-\sigma}{1-\sigma} \lambda^2 \Delta u_3 + \frac{(1-\sigma^2)}{R^2} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^4} + \\ + \frac{\lambda}{R^2} \Delta u_1 + \frac{2(1+\sigma)}{R^2} \lambda \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} \left(\frac{1}{R^2} - \lambda \right) u_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Граничные условия на свободном торце цилиндра принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \sigma \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \right) \Big|_{\alpha=0} &= 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \sigma \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_1}{R} \right) \Big|_{\alpha=0} = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + 4\mu^4 \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} &= 0 \\ \frac{\partial^3 u_1}{\partial \alpha^3} + (2-\sigma) \frac{\partial^3 u_1}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \frac{2-\sigma}{R} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} \Big|_{\alpha=0} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Решение системы (1.3) ищем в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= u \exp\left(\frac{m}{R} \chi \alpha\right) \cos \frac{m}{R} \beta \\ u_2 &= v \exp\left(\frac{m}{R} \chi \alpha\right) \sin \frac{m}{R} \beta \\ u_3 &= \exp\left(\frac{m}{R} \chi \alpha\right) \cos \frac{m}{R} \beta \end{aligned} \quad (1.5)$$

Подставим (1.5) в (1.3). Из первых двух уравнений системы (1.3) получим:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{m(\chi^2 - 1)^2 + (3-\sigma)/2 \eta^2(\chi^2 - 1) + (1-\sigma)/2 \eta^4} \chi(\sigma \chi^2 + 1 + \sigma \eta^2) \\ v &= -\frac{1}{m(\chi^2 - 1)^2 + (3-\sigma)/2 \eta^2(\chi^2 - 1) + (1-\sigma)/2 \eta^4} (2+\sigma)\chi^2 - 1 + \eta^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\eta^2 = \frac{2}{1-\sigma} \frac{\lambda R^2}{m^2} \quad (1.7)$$

Из третьего уравнения системы (1.3), учитывая, что (1.5) является нетривиальным решением, получим следующее характеристическое уравнение:

$$\chi^4 - \gamma_1 \chi^3 + \gamma_2 \chi^2 - \gamma_3 \chi + \gamma_4 = 0 \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 4 - (3 - \sigma)/2\eta^2 \\ \gamma_2 &= 6 + \frac{2(1 + \sigma)A}{m^2} - \left(A + \frac{3}{2}(3 - \sigma)\right)\eta^2 + \frac{1 - \sigma}{2}\eta^4 \\ \gamma_3 &= 4 - \left(2A + \frac{3 + 2\sigma}{m^2}A + \frac{3}{2}(3 - \sigma)\right)\eta^2 + \left(\frac{3 - \sigma}{2}A + 1 - \sigma\right)\eta^4 \\ \gamma_4 &= (1 - \eta^2)\left(1 - \left(\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)A + \frac{1 - \sigma}{2}\right)\eta^2 + \frac{1 - \sigma}{2}A\eta^4\right) \\ A &= (1 - \sigma)/(2a^2 m^2), \quad a^2 = \mu^4/R^2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Исходя из критерия Гурвица, можно доказать, что при любом a^2 , σ и $|m| \geq 2$ существует $\eta = \eta_0$ такое, что $0 < \eta_0 < 1$ и для всех η , удовлетворяющих неравенствам,

$$0 \leq \eta \leq \eta_0 \quad (1.10)$$

все четыре χ^2 - корни уравнения (1.8), имеют положительные действительные части. Вне условий (1.10) корни уравнения (1.8) этим свойством не обладают.

Последнее высказывание эквивалентно тому, что система уравнений (1.1) при условии (1.10) имеет четыре решения вида (1.5), которые затухают при $\alpha \rightarrow +\infty$.

Для определенности предположим, что $m > 0$ и χ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) являются корнями уравнения (1.8) с отрицательными действительными частями. Пусть

$$y^{(j)}(\eta, \alpha, \beta) = (u_j^1, u_j^2, u_j^3), \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (1.11)$$

являются решениями системы (1.1) вида (1.5) при $\chi = \chi_j$, $j = 1, 2, 3, 4$ соответственно.

Решение задачи (1.1), (1.4) ищем в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{j=1}^4 w_j u_1^j = \sum_{j=1}^4 w_j u_j \exp\left(\frac{m}{R} \chi_j \alpha\right) \cos \frac{m}{R} \beta \\ u_2 &= \sum_{j=1}^4 w_j u_2^j = \sum_{j=1}^4 w_j v_j \exp\left(\frac{m}{R} \chi_j \alpha\right) \sin \frac{m}{R} \beta \\ u_3 &= \sum_{j=1}^4 w_j u_3^j = \sum_{j=1}^4 w_j \exp\left(\frac{m}{R} \chi_j \alpha\right) \cos \frac{m}{R} \beta \end{aligned} \quad (1.12)$$

где u_j и v_j - значения u и v из (1.6) при $\chi = \chi_j$ соответственно.

Подставляя (1.12) в (1.4), приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \left(\frac{m}{R} (\chi_j^2 - \sigma) + \frac{\sigma}{R} v_j \right) w_j &= 0, \quad \sum_{j=1}^4 \left(\frac{m}{R} \chi_j u_j + \frac{\sigma m}{R} v_j - \frac{\sigma}{R} \right) w_j = 0 \\ \sum_{j=1}^4 \left(-u_j + \chi_j v_j + 4a^2 (-m \chi_j + \chi_j v_j) \right) w_j &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\sum_{j=1}^4 \left(\frac{m}{R} \chi_j^2 - (2-\sigma) \frac{m}{R} \chi_j + \frac{2-\sigma}{R} \chi_j v_j \right) w_j = 0$$

Подставим значения u_j и v_j , $j=1,2,3,4$ в (1.13), получим

$$\sum_{j=1}^4 \frac{R_j}{c_j} w_j = 0, \quad i=1,2,3,4 \quad (1.14)$$

где

$$\begin{aligned} R_{1j} &= (\chi_j^2 - \sigma) c_j - \sigma b_j / m^2, \quad R_{2j} = \chi_j^2 a_j - \sigma b_j - \sigma c_j, \\ R_{3j} &= \chi_j (4a^2 c_j + a_j / m^2 + (1+4a^2) b_j / m^2) \\ R_{4j} &= \chi_j ((\chi_j^2 - 2 + \sigma) c_j - (2-\sigma) b_j / m^2) \\ a_j &= 1 + \sigma \eta^2 + \sigma \chi_j^2, \quad b_j = (2+\sigma) \chi_j^2 + \eta^2 - 1 \\ c_j &= (\chi_j^2 - 1)^2 + (3-\sigma)/2 \eta^2 (\chi_j^2 - 1) + (1-\sigma)/2 \eta^4 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Чтобы система (1.14) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель обратился в нуль. Отсюда приходим к уравнению для определения η

$$D = \left| R_{ij} \right|_{i,j=1}^4 = 0 \quad (1.16)$$

Проводя элементарные действия над столбцами определителя, получим

$$D = k \left| m_{ij} \right|_{i,j=1}^4 \quad (1.17)$$

где

$$\begin{aligned} k &= (\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)(\chi_1 - \chi_4)(\chi_2 - \chi_3)(\chi_2 - \chi_4)(\chi_3 - \chi_4) \\ m_{11} &= R_{11}, \quad m_{12} = (\chi_1 + \chi_2)(\chi_1^4 + \chi_1^3 \chi_2^2 + \chi_2^4 + ((3-\sigma)/2 \eta^2 - \\ &- 2 - \sigma)(\chi_1^2 + \chi_2^2) + d_1), \quad m_{13} = \gamma_1^2 - \chi_4^2 \gamma_1 - \gamma_2 + (\gamma_1 - \chi_4^2) \cdot \\ &\times (s_2 - \chi_4 s_1 + \chi_4^2) + ((3-\sigma)/2 \eta^2 - 2 - \sigma)(\gamma_1 + s_2 - \chi_4 s_1) + d_1, \\ m_{14} &= ((3-\sigma)/2 \eta^2 - 2 - \sigma + \gamma_1) s_1 + s_3, \quad m_{21} = R_{21}, \\ m_{22} &= (1 - \sigma^2 - \sigma(1-\sigma)/2 \eta^2)(\chi_1 + \chi_2), \\ m_{23} &= 1 - \sigma^2 - \sigma(1-\sigma)/2 \eta^2, \\ m_{24} &= 0, \quad m_{31} = R_{31}, \quad m_{32} = 4a^2(\chi_1^4 + \chi_1^3 \chi_2 + \chi_1^2 \chi_2^2 + \\ &+ \chi_1 \chi_2^3 + \chi_2^4) + d_2(\chi_1^2 + \chi_1 \chi_2 + \chi_2^2) + d_3, \quad m_{33} = (4a^2(\gamma_1 - \chi_4^2) + \\ &+ d_2)(s_1 - \chi_4) + 4a^2 \chi_1 \chi_2 \chi_3, \quad m_{34} = 4a^2(\gamma_1 + s_2) + d_2, \\ m_{41} &= R_{41}, \quad m_{42} = \chi_1^6 + \chi_1^5 \chi_2 + \chi_1^4 \chi_2^2 + \chi_1^3 \chi_2^3 + \chi_1^2 \chi_2^4 + \chi_1 \chi_2^5 + \chi_2^6 + \\ &+ ((3-\sigma)/2 \eta^2 - 4 + \sigma)(\chi_1^4 + \chi_1^3 \chi_2 + \chi_1^2 \chi_2^2 + \chi_1 \chi_2^3 + \chi_2^4) + \\ &+ d_4(\chi_1^2 + \chi_1 \chi_2 + \chi_2^2) + d_5, \quad m_{43} = (\gamma_1^2 - \gamma_1 \chi_4^2 - \gamma_2 + d_4 + \\ &+ (\gamma_1 - \chi_4^2)((3-\sigma)/2 \eta^2 - 4 + \sigma))(s_1 - \chi_4) + \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned}
& + (\gamma_1 - \chi_4^2 + (3 - \sigma)/2 \eta^2 - 4 + \sigma) \chi_1 \chi_2 \chi_3, \quad m_{44} = \gamma_1^2 + d_1 - \\
& - \gamma_2 + \sqrt{\gamma_4} + \gamma_1 ((3 - \sigma)/2 \eta^2 - 4 + \sigma) + (\gamma_1 + (3 - \sigma)/2 \eta^2 - 4 + \sigma) s_2, \\
& s_1 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4, \\
& s_2 = \chi_1 \chi_2 + \chi_1 \chi_3 + \chi_1 \chi_4 + \chi_2 \chi_3 + \chi_2 \chi_4 + \chi_3 \chi_4, \\
& s_3 = \chi_1 \chi_2 \chi_3 + \chi_1 \chi_2 \chi_4 + \chi_1 \chi_3 \chi_4 + \chi_2 \chi_3 \chi_4, \\
& d_1 = 1 + 2\sigma - (2 + \sigma)\sigma/m^2 - (3 - \sigma)(1 + \sigma)/2 \eta^2 + (1 - \sigma)/2 \eta^2 \\
& d_2 = 4a^2((3 - \sigma)/2 \eta^2 - 2) + ((2 + \sigma)(1 + 4a^2) + \sigma)/m^2 \\
& d_3 = 4a^2(1 - (3 - \sigma)/2 \eta^2 + (1 - \sigma)/2 \eta^4) + \\
& + (1 + \sigma \eta^2 + (1 + 4a^2)(\eta^2 - 1))/m^2, \\
& d_4 = 5 - 2\sigma - (3 - \sigma)^2/2 \eta^2 + (1 - \sigma)/2 \eta^4 - (4 - \sigma^2)/m^2, \\
& d_5 = -(2 - \sigma)(1 - (3 - \sigma)/2 \eta^2 + (1 - \sigma)/2 \eta^4 - (2 - \sigma)(\eta^2 - 1))/m^2
\end{aligned}$$

Заметим, что в двух значениях η , удовлетворяющих условию (1.10), уравнение (1.8) имеет двухкратные корни (этот факт устанавливается численным анализом корней уравнения (1.8)).

Ясно, что в этих значениях η , определитель D аннулируется и не может отвечать на вопрос: являются ли они характеристиками фазовой скорости или нет.

Для определенности предположим, что $\chi_1 = \chi_2$ при $\eta = \eta_1$. Тогда векторы $y^{(1)}(\eta_1, \alpha, \beta)$ и $y^{(2)}(\eta_1, \alpha, \beta)$ из (1.11) сливаются. Можно, однако, вместо решений $y^{(1)}(\eta, \alpha, \beta)$ и $y^{(2)}(\eta, \alpha, \beta)$ ввести пару решений $z^{(1)}(\eta, \alpha, \beta)$ и $z^{(2)}(\eta, \alpha, \beta)$ системы (1.1) по формулам

$$z^{(1)} = y^{(1)}, \quad z^{(2)} = (y^{(2)} - y^{(1)})/(\chi_2 - \chi_1) \quad (1.19)$$

которые также убывают при $\alpha \rightarrow +\infty$. Легко проверить, что решения (1.19) остаются линейно-независимыми и при $\eta = \eta_1$.

Решение задачи (1.1), (1.4) ищем в виде

$$y = w_1 z^{(1)} + w_2 z^{(2)} + w_3 y^{(3)} + w_4 y^{(4)} \quad (1.20)$$

Учитывая граничные условия (1.4), мы приходим к системе уравнений

$$\frac{R_{i1}}{c_1} w_1 + \left(\frac{R_{i2}}{c_2} - \frac{R_{i1}}{c_1} \right) \frac{w_2}{\chi_2 - \chi_1} + \frac{R_{i3}}{c_3} w_3 + \frac{R_{i4}}{c_4} w_4 = 0 \quad (1.21)$$

где $c_j, R_j, j = 1, 2, 3, 4$ определяются формулой (1.15).

Легко заметить, что определитель системы (1.21) можно преобразовать к виду

$$D_1 = (c_1 c_2 c_3 c_4)^{-1} k_1 |m_{ij}|_{i,j=1,2,3,4}^4 \quad (1.22)$$

где

$$k_1 = (\chi_1 - \chi_3)(\chi_1 - \chi_4)(\chi_2 - \chi_3)(\chi_2 - \chi_4)(\chi_3 - \chi_4)$$

который при $\eta = \eta_1$ не аннулируется. Таким образом, дисперсионным уравнением задачи (1.1), (1.4) является уравнение

$$|m_{j,j}|_{j=1,j-1}^2 = 0 \quad (1.23)$$

где элементы $m_{j,j}$ определяются формулами (1.18).

Замечание 1. Так как в выражениях (1.9), (1.15) m входит в четные степени, а замена χ_j на $-\chi_j$, $j=1,2,3,4$ не отражается на величине

D из (1.16), то η не зависит от знаков m и от однократных знаков действительных частей χ_j ($j=1,2,3,4$).

Замечание 2. Численный анализ показывает, что уравнение (1.23) при условии (1.10) имеет только один корень.

2. Безмоментная задача. Подставим в (1.1) и (1.4) $\mu = 0$. Обращаем первое и четвертое условия из (1.4). Так возникает вырожденная (безмоментная) задача:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - \frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\sigma}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} &= \lambda u_1 \\ -\frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} - \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \beta} &= \lambda u_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{\sigma}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{u_3}{R} &= \lambda u_3 \\ \left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right|_{\alpha=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \sigma \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \right|_{\alpha=0} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь используем систему (1.3), полагая $\mu = 0$. Решение системы (2.1) ищем в виде (1.5). Тогда, из третьего уравнения системы (1.3) (при $\mu = 0$) получим следующее характеристическое уравнение:

$$g_1 \chi^4 + g_2 \chi^2 + g_3 = 0 \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{2(1+\sigma)}{m^2} - \eta^2, \quad g_2 = \left(2 + \frac{3+2\sigma}{m^2} \right) \eta^2 - \frac{3-\sigma}{2} \eta^4 \\ g_3 &= (\eta^2 - 1) \left(\left(1 + \frac{1}{m^2} \right) \eta^2 - \frac{1-\sigma}{2} \eta^4 \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Заметим, что уравнение (2.3) имеет два корня с отрицательными действительными частями только тогда, когда $0 < \eta < 1$ и $|m| \geq 2$.

Пусть, например, χ^1, χ^2 - корни уравнения (2.3) с отрицательными действительными частями и $m > 0$. Решение задачи (2.1), (2.2) ищем в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{j=1}^2 w^j u^j \exp\left(\frac{m}{R} \chi^j \alpha\right) \cos \frac{m}{R} \beta \\ u_2 &= \sum_{j=1}^2 w^j v^j \exp\left(\frac{m}{R} \chi^j \alpha\right) \sin \frac{m}{R} \beta \\ u_3 &= \sum_{j=1}^2 w^j \exp\left(\frac{m}{R} \chi^j \alpha\right) \cos \frac{m}{R} \beta \end{aligned} \quad (2.5)$$

где u' и v' - значения u и v из (1.6) при $\chi = \chi'$. Используя граничные условия (2.2), приходим к дисперсионному уравнению

$$\eta^6 - 2 \left(4 + \frac{2 + 4\sigma + \sigma^2}{1 + \sigma} \frac{1}{m^2} \right)^2 \eta^4 + 4 \left(1 + \frac{1}{m^2} \right) \times$$

$$\times \left(4 + 2\sigma + \frac{1 + 2\sigma}{m^2} \right) \eta^2 - 8(1 + \sigma) \left(1 + \frac{1}{m^2} \right)^2 = 0 \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) эквивалентно уравнениям (11) из [3] и (24) из [4]. Заметим, что вид уравнения (2.6) инвариантен относительно изменения знака m и одноименных знаков действительных частей χ^1 и χ^2 .

В табл. 1 приведены значения η в зависимости от m и a^2 при $\sigma = 1/3$.

Таблица 1

m	η		
	$a^2 = 1/4800$	$a^2 = 1/120000$	$a^2 = 0$ (безм. задача)
1	2	3	4
2	0,04461	0,00894	0,97709
3	0,07091	0,01421	0,94729
4	0,09669	0,01939	0,93558
5	0,12211	0,02448	0,92990
6	0,14741	0,02955	0,92675
7	0,17259	0,03457	0,92483
8	0,19774	0,03962	0,92357
9	0,22282	0,04461	0,92270
10	0,24788	0,04970	0,92208
11	0,27295	0,05468	0,92162
12	0,29782	0,05958	0,92165

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.А., Лидский В.Б., Товегик М.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек.-М.: Наука, 1979. 383с.
2. Гулгасарян Г.Р. Приближенные частоты собственных колебаний искривленной цилиндрической оболочки.-Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т.49, №1, с.61-70.
3. Багдасарян Р.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке.- Волновые задачи механики. Нижний Новгород, 1992, 153с.
4. Гулгасарян Г.Р., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке.-Изв. НАН Армении, Механика, 1997, т.50, №1, с.27-33

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
29.03.1996

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОМ НЕОДНОРОДНОМ
АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ВЫЗВАННЫХ
ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ ДАВЛЕНИЯ
Саакян С.Г.

Սահակյան Ս.Գ.

Դճշման կիսաշին աղբյուրից առաջացած ալիքների տարածումը առաձգական սեղանադաս
ակուստիկական կիսառաքածությունում

Ակուստիկական կիսառաքածության համար, որի մեխանիկական հատկությունները փոխվում են խորությունից կախված ցածրալին օրենքով, լուծվում է կիսաշին աղբյուրից ճնշման ալիքների տարածման խնդիրը

Խնդրի ճշգրիտ լուծումը ստացվում է ինտեգրող ձևափոխությունների օգնությամբ
Հետադարձվում են ընկնող, անդրադարձող, ինչպես նաև, կրճատման ճնշման ալիքների հատկությունները:

Sahakian S.G.

The propagation of waves in the elastic inhomogeneous acoustic halfspace, induced by a point source of pressure.

В работе рассматривается задача о распространении волны давления в упругом неоднородном акустическом полупространстве от внутреннего точечного источника давления. Предполагается, что параметры, которые характеризуют свойства акустической среды, зависят от глубины по экспоненциальному закону.

Решение задачи в изображении построено методом интегральных преобразований. Предложен новый подход для обращения решения в изображениях методом Каньра-Хуа [1], который дает возможность получить точное аналитическое решение задачи в виде эффективных формул.

Приведен анализ полученного решения. Далее исследовано поведение волны вблизи плоской границы неоднородной акустической среды и показано, что для этой неоднородной среды происходит полное внутреннее отражение падающих волн. Известно [2], что для полного внутреннего отражения характерны волны с комплексным эйковалом, называемые неоднородными. Получено, что в этом случае неоднородные волны могут быть описаны в рамках лучевого метода, как и случае полного внутреннего отражения волн от плоской границы раздела двух однородных упругих сред [3].

Исследованы также установившиеся движения неоднородного акустического полупространства и получено условие, при котором появляются стоячие волны.

1. Формулировка задачи и ее решение в изображениях. В рамках линейной теории упругости распространение волн в упругой неоднородной акустической среде с учетом массовых сил описывается уравнением [4]

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \text{grad}(\lambda \text{div} \vec{u}) \quad (1.1)$$

где $\vec{u}$ – вектор перемещения, $\vec{F}$ – плотность массовых сил, λ – коэффициент сжатия и ρ – плотность среды.

Определив давление p по формуле

$$p = -\lambda \text{div} \vec{u} \quad (1.2)$$

и применив операцию дивергенции к обеим частям уравнения (1.1), получим

$$\Delta p - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \operatorname{grad} p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho \operatorname{div} \vec{F} \quad (1.3)$$

где Δ - оператор Лапласа, $c = \sqrt{\lambda/\rho}$ - скорость распространения волн давления в акустической среде.

Следует отметить, что по формуле (1.2) давление определяется с точностью до слагаемого градиента гармонической функции. Это слагаемое определим возмущенным состоянием акустической среды так, что в выбранный начальный момент времени давление в ней равнялось нулю.

Уравнение (1.3) в цилиндрической системе координат (r, θ, z) при условии, что коэффициент сжатия λ , плотность ρ среды и $\operatorname{div} \vec{F}$ заданы функциями

$$\lambda = \lambda_0 \exp(\alpha^2 z); \quad \rho = \rho_0 \exp(\alpha^2 z) \quad (1.4)$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = A_0 J_0(\alpha c_0 t) \delta(r) \frac{\delta(r)}{r} \delta(z - z_0) \quad (1.5)$$

имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \alpha^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} =$$

$$= -2p_0^* \exp(\alpha^2 z) J_0(\alpha c_0 t) \delta(r) \frac{\delta(r)}{r} \delta(z - z_0) \quad (1.6)$$

где $\lambda_0, \rho_0, \alpha, c_0 = \sqrt{\lambda_0/\rho_0}$, $p_0^* = \rho_0 A_0$ - известные постоянные, $\delta(z)$ - дельта-функция Дирака, $H(t)$ - функция Хевисайда, $J_n(z)$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Решение уравнения (1.6) в области $z > 0$ ищется при условиях:

$$p(r, z, t)|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial p(r, z, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0; \quad p(r, z, t)|_{r=0} = 0 \quad (1.7)$$

Решение уравнения (1.6) находим методом интегральных преобразований. Примем, что

$$\bar{p}(r, z, s) = \int_0^\infty p(r, z, t) \cdot e^{-st} dt \quad (1.8)$$

$$\hat{p}(k, z, s) = \int_0^\infty \bar{p}(r, z, s) \cdot J_0(kr) r dr \quad (1.9)$$

$$\bar{p}(r, z, s) = \int_0^\infty \hat{p}(k, z, s) \cdot J_0(kr) k dk \quad (1.10)$$

В изображениях уравнение (1.6) будет

$$\frac{d^2 \hat{p}}{dz^2} - m^2 \hat{p} = - \frac{2p_0^* \exp(\alpha^2 z) \delta(z - z_0)}{c_0 \sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2}} \quad (1.11)$$

где

$$m = \sqrt{k^2 + (s/c_0)^2 + \alpha^2} \quad (1.12)$$

Ветвь радикала m определяется условием $m > 0$ при $k > 0, s > 0$.

Уравнение (1.10) имеет фундаментальную систему решений

$$\hat{p}_1 = \text{sh}(zm), \quad \hat{p}_2 = \exp(-zm) \quad (1.13)$$

Пользуясь фундаментальной системой решений (1.13) и граничных условий

$$\lim_{z \rightarrow 0} \hat{p}(k, z, s) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \hat{p}(k, z, s) = 0 \quad (1.14)$$

построим функцию Грина. Имеем

$$G(z, \xi) = -\frac{1}{m} \begin{cases} \text{sh}(zm) \exp(-\xi m) & \text{при } 0 \leq z < \xi \\ \exp(-zm) \text{sh}(\xi m) & \text{при } \xi \leq z < +\infty \end{cases} \quad (1.15)$$

Тогда решение уравнения (1.11) будет

$$\hat{p}(k, z, s) = -\frac{2p_0^*}{c_0 \sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2}} \int_0^\infty G(z, \xi) \exp(\alpha^2 \xi) \delta(\xi - z_0) d\xi \quad (1.16)$$

Подставив выражение (1.15) в (1.16), получим

$$\begin{aligned} \hat{p}(k, z, s) &= \frac{2p_0^* \exp(\alpha^2 z_0)}{c_0 m \sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2}} \times \\ &\times \begin{cases} \text{sh}(zm) \exp(-z_0 m) & \text{при } 0 \leq z < z_0 \\ \exp(-zm) \text{sh}(z_0 m) & \text{при } z_0 \leq z < +\infty \end{cases} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Окончательно формулу (1.17) напомним в виде

$$\hat{p}(k, z, s) = \frac{p_0^* \exp(\alpha^2 z_0)}{c_0 m \sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2}} \left\{ \exp[-|z - z_0|m] - \exp[-|z + z_0|m] \right\} \quad (1.18)$$

2. Обращение изображений решения. Обращение Ханкеля (1.18) дается формулой (1.10):

$$\bar{p}(r, z, s) = \frac{p_0^* \exp(\alpha^2 z_0)}{c_0 \sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2}} \times \quad (2.1)$$

$$\times \int_0^\infty \frac{1}{m} \left\{ \exp[-|z - z_0|m] - \exp[-|z + z_0|m] \right\} J_0(kr) k dk$$

Подставив в (2.1) интегральное представление Пуассона [5]

$$J_0(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[ikr \cos \varphi] d\varphi \quad (2.2)$$

получим

$$\begin{aligned} \bar{p}(r, z, s) &= \frac{p_0^* \exp(\alpha^2 z_0)}{2\pi c_0 \sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{m} \left\{ \exp[-|z - z_0|m + ikr \cos \varphi] - \right. \\ &\left. - \exp[-|z + z_0|m + ikr \cos \varphi] \right\} k dk d\varphi \end{aligned} \quad (2.3)$$

В двукратном интеграле (2.3) заменим переменные интегрирования k, φ новыми переменными ω, q по формулам

$$k \cos \varphi = \sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2} \omega; \quad k \sin \varphi = \sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2} q \quad (2.4)$$

В результате перехода от полярной системы координат к декартовой получим

$$\bar{p}(r, z, s) = \frac{p_0 \exp(\alpha^2 z_0)}{2\pi c_0 \sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2}} \left\{ \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{m_0} \exp \left[-\sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2} (|z - z_0| m_0 - i\omega r) \right] \times \right. \\ \left. \times d\omega dq + \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \frac{1}{m_0} \exp \left[-\sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2} (|z + z_0| m_0 - i\omega r) \right] d\omega dq \right\} \quad (2.5)$$

где

$$m_0 = \sqrt{\omega^2 + q^2 + 1} \quad (2.6)$$

Сначала находим оригинал изображения Лапласа

$$\bar{g}_j(s) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{m_0} \exp \left[-s(z, m_0 - i\omega r) \right] d\omega dq, \quad j = 1, 2 \quad (2.7)$$

где

$$z_1 = |z - z_0|; \quad z_2 = z + z_0 \quad (2.8)$$

Тогда, оригинал изображения (2.3) получается из соотношения [5]

$$\bar{g}_j \left(\sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2} \right) = g_j(c_0 t) - \alpha \int_0^{c_0 t} g_j \left(\sqrt{(c_0 t)^2 - u^2} \right) J_1(\alpha u) du \quad (2.9)$$

Обращение изображения $\bar{g}_1(s)$ возможно получить методом Каньяра. Обращение $\bar{g}_2(s)$ не представляет трудности и получается простой заменой z_1 на z_2 в оригинале изображения $\bar{g}_1(s)$.

На комплексной плоскости ω рассмотрим линию

$$t = z_1 m_0 - i\omega r \quad (2.10)$$

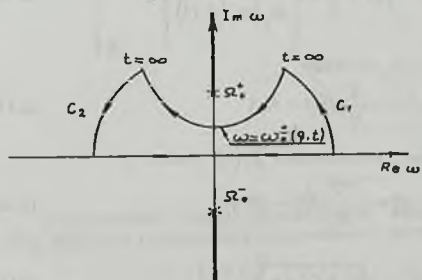
где t принимает только действительные и положительные значения.

Решив уравнение (2.10) относительно ω , получим

$$\omega_q^\pm(q, t) = \left(itr \pm z_1 \sqrt{t^2 - t_q^2} \right) / R_1^2 \quad (2.11)$$

где

$$t_q = R_1 \sqrt{q^2 + 1}; \quad R_1 = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2} \quad (2.12)$$



Фиг. 1

Уравнение (2.12) определяет на плоскости комплексного переменного ω одну ветвь гиперболы с вершиной в точке

$\omega_q = -ir \sqrt{q^2 + 1} / R_1$ и асимптотами $\arg \omega = \pm r / z_1$ при $t \in (t_q, +\infty)$.

Чтобы вычислить внутренний интеграл в формуле (2.7), рассмотрим этот интеграл по замкнутому контуру, состоящему из действительной оси, из ветви гиперболы (2.11) и из дуги C_1 и C_2 окружности с большим радиусом R с центром в начале координат (фиг.1). Ветви гиперболы (2.11) не пересекает внешний разрез, проведенный между точками ветвления $\Omega_0^\pm = \pm i\sqrt{q^2 + 1}$ в плоскости ω , так как $r/R_1 < 1$. Согласно теории вычетов Коши и по лемме Жордана внутренний интеграл (2.7) по действительной оси преобразуется в интеграл по гиперболе (2.11). Окончательно имеем

$$\bar{g}_1(s) = -2 \int_0^{\infty} \int_0^{q_0} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial \omega_0(q, t)}{m_0(\omega(q, t))} \right] \exp(-st) dt dq \quad (2.13)$$

где $\omega_0(q, t) = \omega_0^*(q, t)$.

В двукратном интеграле (2.13) поменяем порядок интегрирования, получим

$$\bar{g}_1(s) = -2 \int_0^{\infty} \left\{ H(t - R_1) v. p. \int_0^{q_0} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial \omega_0(q, t)}{m_0(\omega_0(q, t))} \right] dq e^{-st} \right\} dt \quad (2.14)$$

где

$$q_0 = \sqrt{(t/R_1)^2 - 1} \quad (2.15)$$

Подынтегральная функция в (2.14) терпит разрыв непрерывности при $q = q_0$ и, поэтому, интеграл вычисляется в смысле главного значения по Коши, который указан символом *v. p.* перед знаком интеграла.

Таким образом, в результате удачной замены переменного (2.4) и выбора контура интегрирования (2.5), получается преобразование Лапласа известной функции.

Из (2.14) следует, что оригинал изображения $\bar{g}_1(s)$ будет

$$g_1(t) = -2H(t - R_1) v. p. \int_0^{q_0} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial \omega_0(q, t)}{m_0(\omega_0(q, t))} \right] dq \quad (2.16)$$

Вычисляя интеграл (2.16), получим

$$g_1(t) = -\frac{2}{R_1} H(t - R_1) \quad (2.17)$$

Отсюда, для оригинала изображения $\bar{g}_2(s)$ имеем

$$g_2(t) = -\frac{2}{R_2} H(t - R_2) \quad (2.18)$$

где

$$R_2 = \sqrt{r^2 + (z + z_0)^2} \quad (2.19)$$

Подставив полученные выражения (2.17) и (2.18) в (2.9), после интегрирования получим

$$\bar{g}_j \left(\sqrt{(s/c_0)^2 + \alpha^2} \right) \doteq -\frac{4c_0}{R_j} H(c_0 t - R_j) + \frac{2c_0}{R_j} J_0 \left(\alpha \sqrt{(c_0 t)^2 - R_j^2} \right) \quad (2.20)$$

Окончательно, волны давления в упругом неоднородном акустическом полупространстве, вызванные внутренним точечным источником, определяются формулой:

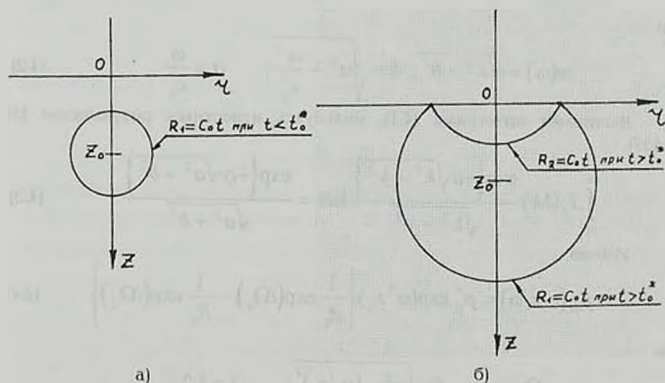
$$p(r, z, t) = \frac{p_0^*}{\pi} \exp(\alpha^2 z_0) \left\{ \frac{1}{R_1} H(c_0 t - R_1) J_0 \times \right. \\ \left. \times \left(\alpha \sqrt{(c_0 t)^2 - R_1^2} \right) - \frac{1}{R_2} H(c_0 t - R_2) J_0 \left(\alpha \sqrt{(c_0 t)^2 - R_2^2} \right) \right\} \quad (2.21)$$

В частности, решение аналогичной задачи для упругого однородного акустического полупространства получается из формулы (2.21), если примем $\alpha = 0$.

3. Исследование решения. Решение (2.21) представляется суммой двух слагаемых. Первое из них определяет падающие волны, фронт которых определяется уравнением

$$r^2 + (z - z_0)^2 = (c_0 t)^2 \quad (3.1)$$

В пространстве (r, θ, z) уравнение (3.1) определяет сферу с радиусом $c_0 t$ и с центром в точке приложения источника давления (фиг.2). Начиная с момента времени $t^* = z_0/c_0$ падающие волны доходят плоской границы полупространства и происходит отражение.



Фиг. 2

Отраженные волны определяются вторым слагаемым формулы (2.21). Фронтот отраженных волн является часть сферы

$$r^2 + (z + z_0)^2 = (c_0 t)^2; \quad z > 0 \quad (3.2)$$

с радиусом $c_0 t$ и с центром в точке, симметричной точке приложения источника давления, относительно плоской границы акустического полупространства (фиг.3). Таким образом, в любой момент времени $t > t^*$ фронт волн давления определяется пересечением двух сферических поверхностей (3.1) и (3.2) при $z > 0$.

Отраженные волны распространяются так, как будто лучи исходят от источника, находящегося в точке $(0, 0, -z_0)$. Это явление связано с полным внутренним отражением падающих волн от плоской границы неоднородной акустической среды.

Амплитуды падающих и отраженных волн давления определяются, соответственно, формулами

$$A_1 = \frac{p_0^* \exp(\alpha^2 z_0)}{\pi R_1}, \quad A_2 = \frac{p_0^* \exp(\alpha^2 z_0)}{\pi R_2}$$

В решении (2.21) множители $J_0(\alpha \sqrt{(c_0 t)^2 - R_j^2})$, $j = 1, 2$ обусловлены неоднородностью акустической среды.

Волны давления, как следовало ожидать, претерпевают конечный разрыв непрерывности на фронтах падающих и отраженных волн.

4. Дисперсия. Эффект дисперсии характерен для волн, распространяющихся в неоднородных средах. Теперь исследуем дисперсионные свойства акустической среды, для чего решение в изображении Лапласа (2.1) напомним для установившихся волн:

$$\begin{aligned} \bar{p}(r, z, i\omega) = p_{ss}(r, z, \omega) = p_0^* \exp(\alpha^2 z_0) \exp(i\omega t) \times \\ \times \int_0^\infty \frac{1}{m(\omega)} \left\{ \exp[-|z - z_0| m(\omega)] - \exp[-|z + z_0| m(\omega)] \right\} J_0(kr) k dk \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$m(\omega) = \sqrt{k^2 - b^2}; \quad b = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2}}, \quad \alpha > \frac{\omega}{c_0} \quad (4.2)$$

Вычислим интегралы (4.1), пользуясь известным результатом [5] (с.457).

$$\int_0^\infty J_0(bk) \frac{\exp\{-a\sqrt{k^2 - y^2}\}}{\sqrt{k^2 - y^2}} k dk = \frac{\exp\{\mp i y \sqrt{a^2 + b^2}\}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (4.3)$$

Имеем

$$p_{ss}(r, z, \omega) = p_0^* \exp(\alpha^2 z_0) \left\{ \frac{1}{R_1} \exp(i\Omega_1) - \frac{1}{R_2} \exp(i\Omega_2) \right\} \quad (4.4)$$

где

$$\Omega_j = \omega t - R_j \sqrt{\alpha^2 - (\omega/c_0)^2}, \quad j = 1, 2$$

есть фазы падающих и отраженных волн, соответственно.

Определим фазовую скорость волн. При условии, что $\Omega_j = \text{const}$ имеем

$$c_{\beta} = \frac{dR_{\beta}}{dt} = \frac{\omega}{k(\omega)} \quad (4.5)$$

где

$$k(\omega) = \sqrt{\alpha^2 - (\omega/c_0)^2} \quad (4.6)$$

есть волновое число падающих и отраженных волн.

Из решения (4.4) для установившихся колебаний видно, что при $\omega < \alpha c_0$ в неоднородной акустической среде появляются стоячие волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. De Hoop A.T. A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems.- Appl. Sci.Res. Sect. B. 1960, vol. 8, №4, p.349-356.
2. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах.-М.: Академиздат, 1957. 502с.
3. Бабиц В.М., Киселев А.П. Геометросейсмическое описание "нелучевых" волн P, S*,...-Л.: Препринт ЛОМИ Р-11-87, 1987. 24с.
4. Седов А.И. Механика сплошной среды.-М.: Наука, т.1, 1970.-492с.
5. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций.-М.: ИЛ, т.1, 1949.-798с.

Ереванский архитектурно-
строительный институт

Поступила в редакцию
20.06.1996

ИЗГИБ ОРТОТРОПНОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА¹

Արեշատյան Н.Г., Киракосян Р.М., Степанян С.П.

Ն.Գ. Արեշատյան, Ռ.Մ. Կիրակոսյան, Ս.Պ. Ստեփանյան

Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ կլոր սալի ծոռվը ընդլայնական սահմանի հաշվառմամբ

Եզրովված [1] տեսության շրջանակներում լուծվում է հավաստագրի բաշխված բեռի ազդեցության տակ գտնվող զծայնորեն փոփոխական հաստության օրթոտրոպ կլոր սալի ծոռվն խնդիրը ընդլայնական սահմանի հաշվառմամբ: Դիտարկվում են սալի եզրագծի հողակավորին հեմման և կոշտ ամրակցման դեպքերը: Կիրառվում է եզրային խնդիրը Կոշու խնդրի բերելու եղանակը [2], [3]:

Ստացված արդյունքների վերլուծության հիման վրա արվում են որակական եզրակացություններ սալի առավելագույն ճկվածքի վրա ընդլայնական սահմանի ազդեցության վերաբերյալ՝ լրացված ելուրի օրթոտրոպային բնույթից և հաստության փոփոխման վարքից:

N.G.Areshatyan, R.M.Kirakosian, S.P.Stepanian

On Bending of Orthotropic Circular Plate of Variable Thickness With the Account of Transverse Shear Strains

В рамках уточненной теории [1] решается задача изгиба ортотропной круглой пластинки ливейно-переменной толщины, находящейся под действием равномерно распределенной поверхностной нагрузки, при учете влияния поперечного сдвига. Рассматриваются случаи шарпирного опирания и защемления контура пластинки. Применяется метод приведения краевой задачи к соответствующей задаче Коши [2], [3]. На основе анализа полученных результатов делаются качественные заключения о влиянии поперечного сдвига на величину наибольшего прогиба пластинки в зависимости от характера ортотропии материала и поведения изменения толщины пластинки.

1. Пусть шарпирно опертая или защемленная по контуру ортотропная пластинка радиуса R , толщина которой h , изменяется по закону

$$h = h_0 + h_1 r, \quad 0 \leq r \leq R, \quad h_1 > -\frac{h_0}{R} \quad (1.1)$$

находится под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности q . Здесь r - радиальная координата, h_0 - толщина пластинки в центре, а параметр h_1 характеризует поведение изменения толщины в радиальном направлении.

Рассмотрим задачу изгиба пластинки в рамках уточненной теории [1], учитывающей влияние деформаций поперечных сдвигов. Воспользуемся методом формального приведения краевой задачи к соответствующей задаче Коши [2], [3]. Введем следующие обозначения:

$$r = \rho c, \quad \frac{h_0}{c} = s, \quad \frac{h_1}{s} = \gamma, \quad h = h_0 H, \quad \frac{B_0}{B_r} = m^2, \quad \frac{B_r}{\sigma_0} = n$$

¹) Доложена на международной конференции по теоретической и прикладной механике (Ереван, 17-19, IX, 1994 г.)

$$\sqrt{B_0/B_r} = 1, \quad \nu_r = 0.3$$

Таблица 2

$h_1 R/h_0$	-0.5			0			1		
B_r/G_{rz}	0	40	80	0	20	40	0	10	20
шарнирное опирание									
w^*	3.003	3.251	3.498	1.279	1.404	1.529	0.399	0.451	0.502
$\Delta_{ш}$	—	8.25	16.48	—	9.77	19.5	—	12.7	25.4
Защемление									
w^*	1.003	1.365	1.726	0.313	0.438	0.563	0.079	0.117	0.156
Δ_3	—	36.1	72.14	—	39.9	79.8	—	49.0	97.9
$\Delta_3/\Delta_{ш}$	—	4.37	4.38	—	4.08	4.09	—	3.86	3.85

$$\sqrt{B_0/B_r} = 2, \quad \nu_r = 0.3$$

Таблица 3

$h_1 R/h_0$	-0.5			0			1		
B_r/G_{rz}	0	20	40	0	10	20	0	5	10
шарнирное опирание									
w^*	1.069	1.224	1.379	0.376	0.438	0.501	0.105	0.128	0.150
$\Delta_{ш}$	—	14.5	29.0	—	16.6	33.2	—	21.4	42.8
Защемление									
w^*	0.516	0.696	0.877	0.167	0.230	0.292	0.045	0.065	0.085
Δ_3	—	35.0	69.9	—	37.4	74.7	—	44.3	88.7
$\Delta_3/\Delta_{ш}$	—	2.41	2.41	—	2.25	2.25	—	2.07	2.07

Данные таблиц приводят к следующим заключениям:

1. Учет поперечного сдвига, как и следовало ожидать, и в случае переменной толщины, приводит к увеличению прогибов пластинки.
2. Размер увеличения прогиба существенным образом зависит от характера ортотропии материала и от поведения изменения толщины пластинки.

Он растет при:

- а) увеличении отношения B_r/G_{rz} , то есть уменьшения относительного модуля поперечного сдвига;
- б) росте параметра $h_1 R/h_0$, то есть угощении пластинки вдоль радиуса;

$$\frac{\sigma_{\parallel}}{G_{\parallel}} = l, \quad q^* = \frac{6q}{n\sigma_0 s}, \quad w = h_0 \bar{w}, \quad \frac{d\bar{w}}{d\rho} = \alpha, \quad \varphi_1 = \sigma_0 t \quad (1.2)$$

$$\alpha\alpha - l = y, \quad \frac{dy}{d\rho} = v, \quad M_r = \sigma_0 h_0^2 \bar{M}_r, \quad M_\theta = \sigma_0 h_0^2 \bar{M}_\theta$$

Здесь s — неизвестная постоянная размерности длины, ρ — безразмерная радиальная координата, φ_1 — функция, характеризующая влияние поперечного сдвига [1], σ_0 — характерное напряжение, B_r , B_θ и B_{rz} — механические параметры материала пластинки [4].

С помощью этих обозначений для безразмерных величин толщины H и изгибающих моментов пластинки $\bar{M}_r$ и $\bar{M}_\theta$ получим

$$H = 1 + \gamma\rho, \quad \bar{M}_r = -\frac{n s H^3}{12\rho} (\rho v + v_r m^2 y) \quad (1.3)$$

$$\bar{M}_\theta = -\frac{n s H^3 m^2}{12\rho} (v_r \rho v + y)$$

где v_r — соответствующий коэффициент Пуассона.

Осесимметричный изгиб пластинки описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [1]:

$$\frac{dy}{d\rho} = v, \quad \frac{dv}{d\rho} = \frac{q^* \rho}{H^3} - \frac{1 + 4\gamma\rho}{\rho H} v + \frac{m^2 [1 + (1 - 3v_r)\gamma\rho]}{\rho^2 H} y = F(\rho, y, v) \quad (1.4)$$

В малой окрестности центра пластинки $\rho \leq \rho_0$, где ρ_0 — достаточно малое число, система (1.4) допускает асимптотические решения

$$y = \begin{cases} A_1 \rho^m, & m < 3 \\ \frac{1}{6} q^* \rho^3 \ln \rho, & m = 3 \\ \frac{q^*}{9 - m^2} \rho^2, & m > 3 \end{cases}, \quad v = \begin{cases} A_1 m \rho^{m-1}, & m < 3 \\ \frac{1}{2} q^* \rho^2 \ln \rho, & m = 3 \\ \frac{3q^*}{9 - m^2} \rho^2, & m > 3 \end{cases} \quad (1.5)$$

Здесь $A_1 < 0$ — произвольная постоянная.

Систему уравнений (1.4) удобно решать численно. Задаваясь некоторыми значениями параметров γ_1, A_1, q^* и переходя к конечным разностям, можно значения функции y и v в последующих друг другу сечениях $\rho_i = \rho_{i-1} + \Delta\rho$, ($i = 1, 2, 3, \dots$) вычислить по формулам

$$y_i = y_{i-1} + v_{i-1} \Delta\rho, \quad v_i = v_{i-1} + F_{i-1} \Delta\rho \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.6)$$

Здесь $\Delta\rho$ — шаг численного интегрирования.

Начальные значения y_0 и v_0 определяются из асимптотических выражений (1.5) для некоторого малого ρ_0 . Численное интегрирование системы (1.4) продолжается до того значения безразмерной координаты $\rho_R = R/s$, для которого удовлетворяется краевое условие задачи, откуда и определяется неизвестная постоянная s . Этим фактически завершается решение задачи, поскольку после него можно вычислить значения расчетных величин в любой точке пластинки.

Рассмотрим два варианта краевых условий:

1. Условие шарнирного опирания

$$\rho v + v_r m^2 y = 0 \quad (M_r = 0) \quad (1.7)$$

2. Условие защемления

$$y = 0 \quad (u_r = 0) \quad (1.8)$$

Так как с удалением от центра защемленной по контуру пластинки изгибающий момент M_r убывает и, не доходя до края, в некотором сечении превращается в нуль, то сначала удовлетворяется условие шарнирного опирания. Поэтому в ходе решения задачи защемленной по контуру пластинки попутно получается и решение задачи при шарнирном опирании. При желании можно путем варьирования одного из параметров A_1 , γ и q^* добиться того, чтобы краевое условие удовлетворялось при $\rho = 1$. Тогда безразмерный прогиб пластинки определится по формуле

$$\bar{w} = -\frac{1}{s} \int_{\rho}^1 (y + lt) d\rho \quad (1.9)$$

где

$$t = \frac{ns^2 \gamma H}{8\rho} (\rho v + v_r m^2 y) - \frac{q^* ns^2}{8H} \rho \quad (1.10)$$

2. В табл. 1-3 представлены значения величин

$$w^* = \frac{w_0}{h_0} \frac{h_0^3}{R^3} \frac{B_r}{6q}, \quad \Delta = \frac{w_0 - w_0^{**}}{w_0^{**}} \cdot 100\% \quad (2.1)$$

подсчитанные при некоторых характерных значениях параметров $h_1 R/h_0$, $\sqrt{B_0/B_r}$ и B_r/G_{rz} . Через w_0^{**} и w_0 обозначены прогибы центра пластинки, полученные по классической и уточненной теориям. Величина Δ определяет поправку к наибольшему прогибу пластинки в процентах, вносимую с учетом поперечного сдвига. В последних строках таблиц приведены значения отношения поправок, соответствующих защемлению Δ_z и шарнирному опиранию $\Delta_{ш}$ контура пластинки

$$\sqrt{B_0/B_r} = 0.5, \quad v_r = 0.3$$

Таблица 1

$h_1 R/h_0$	-0.5			0			1		
B_r/G_{rz}	0	50	100	0	30	50	0	10	20
шарнирное опирание									
w^*	7.014	7.208	7.403	3.806	3.994	4.119	1.456	1.520	1.584
$\Delta_{ш}$	—	2.77	5.55	—	4.92	8.20	—	4.38	8.76
Защемление									
w^*	1.638	2.095	2.551	0.477	0.664	0.789	0.109	0.146	0.183
Δ_z	—	27.9	55.7	—	39.3	65.5	—	34.00	67.9
$\Delta_z/\Delta_{ш}$	—	10.07	10.04	—	7.99	7.99	—	7.76	7.75

в) увеличении параметра B_0/B_r , то есть отношения модулей Юнга материала кольцевого и радиального направлений E_0/E_r .

3. Поправка, являемая учетом поперечного сдвига, при защемлении контура пластинки получается значительно больше, чем при шарнирном опирании. Отношение этих поправок уменьшается с ростом модуля упругости материала в кольцевом направлении.

Например, при возрастании отношения E_0/E_r от $0.25 \left(\sqrt{\frac{B_0}{B_r}} = 0.5 \right)$

до $4 \left(\sqrt{\frac{B_0}{B_r}} = 2 \right)$ отношение Δ_s/Δ_m убывает в пять раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киракосян Р.М. К уточненной теории цилиндрически ортотропных пластин переменной толщины. - Изв. НАН Армении, Механика, 1994, т.47, №5-6, с.64-73.
2. Ильюшин А.А. Пластичность. - М.-А.: Гостехиздат, 1948.
3. Киракосян Р.М. Об одной задаче круглой пластинки наименьшего объема за пределом упругости материала. - Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1977, т.30, №1, с.21-32.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1987. 360 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
29.05.1996

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МИКРОПЛИТ ЗЕМНОЙ КОРЫ И МАКСИМАЛЬНО ВОЗМОЖНАЯ ЭНЕРГИЯ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Хачикян А.С., Казарян А.С., Нерсисян Г.Г.

Խաչիկյան Ա.Ս., Դազարյան Ա.Ս., Ներսիսյան Գ.Գ.

Երկրակեղևի սալերի լարվածային վիճակը և երկրաշարժի հնարավոր առավելագույն էներգիան

Դիտարկվում է երկրակեղևի սալի լարվածային վիճակից կախված նրա տարբեր մասերում առաջացող երկրաշարժի էներգիայի հնարավոր առավելագույն արժեքի որոշման խնդիրը։ Սալի լարվածային վիճակը որոշվում է երկու երկրաշարժի միասնաշարժաստության օջախի ասկայություն ու քայքայության դեպքերում։ Երկրաշարժի ընթացքում արտազատվող հնարավոր առավելագույն էներգիան որոշված է որպես այդ երկու լարվածային վիճակներում կուտակված առաձգական էներգիաների տարբերություն։ Խնդրի լուծումը թույլատրում է վերջավոր տարրերի մեթոդով, երկրաշարժի առաջացման մի որոշակի մեխանիզմի համար։ Առաջարկվող մեթոդիկան հնարավորություն է ընձեռնում տալ սալի տարբեր մասերի սեյսմիկ վտանգավորության համեմատական գնահատականը կախված նրա լարվածային վիճակից։

A.S. Khachikyan, L.S. Gazarian, G.G. Nersisyan

On the stressed state of earthcrust plates and earthquake's possible maximum energy

Рассматривается задача определения максимально возможного значения энергии землетрясения, возникающего в разных частях микроплит земной коры, в зависимости от их напряженного состояния. Напряженное состояние микроплиты определяется в двух случаях: при наличии и отсутствии очага подготовки землетрясения. Максимально возможное значение выделяющейся при землетрясении энергии определено как разность накопленных упругих энергий при этих двух напряженных состояниях. Решение задачи получено методом конечных элементов для одного определенного механизма возникновения землетрясения. Предложенная методика дает возможность получения оценки относительной сейсмической опасности разных частей плиты в зависимости от ее напряженного состояния.

1. Ըստ որոշ վարկածների [1,2,3] առաջարկվում է տեկտոնական երկրաշարժի առաջացման հետևյալ պարզեցված սխեման։ Հարակից սալերի ազդեցության հետևանքով դիտարկվող սալում լարումները աճում են։ Երբեմն սալի որևէ մասում սզատ շարժման խոչընդոտի կամ կոշտության փոփոխության պատճառով առաջանում է լարումների կոնցենտրացիա։ Երբ լարումները գերազանցում են տիրության սահմանը տեղի է ունենում հանկարծակի քայքայում՝ երկրաշարժ։ Կուտակված առաձգական էներգիան անջատվում է քայքայման ընթացքում։

Դիտարկենք երկրակեղևի մի հատված, որն իրենից ներկայացնում է մի այնպիսի սալ կամ սալերի համախումբ որ նրա եզրերին հայտնի է կից սալերի ազդեցությունը՝ տրված լարումների կամ տեղափոխությունների (արագությունների) տեսքով։ Սալի մեխանիկական իստիությունները համարում ենք հայտնի։ Այս պայմաններով լուծելով առաձգականության տեսության համապատասխան եզրային խնդիրը, կարող ենք որոշել սալի լարվածային վիճակը արտահայտված նրա կետերի U' տեղափոխություններով։

Հետևելով երկրաշարժի առաջացման նշված վարկածներին ընդունենք, որ դիտարկվող սալի որևէ մասում առաջացել է շարժման (դիֆորմացիայի) խոչընդոտ, սալի սվլալ մասում տեղափոխությունների վրա դրված սահմանափակումների տեսքով։ Լուծելով առաձգականության տեսության առաջացած մոդ եզրային խնդիրը, կստանանք սալի լարվածային վիճակը խոչընդոտի առկայության դեպքում,

*) Աշխատանքը ստացել է Հայաստանի Ամերիկյան Համալսարանի օժանդակությամբ

արտահայտված նրա կետերի U'' տեղափոխությունների միջոցով: Ալմենայտ 1. որ դիտարկվող սալի U' և U'' տեղափոխություններով արտահայտված երկու տարրեր լարվածային վիճակներում կուտակված առաձգական էներգիաների տարբերությունը իրենից ներկայացնում է այն առաձգական էներգիան, որ կարող է անջատվել խոչընդոտան առաջացման կասկերի վերացման դեպքում: Դնրության սահմանը գերազանցող լարումների հավասար մակարդակը պոսիպանկու սյայմաններում դիտարկվող սալի տարբեր մասերում տեղակայված խոչընդոտների համար որոշելով անջատվող հնարավոր առավելագույն էներգիայի մեծությունը, կունենանք սալի լարվածային վիճակից կախված նրա տարբեր մասերի սեյսմիկ վտանգավորության համեմատական բնութագիրը:

2. Շարադրվածը պարզուրաններ մի գնմական օրինակով: Ընդունենք, որ դիտարկվող սալը գտնվում է հարթ լարվածության պայմաններում և զրադեցնում է $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ տիրույթը: Պարզության համար ընդունենք, որ սալը իզոտրոպ է և համասեռ ըստ մեխանիկական հատկությունների: Հարակից սալերի ազդեցությունը ներկայացվում է եզրային պայմանների միջոցով: Հաջորդաբար իրականացնենք առաջարկված մերոդի և տալաները:

2.1. Որոշենք լարումները դիտարկվող սալում ապագա օջախը ներկայացնող խոչընդոտի բացակայության պայմաններում: Ընդունենք, որ հարակից սալերի ազդեցությունը ներկայացվում է հետևյալ եզրային պայմաններով.

$$\begin{aligned} u &= v = 0, & y &= b, & 0 \leq x \leq a \\ \tau &= 0, & y &= 0, & 0 \leq x \leq a \\ \sigma_x &= c_2(a-x)/(a-a_1), & y &= 0, & a_1 \leq x \leq a \\ \sigma_y &= c_2, & y &= 0, & 0 \leq x \leq a_1 \\ \tau &= 0, & 0 \leq y \leq b, & \begin{cases} x=0 \\ x=a \end{cases} \\ \sigma_x &= c_1, & 0 \leq y \leq b, & \begin{cases} x=0 \\ x=a \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Այստեղ տեղափոխությունների և լարումների համար օգտագործված են սովորական նշանակումները, c_1 , c_2 , a_1 - հաստատուններ են:

Դիտարկվող սալում լարումները որոշենք վերջավոր տարրերի մեթոդով: Սալի զբաղեցրած տիրույթը բաժանենք $2m \times n$ ուղղանկյուն եռանկյունների: Հետևելով վերջավոր տարրերի մեթոդին [4] ներկայացնում ենք տեղափոխությունները յուրաքանչյուր տարրի տիրույթում զծային ֆունկցիայի տեսքով՝

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (2)$$

որտեղ α_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) հաստատուններ են:

Լարումները և դեֆորմացիաները կլինեն համասեռ յուրաքանչյուր եռանկյուն տիրույթում:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x - \nu\varepsilon_y), & \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y - \nu\varepsilon_x), & \tau &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (3)$$

Օգտագործելով դեֆորմացիաների էներգիայի մինիմումի պայմանը և բավարարելով (1) եզրային պայմաններին վերջավոր տարրերի մեթոդին համապատասխան, ստանում ենք հանգույցային կետերի տեղափոխությունների նկատմամբ հանրահաշվական զծային հավասարումների համակարգ, որ համառոտության համար այստեղ չենք բերում: Համակարգը լուծվում է քվային եղանակով և աղյուսիսով որոշվում են սալի կետերի տեղափոխությունները: Որոշվում

ին մաս լարումներն ու ղեֆորմացիաները (2-3) քանաձևերով, ինչպես մաս ղեֆորմացիայի էներգիան՝

$$Q' = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \gamma_{xy} \tau) dx dy \quad (4)$$

2.2 Սալի լարվածային դաշտը երկրաչափի հնարավոր ապագա օջախը ներկայացնող խաչնդոտի (լարումների կոնցենտրացիայի աղբյուրի) առկայության դեպքում որոշելու համար խաչնդոտը ներկայացնենք սալի կամայական տեղամասում տեղափոխությունների վրա դրված սահմանափակումների տեսքով՝

$$u = v = 0, \quad \text{երբ} \quad \begin{aligned} p \leq i \leq p+l, & \quad p+l \leq m \\ q \leq i \leq q+k, & \quad q+k \leq n \end{aligned} \quad (5)$$

Այստեղ i, j խաչնդոտը ներկայացնող տիրույթին պատկանող վերջավոր տարրերի կոորդինատներն են, p, q, l, k դրական ամբողջ թվեր են, որոնք որոշում են այդ տիրույթի դիրքը և չափերը: Տիրույթի չափերի որոշման եղանակը բերվում է ստորև:

Վարվելով մույն ձևով, ինչ որ մախարդ դեպքում, միայն բավարարելով (1) և (5) եզրային պայմաններին, կազմում ենք հավասարումների համակարգ հանգույցային կետերի տեղափոխությունների նկատմամբ: Թվային եղանակով լուծելով այդ համակարգը, կստանանք սալի կետերի u'', v'' տեղափոխությունները, ինչպես մաս համապատասխան լարումները, ղեֆորմացիաները և ղեֆորմացիայի Q'' էներգիան խաչնդոտի առկայության դեպքում:

Ընդունելով, որ սնդի ունեցող պրոցեսները լիովին առածական են, նկատում ենք, որ խաչնդոտի տիրույթի վրա լրացուցիչ կապերի վերացման դեպքում հանգում ենք առաջին խնդրի պայմաններին: Վերջինս թույլ է տալիս եզրակացնելու, որ $\Delta Q = |Q' - Q''|$ տարբերությունը հավասար է կապերի վերացման դեպքում անփափուկ առածական էներգիային:

2.3. Սալի լարվածային դաշտի անհամասեռության պատճառով արգելակված տիրույթի վրա լարումները կստացվեն տարբեր սալի տարբեր տեղամասերի համար: Արգելակված տիրույթի (խաչնդոտի) չափերը որոշենք սալի տարբեր տեղամասերում քայքայման միատեսակ պայմանները ապահովելու պայմանից: Այդ նպատակով յուրաքանչյուր տեղամասում որոշենք խաչնդոտի այն չափերը, որի դեպքում ըստ ամրության հաշվարկային ընտրված տեսության գործող էֆֆեկտիվ լարումները հավասարվում են տվյալ տեղամասում ապարների համար հայտնի ամրության սահմանին:

Հաշվենք արգելակված տիրույթի վրա ազդող ուժերի գլխավոր վեկտորը և գլխավոր մոմենտը տիրույթի երկրաչափական կենտրոնի նկատմամբ:

$$P_x = \int_{\omega} \sigma_{xx} ds, \quad P_y = \int_{\omega} \sigma_{yy} ds, \quad M = \int_{\omega} [(x - x_0) \sigma_{yx} - (y - y_0) \sigma_{xx}] ds$$

Ինտեգրումը կատարվում է տիրույթի եզրով, իսկ x_0, y_0 - ն տիրույթի կենտրոնի կոորդինատներն են, σ_{xx}, σ_{yy} - տիրույթի կոնտուրի վրա ազդող համապատասխան ուղղության լարումներն են:

Ընդունենք, պարզության համար, որ արգելակված տիրույթում լարումները բաշխված են պարզ լարվածային փիճակների համադրման ձևով և որ ամրության սահմանը $[\tau]$ սալի բոլոր տեղամասերում հաստատուն է, կունենանք

$$\tau = \frac{1}{S} \sqrt{P_x^2 + (P_y + \alpha M)^2} \leq [\tau]$$

որտեղ S արգելակված տիրույթի մակերեսն է, α - ն տիրույթի ձևից և չափից կախված հայտնի հաստատուն է, $[\tau]$ ամրության սահմանն է ըստ առավելագույն շոշափող լարումների պայմանի [5]: Այդ դեպքում տիրույթի չափերը կորոշենք եետևյալ անհավասարությունից՝

$$[\tau](1 - \varepsilon) \leq \tau \leq [\tau](1 + \varepsilon) \quad (6)$$

Ճ - ր ընտրվում է ըստ անկումաձևա ճշտությունն ասլախովելու պայմանի:

Այսպիսով սալի բոլոր տեղամասերում որոշվում են ամրության միատեսակ պայմաններ ապահովող տվյալների չափերը, և այդ չափերի դեպքում հաշվվում է կապերի վերացման դեպքում անջատվող առաձգական էներգիան: Դիտարկվող օրինակի համար կատարված հաշվարկների արդյունքը ցույց է տրված գրաֆիկի տևաքով (ճկ. 1): Կարելի է նկատել, որ առավել փառնգալիոր է սալի կոշտ ամրակցված եզրի շրջակայքը:

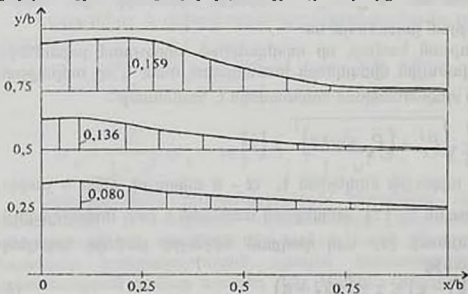
3. Քննարկենք համառոտ կերպով ստացվող արդյունքների իրականության հետ համապատասխանության հարցը: Խնդրի լուծման ընթացքում արված ընդունելությունները կարելի է պայմանականորեն բաժանել երեք խմբի:

Առաջին խումբ ընդունելությունները կապված են երկրակեղևի դիտարկվող սալի մեղանդիկական հատկությունների: և շրջակա սալերի հետ նրա փոխազդեցության որոշման հետ, որոնք անհրաժեշտ են սալի լարվածային վիճակը որոշելու համար: Շատ քիչ դեպքերում նման լավարար փաստիելի ինֆորմացիա գոյություն ունի իրական երկրակեղևի սալերի համար, չնայած կատարվող լազմաքիվ հետազոտությունների շնորհիվ [6-9] տվյալները արագ աճում են: Այս տեսակետից ստացված արդյունքների իրական լինելը որոշվում է ճախնական տվյալների հավաստիությանը:

Երկրորդ խումբ ընդունելությունները կապված են դրված եզրային խնդիրների լուծման հետ: Պարզ է, որ րվային հաշվված սարքեր մեքողները, ինչպես և օգտագործված վերջավոր տարրերի մեքողը, հնարավորություն են տալիս կառուցել բավարար ճշգրտությամբ լուծումներ: Սակայն կարող է վիճահարույց լինել լաղընդոսի շրջակայքում լարումների կոնցենտրացիայի հաշվառման և ամրության կոնկրետ տեսության կիրառելության հարցը: Այստեղ ընդունված է, որ անջատվող էներգիայի առավելագույն հնարավոր արժեքի որոշման խնդիրը լուծին համապատասխանում է համասեռ լարվածային վիճակում լաղընդոսի առավելագույն դիմադրողականության պայմանին: Նկատի է առնվում նաև, որ առաջադրված նպատակի տեսակետից էական է ոչ թե անջատվող էներգիայի բացարձակ մեծությունը, այլ սարքեր տեղամասերում անջատվող էներգիայի համեմատական մեծությունը:

Երրորդ խումբ սահմանափակումները կապված են երկրաշարժի ճախապատասխանության և ընթացքի ընտրված վարկածի հետ: Արդյունքները, այդպիսով, վերաբերվում են միայն ըստ տվյալ վարկածի սեղի ունեցող պրոցեսին և իրականության հետ առնչվում են այնքանով, որքանով որ դիտարկվող վարկածը համապատասխանում է իրականությանը տվյալ տեղանքում: Ըստ երևույթին նման հաշվարկներ կարող են կատարվել նաև ռսումնասիրվող տեղանքում երկրաշարժի ճախապատասխան հնարավոր այլ վարկածների դեպքում:

Արոհիչյալ քննարկումից կարելի է եզրակացնել, որ ստացված արդյունքները իմնականում կհամապատասխանեն լրականությանը, երբ իրական է սալի որոշված լարվածային վիճակը: Այդ դեպքում առաջարկված մեքողիկայով կարելի է, ստանալ սալի տարրեր տեղամասերի սեյսմիկ փառնգալիություն համեմատական իրական ընտրագիրը կախված սալի լարվածային վիճակից: Նշենք, որ նման եզրակացությունների կարելի է հանգել նաև դիտարկելով սալի ընդհանրացված հարյր լարվածային և եռաչափ լարվածային վիճակները:



Նկ.1 Սալի տեղամասերի հարաբերական սեյսմիկ փառնգալիություն

$$\frac{\Delta Q}{\Delta Q_{min}} - 1$$

Լայնություններ,

$$a = 2b, a_1 = \frac{2}{3}a$$

$$v = 0.25; c_2 = 5c_1;$$

$$c_2/\tau = 0.25$$

1. Теркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. Геологические приложения физики сплошных сред. В 2-х частях.-М.: Мир., 1985. 730 с.
2. Добровольский И.П. Теория подготовки тектонического землетрясения.-М.: Ин-т физики Земли АН СССР, 1991. 224 с.
3. Григорян С.С. О механизме возникновения землетрясений и содержании эмпирических закономерностей сейсмологии.-ДАН СССР, 1988, т.299, №5, с.1094-1101.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.-М.: Мир, 1975. 542 с.
5. Физические свойства горных пород и минералов при высоких давлениях и температурах.-М.: Наука, 1978. 224 с.
6. Современная динамика литосферы континентов (методы изучения).-М.: Недра, 1989. 278 с.
7. Поля напряжений и деформаций в литосфере.-М.: Наука, 1987. 254 с.
8. Поля напряжений и деформаций в земной коре.-М.: Наука, 1987. 184 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
4.03.1996

О СВЯЗИ ПАРАМЕТРОВ ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ С
ДЕФОРМАЦИЯМИ ОТРАЖАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ
Саркисян А.А.

Ա.Ա.Սարգսյան

Օպտիկական պատկերի պարամետրերի և անդրադարձնող մակերևույթի դեֆորմացիաների կապի մասին

Անդրադարձնող օպտիկական մակերևույթների ստուգման համար գոյություն ունեն անաբերացիոն կետերի հատկությունների վրա կիմնված բազմազան մեթոդներ: Այդ իսկողը զրականության մեջ բավարար ծավալով լուսաբանված է: Մեթոդների նպատակը օպտիկական մակերևույթների շնորմննրով (լուսալսկանից) սրույնմամբորված պիքսային հակառիկ ադալիսույունների փորձնական որոշումն է: Սակայն, մեծ հայելիների ամրացման համակարգեր նախագծելիս հարկ է լինում այդ առնչությունը ունենալ անաբերակ տեսքով՝ նախագծվող կոնստրուկցիան զնանատկու համար: Ներկայացված աշխատանքում սվերվել հայելու համար գոյու են թերված անդրադարձնող մակերևույթի շնորմներից կախված լուսավոր կետի պատկերի ադալիսույունները (երկրաչափական ձևը՝ էներգիայի բաշխումը):

A.A.Sarkisyan

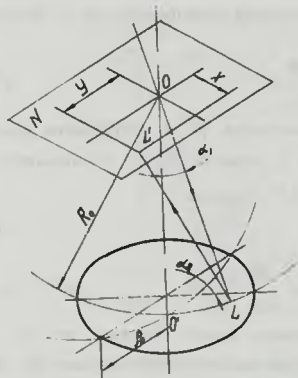
On the relation between the parameters of the optical image and the deformations of the reflecting surface

В работе приводятся аналитические соотношения, связывающие параметры оптического изображения точечного источника света, помещенного в центре кривизны отражающей сферической поверхности, с деформациями сферы. Полученные зависимости позволяют оценить качество изображения с учетом возможных деформаций отражающей поверхности.

Методы контроля отражающих поверхностей, основанные на использовании свойств анаберрационных точек, весьма разнообразны. В достаточном объеме с необходимой библиографией они приведены в [1]. Целью методов является экспериментальное определение искажений сферического фронта, вызванных отклонениями отражающей поверхности. Однако на стадии проектирования подвесов больших зеркал возникает необходимость, для оценки конкретной конструкции, иметь эту связь в аналитическом виде.

В данной работе, на примере сферического зеркала, выводятся аналитические зависимости между отклонениями отражающей поверхности (возможными деформациями) и искажениями анаберрационного изображения точечного источника, а также распределением энергии в пятне.

Имеется отражающая поверхность (фиг. 1), выполненная в виде идеального сферического сегмента (радиус сферы R_0 , радиус сегмента ρ_0), в центре кривизмы (точка O) которого расположен точечный источник света. Очевидно, отраженные от сферы лучи сойдутся в той же точке O . При деформациях сферической поверхности точечное изображение исказится, и в плоскости N , проходящей через точку O и перпендикулярной главной оптической оси OO' , вместо точки получится пятно.



Фиг. 1

Как известно [2], сферическую поверхность можно представить вектор-функцией

$$R = R[\alpha_1, \alpha_2] \quad (1)$$

Свяжем с точкой $L(\alpha_1, \alpha_2)$ недеформированной сферической поверхности оси координатного базиса с единичными векторами e_1, e_2, e_n . e_1 и e_2 касательны к координатным линиям α_1 и α_2 , а e_n перпендикулярен к e_1 и e_2 .

При деформации сферической поверхности точка $L(\alpha_1, \alpha_2)$ переместится на величину вектора $\Delta(\alpha_1, \alpha_2)$ в точку K . Можно написать

$$\Delta = e_1 u + e_2 v + e_n w$$

где u, v, w являются проекциями вектора Δ на базисные оси. Введем обозначения $e_1 u = u, e_2 v = v, e_n w = w$. Проведем плоскость H , касающуюся сферы в точке L и включающую векторы u и v . Проведем перпендикуляр к плоскости из точки M — конца результирующего вектора $u + v$ до пересечения со сферой (точка M'). Если криволинейные координаты представить в виде функций какого-либо параметра s , то уравнение (1) запишется в виде

$$R = R[\alpha_1(s); \alpha_2(s)]$$

и опишет кривую на сферической поверхности. Можно за параметр s принять длину дуги кривой, проходящей через точки L, M' и находящейся в плоскости LKM . Когда точки L и M' достаточно близки, то дугу LM' можно принять за приращение аргумента Δs . Соответствующее приращение радиус-вектора R при переходе из L в M' выразится вектором LM' , который по формуле Тейлора можно представить в виде

$$LM' = R(s_M) - R(s_L) = \Delta R = \dot{R}(s_L) \Delta s + \frac{1}{2} \ddot{R}(s_L) (\Delta s)^2 + \dots \quad (2)$$

Пользуясь правилами геометрической оптики, свяжем деформации сферической поверхности с параметрами пятна изображения. Сферическую поверхность огнесем к системе ортогональных криволинейных координат, в данном случае углов α_1 и α_2 , отсчитываемых соответственно вдоль меридиана и параллельного круга.

Здесь и далее точкой сверху обозначены производные по s . Вектор $\bar{R}$ можно представить суммой

$$\bar{R} = \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} \dot{\alpha}_1 + \frac{\partial R}{\partial \alpha_2} \dot{\alpha}_2 \quad (3)$$

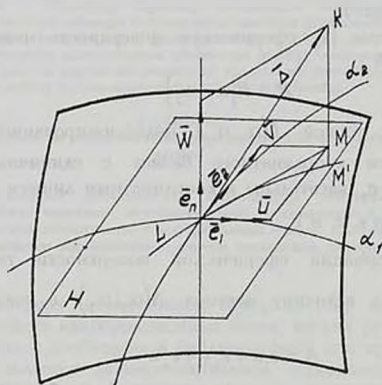
составляющие которой находятся в плоскости H и направлены вдоль координатных линий α_1 и α_2 в точке L , причем $|\bar{R}| = 1$ и находится в плоскости, включающей точки L , M , M' . Отсюда

$$\bar{R} \Delta s = u + v \quad (4)$$

и, с учетом (3),

$$u = \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} \dot{\alpha}_1 \Delta s, \quad v = \frac{\partial R}{\partial \alpha_2} \dot{\alpha}_2 \Delta s \quad (5)$$

Если принять, что u , v , и w величины одного порядка, то из (5) следует, что это величины первого порядка малости относительно Δs . Из фиг. 2 видно, что



Фиг. 2

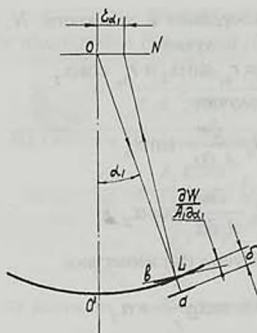
$$LM' = LM + MM'; \quad MM' = LM' - LM$$

Учитывая (2), (4) и равенство $LM = u + v$, можно записать

$$MM' = \frac{1}{2} \bar{R}(s_i) (\Delta s)^2 + \dots \quad (6)$$

Очевидно, что MM' — та наименьшая величина, на которую отклонилась бы от сферы точка L , переместившись на величину $u + v$. Следовательно, на основании (6) можно утверждать, что отклонение от сферы, вызванное перемещением $u + v$, есть величина второго порядка малости относительно Δs . С другой стороны, для полного перемещения Δ можно записать, что смещение от сферы равно: $KM = w + MM'$. Так как w и MM' коллинеарны, то отклонение от сферы, вызванное перемещением w (как и Δ), есть величина первого порядка малости относительно Δs . Значит, при деформациях огораживающей сферической поверхности по влиянию на суммарное отступление от сферичности существенно лишь перемещение w .

Рассмотрим теперь плоскость, проходящую через главную оптическую ось OO' и точку L сферы (фиг. 1). Она показана на фиг. 3.



Фиг. 3

При наклоне, определяемом углом $\partial w / A_1 \partial \alpha_1$, когда нормаль к ΔF остается в плоскости чертежа (положение в), отраженный луч, оставаясь в плоскости чертежа, смещается в плоскости изображения N на величину

$$r_{\alpha_1} = \frac{2R_0}{\cos \alpha_1} \frac{\partial w}{A_1 \partial \alpha_1} \quad (7)$$

где

$$A_1 = \left| \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} \right|$$

В случае наклона площадки ΔF на угол $\partial w / A_2 \partial \alpha_2$, когда нормаль к ней перемещается в плоскости, перпендикулярной к плоскости чертежа (фиг.3) и проходящей через OL , луч смещается в плоскости N перпендикулярно к r_{α_1} на величину

$$r_{\alpha_2} = 2R_0 \frac{\partial w}{A_2 \partial \alpha_2} \quad (8)$$

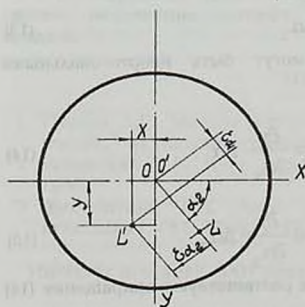
где

$$A_2 = \left| \frac{\partial R}{\partial \alpha_2} \right|$$

Отсюда можно утверждать, что параметры пятна изображения обусловлены не перемещением w , а его производными $\partial w / \partial \alpha_1$ и $\partial w / \partial \alpha_2$.

На фиг. 4 изображена проекция сферы на плоскость изображения N .

Как видно из чертежа, смещение r_{α_1} и проекция OL находятся на одной прямой, а r_{α_2} перпендикулярно к r_{α_1} .



Фиг.4

Введем систему прямоугольных координат в плоскости N , тогда для координат точки L' , связанной с L , получим:

$$x = r_{a_1} \cos \alpha_2 - r_{a_2} \sin \alpha_2, \quad y = r_{a_1} \sin \alpha_2 + r_{a_2} \cos \alpha_2 \quad (9)$$

После подстановки (7) и (8) в (9) получим:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2R_0}{\cos \alpha_1} \frac{\partial w}{A_1 \partial \alpha_1} \cos \alpha_2 - 2R_0 \frac{\partial w}{A_2 \partial \alpha_2} \sin \alpha_2 \\ y &= \frac{2R_0}{\cos \alpha_1} \frac{\partial w}{A_1 \partial \alpha_1} \sin \alpha_2 + 2R_0 \frac{\partial w}{A_2 \partial \alpha_2} \cos \alpha_2 \end{aligned} \quad (10)$$

В полярных координатах r и θ система (10) имеет вид:

$$r = \sqrt{r_{a_1}^2 + r_{a_2}^2}; \quad \theta = \arctg \frac{r_{a_2}}{r_{a_1}} + \alpha_2 \quad (11)$$

Полученные выражения (10) и (11) показывают, что при известном $w(\alpha_1, \alpha_2)$, α_1 и α_2 могут рассматриваться как криволинейные координаты для пятна изображения. Каждой точке сферической поверхности соответствует точка на изображении, следовательно, можно построить оптическое изображение, соответствующее данному деформированному состоянию сферы. Например, задавая $\alpha_1 = \text{const}$, можно построить однопараметрическую кривую на оптическом изображении $x = x(\alpha_2)$, $y = y(\alpha_2)$, соответствующую окружности на сфере.

Данному деформированному состоянию сферы соответствует и определенное распределение энергии на оптическом изображении, определяемое коэффициентом

$$k = \frac{\Delta f}{\Delta F} \quad (12)$$

где

ΔF - элементарная площадка поверхности сферы (окрестность точки L);

Δf - соответствующая ΔF площадка на оптическом изображении (окрестность точки L');

Согласно [2], при ортогональности α_1 и α_2 для сферы можно записать, что

$$\Delta F = A_1 \Delta \alpha_1 \cdot A_2 \Delta \alpha_2 \quad (13)$$

В общем случае α_1 и α_2 могут быть неортогональными координатами для пятна изображения.

Можно записать

$$\Delta x_1 = \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} \cdot \Delta \alpha_1, \quad \Delta y_1 = \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \cdot \Delta \alpha_1 \quad (14)$$

и

$$\Delta x_2 = \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} \cdot \Delta \alpha_2, \quad \Delta y_2 = \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \cdot \Delta \alpha_2 \quad (15)$$

т. е. приращениям $\Delta \alpha_1$ и $\Delta \alpha_2$ на сфере соответствуют приращения (14) и (15), которые могут рассматриваться как ортогональные компоненты векторов $\Delta \alpha_1$ и $\Delta \alpha_2$ на оптическом изображении, следовательно,

$$\Delta f = \Delta x_1 \cdot \Delta y_2 - \Delta x_2 \cdot \Delta y_1 \quad (16)$$

После подстановки (13), (14), (15), (16) в (12) получим:

$$k = \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \right)$$

Из системы (10), определяя $\partial w / \partial \alpha_1$ и $\partial w / \partial \alpha_2$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} &= \frac{A_1 \cos \alpha_1}{2R_0} (x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2) \\ \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} &= \frac{A_2}{2R_0} (-x \sin \alpha_1 + y \cos \alpha_1) \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17) вытекает, что для определения $\partial w / \partial \alpha_1$ и $\partial w / \partial \alpha_2$ нужно иметь координаты соответствующих точек $L(\alpha_1, \alpha_2)$ и $L'(x, y)$. Если поверхность деформированной сферы сканировать узким пучком, проходящим через центр кривизны O сферы, то пучок, отраженный от окрестности точки L сферы, как показано на фиг. 1, с известными координатами α_1 и α_2 в плоскости N , соберется в окрестности точки L' изображения с координатами x и y , которые можно определить (замерить). Подставляя значения координат в систему (17), можно определить $\partial w / \partial \alpha_1$ и $\partial w / \partial \alpha_2$. Это равносильно тому, что на всей поверхности сферического сегмента определены частные производные функции $w(\alpha_1, \alpha_2)$. При известных частных производных первообразную функцию можно найти с помощью криволинейного интеграла [3]

$$w(\alpha_1, \alpha_2) = \int \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + w_0$$

Значения w можно определить для любых точек на сфере с точностью до произвольной постоянной w_0 .

Аналогичные выражения можно вывести для других систем. Например, опустив число 2 в (7), (8), (10) и (17), можно получить формулы для схемы, в которой точечный источник удален в бесконечность, а отражающая поверхность - пологая параболоида вращения.

Очевидно, что полученные выражения можно использовать для систем, разрешение которых существенно хуже дифракционного предела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пуряев Д.Г. Методы контроля оптических асферических поверхностей. - М.: Машиностроение, 1976.
2. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. - М.: ГИИТА, 1956.
3. Фихтенгольд Г.Н. Курс дифференциального и интегрального исчисления. - М.: Наука, 1970.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
14.03.1996

О ВЛИЯНИИ СВЯЗАННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ НА ПОВЕДЕНИЕ ИХ ХАРАКТЕРИСТИК В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ТЕЛЕ

Տարգսյան Ա.Մ.

Ա.Մ. Սարգսյան

Կտոր առ կտոր համասեմ մարմնում էլեկտրական և մեխանիկական դաշտերի
կապակցվածության ազդեցությունը նրանց բնութագրիչների վրա

Էլեկտրատառձգականության գծային տեսության դրվածքով հետազոտված է կտոր առ կտոր
համասեմ տվյալ տեսող ընդլայնական կտրվածքով պրիզման, մարմնի էլեկտրոստատիկական
հավասարակշռությունը, երբ մի կողմում արված են առանձնական շարժում և էլեկտրոստատիկ պոտենցիալը,
իսկ մյուս կողմից՝ առանձնական տեղափոխումները և էլեկտրոստատիկ պոտենցիալը:

Բացվածությամբ է րապարկով մարմնի միացման մակերևույթի եզրի շրջակայքում դաշտերի
կապակցվածության ազդեցությունը ստանձնական շարժման և էլեկտրական դաշտի լարվածության վարքի
վրա:

A.M. Sargsian

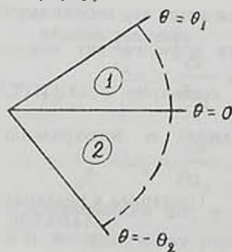
On the influence of electrical and mechanical fields connection on the behaviour of their characteristics in a
piece - homogeneous body

В постановке ашпейной теории электроупругости исследовано электроупругое
равновесие призматического тела с поперечным сечением в виде кусочно-однородного тела,
когда на одной грани заданы упругое напряжение и электростатический потенциал, а на
другой грани - упругое перемещение и электростатический потенциал.

Выяснено влияние связанности электрических и механических полей на поведение
упругих напряжений и напряженности электрических полей в окрестности края поверхности
контакта кусочно-однородного тела.

В работах [1,2] исследованы две задачи электроупругости для
составного призматического тела, когда на его границах заданы либо
упругие напряжения и электрические потенциалы, либо упругие
перемещения и электрические потенциалы.

В данной работе с целью выяснения влияния связанности
электрических и механических полей на поведение упругих напряжений
и напряженности электрических полей рассматривается антиплоская
смешанная задача электроупругости для составного призматического
тела с поперечным сечением в виде кусочно-однородного клина,
изготовленного из пьезокристаллов класса 4mm, 6mm и т.д. с различными
электроупругими свойствами..



Փիգ. 1

На одной границе призматического
тела заданы упругое напряжение и
электрический потенциал, а на другой
границе - упругое перемещение и
электрический потенциал. Главная ось
симметрии пьезокристаллов (ось z)
перпендикулярна к поперечному
сечению составного тела и проходит
через вершину кусочно-однородного
клина (фиг.1).

В цилиндрической системе координат решение антиплоской задачи электроупругости для составного тела приводится к интегрированию дифференциальных уравнений [3]

$$\Delta u_j(r, \theta) = 0, \quad \Delta \phi_j(r, \theta) = 0, \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$

из следующими граничными

$$c_{44}^{(1)} \frac{\partial u_1}{r \partial \theta} + e_{15}^{(1)} \frac{\partial \phi_1}{r \partial \theta} = \varphi_1(r), \quad \phi_1(r, \theta) = \psi_1(r), \quad \theta = \theta_1 \quad (2)$$

$$u_2(r, \theta) = f_2(r), \quad \phi_2(r, \theta) = \psi_2(r), \quad \theta = -\theta_2$$

и контактными условиями при $\theta = 0$

$$\begin{aligned} c_{44}^{(1)} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + e_{15}^{(1)} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} &= c_{44}^{(2)} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + e_{15}^{(2)} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \\ e_{15}^{(1)} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \varepsilon^{(1)} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} &= e_{15}^{(2)} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - \varepsilon^{(2)} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \\ u_1(r, \theta) &= u_2(r, \theta), \quad \phi_1(r, \theta) = \phi_2(r, \theta) \end{aligned} \quad (3)$$

где u_j - упругие перемещения, ϕ_j - электростатические потенциалы, Δ - двумерный оператор Лапласа, $c_{44}^{(j)}$, $e_{15}^{(j)}$, $\varepsilon^{(j)}$ - модули упругости, пьезомодули и диэлектрические проницаемости пьезоматериалов, $\varphi_1(r)$, $f_2(r)$ и $\psi_j(r)$ - заданные функции.

Первое граничное и первые два контактных условия получаются из уравнений состояния [3]

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(j)} &= c_{44}^{(j)} \gamma_{\theta z}^{(j)} + e_{15}^{(j)} E_{\theta}^{(j)}, \quad \tau_{rz}^{(j)} = c_{44}^{(j)} \gamma_{rz}^{(j)} - e_{15}^{(j)} E_r^{(j)} \\ D_{\theta}^{(j)} &= e_{15}^{(j)} \gamma_{\theta z}^{(j)} + \varepsilon^{(j)} E_{\theta}^{(j)}, \quad D_r^{(j)} = e_{15}^{(j)} \gamma_{rz}^{(j)} + \varepsilon^{(j)} E_r^{(j)} \\ \gamma_{\theta z}^{(j)} &= \frac{\partial u_j}{r \partial \theta}, \quad \gamma_{rz}^{(j)} = \frac{\partial u_j}{\partial r}, \quad E_{\theta}^{(j)} = -\frac{\partial \phi_j}{r \partial \theta}, \quad E_r^{(j)} = -\frac{\partial \phi_j}{\partial r} \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\tau_{\theta z}$, τ_{rz} , $\gamma_{\theta z}$, γ_{rz} - компоненты упругих напряжений и деформаций, D_{θ} , D_r , E_{θ} , E_r - компоненты векторов электрической индукции и напряженности электрического поля.

Решение краевой задачи (1) - (3) получается с помощью интегрального преобразования Меллина в виде [1,2]

$$\tau_{\theta z}^{(j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_{1j}(p, \theta)}{\Delta_j(p)} r^{-p-1} p dp, \quad \tau_{rz}^{(j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_{2j}(p, \theta)}{\Delta_j(p)} r^{-p-1} p dp \quad (5)$$

где путь интегрирования L лежит в полосе $0 < \operatorname{Re} p < \delta$, определяемой поведением функций при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$ [1,2,4]

$$\begin{aligned} F_{1j}(p, \theta) &= [c_{44}^{(j)} B_j + e_{15}^{(j)} D_j] \cos p\theta - [c_{44}^{(j)} A_j + e_{15}^{(j)} K_j] \sin p\theta \\ F_{2j}(p, \theta) &= [c_{44}^{(j)} A_j + e_{15}^{(j)} K_j] \cos p\theta + [c_{44}^{(j)} B_j + e_{15}^{(j)} D_j] \sin p\theta \\ \Delta_j(p) &= (a C_+ + a C_-)(b S_+ - b S_-) + a_0 b_2 (e_+ C_+ + e_- C_-)(C_+ - C_-) \\ 0.25 a_1 \Delta_3(p) A_j &= \bar{\varphi}_1^*(p) \eta(b) S_2 + \bar{f}_2(p) [a \eta(b) C_1 + a_0 b_2 \xi(e) S_1] u_1 + \\ &+ \bar{\psi}_1(p) b_1 e_1 \xi(e) S_2 + \bar{\psi}_2(p) e_1 (b_1 S_1^2 + b_2 e) S_2 \\ - 0.25 a_1 \Delta_3(p) K_j &= e_1 b_2 e_1^{-1} [\bar{\varphi}_1^*(p) C_2 + \bar{f}_2(p) a_1 S_1] S_1 S_2 + \\ &+ \bar{\psi}_1(p) a_1 b_2 \xi(a) S_2 + \bar{\psi}_2(p) a_1 \xi(b_2) S_1 \end{aligned} \quad (6)$$

$$0.25a_1 b_3^{-1/2} \Delta_3(p) B_j = [\bar{\varphi}_1^*(p) C_2 + \bar{f}_2(p) a_1 S_1] \eta \left(b_4 (b_5^{-1})^{j-1} \right) + \bar{\psi}_1(p) e_1 b_6 \times \\ \times \left(\frac{b}{b_0} \right)^{j-1} \xi \left(\frac{(e b_0)^{j-1}}{b_0} \right) + \bar{\psi}_2(p) \left[b_1^{-1} S_1^2 S_2 + (-1)^j b_5 \xi(b_5^{-1}) \left(\frac{b e C_2}{b_5 \xi(b_5^{-1})} \right)^{j-1} \right] \\ 0.25a_1 b_3^{-1/2} \Delta_3(p) D_j = (-1)^{j-1} e_1 \varepsilon_1^{-1} b_4 \left(\frac{b_5}{b_0} \right)^{j-1} [\bar{\varphi}_1^*(p) C_2 + \bar{f}_2(p) a_1 S_1] C_j S_{j-1} - \\ - \bar{\psi}_1(p) e_1 b_5 \xi(b_5^{-1}) \left(\frac{b \xi(a)}{b_5 \xi(b_5^{-1})} \right)^{j-1} + \bar{\psi}_2(p) \kappa_1^{j-1} \left[(\varepsilon + a_0 e) \left(\frac{b}{\varepsilon + a_0 e} \right)^{j-1} \xi(a) C_1 + \right. \\ \left. + (-1)^{j-1} b_5 \left(\frac{e_1^{-1} \varepsilon_1^{-1} b_5 S_1^2}{b_5 C_1^2} \right) C_1^2 C_2 \right]$$

$$\eta(x) = S_1 C_2 + x C_1 S_2, \quad \xi(x) = S_1 S_2 - x C_1 C_2, \quad x \xi\left(\frac{1}{x}\right) = x S_1 S_2 - C_1 C_2$$

$$b = \frac{1 + a_0}{\varepsilon + a_0 e}, \quad b_1 = \frac{\varepsilon - e}{\varepsilon + a_0 e}, \quad b_2 = \frac{a - e}{\varepsilon + a_0 e}, \quad b_3 = \frac{a \varepsilon + a_0 e^2}{\varepsilon + a_0 e}$$

$$b_4 = \frac{a + a_0 e}{a \varepsilon + a_0 e^2}, \quad b_5 = \frac{\varepsilon - e}{a \varepsilon + a_0 e^2}, \quad b_6 = \frac{a - e}{a \varepsilon + a_0 e^2}, \quad b_0 = b_4 + b_5$$

$$b_7 = b_3^{-1} - a_0 b_6, \quad b_8 = b_5^{-1} + a_0 e b_2, \quad \varepsilon_j = \varepsilon^{(j)}$$

$$C_j = \cos p \theta_j, \quad S_j = \sin p \theta_j, \quad C_+ = \cos p \theta_+, \quad S_+ = \sin p \theta_+.$$

$$a = \frac{c_{44}^{(2)}}{c_{44}^{(1)}}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon^{(2)}}{\varepsilon^{(1)}}, \quad e = \frac{e_{15}^{(2)}}{e_{15}^{(1)}}, \quad a_0 = \frac{e_{15}^{(1)} e_{15}^{(1)}}{c_{44}^{(1)} \varepsilon^{(1)}}$$

$$a_{\pm} = a \pm 1, \quad b_{\pm} = b \pm 1, \quad \theta_{\pm} = \theta_1 \pm \theta_2$$

$\bar{\varphi}_1^*(p), \bar{f}_2(p), \bar{\psi}_1(p)$ - преобразования Мелина функции $r\varphi(r), f_2(r), \psi_1(r)$ соответственно.

Формулы для компонентов вектора электрической индукции получаются из (5), (6) путем замены в $F_{1j}(p, \theta)$ и $F_{2j}(p, \theta)$ $c_{44}^{(1)}$ на $e_{15}^{(1)}$, а $e_{15}^{(1)}$ - на $(-\varepsilon_j)$.

Для исследования поведения упругих напряжений в окрестности края поверхности контакта составного тела (точка A на фиг.1) дополним прямую L влево некоторым полукругом и применим теорему о вычетах.

Если полюсами подынтегральных функций (5) являются только корни уравнения

$$\Delta_3(p) = 0 \quad (7)$$

и все они простые, будем иметь

$$\tau_{0z}^{(j)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{1j}^*(-p_n, \theta)}{\Delta_3^*(-p_n)} p_n r^{p_n-1}, \quad \tau_{rz}^{(j)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{2j}^*(-p_n, \theta)}{\Delta_3^*(-p_n)} p_n r^{p_n-1} \quad (8)$$

где $\Delta_3^*(p_n) = d\Delta(p)/dp$, $-p_n$ - корни уравнения (7), причем $\text{Re } p_n > 0$, $\text{Re } p_1 < \text{Re } p_2 < \dots, (n = 1, 2, 3, \dots)$.

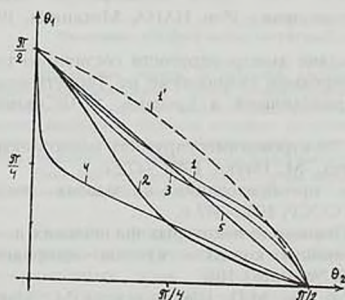
В случае существования непростых полюсов формула вычисления вычетов в таких точках будет иная [4].

На основании (8) заключаем, что около края поверхности контакта характер напряженного состояния определяется величиной действительной части первого корня $p_1 = \xi_1 + i\eta_1$. При $\xi_1 > 1$ в окрестности угловой точки A имеет место нулевое напряженное состояние (малонапряженное состояние). Если $\xi_1 < 1$, то при приближении к угловой точке A напряжения неограниченно возрастают (концентрационное состояние). В случае $\xi_1 = 1$ напряжения в окрестности точки A конечны и вообще отличны от нуля (предельное состояние).

В частном случае, когда $a = e$, из (7) следует, что

$$(a_+ C_+ + a_- C_-)(b_- S_- - b_+ S_+) = 0 \quad (9)$$

Равенство нулю первого множителя (9) приводит к известному уравнению антиплоской задачи теории упругости [5]. Соответствующая предельная кривая (построенная из условия $\text{Re } p_1 = 1$), которая в плоскости θ_1, θ_2 при конкретных значениях $a = c_{44}^{(2)} / c_{44}^{(1)}$ разделяет области малонапряженности ($\text{Re } p_1 > 1$) и концентрационного состояния ($\text{Re } p_1 < 1$), представлена на фиг.2 сплошной линией.



Фиг. 2

Равенство нулю второго множителя приводит к предельной кривой, приведенной на фиг.2 пунктирной линией.

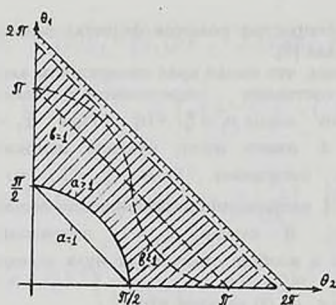
Соответствующая случаю $a = e$ предельная кривая является границей области, заштрихованной простой штриховкой (область концентрации напряжений).

Следовательно, в рассмотренном случае пьезоэффект не влияет на степень особенности напряжений.

Полагая в (5)–(7) $a = e = \varepsilon = 1$, приходим к решению задачи электроупругости однородного клина, для которого $p_1 = \pi/2(\theta_1 + \theta_2)$. Таким образом, и в однородном клине при данных граничных условиях пьезоэффект не влияет на особенность упругих напряжений.

С целью выявления основных закономерностей возникновения нулевого напряженного состояния или концентрации напряжений около края поверхности контакта составного тела на ЭВМ определены первые корни уравнения (7) в зависимости от электромеханических и геометрических параметров следующих соединяемых пар: 1. ЦТС4-ZnO, 2. ЦТС4-CdS, 3. ЦТС19-ZnO, 4. ZnO-CdS, 5. ЦТС4-ЦТС19. Материалы соединяемых пар и их свойства заимствованы из [6].

Соответствующие предельные кривые представлены на фиг. 3. Там же пунктирной линией приведена предельная кривая в предположении отсутствия пьезоэффекта.



Фиг. 3

Видно, что связанность электрических и механических полей сильно влияет на поведение упругих напряжений в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела. в данном случае имеет место расширение зоны концентрации напряжений.

Все сказанное выше о поведении упругих напряжений справедливо также для компонентов векторов электрической индукции и напряженности электрического поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Об одной антиплоской задаче электроупругости для составного тела - Изв. НАНА, Механика, 1995. №4, с. 47-54.
2. Саргсян А.М. Антиплоская задача электроупругости составного тела. Работа доложена на Международном симпозиуме по Теоретической и прикладной Механике, приходившей в Ереване, 17-19 октября 1994г.
3. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. -М.: Наука, 1988. -472 с.
4. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости.- М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1963.-367 с.
5. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Поведение некоторых физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела.- Докл. АН АрмССР, 1988, №4, с.161-165.
6. Акустические кристаллы (под ред. М.П. Шаскольской).-М.: Наука, 1982. 632 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
15.11.1995

О СУЩЕСТВОВАНИИ СДВИГОВОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ В СЛАБО-НЕОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СО СЛОЕМ

Мухсикачоян А.Р.

Ա.Ռ. Մուխիկաչոյան

Շերտով բույլ անհամասե կիսատարածությունում ստերի մակերևութային ալիքի գոյությունը մասին

Հետազոտված է համասե շերտ ունեցող փրոպրիալ բույլ անհամասե կիսատարածությունում էլյավ ալիքի ալիքների գոյության խնդիրը՝ կոմսված անհամասե միջավայրի դանրող փոփոխվող առաձգական բնութագրիկներով:

Փոխյին արագության փոփոխության տարրեր միջավայրերի համար ստացված են դասերսված հալոսարմներ և մակերևութային ալիքի գոյության պայմաններ, իսկ բարակ շերտով պարբերաբար անհամասե միջավայրի համար բերված են դասերսված կորեր: Ցույց է տրված, որ միջավայրի անհամասեությունը դառնում է «ֆիլտր» տարրեր կլկարության ստերի մակերևութային ալիքների գոյության համար:

A.R. Mukhsichachoyan

On existance of a shear surface wave in weak nonhomogeneous semi-space with layer

Исследована задача, в которой рассматривается однородный слой со слабо-неоднородной подложкой с точки зрения существования модифицированной волны Лява в зависимости от медленно изменяющихся упругих характеристик неоднородной среды. Для разных диапазонов фазовой скорости получены дисперсионные уравнения и условия существования сдвиговой поверхностной волны (СПВ). Для периодически неоднородной среды с тонким слоем приведены дисперсионные кривые.

Показано, что неоднородность среды играет роль как бы своего рода «фильтра» для существования той или иной волны СПВ.

Помимо основных типов поверхностных волн, в настоящее время предложен и изучен ряд обобщений и новых разновидностей поверхностных волн. Интересным новым обобщением волны Лява являются сдвиговые поверхностные волны (СПВ) в полупространстве с небольшой поверхностной неоднородностью, рассмотренные в работах [3-5]. В книге [2] изложена как теория рассеяния поверхностных акустических волн на приповерхностных неоднородностях, так и распространение этих волн в слоистых средах, на поверхностях переменной кривизны и т. д.

1. Представляет интерес задача, в которой рассматривается однородный слой (μ_1, ρ_1) со слабо-неоднородной подложкой $(\mu_2(x_2), \rho_2(x_2))$ с точки зрения существования модифицированной волны Лява в зависимости от переменных упругих характеристик. Слабая неоднородность среды заключается в том, что считаются медленно изменяющимися не только упругие характеристики рассматриваемой среды, но и амплитуда искомой волны, вследствие чего пренебрегаются второе производное амплитуды, а также произведения производных от амплитуд и от упругих характеристик. Выберем координатную систему таким образом, чтобы ось OX_2 была направлена в глубину подложки, а OX_1 — по направлению распространения волны.

Слой занимает область $(-h < x_2 < 0)$, а подложка — $(x_2 > 0)$. Пусть поле перемещений СПВ имеет вид: $U\{0; 0; W_i(x_1, x_2, t)\}$, $i = 1, 2$.

Уравнение движения в слое и в подложке соответственно запишутся следующим образом:

$$\Delta W_1 = c_1^{-2} \ddot{W}_1$$

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial x_1^2} + \mu_2^{-1}(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\mu_2(x_2) \frac{\partial W_2}{\partial x_2} \right] = c_2^{-2}(x_2) \ddot{W}_2 \quad (1.1)$$

где $c_1 = (\mu_1/\rho_1)^{1/2}$ и $c_2 = [\mu_2(x_2)/\rho_2(x_2)]^{1/2}$ — скорости сдвиговых объемных волн соответственно в слое и в подложке.

Граничные условия на поверхности слоя $x_2 = -h$ и на поверхности раздела слой-подложка $x_2 = 0$ запишутся соответственно следующим образом:

$$\frac{\partial W_1}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 = -h$$

$$\mu_1 \frac{\partial W_1}{\partial x_2} = \mu_0 \frac{\partial W_2}{\partial x_2}, \quad W_1 = W_2, \quad x_2 = 0 \quad (1.2)$$

где $\mu_0 = \mu_2(0)$. Решения уравнений (1.1) ищем в виде

$$W_{1,2} = \varphi_{1,2}(x_2) \exp[i(kx_1 - \omega t)]$$

Уравнения движения преобразуются к виду

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dx_2^2} + k^2 \alpha_1^2 \varphi_1 = 0 \quad (1.3)$$

$$\mu_2^{-1}(x_2) [\mu_2(x_2) \varphi_2'(x_2)]' - k^2 (1 - \eta) \varphi_2(x_2) = 0 \quad (1.4)$$

Таким образом, поле упругих перемещений СПВ в слое принимает вид

$$W_1 = [B \sin(k\alpha_1 x_2) + D \cos(k\alpha_1 x_2)] \exp[i(kx_1 - \omega t)] \quad (1.5)$$

Исходя из предположения, что среда подложки является слабо-неоднородной, ищем решение уравнения (1.4) по методу ВКБ [4]

$$\varphi_2(x_2) = A(x_2) \exp \left[-k \int_0^{x_2} \sqrt{1 - \eta(\xi)} d\xi \right] \quad (1.6)$$

где считается, что $A(x_2)$ — слабо изменяющаяся по x_2 функция, т. е. пренебрежимы $A''(x_2)$, $\mu_2'(x_2) A'(x_2)$ и т. д. Удовлетворяя (1.6) уравнению (1.4) с точностью допущения слабо-изменяющихся функций и с учетом затухания волны на бесконечности

$$0 < \eta(x_2) < 1 \quad (1.7)$$

получим поле СПВ слабо-неоднородной подложки

$$W_2 = A_0 \exp \left[-k \int_0^{x_2} \sqrt{1 - \eta(\xi)} d\xi \right] \frac{\exp[i(kx_1 - \omega t)]}{\mu_2^{1/2}(x_2) [1 - \eta(x_2)]^{1/4}} \quad (1.8)$$

Решения (1.5) и (1.8) удовлетворяют граничным условиям (1.2), в результате чего получим дисперсионное уравнение задачи

$$2kgtg(kh\alpha_1) = \alpha_0^{-2}\alpha_1^{-1}[\mu'_0\mu_0^{-1}\alpha_0^2 + c'_0c_0^{-1}(1-\alpha_0^2) + 2k\alpha_0^3] \quad (1.9)$$

где

$$\alpha_0 = (1 - \eta_0)^{1/2}, \quad \alpha_1 = (\eta_1 - 1)^{1/2}, \quad \eta_{0,1} = v^2/c_{0,1}^2, \quad (1.10)$$

$$c_0 = c_2(0), \quad g = \mu_1/\mu_0$$

В уравнение (1.9) входят параметры среды и их первые производные только при $x_2 = 0$, т. е. фазовая скорость СПВ фактически не зависит от "формы" объемных неоднородностей. Это следствие как сильных требований на "слабость" неоднородностей, так и того, что искомая волна локализована вблизи поверхности $x_2 = 0$. Необходимо отметить, что при выводе решений (1.5), (1.8) и дисперсионного уравнения (1.9) предполагалось, что α_1 является реальной, тогда, когда α_0 может быть только реальной в силу затухания волны в подложке. При рассмотрении однородной подложки, дисперсионное уравнение (1.9) сводится к классическому уравнению Лява. Если толщина слоя намного меньше длины искомой волны, то среда допускает распространение СПВ с фазовой скоростью

$$\eta_0^* = v_0^2 c_0^{-2} = \mu'_0 \mu_0^{-1} [\mu'_0 \mu_0^{-1} - c'_0 c_0^{-1}]^{-1} \quad (1.11)$$

которая с точностью совпадает со скоростью СПВ, распространяющейся в слабо-неоднородном полупространстве при $k \rightarrow 0$ [1]. Однако, должен удовлетворять условию (1.7), вследствие чего получим

$$c'_0 < 0, \quad \mu'_0 > 0 \quad \text{или} \quad c'_0 > 0, \quad \mu'_0 < 0 \quad (1.12)$$

Возможны три варианта взаимоположения постоянных величин c_0, c_1 и v_0 [6]. Рассмотрим первый вариант

$$v_0 < c_1 < c_0 \quad (1.13)$$

Здесь, как следует из (1.10), α_1 становится мнимой, а α_0 реальной.

Допустим $\alpha_1 = i\beta_1$, где $\beta_1 = (1 - \eta_1)^{1/2}$ является реальной. Тогда дисперсионное уравнение (1.9) преобразуется к виду

$$L(\eta_0) = 2Pg(1 - \eta_0)(1 - \eta_0\theta)^{1/2} \operatorname{th}[P(1 - \eta_0\theta)^{1/2}] + \\ + 2P(1 - \eta_0)^{3/2} + \mu'_0 \mu_0^{-1}(1 - \eta_0) + hc'_0 c_0^{-1} \eta_0 = 0 \quad (1.14)$$

где $\theta = c_0^2 c_1^{-2}$, $P = kh$.

Исходя из того, что функция $L(\eta_0)$, являющаяся монотонной, на краях области своего определения (1.7) принимает значения противоположных знаков, условия существования СПВ запишутся в виде:

а) Если $\mu'_0 > 0$ и $c'_0 < 0$, то могут распространяться СПВ любой длины.

б) Если $\mu'_0 < 0$ и $c'_0 \geq 0$, то могут распространяться СПВ длиной, удовлетворяющей неравенству

$$2P[1 + g \operatorname{th} P] < -h\mu'_0 \mu_0^{-1} \quad (1.15)$$

в) Если $\mu_0' < 0$ и $c_0' < 0$, то могут распространяться СПВ длиной, удовлетворяющей неравенству

$$2P[1 + \operatorname{gth} P] > -h\mu_0'\mu_0^{-1} \quad (1.16)$$

Если не выполняется ни одно из перечисленных условий, то среда не допускает существования СПВ для первого варианта (1.13).

Сравнивая вышеполученные условия с условиями существования СПВ в слабо-неоднородном полупространстве, заметим, что за счет изменения длины волны класс допускаемых волн уменьшается в случае выполнения условий б) и, наоборот, увеличивается в случае в). При выполнении условий а) класс волн изменений не терпит. Однако, необходимо отметить, что к вышеперечисленным условиям а), б) и в) приходится присоединить условия, полученные от требования ограниченности функции $\operatorname{th}(P\beta_1)$. После несложных вычислений эти условия запишутся

$$P_1 < P < P_2 \quad (1.17)$$

где

$$P_1 = P_2 \left[1 + g(1 - \eta_0 \theta)^{1/2} (1 - \eta_0)^{-1/2} \right]^{-1}$$

$$P_2 = (-h/2)(1 - \eta_0)^{-3/2} \left[(1 - \eta_0) \mu_0' \mu_0^{-1} + c_0' c_0^{-1} \eta_0 \right]$$

Тут нужно, чтобы P_2 было положительным, что, в свою очередь, приводит к усложнению уже имеющиеся условия (1.12), а именно: для каждой из условий а), б) и в) оно запишется соответственно в следующих формах:

$$\eta_0^* < \eta_0 < 1 \quad (1.18a)$$

$$0 < \eta_0 < \eta_0^* \quad (1.18б)$$

$$0 < \eta_0 < 1 \quad (1.18в)$$

2. Для наглядности рассмотрим конкретный пример слабо-неоднородной среды. Допустим плотность и модуль сдвига среды изменяются по следующим законам:

$$\rho = \rho_0 (1 + \varepsilon_1 \sin(\pi x_2 / l)) \quad (2.1)$$

$$\mu = \mu_0 (1 + \varepsilon_2 \sin(\pi x_2 / l)) \quad (2.2)$$

с условием $0 < \varepsilon_{1,2} < 1$, где ρ_0, μ_0 - соответствующие значения ρ и μ на границе $x_2 = 0$, а l - период изменения неоднородности по глубине подложки. Для среды (2.1), (2.2) выполняемы условия существования волны а), если $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Дисперсионное уравнение (1.14) в данном случае примет вид

$$2Pg(1 - \eta_0)(1 - \eta_0 \theta)^{1/2} \operatorname{th} \left[P(1 - \eta_0 \theta)^{1/2} \right] +$$

$$+ 2P(1 - \eta_0)^{3/2} + q\varepsilon_2(1 - d\eta_0) = 0 \quad (2.3)$$

здесь $q = \pi h / l$, $d = 3/2$.

При выводе (2.3) предполагалось, что $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$. Если толщина слоя намного меньше периода неоднородностей ($h \ll l$), а это значит, что слой не "чувствует" неоднородности подложки, приходим к классической

задаче Лява, которая при расположении скоростей (1.13) решений не имеет.

Предположение о тонкости слоя позволяет трансцендентное уравнение (2.3) привести к квадратному уравнению

$$2P^2 g(1 - \eta_0)(1 - \eta_0 \theta) + 2P(1 - \eta_0)^{3/2} + q\epsilon_2(1 - d\eta_0) = 0 \quad (2.4)$$

Чтобы провести исследование дисперсионных кривых, задаваемых функциональной зависимостью $f(\eta_0, P) = 0$ по (2.4), зададим значения некоторых постоянных в табл. 1 (А).

Кривая фазовой скорости, начиная со значения $\eta^* = 2/3$, монотонно возрастает и стремится к значению $\eta_\infty = \eta_0(P \rightarrow \infty)$, определенное по

$$2k(1 - \eta_\infty)^{3/2} + \eta_\infty c_0' c_0^{-1} + \mu_0' \mu_0^{-1}(1 - \eta_\infty) + 2kg(1 - \theta\eta_\infty)^{1/2}(1 - \eta_\infty).$$

Переходим к исследованию неоднородной среды (2.1) с условием

$$-1 < \epsilon_{1,2} < 0 \quad (2.5)$$

В данном случае выполняются условия б), если $\epsilon_2 \geq \epsilon_1$. Исследуем (2.4) с учетом (1.15), которое при длинноволновом приближении принимает вид

$$0 < P < P_0 \quad (2.6)$$

где $P_0 = [\sqrt{1 - 2gq\epsilon_2} - 1](2g)^{-1}$

Из-за длинноволнового приближения $P_0 \ll 1$, следовательно,

$$g \gg -\epsilon_2(q/2) - 1 \quad (2.7)$$

Поскольку g должна быть положительной, получим

$$g > -2/\epsilon_2 \quad (2.8)$$

Постоянные g , θ , q и ϵ_2 зададим в табл. 1 (Б). В этом случае кривая фазовой скорости, начиная со значения $\eta^* = 2/3$ ($P \rightarrow 0$) и монотонно убывая, стремится к значению P_0 ($\eta_0 \rightarrow 0$).

И, наконец, в последнем случае этого варианта рассмотрим неоднородную среду (2.1) с условиями

$$0 \leq \epsilon_1 \ll 1, \quad -1 < \epsilon_2 < 0 \quad (2.9)$$

Нетрудно убедиться в том, что здесь выполняются условия в). Опять исследуется дисперсионное уравнение (2.4), где $d = 1/2$ (поскольку берется $\epsilon_1 = 0$). Условие (1.16) упрощается, принимая вид $P > P_0$. Исходя из соображений, проведенных в предыдущем случае, получим условия (2.7) и (2.8). Дисперсионная кривая начинается со значения P_0 и монотонно возрастая, асимптотически стремится к значению η_∞ .

Переходим к рассмотрению второго варианта расположения скоростей

$$c_1 < v_0 < c_0 \quad (2.10)$$

Так как в этом случае α_1 остается реальной, поэтому исследуется дисперсионное уравнение (1.9). Первая мода начинается со значения

(1.11) и с возрастанием P монотонно убывает, стремясь к нижнему пределу рассматриваемого диапазона скоростей c_1 . В отличие от предыдущих вариантов, здесь имеем моды высших порядков. Они, отделяясь от верхней границы рассматриваемого диапазона скоростей, также монотонно убывают с возрастанием P .

В конце обсудим третий вариант расположения скоростей

$$v_0 < c_1 < c_0 \quad (2.11)$$

Настоящий вариант представляет из себя комбинацию двух вариантов – при $c_1 < v < c_0$ приходим ко второму варианту, а при $0 < v < c_1$ исследование уравнения (1.14) проводится аналогично исследованию, сделанному для первого варианта (1.13). Однако, условия существования моды здесь на P ставят новые ограничения:

А3) Если $\mu'_0 > 0$ и $c'_0 < 0$, то могут распространяться СПВ длиной

$$0 < P < P_3 \quad (2.12)$$

где
$$P_3 = -\frac{h}{2} \left[c'_0 c_0^{-1} \theta^{-1} (1 - \theta^{-1})^{-1/2} + \mu'_0 \mu_0^{-1} (1 - \theta^{-1})^{-1/2} \right]$$

Учитывая условие (1.18а) и область определения в данном случае, получим

$$\eta_0^* < \eta_0 < \theta^{-1}, \quad 1 < \theta < 1/\eta_0^*$$

Б3) Если $\mu'_0 < 0$ и $c'_0 > 0$, то могут распространяться СПВ длиной

$$2P[1 + g \tanh P] > -\mu'_0 \mu_0^{-1} h \quad P > P_3,$$

В3) Если $\mu'_0 < 0$ и $c'_0 < 0$, то могут распространяться СПВ длиной

$$2P[1 + g \tanh P] < -\mu'_0 \mu_0^{-1} h \quad 0 < P < P_3$$

Далее целесообразно исследования продолжать для определенной неоднородной среды. Пусть среда задана в виде (2.1), (2.2). Условия А3) выполняются при $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Предполагая $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ и учитывая табл. 1(В), получим численные ограничения для η_0 , θ и P .

Таблица 1

$\backslash$ (I)	А	Б	В	Г
g	1	1	1	1
θ	0.5	0.5	1.2	1.2
q	1	300	1	300
ε_2	0.01	-0.01	0.01	-0.01

В области $\theta^{-1} < \eta_0 < 1$ они имеют вид подобно моде высших порядков. Нулевая мода, начиная со значения $\eta_0^* = 2/3$, монотонно возрастает до конца области определения θ^{-1} , при которой $P = P_3$. Неоднородная среда (2.1), (2.5) допускает распространение СПВ, если $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$. С помощью табл. 1 (Г), предположения $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ и условий (2.6)-(2.8) получаем численные ограничения для η_0 , P , q , g . Легко заметить,

что нулевая мода изменений не терпит по сравнению с единственной модой. А в области $\theta^{-1} < \eta_0 < 1$ существуют моды высших порядков. Условия существования волны ВЗ выполняются для среды (2.1), (2.7). Считая, что $\varepsilon_1 = 0$ и используя постоянные табл. 1 (Г), получим новые ограничения для P , η_0 . Как видно, нулевая мода начинается со значения P_0 и монотонно возрастает до P_3 .

При втором (2.10) и третьем (2.11) вариантах фазовая скорость принимает единственное значение только в том случае, если P меньше, чем то его значение, которое принимает вторая кривая при значении $c_0(\eta_0 = 1)$. Пусть $\eta_0 = 1$, тогда $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = (\theta - 1)^{1/2}$. Исходя из (1.9), необходимое условие запишется $P < (3/2)\pi(\theta - 1)^{-1/2}$. При первом варианте (1.13) все три исследованные среды допускали единственную моду фазовой скорости СПВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В., Мухсихачоян А.Р. Сдвиговая поверхностная волна в слабо-неоднородных упругих средах. - Акуст. жур. 1995, т.41, №6, с. 3-8.
2. Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. - М.: Наука, 1991. 415 с.
3. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. - М.: Наука, 1981. 288 с.
4. F.A. Robinson, M.T. Silvia Digital Foundations of time Series Analysis. Vol. 2: Wave-Equation Space-Time Processing. San-Francisco, Holden-Day, Inc., 1981. p.534.
5. G.A. Maugin. Elastic Surface Waves with Transverse Horizontal Polarization//Advances In Applied Mechanics. V.23, p.373-434.
6. R.G. Curtis and M. Redwood. Transverse surface waves on a piezoelectric material carrying a metal layer of finite thickness// J. Appl. Phys., 1973, Vol.44, №5.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
27.11.1995

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПО ПРОДОЛЬНОМ КОЛЕБАНИИМ СТЕРЖНЯ, ИЗГОТОВЛЕННОГО ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

Хачатрян А.А.

Ա.Ա. Խաչատրյան
Տարածողից նյութից սյառաստված ձողի երկայնական
տատանումների մի խնդրի մասին

Ինտարկվում է ծուրերում ունեցված ձողի երկայնական տատանումները, երբ ձողի ինչ որ կտրվածքում նրա տատանքի ուղղությամբ ազդող ուժը հանկարծ հեռացվում է:
Առաջին կետում բերվում է այդ խնդրի լուծումը, երբ ձողը սյառաստված է ստիկական նյութից: Երկրորդ կետում բերվում է այդ նույն խնդրի լուծումը մի մասնավոր դեպքի համար, երբ ձողը սյառաստված է սալամանյուց նյութից:

A.A. Khachatryan

On a problem of the longitudinal vibration of the rod made from different moduls material

Рассматривается продольное колебание стержня с закрепленными концами, когда действующая вдоль оси стержня сила, приложенная в некотором его сечении, внезапно удаляется.

В первом пункте приводится решение этой задачи для стержня, изготовленного из обычного материала. Во втором пункте, при одном частном случае, решается эта задача, когда стержень изготовлен из разномодульного материала.

1. Стержень длины l с закрепленными концами находится под действием силы P , приложенной в сечении $x = l_1$ и направленной вдоль оси стержня. В момент времени $t = 0$ внезапно удаляется сила и тогда частицы стержня начнут совершать колебательные движения.

Уравнение движения имеет вид

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a^2 = E/\rho \quad (1.1)$$

где E , ρ - модуль упругости и плотность материала стержня. Граничные и начальные условия в данной задаче следующие:

$$\begin{aligned} &\text{при } x = 0 \quad \text{и} \quad x = l \quad u = 0, \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ &\text{при } t = 0 \quad u(x, 0) = u_0 \begin{cases} x/l_1 & 0 \leq x \leq l_1 \\ (l-x)/l_2 & l_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad u_0 = \frac{Pl_1 l_2}{EF l} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $l_2 = l - l_1$, F - площадь поперечного сечения стержня.

Пользуясь методом разделения переменных из уравнения (1.1), после удовлетворения граничным условиям и первому начальному условию, для продольного перемещения получим

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi a t}{l} \quad (1.3)$$

После удовлетворения второму начальному условию, предварительно разлагая функцию $u(x, 0)$ (1.2) в ряд Фурье по синусам, для A_n получим

$$A_n = \frac{2u_0 l^2}{\pi^2 l_1 l_2} \frac{1}{n^2} \frac{\pi l_1}{l} \quad (1.4)$$

В силу этого, для $u(x, t)$ окончательно будем иметь

$$u(x, t) = \frac{2u_0 l^2}{\pi^2 l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi l_1}{l} \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi n a t}{l} \quad (1.5)$$

Отсюда видно, что частицы стержня совершают периодическое движение с периодом, равным $T = 2l/a$. В частном случае, когда сила приложена в середине стержня ($l_1 = l_2 = l/2$), из (1.5) получается известное решение [1]

$$u(x, t) = \frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin(2n-1) \frac{\pi x}{l} \cos(2n-1) \frac{\pi a t}{l} \quad (1.6)$$

Из (1.5) в момент, когда $t = T/2 = l/a$, находим

$$\begin{aligned} u\left(x, \frac{l}{a}\right) &= -\frac{2u_0 l^2}{\pi^2 l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi l_2}{l} \sin \frac{\pi x}{l} = \\ &= -u_0 \begin{cases} x/l_2 & 0 \leq x \leq l_2 \\ (l-x)/l_1 & l_2 \leq x \leq l \end{cases} \end{aligned} \quad (1.7)$$

то есть при $t = l/a$ часть стержня ($0 \leq x \leq l_2$) будет находиться в сжатом, а остальная часть его в растянутом состоянии. Из физических соображений это очевидно, так как нет потери энергии и это положение стержня соответствует случаю, когда если бы сила P была приложена в сечении $x = l_2$ и была направлена в сторону $x = 0$.

Заметим, что ряд (1.5) сходится весьма медленно и поэтому непосредственным использованием его сложно будет судить о перемещениях любого сечения стержня с течением времени. Однако есть возможность суммировать этот ряд, после чего все эти вопросы решаются легко.

Для суммирования ряда (1.5) прежде всего необходимо там произведение, содержащее x и t , представить в виде суммы и использовать разложение, получаемое при представлении функции $u(x, 0)$ из (1.2) в ряд Фурье с продолжением ее нечетным образом.

Не останавливаясь на ходе суммирования ряда (1.5), приведем окончательные выражения для перемещения $u(x, t)$ в отдельных интервалах времени

$$0 < t_1 < l_2/a$$

$$u(x, t_1) = \frac{u_0}{2l_1 l_2} \begin{cases} 2l_2 x & 0 \leq x \leq l_1 - at_1 \\ l(l_1 - at_1) - (l_1 - l_2)x & l_1 - at_1 \leq x \leq l + l_2 - at_1 \\ -2l_1(x - l) & l + l_2 - at_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (1.8)$$

На фиг.1 приведен график функции $u(x, t_1)$ (для случая $l_1 > l_2$), представляющий собой ломаную линию OB_1C_1C . Ломаная OBC соответствует моменту $t_1 = 0$, а OK_1C - моменту $t_1 = l_2/a$.

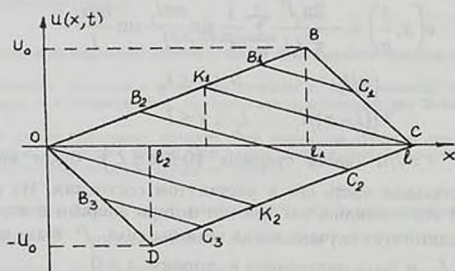
$$l_2/a < t_2 < l_1/a$$

$$u(x, t_2) = \frac{u_0}{2l_1l_2} \begin{cases} 2l_2x & 0 \leq x \leq l_1 - at_2 \\ l(l_1 - at_2) - (l_1 - l_2)x & l_1 - at_2 \leq x \leq l + l_2 - at_2 \\ -2l_2(x - l) & l + l_2 - at_2 \leq x \leq l \end{cases} \quad (1.9)$$

График этой функции является ломаная OB_2C_2C , а при $t = l_1/a$ график принимает положение OK_2C .

$$l_1/a < t_3 < l/a$$

$$u(x, t_3) = \frac{u_0}{2l_1l_2} \begin{cases} 2l_1x & 0 \leq x \leq at_3 - l_1 \\ l(l_1 - at_3) - (l_1 - l_2)x & at_3 - l_1 \leq x \leq l + l_2 - at_3 \\ 2l_2(x - l) & l + l_2 - at_3 \leq x \leq l \end{cases} \quad (1.10)$$



Фиг. 1

График этой функции является ломаная OB_3C_3C , а при $t_3 = l/a$ график принимает положение ODC .

$$l/a < t_4 < (l + l_2)/a$$

$$u(x, t_4) = \frac{u_0}{2l_1l_2} \begin{cases} -2l_1x & 0 \leq x \leq l + l_2 - at_4 \\ -l(l + l_2 - at_4) - (l_1 - l_2)x & l + l_2 - at_4 \leq x \leq at_4 - l_1 \\ 2l_2(x - l) & at_4 - l_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (1.11)$$

График этой функции (чтобы не загромождать график) имеет примерный вид, как ломаная OB_3C_3C , а при $t_4 = (l + l_2)/a$ график принимает положение OK_2C .

$$(l+l_2)/a < t_5 < (l+l_1)/a$$

$$u(x, t_5) = \frac{u_0}{2l_1 l_2} \begin{cases} 2l_2 x & 0 \leq x \leq at_5 - l - l_2 \\ l(at_5 - l - l_2) - (l_1 - l_2)x & at_5 - l - l_2 \leq x \leq at_5 - l_1 \\ 2l_2(x - l) & at_5 - l_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (1.12)$$

График этой функции имеет примерный вид, как ломаная OB_2C_2C , а при $t_5 = (l+l_1)/a$ график принимает положение OKC .

$$(l+l_1)/a < t_6 < 2l/a$$

$$u(x, t_6) = \frac{u_0}{2l_1 l_2} \begin{cases} 2l_2 x & 0 \leq x \leq at_6 - l - l_2 \\ l(at_6 - l - l_2) - (l_1 - l_2)x & at_6 - l - l_2 \leq x \leq 2l + l_1 - at_6 \\ -2l_1(x - l) & 2l + l_1 - at_6 \leq x \leq l \end{cases} \quad (1.13)$$

График этой функции имеет примерный вид, как ломаная OB_1C_1C , а при $t_6 = 2l/a$ график принимает положение OBC . Этим и завершается период колебания.

Негрудно заметить, что все прямые B_1C_1 и K_1C , OK_2 параллельны между собой и их наклон к оси x определяется величиной $-u_0(l_1 - l_2)/2l_1 l_2$.

Следует отметить, что аналогичный результат, но совершенно другими методами, получен в книге [2] при решении задачи о поперечных колебаниях струны закрепленной в обоих концах, а это не удивительно, так как с точки зрения математики эти задачи идентичны.

2. Рассмотрим теперь поставленную в пункте задачу для случая, когда стержень изготовлен из разномодульного материала. Как известно [3], в этом случае уравнение движения для растянутой зоны есть

$$a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a_1^2 = E^+/\rho \quad (2.1)$$

а для сжатой зоны-

$$a_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a_2^2 = E^-/\rho \quad (2.2)$$

где E^+ и E^- - модули упругости при растяжении и сжатии.

Сложность решения этой задачи заключается в том, что с течением времени в процессе колебания становится невозможным четко определить зоны растяжения и сжатия. Однако, в одном частном, когда место приложения силы P удовлетворяет условию

$$l_1/l_2 = a_1/a_2 = \sqrt{E^+/E^-} \quad (2.3)$$

эта трудность преодолевается и задача решается до конца.

В начальный момент часть стержня $(0 \leq x \leq l_1)$ находится в растянутом, а остальная часть $(l_1 \leq x \leq l)$ - в сжатом состоянии. С начала удаления силы P ($t=0$) до некоторого пока неизвестного времени уравнение движения для первой части есть (2.1), а для второй части - (2.2). В этом промежутке времени граничные и начальные условия те же, что и

в задаче первого пункта (1.2) с той лишь разницей, что здесь величина u_0 , при учете (2.3), имеет вид

$$u_0 = \frac{Pl_1 l_2}{Fl\sqrt{E^+ E^-}} \quad (2.4)$$

Кроме того, к граничным условиям добавляется также условие

$$u(l_1 - 0, t) = u(l_1 + 0, t) \quad (2.5)$$

Решение для растянутой части, удовлетворяющем первому граничному и первому начальному условиям, можно представить в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \omega_n x \cos \omega_n a_1 t \quad 0 \leq x \leq l_1 \quad (2.6)$$

Разлагая теперь в ряд Фурье по синусам функцию

$$f_1(x) = \frac{u_0}{l_1} \begin{cases} x & 0 \leq x \leq l_1 \\ 2l_1 - x & l_1 \leq x \leq 2l_1 \end{cases} \quad (2.7)$$

и приравнявая ее к $u(x, 0)$ из (2.6), получим

$$A_n = \frac{8u_0}{\pi^2} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}, \quad \omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l_1} \quad (2.8)$$

Для сжатой части производим замену $l - x = y$. Тогда для ее решения, удовлетворяющего второму граничному и первому начальному условиям, представится в виде

$$u(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \Omega_n y \cos \Omega_n a_2 t \quad 0 \leq y \leq l_2 \quad (2.9)$$

Разлагая в ряд Фурье по синусам функцию

$$f_2(y) = \frac{u_0}{l_2} \begin{cases} y & 0 \leq y \leq l_2 \\ 2l_2 - y & l_2 \leq y \leq 2l_2 \end{cases} \quad (2.10)$$

и приравнявая ее к $u(y, 0)$ из (2.9), получим

$$B_n = \frac{8u_0}{\pi^2} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}, \quad \Omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l_2} \quad (2.11)$$

В результате сравнения (2.8) и (2.11) будем иметь

$$A_n = B_n, \quad \omega_n l_1 = \Omega_n l_2 \quad (2.12)$$

Таким образом, решение для $u(x, t)$ в рассматриваемом промежутке времени, с учетом (2.3), можно представить в виде

$$u(x, t) = \frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2l_0} \times \begin{cases} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l_1} & 0 \leq x \leq l_1 \\ \sin \frac{(2n-1)\pi(l-x)}{2l_2} & l_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.13)$$

удовлетворяющее также граничному условию (2.5). Здесь $l_0 = l_1/a_1 = l_2/a_2$ - время, при котором волна растяжения из точки

$x = l_1$ доходит до точки $x = 0$, а волна сжатия - из точки $x = l_1$ до точки $x = l$.

Следует отметить, что формула для $u(x, t)$ (2.13) имеет силу только для промежутка времени $0 \leq t \leq t_0$.

Из (2.13) видно, что в момент, когда $t = t_0$, $u(x, t_0) = 0$, то есть стержень принимает свое недеформированное положение. Но частицы стержня продолжают свои движения. В течение времени от $t = t_0$ до $t = 2t_0$ волна сжатия от точки $x = 0$ достигает в точку $x = t_0 a_1 = l_2$, а волна растяжения - от точки $x = l$ также до точки $x = l - t_0 a_1 = l_2$. Значит, в промежутке времени $t_0 \leq t \leq 2t_0$ часть стержня $0 \leq x \leq l_2$ будет находиться в сжатом, а часть $l_2 \leq x \leq l$ в растянутом состоянии.

Скорость движения частиц стержня в момент, когда $t = t_0$, есть

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_0} = -\frac{4u_0}{\pi t_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \begin{cases} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l_1} & 0 \leq x \leq l_1 \\ \sin \frac{(2n-1)\pi(l-x)}{2l_2} & l_1 \leq x \leq l \end{cases} = -\frac{u_0}{t_0} \quad (2.14)$$

В промежутке времени $t_0 \leq t \leq 2t_0$ уравнение движения для части стержня $0 \leq x \leq l_2$ есть (2.2), а для части $l_2 \leq x \leq l$ - (2.1). Здесь граничные условия те же, что и при $0 \leq t \leq t_0$, кроме (2.5), которое заменяется на $u(l_2 - 0, t) = u(l_2 + 0, t)$, а начальные условия следующие:

$$\text{при } t = t_0 \quad u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{u_0}{t_0} \quad (2.15)$$

Здесь ход решения в принципе тот же, как и для промежутка времени $0 \leq t \leq t_0$. После удовлетворения всем граничным и начальным условиям, решение для $u(x, t)$ в промежутке времени $t_0 \leq t \leq 2t_0$ представим в виде:

$$u(x, t) = \frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2t_0} \times \begin{cases} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l_2} & 0 \leq x \leq l_2 \\ \sin \frac{(2n-1)\pi(l-x)}{2l_1} & l_2 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.16)$$

Здесь, принимая $t = 2t_0$, получим

$$u(x, 2t_0) = -\frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \times$$

$$x \begin{cases} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l_2} & 0 \leq x \leq l_2 \\ \sin \frac{(2n-1)\pi(l-x)}{2l_1} & l_2 \leq x \leq l \end{cases} = -u_0 \begin{cases} \frac{x}{l_2} \\ \frac{l-x}{l_1} \end{cases} \quad (2.17)$$

Сравнивая $u(x, 2t_0)$ с $u(x, 0)$ замечаем, что l_1 и l_2 поменялись местами и изменился знак плюс на минус. Это положение стержня (при $t = 2t_0$) соответствует случаю, когда если бы сила P была приложена в сечении стержня $x = l_2$ и была направлена в сторону $x = 0$. Таким образом, в момент, когда $t = 2t_0$, часть стержня в интервале $0 \leq x \leq l_2$ находится в сжатом, а другая часть ($l_2 \leq x \leq l$) - в растянутом состоянии. Далее за время $l_2/a_2 = t_0$ волна сжатия из точки $x = l_2$ доходит до точки $x = 0$, а волна растяжения - из точки $x = l_2$ до точки $x = l$. Поэтому в промежутке времени $2t_0 \leq t \leq 3t_0$ уравнение движения для части стержня $0 \leq x \leq l_2$ есть (2.2), а для части $l_2 \leq x \leq l$ - (2.1). Граничные условия те же, что и для промежутка времени $t_0 \leq t \leq 2t_0$, а начальные условия - при $t = t_0$ $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, а $u(x, 2t_0)$ определяется функцией (2.17). После решения и некоторых преобразований для $u(x, t)$ получаем формулу, совпадающую с (2.16). Следовательно, выражение для $u(x, t)$ (2.16) представляет собой решение задачи для промежутка времени $t_0 \leq t \leq 3t_0$.

Из (2.16) видно, что при $t = 3t_0$ $u(x, 3t_0) = 0$, то есть стержень снова принимает свое недеформированное положение. Но частицы стержня продолжают свои движения вдоль положительного направления оси x . В течение времени от $t = 3t_0$ до $t = 4t_0$ волна растяжения от точки $x = 0$ достигает до точки $x = l_1$, а волна сжатия - от точки $x = l$ также до точки $x = l_1$. Значит, в промежутке времени $3t_0 \leq t \leq 4t_0$ часть стержня $0 \leq x \leq l_1$ будет находиться в растянутом, а остальная часть - в сжатом состоянии. Чтобы не повторяться, отметим, что выражение для $u(x, t)$ в промежутке времени $3t_0 \leq t \leq 4t_0$ совпадает с выражением (2.13), полученным для промежутка времени $0 \leq t \leq t_0$.

Из (2.13) видно, что при $t = 4t_0$ $u(x, 4t_0) = u(x, 0)$, стержень принимает свое первоначальное положение. Поэтому здесь мы имеем дело с периодическим движением, с периодом, равным $4t_0$.

Таким образом, поставленная здесь задача решена. Еще раз отметим, что для промежутков времени $0 \leq t \leq t_0$ и $3t_0 \leq t \leq 4t_0$ решение представляется формулой (2.13), а для промежутка времени $t_0 \leq t \leq 3t_0$ - формулой (2.16).

В частном случае, когда стержень изготовлен из обычного материала ($E^+ = E^-$), из (2.13) и (2.16) получается формула (1.6), но не

формула (1.5), так как из-за принятого нами соотношения (2.3) следует, что $l_1 = l_2 = l/2$.

Здесь, как и в первом пункте, для четкого представления о том, что происходит с перемещениями частиц стержня в течение времени, необходимо суммировать ряды в формулах (2.13) и (2.16).

Для суммирования ряда первой строки формулы (2.13) пользуемся рядом Фурье по синусам функции (2.7), а для второй строки - функцией (2.10). Для суммирования же рядов формулы (2.16) пользуемся теми же разложениями, но в соответствующих местах, поменяв местами l_1 и l_2 .

Не останавливаясь на ходе суммирования этих рядов, приведем окончательные выражения для перемещения $u(x, t)$ в отдельных интервалах времени.

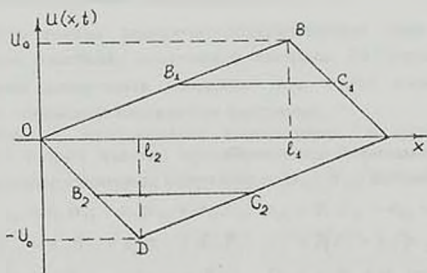
$$0 < t_1 < t_0$$

$$u(x, t_1) = u_0 \begin{cases} x/l_1 & 0 \leq x \leq l_1 - a_1 t_1 \\ (t_0 - t_1)/t_0 & l_1 - a_1 t_1 \leq x \leq l_1 + a_2 t_1 \\ (l - x)/l_2 & l_1 + a_2 t_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.18)$$

На фиг. 2 приведен график функции $u(x, t_1)$ (для случая $l_1 > l_2$), представляющий собой ломаную линию OB_1C_1C . Ломаная OBC соответствует моменту $t_1 = 0$, а прямая OC - моменту $t_1 = t_0$.

$$t_0 < t_2 < 3t_0$$

$$u(x, t_2) = -u_0 \begin{cases} x/l_2 & 0 \leq x \leq 3l_2 - a_1 t_2 \\ (3t_0 - t_2)/t_0 & 3l_2 - a_1 t_2 \leq x \leq a_1 t_2 + l_2 - 2l_1 \\ (l - x)/l_1 & a_1 t_2 + l_2 - 2l_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.19)$$



Фиг. 2

Графиком этой функции при $t_0 < t_2 < 2t_0$ является ломаная OB_2C_2C , а при $t = 2t_0$ график принимает положение ODC . График же этой функции при $2t_0 < t_2 < 3t_0$ имеет примерный вид, как ломаная OB_2C_2C , а при $t_2 = 3t_0$ график представляет собой прямую OC .

$$3t_n < t_3 < 4t_n$$

$$u(x, t_3) = u_0 \begin{cases} x/l_1 & 0 \leq x \leq a_1 t_3 - 3l_1 \\ (t_3 - 3t_0)/t_0 & a_1 t_3 - 3l_1 \leq x \leq l + 3l_2 - a_2 t_3 \\ (l - x)/l_2 & l + 3l_2 - a_2 t_3 \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.20)$$

График этой функции имеет примерный вид, как ломаная OB_1C_1C а при $t_3 = 4t_0$ график принимает положение OBC . Этим и завершается период колебания.

В заключение отметим, что прямые B_1C_1 , B_2C_2 параллельны оси x .

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Колебание в инженерном деле.-М.: Физматгиз, 1959. 440 с.
2. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики, Выпуск 3.-М.: Изд. Мир, 1970. 340 с.
3. Хачатрян А.А. О продольных колебаниях призматических стержней, изготовленных из разномодульного материала. - АН СССР, Инж. журнал МТТ, 1967, №5.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
2.09.1996

ОБ ОТДЕЛЕНИИ ПЛАНАРНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИН Մկրտչյան Ա.Ր.

Լ.Ռ. Մկրտչյան

Բարակ պիեզոէլեկտրիկ սալերի սղանար և ընդլայնական տատանումների անջատման մասին

Աշխատանքում դիտարկվում են ընդլայնման բնագավառում ճառի դասի բալասի պիեզոէլեկտրիկ սալերի ազատ և հարկադրական տատանումները։ Սալերի լարվածա-ղեկարկման վիճակի համար ընդունվում է դոտական տեսությունը՝ Ի տարբերություն հայտնի ենտագուստրոնները։ Լեկարական դաշտի համար ոչ մի կիսարկղ չի դրվում։ Ընդունվում է միայն, որ Լեկարական դաշտի սրտենցիպալ կարելի է ներկայացնել ընդլայնման կարգիմասի եկտոմանր սիմետրիկ և հակասիմետրիկ ֆունկցիաների գումարի տեսակով։ Ձեռքը է որովմ, որ արդյակի Լեկարական եղրային սլայմանների դեպքում սլայմար տատանումները, որոնց մեջ ճասնակցում է Լեկարական դաշտի սրտենցիպալ հակասիմետրիկ մասը, տեղանկում են ընդլայնման տատանումները, որոնց մեջ մտնակցում է նաև Լեկարական դաշտի սրտենցիպալ սիմետրիկ մասը։ Բերվում է ստացված արդյունքների բնային համեմատությունը։

L.R. Mkrtchian

On separation of transverse and planar vibrations of piezoelectric plates

В работе рассматриваются свободные и вынужденные колебания поперечно-поляризованных тонких пьезоэлектрических пластин класса бипл. Относительно напряженно-деформированного состояния пластины принимается классическая теория. В отличие от известных исследований, на потенциал электрического поля гипотезы не делается, кроме того, что потенциал поля можно представить в виде суммы симметричных и антисимметричных относительно поперечной координаты, функций. Показывается, что при определенных электрических граничных условиях планарные колебания (колебания обобщенного плоского состояния) с антисимметричной частью потенциала электрического поля отделяются от поперечных колебаний с симметричной частью потенциала поля. Приводится численное сравнение полученных результатов.

1. Пусть тонкая поперечно-поляризованная пьезоэлектрическая прямоугольная пластинка постоянной толщины $2h$ отнесена к системе прямоугольных декартовых координат так, чтобы плоскость (XOY) совпадала со срединной плоскостью пластинки.

Упрощенные материальные соотношения, в которых согласно классической теории пластин пренебрегаются нормальное напряжение σ_{33} и поперечные сдвиговые напряжения σ_{31} , σ_{32} , возьмем в виде:

$$\begin{aligned} e_{11} &= s_{11}\sigma_{11} + s_{12}\sigma_{22} + d_{31}E_3, & e_{31} &= 0, & e_{31} &= e_{32} = 0 \\ e_{22} &= s_{12}\sigma_{11} + s_{11}\sigma_{22} + d_{31}E_3, & e_{12} &= 2(s_{11} - s_{12})\sigma_{12} \\ D_1 &= \epsilon_1 E_1, & D_2 &= \epsilon_1 E_2, & D_3 &= \epsilon_3 E_3 + d_{31}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь D_i - компоненты вектора электрической индукции, а E_i - компоненты напряженности поля, для которых имеем

$$E_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

Тогда, на основе гипотезы Кирхгофа из (1.1) можно найти напряжения в пластинке по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + d_{31}(1+\nu) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + d_{31}(1+\nu) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)\end{aligned}\quad (1.2)$$

а также компоненты вектора электрической индукции

$$\begin{aligned}D_3 &= \frac{d_{31}E}{1-\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - z \Delta w \right) - \left(\epsilon_3 - \frac{2Ed_{31}^2}{1-\nu} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ D_1 &= -\epsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad D_2 = -\epsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y}\end{aligned}$$

Здесь u, v, w — перемещения срединной плоскости пластинки. Из условий статической эквивалентности, вместо напряжений удобно ввести внутренние силы и моменты, отнесенные к единице длины срединной плоскости пластинки.

$$\begin{aligned}T_1 &= C \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + A(\varphi_+ - \varphi_-); \quad T_2 = C \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + A(\varphi_+ - \varphi_-) \\ S &= \frac{1-\nu}{2} C \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad H = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + hA \left(\varphi_+ + \varphi_- - \frac{1}{h} \int_{-h}^h \varphi dz \right) \\ M_2 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + hA \left(\varphi_+ + \varphi_- - \frac{1}{h} \int_{-h}^h \varphi dz \right)\end{aligned}\quad (1.3)$$

где введены следующие обозначения:

$$C = \frac{2Eh}{1-\nu^2}, \quad A = \frac{d_{31}E}{1-\nu}, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$$

а φ_+ и φ_- — значения электростатического потенциала на лицевых плоскостях пластинки $z = \pm h$.

Рассмотрим следующие поверхностные условия:

$$\sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0 \quad (1.4)$$

$$a) \quad \varphi = \varphi^{(e)}, \quad D_3 = D_3^{(e)}$$

а также другие варианты электрических поверхностных условий:

$$b) \quad \varphi = 0, \quad v) \quad D_3 = 0 \text{ и их сочетания на лицевых плоскостях } z = \pm h.$$

Осредним уравнения движения пластинки. Тогда получим выражения перерезывающих сил, а также уравнения колебаний пластинки относительно перемещений срединной плоскости и потенциала электрического поля.

$$N_1 = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w + hA \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_+ + \varphi_- - \frac{1}{h} \int_{-h}^h \varphi dz \right)$$

$$N_z = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w + hA \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_+ + \varphi_- - \frac{1}{h} \int_{-h}^h \varphi dz \right) \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta u + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{d_{31}(1+\nu)}{h} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_+ - \varphi_-) &= \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \Delta v + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{d_{31}(1+\nu)}{h} \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_+ - \varphi_-) &= \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ D \Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - hA \Delta \left(\varphi_+ + \varphi_- - \frac{1}{h} \int_{-h}^h \varphi dz \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

К этим уравнениям движения добавляется уравнение электростатики, которое возьмем в трехмерном виде

$$\epsilon_1 \Delta \varphi + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + A \Delta w = 0 \quad (1.7)$$

Здесь $B = \epsilon_3 - 2d_{31}A > 0$ (так как ϵ_3 по порядку больше, чем $d_{31}A$). Из системы (1.6) видно, что если на лицевых плоскостях пластинки заданы постоянные значения потенциала электрического поля φ_+ и φ_- , тогда планарные колебания (колебания обобщенного плоского напряженного состояния) отделяются от поперечных колебаний.

Выразим перемещения срединной плоскости u и v через две функции Φ и Ψ .

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Тогда, после некоторых преобразований система (1.6) преобразуется к следующему виду:

$$c_i^2 \Delta \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0; \quad c_i^2 \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \chi_1 (\varphi_+ - \varphi_-) = 0 \quad (1.8)$$

$$D \Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{hA}{\epsilon_1} \left\{ \Delta [\epsilon_2 (\varphi_+ + \varphi_-) + 2Aw] + \frac{B}{h} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_+ - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_- \right] \right\} = 0$$

Здесь, как обычно, $\chi_1 = \frac{d_{31}E}{2\rho h}$ — коэффициент электромеханической

связи, а $c_i^2 = \frac{E}{2\rho(1+\nu)}$, $c_l^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$

Функции Φ и Ψ в системе (1.8) отделяются, но они связаны электрическими поверхностными условиями. И задачи планарных и поперечных колебаний взаимосвязаны.

Пусть потенциал электрического поля таков, что его можно представить в виде суммы симметричных и антисимметричных относительно поперечной координаты, функций $\varphi = \varphi_c + \varphi_a$,

где $\varphi_c(x, y, h) = \varphi_c(x, y, -h)$, $\varphi_a(x, y, h) = -\varphi_a(x, y, -h)$

Тогда система (1.6), а также уравнение электростатики (1.7) распадаются на две самостоятельные системы

$$\begin{cases} c_i^2 \Delta \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \\ c_i^2 \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\chi_1 \varphi_a = 0 \\ B \frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial z^2} + \varepsilon_1 \Delta \varphi_a = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\begin{cases} D \Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2hA}{\varepsilon_1} \left\{ \Delta(\varepsilon_1 \varphi_c + Aw) + \frac{B}{h} \left(\frac{\partial \varphi_c}{\partial z} \right) \right\} = 0 \\ B \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial z^2} + \Delta(\varepsilon_1 \varphi_c + Aw) = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Из приведенных уравнений видно, что уравнения планарных колебаний, в которых участвует также антисимметричная часть потенциала электрического поля в общем случае отделяются от уравнений поперечных колебаний с симметричной частью электростатического потенциала.

Будем искать решения системы (1.9) и (1.10) в виде гармонических волн

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_n \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y), \quad \Phi = \Phi_0 \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y) \\ w &= w_n \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y), \quad \varphi = f(z) \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y) \end{aligned} \quad (1.11)$$

В этом случае первое уравнение системы (1.9) приводит к сдвиговой волне (SV)

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c_i^2, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2 \quad (1.12)$$

Рассмотрим следующие электрические поверхностные условия

$$\varphi = \varphi^{(e)}, \quad D = D_1^{(e)} \quad \text{при} \quad z = \pm h \quad (1.13)$$

где символом (e) обозначена внешняя среда. Примем, что

$$\varphi^{(e)} = \varphi_1^{(e)} + \varphi_2^{(e)}$$

где $\varphi_1^{(e)}$ и $\varphi_2^{(e)}$ — потенциалы электрического поля для внешней среды, которые соответствуют симметричной и антисимметричной частям потенциала поля соответственно. Тогда выбранные электрические поверхностные условия (1.13) имеют вид

$$\begin{aligned} -B \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial z} \right)_{z=h} + A \Delta \Phi &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_1^{(e)}}{\partial z} \right)_{z=h} + \left(\frac{\partial \varphi_2^{(e)}}{\partial z} \right)_{z=-h} \right] \\ -B \left(\frac{\partial \varphi_c}{\partial z} \right)_{z=h} - Ah \Delta w &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_1^{(e)}}{\partial z} \right)_{z=h} - \left(\frac{\partial \varphi_2^{(e)}}{\partial z} \right)_{z=-h} \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\varphi_c = \varphi_1^{(e)}, \quad \varphi_a = \varphi_2^{(e)} \quad \text{при} \quad z = \pm h$$

К уравнениям (1.9) и (1.10) и к граничным условиям (1.14) присоединяются также уравнения внешней среды

$$\frac{\partial^2 \varphi_1^{(e)}}{\partial z^2} + \Delta \varphi_1^{(e)} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi_2^{(e)}}{\partial z^2} + \Delta \varphi_2^{(e)} = 0$$

Итак, при рассматриваемых электрических поверхностных условиях уравнения и граничные условия разделяются и приводят к самостоятельным системам относительно функций Φ , φ_a , $\varphi_2^{(e)}$ и

$w, \varphi_c, \varphi_1^{(*)}$ соответственно. Первая система описывает колебания с частотой

$$\omega^2 = \frac{(2Ak^2\chi_1 - k^2c_1^2\varepsilon_0)\text{th}\chi kh + k^2c_1^2B\chi}{B\chi - \varepsilon_0\text{th}\chi kh}$$

а вторая - с частотой

$$\omega^2 = \frac{\left[Dk^4B\chi + \frac{2A^2k^2}{\chi} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1} - kh \right) \right] \text{th}\chi kh - \left[Dk^4\varepsilon_0 + \varepsilon A^2k^2h \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - kh \right]}{2\rho h (B\chi \text{th}\chi kh - \varepsilon_0)}$$

где $\chi^2 = \frac{\varepsilon_1}{B}$

При электрических граничных условиях б), т.е. когда лицевые поверхности пластинки электродривованы и заземлены, имеем

$$\varphi_c = 0, \quad \varphi_a = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h$$

В этом случае из системы (1.9) отделяется также уравнение, приводящее к продольной волне (PW)

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c_1^2 \quad (1.15)$$

т.е., планарные колебания отделяются от поперечных колебаний и не зависят от пьезоэффекта, а поперечные колебания происходят с частотой

$$\omega^2 = \frac{Dk^4}{2\rho h} + \frac{kA}{\rho h \varepsilon_1 \chi} (\chi kh - \text{th}\chi kh) \quad (1.16)$$

А для электрического поля внутри пластинки имеем

$$f = \frac{A}{\varepsilon_1} \left(\frac{\text{ch}\chi kz}{\text{ch}\chi kh} - 1 \right) w_0$$

Разлагая в уравнении (1.16) функцию $\text{th}\chi kh$ в ряд по степеням χkh (т.к. $\chi kh \ll 1$) и сохраняя первые три члена этого ряда, получим:

$$\omega^2 = \frac{Dk^4}{2\rho h} \left[1 + \frac{(1+\nu)\chi_0}{1-2\chi_0} \right], \quad \text{где} \quad \chi_0 = \frac{d_{31}^2 E}{\varepsilon_1(1-\nu)} \quad (1.17)$$

Согласно (1.17) частота поперечных колебаний при $\chi_0 < \frac{1}{2}$

увеличивается, а при $\chi_0 > \frac{1}{2}$ - уменьшается. При $\chi_0 = \frac{1}{2}$ получим

$\omega^2 \rightarrow \infty$. Однако вычисления для различных материалов показывают,

что параметр χ_0 для реальных пьезоэлектриков $\ll \frac{1}{2}$. Например,

материал	PZT-4	CdS	BaTiO ₃	ЦТС-4	ЦТС-19	ТБК-3
χ_0	$1.41 \cdot 10^{-3}$	$0.2 \cdot 10^{-4}$	$0.08 \cdot 10^{-5}$	$1.16 \cdot 10^{-2}$	$6.3 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$

В случае, когда лицевые поверхности пластинки неэлектродривованы и $D_3 = 0$, планарные и поперечные колебания отделяются и происходят с частотами

$$\omega^2 = \frac{2\chi_1 k A \text{th} \chi k h}{\chi B} + c_1^2 k^2, \quad \omega^2 = \frac{D k^4}{2\rho h} - \frac{k^2 A^2}{\rho \epsilon_1} (\chi k h \text{cth} \chi k h - 1)$$

в) Когда следующие поверхностные условия заданы на лицевых плоскостях пластинки

$$\varphi = 0 \quad \text{при} \quad z = h, \quad D_3 = 0 \quad \text{при} \quad z = -h$$

планарные и поперечные колебания взаимосвязаны и частота колебаний определяется из биквадратного уравнения [1].

2. Рассмотрим вынужденные колебания пластинки-полосы. Пластинка колеблется под действием переменной во времени электрической нагрузки, заданной на лицевых плоскостях пластинки.

Рассматриваются два случая электрических поверхностных условий

$$а) \varphi_+ = \varphi_0 \exp(i\omega t) \sin(\pi x/a), \quad \varphi_- = \varphi_0 \exp(i\omega t) \sin(\pi x/a)$$

$$б) \varphi_{\pm} = \varphi_0 \exp(i\omega t) \sin(\pi x/a) \quad (2.1)$$

Пусть на торцевых плоскостях пластинки-полосы $x = 0, a$ заданы следующие граничные условия:

$$T_1 = 0, \quad w = 0, \quad M_1 = 0, \quad \varphi = 0 \quad (2.2)$$

Из уравнений колебаний пластинки (1.6) и выбранных граничных условий следует, что в случае вынужденных колебаний также планарные и поперечные колебания отделяются друг от друга.

Решая задачу в случае электрических поверхностных условий а), получим резонансные планарные колебания

$$u = \frac{d_{11}(1-v^2)}{\pi \frac{h}{a}} \frac{1}{1-\omega^2/\omega_*^2} \exp(i\omega t) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

с резонансной частотой

$$\omega_* = \frac{E}{1-v^2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \quad (2.3)$$

Выражение (2.3) совпадает со значением, полученным ранее в [2]. Но в отличие от этой работы, здесь планарные колебания влекут также поперечные колебания с частотой

$$\omega^2 = \frac{D k^4}{2\rho h} + \frac{(\pi/a)^2 A^2}{\rho \epsilon_1} (1 - \alpha^{-1} \text{th} \alpha) \quad (2.4)$$

которые не резонансные. Здесь $\alpha = \frac{\chi \pi h}{a}$.

Решая же задачу в случае электрических поверхностных условий б), получим резонансные поперечные колебания. В этом случае планарные колебания не зависят от пьезоэффекта и частота колебаний имеет вид (2.3). А для поперечных колебаний

$$\omega_0 = \frac{-2hA(\pi/a)^2 \varphi_0 (1 - \alpha^{-1} \text{th} \alpha)}{D(\pi/a)^4 - 2\rho h \omega^2 + 2A^2 \epsilon_1^{-1} h(\pi/a)^2 (1 - \alpha^{-1} \text{th} \alpha)}$$

и резонансные частоты имеют вид (2.4).

Разлагая в формуле (2.4) функцию th в ряд по степеням α и ограничиваясь тремя членами ряда, получим, что во втором приближении

ω_*^2/ω_0^2 (где $\omega_0^2 = Dk^4/2\rho h$) не зависит от толщины пластинки, а в третьем приближении

$$\frac{\omega_z^2}{\omega_0^2} = 1 + \frac{(1-v^2)A^2}{EB} - \frac{2(1-v^2)A^2\alpha^2}{5EB}$$

3. Рассмотрим вопрос разделяемости механических граничных условий на торцах пластинки. Возьмем различные механические граничные условия, например для края $x = 0$.

1) Пусть край $x = 0$ шарнирно оперт. Тогда, используя выражения внутренних сил и моментов (1.3), получим:

$$\begin{aligned} c \left(\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2A\varphi_a = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad w = 0 \\ -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + hA \left(2\varphi_c - \frac{1}{h} \int_{-h}^h \varphi_c dz \right) = 0 \end{aligned}$$

2) В случае, когда край свободен, имеем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2A\varphi_a = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + hA \left(2\varphi_c - \frac{1}{h} \int_{-h}^h \varphi_c dz \right) = 0 \\ -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w + hA \frac{\partial}{\partial x} \left(2\varphi_c - \frac{1}{h} \int_{-h}^h \varphi_c dz \right) - (1-v)D \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \end{aligned}$$

3) В случае, когда край $x = 0$ жестко заделан

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad u = 0, \quad v = 0$$

Как видно, в рассматриваемых граничных условиях уравнения для w , φ_c и u , v , φ_a разделяются.

4. Рассмотрим вынужденные колебания тонкой пьезоэлектрической пластинки-полосы, которая шарнирно оперта по краям $x = 0, \alpha$. Колебания происходят под действием электрического потенциала φ , заданного на торцах пластинки.

Пусть заданы следующие электрические поверхностные условия:

$$\varphi_c = 0 \text{ при } z = h \text{ и } \varphi_c = 0 \text{ при } z = -h \quad (4.1)$$

При выбранных поверхностных условиях (4.1) планарные колебания пластинки отделяются от поперечных колебаний и не зависят от пьезоэффекта.

Рассмотрим уравнения, описывающие поперечные колебания пластинки-полосы (1.10).

Выбранные граничные условия имеют вид:

$$a) \quad w = 0, \quad M_x = 0, \quad \varphi = V_0 \sin \omega t \quad \text{при } x = 0, \alpha \quad (4.2)$$

Решив поставленную граничную задачу для потенциала поля и перемещений, получим

$$\begin{aligned} \varphi_c = \left[V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(z) \sin \frac{n\pi x}{a} \right] \sin \omega t, \quad w = \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin \frac{n\pi x}{a} \\ \Phi_n(z) = \left[\frac{A}{\varepsilon_1} w_n + 2V_0 \frac{(-1)^n - 1}{\pi n} \right] \frac{\operatorname{ch} \frac{\chi n \pi}{a} z}{\operatorname{ch} \frac{\chi n \pi}{a} h} - \frac{A}{\varepsilon_1} w_n \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$w_n = 4Ah \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 V_0 \left(\frac{\operatorname{th} \frac{\chi n \pi h}{a}}{\frac{\chi n \pi h}{a}} - 1 \right) \frac{(-1)^n - 1}{\pi i} \times \\ \times \left[\left(\frac{\pi n}{a} \right)^4 - 2\rho h \omega^2 - 2hA^2 \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{\operatorname{th} \frac{\chi n \pi h}{a}}{\frac{\chi n \pi h}{a}} - 1 \right) \right]^{-1}$$

Отсюда можем получить резонансные частоты поперечных колебаний:

$$\omega_n^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\pi n h}{a} \right)^2 - \frac{d_{31}^2 E(1+\nu)}{\varepsilon_1(1-\nu)} \left(\frac{\operatorname{th} \frac{\chi n \pi h}{a}}{\frac{\chi n \pi h}{a}} - 1 \right) \right]$$

при $n = 1, 3, 5, \dots$

$$\omega_n^2 = 0 \quad \text{при} \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (4.4)$$

Рассмотрим другие варианты электрических граничных условий:

$$\begin{aligned} \text{б) Пусть} \quad \varphi_c &= V_0 \sin \omega t \quad \text{при} \quad x = 0 \\ \varphi_c &= -V_0 \sin \omega t \quad \text{при} \quad x = a \end{aligned} \quad (4.5)$$

В этом случае для резонансных частот колебаний получаем:

$$\omega_n^2 = 0 \quad \text{при} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (4.6)$$

$$\omega_n^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\pi n h}{a} \right)^2 - \frac{d_{31}^2 E(1+\nu)}{\varepsilon_1(1-\nu)} \left(\frac{\operatorname{th} \frac{\chi n \pi h}{a}}{\frac{\chi n \pi h}{a}} - 1 \right) \right]$$

$$\text{при} \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \text{в) Пусть} \quad \varphi_c &= V_0 \sin \omega t \quad \text{при} \quad x = 0 \\ \varphi_c &= 0 \quad \text{при} \quad x = a \end{aligned} \quad (4.8)$$

При этих граничных условиях для резонансных частот получаем то же выражение (4.7), только для всех натуральных n .

Сравним полученные резонансные частоты колебаний пластинки с резонансными частотами задачи, рассмотренной в [1]. В указанной работе рассматривались вынужденные колебания тарнирно-опертой пьезоэлектрической пластинки-полосы, когда на лицевых плоскостях

$$\text{заданы} \quad \varphi_{\pm} = \pm e^{\nu \omega x} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{0n}(z) \sin \frac{n \pi x}{a}$$

а на торцах пластинки потенциал поля равен нулю.

Для рассматриваемой задачи резонансные частоты планарных колебаний имеют вид:

$$\omega_n^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 \quad (4.9)$$

а поперечные колебания не резонансные.

Вычислим $\Psi = \omega_n^2 / \omega_n^2$ для пластинки-полосы, изготовленной из пьезокерамики PZT-4 при различных значениях относительной толщины h/a и для различных вариантов электрических граничных условий.

Исходные параметры пьезокерамики PZT-4 следующие:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^T &= 1475, \quad \varepsilon_{33}^T = 1300, \quad d_{31} = -123 \cdot 10^{-8}, \quad d_{15} = 496 \cdot 10^{-8} \\ d_{33} &= 289 \cdot 10^{-8} \quad |d_{ij} - \Gamma^{-0.5} \text{ см}^{0.5} \text{ с}|, \quad S_{11}^E = 12.3 \cdot 10^{-13} \\ S_{33}^E &= 15.5 \cdot 10^{-13}, \quad S_{12}^E = -4.05 \cdot 10^{-13}, \quad S_{13}^E = -5.31 \cdot 10^{-13} \\ S_{44}^E &= 39.0 \cdot 10^{-13}, \quad |S_{ik}^E - \text{см}^2 \text{ дин}^{-1}|, \quad \rho = 7.5 \text{ г см}^{-3} \end{aligned}$$

Таблица 1

$n \backslash h/a$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
1	$3.3 \cdot 10^{-4}$	$1.318 \cdot 10^{-3}$	$2.966 \cdot 10^{-3}$	$5.273 \cdot 10^{-3}$	$8.239 \cdot 10^{-3}$
3	$2.966 \cdot 10^{-3}$	$1.186 \cdot 10^{-2}$	$2.669 \cdot 10^{-2}$	$4.745 \cdot 10^{-2}$	$7.414 \cdot 10^{-2}$
5	$8.239 \cdot 10^{-3}$	$3.295 \cdot 10^{-2}$	$7.414 \cdot 10^{-2}$	$1.318 \cdot 10^{-1}$	$2.059 \cdot 10^{-1}$
7	$1.615 \cdot 10^{-2}$	$6.458 \cdot 10^{-2}$	$1.453 \cdot 10^{-1}$	$2.583 \cdot 10^{-1}$	$4.035 \cdot 10^{-1}$
9	$2.669 \cdot 10^{-2}$	$1.067 \cdot 10^{-1}$	$2.401 \cdot 10^{-1}$	$4.268 \cdot 10^{-1}$	$6.668 \cdot 10^{-1}$

Таблица 2

$n \backslash h/a$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
2	$1.318 \cdot 10^{-3}$	$5.273 \cdot 10^{-3}$	$1.186 \cdot 10^{-2}$	$2.109 \cdot 10^{-2}$	$3.295 \cdot 10^{-2}$
4	$5.273 \cdot 10^{-3}$	$2.109 \cdot 10^{-2}$	$4.745 \cdot 10^{-2}$	$8.435 \cdot 10^{-2}$	$1.317 \cdot 10^{-1}$
6	$1.186 \cdot 10^{-2}$	$4.745 \cdot 10^{-2}$	$1.067 \cdot 10^{-1}$	$1.897 \cdot 10^{-1}$	$2.964 \cdot 10^{-1}$
8	$2.109 \cdot 10^{-2}$	$8.435 \cdot 10^{-2}$	$1.897 \cdot 10^{-1}$	$3.372 \cdot 10^{-1}$	$5.269 \cdot 10^{-1}$
10	$3.295 \cdot 10^{-2}$	$1.317 \cdot 10^{-1}$	$2.964 \cdot 10^{-1}$	$5.269 \cdot 10^{-1}$	$8.231 \cdot 10^{-1}$

В табл. 1, 2. приведены численные результаты отношения Ψ резонансных частот указанных задач в случае электрических граничных условий соответственно а) и б) для $n = 1, \dots, 10$ и $h/a = 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05$. В первом случае $\Psi = 0$ при четных n , а во втором случае $\Psi = 0$ при нечетных n .

В случае электрических граничных условий в) отношение Ψ принимает значения обеих таблиц (для всех $n = 1, \dots, 10$).

Численные результаты показывают, что с возрастанием n значения резонансных частот обеих задач сближаются.

Для очень тонких пластин ($h/a = 0.01$) резонансные частоты поперечных колебаний на два порядка меньше, чем соответствующие резонансные частоты планарных колебаний. Для остальных случаев относительной толщины h/a на порядок меньше. С увеличением относительной толщины пластинки значения резонансных частот обеих задач сближаются.

Сравним значения резонансных частот поперечных колебаний задачи, когда на лицевых плоскостях пластинки заданы условия

$$\varphi_+ = \varphi_0 e^{i\omega t} \sin \frac{\pi x}{a} \quad \varphi_- = -\varphi_0 e^{i\omega t} \sin \frac{\pi x}{a}$$

для потенциала электрического поля и рассматриваемой задачи, когда пластинка колеблется под действием потенциала поля, заданного на торцевых плоскостях.

В случае граничных условий (4.2) эти значения совпадают при нечетных n . (При четных значениях n в рассматриваемой задаче).

В случае граничных условий (4.5) эти значения совпадают при нечетных значениях n . В случае же условий (4.8) резонансные частоты обеих рассматриваемых задач совпадают при всех значениях n .

Рассмотренные в работе свободные и вынужденные колебания пластинки приводят к следующим выводам.

Если потенциал электрического поля внутри пластинки таков, что его можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной относительно поперечной координаты функций, то уравнение планарных колебаний, где участвует также антисимметричная часть потенциала поля, отделяется от уравнений поперечных колебаний, в которых участвует симметричная часть потенциала поля. Но эти колебания связаны граничными условиями. Показано, что при соответствующем выборе электрических поверхностных условий упомянутые задачи отделяются друг от друга. Отделяются также рассмотренные механические условия на торцах пластинки.

Рассмотрены задачи вынужденных колебаний пластинки, когда на лицевых плоскостях заданы периодически изменяемые во времени потенциалы электрического поля. В случае чисто планарных колебаний полученные резонансные частоты совпадают с ранее известными [2]. Но в отличие от работы [2], здесь планарные колебания влекут также поперечные колебания, которые не резонансные. Показано, что при определенных электрических поверхностных условиях возможны чисто поперечные резонансные колебания. Исследовано взаимодействие планарных и поперечных колебаний в общем случае.

Рассмотрена задача вынужденных поперечных колебаний пластинки под действием различных электрических нагрузок, заданных на торцевых плоскостях. Полученные резонансные частоты сравниваются с резонансными частотами планарных и поперечных колебаний, когда пластинка колеблется под действием электрической нагрузки, заданной на лицевых плоскостях (для пьезокерамики PZT-4). Численные результаты показывают, для очень тонких пластин ($h/a = 0.01$) резонансные частоты поперечных колебаний (в задаче колебаний под действием торцевой нагрузки) на два порядка меньше, чем соответствующие резонансные частоты планарных колебаний (в задаче колебаний под действием заданной на поверхности нагрузки). Для остальных случаев рассмотренной относительной толщины ($h/a = 0.02, \dots, 0.05$) эти частоты отличаются на порядок. С возрастанием n значения резонансных частот обеих задач сближаются.

Автор выражает благодарность профессору М.В.Белубекяну за постановку задачи и ценные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Belubekian M.V., Mkrtchian L.R. Vibrations of transversely polarized thin piezoelectric plates // Proceed of the Int. Conf. on "Smart Structures and Materials-95". San Diego, California, 1995. Editor. A. Peter Jardine. SPIE, Vol. 2441. p. 233-242.
2. Грипченко В.Т., Карлаш В.М., Мелешко В.В., Улитко А.Ф. Исследование планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин // Прикл. мех. 1976, т.13, №5, с. 71-79.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
13.05.1996

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ КЛИНОВИДНЫХ ОБЛАСТЕЙ, ОСЛАБЛЕННОЙ СИММЕТРИЧНОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ВЕРШИНУ КЛИНЬЕВ

Аветикян В.Е.

Վ. Ե. Ավետիսյան
Երկու սեպաձև տիրույթներից բաղկացած բաղադրյալ հարրուրյան մի խառը խնդրի մասին, որը
րոլացված է երա սիմետրիայի առանցքի վրա գտնվող և սեպերի զազարով անցնող կիսանվերջ
ճաշով

Դիտարկված է խառը խնդիր երկու սեպաձև տիրույթներից բաղկացած բաղադրյալ հարրուրյան
խմար, որը րոլացված է երա սիմետրիայի առանցքի վրա գտնվող և սեպերի զազարով անցնող
կիսանվերջ ճաշով

Խնդրի լուծումը բերված է Վիներ-Հուպֆի ֆունկցիոնալ հավասարմանը, որի միակ լուծումը ստացված
է:

V.E. Avetikyan

On a mixed problem for a plane, which is composed of two wedges and weakened with a crack, placed along
its symmetry axis and overlapping the vertex of the wedges

Рассматривается смешанная задача для кусочно-однородной плоскости, состоящей из
двух клиновидных областей, жестко сцепленных вдоль границ $\vartheta = \pm\alpha$ ($0 < \alpha < \pi$, $0 < r < \infty$), ослабленной симметричной полубесконечной
трещиной, проходящей через вершину клиньев. Решение задачи сведено к функциональному
уравнению Винера-Хопфа, получено его замкнутое решение. Определено значение
коэффициента особенности в конце трещины.

Рассмотрим смешанную задачу для кусочно-однородной плоскости,
состоящей из двух клиновидных областей, жестко сцепленных вдоль
границ $\vartheta = \pm\alpha$ ($0 < \alpha < \pi$, $0 < r < \infty$), имеющих модуль Юнга и
коэффициент Пуассона E_1, ν_1 при $-\alpha < \vartheta < \alpha$ и E_2, ν_2 при
 $\alpha < \vartheta < 2\pi - \alpha$, соответственно. При $\vartheta = 0$, $0 \leq r < \infty$ и $\vartheta = \pi$, $0 \leq r < a$
имеется полубесконечная трещина, к берегам которой приложены
заданные постоянные нормальные нагрузки.

Граничные условия сформулированной симметричной задачи
можно записать так:

$$\vartheta = \alpha, \quad [u_r] = [u_\vartheta] = 0, \quad [\sigma_\vartheta] = [\tau_{r\vartheta}] = 0, \quad 0 < r < \infty \quad (1)$$

$$\vartheta = 0, \quad \tau_{r\vartheta} = 0, \quad 0 \leq r < \infty; \quad \sigma_\vartheta = -\sigma_1, \quad 0 \leq r \leq a \quad (2)$$

$$\vartheta = \pi, \quad \sigma_\vartheta = -\sigma_0, \quad 0 < r < a; \quad u_\vartheta = 0, \quad a < r < \infty \quad (3)$$

$$\vartheta = \pi, \quad \tau_{r\vartheta} = 0, \quad 0 \leq r < \infty$$

u_r, u_ϑ - смещения, $\sigma_\vartheta, \tau_{r\vartheta}$ - напряжения, σ_0, σ_1 - заданные постоянные
величины, $[N]$ - скачок величины N . На бесконечности напряжения
исчезают.

Применяя интегральное преобразование Меллина с комплексным параметром p к уравнениям Ламе и к граничным условиям задачи (1)-(3), после некоторых выкладок для поставленной задачи получим следующее функциональное уравнение Винера-Хопфа:

$$E_2 p \bar{u}_3^-(p) = \frac{D_1(p)}{D_2(p)} \left[\bar{\sigma}_3^+(p+1, \pi) - \frac{\sigma_0}{p+1} \right] + \frac{k \sigma_1}{p+1} \frac{D_3(p)}{D_2(p)}$$

$$(-\varepsilon < \operatorname{Re} p < 0, \quad 0 < \varepsilon < 1)$$

$$D_1(p) = k^2 [G_1 + \delta \sin 2\pi p] - k [G_2 - (1 + v_2) A_1] - (1 + v_2) A_2, \quad k = E_2/E_1$$

$$D_2(p) = k^2 [H_1 + H_0 + \delta \sin^2 \pi p] - k [H_2 + H_0 + B_1 (C_{12} - (1 + v_2))] + \\ + B_2 [C_{22} - (1 + v_2)], \quad D_3(p) = \delta H_3 + \delta k [2 \sin \pi p - H_3]$$

$$G_j = A_j (\delta_1 - v_1 \delta) - 2(1 + v_j) A_3 - 4\Delta_0 + 2[2\Delta_0 - (1 - v_1) \Delta_1] \times \\ \times \sin^2(\pi - \alpha) p + 2p(1 + v_1) [\Delta + \Delta_0 - 2p \sin 2(\pi - \alpha) p] \sin^2 \alpha, \quad (j = 1, 2)$$

$$H_0 = 2p B_1 \sin^2 \alpha - 0.5 \Delta_1 A_1$$

$$H_j = B_j (\delta_1 - v_1 \delta) - 2(\delta_1 - v_1 \delta) + 2Q_j + C_{jj} \delta, \quad (j = 1, 2)$$

$$H_3 = \Delta_0 \cos \pi p + [\delta_1 + \Delta_2 - p v_1 (1 - p) \sin^2 \alpha] \sin \pi p$$

$$A_3 = \Delta_2 \sin 2\pi p - \Delta_0 \sin^2 \pi p \quad (4)$$

$$C_{jj} = 2 - (v_i + v_j) - p(p-1)(1 + v_i)(1 + v_j) \sin^2 \alpha$$

$$B_i = (3 - v_i) \sin^2(\pi - \alpha) p + p(1 + v_i) \sin^2 \alpha - 2, \quad (i = 1, 2)$$

$$A_i = (3 - v_i) \sin 2(\pi - \alpha) p + p(1 + v_i) \sin 2\alpha, \quad (i = 1, 2)$$

$$Q_i = 2p \sin^2 \alpha [1 + (p-1)(1 + v_i) \sin^2 p \alpha]$$

$$\delta = \sin^2 p \alpha - p^2 \sin^2 \alpha, \quad \delta_1 = \sin^2 p \alpha + p^2 \sin^2 \alpha$$

$$\Delta_0 = \sin 2p \alpha + p \sin 2\alpha, \quad \Delta_1 = \sin 2p \alpha - p \sin 2\alpha$$

$$\Delta = \sin 2(\pi - \alpha) p - p \sin 2\alpha, \quad \Delta_2 = \sin 2p \alpha + p \sin^2 \alpha$$

$$\bar{u}_3^-(p) = \int_0^1 u_3(ar, \pi) r^{p-1} dr, \quad \bar{\sigma}_3^+(p+1, \pi) = \int_1^\infty \sigma_3(ar, \pi) r^p dr$$

Преобразуем уравнение (4) к следующему виду:

$$E_2 \bar{V}^-(p+1) = 2 \operatorname{ctg} \pi p D(p) \left[\bar{\sigma}_3^+(p+1, \pi) - \frac{\sigma_0}{p+1} \right] + \frac{k \sigma_1}{p+1} \frac{D_3(p)}{D_2(p)},$$

$$-\varepsilon < \operatorname{Re} p < 0$$

$$D(p) = \frac{D_1(p)}{2D_2(p) \operatorname{ctg} \pi p}, \quad \bar{V}^-(p+1) = - \int_0^1 \frac{du_3(ar, \pi)}{dr} r^p dr - u_3(0, \pi) \quad (5)$$

Решение функционального уравнения (5) ищем в классе функции [1, 2]

$$\bar{\sigma}_3^+(p+1, \pi) \sim |p|^{-\frac{1}{2}}, \quad \bar{V}^-(p+1) \sim |p|^{-\frac{1}{2}} \quad \text{при} \quad |p| \rightarrow \infty \quad (6)$$

в своих областях регулярностей, так как

$\sigma_3(ar, \pi)$ и $\frac{du_3(ar, \pi)}{dr}$ при $r \rightarrow 1$ имеют корневую особенность.

Далее при помощи факторизации [1,2]

$$D(p) = D^+(p)/D^-(p), \quad -\varepsilon < \operatorname{Re} p < 0, \quad D^\pm(p) = \exp[\pm R^\pm(p)]$$

$$R(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \ln D(p) r^{-[p+1]} dp \quad -\varepsilon < c < 0 \quad (7)$$

$$\rho \operatorname{ctg} \pi p = M^+(p)M^-(p), \quad M^\pm(p) = \Gamma(1 \mp p) / \Gamma\left(\frac{1}{2} \mp p\right)$$

где $M^\pm(p) \sim |p|^{-\frac{1}{2}}$ при $|p| \rightarrow \infty$ в своих областях регулярности, из уравнения (5) получим

$$E_2 \frac{D^-(p)}{M^-(p)} \bar{V}^-(p+1) = \frac{2M^+(p)D^+(p)}{p} \bar{\sigma}_3^+(p+1, \pi) - \\ - \frac{2\sigma_0 M^+(p)D^+(p)}{p(p+1)} + \frac{k\sigma_1}{p+1} \frac{D_3(p)}{D_2(p)} \frac{D^-(p)}{M^-(p)}, \quad (-\varepsilon < \operatorname{Re} p < 0) \quad (8)$$

Используя представления [2,3]

$$\frac{M^+(p)D^+(p)}{p(p+1)} = \left[\frac{M^+(p)D^+(p)}{p(p+1)} + \frac{M^+(-1)D^+(-1)}{p+1} \right] - \frac{M^+(-1)D^+(-1)}{p+1}$$

$$\bar{\varphi}(p+1) = \frac{1}{p+1} \frac{D_3(p)}{D_2(p)} \frac{D^-(p)}{M^-(p)}, \quad \bar{\varphi}(p+1) = \bar{\varphi}^-(p+1) + \bar{\varphi}^+(p+1)$$

$$\bar{\varphi}^-(p+1) = \int_0^1 \varphi(r) r^p dr, \quad \bar{\varphi}^+(p+1) = \int_1^\infty \varphi(r) r^p dr$$

функциональное уравнение (8) представим в следующем виде:

$$E_2 \frac{D^-(p)}{M^-(p)} \bar{V}^-(p+1) - \frac{2\sigma_0 M^+(-1)D^+(-1)}{p+1} - k\sigma_1 \bar{\varphi}^-(p+1) = \\ = \frac{2M^+(p)D^+(p)}{p} \bar{\sigma}_3^+(p+1, \pi) - \frac{2\sigma_0}{p+1} \left[\frac{M^+(p)D^+(p)}{p} + M^+(-1)D^+(-1) \right] + \\ + k\sigma_1 \bar{\varphi}^+(p+1), \quad (-\varepsilon < \operatorname{Re} p < 0) \quad (9)$$

В силу теоремы об аналитическом продолжении и теоремы Лиувилля, учитывая поведения функций, входящих в (9), (6) и (7), получим следующее решение задачи:

$$E_2 \bar{V}^-(p+1) = \frac{2\sigma_0 M^+(-1)D^+(-1)}{p+1} \frac{M^-(p)}{D^-(p)} + k\sigma_1 \frac{M^-(p)}{D^-(p)} \bar{\varphi}^-(p+1) \quad (10)$$

$$\bar{\sigma}_3^+(p+1, \pi) = \frac{\sigma_0}{p+1} + \frac{M^+(-1)D^+(-1)}{M^+(p)D^+(p)} \frac{\sigma_0 p}{p+1} - \frac{k\sigma_1 p}{2} \frac{\bar{\varphi}^+(p+1)}{M^+(p)D^+(p)} \quad (11)$$

Из (11) для $\sigma_3(r, \pi)$ при $r \rightarrow a$ получим следующую асимптотическую формулу:

$$\sigma_{\theta}(r, \pi) = \frac{2\sigma_0 D^+(-1)}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r-a}} \frac{1}{a^2}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э.Х. Об одной задаче для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение. - Уч. зап. ЕГУ, естеств. науки, 1982, №2, с.38-43.
2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. - М.:1962. 279 с.
3. Кипнис А.А. Кусочно-однородная плоскость с границей раздела в форме сторон угла и симметричным разрезом, исходящим из вершины. - ПММ. 1986, т.50, вып.2, с.334-336.

Ереванский государственный университет Поступила в редакцию
26.03.1996

О СДВИГОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, НА ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОТОРОГО ПРИКРЕПЛЕН УПРУГИЙ ПРОВОДЯЩИЙ СЛОЙ

Саркисян А.В.

Լ.Վ. Սարգսյան

Պիեզոէլեկտրիկ կիսաոտարածության սահմանային տատանումները, երբ նրա եզրային մակերևույթին ամրացված է առանցքային հաղորդիչ շերտ

Աշխատանքում ուսումնասիրված է պիեզոէլեկտրիկ կիսաոտարածության սահմանային տատանումները, երբ նրա եզրային մակերևույթին ամրացված է փոքր հաստություն ունեցող առանցքային հաղորդիչ շերտ: Խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության միջոցով: Տեղափոխությունը և էլեկտրական պոտենցիալը ներկայացված են այնպիսի և ոչ այնպիսի մասերի գումարի տեսքով: Ստացված է, որ այնպիսի մասը բաղկացած է ոչ միայն մակերևույթային և մակալային ալիքներից, այլ նաև սվիթչի (պայմանավորված պիեզոէլեկտրիկ), որը տարածվում է քստ կիսաոտարածության խորքային:

Ստացված են նաև ալիքային տարածման արագությունը, որոնք բնութագրում են տեղափոխության և էլեկտրական պոտենցիալի վարքը անվերջությունում և պարունակում են այնպիսի մաս, որը տարածվում է կիսաոտարածության եզրային մակերևույթին ուղղահայաց:

L.V.Sargsian

On the shear vibrations of piezoelectric half-space, in the case when elastic conducting layer on the boundary surface is fastened

В работе рассматривается задача о сдвиговых установившихся колебаниях пьезоэлектрического полупространства (пьезоэлектрик класса бпм гексагональной симметрии), на граничной поверхности которого прикреплен упругий проводящий слой малой толщины. Задача решается с помощью метода интегрального преобразования Фурье. Перемещения и электрический потенциал представлены в виде суммы волновых и неволновых частей. Обнаружено, что волновые части состоят не только из поверхностных и обычных объемных волн, но и волны (обусловленной пьезоэффектом), распространяющейся вглубь от поверхности полупространства. Наличие упругого проводящего слоя приведет к изменению волнового числа поверхностной волны, а также к изменению амплитуды и фазы колебаний. Получены асимптотические формулы, характеризующие поведения перемещений и электрического потенциала на большой зоне, которые содержат полновую часть распространяющейся перпендикулярно к граничной поверхности полупространства.

Пусть имеем пьезоэлектрическое полупространство (пьезоэлектрик класса бпм гексагональной симметрии), на граничной поверхности которого прикреплен проводящий упругий слой малой толщины. Отнесем к пьезоэлектрическому полупространству прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, чтобы ось Ox_3 совпадала с осью симметрии пьезоэлектрика, а ось Ox_1 была направлена вдоль границы раздела полупространства и проводящего слоя. Контактной поверхностью полупространства со слоем является плоскость $y = 0$. Под действием на граничной поверхности слоя периодической силы $Pe^{-i\omega t}\delta(x)$, где $\delta(x)$ - функция Дирака, ω - частота колебаний, t - параметр, характеризующий время, происходят сдвиговые установившиеся колебания пьезоэлектрического полупространства и проводящего слоя. Ставится задача определения перемещений и электрического потенциала, а также анализа волнового процесса в пьезоэлектрике.

Приступив к решению задачи, поле упругих перемещений проводящего слоя ищем в виде $\vec{u}_1 = (0, 0, w_1(x, y)e^{-i\omega t})$, а поле упругих перемещений и электрического потенциала полупространства соответственно в виде $\vec{u}_2 = (0, 0, w_2(x, y)e^{-i\omega t})$, $\Phi(x, y, t) = \bar{\Phi}(x, y)e^{-i\omega t}$. Тогда поставленная задача для амплитуд перемещений и электрического потенциала формулируется в виде следующей контактной задачи [1]:

$$\Delta w_2 + k_2^2 w_2 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta \bar{\Phi} = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} \Delta w_2, \quad 0 < y < \infty, \quad -\infty < x < \infty \quad (2)$$

$$\Delta w_1 + k_1^2 w_1 = 0 \quad (3)$$

условие контакта

$$G_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = c_{44} \frac{\partial w_2}{\partial y} \Big|_{y=0} + e_{15} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (4)$$

$$w_1 = w_2, \quad \bar{\Phi} = 0, \quad y = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (5)$$

граничное условие

$$G_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} \Big|_{y=-h} = -P\delta(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (6)$$

где $k_2 = \omega/c_2$, $c_2^2 = G_2/\rho_2$, $G_2 = c_{44}/(1 + \chi^2)$, $\chi^2 = e_{15}^2/c_{44}\epsilon_{11}$ - коэффициент электромеханической связи, e_{15} - пьезоэлектрическая постоянная, ϵ_{11} - диэлектрическая постоянная пьезоэлектрика, ρ_2 - плотность материала пьезоэлектрика, c_{44} - упругая постоянная пьезоэлектрика, $k_1 = \omega/c_1$, $c_1^2 = G_1/\rho_1$, G_1 и ρ_1 - модуль сдвига и плотность материала слоя соответственно, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа.

Далее уравнение (3) интегрировав по толщине, получим

$$\frac{d^2 \bar{w}_1}{dx^2} + k_1^2 \bar{w}_1 = -\frac{1}{h} \frac{\partial w_1}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{P}{G_1 h} \delta(x), \quad (7)$$

где

$$\bar{w}_1(x) = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 w_1(x, y) dy$$

В (3), в силу малости h , полагаем $w(x, y) = \bar{w}_1(x)$ ($-h < y < 0$)

С помощью интегрального преобразования Фурье, разрешив контактную задачу (1), (2), (4), (5), (7), получим

$$w_2(x, y) = \frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\sigma|x| - \sqrt{\sigma^2 - k_2^2}y}}{B\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} - A|\sigma| + hG_1(\sigma^2 - k_1^2)} d\sigma \quad (8)$$

$$\bar{\Phi}(x, y) = -\frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} \frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\sigma|x| - |\sigma|y}}{B\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} - A|\sigma| + hG_1(\sigma^2 - k_1^2)} d\sigma + \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} w_2(x, y) \quad (9)$$

где $A = e_{15}^2/\epsilon_{11}$, $B = c_{44} + e_{15}^2/\epsilon_{11}$.

Функция $f(\sigma) = B\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} - A|\sigma| + hG_1(\sigma^2 - k_1^2)$ имеет нули $\pm \sigma_n^*$, которые являются волновыми числами поверхностной волны. Причем, как нетрудно убедиться, $k_2 < \sigma_n^* < \sigma_n$ при $B^{-1}\sqrt{B^2 - A^2} \leq k_2/k_1 < 1$ и при $0 < h(k_2 - k_1) < Ak_2(k_2 + k_1)^{-1}G_1^{-1}$, где $\sigma_n = Bk_2(B^2 - A^2)^{-1/2}$ — волновое число поверхностной волны, соответствующего случаю $h = 0$. Вопросы существования поверхностных волн для пьезоэлектрического полупространства, на граничной поверхности которого прикреплен проводящий слой, подробно исследованы в работе [2]. Чтобы $w_2(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ удовлетворяли условиям уходящей волны, контур интегрирования в (8), (9), должен обходить точки $-k_2, -\sigma_n^*$ сверху, а точки k_2, σ_n^* снизу [3], причем $\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} = -i\sqrt{k_2^2 - \sigma^2}$.

Поступая так, как в работе [4], для $w(r, \varphi)$ получим

$$\begin{aligned} w(r, \varphi) = & \frac{iP}{\pi} e^{i(k_2 r - \frac{\pi}{4})} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau(2k_2 + i\tau)}} \psi_1(\alpha, \varphi) \left[B(\alpha^2 - k_2^2) + \right. \\ & + k_2^2 \sin \varphi (B \sin \varphi - iA|\cos \varphi|) - ihG_1 \alpha \sin \varphi (\alpha^2 - k_2^2 + k_1^2 - k_2^2 \cos^2 \varphi) \Big] e^{-\nu} d\tau + \\ & + \frac{AP}{\pi} e^{k_1 y} \int_0^\infty \frac{(\alpha|\cos \varphi| + i\sqrt{\alpha^2 - k_2^2} \sin \varphi)(\alpha \sin \varphi - i\sqrt{\alpha^2 - k_2^2}|\cos \varphi|)}{\sqrt{\alpha^2 - k_2^2} \psi_2(\alpha, \varphi)} e^{-\nu} d\tau + \\ & + PA_n \exp \left[i\sigma_n^* |x| - \sqrt{\sigma_n^{*2} - k_2^2} y \right] \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1(\alpha, \varphi) = & (B^2 - A^2)(\alpha^2 - k_2^2) + k_2^2 (B \sin \varphi - iA|\cos \varphi|)^2 + \\ & + 2iBhG_1 \alpha \sin \varphi (\alpha^2 - k_2^2 + k_1^2 - k_2^2 \cos^2 \varphi) - 2AhG_1 \alpha |\cos \varphi| (\alpha^2 - k_2^2 \sin^2 \varphi - k_1^2) - \\ & - h^2 G_1^2 ((\alpha^2 - k_2^2 \sin^2 \varphi)^2 + k_1^4 - 2k_1^2 (\alpha^2 \cos 2\varphi + k_2^2 \sin^2 \varphi)), \quad \alpha = -k_2 - i\tau \\ \psi_2(\alpha, \varphi) = & - \left[B(\alpha \sin \varphi - i\sqrt{\alpha^2 - k_2^2}|\cos \varphi|) - ihG_1 ((\alpha|\cos \varphi| + i\sqrt{\alpha^2 - k_2^2} \sin \varphi)^2 - k_1^2) \right]^2 - \\ & - A^2 (\alpha|\cos \varphi| + i\sqrt{\alpha^2 - k_2^2} \sin \varphi)^2, \quad \alpha = -k_2 \sin \varphi - i\tau \end{aligned}$$

При $y = 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} w(x, 0) = & \frac{iPB}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{(2k_2 + i\tau)\tau} e^{-\tau|x|}}{\psi_1(\alpha, 0)} d\tau \cdot e^{i(k_2|x| + \frac{\pi}{4})} - \\ & - \frac{AP}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau e^{-\tau|x|}}{A^2 \tau^2 - (B\sqrt{\tau^2 + k_2^2} - ihG_1(\tau^2 + k_1^2))^2} d\tau + PA_n e^{i\sigma_n^* |x|} \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\psi_1(\alpha, 0) = (B^2 - A^2)\alpha^2 - B^2 k_2^2 - hG_1(\alpha^2 - k_1^2)(2\alpha A + hG_1(\alpha^2 - k_1^2)), \quad \alpha = -k_2 - i\tau$$

Как видно из (10), первый член представляет обычную объемную волну, второй член — эта волна, обусловленная пьезоэффектом, распространяющаяся вглубь от поверхности полупространства, третий

член представляет поверхностную волну. Как нетрудно видеть, второй член в (10) это неволновая часть $w(r, 0)$ (11). Наличие проводящего упругого слоя приводит к изменению амплитуды и фазы колебаний, а также влияет на скорость распространения поверхностной волны Блюштейна-Гуляева.

Далее исходя из того, что подынтегральные выражения в (10) экспоненциально убывают, главный вклад в значениях интегралов дает их поведения в окрестности $\tau = 0$. В силу вышесказанного для $w(r, \varphi)$ при больших значениях r , получим

$$w(r, \varphi) = \left[\frac{iBP \sin \varphi}{\sqrt{2\pi}} \frac{B \sin \varphi - iA|\cos \varphi| + ihG_1(k_1 \varepsilon - k_2 \cos^2 \varphi)}{(B \sin \varphi - iA|\cos \varphi| - ihG_1(k_1 \varepsilon - k_2 \cos^2 \varphi))^2 \sqrt{k_2 r}} + 0 \left((k_2 r)^{-\frac{3}{2}} \right) \right] e^{i(k_2 r - \frac{\pi}{4})} + w_0(r, \varphi) e^{ik_2 y} + PA_n \exp(i\sigma_n^* |x| - \sqrt{\sigma_n^{*2} - k_2^2} y), \quad (12)$$

где

$$\varepsilon = \frac{k_1}{k_2},$$

$$w_0(r, \varphi) = \frac{AP}{\pi(B - ihG_1 \varepsilon k_1)^2 (k_2 x)^2} + 0 \left((k_2 r)^{-3} \right) \quad \text{при } x \neq 0$$

$$w_0(y, 0) = \frac{i}{(B - ihG_1 \varepsilon k_1)^2} \frac{1}{k_2 y} + 0 \left((k_2 r)^{-2} \right)$$

В (12) второй член представляет волновую часть, обусловленную пьезоэффектом, распространяющуюся по направлению оси y .

Поступая аналогичным образом, как выше, для $w(x, 0)$ при больших значениях x , будем иметь формулу

$$w(x, 0) = \left[-\frac{iPB}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(A - ihG_1(k_2 - \varepsilon k_1))^2} \frac{1}{k_2 |x|^{\frac{3}{2}}} + 0 \left((k_2 |x|)^{-\frac{5}{2}} \right) \right] e^{i(k_2 |x| + \frac{\pi}{4})} + \left[\frac{AP}{\pi(B - ihG_1 \varepsilon k_1)^2} \frac{1}{(k_2 x)^2} + 0 \left((k_2 |x|)^{-3} \right) \right] + PA_n e^{i\sigma_n^* |x|} \quad (13)$$

Как видно из (13), колебания точек граничной поверхности полупространства, на дальней зоне, можно считать волновыми, если ограничиваться членами порядка $(k_2 |x|)^{-3/2}$. Опять поступая, как в работе [4], для $\Phi(r, \varphi)$ будем иметь

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{PB}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{(2k_2 z_0 + i\tau)} \tau e^{-\tau}}{\psi(\lambda)} d\tau \cdot \exp \left[i \left(k_2 |x| + \frac{\pi}{4} \right) - k_2 y \right] + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{P}{2\pi_0} \int_0^\infty \left[\left(A\tau - ihG_1 \bar{z}_0 (\tau^2 + (k_1 z_0)^2) + B\sqrt{\tau^2 + (k_2 z_0)^2} \right)^{-1} + \left(A\tau + ihG_1 z_0 (\tau^2 + (k_1 \bar{z}_0)^2) - B\sqrt{\tau^2 + (k_2 \bar{z}_0)^2} \right)^{-1} \right] e^{-\tau} d\tau - \frac{Pe_{15}}{\varepsilon_{11}} A_n \exp(i\sigma_n^* |x| - \sigma_n^* y) + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} w(r, \varphi) \quad (14)$$

где

$$z_0 = |\cos \varphi| + i \sin \varphi, \quad \bar{z}_0 = |\cos \varphi| - i \sin \varphi \quad (0 < \varphi < \pi)$$

Как нетрудно видеть из (14), в отличие от $w(r, \varphi)$, $\Phi(r, \varphi)$ имеет неволновую часть при $0 < \varphi < \pi$. Очевидно, что $\Phi(r, \varphi)$ имеет также волновую часть, распространяющуюся вглубь от поверхности полупространства.

При больших значениях r электрический потенциал имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi) = & \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{PB}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp \left[i \left(k_2 |x| + \frac{\pi}{4} \right) - k_2 y \right]}{\left[hG_1(k_2 - \varepsilon k_1) - A \right]^2 (k_2 z_0 r)^{3/2}} + \\ & + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{P}{\pi} \frac{i \sin \varphi}{(ihG_1 \varepsilon k_1 - B)k_2 r} - \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} PA_n (i\sigma_n^* |x| - \sigma_n^* y) + \\ & + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} w(r, \varphi) + O((k_2 r)^{-2}), \quad 0 < \varphi < \pi. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилянский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск - Изд-во Наука, 1982.
2. Curtis R.G., Redwood M. Transvers surface on a Piezoelectric material carrying a metal layer of finite thickness. J. Appl. Phys., 1973. 44, №5, 2001-2007 РЖ физ., 1973, 11Е 372.
3. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: ИЛ, 1962.
4. Григорян Э.Х., Саркисян Л.В. О сдвиговых колебаниях пьезоэлектрического полупространства. Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т.49, №3, с.23-30.

Институт Механики НАН Армении

Поступила в редакцию
25.01.1996

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОСЕСИМ- МЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СПЛОШНОГО ВЕСОМОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ПРИ ОДНОМ ЗАКРЕПЛЕННОМ ТОРЦЕ

Торосян В.С.

Վ.Ս. Թորոսյան

Մեկ հիմքով ամրակցված վերջավոր երկարությամբ կշռելի հոծ զլանի առանցքասիմետրիկ դեֆորմացիայի խնդրի լուծման մի բվային եղանակի մասին

Դիտարկվում է մեկ հիմքով ամրակցված վերջավոր երկարությամբ կշռելի հոծ զլանի առանցքասիմետրիկ դեֆորմացիայի խնդիրը: Օգտագործելով տարրերակային սխեմաները, խնդիրը բերվում է զծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի: Այն լուծելու համար կիրառվում է գրաֆների տեսությունը: Երկու դեպքերի համար բերվում են բվային օրինակներ:

V.S.Torosian

On one numerical method of solution of the axisymmetrical problem for a solid weighted cylinder of a finite length with one fastened end-wall

В работе рассматривается осесимметричная задача для сплошного весомого цилиндра конечной длины при одном закреплённом торце. Используя разностные схемы, задача сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений, при решении которых применяется теория графов. Приведены численные примеры.

1. Рассматривается осесимметричная деформация сплошного однородного цилиндра конечной длины под действием собственного веса, когда на нижнем торце отсутствуют перемещения, а на другом торце и на боковой поверхности отсутствуют напряжения.

Аналитическое решение этой задачи методом Фурье дано в работе [1]. Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат для случая осевой симметрии при наличии объемных сил в перемещениях имеют вид

$$\nabla^2 u_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\rho R}{G} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{\rho Z}{G} = 0 \quad (2)$$

Здесь u_r и u_z — компоненты перемещения, ρ — плотность материала цилиндра, G — модуль сдвига, R и Z — компоненты объемных сил

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Если ось z направить в обратную сторону действия силы тяжести для компонентов объемных сил, будем иметь $R = 0$, $Z = -g$.

Уравнения (1), (2) напомним в следующем виде:

$$(1+\alpha) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + (1+\alpha) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - (1+\alpha) \frac{u_r}{r^2} = 0 \quad (3)$$

$$(1+\alpha) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \alpha \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\alpha}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} = F \quad (4)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{1-2\nu}, \quad F = \frac{\rho g}{F}$$

Уравнения (3), (4) представляют собой эллиптическую систему дифференциальных уравнений в частных производных в прямоугольнике

$$G_0 = \{(r, z), 0 < r < R, 0 < z < l\}$$

Граничные условия для этой системы имеют вид

$$u_r(r, 0) = u_r(r, l) = 0 \quad (0 \leq r \leq R) \quad (5)$$

$$\sigma_r(r, l) = \tau_{rz}(r, l) = 0 \quad (0 \leq r \leq R) \quad (6)$$

$$\sigma_r(R, z) = \tau_{rz}(R, z) = 0 \quad (0 < z < l) \quad (7)$$

где

$$\sigma_r = 2G \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right)$$

$$\sigma_z = 2G \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right)$$

$$\tau_{rz} = G \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

Из постановки задачи следует, что на оси симметрии выполняются соотношения

$$u_r(0, z) = \tau_{rz}(0, z) = 0 \quad (0 < z < l) \quad (8)$$

Требуется найти непрерывные в $\bar{G}_0 = G_0 \cup \Gamma$ (где Γ — граница прямоугольника) решения $u_r(r, z)$, $u_z(r, z)$ уравнения (3), (4), которые на сторонах прямоугольника удовлетворяют граничным условиям (5)-(7) и соотношению (8).

2. В замкнутой области $\bar{G}_0 = G_0 \cup \Gamma$ введем прямоугольную равномерную сетку $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 = \{(r, z)/r \in \bar{\omega}_1, z \in \bar{\omega}_2\}$, где $\bar{\omega}_1 = \{r_i/r_i = ih_1, i = 0, 1, 2, \dots, N_1\}$ — сетка на отрезке $[0, R]$; $\bar{\omega}_2 = \{z_i/z_i = ih_2, i = 0, 1, 2, \dots, N_2\}$ — сетка на отрезке $[0, l]$. Множество внутренних узлов сетки $\bar{\omega}$ обозначим через

$$\omega = \{(r, z)/r \in \bar{\omega}_1, z \in \bar{\omega}_2\}, \quad \bar{\omega}_1 = \{r_i/r_i = ih_1, i = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1\}$$

$$\bar{\omega}_2 = \{z_i/z_i = ih_2, i = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1\}$$

а множество граничных узлов — через $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$.

Граничную задачу (3)-(7) с учетом (8) поставим в соответствии следующей разностной задаче:

$$(1+\alpha)(u_r)_{rr} + (u_r)_{zz} + \alpha(u_r)_{rz} + (1+\alpha)d_1(u_r)_r - (1+\alpha)d_2 u_r = 0 \quad (9)$$

$$(1+\alpha)(u_z)_{zz} + (u_z)_{rr} + \alpha(u_z)_{rz} + d_1(u_z)_r + \alpha d_1(u_z)_z = F \quad (10)$$

$$(r, z) \in \omega$$

$$u_r = 0 \quad (11)$$

$$u_z = 0 \quad (12)$$

$$(r, z) \in \gamma, \quad z = 0$$

$$(1 + \beta)(u_r)_r + \frac{h_1}{2}(\alpha d_2 u_r + \beta d_1 (u_z)_z + \beta (u_r)_{zz}) + \beta d_1 u_r + \beta (u_z)_z = 0 \quad (13)$$

$$(u_r)_r + \frac{h_1}{2}\left(F - \frac{\beta}{1 + \beta} d_1 (u_r)_z - \frac{2 + 3\beta}{1 + \beta} (u_z)_{zz}\right) + (u_z)_z = 0 \quad (14)$$

$$(r, z) \in \gamma, \quad r = R, \quad z \neq 0, l$$

$$(u_r)_r + \frac{h_1}{2}(1 + \nu) d_2 u_r + \nu d_1 u_r = 0$$

$$(u_r)_z + \frac{h_2}{2}\left(\frac{1 - \nu}{2} F - \nu d_1 (u_r)_z\right) - \nu d_1 u_r = 0 \quad (15)$$

$$(r, z) \in \gamma, \quad r = R, \quad z = l$$

$$(1 + \beta)(u_z)_z + \frac{h_2}{2}\left(\frac{F}{2} + \beta (u_r)_{rz} + \beta d_1 (u_z)_r\right) + \beta d_1 u_r + \beta (u_r)_r = 0 \quad (16)$$

$$(u_r)_z + \frac{h_2}{2}\left(\frac{2 + 3\beta}{1 + \beta} d_2 u_r - \frac{2 - 3\beta}{1 + \beta} d_1 (u_r)_r - \frac{2 + 3\beta}{1 + \beta} (u_r)_{rr}\right) + (u_z)_r = 0$$

$$(r, z) \in \gamma, \quad z = l, \quad r \neq 0, R \quad (17)$$

$$u_r = 0$$

$$(u_z)_r = 0 \quad (r, z) \in \gamma, \quad r = 0 \quad (18)$$

где

$$\beta = \frac{\nu}{1 - 2\nu}, \quad d_1(r) = \frac{1}{r}, \quad d_2(r) = \frac{1}{r^2}$$

Разностная задача (9)-(18) на решениях задачи (1)-(2), (5)-(8) имеет второй порядок аппроксимации.

3. Решение линейных алгебраических систем уравнений.

После несложных преобразований разностную задачу (9)-(18) можно написать в виде

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

где матрицы A, B, C, D размеров $N_1 N_2 \times N_1 N_2$ блочно-трехдиагональные матрицы с размерами блоков $N_1 \times N_1$, причем каждый блок в свою очередь или трехдиагональная матрица или диагональная матрица, а X_1, X_2, F_1, F_2 — вектор-столбцы порядка $N_1 N_2$.

Обозначим через L матрицу

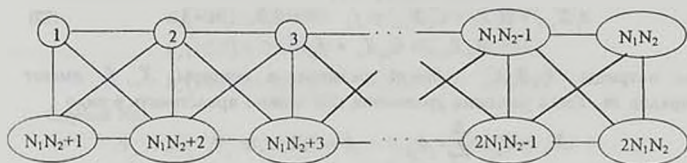
$$L = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Матрица L — размера $2N_1 N_2 \times 2N_1 N_2$ представляет собой ленточную матрицу с полушириной ленты $N_1 N + N_1 + 1$.

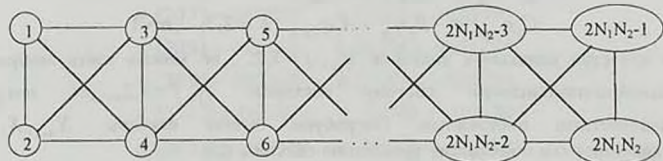
Решение уравнения (19) прямым методом (типа Гаусса) приводит к заполнению нулевых элементов в матрице L . Ниже будет показано, как

с помощью теории графов можно существенно уменьшить ширину ленты матрицы L .

Не ограничивая общности, можно считать, что N_1, N_2 — четные числа. Обозначим через $G(L)$ граф матрицы L , который можно представить в виде



где под каждой вершиной $i, i = 1, 2, \dots, 2N_1N_2$ графа $G(L)$ ассоциируется одноименная блочная строка матрицы L . Перенумеруем вершины графа $G(L)$ следующим образом. На первой строке в порядке возрастания будут нечетные числа от 1 до $2N_1N_2 - 1$, а во второй — четные числа от 2 до $2N_1N_2$.



Фиг. 1

После такой нумерации в преобразованной матрице $\tilde{L}$ полуширина ленты будет равна $[2] \ 3N_1 + 1$. Каждая перенумерация вершины i графа $G(L)$ на i_1 равносильна тому [2], что одновременно меняются места строки с номерами i, i_1 и столбцы с номерами i, i_1 . Учитывая это обстоятельство и используя схему фиг. 1, можно построить перестановочную матрицу P такую, что матрица $\tilde{L} = P'LP$ (P' — транспонированная матрица к матрице P), будет блочно-трехдиагональной матрицей с размерами блоков $2N_1 \times 2N_1$. Пусть P — блочно-перестановочная матрица, где единичные матрицы E размера $N_1 \times N_1$ стоят на местах $(1,1), (2,3), (3,5), \dots, (N_1N_2, 2N_1N_2 - 1)$; $(N_1N_2 + 1, 2), (N_1N_2 + 2, 4), \dots, (2N_1N_2 - 1, 2N_1N_2 - 2)$; $(2N_1N_2, 2N_1N_2)$. Легко проверить, что матрица $P'LP$ будет блочно-трехдиагональной матрицей. Обозначим через Y вектор размера $1 \times 2N_1N_2$ решение следующей системы:

$$P'LPY = P'F \quad (20)$$

Тогда решение исходной задачи (19) можно найти по формуле

$$X = PY \quad (21)$$

Для решения уравнения (20) построен блочный аналог метода представления решения с помощью рекуррентных последовательностей [3], который учитывает структуру блоков в матрице.

Пусть решается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} A_1 X_1 + B_1 X_2 &= f_1 \\ A_i X_{i-1} + B_i X_i + C_i X_{i+1} &= f_i \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \\ A_n X_{n-1} + C_n X_n &= f_n \end{aligned} \quad (22)$$

где матрицы A_i, B_i, C_i — $m \times m$ размера, а векторы X_i, f_i имеют порядок m . Тогда решение уравнения (22) можно представить в виде

$$X_k = P_k + \sum_{j=1}^m r_j q_{jk} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Здесь P_k — частное решение неоднородного уравнения

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0, \quad B_1 P_2 = f_1 - A_1 P_1 \\ C_k P_{k+1} &= f_k - B_k P_k - A_k P_{k-1} \quad k = 2, 3, \dots, n-1 \end{aligned}$$

P_0 — любой начальный вектор

$q_{jk}, j = 1, 2, \dots, m$ — общие решения однородного уравнения

$$\begin{aligned} q_{j1} &= q_{j0}, \quad B_1 q_{j2} = -A_1 q_{j1} \\ C_k q_{j,k+1} &= -B_k q_{jk} - A_k q_{j,k-1} \quad k = 2, 3, \dots, n-1 \end{aligned}$$

в качестве начальных векторов $q_{j0}, j = 1, 2, \dots, m$ можно взять любую линейно-независимую систему векторов. $r_j, j = 1, 2, \dots, m$ пока неизвестные постоянные. Потребуем, чтобы векторы X_{n-1}, X_n удовлетворяли последнему уравнению системы (22)

$$A_n \left(P_{n-1} + \sum_{j=1}^m r_j q_{j,n-1} \right) + C_n \left(P_n + \sum_{j=1}^m r_j q_{jn} \right) = f_n$$

или

$$\sum_{j=1}^m (A_n q_{j,n-1} + C_n q_{jn}) r_j = f_n - A_n P_{n-1} - C_n P_n$$

Это условие и позволяет определить неизвестные числа $r_j, j = 1, \dots, m$. Решение уравнения (22) по этому методу требует выполнения (в главной его члены при $N_1, N_2 \rightarrow \infty$) $52.5 N_1^2 N_2$ арифметических операций. Заметим, что если мы при решении уравнения (22) использовали блочный аналог метода прогонки, то требовалось выполнение $O(N_1^3 N_2)$ арифметических операций.

4. Численная реализация.

Для приведенного алгоритма произведен численных эксперимент в двух случаях значений пары N_1, N_2 .

Перемещения на граничных точках сетки $\bar{\omega}$ показаны в таблицах.

Случай №1

$$N_1 = 10; \quad N_2 = 10; \quad h_1 = h_2 = 0.1; \quad v = 0.375; \quad F = 1$$

$$u_r(10.1) = 0.00898 \quad u_r(1.10) = -0.01793$$

$$u_r(10.2) = 0.00954 \quad u_r(2.10) = -0.01793$$

$$u_r(10.3) = 0.01014 \quad u_r(3.10) = -0.01794$$

$u_r(10.4) = 0.01017$	$u_z(4.10) = -0.01792$
$u_r(10.5) = 0.01017$	$u_z(5.10) = -0.01791$
$u_r(10.6) = 0.01015$	$u_z(6.10) = -0.01787$
$u_r(10.7) = 0.01012$	$u_z(7.10) = -0.01789$
$u_r(10.8) = 0.01009$	$u_z(8.10) = -0.01877$
$u_r(10.9) = 0.01008$	$u_z(9.10) = -0.01942$
$u_r(10.10) = 0.01006$	$u_z(10.10) = -0.02192$

Случай №2

$$N_1 = 20; N_2 = 20; h_1 = h_2 = 0.05; \nu = 0.375; F = 1$$

$u_r(20.1) = 0.00669$	$u_z(1.20) = -0.01792$
$u_r(20.2) = 0.00894$	$u_z(2.20) = -0.01792$
$u_r(20.3) = 0.00913$	$u_z(3.20) = -0.01793$
$u_r(20.4) = 0.00956$	$u_z(4.20) = -0.01792$
$u_r(20.5) = 0.00982$	$u_z(5.20) = -0.01793$
$u_r(20.6) = 0.00997$	$u_z(6.20) = -0.01794$
$u_r(20.7) = 0.00996$	$u_z(7.20) = -0.01791$
$u_r(20.8) = 0.01018$	$u_z(8.20) = -0.01794$
$u_r(20.9) = 0.01018$	$u_z(9.20) = -0.01794$
$u_r(20.10) = 0.01019$	$u_z(10.20) = -0.01795$
$u_r(20.11) = 0.01016$	$u_z(11.20) = -0.01796$
$u_r(20.12) = 0.01017$	$u_z(12.20) = -0.01798$
$u_r(20.13) = 0.01016$	$u_z(13.20) = -0.01801$
$u_r(20.14) = 0.01013$	$u_z(14.20) = -0.01811$
$u_r(20.15) = 0.01012$	$u_z(15.20) = -0.01886$
$u_r(20.16) = 0.01008$	$u_z(16.20) = -0.01887$
$u_r(20.17) = 0.01007$	$u_z(17.20) = -0.01892$
$u_r(20.18) = 0.01006$	$u_z(18.20) = -0.01931$
$u_r(20.19) = 0.01006$	$u_z(19.20) = -0.02186$
$u_r(20.20) = 0.01004$	$u_z(20.20) = -0.02196$

Используя разностные схемы, мы получили значения компонентов перемещения $u_r(r, z)$, $u_z(r, z)$ в узлах сетки $\bar{\omega}$ и, следовательно, можно определить деформированную поверхность цилиндра. В частности, для осевых перемещений $u_z(r, z)$ наибольшее перемещение получает точка с координатами (R, l) , т.е. $|u_z(r, l)| < |u_z(R, l)|$. Относительно радиальных перемещений $u_r(r, z)$ можно сказать, что боковая поверхность упругого цилиндра, при защемленном нижнем торце, под действием собственного веса, выпучивается, то есть цилиндр расширяется. Таким же образом можно определить также характер изменения напряжения σ_z и τ_{rz} на нижнем защемленном торце цилиндра.

Численный эксперимент произведен также для частного решения уравнения (3), (4) (частное решение взято в виде $u_r(r, z) = Arz$, $u_z(r, z) = Az^2$, $A = \frac{(1-2\nu)pg}{2(3-2\nu)G}$). В этом случае решения получены локально с точностью 10^{-5} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б.А., Торосян В.С. Несимметричная задача о деформации упругого весомого цилиндра конечной длины с одним закрепленным торцом под действием собственного веса. - Докл. расширенных заседаний семинара НПМ им. И.Н.Векуа при Тбилисском ГУ, Тбилиси, 1991, 7-ой Всесоюз. съезд по теоретич. и прикладн. механике, Москва, 15-21, VIII, 1991. Аннот. доклады, М., 1991, стр.5-6.
2. Икрамов Х.Д. Решения больших разреженных систем уравнений прямыми методами. - М.: Знание, 1989. 48с.
3. Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Трехдиагональные матрицы и их приложения. - М.: Наука, 1985. 208с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
9.02.1996

Տպագրությունը սֆինքս
Թուղթը՝ օֆսետ
Փափսը՝ 84x108 1/18
Ծավալը՝ 15 պսյւմ տրւ. մամուլ
Տպարանակը՝ 150
Գինը՝ պայմանագրային

«Զանգակ-97» Հրատարակչություն
Երևան, Մարշալ Բաղդասարյան 3

«Զանգակ-97» իրադրութիւնը պաշտօնաւ Նշման, Վայդանանյ վանկոտի 8