ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1997

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 2, 1997 Механика

ТЕРМОУПРУГАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ КЛИНОВИДНОЙ ПЛАСТИНКИ

Саркисян В.С., Кутузян Н.А.

Վ. Ս. Սարգսյան, Ն. Ա. Կուտուզյան
Օրթոտրոպ սեպաձև սալի համար ջերմաառաձգականության խնդիր

Դիտարկված է ջերմաառաձգականության խնդիր օրթոտրոպ սեպաձև սալի համար, երբ ջերմահաղորդականության գլխավոր առանցքները համընկնում են անիզոտրոպիայի գլխավոր առանցքների հետ Հաշված են լարումները և մյուս մեխանիկական մեծությունները և հետազոտված է նրանց վարքը սեպի գագաթին մոտենալիս

V. S. Sarkissian, N. A. Kutusian
Thermoelasticity problem for the orthotropical wedge plate

Рассматривается термоупругая задача для клиновидной ортотропной пластинки, обладающей цилиндрической анизотропией. Вычисляются напряжения, моменты и перерезывающие силы и исследуется характер этих величин около вершины клина

Рассматривается термоупругая задача для клиновидной ортотропной пластинки, обладающей цилиндрической анизотропией. Пусть ортотропная клиновидная пластинка постоянной толщины h отнесена к цилиндрической системе координат r, φ, z, оси которой являются главными осями проводимости. Решается задача теплопроводности, когда на краях пластинки $\varphi = 0$, $\varphi = \alpha$ задана постоянная температура T_1, а по толщине температура меняется по линейному закону [1]

$$\theta = \theta^{(0)} + \theta^{(1)} z \tag{1}$$

Пусть среда, омывающая тонкую пластинку, имеет разные температуры θ_1, θ_4, соответственно, на поверхностях $z = \frac{h}{2}$, $z = -\frac{h}{2}$. Допустим, что на этих поверхностях происходит конвективный стационарный теплообмен между средой, предположим, что теплообмен на обеих поверхностях совершается при одинаковых коэффициентах теплоотдачи. Тогда для определения температуры имеем систему [2]

$$K_{11}\frac{\partial^2\theta^{(0)}}{\partial r^2}+\frac{K_{11}}{r}\frac{\partial\theta^{(0)}}{\partial r}+\frac{K_{22}}{r^2}\frac{\partial^2\theta^{(0)}}{\partial\varphi^2}-\frac{2a}{h}(\theta^{(0)}+T_0-\bar{\theta})=0$$

$$K_{11}\frac{\partial^2\theta^{(1)}}{\partial r^2}+\frac{K_{11}}{r}\frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial r}+\frac{K_{22}}{r^2}\frac{\partial^2\theta^{(1)}}{\partial\varphi^2}-\frac{6}{h^2}(2K_{33}+ah)\times \tag{2}$$

$$\times\left(\theta^{(1)}-\frac{a}{2K_{33}+ah}(\theta_3-\theta_4)\right)=0$$

граничные условия

$T=T_1$ при $\varphi=0$

$T=T_1$ при $\varphi=\alpha$

Здесь $\theta=T-T_0$ есть приращение температуры пластинки относительно начальной температуры T_0, а $\bar{\theta}=\dfrac{\theta_3+\theta_4}{2}$.

Общее решение первого уравнения системы (2) будет

$$\theta^{(0)}=\sum_{m=0}^{\infty}\left\{C_{1m}I_{P_m}\left(\sqrt{\frac{2a}{hK_{11}}}r\right)+C_{2m}K_{P_m}\left(\sqrt{\frac{2a}{hK_{11}}}r\right)+\bar{\theta}-T_0\right\}\sin\nu_m\varphi+T_1-T_0$$

$$P_m=\sqrt{\frac{K_{22}}{K_{11}}}\nu_m,\qquad \nu_m=\frac{\pi m}{\alpha} \tag{3}$$

α есть раствор клина, а $K_{ij}\ (i,j=1,2,3)$ коэффициент теплопроводности.

Решение второго уравнения системы (2)

$$\theta^{(1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{C_{3k}I_{P_k}(cr)+C_{4k}K_{P_k}(cr)+\frac{a}{2K_{33}+ah}(\theta_3-\theta_4)\right\}\sin\nu_k\varphi \tag{4}$$

где $c=\sqrt{\dfrac{6(2K_{33}+ah)}{h^2K_{11}}}$

Так получим для θ следующее:

$$\theta=\sum_{m=0}^{\infty}\left\{C_{1m}I_{P_m}\left(\sqrt{\frac{2a}{hK_{11}}}r\right)+C_{2m}K_{P_m}\left(\sqrt{\frac{2a}{hK_{11}}}r\right)+\bar{\theta}-T_0\right\}\sin\nu_m\varphi+$$

$$+Z\sum_{k=0}^{\infty}\left\{C_{3k}I_{P_k}(cr)+C_{4k}K_{P_k}(cr)+\frac{ah}{2K_{33}+ah}(\theta_3-\theta_4)\right\}\sin\nu_k\varphi+ \tag{5}$$

$$+T_1-T_0$$

Здесь функции $I_p(r)$ есть бесселева функция первого рода, а функция $K_p(r)$ - функция Макдональда, которая также является действительной при любом действительном P Имея $T(r,\varphi)$, приступим к решению задач термоупругости. На основании гипотезы прямых нормалей и обобщенного закона Гука, условием термоупругого равновесия однородной, ортотропной пластинки , является следующее дифференциальное уравнение относительно прогиба $W(r,\varphi)$ [1].

$$D_{11}\frac{\partial^4 W}{\partial r^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 W}{\partial r^2\partial\varphi^2}+\frac{D_{22}}{r^4}\frac{\partial^4 W}{\partial\varphi^4}+2D\frac{D_{11}}{r}\frac{\partial^3 W}{\partial r^3}-$$
$$-2(D_{12}+2D_{66})\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 W}{\partial r\partial\varphi^2}-\frac{D_{22}}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+2(D_{12}+2D_{66}+D_{22})\frac{1}{r^4}\times$$
$$\times\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}+\frac{D_{22}}{r^3}\frac{\partial W}{\partial r}=-\beta_1\frac{\partial^2 M_T}{\partial r^2}-\beta_2\frac{\partial^2 M_T}{\partial\varphi^2}-\frac{2\beta_1-\beta_2}{r}\frac{\partial M_T}{\partial r}- \tag{6}$$
$$-2\frac{\beta_{12}}{r}\frac{\partial^2 M_T}{\partial r\partial\varphi}-\frac{2\beta_{12}}{r^2}\frac{\partial M_T}{\partial\varphi}$$

с граничными условиями

$$W=0,\quad \frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}=-\beta_2 r^2\frac{h^2}{D_{22}\cdot 6}T_0\quad \text{при}\quad \varphi=0,\ \varphi=\alpha \tag{7}$$

Здесь $M_T=M_T(r,\varphi)=\int\limits_{-h/2}^{h/2} zT(r,\varphi,z)dz$

Введя новую функцию

$$\tilde{W}(r,\varphi)=W+\beta_2 r^2 T_0\frac{h^2}{D_{22}\cdot 3}\varphi(\varphi-\alpha) \tag{8}$$

для определения $\tilde{W}(r,\varphi)$ будем иметь следующее уравнение:

$$D_{11}\frac{\partial^4\tilde{W}}{\partial r^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4\tilde{W}}{\partial r^2\partial\varphi^2}+\frac{D_{22}}{r^4}\frac{\partial^4\tilde{W}}{\partial\varphi^4}+2\frac{D_{11}}{r}\times$$
$$\times\frac{\partial^3\tilde{W}}{\partial r^3}-2(D_{12}+2D_{66})\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3\tilde{W}}{\partial r\partial\varphi^2}-\frac{D_{22}}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{W}}{\partial r^2}+2(D_{12}+2D_{66}+$$
$$+D_{22})\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2\tilde{W}}{\partial\varphi^2}+\frac{D_{22}}{r^3}\frac{\partial\tilde{W}}{\partial r}=-\beta_1\frac{\partial^2 M_T}{\partial r^2}-\beta_2\frac{\partial^2 M_T}{\partial\varphi^2}- \tag{9}$$
$$-\frac{2\beta_1-\beta_2}{r}-\frac{2\beta_{12}}{r}\frac{\partial^2 M_T}{\partial r\partial\varphi}-\frac{2\beta_{12}}{r^2}\frac{\partial M_T}{\partial\varphi}+4\beta_2\frac{h^2T_0}{D_{22}}\frac{D_{12}+2D_{66}+D_{22}}{r^2}$$

при однородных краевых условиях

$$\tilde{W}=0,\quad \frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}=0\quad \text{при}\quad \varphi=0,\ \varphi=\alpha \tag{10}$$

Ищем решение однородного дифференциального уравнения с однород ными краевыми условиями в виде

$$\tilde{W}(r,\varphi) = r^{\gamma} F(\varphi) \qquad (11)$$

После подстановки (11) в (9) для $F(\varphi)$ имеем

$$D_{22}\frac{d^4F}{d\varphi^4} + 2\frac{d^2F}{d\varphi^2}\left[(D_{12}+2D_{66})(\gamma-1)^2 + D_{22}\right] + \left[D_{11}(\gamma-1)^2 -\right.$$

$$\left. - D_{22}\right]\gamma(\gamma-2)F = 0 \qquad (12)$$

$$\begin{cases} F(\varphi) = 0 & \text{при } \varphi = 0,\ \varphi = \alpha \\ \dfrac{d^2F}{d\varphi^2} = 0 & \text{при } \varphi = 0,\ \varphi = \alpha \end{cases} \qquad (13)$$

Решение уравнения (12) представляется

$$F(\varphi) = A\mathrm{ch}s_1\varphi + B\mathrm{sh}s_1\varphi + C\mathrm{ch}s_2\varphi + D\mathrm{sh}s_2\varphi \qquad (14)$$

Здесь s_1, s_2 являются решениями характеристического уравнения, соответствующего уравнению (12) и имеют значения

$$s_{1,2} = \sqrt{-\left[k(\gamma-1)^2+1\right] \pm \sqrt{(k(\gamma-1)^2+1)^2 - \left[k_1(\gamma-1)^2-1\right]\gamma(\gamma-2)}} \qquad (15)$$

где $k_1 = \dfrac{D_{11}}{D_{22}}$, $\quad k = \dfrac{D_{12}+2D_{66}}{D_{22}}$ (16)

Для определения постоянных из (13) будем иметь

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A\mathrm{ch}s_1\alpha + B\mathrm{sh}s_1\alpha + C\mathrm{ch}s_2\alpha + D\mathrm{sh}s_2\alpha = 0 \\ s_1^2(A\mathrm{ch}s_1\alpha + B\mathrm{sh}s_1\alpha) + s_2^2(C\mathrm{ch}s_2\alpha + D\mathrm{sh}s_2\alpha) = 0 \\ As_1^2 + Cs_2^2 = 0 \end{cases} \qquad (17)$$

Условием, выражающим существования нетривиального решения системы (17), является уравнение

$$\mathrm{sh}s_1\alpha\,\mathrm{sh}s_2\alpha = 0 \qquad (18)$$

которое кроме тривиального решения имеет решение

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, s_1\alpha = 0 \\ \mathrm{Im}\, s_1\alpha = \pi n \end{cases} \qquad (19)$$

Отделяя вещественную и мнимую части $s_1 = A(\cos\tilde{\theta} + i\sin\tilde{\theta})$, получим тригонометрическое представление для $\gamma = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, где ρ и

ψ определяются из следующей системы:

$$
\begin{aligned}
&A^4\cos 4\theta + 2A^2(k\rho^2(\cos 2\theta\cos 2\psi - \sin 2\psi\sin 2\theta) + \cos 2\theta) + \\
&+k_1\rho^4\cos 4\psi - \rho^2(k_1+1)\cos 2\psi + 1 = 0 \\
&A^4\sin 4\theta + 2A^2(k\rho^2(\cos 2\theta\cos 2\psi - \sin 2\psi\sin 2\theta) + \sin 2\theta + \\
&+k_1\rho^4\sin 4\psi - \rho^2(k_1+1)\sin 2\psi = 0
\end{aligned} \tag{20}
$$

откуда, для γ при условии $\alpha < \pi$ имеем

$$\gamma_{nj} = \rho_{nj}e^{i\psi_n} + 1 \qquad j = \overline{1,4}$$

где $$\rho_{n1,2} = \sqrt{\frac{\frac{\pi^2 n^2}{\alpha^2} - 1}{\sqrt{k_1}}}, \qquad \rho_{n3,4} = -\sqrt{\frac{\frac{\pi^2 n^2}{\alpha^2} - 1}{\sqrt{k_1}}}, \tag{21}$$

$$A_n = \sqrt{\frac{\pi n}{\alpha}} \qquad \cos 2\psi_n = \frac{2A_n k + k_1 + 1}{2\sqrt{k_1}(A_n^2 - 1)}$$

Причем выражение (21) справедливо, если $k \le \sqrt{k_1}$ и

$$\alpha \le \pi\frac{\sqrt{2(\sqrt{k_1} - k)}}{\sqrt{k_1} + 1}$$

Решение уравнения $\operatorname{sh} s_i\alpha = 0$ сводит к тому же самому. Употребляя формулу $\operatorname{sh} iz = i\sin z$ и краевые условия (13), для однородного решения $\bar{W}_0$, получим

$$\bar{W}_0 = \sum_{m=0}^{\infty}\left[A_{1m}r^{\gamma_{1m}} + A_{2m}r^{\gamma_{2m}} + A_{3m}r^{\gamma_{3m}} + A_{4m}r^{\gamma_{4m}}\right]\sin\frac{\pi m}{\alpha}\varphi \tag{22}$$

Частное решение получим методом вариации постоянных. Имея функцию $\bar{W}(r,\varphi)$, найдем и искомую $W(r,\varphi)$.

Теперь, исходя из (13), с самого начала представим функцию прогиба в виде

$$\bar{W}(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\Phi_k(r)\sin\nu_k\varphi \tag{23}$$

Подставляя (23) в (9) и разлагая правую часть уравнения (9) в ряд по синусам, для определения $\Phi_k(r)$ получим

$$
\begin{aligned}
&D_{11}\frac{d^4\Phi_k}{dr^4} + \frac{2D_{11}}{r}\frac{d^3\Phi_k}{dr^3} - \frac{\nu_k^2}{r^2}(2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22})\frac{d^2\Phi_k}{dr^2} + \\
&+\frac{2\nu_k^2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22}}{r^3}\frac{d\Phi_k}{dr} + \frac{D_{22}\nu_k^4 - 2(D_{12} + 2D_{66} + D_{22})\nu_k^2}{r^4} = \\
&= R_k(r)
\end{aligned} \tag{24}
$$

Здесь

$$R_k(r)=\frac{h^2}{6}\left(C_{3k}\left(\beta_1\frac{d^2I_{p_k}(cr)}{dr^2}-\frac{2\beta_{12}}{r}\frac{dI_{p_k}(cr)}{dr}\nu_k d_{kk}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\beta_2}{r^2}\nu_k^2 I_{p_k}(cr)+\frac{2\beta_{12}}{r^2}\nu_k d_{kk}I_{p_k}(cr)-\frac{2\beta_1-\beta_2}{r}\frac{dI_{p_k}(cr)}{dr}\right)+ \tag{25}$$

$$+C_{4k}\left(\beta_1\frac{d^2K_{p_k}(cr)}{dr^2}-\frac{2\beta_{12}}{r}\frac{dK_{p_k}(cr)}{dr}\nu_k d_{kk}+\frac{\beta_2}{r^2}\nu_k^2K_{p_k}(cr)+\right.$$

$$+\frac{2\beta_{12}}{r^2}\nu_k d_{kk}K_{p_k}(cr)-\frac{2\beta_1-\beta_2}{r}\frac{dK_{p_k}(cr)}{dr}+\frac{b_k}{r^2}$$

где $b_k=2h^2T_0\frac{(D_{12}+2D_{66}+D_{22})}{3D_{22}}\frac{1}{\pi k}((-1)^k-1)$. $\cos\nu_m\varphi=\sum_{i=0}^{\infty}d_{km}\sin\nu_k\varphi$ (26)

Решение уравнения (25) имеется в виде

$$\Phi_k=r^{\alpha k} \tag{27}$$

Для $\bar{\alpha}_k$ получается алгебраическое уравнение четвертой степени, которое после подстановки $\bar{\alpha}_k=z_k+1$ (28)

$$y^2-y(1+2\nu_k^2\bar{k}+\bar{k}_1)+\bar{k}_1(\nu_k^2-1)^2=0$$

где $\bar{k}=\frac{D_{12}+2D_{66}}{D_{22}}$ $\quad\bar{k}_1=\frac{D_{22}}{D_{11}}$, $\quad y=z^2$ (29)

1. Если $D\geq 0$, имеем (30)

$$y_{k1,2}=\frac{1+2\nu_k^2\bar{k}+\bar{k}_1}{2}\pm\sqrt{\frac{(1+2\nu_k^2\bar{k}+k_1)^2}{4}-\bar{k}_1(\nu_k^2-1)^2} \tag{31}$$

видно, что $y_{k1}>0$, $\quad y_{k2}>0$.

Уравнение (29) имеет корни

$$\bar{\alpha}_{1,2}=1\pm\sqrt{y_{k1}}\qquad\bar{\alpha}_{3,4}=1\pm\sqrt{y_{k2}} \tag{32}$$

Дискриминант уравнения (29) будет неотрицательный в следующих случаях: в первом случае угол раствора произвольный, а упругие характеристики материала пластинки такие, чтобы выполнялось условие $\bar{k}\geq\sqrt{k_1}$. Если же $\bar{k}<\sqrt{k_1}$, то угол раствора должен удовлетворять условию

$$\alpha>\pi\frac{\sqrt{2\left(\sqrt{\bar{k}_1}-k\right)}}{\sqrt{\bar{k}_1}+1} \tag{33}$$

2. Пусть дискриминант уравнения (29) отрицателен. В этом случае уравнение (29) имеет комплексно-сопряженные решения

$$y_{k1,2} = 1 + 2\nu_k^2\bar{k} + \bar{k}_1 \pm i\sqrt{\bar{k}_1(\nu_k^2 - 1)^2 - \frac{(1 + 2\nu_k^2\bar{k} + \bar{k}_1)^2}{4}} \tag{34}$$

Условие отрицательности дискриминанта уравнение (29) приводит к неравенству

$$\bar{k} < \sqrt{\bar{k}_1}, \qquad \alpha < \pi\frac{\sqrt{2\left(\sqrt{\bar{k}_1} - \bar{k}\right)}}{\sqrt{\bar{k}_1} + 1} \tag{35}$$

Представим (31) в тригонометрической форме

$$y_{k1} = \tilde{r}_k(\cos\psi_k + i\sin\psi_k), \qquad y_{k2} = \bar{y}_{k1}$$

Здесь $\tilde{r}_k = \sqrt{\bar{k}_1}(\nu_k^2 - 1)$, $\quad \cos\psi_k = \dfrac{1 + 2\nu_k^2\bar{k} + \bar{k}_1}{2\sqrt{\bar{k}_1}(\nu_k^2 - 1)}$.

$$\sin\psi_k = \frac{\sqrt{\bar{k}_1(\nu_k^2 - 1)^2 - \frac{1}{4}(1 + 2\nu_k^2\bar{k} + k_1)^2}}{2\sqrt{\bar{k}_1}(\nu_k^2 - 1)} \tag{36}$$

Введем следующее обозначение:

$$\sqrt{\tilde{r}_k}\left(\cos\frac{\psi_k}{2} + i\sin\frac{\psi_k}{2}\right) = \bar{\alpha}_k + i\bar{\beta}_k \tag{37}$$

Решение однородного дифференциального уравнения (25) можно написать

$$\begin{aligned}\Phi_k^0 = r\Big(&B_{1k}^0 r^{\alpha_k}\cos\bar{\beta}_k\ln r + B_{2k}^0 r^{\alpha_k}\sin\bar{\beta}_k\ln r +\\ &+B_{3k}^0 r^{-\alpha_k}\cos\bar{\beta}_k\ln r + B_{4k}^0 r^{-\bar{\alpha}_k}\sin\bar{\beta}_k\ln r\end{aligned} \tag{38}$$

Частное решение уравнения (25) построим методом вариации постоянных. Так как нас интересует поведение решений около вершины клина ($z = 0$), а для бесселевых функций имеем [3]

$$I_n(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{\Gamma(n+1)}(1 + o(x^2)),\ I_n'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n-1}}{2\Gamma(n)}(1 + o(x^2)),\ \ I_n''(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n-2}}{4\Gamma(n-1)}(1 + o(x^2)) \tag{39}$$

при $x \to 0$ и n не целое, а имея в виду, что $k(x)$ стремится к бесконечности при $x \to 0$, а температура должна иметь конечную величину, возьмем $C_{4k} = 0$. Имея в виду и (39), для $W(r,\varphi)$ получим

$$\begin{aligned}W(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big\{r\Big(&B_{1k}^0 r^{\bar{\alpha}_k}\cos\bar{\beta}_k\ln r + B_{2k}^0 r^{\alpha_k}\sin\bar{\beta}_k\ln r +\\ &B_{3k}^0 r^{-\alpha_k}\cos\bar{\beta}_k\ln r + B_{4k}^0 r^{-\alpha_k}\sin\bar{\beta}_k\ln r\Big) + dr^2\left(\bar{C}_k r^{\nu} + b_k + a_k\right)\Big\}\sin\nu_k\varphi + o(r^6)\end{aligned} \tag{40}$$

если числа $\pm\alpha_k + 1$, $2 + p$ есть целые положительные числа.

Здесь

$$\overline{C}_k = C_{3k}\left(\left(\frac{c}{2}\right)^{p-2}\left(\frac{\beta_1}{4\Gamma(p-1)} - \frac{(2\beta_1 - \beta_2)}{2\Gamma(p)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\beta_2 v_k^2}{\Gamma(p+1)} + 2\beta_{12}\left(\frac{1}{2\Gamma(p)} + 1\right)d_{kk}\right)\right), \quad a = \frac{\beta_2 h^2 T_0}{3D_{22}v_k^3 d}((-1)^k - 1), \qquad (41)$$

$$d = \sin^2\frac{\psi}{2}\frac{1}{2\sqrt{r}\left(1 + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)}$$

В противном случае, если $1 \pm \alpha_k$, $2 + p$ не есть целые положительные числа, результаты исследования характера напряженного состояния в малой окрестности угловой точки приведут к условиям:

$$\alpha < \pi\sqrt{\frac{K_{22}}{K_{11}}}, \qquad (42)$$

$$\sqrt{\sqrt{\overline{k}_1}(v_k^2 - 1)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1 + 2v_k^2\overline{k} + \overline{k}_1}{2\sqrt{\overline{k}_1}(v_k^2 - 1)}\right)} > 2 \qquad (43)$$

Условие (42) – результат наличия температурного поля. Если $\overline{k} < \sqrt{\overline{k}_1}$, согласно (35), (42), (43) угол раствора пластинки удовлетворяет следующему условию:

$$\alpha < \pi\min\left(\sqrt{\frac{K_{22}}{K_{11}}}, \ \sqrt{\frac{2\left(\sqrt{\overline{k}_1} - \overline{k}\right)}{16 + \left(1 + \sqrt{\overline{k}_1}\right)^2}}\right) \qquad (44)$$

В этом случае решение уравнения (6) будет

$$W(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\{r^{\alpha_k+1}(B_{1k}^0\cos\overline{\beta}_k\ln r + B_{2k}^0\sin\overline{\beta}_k\ln r) + \qquad (45)$$

$$+ dr^2(\overline{c}_k r^p + b_k + a\}\sin v_k\varphi$$

Пусть дискриминант уравнения (29) неотрицательный, тогда общее решение уравнения (25) будет

$$W(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\overline{B}_1^0 r^{1+\sqrt{v_{k1}}} + \overline{B}_2^0 r^{1-\sqrt{v_{k1}}} + \overline{B}_3^0 r^{1+\sqrt{v_{k2}}} + \overline{B}_4^0 r^{1-\sqrt{v_{k2}}} + \right. \qquad (46)$$

$$\left. + \frac{1}{D_{11}}\frac{\overline{c}_k r^{p+2}}{((p+1)^2 - v_{k2})((p+1)^2 - v_{k1})} + b_k r^2 + \overline{A}_k r^2\right\}\sin v_k\varphi + o(r^6)$$

Если $1 \pm \sqrt{y_{k1}}$, $1 \pm \sqrt{y_{k2}}$, $2 \pm p$ есть целые положительные числа, то в этом случае для любых значений раствора α не возникают особенности. В противном случае следует взять $C_{2k} = 0$, $\overline{B}_2^0 = \overline{B}_k^0 = 0$ и для $W(r,\varphi)$ имеем

$$W(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\bar{\infty}} \left\{ \overline{B}_1^0 r^{1+\sqrt{y_{k1}}} + \overline{B}_1^0 r^{1+\sqrt{y_{k2}}} + \bar{c}_k r^{p+2} \times \right. \tag{47}$$

$$\left. \times \frac{1}{D_{11}((p+1)^2 - y_{k2})((p+1)^2 - y_{k1})} + b_k r^2 + A_k r^2 \right\} \sin \nu_k \varphi + o(r^6)$$

Здесь $A_k = \dfrac{\beta_2 h^2 T_0}{3 D_{22} \nu_k^3}((-1)^k - 1)$

При этом, если $\bar{k} \geq \sqrt{k_1}$, то угол раствора пластинки должен удовлетворить следующему условию:

$$\alpha < \pi \min \left(\sqrt{\frac{K_{22}}{K_{11}}}, \quad \frac{1}{1 + \dfrac{4\bar{k}}{\bar{k}_1} + \sqrt{\left(1 + \dfrac{4\bar{k}}{\bar{k}_1}\right)^2 + 3 - \dfrac{12}{\bar{k}_1}}} \right) \tag{48}$$

Если же $\bar{k} < \sqrt{\bar{k}_1}$, то условие (48) следует рассматривать вместе с условием (33).

Имея функцию прогиба при помощи известных формул [1], можно найти напряжения, моменты и перерезывающие силы. Видно, что в случае данного α можно добиться устранения особенностей выбором анизотропии, или для данного материала выбором раствора клина можно устранить всякую особенность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян В. С. Некоторые задачи теории упругости анизотропного тела. - Ереван: 1970. 443 с.
2. Коваленко А. Д. Термоупругость. - Киев: 1975. 211 с.
3. Коренев Б.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. - М.: 1960. 455 с

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 2.07.1996

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 2, 1997 Механика

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МАГНИТОУПРУГОГО СЛОЯ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ, НАХОДЯЩЕГОСЯ ВО ВНЕШНЕМ ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Асанян Д.Д., Багдасарян Г.Е.

Դ.Ջ. Հասանյան, Գ.Ե.Բաղդասարյան
Կիսաանվերջ ճաք պարունակող շերտի լարված-դեֆորմացիոն վիճակի ուսումնասիրումը համասեռ մագնիսական դաշտում

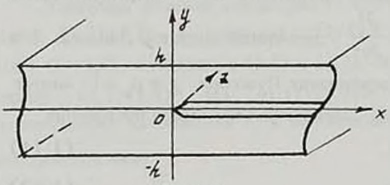
Ուսումնասիրվում է կիսաանվերջ ճաք պարունակող ֆերոմագնիսական շերտի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը, երբ շերտը գտնվում է մագնիսական դաշտում

Hasanian D.J., Bagdasarian G.E.
Stress-strain state ferromagnetic layer with semi-infinite crake in homogeneous magnetic field

Решается задача о нахождении напряженно-деформированного состояния однородного магнитомягкого слоя с трещиной, находящегося в постоянном поперечном магнитном поле. Определены основные характеристики напряженно-деформированного состояния и индуцированного магнитного поля, исследованы их особенности около трещины.

1. Постановка задачи. Пусть в магнитоупругом ферромагнитном слое толщиной $2h$ имеется прямолинейная полубесконечная туннельная трещина, берега которой свободны от внешних механических нагрузок. Прямоугольная система декартовых координат выбрана так, что поперечное сечение трещины находится в плоскости XOY и занимает тонкую область $\Omega^* = \{x > 0,\ y = 0,\ |z| < \infty\}$ около отрезка $(0, \infty)$ координатной оси OX. Слой, материал которого является изотропным, однородным и магнитомягким, занимает область $\Omega = \{|x| < \infty;\ |y| \le h;\ |z| < \infty\}$ и помещен в постоянное магнитное поле $\vec{B}_0(0, B_0, 0)$ (фиг. 1). Внешняя по отношению к слою среда $\Omega_r = \{|y| > h;\ |x| < \infty;\ |z| < \infty\}$ является вакуумом.

Вследствие того, что магнитная проницаемость материала слоя μ_r отлична от единицы $(\mu_r >> 1)$, на берегах трещины компоненты тензора магнитоупругих напряжений терпят разрыв. Этим разрывом обусловлено появление магнитного давления $\vec{P}_0$, действующего на берегах трещины.



Фиг.1

Под действием нагрузки $\vec{P}_0$ и объемных сил магнитного происхождения, появляющихся вследствие деформации тела, в слое устанавливается невозмущенное плоское напряженно-деформированное состояние. Используя результаты работы [1] и предполагая, что все искомые величины не зависят от пространственной координаты z и времени t, получим следующие линейные уравнения и граничные условия, определяющие магнитоупругие характеристики возмущенного состояния: уравнения магнитоупругости во внутреней области слоя $(x, y) \in \Omega$

$$\Delta U_i + \frac{1}{1-2\nu}(U_{1,1} + U_{2,2})_{,i} + \frac{2\chi B_0}{\mu\mu_r}\Phi_{,i2} = 0, \quad (i = 1, 2), \quad \Delta\Phi = 0, \quad (1.1)$$

где $f_{,i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\quad x_1 = x, \quad x_2 = y$.

уравнения магнитостатики при $(x, y) \in \Omega_e \cup \Omega^*$

$$\Delta\Phi^{(e)} = 0 \qquad (1.2)$$

Граничные условия на плоскостях $y = \pm h, \quad |x| < \infty$

$$U_1(x, \pm h) = Q_1(x), \quad U_2(x, \pm h) = Q_2(x) \qquad (1.3)$$

$$\Phi_{,2}^{(e)}(x, \pm h) = \mu_r \Phi_{,2}(x, \pm h) \qquad (1.4)$$

$$\Phi_{,1}^{(e)}(x, \pm h) = \Phi_{,2}(x, \pm h) - \frac{B_0}{\mu_0}\frac{\chi}{\mu_r}U_{2,1}(x, \pm h) \qquad (1.5)$$

Граничные условия на плоскости $y = 0$

$$U_{2,1}(x,0) = 0, \quad \Phi_{,2}(x,0) = 0 \qquad \text{при} \quad x < 0 \qquad (1.6)$$

$$t_{21}(x,0) + t_{21}^{M}(x, 0) + \frac{2\chi B_0}{\mu\mu_r}\Phi_{,1}(x,0) = 0 \qquad \text{при} \quad |x| < \infty \qquad (1.7)$$

$$\Phi_{,1}(x,0) = \frac{B_0}{\mu_0}\frac{\chi}{\mu_r}U_{2,1}(x,0) \qquad \text{при} \quad x > 0 \qquad (1.8)$$

$$t_{22}(x, 0) + t_{22}^{M}(x, 0) = t_{22}^{M(e)}(x, 0) \qquad \text{при} \quad x > 0 \qquad (1.9)$$

Условия на бесконечности

$$\Phi^{(e)}(x, y) \to 0 \qquad \text{при} \qquad x^2 + y^2 \to \infty \qquad (1.10)$$

В (1.1)-(1.10) приняты следующие обозначения:
$U_i(x,y)$ $(i=1,2)$ - компоненты вектора упругих перемещений; $\Phi^{(e)}$ и Φ - потенциалы индуцированного магнитного поля, соответственно в вакууме и в среде; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - двумерный оператор Лапласа; λ и μ - постоянные Ляме; ν - коэффициент Пуассона; $\chi = \mu_r - 1$ - магнитная восприимчивость среды; μ_0 - абсолютная магнитная постоянная

$$t_{ij} = \sigma_{ij} + \mu_0\chi(H_{0i}h_j + H_{0j}h_i) \tag{1.11}$$

$$t_{ij}^M = B_{0i}h_j + B_{0j}h_i - \delta_{ij}\mu_0 H_{0k}h_k \tag{1.12}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}U_{k,k} + \mu(U_{i,j} + U_{j,i}) \tag{1.13}$$

$$\bar{h} = \operatorname{grad}\Phi, \quad \bar{h}^{(e)} = \operatorname{grad}\Phi^{(e)}, \quad \bar{B}_0 = \mu_0\mu_r\bar{H}_0, \quad \bar{B}_0^{(e)} = \mu_0\bar{H}_0^{(e)} \tag{1.14}$$

$Q_i(x)$ $(i=1,2)$ - заданные значения упругих перемещений границ $y=\pm h$. Заметим, что плоскость $y=0$ является плоскостью симметрии, т. е.

$$U_2(x,y) = -U_2(x,-y), \quad U_1(x,y) = U_1(x,-y)$$
$$\Phi(x,y) = -\Phi(x,-y), \quad \Phi^{(e)}(x,y) = -\Phi^{(e)}(x,-y) \tag{1.15}$$

По этой причине задачу будем решать в областях
$\Omega_1 = \{-h < y < 0; |x| < \infty\}$ и $\Omega_{e1} = \{-\infty < y < -h; |x| < \infty\}$.

2. Интегральное уравнение задачи. Решение задачи (1.1)-(1.2) с учетом условия на бесконечности (1.10) представим в виде:
в области Ω_1:

$$U_1(x,y) = -i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\alpha|}{\alpha}\left\{-\left[A_1(\alpha) + (|\alpha|y - 3 + 4\nu)\frac{A_2(\alpha)}{|\alpha|} + \gamma_1 A_3(\alpha)\right]e^{-|\alpha|y} + \right.$$
$$\left. + \left[A_4(\alpha) + (|\alpha|y + 3 - 4\nu)\frac{A_5(\alpha)}{|\alpha|} + \gamma_1 A_6(\alpha)\right]e^{|\alpha|y}\right\}e^{-i\alpha x}d\alpha. \tag{2.1}$$

$$U_2(x,y) = -i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\alpha|}{\alpha}\left\{\left[A_1(\alpha) + yA_2(\alpha)\right]e^{-|\alpha|y} + \left[A_4(\alpha) + yA_5(\alpha)\right]e^{|\alpha|y}\right\}e^{-i\alpha x}d\alpha.$$

$$\Phi(x,y) = \frac{B_0}{\mu_0}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A_3(\alpha)e^{-|\alpha|y} + A_6(\alpha)e^{|\alpha|y}\right]e^{-i\alpha x}d\alpha,$$

где

$\gamma_1 = \frac{2(1-2\nu)\chi B_0^2}{\mu_0\mu\mu_r}$ в области Ω_{e1}:

$$\Phi^{(e)}(x,y)=\frac{B_0}{\mu_0}\int_{-\infty}^{\infty} A_7(\alpha)e^{|\alpha|y}e^{-i\alpha x}d\alpha. \qquad (2.2)$$

Учитывая условия симметрии (1.15), можно написать решение задачи (1.1)-(1.2) в областях Ω/Ω_1 и Ω_e/Ω_{e1}. Функции $A_i(\alpha)$ $(i=\overline{1,7})$, входящее в (2.1) и (2.2), определяются из граничных условий (1.3)-(1.9). Из (1.11)-(1.14), с учетом (2.1)-(2.2), магнитоупругие напряжения t_{ij} и максвеловские напряжения t_{ij}^M можно представить в виде

$$\frac{t_{12}(x,y)}{\mu}=\int_{-\infty}^{\infty}(-i\alpha)\left\{\left[2A_1(\alpha)+(2|\alpha|y-4+4\nu)\frac{A_2(\alpha)}{|\alpha|}+\gamma_2A_3(\alpha)\right]e^{|\alpha|y}+\right.$$

$$\left.+\left[2A_4(\alpha)+(2|\alpha|y+4-4\nu)\frac{A_5(\alpha)}{|\alpha|}+\gamma_2A_6(\alpha)\right]e^{|\alpha|y}\right\}e^{-i\alpha x}d\alpha. \qquad (2.3)$$

$$\frac{t_{22}(x,y)}{\mu}=\gamma_0+\int_{-\infty}^{\infty}|\alpha|\left\{\left[-2A_1(\alpha)+(-2|\alpha|y+2-4\nu)\frac{A_2(\alpha)}{|\alpha|}-\gamma_1A_3(\alpha)\right]\times\right.$$

$$\left.\times e^{-|\alpha|y}+\left[2A_4(\alpha)+(2|\alpha|y+2-4\nu)\frac{A_5(\alpha)}{|\alpha|}+\gamma_1A_6(\alpha)\right]e^{|\alpha|y}\right\}e^{-i\alpha x}d\alpha;$$

$$\frac{t_{12}^M(x,y)}{\mu}=\frac{B_0^2}{\mu_0\mu}\int_{-\infty}^{\infty}(-i\alpha)\left[A_3(\alpha)e^{-|\alpha|y}+A_6(\alpha)e^{|\alpha|y}\right]e^{-i\alpha x}d\alpha$$

$$\frac{t_{22}^M(x,y)}{\mu}=\frac{(2\mu_r-1)B_0^2}{2\mu_0\mu\mu_r^2}+\frac{(2\mu_r-1)B_0^2}{\mu_0\mu\mu_r}\int_{-\infty}^{\infty}|\alpha|\left[-A_3(\alpha)e^{-|\alpha|y}+A_6(\alpha)e^{|\alpha|y}\right]\times$$

$$\times e^{-i\alpha x}d\alpha \qquad (2.4)$$

где

$$\gamma_0=\frac{\chi B_0^2}{\mu_0\mu\mu_r^2};\quad \gamma_2=\frac{(3-4\nu)\chi B_0^2}{\mu_0\mu\mu_r}$$

Аналогичным образом можно привести выражение для $t_{11}(x,y)$ и $t_{11}^M(x,y)$.

Перейдем к определению неизвестных функций $A_i(\alpha)$ $(i=\overline{1,7})$ путем удовлетворения граничных условий. Для этой цели введем следующие обозначения:

$$U_{2,1}(x,0)=f(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{при} \quad x>0\\ 0 & \text{при} \quad x<0\end{cases} \qquad (2.5)$$

$$\Phi_{12}(x,0) = g(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Используя граничные условия (1.6), легко показать, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям

$$\varphi(-x) = -\varphi(x); \quad \psi(-x) = -\psi(x) \tag{2.7}$$

Подставляя (2.1) и (2.3) в граничные условия (1.3)-(1.7), и учитывая (2.5)-(2.6), приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\hat{A}\bar{x} = \bar{\Phi} \tag{2.8}$$

Эти уравнения позволяют выразить неизвестные функции $A_i(\alpha)$ через новые неизвестные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Матрица $\hat{A}$, векторы $\bar{x}$ и $\bar{\Phi}$, входящие в (2.8), имеют вид:

$$\hat{A} = \begin{Vmatrix} |\alpha|e^{h|\alpha|} & (-h|\alpha|-3+4\nu)e^{h|\alpha|} & \frac{|\alpha|}{2}\gamma_1 e^{h|\alpha|} & -|\alpha|e^{-h|\alpha|} & (h|\alpha|-3+4\nu)e^{-h|\alpha|} & -\frac{|\alpha|}{2}\gamma_2 e^{-h|\alpha|} & 0 \\ |\alpha|e^{h|\alpha|} & -h|\alpha|e^{h|\alpha|} & 0 & |\alpha|e^{-h|\alpha|} & -h|\alpha|e^{-h|\alpha|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1|\alpha|e^{h|\alpha|} & 0 & 0 & -\mu_2|\alpha|e^{-h|\alpha|} & |\alpha|e^{-h|\alpha|} \\ 0 & 0 & |\alpha|e^{h|\alpha|} & 0 & 0 & |\alpha|e^{-h|\alpha|} & -|\alpha|e^{-h|\alpha|} \\ 4|\alpha| & -8(1-\nu) & 2\beta|\alpha| & 4|\alpha| & 8(1-\nu) & 2\beta|\alpha| & 0 \\ 2|\alpha| & 0 & 0 & 2|\alpha| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2|\alpha| & 2|\alpha| & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{Vmatrix} A_1(\alpha) \\ A_2(\alpha) \\ \vdots \\ A_7(\alpha) \end{Vmatrix}; \quad \bar{\Phi} = \begin{Vmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_7 \end{Vmatrix}; \quad \beta = \frac{B_0^2}{\mu_0\mu}\frac{4\mu_r(1-\nu)-3+4\nu}{\mu_r}$$

$$\Phi_1 = \bar{Q}_1(\alpha); \ \Phi_2 = -\frac{|\alpha|}{\alpha i}\bar{Q}_2(\alpha); \ \Phi_3(\alpha) = 0; \ \Phi_4 = -\frac{\chi}{\mu_r}\frac{|\alpha|}{\alpha i}$$

$$\Phi_5 = 0; \ \Phi_6 = -\frac{|\alpha|}{\alpha i}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\varphi(s)e^{i\alpha s}ds$$

$$\Phi_7 = -\frac{|\alpha|}{\alpha i}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\psi(s)e^{i\alpha s}ds$$

$$\bar{Q}_i(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Q_i(x)e^{i\alpha x}dx \qquad (i = 1, 2)$$

Предполагая, что $\det \hat{A} \neq 0$, из (2.8) найдем

$$A_i(\alpha) = \sum_{k=1}^{7} b_{ik}(\alpha)\Phi_k(\alpha) \qquad (i = \overline{1,7}) \tag{2.9}$$

где b_{ik} - элементы обратной матрицы к $\hat{A}$.

Таким образом, все неизвестные $A_i(\alpha)$ $(i = \overline{1,7})$ выражены через две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, которые должны определяться из граничных условий (1.8)-(1.9). Подставляя (2.9) в граничные условия (1.8)-(1.9), с учетом (2.4), получим следующую систему уравнений относительно $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$\int_0^{\infty} \varphi(t) K_0\left(\frac{t-x}{h}\right) dt = Q_0 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_1(t)\, э_1(t-x)\, dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_2(t)\, э_2(t-x)\, dt \equiv q(x), \quad x > 0 \tag{2.10}$$

$$\psi(x) = \frac{\chi}{\mu_r} \varphi(x)$$

где

$$э_i(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{э}_i(\alpha) e^{i\alpha s} d\alpha \qquad (i = 1, 2)$$

$$\bar{э}_1(t) = \frac{4(1-2\nu)\operatorname{sh}t - 4t\operatorname{ch}t}{2t - (3-4\nu)\operatorname{sh}2t}$$

$$\bar{э}_2(t) = \frac{|t|}{it} \frac{b_0^2}{\operatorname{ch}t} + \frac{1}{i} \frac{-4t\operatorname{sh}t + (7-15\nu)\operatorname{ch}t}{2t - (3-4\nu)\operatorname{sh}2t} \tag{2.11}$$

$$Q_0 = \frac{b_0^2}{2} \frac{\mu_r^2 - 4\mu_r + 3}{\mu_r^2}; \quad b_0^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0 \mu}$$

$$K_0(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{1-\nu} + \mu_r b_0^2 \right) \operatorname{th}\alpha + K(\alpha) \right\} e^{i\alpha s} d\alpha$$

$$K(\alpha) = \frac{(b_0^2 - 1)\left[(3-4\nu)\operatorname{sh}2\alpha + 2\alpha\operatorname{sh}^2\alpha\right] - 2(2b_0^2 + 1)\alpha^2 \operatorname{sh}2\alpha - 8(1-\nu)^2 \operatorname{sh}2\alpha}{\operatorname{sh}2\alpha\left[-2\alpha + (3-4\nu)\operatorname{sh}2\alpha\right]} \tag{2.12}$$

При получении (2.10)-(2.12) было предположено, что $\mu_r - 1 \equiv \mu_r$, поскольку для основных ферромагнитных материалов [2] значение μ_r меняется в пределах $10^2 \div 10^4$.

Таким образом, задача свелась к решению интегрального уравнения (2.10) при условии (2.7).

Зная функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, из (2.9) можно определить $A_i(\alpha)$, с помощью которых по формулам (2.1)-(2.3) восстанавливаются магнитоупругие перемещения $U_i(x,y)$ $(i=1,2)$ и магнитоупругие напряжения $t_{ij}(x,y)$ $(i,j=1,2)$. В частности, для $t_{22}(x,y)$ на линии $y=0$ будем иметь

$$\frac{t_{22}(x,0)}{\mu}=\gamma_0+\int_0^{\infty}\varphi(t)K_1\left(\frac{t-x}{h}\right)dt+\int_{-\infty}^{\infty}G(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha \tag{2.13}$$

где

$$G(\alpha)=-4\tilde{Q}_1(\alpha)\left[|\alpha|b_{11}(\alpha)-(1-2\nu)b_{21}(\alpha)\right]-$$

$$-\tilde{Q}_2(\alpha)\left[4i\alpha b_{12}(\alpha)+2\gamma_1 i\alpha b_{12}(\alpha)+4(1-2\nu)\frac{|\alpha|}{\alpha i}b_{22}(\alpha)\right] \tag{2.14}$$

$$K_1(t)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}L_1(\alpha)\sin\alpha t\,d\alpha,\quad L_1(\alpha)=-\frac{\operatorname{th}\alpha}{1-\nu}+K(\alpha).$$

3. Замкнутое решение задачи. Как видно из предыдущего пункта, определение напряженно-деформированного состояния магнитоупругого слоя сводится к решению интегрального уравнения с разностным ядром (2.10), а коэффициент интенсивности магнитоупругого напряжения можно определить из

$$K_{\text{hI}}^{-}=\lim_{x\to -0}\left[(-x)^{\frac{1}{2}}\frac{t_{22}(x,0)}{\mu}\right]. \tag{3.1}$$

Теория и методы решения интегральных уравнений типа (2.10) изложены в [3,4]. Поступая аналогичным образом, как и в [3,4], решение уравнения (2.10) можно представить в виде

$$\hat{\varphi}_+(\alpha)=\frac{ib_0^2}{2L_-(0)}\frac{1}{\alpha L_+(\alpha)}, \tag{3.2}$$

где

$$\hat{\varphi}_+(\alpha)=\int_0^{\infty}\varphi(\xi)e^{i\alpha\xi}d\xi, \tag{3.3}$$

$$L_+(\alpha)=\frac{\theta_0\sqrt{\alpha+i}}{\alpha}L_{*+}(\alpha),\quad L_-(\alpha)=\sqrt{\alpha-i}\,L_{*-}(\alpha), \tag{3.4}$$

$$L_{*\pm}(\alpha)=\exp\left\{\pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln L_*(\alpha)}{\xi-\alpha}d\xi\right\};\quad L_*(\alpha)=\frac{\alpha L(\alpha)}{\theta_0\sqrt{\alpha^2+1}}, \tag{3.5}$$

$$L(\alpha)=\theta_0\operatorname{th}\alpha+K(\alpha),\quad \theta_0=\mu_* b_0^2-\frac{1}{1-\nu}. \tag{3.6}$$

Воспользовавшись асимптотическими свойствами преобразования Фурье [3], найдем, что

$$\frac{t_{22}(x,0)}{\mu}=-\frac{1}{1-\nu}\frac{b_0^2}{2}\frac{\sqrt{1-2\nu}}{\sqrt{1-(1-\nu)\mu_r b_0^2}}(-x)^{-1/2} \quad \text{при} \quad x\to 0 \qquad (3.7)$$

Коэффициент интенсивности магнитоупругих напряжений $K_{b1}^{(\infty)}$ из (3.1) примет вид

$$K_{b1}^{\infty}=-\frac{1}{1-\nu}\frac{b_0^2}{2}\frac{\sqrt{1-2\nu}}{\sqrt{1-(1-\nu)\mu_r b_0^2}}$$

Отметим, что ключевым моментом решения задачи для полубесконечной трещины являются факторизация функции (3.6). Однако, если в общем случае ядра $K_0(t)$ использовать интегральную формулу (3.5), то практически нахождение численных решений часто оказывается весьма затруднительным. Поэтому на практике пользуются также методом приближенной факторизации Койтера [3 5].

Идея этого метода состоит в следующем. Функция $L(\alpha)$ заменяется приближенно равной ей $\bar{L}(\alpha)$ (численные значения этих функций на некоторой прямой $\mathrm{Im}_\alpha = c$, $-\infty < \mathrm{Re}\,\alpha < \infty$ приближенно равны), которая легко факторизуется. Важно отметить, что нет необходимости в том, чтобы $L(\alpha)$ и $\bar{L}(\alpha)$ вели себя одинаковым образом в комплексной плоскости α. В [5] доказано, что если $L(\alpha)$ и $\bar{L}(\alpha)$ приближенно равны на некоторой линии, то окончательные решения будут тоже приближенно равны.

В качестве $\bar{L}(\alpha)$ возьмем следующую функцию:

$$L(\alpha)\cong\bar{L}(\alpha)=\frac{a_0\sqrt{\alpha^2+a_1^2}}{\alpha}, \qquad (3.9)$$

$$L_1(\alpha)\cong\bar{L}_1(\alpha)=\frac{b_0\sqrt{\alpha^2+b_1^2}}{\alpha}.$$

где

$$a_0=\lim_{\alpha\to\infty}L(\alpha)=\theta_0;\quad a_1=\lim_{\alpha\to 0}\alpha L(\alpha)=-\frac{1}{a_0}\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \qquad (3.10)$$

$$b_0=\lim_{\alpha\to\infty}L_1(\alpha)=-\frac{1}{1-\nu};\quad b_1=\lim_{\alpha\to 0}\alpha L_1(\alpha)=\frac{2(1-\nu)^2}{1-2\nu}.$$

Решением уравнения (2.10), с учетом (3.9) будет

$$\hat{\varphi}_{-}(\alpha) = G^{+}(\alpha)\frac{1}{\bar{L}(0)\bar{L}_{-}(\alpha)}; \quad G^{+}(\alpha) = \frac{ib_0^2}{2\alpha} \tag{3.11}$$

где

$$\bar{L}_{+}(\alpha) = \frac{a_0\sqrt{\alpha + ia_1}}{\alpha}; \quad \bar{L}_{-}(\alpha) = \sqrt{\alpha - ia_1} \quad \text{при} \quad a_1 > 0, \tag{3.12}$$

$$\bar{L}_{+}(\alpha) = \frac{a_0\sqrt{\alpha - ia_1}}{\alpha}; \quad \bar{L}_{-}(\alpha) = \sqrt{\alpha + ia_1} \quad \text{при} \quad a_1 > 0.$$

Коэффициент интенсивности магнитоупругих напряжений (3.1), с учетом (3.9) и (2.13) запишется в виде

$$\bar{K}_{kl}^{\infty} = K_{kl}^{\infty} \tag{3.13}$$

т. е. (3.13) и (3.8) в точности совпадают.

Отметим, что аналогичные задачидля магнитоупругого слоя решены в [6,7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Pao Y. - H., YEH C. - S., "A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids". - Int. J. Eng. Sci., 1973, v. 11, № 4, pp. 415-436.
2. Бозорт Р. Н. Ферромагнетизм. - М.: Изд. иностр. лит., 1956. 784 с.
3. Б. Нобл. Метод Винера-Хопфа. - М.: Изд. Иностр.лит., 1962. 279 с.
4. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. - М.:Наука, 1986.334 с.
5. Koiter W. T. "Approximate solution of Winer-Hopf type integral equations with applications", part I-III, Konike Ned. Akad. Wetenschap. Proc. B 57, 1954, pp. 558-579.
6. Shindo Y. The linear magnetoelastic problem of two complanor Griffith craek. In a soft ferromagnetic elastic strip. - J. Appl. Mech., ASME, 1982, v. 49., № 1, pp. 69-74.
7. Асанян Д. Д., Багдасарян Г. Е., Григорян Г. С. Напряженно деформированное состояние магнитомягкого слоя с трещиной, обусловленное внешним магнитным полем. - IV Всесоюзный симпозиум "Теоретические вопросы магнитоупругости". Ереван, Издательство ЕрГУ, 1989, с. 16-19.

Институт механики НАН РА

Поступила в редакцию 2.05.1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50. N 2, 1997 Механика

ВОЛНЫ ИЗГИБА И ДРУГИЕ ДЛЯ ОДНОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ

Мовсисян Л. А.

Լ.Ա. Մովսիսյան
Մի պիեզոէլեկտրիկ սալում ծռման և այլ ալիքները

Ուսումնասիրվում է խորանարդային համակարգի $23, \overline{43}\,m$ դասի սալում միաչափ ալիքները: Հիմքում դրված է ուղիղների վարկածը ընդհանրացված ձևով: Կախված բյուրեղի սիմետրիայի առանցքների դիրքից տարբեր տիպի ալիքները (ձգման, սահքի, ծռման և ոլորման) տարբեր զուգորդումով են հանդես գալիս: Այդպիսին է նաև պիեզոէֆեկտը.

Movsisian L. A.
The bending and other waves in one piezoelectric plate

Изучаются одномерные волны в пластинке из пьезоэлектрика кубической системы класса $23, \overline{43}\,m$. В зависимости от ориентации его осей симметрии по отношению к сторонам пластинки различные волны появляются в различных сочетаниях. Эффект пьезоэлектричества также по-разному проявляется.

В основу положена гипотеза прямых в обобщенном виде.

1. Имеется бесконечная пластинка из пьезоэлектрика кубической системы (класс $23, \overline{43}\,m$). Волны распространяются по оси x, а ось z нормальна к срединной плоскости. Изгиб пластинки происходит в плоскости xz.

Принимаются следующие кинематические и геометрические предположения:

$$\sigma_z = e_z = 0$$

$$u_x = u + \frac{2}{h} z\varphi, \qquad u_y = v + \frac{2}{h} z\psi, \qquad u_z = w \tag{1.1}$$

h толщина пластинки.

При этом компоненты деформаций суть следующие:

$$e_x = \varepsilon_1 + \frac{2}{h} z\chi_1, \quad e_{xy} = \varepsilon_2 + \frac{2}{h} z\chi_2, \quad e_{xz} = \gamma_1, \quad e_{yz} = \gamma_2$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \chi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \chi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\gamma_1 = \frac{2}{h}\varphi + \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \gamma_2 = \frac{2}{h}\psi \tag{1.2}$$

(Величины σ_i и e_i определяются)

Напряженность электрического поля и электрическая индукция удовлетворяют уравнениям [1]

$$\mathrm{rot}\,\overline{E} = 0, \qquad \mathrm{div}\,\overline{D} = 0 \tag{1.3}$$

Считается, что внешние плоскости пластинки покрыты металлическим слоем, поэтому для электрического потенциала примем

$$\Phi = F(x,t)\left(1 - \frac{4}{h^2}z^2\right), \qquad E_i = -\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \tag{1.4}$$

Величины $u,\dots,\psi$ характеризуют растяжение, сдвиг, изгиб и кручения. Вопрос ставится следующим образом, какие из этих волн появляются совместно и на какие волны пьезоэффект действует и как?

Определяющие уравнения в системе осей симметрии есть

$$e_i = a_{ij}\sigma_j, \qquad a_{ij} = \begin{cases} a_{11}, & i = j \\ a_{12}, & i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$e_i = a_{44}\sigma_i + dE_{i-3}, \qquad i = 4, 5, 6 \tag{1.5}$$

$$D_i = d\sigma_{i+3} + \chi E_i, \quad i = 1, 2, 3$$

В обычных обозначениях уравнения движения пластинки будут

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = \rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} = \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = N_1 + \frac{\rho h^2}{6}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = N_2 + \frac{\rho h^2}{6}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{1.6}$$

В случае, когда оси координат направлены по осям кристалло графической системы, то из искомых величин только ψ (кручение относительно оси x) зависит от электрического эффекта следующим образом:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{12}{h^2}\psi - \frac{8d}{h}\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\left(A_{44}d^2 - \chi\right)\left(\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - F\right) + \frac{h}{2}A_{44}d\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \tag{1.7}$$

И скорость волны кручения определяется

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 + \frac{12}{h^2k^2} + \frac{4\eta}{1-\eta}\left(1 - \frac{h^2k^2}{12}\right), \quad c^2 = \frac{A_{44}}{\rho}, \quad \eta = \frac{A_{44}d^2}{\chi} \tag{1.8}$$

Как видно из последней формулы, чем длинее волна, тем больше эф фект электричества и, чем больше параметр $\eta(\eta < 1)$, тем больше этот эффект.

2. Если ось x составляет угол α относительно оси симметрии кристалла (поворот относительно оси z), то определяющие уравнения будут

$$
\begin{aligned}
e_x &= a'_{11}\sigma_x + a'_{12}\sigma_y + a_{12}\sigma_z + a'_{16}\sigma_{xy} + d_1 E_z \\
e_y &= a'_{12}\sigma_x + a'_{11}\sigma_y + a_{12}\sigma_z - a'_{16}\sigma_{xy} - d_1 E_z \\
e_z &= a_{12}(\sigma_x + \sigma_y) + a_{11}\sigma_z \\
e_{yz} &= a_{44}\sigma_{yz} + d_2 E_y - d_3 E_x \\
e_{xz} &= a_{44}\sigma_{xz} + d_3 E_y - d_2 E_x \\
e_{xy} &= a'_{16}(\sigma_x - \sigma_y) + a_{66}\sigma_{xy} + d_4 E_z \\
D_x &= d_2\sigma_{xz} + d_3\sigma_{yz} + \chi E_x \\
D_y &= -d_3\sigma_{xz} + d_2\sigma_{yz} + \chi E_y \\
D_z &= d_1(\sigma_x - \sigma_y) + d_4\sigma_{xy} + \chi E_z
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

значения новых коэффициентов податливости a'_{ij} можно взять например из [2], а d_i есть

$$
d_1 = 0.5d\sin 2\alpha, \quad d_2 = d\cos\alpha, \quad d_3 = d\sin\alpha, \quad d_4 = d\cos 2\alpha \tag{2.2}
$$

В предположениях предыдущего пункта уравнения движений в перемещениях будут

$$
\begin{aligned}
B_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{16}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
B_{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{16}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

$$
A_{44}\left(\frac{2}{h}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2}{3}d_3\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
$$

$$
\begin{aligned}
&B_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + B_{66}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{32}{h^2}D_1\frac{\partial F}{\partial x} = \\
&= \frac{6}{h}A_{44}\left(\frac{2}{h}\varphi + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

$$
B_{16}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + B_{66}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{32}{h^2}D_2\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{12}{h^2}A_{44}\psi + \rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}
$$

$$
(A_{44}d_2 - \chi)\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \left[C_{11}d_1^2 + (B_{16} + C_{66})d_1 d_4 + \right.
$$

$$+B_{66}d_4^2-\chi\Big]F+\frac{h^2}{8}A_{44}d_3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+D_2\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$$

Здесь

$$D_1=\frac{h}{4}(A_{44}d_3+C_{11}d_1+B_{16}d_4)$$

$$D_2=\frac{h}{4}(A_{44}d_2+C_{66}d_1+B_{66}d_4)$$

$$C_{11}=B_{11}\left(1+\frac{a'_{12}}{a'_{11}}\right)-B_{16}\frac{a'_{16}}{a'_{11}},\quad C_{66}=B_{16}\left(1+\frac{a'_{12}}{a'_{11}}\right)-B_{66}\frac{a'_{16}}{a'_{11}}$$

$$A_{11}=a'_{11}-\frac{(a'_{12})^2}{a'_{11}},\quad A_{16}=\frac{a'_{16}(a'_{11}+a'_{12})}{a'_{11}},\quad A_{66}=a'_{66}-\frac{(a'^2_{16})}{a'_{11}}$$

$$B_{11}=\frac{A_{66}}{\Delta},\quad B_{16}=-\frac{A_{16}}{\Delta},\quad B_{66}=\frac{A_{11}}{\Delta}$$

$$\Delta=A_{11}A_{66}-A_{16}^2$$

Из полученных систем видно, что волны растяжения и сдвига распространяются без дисперсии, не вызывая электрического эффекта. Волны же изгиба и кручений присутствуют совместно, при этом сопровождаются электричеством.

Для выяснения картины изменения скоростей в зависимости от угла α рассмотрен пример материала Германат висмута (кл. 23) с данными [1].

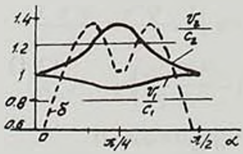
$$c_{11}=128\ \text{ГПа},\quad c_{12}=30{,}5\ \text{ГПа},\quad c_{44}=25\cdot 5\ \text{ГПа}$$

$$c_{44}=A_{44},\quad \rho=9{,}23\cdot 10^3\ \text{кг/м}^3 \tag{2.5}$$

$$c_{11}=(a_{11}+a_{12})\Delta_1^{-1},\quad c_{12}=-a_{12}\Delta_1^{-1},\quad c_{44}=a_{44}^{-1},\quad \Delta_1=(a_{11}-a_{12})(a_{11}+2a_{12})$$

Пьезоэлектрический модуль равен 0,9 Кл/м^2.

Диэлектрическая проницаемость $\chi - c_{44}d^2 = 34{,}2\cdot 10^{-11}\,\frac{\Phi}{\text{м}}$. На фиг. 1



Фиг 1

приведены кривые относительных скоростей растяжения v_1/c_1 и сдвига v_2/c_2 в зависимости от α. Скорость c_1 и c_2 соотвествующие скорости при $\alpha=0$, причем $c_1=3616$ м сек$^{-1}$, $c_1/c_2=2.176$. Как видно из фиг.1, в интервале изменения α продольная скорость получает наименьшее значение при $\alpha=\pi/4$, в то время как сдвиговая, наоборот, наибольшее значение получает при этом. Изменение значения скоростей поперечной и продольной волн в зависимости от угла поворота обсуждается в [3].

Получено выражение фазовой скорости изгибной волны (наименьшая среди (2.4)), с точностью h^4k^4. Ниже приводится формула для нее в основном порядке (второй член из-за громоздкости не приводится)

$$
\frac{v^2}{a^2} = \frac{h^2k^2}{12}(1+2\delta), \quad a^2 = \frac{B_{11}}{\rho}
$$
$$
\delta = \frac{(C_{11}d_1 + B_{16}d_4 + 0{,}5A_{44}d_3)(C_{11}d_1 + B_{16}d_4)}{B_{11}(\chi - B_{11}d_1^2 - B_{66}d_4^2)} \tag{2.6}
$$

Величина δ характеризует влияние пьезоэлектричества на скорость волны. На фиг.1 пунктирная кривая - это δ для материала (2.5). Как видно из фигуры, пьезоэффект увеличивает скорость изгибной волны (в качестве единицы выбран δ при $\alpha = \pi/4$ $\delta = 0{,}06737$).

3. При повороте кристаллов относительно оси y полученная система выглядит следующим образом:

$$
B_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{16}\left(\frac{2}{h}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}
$$
$$
B_{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{66}\left(\frac{2}{h}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3.1}
$$
$$
A_{44}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{6}{h}B_{16}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{12}{h^2}B_{66}\left(\varphi + \frac{h}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}
$$

$$
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{2}{3}d_3\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
$$
$$
\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{12}{h^2}\psi - \frac{8}{h}d_3\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{3.2}
$$
$$
(A_{44}d^2 - \chi)\left(\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - F\right) - \frac{h^2}{8}A_{44}d_3\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{h}{2}A_{44}d_3\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0
$$

Здесь, в отличие от предыдущего пункта,

$$
A_{11} = a'_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}, \quad A_{16} = a'_{16}, \quad A_{66} = a'_{66}
$$

Как видно (3.1) и (3.2), только волны сдвига и кручения относительно оси x зависят от пьезоэлектричества.

В табл.1 приведены значения относительной фазовой скорости кручения (1.8) (или (3.2) при $\alpha = 0$) для различных $\overline{\chi} = \chi / A_{44} d^2$ и $\beta = h^2 k^2 / 12$

Таблица 1

β / $\overline{\chi}$	0,025	0,05	0,075	0,1	0,125
1,5	6,986	6,349	4,667	4,275	4,014
5	6,490	4,685	3,907	3,451	3,145
∞	6,403	4,582	3,786	3,317	3

Из табл. 1 виден вывод, сделанный в п.1

В табл. 2 приведены относительные фазовые скорости для волн сдвига (малые числа при одинаковом $\overline{\chi}$) и кручения (большие числа).

Таблица 2

β / $\overline{\chi}$	0,25	0,05	0,075	0,1	0,125
1,5	6,633	4,982	4,250	3,827	3,548
	1,011	1,022	1,025	1,032	1,038
5	6,441	4,634	3,846	3,384	3,073
	1,001	1,003	1,004	1,005	1,006

Табл. 2 показывает.

а) чем длиннее волна, тем больше влияние пьезоэлектричества на волну кручения и тем меньше на волну сдвига,

б) с увеличением диэлектрической проницаемости ($\overline{\chi}$) обе скорости уменьшаются.

В обоих случаях изменение волны кручения существеннее, чем волны сдвига.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424 с.
2. Лехницкий С.Т. Анизотропные пластинки. М.:ГИТТЛ. 1957.463 с.
3. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 239 с.

Институт механики НАН РА

Поступила в редакцию 28.08.1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 2, 1997 Механика

К ПРОБЛЕМЕ ФЛАТТЕРА ПЛАСТИНКИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Белубекян М.В., Минасян М.М.

Մ.Վ.Բելուբեկյան, Մ.Մ. Մինասյան
Գերձայնային գազի հոսանքում սալի ֆլատերի խնդրի մասին

Կառուցվում է նոր մոտավորություն, որը ինչպես ցույց է տրվում աշխատանքում, հանդիսանում է միջանկյալ ճշգրիտ դրվածքով խնդրի և «մխոցային» տեսության միջև. Ելնելով գծային խնդրի լրիվ համակարգից և օգտագործելով գերձայնային ասիմպտոտիկ վերլուծության երկրորդ մոտավորությունը, սալի լայնական տեղափոխումների համար ստացված է որոշիչ հավասարումը, որը ավելի բարձր կարգի է, քան «մխոցային » տեսության համապատասխանող հավասարումը:

Ցույց է տրված, որ այդ լրացումը կարող է բերել արդյունքների որակորեն փոփոխություններին. Որպես օրինակ, դիտարկված է անվերջ սալի ֆլատերի խնդիրը

M. V. Belubekian, M. M. Minasian
On the flutter problem of plates in the supersonic gas flow

В данной работе строится новое приближение в задаче о панельном флаттере пластинки в сверхзвуковом потоке идеального газа. Из общих соотношений выводится система двух дифференциальных уравнений для избыточного давления и прогиба пластинки. По точности это приближение является промежуточным между исходной системой, представляющей взаимодействие газодинамического поля с пластинкой и уравнением для прогиба пластинки, соответствующим "поршневому" приближению

§ 1. Введение

По существу, предлагаемое приближение можно трактовать как второе приближение в асимптотическом разложении, первое в котором соответствует "поршневой" теории. Как показано в работе, предлагаемое приближение вносит качественное изменение в "поршневой" теории и сохраняет главные особенности исходной задачи, утерянные в первом приближении.

В работе отсутствует обзор работ по исследуемой теме, по которой имеется обширная библиография. Авторы ограничились только работами [1,2,3], в которых можно найти все известные результаты, использованные в данной работе. Естественно, авторы не претендуют на оригинальность этих результатов, хотя и некоторые из них получили несколько иное толкование, чем в первоисточниках.

§ 2. Постановка задачи

Допустим, пластинка занимает односвязную область D в плоскости (x, y) и вдоль оси x обтекается сверхзвуковым потоком идеального газа. Рассматривается одностороннее обтекание $(z > 0)$. Край пластинки закреплен жесткой диафрагмой, простирающей вне D до бесконечности.

Тогда имеем задачу:

$$\frac{D^2\varphi}{Dt^2} = a_0^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \Delta_\perp\varphi\right) \quad (z > 0) \tag{2.1}$$

$$\frac{Dp}{Dt} = -\rho a_0^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \Delta_\perp\varphi\right) \quad (z \geq 0) \tag{2.2}$$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)W + \delta p = 0 \quad (z = 0, x, y \in D) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{DW}{Dt} \quad \begin{matrix}(z = 0, x, y \in D) \\ (W = 0, x, y \overline{\in} D)\end{matrix} \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}, \quad \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

где $\varphi(x, y, z, t)$ - возмущенный потенциал течения, $\delta p(x, y, t) = p(x, y, 0, t)$ - избыточное давление на пластинку, a_0 невозмущенная скорость звука в потоке, ρ_0 плотность газа, U - скорость обтекания, $W(x, y, t)$ прогиб пластинки и L -оператор движения ненагруженной пластинки в вакууме.

Заметим, что связанную систему поток-пластинка из нейтрального и невозмущенного начального состояния $\varphi = 0$, $W = 0$ можно вывести либо возмутив течение, либо пластинку, либо и то и другое одновременно. Это подчеркивается в связи с тем, что предложенный в работе подход подразумевает вывести такое приближение для движения пластинки, чтобы сохранить возможность перечисленных возмущений. Данное означает, что уравнение для прогиба должно иметь порядок по t выше, чем оператор L. О порядке по пространственной координате будет сказано ниже.

Поскольку задача (2.1), (2.2) и (2.4) линейная, то можно применить либо метод элементарных решений, либо метод интегральных преобразований. Мы здесь даем предпочтение второму подходу, как наиболее естественному, имея в виду, что вопрос устойчивости все таки задача о начальном возмущении. Считаем уместным процитировать К.М.Кэйза [4]: "Основной момент заключается не в том, что мы не можем найти решения методом элементарных решений, а скорее в том, что мы не можем их пропустить, решая задачу с начальными данными"

Исходя из вышесказанного, в ситуациях, требующих разъяснения для обоснования того и иного утверждения, будем обращаться к соотно шениям, базирующимся на интегральные преобразования.

Будем применять преобразование Лапласа по t и преобразование Фурье по x и y. Для простоты рассмотрим начальную задачу

$$W = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

Для произвольной функции $F(x, y, z, t)$ будем иметь

$$F(x, y, z, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \int_{\gamma_\omega} f(k_x, k_y, z, \omega) e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} d\omega \qquad (2.5)$$

где γ_ω прямая в нижней полуплоскости комплексной плоскости ω, параллельная действительной оси и расположенная ниже всех особен ностей изображения $f(k_x, k_y, \omega, z)$.

Применим преобразование (2.5) к уравнению (2.1), для изображения $\overline{\varphi}$ получим уравнение

$$\frac{d^2 \overline{\varphi}}{dz^2} + \xi^2 \overline{\varphi} = 0, \quad \xi^2 = \left(\frac{\omega - U_x}{a_0} \right)^2 - k_1^2 \qquad (2.6)$$

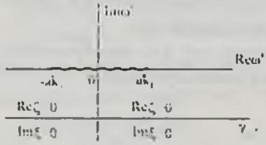
$(k \equiv k_x, \; k_1^2 = k_x^2 + k_y^2)$

Решение (2.6) с учётом граничного условия из (2.4) имеет вид

$$\overline{\varphi}(k_x, k_y, \omega, z) = -\frac{\omega - U_k}{\xi} \overline{W}(k_x, k_y, \omega) e^{-i\xi z} \qquad (2.7)$$

Решение (2.7) известно, его можно получить также методом элементарных решений [3]. Преимущество интегрального представления становится очевидным уже на этом начальном этапе. Если в методе элементарных решений для ограниченности решения по z требуется выполнение условия $\operatorname{Im}\xi < 0$, то для условия излучения следует провести дополнительный анализ. Между тем, в интегральном представлении условия ограниченности и излучения выполняются одновременно одним лишь выбором ветви ξ в комплексной плоскости $\omega' = \omega - Uk$, полученной сдвигом плоскости ω вдоль действительной оси (ясно, что при таком сдвиге не нарушается условие аналитичности $\overline{\varphi}$). Частота ω' трактуется как результат перехода к подвижной системе, в которой поток неподвижен (Доплер).

Действительно, проведя разрез в плоскости ω', соединяющей точки $\omega' = \pm ak_1$ (фиг.1) и выбрав ветвь ξ таким образом, чтобы на действительной оси при $\omega' > ak_1$ ξ принимало положительные действительные значения (при $\omega' > -ak_1$ - отрицательные), легко показать, что на линии γ'_ω выполняется условие $\pi < \arg\xi < 0$ и, кроме того, на той же линии $\mathrm{Re}\,\xi$ и $\mathrm{Re}\,\omega'$ имеют одинаковый знак, т.е. $\mathrm{Re}\,\xi \cdot \mathrm{Re}\,\omega' > 0$. Тогда экспоненциальный множитель в (2.5) примет вид



Фиг.1

$$\exp\left[i(\omega' t - \xi z)\right]\exp ik_1(Ut - x)\exp(-ik_1 y),$$

где первый множитель обеспечивает одновременно и затухание решения при $z \to \infty$, и условие излучения в виде уходящих от пластинки волн без включения иных дополнительных условий.

Следующим этапом в решении проблемы флаттера является определение избыточного давления δp с последующим исследованием задачи на основе уравнения пластинки (2.3).

Следуя известному (см. напр. [1]) методу и используя решение (2.6) и интеграл Лагранжа (следствие из (2.1) и (2.2)), для W можно получить одно однородное интегро-дифференциальное уравнение того же порядка, что и оператора L.

Считается, что это уравнение является наиболее точным в рамках поставленной задачи и его можно применить для пластинок любой протяженности. Однако, как нам кажется, при этом могут ущемляться некоторые граничные и начальные условия в случае конечных и полубесконечных пластинок.

На основе интегро-дифференциального уравнения для различных операторов L для пластинки решены многочисленные задачи, имеющие приближенный характер особенно для конечных тел.

Учитывая сложность таких задач, были предложены различные методы определения избыточного давления, которые существенно упрощали исследования. Среди этих методов особо выделяется своей простотой метод "плоских сечений" или, как принято называть, "поршневая теория", согласно которой

$$\delta p = \rho_0 a_0 \frac{DW}{Dt} \tag{2.8}$$

с различными модификациями в коэффициенте в правой части. Как известно, соотношение (2.8) позволяет легко решить много интересных задач о сверхзвуковом обтекании тонких конструкций .

Однако, (2.8) обладает рядом неисправимых дефектов. Во-первых, это связано с потерей некоторых начальных условий о возмущении пластинки потоком, как отмечалось выше. Другое обстоятельство связано с потерей волны газодинамического характера, которая приводит к обрыву взаимодействия между потоком и пластинкой. Чтобы показать это, еще раз обратимся к решению (2.7).

В пространстве изображений, после определения δp из уравнения (2.3) для функций $\overline{W}(k_x, k_y, \omega)$ получим (в случае бесконечной пластинки и линейного оператора L)

$$\overline{W}(k_x, k_y, \omega) = \frac{\xi(k_x, k_y, \omega)\Phi}{L(i\omega, -ik_x, -ik_y)\xi + i\rho_0(\omega - Uk_x)^2} \tag{2.9}$$

где функция определяется начальными условиями.

"Поршневое" приближение соответствует отбрасыванию k_y^2 в выражении для ξ, т. е. $\omega - Uk_x = a\xi$. Тогда множитель $\omega - Uk_x$ выделяется в знаменателе (2.9) и сокращается с ξ в числителе, что и порождает разрыв.

Важным недостатком (2.8) является то, что оно носит локальный характер (избыточное давление зависит от местных условий на пластинке), в то время как истинное соотношение носит нелокальный характер. Имея в виду также возможные граничные условия на краях пластинки, кроме условий закреплений, можно прийти к заключению, что если для прогиба W надо вывести дифференциальное уравнение, то оно должно иметь выше, чем оператор L, порядок.

§3. Вывод дифференциальных уравнений

Известно, что одно из предположений, на котором базируется "поршневая" теория, это то, что при больших сверхзвуковых скоростях обтекания потенциал течения намного быстро меняется в направлении оси z, чем в горизонтальных направлениях, т. е. имеет место

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} >> \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \tag{3.1}$$

Исходя из этого, построим последовательное приближение для определения потенциала φ, начав с задачи

$$\frac{D^2\varphi_0}{Dt^2} = a_0^2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2} \qquad z > 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}=\frac{DW}{Dt} \qquad z=0 \tag{3.3}$$

Решение этой задачи в изображениях будет

$$\overline{\varphi}_0=-a_0\overline{W}\exp(-i\xi z) \quad \left(\xi=\frac{\omega-Uk}{a_0}\right) \tag{3.4}$$

Вычисление избыточного давления по формуле $\delta p=-\rho_0\frac{D\varphi_0}{Dt}$ при $z=0$ даст (2.8). Если же приложить формулу (2.2) при $z=0$ и $\varphi=\varphi_0$ получим

$$\frac{Dp}{Dt}=\rho_0 a_0\frac{D^2W}{Dt^2}+\rho_0 a_0^3\Delta_\perp W \tag{3.5}$$

Более строгий и последовательный подход требует определения φ в следующем приближении. Тогда для второго приближения вместо задачи (3.2) и (3.5) будем иметь задачу

$$\frac{D^2\varphi_1}{Dt^2}=a_0^2\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+\Delta_\perp\varphi_0\right) \qquad z>0 \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=\frac{DW}{Dt} \qquad z=0 \tag{3.7}$$

Решение этой задачи в изображениях будет

$$\overline{\varphi}_1=-a_0\overline{W}\left[1+\frac{k_\perp^2}{2\xi^2}+\frac{k_\perp^2 iz}{2\xi}\right]e^{i\xi z} \tag{3.8}$$

Из (3.8) при $z=0$ получим

$$\frac{D^2\varphi_1}{Dt^2}=-a_0\left(\frac{\partial^2W}{\partial z^2}-\frac{a_0^2}{2}\Delta_\perp W\right) \tag{3.9}$$

откуда для давления вместо (3.5) будем иметь

$$\frac{Dp}{Dt}=\rho_0 a_0\frac{D^2W}{Dt^2}+\frac{1}{2}\rho_0 a_0^3\Delta_\perp W \tag{3.10}$$

Поскольку (3.5) и (3.6) отличаются лишь коэффициентом во втором слагаемом, то в дальнейшем формулу для давления представим в виде

$$\frac{Dp}{Dt}=\rho_0 a_0\frac{D^2W}{Dt^2}+\nu\rho_0 a_0^3\Delta_\perp W \tag{3.11}$$

с расчетом на то, что коэффициент ν можно определить из условия лучшего согласования с результатами, полученными в точной постановке.

Таким образом, для функций давления на пластинке p и прогиба пластинки W имеем систему уравнений (2.3) и (3.11). Исключая давление, для одной функции W получим уравнение

$$\frac{D}{Dt}\left(L+\rho_0 a_0\frac{D}{Dt}\right)W(x,y,t)=-\nu\rho_0 a_0^3\Delta_\perp W \qquad (3.12)$$

Вывод этого уравнения и является основным результатом данной работы.

Отметим, что оператор в скобках (3.12) соответствует "поршневой" теории.

Как видно, уравнение (3.12) имеет порядок по t и x на единицу выше, чем L и благодаря этому может удовлетворять большим начальным и граничным условиям.

Оператор L для пластинок обычно четного порядка по x. Тогда уравнение (3.12) будет нечётного порядка и это приведет к некоторой неравноправности передних и задних кромок по x в случае конечной пластинки. Это обстоятельство следует считать естественным. Например, в случае, когда оператор L гиперболический (мембрана, приближение Тимошенко и т. д.), то из-за оператора $\frac{D}{Dt}$ число входящих характеристик через границу $x=0$ увеличивается на единицу, что приводит к дополнительному граничному условию на передней кромке.

Вопрос конкретизаций всех граничных условий зависит от конкретного вида L и не является предметом настоящего исследования.

Ниже, чтобы выяснить пределы применимости и степень точности уравнения (3.12), рассмотрим задачу, имеющую точное решение.

§4. Устойчивость бесконечной пластинки в двумерном сверхзвуковом газе

В рассматриваемой задаче выберем опреатор L в известном виде [1,3].

$$L=\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}-N\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+\rho h\varepsilon\frac{\partial W}{\partial t}+k_t W \qquad (4.1)$$

Дисперсионное уравнение для уравнения (3.12) примет вид

$$(\omega-Uk)(\omega^2-c^2k^2+i\varepsilon_0 Uk-i\gamma\omega)=0 \qquad (4.2)$$

где

$$c^2 = \frac{N}{\rho h} + \frac{Dk^2}{\rho h} + \frac{k_f}{k^2 \rho h}, \qquad \varepsilon_0 = \frac{\rho_0 a_0}{\rho h}$$

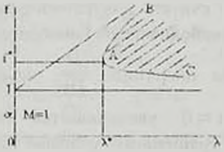
$$\gamma = \varepsilon_0 + \varepsilon, \qquad \delta = k\frac{\rho_0 a_0^3}{\rho h}$$

Чтобы найти границы устойчивости, применим обобщенный принцип Рауса-Гурвица (5). Число корней в нижней полуплоскости ω для уравнения (4.2) равно числу перемен знака в ряду

$$\begin{gathered} 1; \gamma; k^2\left[(\gamma^2 c^2 - \varepsilon_0^2 U^2) + 8\gamma\right] \\ \delta k^6\left[U^2 c^2(\varepsilon_0 + \gamma)^2 - (\varepsilon_0 U^2 + \gamma c^2 + \delta)^2\right] \end{gathered} \tag{4.3}$$

Для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы имела место система неравенств

$$\begin{gathered} \gamma^2 c^2 - \varepsilon_0^2 U^2 + \delta\gamma > 0 \\ Uc(\varepsilon_0 + \gamma) > \varepsilon_0 U^2 + \gamma c^2 + \delta \end{gathered} \tag{4.4}$$



Фиг.2

Решение системы (4.4) представлено на фиг.2. Заштрихованная область представляет устойчивую зону. Если принять обозначения

$$f = \frac{U}{c}, \quad \lambda = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad \frac{\gamma}{\varepsilon_0} = 1 + \lambda, \quad a^2 = \frac{a^2}{c^2}$$

то для определения ветвей AB и AC получим уравнение

$$(f - 1)\left[f - (1 + \lambda)\right] + a^2 k = 0 \tag{4.5}$$

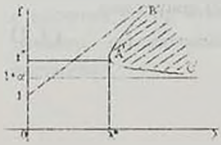
Решение (4.5)

$$f = 1 + \frac{\lambda}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4k\alpha^2}{\lambda^2}}\right] \tag{4.6}$$

сравним с известным решением [3], которое в обозначениях, принятых здесь, имеет вид

$$f = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a^2}{\lambda^2}}} \tag{4.7}$$

На фиг.3 представлена область устойчивости, соответствующая (4.7).



Фиг.3

Это сравнение показывает качественное сходство областей устойчивости. При больших $\lambda > 2a$ верхние ветви практически неразличимы. Выбрав коэффициент $k = 2(\sqrt{2} - 1)$, точка A' будет лежать на верхней ветви решения (4.6). Тогда можно заключить, что при $f > 1 + \sqrt{2\alpha}$, или, $M > \sqrt{2} + \frac{1}{\alpha}$ (M число Маха) области устойчивостей, вычисленные по точной постановке и по предложенному здесь приближению, с большой точностью совпадают.

Заметим, что для всех длин волн имеет место оценка $c^2 \geq c_0^2 + \sqrt{\frac{4Dk_*}{\rho h}}$, которая для данной скорости звука в газе a_0 дает верхнюю оценку для α.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчи вости М: Физматгиз, 1961
2. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. "Механика деформи руемого твердого тела". Итоги науки и техники. 1978, II, с. 67 122.
3. Kornecki A. Aeroelastic and hydroelastic instabilities of infinitely long plates. II. SM Archivies, Vol 4. Issue 4. 1979, pp. 241 343.
4. Кэйз К.М. Гидродинамическая устойчивость как задача с начальны ми данными. Гидродинамическая устойчивость. М.: Изд-во "Мир", 1964, стр. 37-46.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967

Институт механики НАН РА

Поступила в редакцию
19.09.1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 2, 1997 Механика

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КРУЧЕНИЯ СОСТАВНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Баблоян А.А., Мкртчян А.М.

Ա. Հ. Բաբլոյան, Ա. Մ. Մկրտչյան
Բաղադրյալ պրիզմատիկ ձողերի ոլորման խնդրի լուծման մի մեթոդի մասին

Աշխատանքում, կոնկրետ օրինակի վրա, նկարագրվում է բաղադրյալ ձողերի ոլորման խնդրի լուծման մի մեթոդ, որը հիմնված է կշռով օրթոգոնալ ֆունկցիաների համակարգի օգտագործման վրա, երբ կշիռը կտոր առ կտոր հաստատուն ֆունկցիա է

A.A.Babloyan, A.M.Mkrtchian
On one method of torsion problems solution for composite prismatic rods

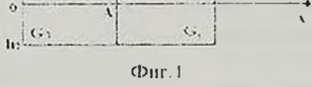
В данной работе на конкретном примере излагается метод решения задачи кручения составного призматического стержня прямоугольного поперечного сечения, когда составляющие материалы разделены друг от друга взаимно перпендикулярными плоскостями, параллельными боковым граням стержня. Метод решения основывается на использовании ортогональных с весом функций, когда весовая функция кусочно постоянна.

В конце работы получены формулы для касательных напряжений с выделенными характерными особенностями.

Методы решения и подробная литература по задачам кручения составных призматических стержней содержатся в [1–8].

1. Постановка задачи и сведение к бесконечным системам

Рассмотрим задачу о кручении составного призматического стержня прямоугольного поперечного сечения, состоящего из четырех различных материалов с модулями сдвига G_1, G_2, G_3, G_4 соответственно (фиг. 1). Поверхности раздела материалов являются две взаимно ортогональные плоскости, паралельные боковым граням стержня.



Фиг. 1

Как известно [1], эта задача сводится к определению внутри прямоугольника непрерывного решения уравнения

$$\Delta U(x,y) = -2G(x,y), \quad U\big|_{\Gamma} = 0 \quad (1)$$

где Δ двумерный оператор Лапласа, а функция $G(x,y)$ кусочно постоянна и имеет вид

$$G(x,y)=\begin{cases}G_1(x) & (y>0)\\ G_2(x) & (y<0)\end{cases},\qquad G_p(x)=\begin{cases}G_{2p-1} & (0<x<a)\\ G_{2p} & (a<x<1)\end{cases}$$

Требуется, чтобы на линиях раздела различных материалов функции $U(x,y)$ и $G^{-1}(x,y)\dfrac{\partial U}{\partial n}$, где n нормаль к линиям контакта, были непрерывными.

В дальнейшем, для простоты, будем рассматривать только случай, когда одна из линий раздела материалов (например, вертикальная) проходит через центр поперечного сечения стержня.

Пользуясь результатами работы [2], решение задачи для рассматриваемого случая в каждой подобласти ($y>0$) или ($y<0$) представим в виде ряда Фурье по ортогональной с весом $G_p^{-1}(x)$ системе функций $\{\sin\lambda_k x,\quad G_p(x)\sin\mu_k x\}$

$$U_p(x,y)=U_{p0}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_{kp}\operatorname{sh}\lambda_k y+B_{kp}\operatorname{sh}\lambda_k(h_p-|y|)\right]\sin\lambda_k x+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[C_{kp}\operatorname{sh}\mu_k y+D_{kp}\operatorname{sh}\mu_k(h_p-|y|)\right]G_p(x)\sin\mu_k x \tag{2}$$

$$\mu_k=\frac{k\pi}{a},\quad \lambda_k=\frac{(2k-1)\pi}{2a},\quad 0\le x\le 2a,\quad p=1;2$$

где $0<y<h$ при $p=1$ и $-h_2<y<0$ при $p=2$, а функция $U_{p0}(x)$ - частное решение уравнения (1) при $y(-1)^{p-1}>0$

$$U_{p0}(x)=\begin{cases}G_{2p-1}x(a-x+G_{2p}a^2\varepsilon_p^{-1}), & (0\le x\le a)\\ G_{2p}(2a-x)(x-a+G_{2p-1}a^2\varepsilon_p^{-1}), & (a\le x\le 2a)\end{cases} \tag{3}$$

Каждое слагаемое формулы (2) в отдельности удовлетворяет нулевым граничным условиям на отрезках $x=0;\ 2a$ и условиям контакта на вертикальной линии раздела материалов $x=a$. Удовлетворяя граничным условиям на отрезках $y=h_1$, $y=-h_2$ и условиям контакта на горизонтальной линии раздела материалов $y=0$, получим соотношения

$$A_{kp}\operatorname{sh}\lambda_k h_p=(-1)^p a_{kp},\qquad C_{kp}\operatorname{sh}\mu_k h_p=(-1)^p b_{kp}, \tag{4}$$

и бесконечные системы относительно безразмерных коэффициентов X_p, Y_p

$$\delta_{p2} X_p = \frac{\delta_0 G_0}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_p Y_k}{\mu_k^2 - \lambda_p^2} + a_p, \quad \delta_{p1} Y_p = \frac{\delta_0}{a^2 G_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_p X_k}{\lambda_k^2 - \mu_p^2} + \frac{b_p}{G_0} \qquad (5)$$

где введены обозначения

$$\varepsilon_1 (D_{p1} \mathrm{sh} \mu_p h_1 + b_{p1}) = \varepsilon_2 (D_{p2} \mathrm{sh} \mu_p h_2 + b_{p2}) = (-1)^p \mu_p^{-1} a^2 G_0 Y_p,$$
$$\omega_1 (A_{p1} - B_{p1} \mathrm{ch} \lambda_p h_1) = \omega_2 (A_{p2} + B_{p2} \mathrm{ch} \lambda_p h_2) = (-1)^p \lambda_p^{-1} a^2 X_p, \qquad (6)$$

$$a_p = \frac{(-1)^p \lambda_p}{a^2} \left[a_{p1} \left(1 - \frac{1}{\mathrm{ch} \lambda_p h_1} \right) - a_{p2} \left(1 - \frac{1}{\mathrm{ch} \lambda_p h_2} \right) \right],$$

$$b_p = \frac{(-1)^p \mu_p}{a^2} \left[b_{p1} \mathrm{th} \frac{\mu_p h_1}{2} + b_{p2} \mathrm{th} \frac{\mu_p h_2}{2} \right],$$

$$\delta_{p1} = \varepsilon_1^{-1} \mathrm{cth} \mu_p h_1 + \varepsilon_2^{-1} \mathrm{cth} \mu_p h_2, \quad \delta_{p2} = \omega_1^{-1} \mathrm{th} \lambda_p h_1 + \omega_2^{-1} \mathrm{th} \lambda_p h_2,$$

$$\delta_0 = \frac{4(G_1 G_4 - G_2 G_3)}{(G_1 + G_2)(G_3 + G_4)}, \qquad 4G_0 = \sum_{k=1}^{4} G_k,$$

$$\omega_p = \frac{a}{2}(G_{2p-1}^{-1} + G_{2p}^{-1}), \qquad \varepsilon_p = \frac{a}{2}(G_{2p-1} + G_{2p})$$

При получении формул (4) и (5) было использовано разложение

$$U_{p0}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_{kp} \sin \lambda_k x + b_{kp} G_p(x) \sin \mu_k x \right] \qquad (0 \le x \le 2a),$$
$$b_{kp} \mu_k^3 \varepsilon_p = 2\left[1 - (-1)^k\right](G_{2p-1} - G_{2p}), \qquad a_{kp} \lambda_k^3 \omega_p = 4, \quad p = 1; 2 \qquad (7)$$

После определения неизвестных x_k и y_k из системы (5) решение задачи можно представить в виде

$$U_p(x, y) = U_{p0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{p+k} \frac{a^2 X_k \mathrm{sh} \lambda_k (h_p - |y|)}{\lambda_k \omega_p \mathrm{ch} \lambda_k h_p} - a_{kp} \frac{\mathrm{ch} \lambda_k y}{\mathrm{ch} \lambda_k h_p} \right] \times$$

$$\times \sin \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^k \frac{a^2 G_0 Y_k \mathrm{sh} \mu_k (h_p - |y|)}{\mu_k \varepsilon_p \mathrm{sh} \mu_k h_p} - b_{kp} \frac{\mathrm{ch} \mu_k \left(\frac{h_p}{2} - |y| \right)}{\mathrm{ch} \mu_k \frac{h_p}{2}} \right] \times$$

$$\times G_p(x) \sin \mu_k x \qquad (8)$$

2. Исследование бесконечных систем.

Ясно, что бесконечные системы (5) не регулярны. Для сведения этих систем к регулярному виду сначала путем исключения неизвестных $X_p(Y_p)$, получим бесконечную систему только для определения $Y_p(X_p)$

$$X_p + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{a}_{pn} X_n = \alpha_p, \qquad Y_p + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{b}_{pn} Y_n = \beta_p; \qquad (p = 1, 2, 3 \ldots) \tag{9}$$

где

$$\widetilde{a}_{pn} = \frac{\delta_0^2 \lambda_p}{a^4 \delta_{p2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_p \delta_{k1}^{-1}}{(\lambda_p^2 - \mu_k^2)(\lambda_n^2 - \mu_k^2)}, \quad \widetilde{b}_{pn} = \frac{\delta_0^2 \mu_p}{a^4 \delta_{p1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \delta_{k2}^{-1}}{(\lambda_k^2 - \mu_p^2)(\lambda_k^2 - \mu_n^2)},$$

$$\alpha_p = \frac{\delta_0 \lambda_p}{a^2 \delta_{p2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k \delta_{k1}^{-1}}{\mu_k^2 - \lambda_p^2} + \frac{a_p}{\delta_{p2}}, \quad \beta_p = \frac{\delta_0 \mu_{p1}}{a^2 G_0 \delta_{p1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \delta_{k2}^{-1}}{\lambda_k^2 - \mu_p^2} + \frac{b_p}{G_0 \delta_{p1}}. \tag{10}$$

Пользуясь представлением

$$\frac{\lambda_p}{\delta_{p2}(\lambda)} = \frac{1}{2\bar{\omega}_0} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \xi_m h_1 \cos^2 \xi_m h_2}{\lambda^{-2} \bar{\omega}_m (\xi_m^2 + \lambda^2)}. \tag{11}$$

где

$$\delta_{p2}(\lambda) = \omega_1^{-1} \operatorname{th} \lambda h_1 + \omega_2^{-1} \operatorname{th} \lambda h_2,$$

$$\bar{\omega}_m = \frac{h_1}{2\omega_1} \cos^2 \xi_m h_2 + \frac{h_2}{2\omega_2} \cos^2 \xi_m h_1 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

и α_m - положительные корни уравнения

$$\omega_1^{-1} \operatorname{tg} \xi_m h_1 + \omega_2^{-1} \operatorname{tg} \xi_m h_2 = 0, \quad \xi_m > 0, \quad \xi_0 = 0, \tag{12}$$

нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \delta_{k2}^{-1}}{(\lambda_k^2 - \mu_p^2)(\lambda_k^2 - \mu_n^2)} = \frac{a^2 \delta_{pn}}{4\mu_p \delta_{p2}(\mu_p)} - \\ - \frac{a}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi_m \cos^2 \xi_m h_1 \cos^2 \xi_m h_2 \operatorname{th} \xi_m a}{(\xi_m^2 + \mu_p^2)(\xi_m^2 + \mu_n^2) \widetilde{\omega}_m}. \tag{13}$$

где δ_{pn} - символ Кронекера

Из (10) и (13) следует, что $b_{pp} > 0$, а $b_{pn} < 0 \quad (p \neq n)$.

Аналогичным образом доказывается, что $a_{pp} > 0$, а $a_{pn} < 0 \quad (p \neq n)$. Поэтому, если в бесконечных системах (9) перенести диагональные элементы в левую сторону, а недиагональные в правую и представить их в виде

$$X_p = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{\infty} a_{pn}^* X_n + \alpha_p^*, \qquad Y_p = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{\infty} b_{pn}^* Y_n + \beta_p^*, \qquad (p = 1, 2, \ldots), \tag{14}$$

где

$$a_{pn}^* = -\widetilde{a}_{pn} (1 + \widetilde{a}_{pp})^{-1}, \qquad b_{pn}^* = -\widetilde{b}_{pn} (1 + \widetilde{b}_{pp})^{-1},$$

$$\alpha_p^* = -\alpha_p (1 + \widetilde{a}_{pp})^{-1}, \qquad \beta_p^* = -\beta_p (1 + \widetilde{a}_{pp})^{-1}, \quad (p \neq n) \tag{15}$$

то нетрудно убедиться, что системы (14) вполне регулярны.

Действительно, из (6), (10) и (15) имеем

$$\sum_{\substack{n=1\\n\neq p}}^{\infty}\left|a^{*}_{pn}\right| = (1+\tilde{a}_{pp})^{-1}\left(\tilde{a}_{pp} - \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_{pn}\right) = \tilde{a}_{pp}(1+\tilde{a}_{pp})^{-1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_{pn} = 0;$$

$$\sum_{\substack{n=1\\n\neq p}}^{\infty}\left|b^{*}_{pn}\right| = (1+\tilde{b}_{pp})^{-1}\left(\tilde{b}_{pp} - \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{b}_{pn}\right) < \tilde{b}_{pp}(1+\tilde{b}_{pp})^{-1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{b}_{pn} > 0. \tag{16}$$

Учитывая, что при $p \to \infty$ коэффициенты a_{pp} и b_{pp}, монотонно возрастая, стремятся к конечному пределу

$$\lim a_{pp} = \lim b_{pp} = \frac{\delta_0^2\omega_1\omega_2\varepsilon_1\varepsilon_2}{4a^2(\omega_1+\omega_2)(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \tag{17}$$

из (16) получим

$$\sum_{\substack{n=1\\n\neq p}}^{\infty}\left|a^{*}_{pn}\right| \le p < 1 \qquad \sum_{\substack{n=1\\n\neq p}}^{\infty}\left|b^{*}_{pn}\right| \le p < 1 \quad (p = 1, 2, \ldots)$$

$$p = \frac{(G_1G_4 - G_2G_3)^2}{(G_1G_4 - G_2G_3)^2 + \sum_{p=1}^{4}G_p\sum_{p=1}^{4}G_p^{-1}\prod_{p=1}^{4}G_p} \tag{18}$$

Свободные члены бесконечных систем (9) или (14) при $p \to \infty$ стремятся к нулю как $O(1/p)$.

В частности, когда $G_1 = G_2 = G_3$, $G_4 = 0$, т. е. для задачи о кручении однородного призматического стержня полигонального поперечного сечения, из (18) получим $p = 0{,}25$. Решение этой задачи другим методом ещё в 1948 году было получено в работах [1,3]. Сравнение бесконечных систем (14) с системами, полученными Н. Х. Арутюняном [3], показывает, что они качественно совпадают: в обоих случаях $p = 0{,}25$.

В том случае, когда $G_1G_4 - G_2G_3 = 0$ ($\delta_0 = p = 0$), задача решается точно, без бесконечных систем. При этом

$$a^2\delta_{p2}X_p = a_p, \qquad a^2G_0\delta_{p1}Y_p = b_p, \tag{19}$$

и точное решение задачи дается формулами (8) с учетом (6), (7) и (19).

3. Вычесленные касательных напряжений

В общем случае касательные напряжения и жесткость при кручении будем вычислять по формулам [1]

$$\tau_{xz} = \Theta\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\Theta\frac{\partial U}{\partial x}, \quad C = 2\iint_{\Omega} U(x,y)\,dxdy. \tag{20}$$

Формулы (20) позволяют вычислить значения напряжений во всех точках профиля стержня, кроме точек горизонтальной линии раздела материалов $(y=0)$, где соответствующие функциональные ряды сходятся медленно (это связано с методом решения задачи и с наличием особой точки A). Сходимость этих рядов при $y=0$ вдали от особой точки A легко улучшаются при помощи формул, аналогичных (11), (13) и бесконечных систем (5), (9).

Для вычисления напряжений в малой окрестности точки A воспользуемся результатами работы [2] и переразложим полученное решение (8) таким образом, чтобы оно хорошо описывало напряженное состояние вблизи особой точки A.

Заранее отметим, что при любых значениях геометрических и физических параметров задачи касательные напряжения, кроме точки A, других особых точек не имеют. Кроме того, при $G_1G_4 - G_2G_3 = 0$, когда задача решается точно, из (7), (8) и (19) следует, что напряжения выражаются равномерно сходящимися рядами и нигде не обращаются в бесконечность. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $G_1G_4 - G_2G_3 \neq 0$.

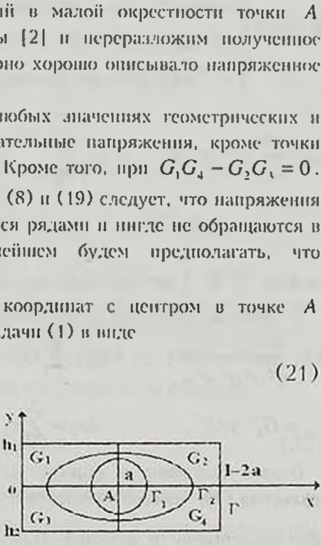
Вводим полярную систему координат с центром в точке A (фиг.2) и представим решение (8) задачи (1) в виде

$$U(r,\varphi) = u_0(r,\varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^{\gamma_k}\Phi_k(\varphi) \qquad (21)$$

где γ_k — неотрицательные корни уравнения

$$\sin^2\frac{\gamma\pi}{2}\left(\cos^2\frac{\gamma\pi}{2} - \delta^2\right) = 0$$

а $\Phi_k(\varphi)$ являются решениями задачи Штурма-Лиувилля для уравнения



Фиг.2

$$\Phi_k'' + \gamma_k^2\Phi_k = 0 \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi), \qquad (23)$$

когда функции $\Phi_k(\varphi)$ и $G^{-1}(\varphi)\Phi_k(\varphi)$ непрерывны.

Здесь

$$G(\varphi) = \begin{cases} G_2 & (0 < \varphi < 0.5\pi) \\ G_1 & (0.5\pi < \varphi < \pi) \\ G_3 & (\pi < \varphi < 1.5\pi) \\ G_4 & (1.5\pi < \varphi < 2\pi) \end{cases} \qquad (24)$$

Решение задачи (23) имеет вид

1. При $k = 4n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$

$$\Phi_k(\varphi) = \cos 2n\varphi, \qquad \omega_k = \pi c_0, \qquad \omega_0 = 2\pi c_0, \tag{25}$$

2. При $k = 4n + 1$

$$\Phi_k(\varphi) = G(\varphi)\sin 2n\varphi, \qquad \omega_k = \pi G_0, \tag{26}$$

3. При $k = 4n + 2$ и $k = 4n + 3$

$$\Phi_k(\varphi) = \begin{cases} b\sin\gamma_n(0{,}5\pi - \varphi) + c\sin\gamma_n\varphi, & (0 \le \varphi \le 0{,}5\pi) \\ c\sin\gamma_n(\pi - \varphi) - b^{-1}\sin\gamma_n(\varphi - 0{,}5\pi), & (0{,}5\pi \le \varphi \le \pi) \\ -b^{-1}\sin\gamma_n(1{,}5\pi - \varphi) - c^{-1}\sin\gamma_n(\varphi - \pi), & (\pi \le \varphi \le 1{,}5\pi) \\ -c^{-1}\sin\gamma_n(2\pi - \varphi) + b\sin\gamma_n(\varphi - 1{,}5\pi), & (1{,}5\pi \le \varphi \le 2\pi) \end{cases} \tag{27}$$

где

$$\cos\frac{\gamma_n\pi}{2} = (-1)^k\delta, \qquad b = \sqrt{\frac{c_{13}}{c_{24}}}, \qquad c = (-1)^k\sqrt{\frac{c_{34}}{c_{12}}} \tag{28}$$

$$\omega_k = \int_0^{2\pi} G^{-1}(\varphi)\Phi_k^2(\varphi)d\varphi = 2\pi c_0(1 - \delta^2)$$

Система $\{1, \Phi_k\}$ ортогональна на интервале $(0{,}2\pi)$ с весом $G^{-1}(\varphi)$.

В формулах (22)-(28) использовались обозначения

$$\delta = \frac{c_2c_3 - c_1c_4}{\sqrt{c_{12}c_{13}c_{24}c_{34}}}, \qquad 4G_0 = \sum_{k=1}^{4} G_k, \qquad c_k = G_k^{-1}$$

$$c_{kp} = G_k^{-1} + G_p^{-1}, \qquad 4c_0 = \sum_{k=1}^{4} c_k \tag{29}$$

Первое слагаемое в формуле (21) является частичным решением уравнения (1), удовлетворяющим в окрестности особой точки A условиям непрерывности функций $U_0(r,\varphi)$ и $G^{-1}(\varphi)\dfrac{\partial U_0}{\partial\varphi}$. Оно имеет вид

$$U_0(r,\varphi) = -2r^2\tilde{U}_0(r,\varphi) \tag{30}$$

где

$$\tilde{U}_0(r,\varphi) = \begin{cases} G_2\Psi_0(r,\varphi) + B_1\cos 2\varphi, & (0 \le \varphi \le \pi/2) \\ G_1\Psi_0(r,\varphi) + B_2\cos 2\varphi, & (\pi/2 \le \varphi \le \pi) \\ G_3\Psi_0(r,\varphi) + B_3\cos 2\varphi, & (\pi \le \varphi \le 3\pi/2) \\ G_4\Psi_0(r,\varphi) + B_4\cos 2\varphi, & (3\pi/2 \le \varphi \le 2\pi) \end{cases} \tag{31}$$

$$\Psi_0(r,\varphi) = \frac{1}{4} + C_0\left(\varphi\cos 2\varphi + \ln\frac{r}{r_0}\sin 2\varphi\right)$$

$$\pi C_0 = \frac{G_1 + G_3 - G_1 - G_4}{G_1 + G_3 + G_1 + G_4}, \qquad r_0 = \min\{a, h_1, h_2\}$$

Один из коэффициентов B_k в (31) выбирается произвольным образом, а остальные определяются реккурентными формулами

$$B_2 = B_1 + 0{,}25(G_1 - G_2)(1 - 2\pi C_0),$$

$$B_3 = B_2 + 0{,}25(G_1 - G_3)(1 + 4\pi C_0), \qquad (32)$$

$$B_4 = B_3 + 0{,}25(G_4 - G_3)(1 - 6\pi C_0), \quad B_1 = B_4 + 0{,}25(G_4 - G_2) + 2\pi C_0$$

Для определения коэффициентов разложения (21) введем функцию

$$U_0(r,\varphi) = U(r,\varphi) - u_0(r,\varphi)$$

$$U_p(r,\varphi) = U_0(r,\varphi) - \sum_{k=0}^{p-1} A_k r^{\gamma_k} \Phi_k(\varphi) + = \sum_{k=p}^{\infty} A_k r^{\gamma_k} \Phi_k(\varphi) \qquad (33)$$

$$V_p(r,\varphi) = U_0(r,\varphi) - r^{-\gamma_p} \Phi_p(\varphi) \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

и применим к ним формулу Грина [1,2] для составных областей

$$\iint_{D_\varepsilon} \left[U_\Delta V - V_\Delta U\right] G^{-1}(\varphi) dxdy = \oint_{\Gamma_0} \left[U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right] G^{-1}(\varphi) ds \qquad (34)$$

где область D_ε ограничена изнутри окружностью Γ_1 радиуса ε с центром в точке A, а извне произвольным кусочно гладким контуром Γ_2 $(\Gamma_0 = \Gamma_1 + \Gamma_2)$, целиком лежащим внутри прямоугольника (фиг. 1)

В силу ортогональности функций $\Phi_k(\varphi)$, из (33) и (34) для определения коэффициентов A_p получим следующую формулу:

$$2\omega_p \gamma_p A_p = \int_{\Gamma_2} \left(U_p \frac{\partial V_p}{\partial n} - V_p \frac{\partial U_p}{\partial n} \right) G^{-1}(\varphi) ds \qquad (35)$$

В частности, когда Γ_2 совпадает с контуром прямоугольника $\Gamma_2 = \Gamma$, то в силу граничного условия (1) первое слагаемое в подынтегральном выражении обращается в нуль, и формула (35) принимает более простой вид. При это точность вычисления коэффициентов A_p по формуле (35) увеличивается за счет быстрой сходимости функциональных рядов (8).

Если же принимать, что Γ_2 окружность с центром в точке A и радиуса r_0, то значения коэффициентов A_k можно вычислять по формуле Фурье

$$A_k r_0^{\gamma_k} \omega_k = \int_0^{2\pi} \left[U(r_0,\varphi) - u_0(r,\varphi)\right] G^{-1}(\varphi) \Phi_k(\varphi) d\varphi \qquad (36)$$

Жесткость при кручении рассматриваемого составного стержня будем вычислять по формуле

$$C = 2(K_1 + K_2)$$

$$K_p = \iint_{\Omega_p} U_p(x,y)dxdy = \frac{a^3 h_p (G_{2p} + G_{2p-1})}{G}\left[1 + \frac{6G_{2p}G_{2p-1}}{(G_{2p} + G_{2p-1})}\right] +$$

$$+\frac{2a^2}{\omega_p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{th}\lambda_k h_p}{\lambda_k^3}\left[(-1)^{p+k} X_k \operatorname{th}\frac{\lambda_k h_p}{2} - \frac{4}{\lambda_k^2 a^2}\right] + \qquad (37)$$

$$+\frac{2a^2(G_{2p} - G_{2p-1})}{\varepsilon_p}\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\frac{G_0 \operatorname{th}\dfrac{\mu_k h_p}{2}}{\mu_k^3}\left[Y_k - \frac{8(G_{2p} - G_{2p-1})}{G_0 \mu_k^2 a^2}\right]$$

Касательные напряжения в окрестности особой точки A вычисляются по формулам

$$\tau_{rz}(r,\varphi) = \frac{\partial U_0(r,\varphi)}{r\partial\varphi} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \Phi_k'(\varphi) r^{\gamma_k - 1}$$

$$\tau_{\varphi z}(r,\varphi) = -\frac{\partial U_0(r,\varphi)}{\partial r} - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k A_k \Phi_k(\varphi) r^{\gamma_k - 1} \qquad (38)$$

$$r\sin\varphi = y, \qquad r\cos\varphi = (x - a), \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi)$$

Из этих формул следует, что коэффициенты при особенностях всех контактных касательных напряжений, действующих на различных контактных площадках ($\varphi = 0.05\pi, \pi, 1.5\pi, r < r_0$), выражаются только через постоянную A_k. Следовательно, между четырьмя различными коэффициентами особенностей существуют три простые соотношения, которые могут быть получены из формул (22), (26) и (38).

В заключение отметим, что применяемый здесь метод решения позволяет рассмотреть и случаи, когда вертикальная линия раздела материалов имеет произвольное расположение, вертикальные линии раздела материалов не являются продолжениями друг друга, количество различных материалов в подобластях $y > 0$ и $y < 0$ не равны друг другу, а также случай, когда поперечные сечения различных материалов имеют форму криволинейных прямоугольников, принадлежащих одной и той же координатной системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. – М.: Физматгиз, 1963
2. Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А. Об особенности напряжений вблизи угловых точек профилей однородных и составных призматических стержней при кручении. ДАН СССР, т. 264, №4, 1982.

3. Арутюнян Н. Х. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. - ПММ, 1949, т. 13, вып. 1. 107-112.
4. Морозов Н. Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. - М.: Наука, 1981.
5. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978.
6. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981.
7. Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван, Изд ЕГУ, 1976.
8. Баблоян А. А., Мкртчян А. М. Кручение стержней с поперечным сечением в виде соединений прямоугольников и кольцевых секторов. - Изв. АН АрмССР, Механика, 1979, т. 32, №6, с. 3-16

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
22.06.1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 2, 1997 Механика

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ ПОД ДЕЦСТВИЕМ РАСТЯГИВАЮЩИХ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ ПО ВНУТРЕННЕМУ КОНТУРУ

Хачатрян А. А.

Ա. Ա. Խաչատրյան
Օղակաձև կլոր սալի կայունության մասին, երբ ներքին եզրում ազդում են ձգող ուժեր

Լուծված է օղակաձև կլոր սալի կայունության խնդիրը, որը գտնվում է ներքին եզրում ազդող հավասարաչափ բաշխված ռադիալ ուղղությամբ ձգող ուժերի ազդեցության տակ, երբ սալը կորցնում է իր կայունությունը սիմետրիկ և անտիսիմետրիկ ձևերով: Դիտարկված է սալի արտաքին եզրագիծը ամրացման երկու դեպք՝ հոդակապային ամրացում և ամրակցում: Այդ դեպքերի համար ստացված են հավասարումներ, որտեղից որոշվում են կրիտիկական ուժի արժեքները կախված սալի ներքին ու արտաքին շառավիղների հարաբերությունից: Ուսումնասիրված են նաև ներքին եզրագծի ամրացման դեպքերը, որտեղ պարզվում է, որ այդ դեպքերում սալի կայունության կորուստ տեղի չունի:

A. A. Khachatrian
Stability of the circular ring plate under action of radial tension forces applied on the inner contour

Рассматривается задача об устойчивости круглой кольцевой пластинки постоянной толщины, находящейся под действием растягивающих радиальных сил, равномерно распределенных по внутреннему контуру при двух случаях закрепления только внешнего контура и отдельно только внутреннего контура: шарнирное опирание и заделка. Получены соответствующие трансцендентные уравнения для определения критического значения силы и приведены результаты их исследования

1. Рассмотрим круглую кольцевую пластинку с радиусами внешнего контура a и внутреннего контура b. Пластинка растягивается радиальными силами интенсивности P, равномерно распределенными по внутреннему контуру.

Уравнение устойчивости пластинки в полярных координатах имеет вид [1]

$$D\Delta\Delta w = -(T_r\chi_1 + T_\varphi\chi_2 + S\tau) \tag{1.1}$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость, w — прогиб, T_r, T_φ и S — внутренние погонные усилия.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \chi_2 = -\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right), \quad \tau = -\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}\right) \tag{1.2}$$

В данном случае внутренние усилия имеют вид [2]

$$T_r = \frac{Pb^2}{a^2 - b^2}\left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right), \quad T_\varphi = -\frac{Pb^2}{a^2 - b^2}\left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right), \quad S = 0 \tag{1.3}$$

В силу соотношений (1.2) и (1.3), уравнение (1.1) принимает вид

$$\Delta\Delta w + \alpha^2\left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\Delta w - \frac{2a^2}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right] = 0 \tag{1.4}$$

где

$$\alpha^2 = \frac{P\lambda^2}{(1-\lambda^2)D}, \qquad \lambda = \frac{b}{a} \tag{1.5}$$

Будем рассматривать два случая закрепления внешнего контура пластинки: шарнирное опирание и заделка.

В случае шарнирного опирания имеем следующие граничные условия:

при $r = a$ $\quad w = 0, \quad M_r = 0$ (1.6)

при $r = b$ $\quad M_r = 0, \quad V_r = 0$

а в случае заделки имеем

при $r = a$ $\quad w = 0, \quad \dfrac{\partial w}{\partial r} = 0$ (1.7)

при $r = b$ $\quad M_r = 0, \quad V_r = 0$

Здесь изгибающий момент M_r и обобщенная перерезывающая сила V_r имеют вид

$$M_r = -D\left[(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu\Delta w\right]$$

$$V_r = -D\left[\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w) + \frac{1-\mu}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}\right)\right] \tag{1.8}$$

где μ – коэффициент Пуассона.

Для решения поставленной задачи следует решить уравнение (1.4) с учетом граничных условий (1.6) или (1.7). С этой целью из уравнения (1.4), после разделения переменных $w(r,\varphi) = W(r)\cos n\varphi$, относительно $W(r)$ получим

$$
\begin{aligned}
&r^4W^{IV}+2r^3W'''+\left[\alpha^2r^2-(\alpha^2a^2+2n^2+1)\right]r^2W''+\\
&+\left[\alpha^2r^2+(\alpha^2a^2+2n^2+1)\right]rW'-n^2(\alpha^2r^2+\alpha^2a^2+4-n^2)W=0
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

или вводя новую переменную $\alpha r = x$ -

$$
\begin{aligned}
&x^4W^{IV}+2x^3W'''+\left\{x^2-\left[\nu_*^2+n(n-2)\right]\right\}x^2W''+\\
&+\left\{x^2+\left[\nu_*^2+n(n-2)\right]\right\}xW'-n^2(x^2+\nu_*^2-2n^2-2n+3)W=0
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

где

$$
\nu_*^2=\delta^2+(n+1)^2, \qquad \delta=\alpha a \tag{1.11}
$$

Нахождение общего решения уравнения (1.10) представляется невозможным при произвольном значении n. Однако исследование показывает, что при $n=0$ и $n=1$, соответствующие осесимметричной и антисимметричной формам выпучивания пластинки, это уравнение допускает решение в квадратурах. Чтобы не рассматривать в отдельности случаи $n=0$ и $n=1$, но с другой стороны получить общее решение уравнения (1.10) пригодное и для $n=0$ и $n=1$, поступаем следующим образом.

Вместо уравнения (1.10) рассмотрим следующее уравнение:

$$
\begin{aligned}
&x^4W^{IV}+2x^3W'''+\left\{x^2-\left[\nu_n^2+n(n-2)\right]\right\}x^2W''+\\
&+\left\{x^2+\left[\nu_n^2+n(n-2)\right]\right\}xW'-\left[n^2x^2-n(n-2)(\nu_n^2-1)\right]W=0
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

которое, как нетрудно проверить, при $n=0$ и $n=1$ совпадает с уравнением (1.10). А уравнение (1.12) допускает решение в квадратурах при любом значении n. Действительно, вводя новую переменную

$$
z=W'-\frac{n}{x}W \tag{1.13}
$$

уравнение (1.12) приводится к виду

$$
x\left[x^2z''+xz'+(x^2-\nu_n^2)z\right]'+(n-1)\left[x^2z''+xz'+(x^2-\nu_n^2)z\right]=0 \tag{1.14}
$$

Отсюда находим

$$
x^2z''+xz'+(x^2-\nu_n^2)z=Cx^{1-n} \tag{1.15}
$$

Общее решение уравнения (1.15) есть

$$
z(x)=C_1J_{\nu_n}(x)+C_2Y_{\nu_n}(x)+\frac{\pi C}{2}\left[Y_{\nu_n}(x)\int_{\lambda\delta}^{x}J_{\nu_n}(x)\frac{dx}{x^n}-J_{\nu_n}(x)\int_{\lambda\delta}^{x}Y_{\nu_n}(x)\frac{dx}{x^n}\right] \tag{1.16}
$$

Теперь из уравнения (1.13), с учетом (1.16), будем иметь

$$
W(x)=x^n\left\{C_1\int_{\lambda\delta}^{x}J_{\nu_n}(x)\frac{dx}{x^n}+C_2\int_{\lambda\delta}^{x}Y_{\nu_n}(x)\frac{dx}{x^n}+\frac{\pi C}{2}\int_{\lambda\delta}^{x}\times\right.
$$

$$\times\left[Y_{\nu_n}(x)\int\limits_{\lambda\delta}^{x} J_{\nu_n}(\eta)\frac{d\eta}{\eta^n} - J_{\nu_n}(x)\int\limits_{\lambda\delta}^{x} Y_{\nu_n}(\eta)\frac{d\eta}{\eta^n}\right]\frac{dx}{x^n} + C_3\Bigg\} \qquad (1.17)$$

Таким образом, мы нашли общее решение уравнения (1.12) при произвольном значении n, которое одновременно является также решением уравнения (1.11), но только при $n = 0$ и $n = 1$.

Учитывая выражение (1.13), из (1.8) для изгибающего момента и обобщенной перерезывающей силы получим

$$M_r = -D\alpha^2\left[z' + \frac{n+\mu}{x}z + n(n-1)(1-\mu)\frac{W}{x^2}\right]\cos n\varphi \qquad (1.18)$$

$$V_r = -D\alpha^3\left\{z'' + \frac{n+1}{x}z' - \left[(1-\mu)n^2 + n + 1\right]\frac{z}{x^2} - n^2(n-1)(1-\mu)\frac{W}{x^3}\right\}\cos n\varphi$$

Граничные условия рассматриваемой задачи при учете, что $n = 0$ и $n = 1$, после некоторых преобразований принимают следующий вид:

В случае заделки

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & W = 0 \\ 2. & z = 0 \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad x = \delta$$

$$\left.\begin{array}{ll} 3. & xz' + (n+\mu)z = 0 \\ 4. & x^2z'' - \left[(n+1)^2 + n^2 + \mu\right]z = 0 \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad x = \lambda\delta \qquad (1.19)$$

а в случае шарнирного опирания имеем те же условия, кроме второго, которое заменяется условием

$$xz' + (n+\mu)z = 0 \qquad \text{при} \qquad x = \delta \qquad (1.20)$$

Удовлетворяя теперь указанным граничным условиям, получим системы однородных уравнений относительно постоянных интегрирования. Приравнивая нулю определители полученных систем, приходим к следующим трансцендентным уравнениям для определения критических значений сил:

в случае заделки

$$\frac{J_{\nu_n}(\delta)}{Y_{\nu_n}(\delta)} = \Phi(\lambda, \delta, n, \mu) \qquad (1.21)$$

а в случае шарнирного опирания

$$\frac{\delta J_{\nu_n-1}(\delta) - (\nu_n - n - \mu)J_{\nu_n}(\delta)}{\delta Y_{\nu_n-1}(\delta) - (\nu_n - n - \mu)Y_{\nu_n}(\delta)} = \Phi(\lambda, \delta, n, \mu) \qquad (1.22)$$

где

$$
\Phi(\lambda,\delta,n,\mu)=\frac{\lambda\delta J_{\nu_n-1}(\lambda\delta)-(\nu_n-n-\mu)J_{\nu_n}(\lambda\delta)+\lambda^{n-1}\delta^{n+1}(1-\lambda^2)\int\limits_{\lambda\delta}^{\delta}J_{\nu_n}(x)\frac{dx}{x^n}}{\lambda\delta Y_{\nu_n-1}(\lambda\delta)-(\nu_n-n-\mu)Y_{\nu_n}(\lambda\delta)+\lambda^{n-1}\delta^{n+1}(1-\lambda^2)\int\limits_{\lambda\delta}^{\delta}Y_{\nu_n}(x)\frac{dx}{x^n}} \quad (1.23)
$$

Сложность решения этих уравнений заключается в том, что неизвестная критическая сила находится как в индексе, так и в аргументе бесселевых функций. Для ее определения поступаем следующим образом: при фиксированных значениях n и μ задаемся значением ν_n и из выражения (1.11) определяем δ. Затем вычисляем левые части уравнений (1.21) и (1.22). После этого определяем то значение λ, при котором правая часть уравнения становится равной найденному значению левой части. Тогда в силу соотношений (1.5) и (1.11) критическая сила будет определяться формулой

$$
P_{кр}=\frac{D}{a^2}\left[\nu_n^2-(n+1)^2\right]\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} \quad (1.24)
$$

Таким образом, задаваясь каждый раз значением ν_n, определяем некоторое значение λ и соответствующее значение критической силы. Результаты некоторых вычислений приведены в табл.1-4. Табл.1, 2 относятся к случаю заделанной пластинки, а табл. 3, 4 шарнирного опирания.

Таблица 1

$n=0$	$\mu = 0{,}2$		$\mu = 0{,}3$	
ν_0	λ	Pa^2/D	λ	Pa^2/D
1,5	0,1676	43,24	0,1936	32,10
1,6	0,2040	35,92	0,2293	28,11
1,7	0,2359	32,06	0,2602	26,02
1,8	0,2642	29,86	0,2873	24,89
1,9	0,2893	28,56	0,3114	24,04
2,0	0,3120	27,82	0,3330	24,05
3,0	0,4600	27,77	0,4739	27,62
4,0	0,5430	35,92	0,5526	34,11
5,0	0,5978	43,15	0,6055	41,46
6,0	0,6381	50,96	0,6443	49,30
7,0	0,6692	59,18	0,6744	57,56
8,0	0,6942	67,75	0,6986	66,09
9,0	0,7147	76,60	0,7186	74,92
10,0	0,7321	85,73	0,7355	84,02

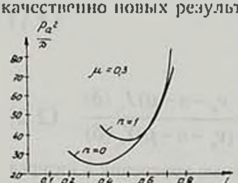
Таблица 2

$n=1$	μ = 0,2		μ = 0,3	
ν_1	λ	Pa^2/D	λ	Pa^2/D
3,3	0,2734	82,26	0,3692	43,65
3,4	0,3344	60,06	0,3983	40,10
3,5	0,3717	51,45	0,4219	38,09
4,0	0,4745	41,28	0,5009	35,82
5,0	0,5714	43,52	0,5858	40,20
6,0	0,6263	49,57	0,6362	47,05
7,0	0,6641	57,03	0,6717	54,75
8,0	0,6925	65,11	0,6986	62,94
9,0	0,7150	73,61	0,7201	71,49
10,0	0,7335	82,43	0,7378	80,35

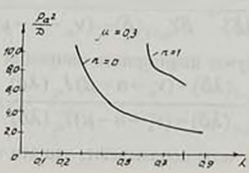
Таблица 3

$n=0$	μ = 0,2		μ = 0,3	
ν_0	λ	Pa^2/D	λ	Pa^2/D
1,3	0.203	16,090	0,245	10,84
1,4	0,323	8,233	0,364	6,27
1,5	0,426	5,648	0,463	4,59
1,6	0,509	4,456	0,541	3,77
1,7	0,576	3,793	0,604	3,29
1,8	0,631	3,380	0,655	2,98
1,9	0,676	3,101	0,696	2.77
2,0	0,713	2,902	0,731	2,62
3,0	0,884	2,227	0,891	2,08

На основании приведенных выше таблиц построены графики зависимости величины Pa^2/D от $\lambda = b/a$. На фиг. 1 представлена эта зависимость для заделанной пластинки, а на фиг. 2 при шарнирном ее опирании. В обоих случаях эти построения выполнены при μ = 0,3. Отметим, что изменение коэффициента Пуассона не дает качественно новых результатов.



Фиг.1



Фиг.2

Таблица 4

$n=1$	$\mu = 0{,}2$		$\mu = 0{,}3$	
ν_1	λ	Pa^2/D	λ	Pa^2/D
3,2	0,515	17,25	0,604	10,85
3,3	0,583	13,37	0,618	9,50
3,4	0,631	11,45	0,626	8,63
3,5	0,668	10,25	0,712	8,01
3,6	0,698	9,43	0,737	7,55
3,7	0,723	8,83	0,757	7,19
3,8	0,745	8,37	0,775	6,90
3,9	0,764	8,00	0,792	6,67
4,0	0,780	7,70	0,805	6,48

Как видно из фиг. 1, для защемленной пластинки при малых значениях λ критическая сила в случае осесимметричного выпучивания $(n=0)$ меньше соответствующего значения при $n=1$ и наименьшее значение ее достигается при $\lambda \approx 0{,}35$. Однако при больших значениях λ, когда $\lambda > 0{,}62$, критическая сила при антисимметричной форме выпучивания $(n=1)$ становится меньше соответствующего значения ее для $n=0$.

В случае же шарнирного закрепления, как видно из фиг. 2, потеря устойчивости пластинки происходит только по осесимметричной форме $(n=0)$.

2. Рассмотрим теперь ту же задачу с той разницей, что закрепление пластинки производится не по внешнему контуру $(r=a)$, как было выше, а по внутреннему контуру $(r=b)$. Эта задача решается аналогично предыдущей с заменой местами a и b в граничных условиях (1.6) и (1.7), поэтому нет необходимости приводить весь ход ее решения. Отметим только, что в результате ее решения, для определения критического значения силы, получаем следующие трансцендентные уравнения:

в случае заделки

$$\frac{J_{\nu_n}(\lambda\delta)}{Y_{\nu_n}(\lambda\delta)} = \frac{\delta J_{\nu_n-1}(\delta)-(\nu_n-n-\mu)J_{\nu_n}(\delta)}{\delta Y_{\nu_n-1}(\delta)-(\nu_n-n-\mu)Y_{\nu_n}(\delta)} \tag{2.1}$$

а в случае шарнирного опирания

$$\frac{\lambda\delta J_{\nu_n-1}(\lambda\delta)-(\nu_n-n-\mu)J_{\nu_n}(\lambda\delta)}{\lambda\delta Y_{\nu_n-1}(\lambda\delta)-(\nu_n-n-\mu)Y_{\nu_n}(\lambda\delta)} = \frac{\delta J_{\nu_n-1}(\delta)-(\nu_n-n-\mu)J_{\nu_n}(\delta)}{\delta Y_{\nu_n-1}(\delta)-(\nu_n-n-\mu)Y_{\nu_n}(\delta)} \tag{2.2}$$

Расчеты показывают, что эти трансцендентные уравнения в интерва ле $0<\lambda<1$ не имеют корней. Это говорит о том, что в случае закрепления внутреннего контура пластинки, она не теряет устойчивости ни при каких значениях силы P.

В заключение считаю необходимым отметить, что настоящее исследование выполнено согласно договору с фирмой "Анушик".

ЛИТЕРАТУРА

1. Хачатрян А.А. Устойчивость круговой кольцевой пластинки, сжимаемой радиальными силами, приложенными по внешнему контуру. Изв. АН АрмССР, Механика, 1966, т. 19, №6, с. 9-16.

2. Бицено К. Б. и Грамель Р. Техническая динамика, т. 1. - М. - Л.: Гостехиздат, 1950. 900 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
17.03.1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 2, 1997 Механика

МАЛОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ ОРТОТРОПНОГО СОСТАВНОГО ЛИНЕЙНО-УПРУГОГО КЛИНА ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Акопян А.Г.

Ա.Գ.Հակոբյան

Օրթոտրոպ - բաղադրյալ գծային առաձգական սեպի թերլարվածային վիճակը հարթ դեֆորմացիայի դեպքում

Դիտարկվում է գծային առաձգական, անիզոտրոպ նյութերից բաղադրյալ սեպի կոնտակտային մակերևույթի եզրի թերլարվածության խնդիրը հարթ դեֆորմացիայի դեպքում: Նյութը համարվում է գլանային օրթոտրոպ: Անիզոտրոպիայի գլխավոր առանցքները համընկնում են գլանային կոորդինատների համակարգի առանցքների հետ, որի սկիզբը գտնվում է սեպի գագաթին:
Ցույց է տրված անիզոտրոպիայի ազդեցությունը թերլարվածության տիրույթների վրա.

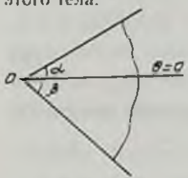
A.G Hakobian

Low-stress level of a linearly elastic orthotropic-compound wedges under plane strain

Рассматривается задача малонапряженности на крае контактной поверхности анизотропного составного клина из линейно-упругих материалов при плоской деформации. Материал считается цилиндрически ортотропным. Главные оси анизотропии совпадают с осями цилиндрической системы координат, начало которой помещено в вершине клина.
Показано влияние анизотропии на зоны малонапряженности.

Рассматривается задача малонапряженности на крае контактной поверхности анизотропного составного клина из линейно упругих материалов при плоской деформации. Явление малонапряженности впервые исследовано в работе [1]. Исследование напряженного состояния окрестности угловой точки поверхности соединения составного тела проведено также в работах [2-7] и ряд других.

1. Основные уравнения задачи. Пусть клин, состоящий из двух спаянных между собой по общей части боковых поверхностей двух цилиндрических тел с различными характеристиками упругости, находится в состоянии плоской деформации. Оба тела обладают свойством цилиндрической ортотропии. В угловой точке контактной поверхности поместим начало цилиндрической системы координат, ось $\theta = 0$ проведем по контактной поверхности, ось z - по продольному направлению. Главные оси анизотропии совпадают с этими осями. Принимаем, что в окрестности угловой точки r=0 внешние боковые грани свободны от нагрузок. На фиг.1 показано поперечное сечение этого тела.



Фиг.1

Для цилиндрически ортотропного тела закон Гука при плоской деформации имеет вид [8]

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_r = \beta_{11}\sigma_r + \beta_{12}\sigma_\theta \\
&\varepsilon_\theta = \beta_{12}\sigma_r + \beta_{22}\sigma_\theta, \quad \gamma_{r\theta} = \beta_{66}\tau_{r\theta}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где β_{ij} -приведенные упругие характеристики, выражающиеся через технические упругие константы

$$
\beta_{11} = \frac{1 - \nu_{rz}\nu_{zr}}{E_r}, \qquad \beta_{12} = -\frac{\nu_{r\theta} + \nu_{rz}\nu_{z\theta}}{E_r}
$$

$$
\beta_{22} = \frac{1 - \nu_{\theta z}\nu_{z\theta}}{E_\theta}, \qquad \beta_{66} = \frac{1}{G_{r\theta}}
$$

Компоненты напряжений через функцию напряжений Эри F в полярных координатах выражаются формулами

$$
\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\left(\frac{F}{r}\right) \tag{2}
$$

а для σ_z имеем

$$
\sigma_z = \nu_{zr}\sigma_r + \nu_{z\theta}\sigma_\theta \tag{3}
$$

Функция напряжений $F(r,\theta)$ при плоской деформации удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению [8]:

$$
\begin{aligned}
&a_3\frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + a_5\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 F}{\partial r^2\partial\theta^2} + a_1\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 F}{\partial\theta^4} + 2a_3\frac{1}{r}\frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \\
&-a_5\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 F}{\partial r\partial\theta^2} - a_1\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + (2a_1 + a_5)\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + a_1\frac{1}{r^3}\frac{\partial F}{\partial r} = 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $a_1 = \beta_{11}$, $a_3 = \beta_{22}$, $a_5 = 2\beta_{12} + \beta_{66}$

2. Граничные условия. Величины, соответствующие клину с углом α, обозначим индексом $i = 1$, а с углом β индексом $i = 2$. В уравнениях (1)-(4) индекс i опущен.

Отсутствие нагрузок на внешних поверхностях клина в окрестности точки $r = 0$ приводит к условиям

$$
F_i(r,\alpha) = 0, \qquad \left.\frac{\partial F_i}{\partial\theta}\right|_{\theta=\alpha} = 0
$$

$$F_2(r,-\beta)=0, \qquad \left.\frac{\partial F_2}{\partial\theta}\right|_{\theta=-\beta}=0 \tag{5}$$

Из непрерывности напряжений на контактной поверхности $\theta=0$ следует

$$F_1=(r,0)=F_2(r,0), \qquad \left.\frac{\partial F_1}{\partial\theta}\right|_{\theta=0}=\left.\frac{\partial F_2}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} \tag{6}$$

Условия непрерывности перемещений на контактной поверхности заменяются эквивалентными условиями [1,6]

$$\left.\frac{\partial u^{(1)}}{\partial r}\right|_{\theta=0}=\left.\frac{\partial u^{(2)}}{\partial r}\right|_{\theta=0}, \qquad \left.\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial r^2}\right|_{\theta=0}=\left.\frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial r^2}\right|_{\theta=0}$$

последние два условия можем выразить через функции напряжений F_i при $\theta=0$.

$$\beta_{11}^{(1)}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial\theta^2}\right)+\beta_{12}^{(1)}\frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2}=\beta_{11}^{(2)}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_2}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F_2}{\partial\theta^2}\right)+\beta_{12}^{(2)}\frac{\partial^2 F_2}{\partial r^2}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\beta_{66}^{(1)}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial F_1}{\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial^3 F_1}{\partial r^2\partial\theta}\right)+\beta_{11}^{(1)}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 F_1}{\partial\theta^3}\right)+\beta_{12}^{(1)}\frac{1}{r}\frac{\partial^3 F_1}{\partial r^2\partial\theta}=\\&\beta_{66}^{(2)}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial F_2}{\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_2}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial^3 F_2}{\partial r^2\partial\theta}\right)+\beta_{11}^{(2)}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_2}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 F_2}{\partial\theta^3}\right)+\beta_{12}^{(2)}\frac{1}{r}\frac{\partial^3 F_2}{\partial r^2\partial\theta}\end{aligned} \tag{8}$$

3. Решение задачи и основные результаты. Следуя Вильямсу [4] функцию напряжений в окрестности точки $r=0$ представим в виде

$$F_i(r,\theta)=r^{\lambda+1}f_i(\theta,\lambda) \tag{9}$$

Из уравнения (4), для каждой из областей клина, следует

$$a_1^{(i)}f_i^{IV}+(\lambda^2 a_5^{(i)}+2a_1^{(i)})f_i''+\left[\lambda^4 a_5^{(i)}-\lambda^2(a_5^{(i)}+a_1^{(i)})+a_1^{(i)}\right]f_i=0 \tag{10}$$

Общее решение (10) можно представить в виде

$$\begin{aligned}f_i(\theta,\lambda)=&A_i\operatorname{ch}\varepsilon_i\theta\cos\eta_i\theta+B_i\operatorname{sh}\varepsilon_i\theta\cos\eta_i\theta+C_i\operatorname{ch}\varepsilon_i\theta\sin\eta_i\theta+\\&+D_i\operatorname{sh}\varepsilon_i\theta\sin\eta_i\theta\end{aligned} \tag{11}$$

где ε_i, η_i определяются из соотношения

$$\begin{aligned}&z=\pm(\varepsilon_i\pm i\eta_i)=\\&=\pm\sqrt{\frac{-\lambda^2 a_5^{(i)}-2a_1^{(i)}\pm\sqrt{\lambda^4(a_5^{(i)2}-4a_1^{(i)}a_3^{(i)})+4\lambda^2(a_1^{(i)}a_5^{(i)}+a_1^{(i)}a_3^{(i)}+a_1^{(i)2})}}{2a_1^{(i)}}}\end{aligned} \tag{12}$$

С помощью (11), удовлетворив восьми граничным условиям (5)-(8), получим следующую систему линейных однородных уравнений относительно восьми A_i, B_i, C_i, D_i коэффициентов:

$$A_1 - A_2 = 0, \quad \varepsilon_1 B_1 + \eta_1 C_1 - \varepsilon_2 B_2 - \eta_2 C_2 = 0$$
$$\omega_1^{(1)}(\alpha)A_1 + \omega_2^{(1)}(\alpha)B_1 + \omega_3^{(1)}(\alpha)C_1 + \omega_4^{(1)}(\alpha)D_1 = 0$$
$$\omega_1^{(2)}(\beta)A_2 + \omega_2^{(2)}(\beta)B_2 + \omega_3^{(2)}(\beta)C_2 + \omega_4^{(2)}(\beta)D_2 = 0$$
$$p_1 A_1 + 2\beta_{11}^{(1)}\varepsilon_1\eta_1 D_1 - p_2 A_2 - 2\beta_{11}^{(2)}\varepsilon_{12}\eta_2 D_2 = 0 \qquad (13)$$
$$\mathrm{ch}\varepsilon_1\alpha\cos\eta_1\alpha A_1 + \mathrm{sh}\varepsilon_1\alpha\cos\eta_1\alpha B_1 + \mathrm{ch}\varepsilon_1\alpha\sin\eta_1\alpha C_1 + \mathrm{sh}\varepsilon_1\alpha\sin\eta_1\alpha D_1 = 0$$
$$\mathrm{ch}\varepsilon_{21}\beta\cos\eta_{21}\beta A_2 - \mathrm{sh}\varepsilon_2\beta\cos\eta_2\beta B_2 - \mathrm{ch}\varepsilon_2\beta\sin\eta_2\beta C_2 + \mathrm{sh}\varepsilon_2\beta\sin\eta_2\beta D_2 = 0$$
$$\beta_{11}^{(1)}(\varepsilon_1^2 - \eta_1^2)A_1 + \varepsilon_1 q_1 B_1 + \eta_1 q_1 C_1 + 2\beta_{11}^{(1)}\varepsilon_1\eta_1 D_1 - \beta_{11}^{(2)}(\varepsilon_2^2 - \eta_2^2)A_2 -$$
$$-\varepsilon_2 q_2 B_2 - \eta_2 q_2 C_2 - 2\beta_{11}^{(2)}\varepsilon_2\eta_2 D_2 = 0$$

В уравнениях системы (13) приняты следующие обозначения

$$\omega_1^{(i)}(x) = \varepsilon_i \mathrm{sh}\varepsilon_i x\cos\eta_i x - \eta_i \mathrm{ch}\varepsilon_i x\sin\eta_i x, \quad \omega_2^{(i)}(x) = \varepsilon_i \mathrm{ch}\varepsilon_i x\cos\eta_i x - \eta_i \mathrm{sh}\varepsilon_i x\sin\eta_i x,$$
$$\omega_3^{(i)}(x) = \varepsilon_i \mathrm{sh}\varepsilon_i x\sin\eta_i x + \eta_i \mathrm{ch}\varepsilon_i x\cos\eta_i x, \quad \omega_4^{(i)}(x) = \varepsilon_i \mathrm{ch}\varepsilon_i x\sin\eta_i x + \eta_i \mathrm{sh}\varepsilon_i x\cos\eta_i x,$$
$$p_i = \beta_{11}^{(i)}(\lambda + 1 + \varepsilon_i^2 - \eta_i^2) + \beta_{12}^{(i)}\lambda(\lambda+1), \qquad q_i = \beta_{66}^{(i)} + (\lambda+1)\{\lambda(\beta_{12}^{(i)} + 1) + \beta_{11}^{(i)} - 1\}.$$

Для существования нетривиального решения однородной системы (13) линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_i, B_i, C_i, D_i необходимо, чтобы определитель этой системы равнялся нулю

$$\Delta(\lambda, \alpha, \beta, \varepsilon_i, \eta_i) = 0 \qquad (14)$$

Если параметры анизотропии такие, что взамен (12) имеет место соотношение

$$z = \pm i b_k^{(i)} \qquad (15)$$

то общее решение (10) будет иметь вид

$$f_i(\theta, \lambda) = A_i \cos b_1^{(i)}\theta + B_i \sin b_1^{(i)}\theta + C_i \cos b_2^{(i)}\theta + D_i \sin b_2^{(i)}\theta \qquad (16)$$

С помощью (16), удовлетворив граничным условиям (5)-(8), взамен (13) будем иметь следующую систему линейных однородных уравнений относительно восьми A_i, B_i, C_i, D_i коэффициентов:

$$\cos b_1^{(1)}\alpha A_1 + \sin b_1^{(1)}\alpha B_1 + \cos b_2^{(1)}\alpha C_1 + \sin b_2^{(1)}\alpha D_1 = 0$$
$$b_1^{(1)}\sin b_1^{(1)}\alpha A_1 - b_1^{(1)}\cos b_1^{(1)}\alpha B_1 + b_2^{(1)}\sin b_2^{(1)}\alpha C_1 - b_2^{(1)}\cos b_2^{(1)}\alpha D_1 = 0$$
$$\cos b_1^{(2)}\beta A_2 - \sin b_1^{(2)}\beta B_2 + \cos b_2^{(2)}\beta C_2 + \sin b_2^{(2)}\beta D_1 = 0 \qquad (17)$$
$$b_1^{(2)}\sin b_1^{(2)}\beta A_2 + b_1^{(2)}\cos b_1^{(2)}\beta B_2 + b_2^{(2)}\sin b_2^{(2)}\beta C_2 - b_2^{(2)}\cos b_2^{(2)}\beta D_2 = 0$$
$$A_1 + C_1 - A_2 - C_2 = 0$$
$$b_1^{(1)}B_1 + b_2^{(1)}D_1 - b_1^{(2)}B_2 - b_2^{(2)}D_2 = 0$$
$$\omega_{11}A_1 + \omega_{21}C_1 - \omega_{12}A_2 - \omega_{22}C_2 = 0$$
$$b_1^{(1)}q_{11}B_1 + b_2^{(1)}q_{21}D_1 - b_1^{(2)}q_{12}B_2 - b_2^{(2)}q_{22}D_2 = 0$$

где обозначено

$$\omega_{ki} = \beta_{11}^{(i)}(\lambda+1) - \beta_{11}^{(i)} b_k^{(i)} + \beta_{12}^{(i)}\lambda(\lambda+1),$$

$$q_{ki} = \beta_{12}^{(i)}\lambda(\lambda+1) + \beta_{66}^{(i)}\lambda^2 + \beta_{11}^{(i)}(\lambda+1-b_k^{(i)2})$$

Для существования нетривиального решения (17) необходимо, чтобы определитель этой системы равнялся нулю

$$\Delta(\lambda, \alpha, \beta, b_k^{(i)}) = 0 \tag{18}$$

Из (2) и (9) следует, что если $0 < \mathrm{Re}\,\lambda_1 < 1$, то при приближении к краю поверхности соединения ($r \to 0$) напряжения неограниченно возрастают, при этом порядок особенности равен $|\mathrm{Re}\,\lambda - 1|$. А если $\mathrm{Re}\,\lambda_1 > 1$, напряжения убывают до нуля при приближении к вершине угла.

Таким образом, исследование характера напряженного состояния в окрестности края поверхности соединения составного анизотропного тела при плоской деформации приводится к отысканию корня λ трансцендентного уравнения (14) или (18) с наименьшей положительной действительной частью для фиксированных углов и механических характеристик соединяемых материалов.

Численные расчеты проведены для различных групп значений параметров анизотропии:

I. $\nu_{rz}^{(1)} = \nu_{rz}^{(2)} = 0{,}3$; $\nu_{zr}^{(1)} = \nu_{zr}^{(2)} = 0{,}2$; $\nu_{\theta z}^{(1)} = \nu_{\theta z}^{(2)} = \nu_{z\theta}^{(1)} = \nu_{z\theta}^{(2)} = 0{,}25$;

$\nu_{r\theta}^{(1)} = \nu_{r\theta}^{(2)} = 0{,}35$

$E_r^{(1)} = E_\theta^{(1)} = 10^5$; $E_r^{(2)} = E_\theta^{(2)} = 16\cdot 10^5$; $(\gamma = 16)$; $G_{r\theta}^{(i)} = E_r^{(i)}/2(1+\nu_{rz}^{(i)})$.

II. $E_r^{(1)} = E_\theta^{(1)} = 2\cdot 10^5$; $E_r^{(2)} = E_\theta^{(2)} = 10^5$; $(\gamma = 1/2)$ остальные параметры имеют такие же значения, как в I). случае.

III. $E_j^{(1)} = 2\cdot 10^5$; $E_j^{(2)} = 10^5$; $(\gamma = 1/2)$; $G_{r\theta}^{(i)} = E_r^{(i)}\Big/2(1+\nu_{rz}^{(i)}$ ($\nu_{jk}^{(i)} = 0{,}3$ изотропный случай)

IV. $E_j^{(1)} = 10^5$; $E_j^{(2)} = 16\cdot 10^5$; $(\gamma = 16)$; $G_{r\theta}^{(i)} = E_r^{(i)}\Big/2(1+\nu_{rz}^{(i)})$

($\nu_{jk}^{(i)} = 0{,}3$ изотропный случай)

V. $E_r^{(1)} = E_\theta^{(1)} = 2\cdot 10^5$; $E_r^{(2)} = E_\theta^{(2)} = 10^5$; $(\gamma = 1/2)$;

$G_{r\theta}^{(i)} = 0{,}4\,E_r^{(i)}\Big/\left(1+\nu_{rz}^{(i)}\right)$; $\nu_{jk}^{(i)}$ - как в I.

VI. $E_j^{(1)} = E_j^{(2)} = 10^5$ ($\gamma = 1$ однородное тело).

$G_{r\theta}^{(i)} = 0{,}4\,E_r^{(i)}\Big/\left(1+\nu_{rz}^{(i)}\right)$; $\nu_{jk}^{(i)}$ - как в I.

VII. $E_j^{(1)} = E_j^{(2)} = 10^5$ ($\gamma = 1$ однородное тело),

$$G_{r\theta}^{(i)} = 0{,}75\, E_r^{(i)} \Big/ \left(1+\nu_{rz}^{(i)}\right); \quad \nu_{jk}^{(i)} \text{ - как в I.}$$

VIII. $E_r^{(1)} = E_\theta^{(1)} = 2\cdot10^5$; $E_r^{(2)} = E_\theta^{(2)} = 10^5$; ($\gamma = 1/2$);

$$G_{r\theta}^{(i)} = 0{,}75\, E_r^{(i)} \Big/ \left(1+\nu_{rz}^{(i)}\right); \quad \nu_{jk}^{(i)} \text{ - как в I}$$

IX. $E_j^{(1)} = E_j^{(2)} = 10^5$; $E_r^{(2)} = E_\theta^{(2)} = 2\cdot10^5$; ($\gamma = 2$);

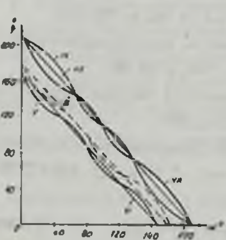
$$G_{r\theta}^{(i)} = 0{,}75\, E_r^{(i)} \Big/ \left(1+\nu_{rz}^{(i)}\right); \quad \nu_{jk}^{(i)} \text{ - как в I.}$$

Здесь $\gamma = E_j^{(2)} / E_j^{(1)}$; $i = 1,2$; $j = r,\theta$; $k = r,\theta,z$, а E, G даны в МПа.

Во всех численных расчетах учтено замечание Фойгта на счет равенства $E_r^{(i)} = E_\theta^{(i)}$ [8].

Результаты численных расчетов приведены в табл. 1.

Можем построить кривые, которые при фиксированных значениях механических характеристик материалов, на плоскости $\alpha\beta$, разделяют области конечных и бесконечных напряжений [1-3]. Предполагая, что вблизи границы области высокой концентрации напряжений наимень ший корень уравнения (18) действительный, поставим в нем $\lambda = 1$ и найдем наименьшие положительные значения углов α и β в зависи мости от параметров анизотропии. Отметим, что предварительно освободились от трехкратного корня $\lambda = 1$ этого уравнения. Для этого все элементы четвертой и восьмой столбцов разделили на $b_2^{(1)}$. Тогда элементы a_{14} и a_{18} определителя (18) превращаются в неопределен ность типа 0/0. Переходя к пределу при $\lambda \to 1$ ($b_2^{(1)} \to 0$) получим $a_{14} = \alpha$, $a_{18} = -\beta$. Геометрические места найденных таким образом точек в плоскости $\alpha\beta$ образуют те предельные кривые, которые разделяют концентрацион ную область (выше кривых от областей мало напряженности (ниже кривых) (фиг.2). Для точек этих кривых численным анализом про веряем обоснованность вышеупомянутого предположения [3]. При обнаружении комп лексных корней в (18) полагаем $\mathrm{Re}\,\lambda = 1$.



Фиг.2

Из графиков и таблицы видно, что зона мало напряженности может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от характеристик анизотропии.

$\alpha + \beta = \pi$ Таблица 1

α°	λ_1				
	I	II	III	IV	V
10	1,166	0,94	0,913	1.116	0,82
20	1,34	0,91	0,882	1,26	0.79
30	1,57	0,91	0,733	1.12	0.80
40	1,33	0,95	0,921	1,30	0.82
50	1,118	1,01	0,968	1.10	0.86
60	0,97	1,06	0,846	0.98	0.89
70	0,88	1,06	1,018	0,86	0.90
80	0,81	1,02	0,992	0,80	0.88
90	0,78	1,00	0,964	0.77	0,86
100	0.77	0,97	0,94	0.76	0.85
110	0,79	0,98	0,95	0.77	0.86
120	0,86	1,01	0,986	0,84	0.88
130	0,95+0,1i	1,06	1,01	0,93+0,08i	0,92
140	0,86	1,13	1,09	0.83	0.97
150	0,75	1,17	1,129	0,73	0.991
160	0,68	1,15	1.1	0.66	0.97
170	0,66	1,10	1,05	0,64	0.93

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд.-во АН Армении, 1987. 338с.
2. Задоян М.А. Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992. 382с.
3. Аксентян О.К., Лущик О.Н. Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного // Изв.АН СССР. МТТ. 1978. N5. с.102-108.
4. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of extention // J.Appl.Mech., 1952, vol.19, N4, pp.526-528.
5. Акопян А.Г., Задоян М.А. Малонапряженность неоднородно составных клиньев // Изв. Росс. АН. МТТ. 1992. N5, с.88-96.
6. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропных тел.-Ереван: Изд.-во ЕГУ, 1976.536с.
7. Геворгян С.Х. Исследование особенностей решений в некоторых задачах теории упругости анизотропных тел //Изв.АН Арм.ССР. Механика, 1968, Т.21, N4, с.30-39.
8. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. -М. Наука, 1977. 416с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
28.02.1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 2, 1997 Механика

ИЗГИБ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ ПО ТОРЦУ

Бабаян А. В.

Ա. Վ. Բաբայան
Եզրում բեռնավորված պիեզոկերամիկ գլանային թաղանթի ծռումը

Աշխատանքում ուսումնասիրված է պիեզոկերամիկ կիսաանվերջ շրջանածև գլանային թաղանթի ծռման խնդիրը կլասիկ տեսությամբ, տարբեր եզրային պայմանների դեպքում.

Մասնավորապես դիտարկված է երկու դեպք 1) եզրում կիրառված է ծռող մոմենտ, 2) եզրում տրվա է էլեկտրական պոտենցիալ

Ճշգրիտ և մոտավոր եղանակներով որոշված են բնութագրիչ հավասարման սեփական արժեքները տարբեր նյութերի համար Յաշված են նաև PZT-4 նյութից պատրաստված թաղանթի համար ճկվածքի և էլեկտրական պոտենցիալի ֆունկցիաների թվային արժեքները. և կատարված է համեմատություն:

A. V. Babayan
Bending of a piezoceramic cylindrical shell, loaded by its lateral edge

В работе в рамках классической теории оболочек исследуется задача изгиба пьезокерамической полубесконечной круговой цилиндрической оболочки при разных граничных условиях.

В частности, рассмотрены два случая 1) на торце приложен изгибающий момент, 2) на торце задан электрический потенциал

Для различных материалов получены собственные значения характеристического уравнения как точным, так и приближенным методом. Вычислены также значения функций прогиба и электрического потенциала для оболочки, изготовленной из пьезокерамики PZT-4 и проведено численное сравнение результатов

1. Рассмотрим осесимметричную задачу пьезокерамической круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины h, равномерно поляризованной вдоль нормали к срединной поверхности оболочки.

Цилиндрическая оболочка отнесена к смешанной системе координат $O\alpha\beta\gamma$ так, что поверхность $\alpha O\beta$ совпадает со срединной поверхностью оболочки, т.е. материал оболочки поляризован по координатным линиям γ.

Предполагается, что лицевые поверхности цилиндрической оболочки свободны.

Задача рассматривается на основании классической теории оболочек [1,2], согласно которой предполагается

$$e_{13} \approx 0, \quad e_{23} \approx 0, \quad e_{33} = 0 \qquad (1.1)$$

Уравнения состояния запишутся аналогично [3].

Компоненты деформации и уравнения равновесия представляются известным образом [1].

Учитывая, что при $\gamma = 0$ $U_1 = U(\alpha)$, $U_2 = 0$, $U_3 = W(\alpha)$, для компонент перемещения какой-либо точки оболочки, согласно (1.1), получим

$$U_1 = U(\alpha) - \gamma \frac{dW}{d\alpha}, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = W(\alpha) \tag{1.2}$$

Пусть поверхности оболочки $\gamma = \pm h/2$ электродированы и заданы значения электрического потенциала $\varphi(\alpha, \gamma)$ на этих поверхностях

$$\varphi = \varphi(\alpha, \gamma) = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \pm \frac{h}{2} \tag{1.3}$$

Уравнения электродинамики для пьезосреды в электростатическом приближении запишутся следующим образом [3]:

$$divD = 0, \quad rotE = 0 \tag{1.4}$$

Введя электрический потенциал φ по формуле

$$E = -grad\varphi, \tag{1.5}$$

тождественно удовлетворим второму уравнению (1.4), так как

$$E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = -\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}, \tag{1.6}$$

а первое уравнение перепишется следующим образом:

$$\frac{\partial D_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial D_3}{\partial \gamma} = 0 \tag{1.7}$$

Решая уравнения состояния относительно σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} и подставляя e_{ij} с учетом (1.2) получим следующие значения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= S_{11}\left[\frac{dU}{d\alpha} + \nu\frac{W}{R} - \gamma\frac{d^2W}{d\alpha^2}\right] - B_1'E_3, \\ \sigma_{22} &= S_{11}\left[\nu\frac{dU}{d\alpha} + \frac{W}{R} - \nu\gamma\frac{d^2W}{d\alpha^2}\right] - B_1'E_3, \\ \sigma_{12} &= 0, \end{aligned} \tag{1.8}$$

где R радиус кривизны срединной поверхности оболочки,

$$S_{11} = \frac{S_{11}^E}{\Delta} = \frac{1}{S_{11}^E(1-\nu^2)}, \quad \Delta = (S_{11}^E) - (S_{12}^E)^2,$$

$$B_1=\frac{d_{31}(S_{11}^E-S_{12}^E)}{\Delta}=\frac{d_{31}}{S_{11}^E(1-\nu)},\quad \nu=-\frac{S_{12}^E}{S_{11}^E}$$

С помощью (1.8), определяя внутренние силы и моменты с точностью $1\pm\frac{\gamma}{R_i}\approx 1$ и подставляя их значения в уравнения равновесия, добавляя к этим уравнениям (1.7), приходим к системе трех уравнений относительно трех искомых функций U, W, φ:

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2}+\frac{\nu}{R}\frac{dW}{d\alpha}=0,\quad \frac{d^4W}{d\alpha^4}+\frac{12}{h^2}\left[\frac{\nu}{R}\frac{dU}{d\alpha}+\frac{W}{R^2}\right]+\frac{12}{h^3}\frac{B'_1}{S_{11}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}d\gamma=0$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}+\left[a_2-2a_1\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial\gamma^2}+\frac{(1+\nu)S_{11}d_{31}}{\varepsilon_{11}^T}\frac{d^2W}{d\alpha^2}=0 \qquad (1.9)$$

где $a_1=\frac{B'_1 d_{31}}{\varepsilon_{11}^T}$ – коэффициент электромеханической связи, $a_2=\frac{\varepsilon_{11}^T}{\varepsilon_{11}^T}$.

2. Рассмотрим задачу изгиба пьезокерамической полубесконечной цилиндрической оболочки, когда край $\alpha=0$ шарнирно закреплен и на краю действует изгибающий момент M

$$W=0,\quad M_1=M,\quad T_1=0,\quad \varphi=0 \quad \text{при} \quad \alpha=0 \qquad (2.1)$$

Исключая из системы (1.9) $U(\alpha)$, получим

$$\frac{d^4W}{d\alpha^4}+\frac{12(1-\nu^2)}{h^2R^2}W+\frac{12}{h^3}\frac{B'_1}{S_{11}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}d\gamma=0$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}+\left[a_2-2a_1\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial\gamma^2}+\frac{(1+\nu)S_{11}d_{31}}{\varepsilon_{11}^T}\frac{d^2W}{d\alpha^2}=0 \qquad (2.2)$$

а) Решение системы (2.2) представим в виде

$$W=A\exp\left(-P\frac{\alpha}{h}\right),\quad \varphi=\psi(\gamma)\exp\left(-P\frac{\alpha}{h}\right) \qquad (2.3)$$

где A, P – искомые постоянные.

В этом случае граничные условия (2.1) будут

$$W=0,\quad \frac{d^2W}{d\alpha^2}=-\frac{12}{S_{11}h^3}M,\quad \frac{dU}{d\alpha}=0,\quad \psi(\gamma)=0 \quad \text{при} \quad \alpha=0 \qquad (2.4)$$

Из (1.3) для $\Psi(\gamma)$ получим

$$\psi(\gamma)=0 \qquad \text{при} \qquad \gamma=\pm h/2 \qquad (2.5)$$

Подставляя (2.3)во второе уравнение системы (2.2), приходим к диффе ренциальному уравнению относительно $\Psi(\gamma)$, решение которого будет

$$\psi(\gamma) = C_1 \cos\frac{P}{h}\sqrt{\frac{1}{a_2 - 2a_1}}\gamma + C_2 \sin\frac{P}{h}\sqrt{\frac{1}{a_2 - 2a_1}}\gamma - A\frac{(1+\nu)S_{11}d_{31}}{\varepsilon_{11}^T} \quad (2.6)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.5), получим

$$\psi(\gamma) = A\frac{(1+\nu)S_{11}d_{31}}{\varepsilon_{11}^T}\left[\frac{\cos\frac{P}{h}\sqrt{\frac{1}{a_2 - 2a_1}}\gamma}{\cos\frac{P}{2}\sqrt{\frac{1}{a_2 - 2a_1}}} - 1\right]. \quad (2.7)$$

при $C_2 = 0$.

Подставляя (2.7) в первое уравнение системы (2.2), приходим к следующему трансцендентному уравнению относительно P

$$P^4 - 12(1+\nu)a_1 P^2 + 24(1+\nu)a_1\sqrt{a_2 - 2a_1}\,P\,\mathrm{tg}\frac{P}{2}\frac{1}{\sqrt{a_2 - 2a_1}} +$$

$$+12(1-\nu^2)\frac{h^2}{R^2} = 0 \quad (2.8)$$

Разлагая тригонометрическую функцию в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми двумя членами, получим

$$P^4 + 12(1-\nu^2)\frac{h^2}{R^2}\frac{a_2 - 2a_1}{a_2 - (1-\nu)a_1} = 0 \quad (2.9)$$

Сохранение следующих членов ряда $\mathrm{tg}\frac{P}{2}\frac{1}{\sqrt{a_2 - 2a_1}}$ с точки зрения построения решения задачи не имеет смысла, так как число искомых постоянных будет превышать число граничных условий.

Нас будут интересовать те решения, для которых $\mathrm{Re}\,P$ положителен. Так как для пьезоэлектриков, приведенных в табл. 1 [4], второй член уравнения (2.9) положителен, будет два таких P. Третье P получится при $C_2 \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad P_3 = 2\pi\sqrt{a_2 - 2a_1} \quad \psi_3(\gamma) = C_2 \sin 2\pi\frac{\gamma}{h}$$

Удовлетворяя (2.3) граничным условиям (2.4), определим искомые постоянные, откуда и получим решение задачи.

б) Решение системы (2.2) представим в виде

$$W = A\exp\left(-q\frac{\alpha}{h}\right), \quad \varphi = \Phi(\alpha)\left[1 - \frac{4\gamma^2}{h^2}\right] \quad (2.10)$$

где A, q – искомые постоянные.

Таблица 1

НАИМЕНОВАНИЕ	ФОРМУЛА	КЛАСС	$S^E_{11}\cdot10^{-12}$ ед СГСЭ	$S^E_{13}\cdot10^{-12}$ ед СГСЭ	$d_{33}\cdot10^{-8}$ ед СГСЭ	$d_{13}\cdot10^{-8}$ ед СГСЭ	$d_{15}\cdot10^{-8}$ ед СГСЭ	ε^T_{11}	ε^T_{33}	a_1	a_2
Дигидрофосфат аммония	$NH_4H_2PO_4$	$\bar{4}2m$	1.82	0.19				56 4	16.4		0.291
Арагонит	$CaCO_3$	mmm						9.8	6.6		0.673
Виннокислый калий	$C_4H_4O_6$	2	2 24	-0 08				6.44	6 49		1 008
Кварц	SiO_2	32	1.279	-0.1535				4 5	4 6		1.022
Дейтерированный дигидрофосфат калия	KH_2PO_4	$\bar{4}2m$	1.65	-0.4				4.6	21 8		4 739
Кремний	Si	m3m	0.768	-0.214				12	12		1
Дигидрофосфат рубидия	RbH_2PO_4	$\bar{4}2m$	19	-4	-12 4	16.8	53 9	3.51	3 54	$2.92\ 10^{-4}$	1.0085
Рубин	Al_2O_3	$\bar{3}m$	0 2353	-0 0716				8.6	10.55		1 227
Рутил	TiO_2	4/mmm						86	170		1.977
Сульфид кадмия	CdS	6mm	2 22	-0 87	-1 7	-3.4	4 7	9.3	10 3	$0.23\ 10^{-4}$	1 1075
Поляризованная титаната бария	$BaTiO_3$	∞m			-2 35	5 73	7.8	1596			
Турмалин		3m	0 385	0 048	1 03	5.5	10.9	8.2	7 5	$0.38\ 10^{-4}$	0.915
PZT- 4			1.23	-0 405	-123	289	496	1475	1300	$12\ 4\ 10^{-4}$	0 881

Таблица 2

	h/R	i	1.2	3
CdS	0.1	P_i	0.399175(1±*i*)	6.608798
		q_i	0.399175(1±*i*)	3.645522
		q_i^0	0.399177(1±*i*)	3.645545
	0.01	P_i	0.12623(1±*i*)	6.608798
		q_i	0.12623(1±*i*)	3.645522
		q_i^0	0.126231(1±*i*)	3.645545
PZT-4	0.1	P_i	0.404239(1±*i*)	5.886206
		q_i	0.404246±0.404234*i*	3.249923
		q_i^0	0.404429(1±*i*)	3.251461
	0.01	P_i	0.127832(1±*i*)	5.886206
		q_i	0.127832(1±*i*)	3.249925
		q_i^0	0.127892(1±*i*)	3.251461
RbH_2PO_4	0.1	P_i	0.411454(1±*i*)	6.304807
		q_i	0.411455±0.411453*i*	3.478395
		q_i^0	0.41149(1±*i*)	3.478793
	0.01	P_i	0.130113(1±*i*)	6.304807
		q_i	0.130113(1±*i*)	3.478395
		q_i^0	0.130125(1±*i*)	3.478793

где $K = \sqrt[4]{\dfrac{3(1-\nu^2)}{h^2R^2}}$, $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ жесткость оболочки.

Известно, что (2.16) достигает своего максимума при $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{4K}$ [5]

$$W_{\max} = \frac{M}{2\sqrt{2}K^2 D}\exp\left(-\frac{\pi}{4}\right) \tag{2.17}$$

Для оболочки, изготовленной из пьезокерамики PZT 4, сравнивая значения (2.13) и (2.17) и определяя значение электрического потенциала (2.10) в точке α_0, получим

$$\frac{W}{W_{\max}} = 0{,}999, \quad \varphi(\alpha_0,\gamma) = 6{,}221\cdot 10^{-10}\frac{M}{h}\left[1-\frac{4\gamma^2}{h^2}\right] \text{ при } \frac{h}{R} = 0{,}1$$

$$\frac{W}{W_{\max}} = 0{,}999, \quad \varphi(\alpha_0,\gamma) = 6{,}054\cdot 10^{-10}\frac{M}{h}\left[1-\frac{4\gamma^2}{h^2}\right] \text{ при } \frac{h}{R} = 0{,}01$$

3. Пусть заданы следующие граничные условия:

$$W = 0, \quad M_1 = 0, \quad T_1 = 0, \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0 \tag{3.1}$$

Решение системы (2.2) будем искать в виде, аналогичном представлению (2.10) в случае б), согласно которому получается

Граничные условия (2.1) будут

$$W=0,\quad \frac{d^2W}{d\alpha^2}=-\frac{12}{S_{11}h^3}M,\quad \frac{dU}{d\alpha}=0,\quad \Phi(\alpha)=0 \text{ при } \alpha=0 \tag{2.11}$$

Интегрируя второе уравнение (2.2) по γ в пределах от $h/2$ до $h/2$ и подставляя (2.10) в (2.2), при этом, исключая из этой системы $\Phi(\alpha)$, приходим к следующему характеристическому уравнению:

$$\lambda^3+12\left[(1-\nu)a_1-a_2\right]\lambda^2+12(1-\nu^2)\frac{h^2}{R^2}\lambda+144(1-\nu^2)\frac{h^2}{R^2}\left[2a_1-a_2\right]=0 \tag{2.12}$$

где $\lambda=q^2$

Для большинства пьезоэлектриков дискриминант уравнения (2.12) положителен, следовательно, это уравнение имеет одно действительное и два комплексно сопряженных решения.

Обозначая нужные нам решения уравнения (2.12) через q_1, q_2, q_3, для W и $\Phi(\alpha)$ будем иметь

$$W=\sum_{i=1}^{3}A_i\exp\left(-q_i\frac{\alpha}{h}\right),\quad \Phi(\alpha)=\sum_{i=1}^{3}C_i\exp\left(-q_i\frac{\alpha}{h}\right) \tag{2.13}$$

где постоянные C_i связаны с A_i следующим образом.

$$C_i=-\frac{1}{q_i^2}\left[q_i^4+12(1-\nu^2)\frac{h^2}{R^2}\right]\frac{S_{11}}{8B'_1}A_i \tag{2.14}$$

Удовлетворяя (2.13) граничным условиям (2.11), с учетом (2.14) получим искомые постоянные, следовательно и решение

$$\begin{aligned}
A_1&=\frac{12M}{S_{11}h}\frac{q_1^2q_2^2q_3^2}{\left[q_1^2-q_2^2\right]\left[q_1^2-q_3^2\right]}\left[\frac{1}{12(1-\nu^2)}\frac{R^2}{h^2}-\frac{1}{q_2^2q_3^2}\right]\\
A_2&=\frac{12M}{S_{11}h}\frac{q_1^2q_2^2q_3^2}{\left[q_2^2-q_1^2\right]\left[q_2^2-q_3^2\right]}\left[\frac{1}{12(1-\nu^2)}\frac{R^2}{h^2}-\frac{1}{q_1^2q_3^2}\right]\\
A_3&=\frac{12M}{S_{11}h}\frac{q_1^2q_2^2q_3^2}{\left[q_3^2-q_1^2\right]\left[q_3^2-q_2^2\right]}\left[\frac{1}{12(1-\nu^2)}\frac{R^2}{h^2}-\frac{1}{q_1^2q_2^2}\right]
\end{aligned} \tag{2.15}$$

В табл. 2 приведены собственные значения характеристических уравнений (2.9) и (2.12) для некоторых пьезокристаллов.

q_i^0 собственные значения характеристического уравнения (2.12), когда отсутствует явления пьезоэффекта $(d_{ij}=0)$.

При отсутствии явления пьезоэффекта $(d_{ij}=0)$

$$W=\frac{M}{2K^2D}\exp(-K\alpha)\sin K\alpha, \tag{2.16}$$

характеристическое уравнение (2.12). Обозначая необходимые решения уравнения (2.12) через q_1, q_2, q_3, для W и $\Phi(\alpha)$ будем иметь (2.13)

Удовлетворяя (2.13) граничным условиям (3.1), с учетом (2.14) получим

$$A_1 = 12(1+\nu)d_{31}\varphi_0 \frac{q_1^2 q_2^2 q_3^2}{\left[q_1^2 - q_2^2\right]\left[q_1^2 - q_3^2\right]}\left[\frac{1}{6(1-\nu^2)}\frac{R^2}{h^2} - \frac{1}{q_2^2 q_3^2}\right]$$

$$A_2 = 12(1+\nu)d_{31}\varphi_0 \frac{q_1^2 q_2^2 q_3^2}{\left[q_2^2 - q_1^2\right]\left[q_2^2 - q_3^2\right]}\left[\frac{1}{6(1-\nu^2)}\frac{R^2}{h^2} - \frac{1}{q_1^2 q_3^2}\right] \qquad (3.2)$$

$$A_3 = 12(1+\nu)d_{31}\varphi_0 \frac{q_1^2 q_2^2 q_3^2}{\left[q_3^2 - q_1^2\right]\left[q_3^2 - q_2^2\right]}\left[\frac{1}{6(1-\nu^2)}\frac{R^2}{h^2} - \frac{1}{q_1^2 q_2^2}\right]$$

Подставляя (3.2) в (2.13), получим решение задачи.

Например, в табл.3 приводятся значения параметра $b(\alpha)$ и $\Phi(\alpha)$ в точке α_0 для оболочки, изготовленной из пьезокерамики PZT 4

где $b(\alpha) = \dfrac{W(\alpha)}{d_{31}\varphi_0}$.

Таблица 3

h/R	$b(\alpha_0)$	$\Phi(\alpha_0)$
0.1	30.91	$-0.005\,\varphi_0$
0.01	313.57	$-0.002\,\varphi_0$

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. – М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
3. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. – Ереван: Изд. ЕГУ, 1991. 143 с.
4. Переломова Н.В., Тагиева М.М. Задачник по кристаллофизике. М.: Наука, 1982. 285 с.
5. Бабаян А.В. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки под действием изгибающего момента. – Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т. 49, №1, с. 77-81.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
29.05.1996

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 2, 1997 Механика

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА ПРОЧНОСТЬ

Маркарян С.Э.

Ս.Է. Մարգարյան
Շերտավոր թաղանթների և սալերի սկզբնական գրգռումների առավելագույն արժեքների որոշումն ամրության սահմանափակման դեպքում

Լուծվում է օրթոտրոպ շերտերում թաղանթի անփոփոխ կշռի դեպքում կոմպոզիցիոն նյութի թաղանթի շերտերի հաստության և մոնոշերտերի դասավորության անկյունների արժեքների օպտիմալ ընտրության խնդիրը, որոնք ապահովում են ամրության պայմանից սկզբնական գրգռման (ճկվածքի կամ արագության) առավելագույն թույլատրելի արժեքը տրված սկզբնական պայմաններով տատանումների դեպքում:

Քննարկվում է նաև բազմաշերտ սալի դեպքը

S.E. Margarian
Definition of maximum values of initial excitations of multilayer shells and plates case of the limitation of strength

Решается задача оптимального выбора значений толщин слоев оболочки и углов укладки монослоев композиционного материала в ортотропных слоях при неизменном весе оболочки, обеспечивающих наибольшее допустимое из условия прочности максимальное значение начального возмущения (прогиба или скорости) при колебаниях с заданными начальными условиями.

Рассматривается также случай многослойной пластинки

Рассматривается шарнирно-опертая по контуру панель цилиндрической многослойной оболочки размерами a, b, h, R. Предполагается, что слои оболочки симметрично расположены относительно срединной поверхности $z=0$ и изготовлены из изотропного или ортотропного композиционного материала.

Решается задача оптимального выбора значений толщин слоев оболочки и углов укладки монослоев КМ в ортотропных слоях при неизменном весе оболочки, обеспечивающих наибольшее допустимое из условия прочности максимальное значение начального возмущения (прогиба или скорости) при колебаниях с заданными начальными условиями.

Рассматривается также случай многослойной пластинки. Приводятся результаты числовых расчетов для трехслойных оболочек и пластин при различных геометрических и физических параметрах.

1. Дифференциальные уравнения собственных колебаний многослойной оболочки имеют вид [1]

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \quad (1)$$

$$a_{11}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+(a_{66}-2a_{12})\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+a_{22}\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$$

где $w(x,y,t)$ функция прогибов, $\Phi(x,y,t)$ - функция усилий

$$D_{ik}=\frac{2}{3}\left(B_{ik}^{m+1}h_{m+1}^3+\sum_{s=1}^{m}B_{ik}^s\left(h_s^3-h_{s+1}^3\right)\right)$$

$$C_{ik}=2\left(B_{ik}^{m+1}h_{m+1}+\sum_{s=1}^{m}B_{ik}^s\left(h_s-h_{s+1}\right)\right)$$

$$a_{ik}=\frac{C_{ik}}{C_{11}C_{22}-C_{12}^2},\quad a_{66}=\frac{1}{C_{66}},\quad h_s=\frac{1}{2}\delta_{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\delta_k$$

$$M=2\left[\rho_{m+1}h_{m+1}+\sum_{s=1}^{m}\rho_s(h_s-h_{s+1})\right]$$

δ_s толщина s-ого слоя оболочки, ρ_s - плотность материала s-ого слоя, $2m+1$ число слоев оболочки, B_{ik}^s - коэффициенты упругости s-ого слоя оболочки по ее главным геометрическим направлениям. Для слоев оболочки, изготовленных из монослоев КМ путем поочередной укладки под углом $\pm\varphi$ к оси $0x$, коэффициенты B_{ik}^s выражаются через коэффициенты упругости монослоя B_{ik}^0 по известным формулам поворота [1].

Для слоев, изготовленных из изотропного материала $B_{11}^s=B_{22}^s=E_s/(1-\nu_s)^2$, $B_{12}^s=\nu_s B_{11}^s$, $B_{66}^s=E_s/2(1+\nu_s)$, E модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона.

Начальные условия принимаются в виде

$$w|_{t=0}=-C\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},\quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=-\chi C\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \quad (2)$$

где C и χC - соответственно максимальные значения начального прогиба и скорости.

Функции прогибов и усилий, удовлетворяющие условиям шарнирного опирания, принимаются в виде

$$w = f(t)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$
$$\Phi = \Psi(t)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \qquad (3)$$

Подставляя (3) в уравнение (1) и условие (2), получается уравнение для определения функции $f(t)$

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = 0 \qquad (4)$$

с соответствующими начальными условиями

$$f(t)\big|_{t=0} = -C, \quad f'(t)\big|_{t=0} = -\chi C \qquad (5)$$

и выражение для определения функции $\Psi(t)$

$$\Psi(t) = \frac{a^2}{\pi^2 R}\frac{f(t)}{a_{11} + (a_{66} - 2a_{12})\frac{a^2}{b^2} + a_{22}\frac{a^4}{b^4}} \qquad (6)$$

Низшая частота колебаний ω определяется из выражения

$$\omega^2 = \frac{\pi^4}{a^4\rho h}\left(D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{a^2}{b^2} + D_{22}\frac{a^4}{b^4} + \frac{a^4}{\pi^4 R^2}\frac{1}{a_{11} + (a_{66} - 2a_{12})\frac{a^2}{b^2} + a_{22}\frac{a^4}{b^4}}\right) \qquad (7)$$

Решения уравнения (4) с учетом (5) дает

$$f(t) = -C\left(\cos\omega t + \frac{\chi}{\omega}\sin\omega t\right) \qquad (8)$$

Подставляя (8) и (6) в (3), получается выражение для функций прогибов w и усилий $\phi(t)$.

Условие прочности для слоев оболочки записывается в виде

$$\Pi(\sigma_{ik}^s) \le 1, \qquad (9)$$

Для ортотропных слоев из КМ принимается [2]

$$\Pi(\sigma_{ik}^s) = \left(\frac{\sigma_{11}^s}{\sigma_{B1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}^s}{\sigma_{B2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}^s}{\tau_{B0}}\right)^2 - \frac{\sigma_{11}^s\sigma_{22}^s}{\sigma_{B1}^2}$$

где $\sigma_{B1}, \sigma_{B2}, \tau_{B0}$ – прочностные характеристики КМ, $\sigma_{11}^s, \sigma_{22}^s, \sigma_{12}^s$ – напряжения в s ом слое по направлениям укладки монослоев КМ, которые определяются по формулам

$$\sigma_{11}^s = B_{11}^0 e_{11}^s + B_{12}^s e_{22}^s, \quad \sigma_{22}^s = B_{11}^0 e_{11}^s + B_{22}^0 e_{22}^s$$
$$\sigma_{12}^s = B_{66}^0 e_{12}^s$$

$e_{11}^s, e_{22}^s, e_{12}^s$ – деформации в s ом слое оболочки по направлениям укладки монослоев КМ, которые определяются через деформации

e_{xx}, e_{yy}, e_{xy} по главным геометрическим направлением оболочки по известным формулам поворота [3].

Для изотропных слоев оболочки принимается

$$\Pi(\sigma_{ik}^{s}) = \frac{1}{[\sigma]^2}\left((\sigma_1^{s})^2 + (\sigma_2^{s})^2 - \sigma_1^{s}\sigma_2^{s}\right)$$

где $[\sigma]$ допускаемое напряжение, σ_1, σ_2 главные напряжения в s ом слое оболочки, определяемые известными формулами [3] через напряжения $\sigma_{xx}^{s}, \sigma_{yy}^{s}, \sigma_{xy}^{s}$ по главным геометрическим направлениям оболочки, которые, в свою очередь, определяются по формулам обобщенного закона Гука

$$\sigma_{xx}^{s} = B_{11}^{s}e_{xx} + B_{12}^{s}e_{yy}, \quad \sigma_{yy}^{s} = B_{12}^{s}e_{xx} + B_{22}^{s}e_{yy}, \quad \sigma_{xy}^{s} = B_{66}^{s}e_{xy}$$

Деформации в слоях оболочки по ее главным геометрическим направлениям выражаются через функции w и Φ по формулам

$$e_{xx} = a_{22}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - a_{12}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$e_{yy} = -a_{12}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + a_{11}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$e_{xy} = -a_{66}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

Ставится задача определения оптимальных значений параметров δ_s и φ_s $(s = 1,2,\ldots,m+1)$ оболочки, обеспечивающих наибольшее значение начального максимального возмущения (прогиба C или скорости χC) при неизменном весе оболочки и ограничениями на прочность.

Учитывая линейную зависимость напряжений от максимального начального возмущения C, условие (9) можно представить в виде

$$\Pi(\sigma_{ik}^{s}) = C^2\bar{\Pi}(\sigma_{ik}^{s}) \leq 1$$

Из этого условия при заданном значении χ в наиболее опасной точке оболочки, в зависимости от вектора управления $\bar{x}(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{m+1}, \ \varphi_1, \ \varphi_2, \ldots, \varphi_{m+1})$, определяется

$$C(\bar{x}) = \left[\max_{x,y,z,t}\bar{\Pi}(\sigma_{ik}^{s})\right]^{-1/2} \qquad (10)$$

Варьированием значением вектора $\bar{x}$ определяется оптимальный проект оболочки, при котором начальное возмущение $C(\bar{x})$ достигает наибольшего значения при неизменном весе оболочки. Таким образом, поставленная задача оптимизации сводится к нахождению

$$C = \max_{\bar{x}} C(\bar{x}) \tag{11}$$

при ограничениях

$$2\sum_{i=1}^{m} \rho_i \delta_i + \rho_{m+1}\delta_{m+1} = \rho h, \quad 0 \le \varphi_i \le \frac{\pi}{2} \tag{12}$$

где ρ - плотность материала одного из слоев оболочки

Принимая при решении поставленной задачи, $1/R = 0$, получается случай многослойной пластинки

Численная реализация произведена для трехслойных оболочек при $k = b^2/Rh = 10$ и пластинки ($k = 0$) в случае, когда средний слой изготовлен из изотропного материала (титанового сплава) с характеристиками $B_{11}^{(2)} = 3{,}88 B_{11}^0$, $B_{12}^{(2)} = 1{,}16 B_{11}^0$, $B_{66}^{(2)} = 1{,}36 B_{11}^0$, $[\sigma] = 1{,}54 \cdot 10^{-2} B_{11}^0$

а наружные слои изготовлены из КМ (СВАМ 5 : 1) с характеристиками $B_{22}^0 = 0{,}62 B_{11}^0$, $B_{12}^0 = 0{,}12 B_{11}^0$, $B_{66}^0 = 0{,}16 B_{11}^0$

$\sigma_{B1} = 1{,}89 \cdot 10^{-2} B_{11}^0$, $\sigma_{B2} = 0{,}72 \cdot 10^{-2} B_{11}^0$, $\tau_{B0} = 0{,}5 \cdot 10^{-2} B_{11}^0$

Отношение плотностей материалов $\rho_2/\rho_1 = 2{,}38$.

Определены оптимальные значения параметров $\varphi, \alpha_1 = \delta_1/h$, $\alpha_2 = \delta_2/h$ и соответствующие значения начального приведенного прогиба $\bar{c} = C/h$ при $\bar{h} = h/b = 0{,}1$, $\bar{\chi} = \chi(12\rho a^4/\pi^4 B_{11}^0 h^2)^{1/2-1}$ для различных значений отношения сторон a/b.

Результаты расчета приведены в табл. 1. Там же для сравнения приведены значения $\bar{C}$ для однослойных оболочек, изготовленных из ортотропного материала (в круглых скобках) и ортотропного материала (в квадратных скобках).

Таблица 1

	оболочка				пластинка			
a/b	$\bar{c}$	φ^0	α_1	α_2	$\bar{c}$	φ	α_1	α_2
0,5	0,0562 (0,0283) [0,0552]	0	0,45	0,04	0,0684 (0,0286) [0,0643]	0	0,3	0,16
1,0	0,1423 (0,0744) [0,1376]	0,90	0,4	0,08	0,2022 (0,1084) [0,1744]	45	0,3	0,16
1,5	0,2776 (0,1149) [0,2209]	90	0,45	0,04	0,3469 (0,1688) [0,2822]	90	0,3	0,16
2,0	0,2907 (0,1511) [0,2795]	90	0,45	0,04	0,4289 (0,1061) [0,3367]	90	0,3	0,16

Как следует из табл.1, изготовление трехслойной пластинки позволяет увеличить допустимое значение начального прогиба по сравнению с изотропной однослойной пластинкой того же веса почти в 2 раза и по сравнению с ортотропной однослойной пластинкой до 27%.

В случае же трехслойной оболочки увеличение допустимого начального прогиба по сравнению с однослойной ортотропной оболочкой несущественно (до 4%), хотя по сравнению с изотропной однослойной оболочкой достигается значительный эффект.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974, 448 с.
2. Бажанов З.Л., Гольденблат И.И. и др. Сопротивление стеклопластиков. М.: Машгиз, 1968.
3. Timoshenko S. P. and Goodier I.N. Theory of elasticity, ed mo Graw Hiu, New York, 1951.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
15.05.1996

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 2, 1997 Механика

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ СДВИГОВЫХ ВОЛН В МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕДАХ

Манукян В.Ф.

Վ.Ֆ. Մանուկյան
Միկրոբևեռ միջավայրում սահքի մակերևութային ալիքների գոյության մասին

Քննարկվում է միկրոբևեռ կիսատարածությունում սահքի հարթ մակերևութային ալիքների գոյության հարցը երկու ոչ սիմետրիկ մոդելներով Ուգոդչիկովի կողմից առաջարկված մոդելով և Կոսերայի մոդելով. Ցույց է տրված, որ Ուգոդչիկովի մոդելով մակերևութային ալիք չի առաջանում: Կոսերայի մոդելի համար ստացվել են մակերևութային ալիքների գոյության պայմանները

Manookian V. F.
On the existence of surface shear waves in a micropolar medium

Рассматривается вопрос существования плоских сдвиговых поверхностных волн в полупространстве из микрополярного материала для двух несимметричных моделей. Показано, что при использовании модели Угодчикова поверхностной сдвиговой волны не существует Получено условие существования таких волн по модели Коссера

Известно, что в классическом случае в полупространстве со свободной границей поверхностной SH волны не существует.

Задача исследуется для двух моделей: модели, предложенной Угодчиковым [1,2] и теории микрополярной среды Коссера [3,4]. Показано, что по модели Угодчикова поверхностной сдвиговой волны не существует. При другой модели задача рассматривается в двух приближениях. Для этой модели получено условие существования поверхностной сдвиговой волны

1. Рассмотрим полупространство $y \geq 0$, которое занято континуумом по модели Угодчикова [1] и предположим, что граница $y = 0$ свободна от нагрузок. Пусть $u_1 \equiv 0$, $u_2 = 0$, а $u_3 \equiv w(x, y, t)$, где u_1, u_2, u_3 - компоненты вектора смещения.

Уравнение движения имеет вид [1]

$$\mu\Delta w + J\Delta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (1.1)$$

где Δ двухмерный оператор Лапласа, т. е. $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, μ модуль сдвига, ρ плотность среды, J динамическая характеристика среды (мера инерции при вращении [4])

Решение уравнения (1.1) представляем в виде

$$w = Ae^{-k\xi y} \exp i(\omega t - kx) \qquad (1.2)$$

Подставляя (1.2) в уравнение движения (1.1), получаем следующее выражение:

$$\xi^2 = \frac{1-(1+\theta)\eta}{1-\theta\eta} \qquad (1.3)$$

где $\eta = \dfrac{\rho\omega^2}{\mu k^2}$, $\theta = \dfrac{Jk^2}{\rho}$

Из (1.3) получаем условие затухания в виде

$$0 < \eta < \frac{1}{1+\theta} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\theta} < \eta < \infty \qquad (1.4)$$

Пренебрегая членом $\gamma\rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ на плоской границе $y=0$, граничное условие примет вид [1]

$$\mu\frac{\partial w}{\partial y} + J\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial y} = 0 \qquad (1.5)$$

Подставляя (1.2) в (1.5), получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\left[(1+\theta)\eta - 1\right](\theta\eta - 1) = 0$$

Это уравнение имеет два решения: $\eta_1 = \dfrac{1}{1+\theta}$ и $\eta_2 = \dfrac{1}{\theta}$.

Эти значения не удовлетворяют условию (1.4). Следовательно, по модели Угодчикова поверхностной волны не существует. Случай, когда $\eta_1 = \dfrac{1}{1+\theta}$, дает предельную (объемную) волну. Значение $\eta_2 = \dfrac{1}{\theta}$, соответствует тривиальному случаю ($w \equiv 0$).

2. О распространении поверхностной волны Рэлея в полупространстве из микрополярного материала посвящен раздел XXVI работы [3] А. Эрингена.

Рассмотрим вопрос о существовании поверхностной SH волны в рамках микрополярной теории Коссера. В этом случае имеем $u_1 \equiv 0, u_2 \equiv 0, u_3 \equiv w(x,y,t), \varphi_z \equiv 0, \varphi_x = \varphi_x(x,y,t)$, $\varphi_y = \varphi_y(x,y,t)$,

где $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ - компоненты вектора микровращения.

Уравнение движения теории микрополярной упругости имеет вид [3]

$$(\mu+\chi)\Delta w+\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi_y}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_x}{\partial y}\right)-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

$$(\alpha+\beta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right)+\gamma\Delta\varphi_x+\varepsilon\frac{\partial w}{\partial y}-2\varepsilon\varphi_x-\rho j\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial t^2}=0 \qquad (2.1)$$

$$(\alpha+\beta)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right)+\gamma\Delta\varphi_y-\varepsilon\frac{\partial w}{\partial x}-2\varepsilon\varphi_y-\rho j\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial t^2}=0$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ - дополнительные упругие коэффициенты изотропной микрополярной упругости, j мера инерции при вращении.

Рассмотрим волны, которые распространяются в направлении оси x с амплитудой, затухающей в направлении оси y:

$$\varphi_x=A\exp(-k\xi y)\exp i(\omega t-kx)$$

$$\varphi_y=B\exp(-k\xi y)\exp i(\omega t-kx) \qquad (2.2)$$

$$w=C\exp(-k\xi y)\exp i(\omega t-kx)$$

Подставляя (2.2) в уравнения (2.1), получим однородную систему уравнений для A,B,C. Система будет иметь ненулевые решения, если его определитель равен нулю. Это даст

$$\left[(\theta_1+\theta_2+\chi)(\xi^2-1)+\eta-\frac{2k_0^2}{k^2}\right]\left\{\left[\chi(\xi^2-1)+\eta-\frac{2k_0^2}{k^2}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left[(1-\nu)(\xi^2-1)+\eta\right]+\nu\frac{k_0^2}{k^2}(\xi^2-1)\right\}=0 \qquad (2.3)$$

где

$$\theta_1=\frac{\alpha}{j\mu},\ \theta_2=\frac{\beta}{j\mu},\ \chi=\frac{\gamma}{j\mu},\ \nu=\frac{\varepsilon}{\mu},\ k_0^2=\frac{\varepsilon}{j\mu},\ \eta=\frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}.$$

Для поверхностных волн мы должны рассмотреть только случай положительных корней ξ_1,ξ_2,ξ_3. Решение (2.2) теперь можно представить в виде

$$\varphi_x=\sum_{k=1}^{3}\lambda_k A_k\exp(-k\xi_k y)\exp i(\omega t-kx)$$

$$\varphi_y=\sum_{k=1}^{3}\mu_k A_k\exp(-k\xi_k y)\exp i(\omega t-kx)$$

$$w=\sum_{k=1}^{3}\gamma_k A_k\exp(-k\xi_k y)\exp i(\omega t-kx) \qquad (2.4)$$

где

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = \frac{(\mu+\varepsilon)(\xi_3^2 - 1)k^2 + \rho\omega^2}{i\varepsilon k(1-\xi_3^2)}$$

$$\mu_1 = \frac{i}{\xi_1},\ \mu_2 = i\xi_2,\ \mu_3 = i\xi_3 \frac{(\mu+\varepsilon)(\xi_3^2 - 1)k^2 + \rho\omega^2}{i\varepsilon k(1-\xi_3^2)}$$

$$\gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = \frac{i\varepsilon k(1-\xi_3^2)}{(\mu+\varepsilon)(\xi_3^2 - 1)k^2 + \rho\omega^2},\ \gamma_3 = 1$$

Предполагая, что плоскость $y = 0$ свободна от напряжений, имеем условия [3]

$$(\mu+\varepsilon)\frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon\varphi_3 = 0,\quad \beta\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \gamma\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = 0$$

$$\alpha\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + (\alpha+\beta+\gamma)\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = 0 \tag{2.5}$$

Подстановка (2.4) в уравнение (2.5) приводит к однородным уравнениям относительно A_1, A_2, A_3. Из условия нетривиальности решений этой системы получаем

$$\frac{\xi_2 - \xi_3}{(1-\xi_3^2)[(1+\nu)(\xi_2^2 - 1) + \eta]}\Big\{\big[(1+\nu)(\xi_2^2-1)+\eta\big]\big[(1+\nu)(\xi_3^2-1)+\eta\big]\times$$

$$\times(\theta_2+\chi)(\chi - \xi_2\xi_3) + \eta(-\xi_1\xi_2\xi_3(\theta_2+\chi)^2(1+\nu)(\xi_2+\xi_3) + \tag{2.6}$$

$$+\big[-\theta_1 + (\theta_1+\theta_2+\chi)\xi_1^2\big]\big[(1+\nu)\theta_2(1+\xi_2\xi_3) + \chi\xi_2\xi_3\times$$

$$\times(\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_2\xi_3 - 1) + \eta(\chi\xi_2\xi_3 - \theta_2)\big]\big)\Big\} = 0$$

Из (2.6) предполагаем, что $\xi_2 = \xi_3 \neq 1$, для $\nu \ll 1$ получаем следующее дисперсионное выражение:

$$\eta = \frac{2k_0^2}{k^2(1-\chi)} \tag{2.7}$$

Учитывая, что $\xi_2 = \xi_3 > 0$, будем иметь условие

$$0 < \eta < \frac{2(\chi + \frac{k_0^2}{k^2})}{\chi + 1} \tag{2.8}$$

Для существования поверхностной волны (2.7) необходимо удовлетворить условию (2.8), следовательно, имеем

$$k^2 > \frac{2k_0^2}{1-\chi} \tag{2.9}$$

Таким образом, в приближении $\nu \ll 1$ для существования волны будем иметь условие (2.9) и $\chi < 1$. Корни ξ_1, ξ_2, ξ_3 уравнения (2.3) в приближении $\nu = 0$ имеют вид

$$\xi_1 = \sqrt{1 - \frac{\eta}{\theta_1 + \theta_2 + \chi}}, \quad \xi_2 = \sqrt{1 - \frac{\eta}{\chi}}, \quad \xi_3 = \sqrt{1 - \eta} \tag{2.10}$$

В таком приближении уравнение (2.6) имеет следующий вид:

$$L(\eta) = \nu\left\{\frac{\eta(\theta_2 + \chi)(\xi_2\xi_3 - \chi)(\chi - 1 - \nu)}{\chi(\xi_2 + \xi_3)} - \xi_1\xi_2\xi_3(\theta_2 + \chi)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\theta_2(1 + \xi_2\xi_3)(\theta_2 + \chi - \eta)}{\xi_2 + \xi_3}\right\} + \sqrt{1 - \eta}\{\eta^2 - 2\eta(\theta_2 + \chi) + \tag{2.11}$$

$$+ (\theta_2 + \chi)^2(1 - \xi_1\xi_2)\} = 0$$

При $\chi < 1$ из (2.10) получим условие $0 < \eta < \chi$. Легко показать, что это условие выполняется. Действительно, полагая $\eta = 0$, получаем $L(0) = -\nu\chi(\theta_2 + \chi) < 0$. С другой стороны, при $\eta = \chi$ имеем $L(\chi) = \dfrac{1 + \nu - \chi}{\sqrt{1 - \chi}}(\theta_2^2 + \nu\chi(\theta_2 + \chi)) > 0$. Отсюда следует, что уравнение (2.11) имеет корень η, удовлетворяющий условию $0 < \eta < \chi$. При $\chi > 1$ не всегда существует корень, удовлетворяющий условию затухания.

Сравним результаты, полученные на основе двух разных моделей. В случае, когда полупространство $y \geq 0$ занято континуумом по модели Угодчикова, поверхностной плоской SH волны не существует. При исследовании задачи по модели Коссера такие волны при условиях (2.9) и $\chi < 1$ существуют.

В заключение выражаю свою благодарность профессору М. В. Белубекяну за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Угодчиков А.Г. Об уравнениях динамики диформируемого твердого тела //ДАН СССР, 1991, т. 317, №1, с. 859-863.
2. Угодчиков А.Г. Моментная динамика линейно-упругого тела // Докл. РАН, 1995, т. 340, №1, с. 56-59.
3. Эринген А.К. Теория микрополярной упругости // Разрушение. Т.2. М.: Изд. Мир, 1975, с. 646-751.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Изд. Мир, 1975, с. 872.