

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ / PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱՊՏՈՒԹՅԱՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
ЕХАНИКА
MECHANICS

1997

**ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ГИБКОЙ
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ
КОЛЕБАНИЯХ С ЗАДАНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ
УСЛОВИЯМИ**

Белубекян Э.В., Гнуни В.Ц., Маркарян С.Э.

Է. Վ. Բելուբեկյան, Վ. Ց. Գնունի, Ս. Է. Մարգարյան

Տրված սկզբնական պայմաններով տատանումների դեպքում ճկուն ուղղանկյուն սալի ամրության և կոշտության պայմաններից սկզբնական զրգուճմների մեծագույն արժեքի որոշման խնդիրները:

Տրված սկզբնական պայմաններով տատանումների դեպքում ջննարկվում են ճկուն սալի ամրության և կոշտության պայմաններից սկզբնական զրգուճմների մեծագույն արժեքի որոշման խնդիրները:

Դիտարկվում են դեպքեր, երբ սալը պատրաստված է իզոտրոպ և օրտոտրոպ նյութերից.

E.V. Belubekyan, V.Ts.Gnuni, S.E. Markarian

The Strength and Rigidity of a Flexible Rectangular Plate in Case of Oscillation with given Initial Conditions

Ставятся задачи определения наибольшего значения начального возмущения гибкой пластинки на условиях прочности и жесткости при колебаниях с заданными начальными условиями. Рассматриваются случаи, когда пластинка изготовлена из изотропного и ортотропного материалов

Рассматриваются колебания шарнирно опертой по контуру гибкой прямоугольной пластинки размерами a , b , h при заданных начальных условиях.

Пластинка принимается отнесенной к прямоугольной системе координат $Oxyz$ так, что координатная плоскость $z = 0$ совпадает со срединной плоскостью пластинки, ось Ox направлена по стороне a , ось Oy — по стороне b пластинки.

Ставятся задачи определения наибольшего значения начального возмущения (прогиба или скорости) пластинки: а) из условия прочности пластинки, б) из условия жесткости пластинки с последующей проверкой условия прочности.

Рассматриваются случаи пластинки из изотропного и ортотропного материала, полученного путем поочередной укладки слоев ортотропного композиционного материала (КМ) по толщине пластинки под углами $\pm \varphi$ к оси Ox . Во втором случае появляется возможность нахождения оптимального по углу φ проекта пластинки.

1. В случае изотропного материала система дифференциальных уравнений гибкой пластинки имеет вид [1]

$$D\nabla^4 w - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \phi + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$$

где $w(x, y, t)$ — функция прогибов пластинки, $\phi(x, y, t)$ — функция усилий, ρ — плотность материала, t — время, $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ — изгибная жесткость, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Начальные условия для простого выкладки принимаются в виде

$$w|_{t=0} = 0 = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = \chi C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (2)$$

где C и χC — соответственно, максимальные значения начальных прогиба и скорости.

Функции прогибов w и усилий ϕ , удовлетворяющие условиям шарнирного опирания пластинки, принимаются в виде

$$w = f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad \phi = \Psi(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (3)$$

Подставляя выражения (3) в уравнение (1), условия (2) и применяя процедуру Бубнова-Галеркина к системе (1), получаются уравнения для определения функций $f(t)$ и $\Psi(t)$.

$$f''(t) + \omega^2 f(t) + \gamma f^3(t) = 0 \quad (4)$$

$$\Psi(t) = -\frac{16}{3} \frac{Ea^2 b^2 h}{\pi^2 (a^2 + b^2)^2} f^2(t) \quad (5)$$

С начальными условиями

$$f(t)|_{t=0} = C, \quad f'(t)|_{t=0} = \chi C \quad (6)$$

где

$$\omega^2 = \frac{D\pi^4 (a^2 + b^2)^2}{\rho h a^4 b^4}, \quad \gamma = \frac{512E}{9\rho (a^2 + b^2)^2} \quad (7)$$

ω — первая (наименьшая) частота собственных колебаний пластинки

Уравнение (4) подстановкой $f'(t) = y$ и $f''(t) = y dy / dt$ с учетом условий (6) приводится к виду :

$$f'(t) = \sqrt{\chi^2 C^2 + \omega^2 C^2 + \frac{\gamma}{2} C^4 - \omega^2 f^2 - \frac{\gamma}{2} f^4} \quad (8)$$

Решение этого уравнения с использованием эллиптических интегралов представляется в виде [2]

$$t = \pm \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \frac{k}{\delta_1} (F(k, \alpha) - F(k, \alpha_0)) \quad (9)$$

где

$$F(k, \alpha) = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}, \quad (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}),$$

$$k = \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}} \quad (0 < k < 1), \quad \delta_{1,2} = \frac{\omega}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{1 + 2 \frac{C_1 \gamma}{\omega^4} \pm 1}$$

$$C_1 = \chi^2 C + \omega^2 C^2 + \frac{\gamma}{2} C^4, \quad \alpha_0 = \arccos \frac{C}{\delta_1}.$$

$$f(t) = \delta_1 \cos \alpha \quad (10)$$

При заданных значениях параметров C , χ и времени t из уравнения (9), с помощью таблиц эллиптических интегралов [3], можно определить параметр α , а из (10) значение $f(t)$. Соответствующие значения $\Psi(t)$, w и ϕ определяются из (5) и (3).

Рассматривается задача определения допустимого из условия прочности значения максимального начального возмущения (C или χC).

Условие прочности пластинки принимается в виде

$$\Pi(\sigma_i) = \frac{1}{[\sigma]} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2)^{1/2} \leq 1 \quad (11)$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение материала пластинки; σ_1, σ_2 — главные напряжения, определяемые по известным формулам через напряжения по главным геометрическим направлениям пластинки $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$, которые, в свою очередь, определяются по формулам обобщенного закона Гука через деформации

$$e_{xx} = \frac{1}{Eh} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\nu}{Eh} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_{11} = -\frac{\nu}{Eh} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{Eh} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \epsilon_{12} = -\frac{2(1+\nu)}{Eh} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Наибольшее значение допустимого максимального начального возмущения (C или χC) определяется из условия

$$\max_{t, x, y, z} \Pi(\sigma_{ij}) = 1 \quad (12)$$

Очевидно, что наибольшее по времени значение $\Pi(\sigma_{ij})$ будет достигнуто в то время, когда прогибы примут наибольшее значение, т.е. при условии

$$\frac{df(t)}{dt} = 0 \quad (13)$$

откуда, с учетом (8), определяется наибольшее значение амплитуды колебаний

$$\max_t f(t) = \left(-\frac{\omega^2}{\gamma} - \left(\frac{\omega^4}{\gamma} + C^4 + \frac{2(\omega^2 + \gamma^2)}{\gamma^2} C^2 \right)^{1/2} \right)^{1/2} \quad (14)$$

Таким образом, становится возможным определение $f_{\max}(t)$ без обращения к решению (8), связанному с определенными сложностями вычислительного характера.

Используя (14), из условия (12) при заданном значении χ определяются допустимое значение максимального начального возмущения. Задача определения допустимого на условия жесткости

$$w \leq w^*$$

значения максимального начального возмущения сводится к решению уравнения

$$\max_t f(t) = w^* \quad (15)$$

где w^* — заданная величина предельного прогиба.

Здесь очевидно, что

$$\max_{x, y, z} w(x, y, t) = w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t\right) = f(t)$$

Из уравнения (15), с использованием (14), получается выражение для определения допустимого значения максимального начального возмущения

$$C = \left(\frac{\omega^2 + \chi^2}{\gamma} \left(\left(1 + \frac{\gamma^2}{(\omega^2 + \chi^2)^2} w^{*4} + \frac{2\omega^2 \gamma}{(\omega^2 + \chi^2)^2} w^{*2} \right)^{1/2} - 1 \right) \right)^{1/2} \quad (16)$$

Здесь необходимо также произвести проверку выполнения условия

прочности пластинки (11)

Проведены числовые расчеты для материала пластинки со следующими характеристиками

$$[\sigma] = 0,4 \cdot 10^{-2} \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu = 0,3$$

В табл. 1 приведены допустимые из условия прочности приведенные значения максимального начального возмущения $\bar{C} = C/h$ или $\bar{\chi}C$ ($\bar{\chi} = \chi(12\rho a^4 / (1-\nu^2)h^2\pi^4 E)^{1/2}$) при $\bar{\chi} = 0, 1, \infty$ для $h = h/b = 0,02$ и различных значений отношения сторон пластинки a/b .

Здесь $\bar{\chi} = 0$ соответствует отсутствию начальной скорости ($\chi C = 0$), а формально принятое $\bar{\chi} = \infty$ соответствует отсутствию начального прогиба ($C = 0$).

Таблица 1

| a/b | $\bar{\chi} = 0$ | $\bar{\chi} = 1$ | $\bar{\chi} = \infty$ |
|-------|------------------|------------------|-----------------------|
| | \bar{C} | | $\bar{\chi}C$ |
| 0,5 | 0,53 | 0,41 | 0,67 |
| 1 | 1,17 | 1,09 | 2,65 |
| 1,5 | 1,66 | 1,62 | 6,39 |
| 2 | 1,94 | 1,92 | 11,10 |

В табл. 2 приведены допустимые из условия жесткости приведенные значения максимального начального возмущения \bar{C} или $\bar{\chi}C$ при $\bar{\chi} = 1, \infty$, различных значениях приведенного предельного прогиба $\bar{w}^* = \bar{w}/h$, для $\bar{h} = 0,01$ и различных значений a/b .

Случай $\bar{\chi} = 0$, т. е. отсутствие начальной скорости, не рассмотрен, так как при этом значение начального прогиба и заданного предельного прогиба совпадают.

Для полученных результатов проведена проверка выполнения условия прочности. Приведенные в табл. 2 значения, соответствующие нарушению условия прочности, взяты в скобки.

Таблица 2

| a/b | $\bar{C} (\bar{\chi} = 1)$ | | | | $\bar{\chi}C (\bar{\chi} = \infty)$ | | | |
|-------|----------------------------|--------|--------|--------|-------------------------------------|--------|--------|--------|
| | \bar{w}^* | | | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0,5 | 0,80 | (1,68) | (2,65) | (3,67) | 1,30 | (2,89) | (4,94) | (7,59) |
| 1 | 0,92 | 1,91 | 2,92 | (3,93) | 2,19 | 5,36 | 10,0 | (16,3) |
| 1,5 | 0,96 | 1,96 | 2,96 | 3,97 | 3,48 | 8,17 | 14,8 | 23,7 |
| 2 | 0,98 | 1,98 | 2,97 | 3,98 | 5,20 | 11,50 | 19,8 | 30,4 |

Как видно из табл. 2, некоторые значения допустимых из условия жесткости максимальных начальных возмущений не приемлемы, так как не удовлетворяют условиям прочности пластинки.

2. Рассматривается случай ортогонной пластинки, когда она изготовлена из монослоев КМ, уложенных под углом $\pm \varphi$ к оси Ox пластинки.

Ставится задача оптимального выбора угла укладки φ монослоев КМ, обеспечивающего наибольшее допустимое из условия прочности максимальное начальное возмущение пластинки при ее колебаниях.

Начальные условия принимаются в виде (2).

Выбирая функции прогибов и усилий в виде (3) и подставляя их в систему дифференциальных уравнений гибкой ортогонной пластинки [4]

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^3 w}{\partial t^2} = 0 \quad (17)$$

$$a_{11} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{22} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$$

в начальные условия (2) и применяя процедуру Бубнова-Галеркина к системе (12), для определения функции $f(t)$ получается уравнение (4) с начальными условиями (6), а для функции $\Psi(t)$ выражение

$$\Psi(t) = - \frac{16}{3} \frac{a}{\pi^2 b^3} \frac{f^2(t)}{a_{11} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{a^2}{b^2} + a_{22} \frac{a^4}{b^4}} \quad (18)$$

Уравнениям (4), (17) и (18) соответствуют обозначения

$$D_{ik} = B_{ik} h^3 / 12, \quad C_{ik} = B_{ik} h, \quad a_{ik} = C_{ik} / (C_{11} C_{22} - C_{12}^2)^2 \quad (19)$$

$$\omega^2 = \frac{\pi^4}{a^4 \rho h} \left(D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{a^2}{b^2} + D_{22} \frac{a^4}{b^4} \right)$$

$$\gamma = \frac{512}{9b^4 \rho h} \frac{1}{a_{11} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{a^2}{b^2} + a_{22} \frac{a^4}{b^4}}$$

B_{ik} - характеристики упругости монослоя КМ по главным геометрическим направлениям пластинки, которые выражаются через характеристики упругости КМ по ее главным физическим направлениям B_{ik}^0 по известным формулам поворота [4].

Условие прочности принимается в виде [5]

$$P(\sigma_{ik}) = \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{R1}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{R2}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\tau_{R0}} \right)^2 - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{R1}^2} \leq 1 \quad (20)$$

где σ_{R1} , σ_{R2} , τ_{R0} — прочностные характеристики КМ.

Напряжения σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} по главным физическим направлениям пластинки определяются по формулам

$$\sigma_{11} = B_{11}'' e_{11} + B_{12}'' e_{12}, \quad \sigma_{22} = B_{12}'' e_{11} + B_{22}'' e_{22}, \quad \sigma_{12} = B_{16}'' e_{12}$$

где e_{11} , e_{22} , e_{12} — деформации пластинки по тем же направлениям, выражаемые через деформации e_{xx} , e_{yy} , e_{xy} по главным геометрическим направлениям, которые определяются по формулам

$$e_{xx} = a_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - a_{12} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$e_{yy} = -a_{12} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + a_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$e_{xy} = -a_{66} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Наибольшее значение допустимого максимального начального возмущения (C или χC) в зависимости от угла ϕ определяется из условия

$$\max_{\phi} P(\sigma_{ik}) = 1 \quad (21)$$

Как и в случае изотропной пластинки, наибольшее по времени значение $P(\sigma_{ik})$ будет достигнуто при максимальном значении амплитуды колебаний $\max f(t)$, которое определяется по формуле (14). Соответственно по формулам (18) и (3) определяются функции прогибов w и усилий ϕ .

Далее, из условия (21) определится значение максимального возмущения C в зависимости от параметра ϕ . Наибольшее по ϕ значение C будет соответствовать оптимальному проекту пластинки.

Задача определения оптимального угла укладки ϕ , обеспечивающего наибольшее допустимое из условия жесткости максимальное начальное возмущение пластинки, сводится к нахождению $\max C$, где для C — как и в случае изотропной пластинки, получается выражение (16).

Для полученного наибольшего значения начального максимального возмущения производится проверка условия прочности (20).

Числовые расчеты произведены для КМ СВММ 5 : 1 со следующими

характеристиками :

$$B_{23}^0 = 0,62 B_{11}^0, \quad B_{12}^0 = 0,12 B_{11}^0, \quad B_{16}^0 = 0,16 B_{11}^0$$

$$\sigma_{m1} = 1,89 \cdot 10^{-2} B_{11}^0, \quad \sigma_{m2} = 0,77 \cdot 10^{-2} B_{11}^0, \quad \tau_{m0} = 0,5 \cdot 10^{-2} B_{11}^0$$

В табл. 3 приведены допустимые из условия прочности наибольшие приведенные значения максимального начального возмущения $\bar{C} = C/h$ и $\bar{\chi C}$ ($\bar{\chi} = \chi(12\rho a^4 / \pi^4 B_{11}^0 h^3)^{1/2}$) при $\bar{\chi} = 0,1, \infty$ для $\bar{h} = h/b = 0,02$ и различных значений a/b

В табл. 4 приведены допустимые из условия жесткости наибольшие приведенные значения \bar{C} или $\bar{\chi C}$ и соответствующие углы φ при $\bar{\chi} = 1, \infty$, различных значениях приведенного предельного прогиба $\bar{w}^* = w^*/h$ для $\bar{h} = 0,01$ и различных значений a/b

Таблица 3

| a/b | $\bar{\chi} = 0$ | | $\bar{\chi} = 1$ | | $\bar{\chi} = \infty$ | |
|-------|------------------|-------------|------------------|-------------|-----------------------|-------------|
| | \bar{C} | φ^0 | \bar{C} | φ^0 | $\bar{\chi C}$ | φ^0 |
| 0,5 | 1,80 | 0 | 1,41 | 0 | 2,18 | 0 |
| 1 | 3,29 | 0,90 | 3,15 | 0,90 | 9,05 | 45 |
| 2 | 5,13 | 90 | 5,10 | 90 | 38,8 | 30 |

Таблица 4

| $\bar{\chi}$ | a/b | $\bar{w}^* = 1$ | | $\bar{w}^* = 2$ | | $\bar{w}^* = 3$ | | $\bar{w}^* = 4$ | |
|--------------|-------|-----------------|-------------|-----------------|-------------|-----------------|-------------|-----------------|-------------|
| | | \bar{C} | φ^0 | \bar{C} | φ^0 | \bar{C} | φ^0 | \bar{C} | φ^0 |
| 1 | 0,5 | 0,76 | 20 | 1,60 | 25 | 2,55 | 60 | 3,57 | 60 |
| 1 | 1 | 0,90 | 45 | 1,89 | 45 | 2,91 | 45 | 3,92 | 45 |
| 1 | 2 | 0,98 | 70 | 1,97 | 60 | 2,97 | 30 | 3,97 | 30 |
| $\bar{\chi}$ | | $\bar{\chi C}$ | φ^0 |
| ∞ | 0,5 | 1,15 | 15 | 2,50 | 25 | 4,21 | 30 | 6,53 | 60 |
| ∞ | 1 | 1,98 | 45 | 4,90 | 45 | 9,22 | 45 | 15,1 | 45 |
| ∞ | 2 | 4,61 | 75 | 10,0 | 65 | 16,8 | 60 | 26,1 | 30 |

Как показывают расчеты, при ограничении на прочность значения начальных возмущений, приведенные в табл. 3 для оптимальных проектов пластинки, оказывается существенно больше (от 7% до 40%) по сравнению с невыгодными проектами. В случае ограничения на жесткость влияние угла φ на величину начальных возмущений (таблица 4) оказывается незначительной (до 5%).

Следует отметить, что все результаты, приведенные в табл. 4, удовлетворяют условно прочности пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки - М.: Гостехтеориздат, 1956. 419 с.
2. Фихтенгольд Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. - М.: Наука, 1966. 800 с.
3. Янке Е., Эмде С., Леш Ф. Специальные функции - М.: Наука, 1968.
4. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1967. 534 с.
5. Баженов З. А., Гольденблат Н. И. и др. Сопротивление стеклопластиков. - М.: Машино, 1968.

Институт механики НАН РА

Поступила в редакцию
15.05.1996

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КЛИНОВИДНОЙ
ОБЛАСТИ, НА ГРАНИ КОТОРОГО ВДАВЛИВАЮТСЯ
СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫЕ КОНЕЧНЫЕ
БАЛКИ, ВЫХОДЯЩИЕ К ВЕРШИНЕ

Григорян Э.Х., Аветкян В.Е.

Է. Խ. Գրիգորյան, Վ. Ե. Ավետիսյան

Կոնտակտային խնդիր սեպանև տիրույթի համար, որի հիստերի վրա սեղվում են դևայ սեպի զազաթը դուրս եկող սիմետրիկ դասավորված վերջավոր հեծանցներ

Գիտարկվում է կոնտակտային խնդիր առածզական սեպի համար, երբ նրա երկու հիստերի վրա սեղվում են միատեսակ վերջավոր հեծանցներ, որոնք դուրս են գալիս դևայ սեպի զազաթը խնդիրը հանգեցվում է Ֆրեդհոլդի սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը Սի մասնավոր դեպքի համար խնդիրը հանգեցվում է քվազիլինյան ռեզոլյար անվերջ գծային հավասարումների սիստեմի լուծմանը կոնտակտային չարումների ինտենսիվության Սեխնի տրանսֆորմանտի մնացքների նկատմամբ

E.K.Grigorian, V.E.Avetikyan

The contact problem for a wedge region which verges are pressing with symmetric located finite beams emerging on the peak of the wedge

Рассматривается контактная задача для угругого клина, когда к его обеим граням вдавливаются две одинаковые конечные балки, выходящие к вершине клина. В угловой точке клина концы балок могут быть связаны различными способами. Задача сводится к решению фредгольмовского интегрального уравнения второго рода, допускающее решение с помощью метода последовательных приближений. В одном частном случае задача сводится к квазилинейной регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно моментов трансформанта Медви инвариантности контактных напряжений.

Рассматривается следующая контактная задача. К обеим граням угругой клиновидной пластины ($0 \leq r < \infty$, $-\alpha \leq \vartheta \leq \alpha$) подкреплены две одинаковые конечные балки, выходящие к вершине клина, изгибаемые нормальными нагрузками $P_1(r)$ и $P_2(r)$. В угловой точке клина концы балок могут быть связаны различными способами. Касательные контактные напряжения между балками и клином отсутствуют. Эта задача в случае полубесконечных балок была рассмотрена в [5].

Задача решается путем разбиения на симметричную (1) и антисимметричную (2) задачи. Предполагаются решения задач (1) и (2) получить двумя методами.

1. Решения задач свести к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, решаемых методом последовательных приближений.

2. Решения задач свести к квазилинейным редуцированным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно вычетов преобразований контактных напряжений.

1. В симметричном случае обе балки будут нагружены нагрузкой $\frac{1}{2}(P_1(r) + P_2(r))$, в антисимметричном случае на грани $\vartheta = \alpha$ балка будет нагружена нагрузкой $\frac{1}{2}(P_1(r) - P_2(r))$, а на грани $\vartheta = -\alpha$ нагрузкой $-\frac{1}{2}(P_1(r) - P_2(r))$. Ради простоты обозначения в дальнейшем нагрузку на балки обозначим через $P(r)$. Приступим к решению поставленной задачи.

Уравнения изгиба балок на грани $\vartheta = \alpha$ представим в виде

$$D \frac{d^3 \bar{v}_j^{(j)}(r)}{dr^3} = -q_j^-(r) + P^-(r) - N_j \delta''(r-a), \quad 0 < r < \infty \quad (1.1)$$

$$q_j^-(r) = \theta(a-r)q_j(r), \quad \bar{v}_j^{(j)}(r) = \theta(a-r) \frac{d\bar{v}_j^{(j)}(r)}{dr}, \quad N_j = \left. \frac{d\bar{v}_j^{(j)}}{dr} \right|_{r=a}$$

где $j=1$ соответствует симметричному случаю, $j=2$ - антисимметричному случаю, $q_j(r)$ - нормальные контактные напряжения, $\bar{v}_j^{(j)}(r)$ - поперечные перемещения точек балок, $\theta(r)$ - функция Хевисайда, $\delta(r)$ - дельта-функция Дирака, a - длина балок, D - жесткость балок на изгиб.

Условия равновесия балок для симметричной задачи в случаях свободного края или шарнирного соединения в точке $r=0$ эквивалентны уравнениям

$$\int_0^{\infty} [q_1^-(r) - P^-(r)] r^k dr = 0, \quad (k=0; 1) \quad (1.2)$$

а в случае жесткого соединения

$$\int_0^{\infty} [q_1^-(r) - P^-(r)] dr = 0, \quad \int_0^{\infty} [P^-(r) - q_1^-(r)] r^2 dr = 2N_1 a^{-1} \quad (1.3)$$

где второе условие в (1.3) получается из условия $\left. \frac{d\bar{v}_1^{(1)}}{dr} \right|_{r=0} = 0$. В случае антисимметричной задачи, независимо от типа соединения концов балок, имеем аналогичные (1.2) условия

$$\int_0^{\infty} [q_2^-(r) - P^-(r)] r^k dr = 0, \quad (k=0; 1) \quad (1.4)$$

Для деформации граничных точек пластины имеем

$$V_j^{(n)}(r, \alpha) + V_j^{(n)}(r, \alpha) = (-1)^{j-1} \frac{2(1-\nu^2)}{E} \int_0^r K_j \left(\frac{r}{t} \right) q_j^-(t) dt \quad (1.5)$$

$$K_j \left(\frac{r}{t} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\infty}^{+\infty+i\infty} K_j(p, \alpha) \left(\frac{r}{t} \right)^{-p-1} dp, \quad (j=1,2)$$

$$\bar{K}_1(p, \alpha) = \sin(p+1)\alpha \sin(p-1)\alpha [\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha]^{-1} \quad (1.6)$$

$$\bar{K}_2(p, \alpha) = \cos(p+1)\alpha \cos(p-1)\alpha [\sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha]^{-1} \quad (1.7)$$

$$V_j^{(n)}(r, \alpha) = \theta(a-r) \frac{dv^{(n)}(r, \alpha)}{dr}, \quad V_j^{(n)}(r, \alpha) = \theta(r-a) \frac{dv^{(n)}(r, \alpha)}{dr}$$

где $v^{(n)}(r, \alpha)$ — перемещения граничных точек клина, E, ν соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины, p — параметр интегрального преобразования Меллина, $-1+\varepsilon < \varepsilon < 0$, $\varepsilon < 1$.

Отметим, что функции $q_j(r)$ ищутся в классе функций $q_j(r) \sim r^{-1}$ при $r \rightarrow 0$ [1,2].

Далее, используя условие контакта $V_j^{(n)}(r, \alpha) = \bar{V}_j^{(n)}(r)$ и переходя к безразмерным величинам, после применения преобразования Меллина из (1.1) и (1.5), получим следующие функциональные уравнения:

$$\begin{aligned} & (-1)^{j-1} \bar{K}_j(p, \alpha) \bar{q}_j^-(p+1) - \lambda \prod_{n=1}^j (p+n)^{-1} [\bar{q}_j^-(p+4) - \bar{P}^-(p+4)] - \\ & - \lambda \frac{N_j a^{-3}}{p+1} = E [2(1-\nu^2)]^{-1} \bar{V}_j^{(n)}(p+1), \quad (j=1,2), \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$-1+\varepsilon < \operatorname{Re} p < 0$$

$$\text{где } \bar{q}_j^-(p+1) = \int_0^{\infty} q_j^-(r) r^p dr, \quad \lambda = E a^3 [2D(1-\nu^2)]^{-1}$$

Функции $\bar{q}_j^-(p+1)$, $\bar{q}_j^-(p+4)$, $\bar{P}^-(p+4)$ и $\bar{V}_j^{(n)}(p+1)$ регулярны соответственно при $\operatorname{Re} p > -1+\varepsilon$, $\operatorname{Re} p > -4+\varepsilon$, $\operatorname{Re} p > -4+\varepsilon$ и $\operatorname{Re} p < 0$.

Функциональные уравнения (1.8), являющиеся уравнениями типа Винера Хопфа, представим в виде

$$\begin{aligned} & -\bar{M}(p) \bar{G}_j(p, \alpha) \bar{q}_j^-(p+1) - \lambda_0 [\bar{q}_j^-(p+4) - \bar{P}^-(p+4)] \times \\ & \times \prod_{n=1}^j (p+n)^{-1} - \lambda_0 \frac{N_j a^{-3}}{p+1} = E(1-\nu^2)^{-1} \bar{V}_j^{(n)}(p+1), \quad (j=1,2), \end{aligned}$$

$$-1 + \varepsilon < \operatorname{Re} p < 0 \quad (1.9)$$

$$\bar{M}(p) = -\bar{M}^-(p)\bar{M}^+(p), \quad \lambda_0 = 2\lambda,$$

$$\bar{G}_j(p, \alpha) = (-1)^j 2 \operatorname{ctg} p \alpha \bar{K}_j(p, \alpha), \quad (j = 1; 2)$$

Далее, действуя аналогично [1-3], для $\bar{M}(p)$ и $\bar{G}_j(p, \alpha)$ получим

$$\bar{M}(p) = -\bar{M}^-(p)\bar{M}^+(p), \quad \bar{G}_j(p, \alpha) = \bar{L}_j^-(p) / \bar{L}_j^+(p), \quad (1.10)$$

$$\bar{M}^+(p) = \Gamma\left(-\frac{\alpha p}{\pi}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha p}{\pi}\right),$$

$$\bar{M}^-(p) = \Gamma\left(1 + \frac{\alpha p}{\pi}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha p}{\pi}\right),$$

$\bar{M}^+(p)$ регулярна при $\operatorname{Re} p < 0$. $\bar{M}^-(p)$ регулярна при $\operatorname{Re} p > -\frac{\pi}{2\alpha}$,

$\bar{M}^+(p) \sim |p|^{-\frac{1}{2}}$, $\bar{M}^-(p) \sim |p|^{\frac{1}{2}}$, при $|p| \rightarrow \infty$ в своих областях регулярности.

$$\bar{L}_j^\pm(p) = \exp\left[\mp \bar{R}_j^\pm(p)\right],$$

$$R_j(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\infty}^{+\infty+i\infty} \ln \bar{G}_j(p, \alpha) r^{-\epsilon(p+1)} dp, \quad -1 + \varepsilon < \epsilon < 0.$$

Подставляя (1.10) в (1.9) и учитывая асимптотические поведения функций, входящие в (1.9), после некоторых выкладок и применения обобщенной теоремы Лиувилля, получим [1-3]:

$$\begin{aligned} \bar{q}_j^-(p+1) - \lambda_0 \bar{\varphi}_j^-(p+1) \left[\bar{M}^-(p) \bar{L}_j^-(p) \right]^{-1} &= \frac{\lambda_0 \bar{L}_j^+(-1) N_j}{a^{\lambda_j} \bar{M}^+(-1) (p+1)} \times \\ &\times \left[\bar{M}^-(p) \bar{L}_j^-(p) \right]^{-1} = (a_0 - \lambda_0 \bar{\Psi}_j^-(p+1)) \left[\bar{M}^-(p) \bar{L}_j^-(p) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$-1 + \varepsilon < \operatorname{Re} p < 0,$$

$$\bar{\varphi}_j^-(p+1) = \int_0^1 \varphi_j(r) r^p dr, \quad \bar{\Psi}_j^-(p+1) = \int_0^1 \Psi_j(r) r^p dr,$$

$$\varphi_j(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\infty}^{+\infty+i\infty} \frac{\bar{L}_j^-(p)}{\bar{M}^+(p)} \frac{\bar{q}_j^-(p+4)}{\prod_{n=1}^4 (p+n)} r^{-\epsilon(p+1)} dp,$$

$$\Psi_j(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\infty}^{+\infty+i\infty} \frac{\bar{L}_j^+(p)}{\bar{M}^-(p)} \frac{\bar{P}_j^-(p+4)}{\prod_{n=1}^4 (p+n)} r^{-\epsilon(p+1)} dp,$$

где a_0 — неизвестная постоянная.

Далее, применяя обратное преобразование Меллина к (1.11), после применения теоремы о свертке и некоторых действиях, для определения $q_j^{\pm}(r)$, получим следующие интегральные уравнения

$$q_j^0(r) - \lambda_j \int_0^a \prod_j(r, \rho) q_j^0(\rho) \rho^2 d\rho = \quad (j=1,2) \quad (1.12)$$

$$= a_0 D_j \left(\frac{r}{a} \right) - \lambda_j \int_0^r \prod_j(r, \rho) P(\rho) \rho^2 d\rho + \lambda_j N_j^0 C_j \left(\frac{r}{a} \right) a^{-1},$$

$$q_j^{\pm}(r) = r q_j^{\pm}(r), \quad \prod_j(r, \rho) = \int_0^{\infty} D_j \left(\frac{r}{t} \right) D_j \left(\frac{t}{\rho} \right) \frac{dt}{t},$$

$$D_j \left(\frac{r}{t} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{M}^-(p) \bar{L}_j(p)]^{-1} \left(\frac{r}{t} \right)^{-p} dp,$$

$$D_j \left(\frac{t}{\rho} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{L}_j^*(p) \left(\frac{t}{\rho} \right)^{-p} dp}{\bar{M}^+(p) \prod_{n=1}^{\infty} (p+n)}$$

$$C_j \left(\frac{r}{a} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{a} \right)^{-p} dp}{(p+1) \bar{M}^-(p) L_j^*(p)}$$

$$D_j \left(\frac{r}{t} \right) = 0 \quad \text{при} \quad r > t, \quad N_j^0 = N_j, \quad \frac{\bar{L}_j^*(-1)}{\bar{M}^*(-1)}, \quad \lambda_j = \frac{\lambda_j}{a^2}.$$

Используя асимптотические формулы, для $\prod_j(r, \rho)$ можно получить [1.2]

$$\prod_j(r, \rho) = \tilde{\prod}_j(r, \rho) + \frac{2}{\pi} \ln^2 \frac{\rho}{r} \ln \left[\sqrt{\ln \frac{a}{r}} - \sqrt{\ln \frac{a}{\rho}} \right] + \\ + \frac{1}{\pi} \ln^2 \frac{\rho}{r} \ln \left| \frac{1}{\ln r - \ln \rho} \right| \quad (1.13)$$

Из (1.13) следует, что ядро интегральных уравнений (1.12) при $r = \rho$ и $r = \rho = a$ особенности не имеет.

Неизвестные постоянные a_0 и N_j^0 определяются из условий (1.2) в случаях свободного края и шарнирного соединения и из условий (1.3) в случае жесткого соединения в симметричной задаче, а в антисимметрич-

ной задаче - из условий (1.4).

Таким образом, решения задач (1) и (2) сведены к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода (1.12)

Интегральные уравнения (1.12) при условии

$$\lambda_0^2 \left(\sup_{0 < \rho < a} \int_0^a \left| \prod_j(r, \rho) \right| dr \right) < 1, \quad (j=1;2)$$

допускают решение методом последовательных приближений.

Отметим, что при $\lambda_0 \rightarrow 0$ из (1.12) получаются решения задач (1) и (2) в случаях жестких штампов в виде :

$$q_1(r) = \frac{a_0}{r} D_j \left(\frac{r}{a} \right). \quad (1.14)$$

Исследования показывают, что контактные напряжения в вершине клина для симметричной задачи в случае свободного края или шарнирного соединения имеют следующее поведение : $q_1(r) = O(\ln r)$ для

$\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ и $q_1(r) = O(r^{\frac{\pi}{2}-\alpha})$ для $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, а в случае жесткого соедине-

ния концов балок $q_1(r) = O(1)$ для $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ и $q_1(r) = O(r^{\frac{\pi}{2}-\alpha})$ для

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ [5].

Для антисимметричной задачи, исследуя поведение контактных напряжений в вершине клина, обнаруживаем, что независимо от способа соединения концов балок при $r \rightarrow 0$: $q_2(r) = O(r)$ для $\alpha < \frac{\pi}{6}$.

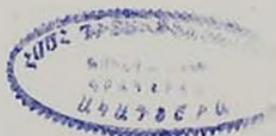
$q_2(r) = O(r^{\frac{\pi}{2}-2\alpha})$ для

$\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$, $q_2(r) = O(r^{\frac{\pi}{2}-2\alpha})$ для $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $q_2(r) = O(r)$ для $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$q_2(r) = O(r^{-\frac{\pi}{2\alpha}})$ для $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{3\pi}{4}$, $q_2(r) = O(r^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\alpha}})$ для

$\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$.

2. Приступим к сведению задач (1) и (2) к квазивполне регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно вычетов трансформантов контактных напряжений. Здесь рассматривается частный случай задач (1) и (2), когда $P(r) = P\delta(a-r)$.



Задача (1) а) Рассмотрим симметричную задачу в случае свободного края или шарнирного соединения концов балок. Из (1.2) в этом случае имеем.

$$\bar{q}_1^-(1) = Pa^{-1}, \quad \bar{q}_1^-(2) = Pa^{-1} \quad (2.1)$$

Допустим $\alpha = \frac{\pi k}{m}$. Очевидно, что нулями функции $\bar{K}_1(p, \alpha)$ являются точки $a_n = \pm 1 \pm \frac{\pi n}{\alpha}$. Обозначим $p_1 = -1$ и через $p_n (n = 2, 3, \dots)$ нули функции $\sin(p+1)\alpha$, расположенные в порядке $p_n > p_{n-1}$, где $p_n < 0$, а через \bar{p}_n нули функции $\sin(p-1)\alpha$, расположенные в аналогичном порядке, где $\bar{p}_n < 0$.

Здесь и в дальнейшем, под $\bar{q}_1^-(p+1)$, $\bar{q}_1^-(p+4)$, $\bar{V}_1(p+1)$ будем подразумевать также их аналитические продолжения. Так как $\bar{V}_1(p+1)$ регулярна при $\text{Re } p < 0$, $a\bar{q}_1^-(p+4)$ регулярна в точке $p = p_1$, из (1.8) заключаем, что функция $\bar{q}_1^-(p+1)$ в точке $p = p_1$ имеет полюс второго порядка. В точке $p = p_1 - 3$ $\bar{q}_1^-(p+4)$ имеет полюс второго порядка. Так как $\bar{K}_1(p, \alpha)$ в этой точке не обращается в нуль, то $\bar{q}_1^-(p+1)$ в точке $p = p_1 - 3$ имеет полюс второго порядка. В точке $p = p_1 - 3m$ функция $\bar{q}_1^-(p+1)$ будет иметь полюс третьего порядка, в точке $p = p_1 - 6m$ полюс четвертого порядка и т. д.

Поэтому будем рассматривать те случаи, когда α/π иррациональное число, так как в этом случае $\bar{K}_1(p, \alpha)$ в точках $p = p_1 - 3m$ не обращается в нуль и $\bar{q}_1^-(p+1)$ в этих точках имеет только полюсы второго порядка.

Далее, из (1.8) при $j = 1$ аналогично установим, что точки $p = p_n$ ($n = 2, 3, \dots$), $p = \bar{p}_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) для $\bar{q}_1^-(p+1)$ являются простыми полюсами. Так как $\bar{K}_1(p_n - 3k, \alpha) \neq 0$, $\bar{K}_1(\bar{p}_n - 3k, \alpha) \neq 0$, то в точках $p = p_n - 3k$, $p = \bar{p}_n - 3k$ $\bar{q}_1^-(p+1)$ будем иметь простые полюсы.

Обозначим

$$A_{-1}^{(n)} = \text{Выч } \bar{q}_1^-(p+1), \quad (n = 2, 3, 4, \dots), \quad (2.2)$$

$p = p_n$

$$B_{-1}^{(n)} = \text{Выч } \bar{q}_1^-(p+1), \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.3)$$

$p = \bar{p}_n$

тогда Выч $\bar{q}_1^-(p+1) = b_n^{(k)} A_{-1}^{(n)}$, ($n = 2, 3, \dots$; $k = 1, 2, 3, \dots$),
 $p = p_n - 3k$

$$b_n^{(k)} = \lambda^k \prod_{\ell=1}^k \left[\bar{K}_1(p_n - 3\ell, \alpha) \prod_{t=1}^{\ell} (p_n - 3\ell + t) \right]^{-1}, \quad b_n^{(0)} = 1, \quad (2.4)$$

Выч $\bar{q}_1^-(p+1) = d_n^{(k)} B_{-1}^{(n)}$, ($n; k = 1, 2, 3, \dots$),

$$p = \bar{p}_n - 3k$$

$$d_n^{(k)} = \lambda^k \prod_{\ell=1}^k \left[\bar{K}_1(\bar{p}_n - 3\ell, \alpha) \prod_{t=1}^{\ell} (\bar{p}_n - 3\ell + t) \right]^{-1}, \quad d_n^{(0)} = 1. \quad (2.5)$$

Так как в точках $p = p_1 - 3k$ $\bar{q}_1^-(p+1)$ имеет полюсы второго порядка, то его Лорановское разложение в этих точках будет иметь следующий вид:

$$\bar{q}_1^-(p+1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (p - p_1 + 3k)^n + \frac{A_{-2}^{(1+3k)}}{p - p_1 + 3k} + \frac{A_{-2}^{(1+3k)}}{(p - p_1 + 3k)^2}, \quad (2.6)$$

($k = 0, 1, 2, \dots$).

Имея в виду (2.6), из (1.8) получим следующие рекуррентные соотношения:

$$A_{-2}^{(1+3k)} = b_1^{(k)} A_{-2}^{(1)}, \quad A_{-1}^{(1+3k)} = b_1^{(k)} A_{-1}^{(1)} + b_1^{(k)} B_k A_{-2}^{(1)}, \quad (2.7)$$

$$B_k = \sum_{r=1}^k \left(\frac{H'(r)}{H(r)} - \frac{K'(r)}{K(r)} \right), \quad B_0 = 0,$$

$$K(t) = \bar{K}_1(p_1 - 3t, \alpha), \quad K'(t) = \left. \frac{d\bar{K}_1(p, \alpha)}{dp} \right|_{p=p_1-3t}$$

$$H(t) = \prod_{\ell=1}^t (p_1 - 3\ell + t)^{-1}, \quad H'(t) = \left. \frac{d}{dp} \left[\prod_{\ell=1}^t (p + \ell)^{-1} \right] \right|_{p=p_1-3t}$$

Учитывая (2.2) - (2.7), для $\bar{q}_1^-(p+1)$ получим разложение:

$$\begin{aligned} \bar{q}_1^-(p+1) = & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{B_k}{p+1+3k} + \frac{1}{(p+1+3k)^2} \right) b_1^{(k)} A_{-2}^{(1)} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b_n^{(k)} A_{-1}^{(n)}}{p-p_n+3k} + \frac{d_n^{(k)} B_{-1}^{(n)}}{p-\bar{p}_n+3k} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Далее, с использованием (2.8), получив аналогичное представление для $\bar{q}_1^-(p+1)$ и $\bar{q}_1^-(p+4)$, после некоторых выкладок из (1.11), получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений [4, 6]:

$$\bar{A}_{-2}^{(1)} - \lambda \mu_1 \left\{ C^{(1)} \bar{A}_{-2}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{(1)} \bar{A}_{-1}^{(n)} + \bar{C}_n^{(1)} \bar{B}_{-1}^{(n)}) \right\} = \mu_1 f_0, \quad (2.9)$$

$$\bar{A}_{-1}^{(m)} - \lambda \mu_m \left\{ C^{(m)} \bar{A}_{-2}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{(m)} \bar{A}_{-1}^{(n)} + \bar{C}_n^{(m)} \bar{B}_{-1}^{(n)}) \right\} = \mu_m f_m, \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.10)$$

$$\bar{B}_{-1}^{(m)} - \lambda \tilde{\mu}_m \left\{ \bar{C}^{(m)} \bar{A}_{-2}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} (D_n^{(m)} \bar{A}_{-1}^{(n)} + \bar{D}_n^{(m)} \bar{B}_{-1}^{(n)}) \right\} = \tilde{\mu}_m \tilde{f}_m, \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.11)$$

В (2.9)–(2.11) приняты следующие обозначения:

$$\bar{A}_{-2}^{(1)} = \bar{K}_1'(p, \alpha) A_{-2}^{(1)}, \quad \bar{A}_{-1}^{(m)} = \bar{K}_1'(p_m, \alpha) A_{-1}^{(m)},$$

$$\bar{B}_{-1}^{(m)} = \bar{K}_1'(\tilde{p}_m, \alpha) B_{-1}^{(m)}, \quad \mu_m = \bar{M}^*(p_m) [\bar{L}_1^*(p_m)]^{-1},$$

$$C^{(1)} = Y_1 \frac{\bar{L}_1^*(-1)}{\bar{M}^*(-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{B_k}{3+3k} + \frac{1}{(3+3k)^2} \right) \tilde{b}_1^{(k)},$$

$$C_1^{(1)} = \frac{Y_1}{\mu_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{b}_1^{(k)}}{3+3k}, \quad C_n^{(1)} = \frac{Y_1}{\mu_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{b}_n^{(k-1)}}{-1+p_n+3k}, \quad (n = 2, 3, \dots),$$

$$C^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{T(-4-3k)}{3+3k} \left(B_k + \frac{1}{3+3k} \right) + \frac{T'(-4-3k)}{3+3k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=2}^k \frac{\bar{L}_1^*(-j)}{\bar{M}^*(-j)} \left(\frac{B_k}{4-j+3k} + \frac{1}{(4-j+3k)^2} \right) \frac{Y_j}{j-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{Y_1}{\mu_1} \left(\frac{B_k}{3+3k} + \frac{1}{(3+3k)^2} \right) \lim_{\mu \rightarrow 1} \frac{d}{dp} \left[\frac{(p+1)\bar{M}^*(p)}{\bar{L}_1^*(p)\bar{K}_1(p, \alpha)} \right] \right\} \tilde{b}_1^{(k)},$$

$$C_1^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{T(-4-3k)}{3+3k} + \sum_{j=2}^k \frac{\bar{L}_1^*(-j)}{\bar{M}^*(-j)} \frac{Y_j}{(j-1)(4-j+3k)} + \right.$$

$$\left. + \frac{Y_1}{\mu_1} \frac{1}{3+3k} \lim_{\mu \rightarrow 1} \frac{d}{dp} \left[\frac{(p+1)\bar{M}^*(p)}{\bar{L}_1^*(p)\bar{K}_1(p, \alpha)} \right] \right\} \tilde{b}_1^{(k)},$$

$$C_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{T(p_n-3k)}{-1-p_n+3k} + \sum_{j=2}^k \frac{\bar{L}_1^*(-j)}{\bar{M}^*(-j)} \frac{Y_j}{(j-1)(-j-p_n+3k)} + \right.$$

$$\left. + \frac{Y_1}{\mu_1} \frac{1}{-1-p_n+3k} \lim_{\mu \rightarrow 1} \frac{d}{dp} \left[\frac{(p+1)\bar{M}^*(p)}{\bar{L}_1^*(p)\bar{K}_1(p, \alpha)} \right] \right\} \tilde{b}_n^{(k-1)}, \quad (n = 2, 3, \dots),$$

$$\tilde{b}_n^{(k-1)} = \frac{b_n^{(k-1)}}{\tilde{K}_1^*(p_n, \alpha)}, \quad \tilde{d}_n^{(k-1)} = \frac{d_n^{(k-1)}}{\tilde{K}_1^*(\tilde{p}_n, \alpha)}, \quad Y_1 = Y_2 = \frac{1}{2}, \quad Y_3 = -1.$$

$$Q_{mk} = \sum_{j=1}^m \frac{\tilde{L}_1^*(-j)}{\tilde{M}^*(-j)} \frac{Y_j}{(p_m + j)(-j + 4 + 3k)} + \frac{T(-4 - 3k)}{p_m + 4 + 3k}.$$

$$C^{(m)} = \sum_{k=0}^m \left\{ Q_{mk} B_k + \frac{T(-4 - 3k)}{(p_m + 4 + 3k)^2} + \frac{T'(-4 - 3k)}{p_m + 4 + 3k} + \sum_{j=1}^m \frac{\tilde{L}_1^*(-j)}{\tilde{M}^*(-j)} \frac{Y_j}{(p_m + j)(4 - j + 3k)^2} \right\} \tilde{b}_1^{(k)}, \quad (m = 2, 3, \dots).$$

$$C_1^{(m)} = \sum_{k=0}^m Q_{mk} \tilde{b}_1^{(k)}, \quad (m = 2, 3, 4, \dots).$$

$$C_n^{(m)} = \sum_{k=0}^m \left[\frac{T(p_n - 3k)}{p_m - p_n + 3k} + \sum_{j=1}^m \frac{\tilde{L}_1^*(-j)}{\tilde{M}^*(-j)} \frac{Y_j}{(p_m + j - j - p_n + 3k)} \right] \tilde{b}_n^{(k-1)}.$$

$$T(p) = \frac{\tilde{L}_1^*(p)}{\tilde{M}^*(p)} \prod_{r=1}^m (p+r)^{-1}, \quad T'(p_n) = \left. \frac{dT(p)}{dp} \right|_{p=p_n}$$

$$f_0 = \frac{\lambda p}{a} \lim_{p \rightarrow -1} \left[(p+1) \tilde{\Psi}_1^-(p+1) \right] + \lambda \frac{N_1}{\mu_1} a^{-3}, \quad \tilde{\Psi}_1^-(p+1) = \int_0^1 \Psi_1(r) p^r dr,$$

$$f_1 = \frac{a_0}{2} - \frac{\lambda p}{a} \lim_{p \rightarrow -1} \frac{d}{dp} \left[\frac{(p+1)^2 \tilde{M}^*(p) \tilde{\Psi}_1^-(p+1)}{\tilde{L}_1^*(p) \tilde{K}_1^*(p, \alpha)} \right] + \lambda \frac{N_1}{\mu_1 a^3} \lim_{p \rightarrow -1} \frac{d}{dp} \left[\frac{(p+1) \tilde{M}^*(p)}{\tilde{L}_1^*(p) \tilde{K}_1^*(p, \alpha)} \right], \quad \Psi_1(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{L}_1^*(p) p^{-r-1} \alpha p}{\tilde{M}^*(p) \prod_{n=1}^m (p+n)}$$

$$f_m = \frac{a_0}{2} - \frac{\lambda p}{a} \tilde{\Psi}_1^-(p_m + 1) + \lambda \frac{N_1}{a^3 \mu_1} \frac{1}{p_m + 1}, \quad (m = 2, 3, \dots).$$

Для получения $\tilde{C}^{(m)}$, $\tilde{C}_n^{(m)}$, $\tilde{\mu}_n$, \tilde{f}_n необходимо соответственно в $C^{(m)}$, $C_n^{(m)}$, μ_n , f_n p_n заменить через \tilde{p}_n и $\tilde{b}_n^{(k-1)}$ через $\tilde{d}_n^{(k-1)}$, а для получения $D_n^{(m)}$ и $\tilde{D}_n^{(m)}$ в $C_n^{(m)}$ и $\tilde{C}_n^{(m)}$ заменить p_n через \tilde{p}_n .

К системе уравнений (2.9) - (2.11) добавим уравнения (2.1)

$$\sum_{l=0}^m \left\{ \frac{\tilde{b}_1^{(l)}}{(l+1+3k)^2} + \frac{\tilde{b}_1^{(l)} B_l}{l+1+3k} \right\} \tilde{A}_{2-2}^{(l)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{b}_n^{(k)} \bar{A}_{-1}^{(k)}}{\ell - p_n + 3k} + \frac{\bar{d}_n^{(k)} \bar{B}_{-1}^{(k)}}{\ell - \bar{p}_n + 3k} \right) = Pa^{-1}, \quad (\ell = 0; 1). \quad (2.12)$$

Квазиуполная регулярность системы (2.9) - (2.11) следует из того, что $|C_n^{(m)}| < \infty$, $|\bar{C}_n^{(m)}| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n^{(m)}| < \infty$, $|f_m| < \infty$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{C}_n^{(m)}| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |D_n^{(m)}| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{D}_n^{(m)}| < \infty,$$

в котором нетрудно убедиться, поскольку $\mu_n; \bar{\mu}_n = O\left(m^{-\frac{1}{2}}\right)$ при $m \rightarrow \infty$.

После решения системы (2.9) - (2.11) контактные напряжения можно вычислить по формуле

$$q_1(r) = \ln\left(\frac{r}{a}\right) A_{-2}^{(1)} + A_{-2}^{(1)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k + \ln\left(\frac{r}{a}\right) \right) b_1^{(k)} \left(\frac{r}{a}\right)^{3k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[b_n^{(k)} A_{-1}^{(n)} \left(\frac{r}{a}\right)^{-p_n+3k-1} + d_n^{(k)} B_{-1}^{(n)} \left(\frac{r}{a}\right)^{-\bar{p}_n+3k-1} \right]. \quad (2.13)$$

В случае жестких штампов решение будет иметь следующий вид, где $\frac{\alpha}{\pi}$ может быть и рациональное число :

$$q_1(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\bar{M}^*(p_n)}{\bar{L}_1^*(p_n)} \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\alpha n}{\alpha}} + \frac{\bar{M}^*(\bar{p}_n)}{\bar{L}_1^*(\bar{p}_n)} \left(\frac{r}{a}\right)^{-2\frac{\alpha n}{\alpha}} \right] \frac{a_0}{\alpha} + \frac{a_0 \pi}{2\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\bar{M}^*(p_n)}{\bar{L}_1^*(p_n)} \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\alpha n}{\alpha}} - \frac{\bar{M}^*(\bar{p}_n)}{\bar{L}_1^*(\bar{p}_n)} \left(\frac{r}{a}\right)^{-2\frac{\alpha n}{\alpha}} \right] \quad (2.14)$$

Как видно из (2.14), при $r \rightarrow a$ $q_1(r)$ имеет корневую особенность, поскольку при $n \rightarrow \infty$ $\mu_n; \bar{\mu}_n = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Этот результат совпадает с результатом (1.14), где a_0 необходимо определить из первого уравнения (1.2).

Задача (1) б). Рассмотрим случай жесткого соединения концов балок. Из (1.3) имеем

$$\bar{q}_1^-(1) = Pa^{-1}, \quad \bar{q}_1^-(3) = Pa^{-1} - 2N_1 a^{-3}. \quad (2.15)$$

Обозначим $p_1 = -2$, $p_2 = -1$ и через p_n ($n = 2, 3, 4, \dots$) нули функ

ции $\sin(p+1)\alpha$, расположенные в полуплоскости $\text{Re } p < 0$, а через \bar{p}_n ($n = 2, 3, 4, \dots$) нули функции $\sin(p-1)\alpha$ при $\text{Re } p < 0$, причем $p_n > p_{n+1}$ и $\bar{p}_n > \bar{p}_{n+1}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$).

Аналогично (1) а) установим, что в точках $p = p_n - 3k$, $p = \bar{p}_n - 3k$ ($n = 1, 2, 3, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$) $\bar{q}_1^-(p+1)$ при условии, что $\frac{\alpha}{\pi}$ иррациональное число, имеет простые полюсы.

Обозначим

$$A_{-1}^{(n)} = \text{Выч}_{p=p_n} \bar{q}_1^-(p+1), \quad B_{-1}^{(n)} = \text{Выч}_{p=\bar{p}_n} \bar{q}_1^-(p+1) \quad (2.16)$$

тогда из (1.8) установим, что

$$\text{Выч}_{p=p_n-3k} \bar{q}_1^-(p+1) = b_n^{(k)} A_{-1}^{(n)}, \quad (n; k = 1, 2, 3, \dots),$$

$$b_n^{(k)} = \lambda^k \prod_{l=1}^k \left[\bar{K}_1(p_n - 3l, \alpha) \prod_{t=1}^l (p_n - 3l + t) \right]^{-1}, \quad b_n^{(0)} = 1, \quad (2.17)$$

$$\text{Выч}_{p=\bar{p}_n-3k} \bar{q}_1^-(p+1) = d_n^{(k)} B_{-1}^{(n)}, \quad (n = 2, 3, \dots; k = 1, 2, 3, \dots),$$

$$d_n^{(k)} = \lambda^k \prod_{l=1}^k \left[\bar{K}_1(\bar{p}_n - 3l, \alpha) \prod_{t=1}^l (\bar{p}_n - 3l + t) \right]^{-1}, \quad d_n^{(0)} = 1$$

Для $\bar{q}_1^-(p+1)$ с использованием (2.16) и (2.17) получим

$$\bar{q}_1^-(p+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_n^{(k)} A_{-1}^{(1)}}{p - p_1 + 3k} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{b_n^{(k)} A_{-1}^{(n)}}{p - p_n + 3k} + \frac{d_n^{(k)} B_{-1}^{(n)}}{p - \bar{p}_n + 3k} \right] \quad (2.18)$$

Далее, получив аналогичные представления для $\bar{q}_1^-(p+4)$ и $\bar{\varphi}_1^-(p+1)$, после некоторых выкладок из (1.11), получим

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{A}_{-1}^{(m)} - \lambda \mu_m \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{(m)} \bar{A}_{-1}^{(n)} + \bar{C}_n^{(m)} \bar{B}_{-1}^{(n)}) &= \mu_m f_m, \quad (m = 1, 2, \dots), \\ \bar{B}_{-1}^{(m)} - \lambda \bar{\mu}_m \sum_{n=1}^{\infty} (D_n^{(m)} \bar{A}_{-1}^{(n)} + \bar{D}_n^{(m)} \bar{B}_{-1}^{(n)}) &= \bar{\mu}_m \bar{f}_m, \quad (m = 2, 3, \dots), \end{aligned} \right. \quad (2.19)$$

$$B_{-1}^{(1)} = B_{-1}^{(1)} = 0,$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\bar{b}_n^{(k)} \bar{A}_{-1}^{(n)}}{-p_n + 3k} + \frac{\bar{d}_n^{(k)} \bar{B}_{-1}^{(n)}}{-\bar{p}_n + 3k} \right] &= Pa^{-1}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\bar{b}_n^{(k)} \bar{A}_{-1}^{(n)}}{2 - p_n + 3k} + \frac{\bar{d}_n^{(k)} \bar{B}_{-1}^{(n)}}{2 - \bar{p}_n + 3k} \right] &= Pa^{-1} - 2N_1 a^{-1}. \end{aligned} \right. \quad (2.20)$$

$$C_n^{(1)} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{b}_n^{(k-1)}}{\bar{K}_1(-2, \alpha) \mu_1(-2 - p_n + 3k)},$$

$$C_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T(p_n - 3k) \bar{b}_n^{(k-1)}}{p_1 - p_n + 3k},$$

$$C_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{m-1} \frac{\bar{L}_1^+(-j)}{\bar{M}^+(-j)} \frac{Y_j}{p_m + j(-j - p_n + 3k)} \cdot \bar{b}_n^{(k-1)} + \frac{T(p_n - 3k)}{p_m - p_n + 3k} \bar{b}_n^{(k-1)} \right],$$

($m = 3, 4, 5, \dots$).

$$f_1 = - \frac{\lambda P}{a} \left[\bar{K}_1(p_1, \alpha) \right]^{-1} \lim_{p \rightarrow p_1} [(p - p_1) \bar{\Psi}_1^-(p + 1)],$$

$$f_2 = \frac{a_0}{2}, \quad f_m = \frac{a_0}{2} - \frac{\lambda P}{a} \bar{\Psi}_1^-(p_m + 1) + \frac{\lambda}{a^2} \frac{N_1}{p_m + 1} \frac{\bar{L}_1^+(-1)}{\bar{M}^+(-1)}.$$

Для получения $\bar{C}_n^{(m)}$ вместо p_n надо положить \bar{p}_n , а вместо $\bar{b}_n^{(k-1)}$ — соответственно $\bar{d}_n^{(k-1)}$. Для получения $D_n^{(m)}$, $\bar{D}_n^{(m)}$, $\bar{\mu}_n$ и \bar{f}_m надо в $C_n^{(m)}$, $\bar{C}_n^{(m)}$, μ_n и f_m положить вместо p_n соответственно \bar{p}_n .

Далее, аналогично задаче (1) а) установим, что бесконечная система линейных алгебраических уравнений (2.19), (2.20) является квазирегулярной системой для любых λ .

В случае, когда $\lambda \rightarrow 0$, для $q_1(r)$ получается выражение (2.14), где a_0 нужно определить из второго уравнения (1.3), положив $N_1 = 0$.

Задача (2). Рассмотрим антисимметричную задачу. Из уравнений (1.8) при $j=2$ нетрудно установить, что точки $p = p_n$, $p = \bar{p}_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), где p_n — нули функции $\cos(p+1)\alpha$, а \bar{p}_n — нули функции $\cos(p-1)\alpha$ при $\text{Re } p < 0$, $p_n > p_{n-1}$, $\bar{p}_n > \bar{p}_{n-1}$, являются особыми точками $\bar{q}_2^-(p+1)$. Аналогично установим, что точки $p = p_n - 3k$, $p = \bar{p}_n - 3k$ ($n; k = 1, 2, 3, \dots$) при условии, что $\frac{\alpha}{\pi}$ иррациональное число, для функции $\bar{q}_2^-(p+1)$ являются простыми полюсами.

Обозначим выч $\bar{q}_2^-(p+1) = A_{-1}^{(n)}$, выч $\bar{q}_2^-(p+1) = B_{-1}^{(n)}$, тогда

$$(1.8) \text{ установим, что}$$

$$\begin{array}{cc} p = p_n & p = \bar{p}_n \\ \text{выч } \bar{q}_2^-(p+1) = b_n^{(k-1)} A_{-1}^{(n)}, & \text{выч } \bar{q}_2^-(p+1) = d_n^{(k-1)} B_{-1}^{(n)}, \\ p = p_n - 3k & p = \bar{p}_n - 3k \end{array}$$

($n; k = 1, 2, 3, \dots$)

$$b_n^{(k)} = (-1)^k \lambda^k \prod_{r=1}^k \left[\bar{K}_2(p_n - 3r, \alpha) \prod_{s=1}^3 (p_n - 3r + s) \right]^{-1}, \quad b_n^{(0)} = 1,$$

$$d_n^{(k)} = (-1)^k \lambda^k \prod_{r=1}^k \left[\bar{K}_2(\bar{p}_n - 3r, \alpha) \prod_{s=1}^3 (\bar{p}_n - 3r + s) \right]^{-1}, \quad d_n^{(0)} = 1,$$

Учитывая это, для $\bar{q}_2^-(p+1)$ получим

$$\bar{q}_2^-(p+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{b_n^{(k)} A_{-1}^{(n)}}{p - p_n + 3k} + \frac{d_n^{(k)} B_{-1}^{(n)}}{p - \bar{p}_n + 3k} \right].$$

Далее, действуя аналогично вышесказанному, из (1.11) при $j=2$ получим

$$\begin{cases} \bar{A}_{-1}^{(m)} + \lambda \bar{\mu}_m \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n^{(m)} \bar{A}_{-1}^{(n)} + \bar{C}_n^{(m)} \bar{B}_{-1}^{(n)} \right] = \bar{\mu}_m \bar{f}_m, \\ \bar{B}_{-1}^{(m)} + \lambda \bar{\mu}_m \sum_{n=1}^{\infty} \left[D_n^{(m)} \bar{A}_{-1}^{(n)} + \bar{D}_n^{(m)} \bar{B}_{-1}^{(n)} \right] = \bar{\mu}_m \bar{f}_m, \end{cases} \quad (m=1, 2, \dots) \quad (2.21)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\bar{b}_n^{(k)} \bar{A}_{-1}^{(n)}}{\ell - p_n + 3k} + \frac{\bar{d}_n^{(k)} \bar{B}_{-1}^{(n)}}{\ell - \bar{p}_n + 3k} \right] = P a^{-1}, \quad (\ell=0; 1), \quad (2.22)$$

$$\bar{A}_{-1}^{(n)} = \bar{K}_2'(p_n, \alpha) A_{-1}^{(n)}, \quad \bar{B}_{-1}^{(n)} = \bar{K}_2'(p_n, \alpha) B_{-1}^{(n)},$$

$$\bar{\mu}_m = \bar{M}^*(p_m) [\bar{L}_2^*(p_m)]^{-1}, \quad \bar{\mu}_m = \bar{M}^*(\bar{p}_m) [\bar{L}_2^*(\bar{p}_m)]^{-1},$$

$$C_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^3 \frac{\bar{L}_2^*(-j)}{\bar{M}^*(-j)} \frac{Y_j}{p_m + j - j - p_n + 3k} \frac{\bar{b}_n^{(k-1)}}{p_m - p_n + 3k} + \frac{T(p_m - 3k) \bar{b}_n^{(k-1)}}{p_m - p_n + 3k} \right],$$

$$\bar{C}_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^3 \frac{\bar{L}_2^*(-j)}{\bar{M}^*(-j)} \frac{Y_j}{p_m + j - j - p_n + 3k} \frac{\bar{b}_n^{(k-1)}}{p_m - \bar{p}_n + 3k} + \frac{T(\bar{p}_m - 3k) \bar{d}_n^{(k-1)}}{p_m - \bar{p}_n + 3k} \right],$$

$$\bar{f}_m = -\frac{a_0}{2} + \frac{\lambda P}{a} \bar{\Psi}_2^-(p_m + 1) - \frac{\lambda}{a^3} \frac{N_2}{p_m + 1} \frac{\bar{L}_2^*(-1)}{\bar{M}^*(-1)}, \quad (m=1, 2, 3, \dots).$$

Для получения $D_n^{(m)}$, $\bar{D}_n^{(m)}$ и \bar{f}_m в выражениях $C_n^{(m)}$, $\bar{C}_n^{(m)}$ и f_m , p_m нужно заменить через \bar{p}_m соответственно. После решения системы (2.21), (2.22) для $q_2(r)$ получается следующее выражение

$$q_2(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[b_n^{(k)} A_{-1}^{(n)} \left(\frac{r}{a} \right)^{-p_n + 3k - 1} + d_n^{(k)} B_{-1}^{(n)} \left(\frac{r}{a} \right)^{-\bar{p}_n + 3k - 1} \right].$$

В случае $\lambda \rightarrow 0$ из (2.21) и (2.23) получаем: $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\alpha}{\pi}$ может принимать и рациональное значение

$$q_2(r) = \frac{a_0}{2\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\overline{M}^+(p_n)}{L_2^+(p_n)} \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi n}{2\alpha}} + \frac{\overline{M}^+(\tilde{p}_n)}{L_2^+(\tilde{p}_n)} \left(\frac{r}{a}\right)^{-2 + \frac{\pi n}{2\alpha}} \right] (1 - (-1)^n) +$$

$$+ \frac{a_0 \pi}{4\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\overline{M}^-(p_n)}{L_2^-(p_n)} \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi n}{2\alpha}} - \frac{\overline{M}^-(\tilde{p}_n)}{L_2^-(\tilde{p}_n)} \left(\frac{r}{a}\right)^{-2 + \frac{\pi n}{2\alpha}} \right] \quad (2.24)$$

Как видно из (2.24), при $r \rightarrow a$ $q_2(r)$ имеет корневую особенность, поскольку при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\overline{M}^-(p_n)}{L_2^-(p_n)}, \quad \frac{\overline{M}^-(\tilde{p}_n)}{L_2^-(\tilde{p}_n)} \sim n^{-\frac{1}{2}}$$

которая совпадает с результатом (1.14).

Таким образом, решения задач (1) и (2) сведены к квазилинейным бесконечным системам относительно вычетов трансформант контактных напряжений для любого значения параметра λ в том случае, когда $\frac{\alpha}{\pi}$ — иррациональное число.

Работа выполнена по заказу фирмы "Анушик".

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э.Х. Об одной задаче для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение. Уч. записки ЕГУ, естеств. науки, 1982, № 2, с. 32-43.
 2. Аветикян В.Е. Контактная задача для упругого клина, вдавливаемого конечной балкой, выходящей на его вершину. Межвуз. сб. науч. трудов. Механика, Ереван: Изд. ЕГУ, 1986, № 4, с. 146-151.
 3. Нойт Б. Метод Винера - Хопфа. М.: ИЛ, 1962.
 4. Григорян Э.Х. Об одном подходе к решению задач для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение, выходящее на границу полуплоскости. Межвуз. сб. науч. трудов Механика, Ереван: Изд. ЕГУ, 1987, № 6, с. 127-133.
 5. Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином. ПММ, 1974, т. 39, вып. 6, с. 1100-1109.
 6. Аветикян В.Е., Григорян Э.Х. О решении контактной задачи для клина с конечной балкой. Юбилейная науч. конференция, посвященная 60-летию основания ГПИ им. М. Налбандяна, 1994, т. 1, с. 9-12.
- Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию

20.02.1995

ВОЛНЫ ТИПА РЭЛЕЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ
ЗАМКНУТОЙ НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКЕ

Գուլգազարյան Գ.Ր., Կազարյան Կ.Բ.

Գ. Ռ. Գուլգազարյան, Կ. Բ. Կազարյան

Ռելեյի տիպի ալիքները կիսաանվերջ, փակ, ոչ շրջանային զլանային բաղանջում

Դիտարկվում է հարթ, ուղիղ տիպի ալիքի, տարածման հարցը որը մարում է կիսաանվերջ զլանային բաղանջի ազատ ծայրից ծնիչների ուղղությամբ

Գետազոտումը կատարվում է իզոտրոպ, ճկուն կիսաանվերջ բաղանջի համար, երբ ծածան կոշտությունը ընդունվում է հավասար զրո (անմոմենտ բաղանջ)

G. R. Gulgazyan, C. B. Kazaryan

The waves of reyleigh kind in the semi-infinite closed noncircular cylindrical shell

В работе исследуется вопрос распространения плоских (не изгибных) волн Рэлея затухающих от свободного торца полубесконечной оболочки вдоль направления ее образующих. Исследования проводятся для изотропной упругой полубесконечной оболочки, когда жесткость на изгиб принимается равной нулю (безмоментная оболочка).

В работе исследуется вопрос распространения плоских (не изгибных) волн типа Рэлея, затухающих от свободного торца полубесконечной оболочки вдоль направления ее образующих. Исследование проводится для изотропной упругой полубесконечной оболочки, когда жесткость на изгиб принимается равной нулю (безмоментная оболочка).

Предполагается, что квадрат радиуса кривизны направляющей кривой имеет вид

$$R^2(\beta) = R^2 \left(1 + \varepsilon \cos \frac{2\pi}{s} \beta \right) \quad (1)$$

$$0 < \varepsilon < 1, \quad 0 \leq \beta \leq s$$

Здесь $R = \text{const}$, β – длина переменной дуги направляющей кривой серединой поверхности, s – полная длина.

Приведен численный анализ, показывающий зависимость фазовой скорости от ε и от волнового числа m

Вопросы распространения плоской волны типа Рэлея, затухающей от

свободного торца полубесконечной круговой цилиндрической оболочки вдоль направления ее образующей, изучены в [1].

В качестве исходных уравнений безмоментной теории цилиндрических оболочек возьмем следующие уравнения [2]

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - \frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} + \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} + \sigma \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= \lambda u_1, \\ -\frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} - \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial \beta} &= \lambda u_2, \\ -\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \sigma \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + w &= \lambda R^2(\beta)w \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $R(\beta)$ — радиус кривизны направляющей, u_1 , u_2 , $u_3 = R(\beta)w$ — проекции смещения точки срединной поверхности, α и β — ортогональные координаты точки срединной поверхности,

$$\lambda = (1-\sigma^2)\omega^2 \rho / E \quad (3)$$

где ρ — удельная плотность материала оболочки, E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона, ω — угловая частота

Для дальнейшей цели удобно систему (2) заменить системой уравнения [3]

$$\begin{aligned} (\Delta\Delta + \lambda(3-\sigma)/(1-\sigma)\Delta + 2\lambda^2/(1-\sigma))u_1 &= \\ = \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \sigma \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} + 2\lambda\sigma/(1-\sigma) \frac{\partial w}{\partial \alpha} \\ (\Delta\Delta + \lambda(3-\sigma)/(1-\sigma)\Delta + 2\lambda^2/(1-\sigma))u_2 &= \\ = (2+\sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial \beta \partial \alpha^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3} + 2\lambda/(1-\sigma) \frac{\partial w}{\partial \beta} \\ \lambda(\Delta\Delta + \lambda(3-\sigma)/(1-\sigma)\Delta + 2\lambda^2/(1-\sigma))R^2(\beta)w - \\ - ((1-\sigma^2) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \lambda\Delta + 2(1+\sigma)\lambda \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2\lambda^2/(1-\sigma))w &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа.

Граничные условия принимают вид:

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \sigma \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - w \right) \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (5)$$

$$u_i(\alpha, 0) = u_i(\alpha, s), \quad w(\alpha, 0) = w(\alpha, s), \quad i = 1, 2$$

Периодическое решение системы (4) ищем в виде

$$u_1(\beta) = \exp \chi \alpha \sum_{m=0}^{\infty} u_m \cos p_m \beta. \quad (6)$$

$$u_2(\beta) = \exp \chi \alpha \sum_{m=0}^{\infty} v_m \sin p_m \beta$$

$$w(\beta) = \exp \chi \alpha \left(w_0 / 2 + \sum_{m=1}^{\infty} w_m \cos p_m \beta \right)$$

где $p_m = 2m\pi / s$. Подставим (6) в (4).

Из первых двух уравнений (4) получим

$$u_m = \frac{\chi(\sigma\chi^2 + p_m^2 + 2\lambda\sigma / (1-\sigma))w_m}{(\chi^2 - p_m^2)^2 + \lambda(\chi^2 - p_m^2)(3-\sigma)/(1-\sigma) + 2\lambda^2 / (1-\sigma)}$$

$$v_m = \frac{-p_m((2+\sigma)\chi^2 - p_m^2 + 2\lambda / (1-\sigma))w_m}{(\chi^2 - p_m^2)^2 + \lambda(\chi^2 - p_m^2)(3-\sigma)/(1-\sigma) + 2\lambda^2 / (1-\sigma)} \quad (7)$$

$m = 0, 1, 2, \dots$

При $m=0$ в (7) w_0 заменяется на $w_0 / 2$. Из третьего уравнения (4),

учитывая, что

$$R'(\beta)w(\beta) = R' \left[w_0 / 2 + \varepsilon w_1 / 2 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2} w_{m-1} + w_m + \frac{\varepsilon}{2} w_{m+1} \right) \cos p_m \beta \right] \exp \chi \alpha$$

получим бесконечную систему уравнений

$$a_m w_0 + \varepsilon b_0 w_1 = 0,$$

$$\frac{\varepsilon}{2} b_m w_{m-1} + a_m w_m + \frac{\varepsilon}{2} b_m w_{m+1} = 0$$

$m = 1, 2, \dots$

(8)

где

$$a_m = (\lambda - (1-\sigma^2) / R^2) \chi^4 - \lambda((3+2\sigma) / R^2 + 2p_m^2 - \lambda(3-\sigma) / (1-\sigma)) \chi^2 + \lambda(2\lambda / (1-\sigma) - p_m^2)(\lambda - p_m^2 - 1 / R^2),$$

$$b_m = \lambda(\chi^2 - p_m^2 + \lambda)(\chi^2 - p_m^2 + 2\lambda / (1-\sigma)).$$

Чтобы система (8) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее бесконечный определитель (он называется определителем Хилла) равнялся нулю.

$$D(\chi, \varepsilon) = 0 \quad (10)$$

Уравнение (10) устанавливает функциональную зависимость:

$\chi = \chi(R, \lambda, \sigma, m, \varepsilon)$. В явной форме эту зависимость можно установить следующим образом. Возьмем определитель (10) при конечном n

и приравниваем нулю:

$$D_{n+1}(\chi, \varepsilon) = 0 \quad (11)$$

Найдем χ_n решение алгебраического уравнения (11). Точное решение получится при χ_n при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что определитель $D_{n+1}(\chi, \varepsilon)$ вычисляется следующей рекуррентной формулой:

$$D_1 = a_n, \quad D_2 = a_1 a_n - \varepsilon^2 / 2b_1 b_n, \quad (12)$$

$$D_{n+1} = a_n D_n - \varepsilon^2 / 4b_n b_{n-1} D_{n-1}, \quad n \geq 2$$

Пусть

$$(1 - \sigma^2) / R^2 < \lambda < 0.5(1 - \sigma) \rho^2 \quad (13)$$

Тогда легко проверить, что при условии (13) уравнение $a_{n+1} = 0$ имеет два отрицательных $\chi_i^{(n+1)}$ ($i = 1, 2$) корни.

Имеет место следующее утверждение.

При достаточно малом ε и при фиксированном m уравнение (10) имеет два формальных отрицательных решения вида

$$\chi_i = -((\chi_i^{(m)})^2 + \alpha_i^{(m)} \varepsilon^2 + \dots)^{1/2}, \quad i = 1, 2 \quad (14)$$

Действительно, отрицательные корни уравнения (11) при $n = m + 1$ в зоне (13) ищем в виде

$$\chi_m = -((\chi_i^{(m)})^2 + \alpha_i^{(m)} \varepsilon^2 + \dots)^{1/2}, \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

Так как

$$D_{m+2}(\chi, \varepsilon) = a_{m+1} a_m D_m - 0.25 \varepsilon^2 a_{m+1} b_m b_{m-1} D_{m-1} - 0.25 \varepsilon^4 b_{m-1} b_m D_m \quad (16)$$

то, подставляя (15) в уравнение $D_{m+2}(\chi, \varepsilon) = 0$ и приравнивая коэффициенты при ε^2 нулю, получим

$$a_{m+1}(\chi_i^{(m)}) a'_m(\chi_i^{(m)}) D_m(\chi_i^{(m)}, 0) \alpha_i^{(m)} - 0.25 b_m(\chi_i^{(m)}) \times \\ \times (a_{m+1}(\chi_i^{(m)}) b_{m-1}(\chi_i^{(m)}) D_{m-1}(\chi_i^{(m)}, 0) - b_{m+1}(\chi_i^{(m)}) D_m(\chi_i^{(m)}, 0)) = 0 \quad (17)$$

Учитывая, что $D_i(\chi_i^{(m)}, 0) = a_{n-1}(\chi_i^{(m)}) D_{n-1}(\chi_i^{(m)}, 0)$, $n \geq 2$, получим

$$\alpha_i^{(m)} = \frac{b_m(\chi_i^{(m)}) [a_{m+1}(\chi_i^{(m)}) b_{m-1}(\chi_i^{(m)}) + b_{m+1}(\chi_i^{(m)}) a_{m-1}(\chi_i^{(m)})]}{4 a_{m+1}(\chi_i^{(m)}) a_{m-1}(\chi_i^{(m)}) a'_m(\chi_i^{(m)})} \quad (18)$$

$i = 1, 2$

Докажем, что если использовать определители более высокого порядка, чем $m + 2$ и искать нули этого определителя в виде (15), то коэффициенты при ε^2 не изменяются.

Действительно, так как $D_{m+2}(\chi_m, \varepsilon) = O(\varepsilon^4)$, $D_{m+1}(\chi_m, \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$ и

$$D_{m+3}(\chi_m, \varepsilon) = a_{m+2} D_{m+2}(\chi_m, \varepsilon) - 0.25 \varepsilon^2 b_{m+2} b_{m+1} D_{m+1}(\chi_m, \varepsilon), \quad \text{то}$$

$D_{m+1}(\chi_m, \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$. Методом математической индукции можно доказать, что $D_n(\chi_m, \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$ при $n \geq m+2$. Таким образом, при $n \rightarrow \infty$ $\alpha^{(i)}$ ($i=1, 2$) не изменяются, т.е. справедливо представление (14)

Пусть $(w_n^{(1)}, w_n^{(2)}, \dots, w_n^{(2)}, \dots)$ ($i=1, 2$) являются нетривиальными решениями системы (8) при $\chi = \chi_1$ и $\chi = \chi_2$ соответственно.

Решение задачи (2), (5) ищем в виде

$$u_i = \sum_{i=1}^2 \exp \chi_i \alpha \sum_{m=0}^{\infty} u_m^{(i)} \cos p_m \beta, \quad u_i = \sum_{i=1}^2 \exp \chi_i \alpha \sum_{m=0}^{\infty} v_m^{(i)} \sin p_m \beta \quad (19)$$

$$w = \sum_{i=1}^2 \exp \chi_i \alpha \left(0.5 w_0^{(i)} + \sum_{m=1}^{\infty} w_m^{(i)} \cos p_m \beta \right)$$

Подставляя (19) в (5), приходим к системе уравнений

$$\sum_{i=1}^2 \chi_i u_0^{(i)} - 0.5 \sigma w_0^{(1)} = 0, \quad \sum_{i=1}^2 \chi_i v_0^{(i)} - \rho_m w_0^{(1)} = 0 \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^2 \chi_i u_m^{(i)} + \sigma p_m v_m^{(i)} - \sigma w_m^{(1)} = 0$$

Используя формулы (7), преобразуем (20) к виду

$$\begin{aligned} B_0^{(1)} w_0^{(1)} + B_0^{(2)} w_0^{(2)} &= 0, \\ A_m^{(1)} w_m^{(1)} + A_m^{(2)} w_m^{(2)} &= 0, \quad m = 1, 2, \dots \\ B_m^{(1)} w_m^{(1)} + B_m^{(2)} w_m^{(2)} &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} A_m^{(i)} &= -\frac{2(1+\sigma)p_m \chi_i (\chi_i^2 + \lambda / (1+\sigma))}{(\chi_i^2 - p_m^2)^2 + \lambda(\chi_i^2 - p_m^2)(3-\sigma)/(1-\sigma) + 2\lambda^2 / (1-\sigma)} \\ B_m^{(1)} &= \frac{\chi_1^2 (\sigma\lambda - (1-\sigma^2)p_m^2) - \lambda\sigma p_m^2 + 2\sigma\lambda^2 / (1-\sigma)}{(\chi_1^2 - p_m^2)^2 + \lambda(\chi_1^2 - p_m^2)(3-\sigma)/(1-\sigma) + 2\lambda^2 / (1-\sigma)} \\ B_m^{(2)} &= \frac{0.5\chi_2 (\sigma\chi_1^2 + 2\lambda\sigma / (1-\sigma))}{\chi_1^2 + \lambda\chi_1^2 (3-\sigma)/(1-\sigma) + 2\lambda^2 / (1-\sigma)} - \sigma, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (22)$$

Из решений системы (21) возьмем то, в котором $w_m^{(1)}$ и $w_m^{(2)}$ не равны нулю, а остальные равны нулю. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} A_m^{(1)} B_m^{(2)} - A_m^{(2)} B_m^{(1)} &= (\sigma\lambda - (1-\sigma^2)p_m^2)\chi_1^2 \chi_2^2 + \\ &+ \lambda\sigma(2\lambda / (1-\sigma) - p_m^2)(\chi_1^2 + \chi_2^2) + \lambda(\lambda\sigma / (1-\sigma) + p_m^2) \times \\ &\times \chi_1 \chi_2 + \lambda^2 \sigma(2\lambda / (1-\sigma) - p_m^2) / (1-\sigma) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (23) преобразуется к уравнению

$$\lambda(\lambda - (1 - \sigma^2) / R^2)(\lambda - 1 / R^2 - m^2 / R^2) =$$

$$= (\lambda - (1 - \sigma^2) / R^2 - (1 - \sigma^2) m^2 / R^2)^2 (2\lambda / (1 - \sigma) - m^2 / R^2) \quad (24)$$

которое совпадает с дисперсионным уравнением (11) из [1], где безразмерная характеристика фазовой скорости η и параметр λ связаны соотношением

$$\eta^2 = 2\lambda R^2 / ((1 - \sigma)m^2) \quad (25)$$

Аналитика показывает, что уравнение (24) в зоне (13) имеет только один корень.

В табл. 1 приведены значения η в зависимости от m и ε при $\sigma = 0,33$.

В качестве направляющей кривой служит эллипс Паскаля

$$\rho = R(1 + \varepsilon \cos \varphi)$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad R > 0$$

Характеристика фазовой скорости η и параметр λ связаны соотношением

$$\eta^2 = 2\lambda / ((1 - \sigma)\rho_m^2)$$

В численных расчетах вместо (14) используются приближенные формулы

$$\chi_i = -((\chi_i^{(m)})^2 + \alpha_i^{(m)} \varepsilon^2)^{1/2}, \quad i = 1, 2$$

Таблица 1

| m | η | | |
|-----|-------------------|--------------------------|---------------------|
| | $\varepsilon = 0$ | $\varepsilon = 0,405858$ | $\varepsilon = 0,5$ |
| 2 | 0,9769 | 0,9786 | 0,9804 |
| 3 | 0,9470 | 0,9442 | 0,9408 |
| 4 | 0,9342 | 0,9367 | 0,9382 |
| 5 | 0,9296 | 0,9301 | 0,9307 |
| 6 | 0,9264 | 0,9267 | 0,9271 |
| 7 | 0,9245 | 0,9247 | 0,9249 |
| 8 | 0,9232 | 0,9234 | 0,9236 |
| 9 | 0,9224 | 0,9225 | 0,9226 |
| 10 | 0,9218 | 0,9218 | 0,9220 |
| 11 | 0,9213 | 0,9213 | 0,9215 |
| 12 | 0,9209 | 0,9210 | 0,9211 |

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Р.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в

- полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке. Волновые задачи механики, Нижний Новгород, 1992. 153 с.
2. Гольдштейн А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания толстых упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
 3. Гулгазарян Г.Р. Приближенные частоты собственных колебаний некруговой цилиндрической оболочки. Изв. НАН Армении. Механика, 1996, т. 49, № 1, с. 61-70.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
13.06.1995

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ
И СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ
ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Акопян А.С.

Ա. Ա. Հակոբյան

Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի կայունության և ազատ տատանումների
թվային լուծման մասին

Առաջարկվում է թվային լուծման մի մեթոդ դիֆֆերենցիալ օպերատորների սեփական արժեքների հնդիրների համար, որոնց բերվում են անիզոտրոպ սալերի տեսության դիտարկվող խնդիրները։ Մեթոդը հիմնված է լուծման եռանկյունաչափական բազմանդամներով մոտարկման և կոլլոկացիաների մեթոդի վրա։ Բերվում են հաշվումների ալգորիթի նկարագրությունը, ինչպես նաև մեթոդի զուգամիտությունը ցուցադրող թվային օրինակները։

A. S. Hakobian

On the numerical solution of stability and free vibration problems of anisotropic plates
of variable thickness

Предлагается метод численного решения задачи на собственные значения дифференциальных операторов, к которым приводят рассматриваемые задачи теории анизотропных пластин. Метод основан на аппроксимации решения тригонометрическими полиномами, и методе коллокации. Приводится описание алгоритма вычислений, а также численные примеры, иллюстрирующие сходимость метода.

Теория анизотропных пластин [1, 2] показывает, что задачи устойчивости и свободных колебаний в большинстве случаев сводятся к задаче о собственных числах обыкновенных дифференциальных уравнений [5, 6]. В частном случае анизотропных пластин переменной толщины такие уравнения получены в работах [3, 4], где учитываются также поперечные сдвиги.

В настоящей работе предлагается метод численного решения полученных дифференциальных уравнений на собственные значения, базирующийся на представлении решения в виде тригонометрического полинома и методе коллокаций. В конечном счете задача сводится к задаче вычисления собственных значений линейной алгебраической системы, которая решается известными численными методами.

В качестве иллюстрации показана устойчивость работы метода на

примере круговой пластины с линейно-меняющейся толщиной.

1. Задачи устойчивости и свободных колебаний анизотропных пластин [2] математически формулируются как задачи собственных значений дифференциальных операторов в частных производных. В простых случаях, когда рассматривается устойчивость или свободные колебания плоской или круговой пластины, задача может быть сведена к обыкновенному дифференциальному уравнению [2, 3, 4, 8, 9, 10]. При дальнейшем упрощении постановки задачи, удастся аналитически получить характеристические трансцендентные уравнения [4], корни которых являются критическими условиями или собственными частотами колебаний рассматриваемой пластины.

В общем случае задача обычно сводится к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами, являющимися функциями критической нагрузки или собственной частоты, то есть речь идет об определении собственных чисел λ дифференциального уравнения N -го порядка

$$\sum_{i=1}^{N-1} [f_i(x) - \lambda g_i(x)] y^{(i-1)}(x) = 0, \quad \lambda \in [LB, UB]. \quad (1)$$

Здесь LB и UB — соответственно нижний и верхний пределы интегрирования, обычно связанные с конечными размерностями пластины. y — обычно прогиб пластины или некоторый дифференциальный оператор от прогибов, f_i и g_i — достаточно гладкие функции, содержащие физические и геометрические параметры пластины. В уравнении (1) предполагается, что коэффициенты линейно зависят от параметра λ .

Те или иные условия закрепления пластины, в общем случае также могут быть выражены в форме, аналогичной уравнению (1), но примененные в определенных точках интервала интегрирования. Такие "точечные" условия будут иметь вид

$$\sum_{j=1}^{N-1} [\varphi_{kj} - \lambda \psi_{kj}] y^{(j-1)}(x_{0k}) = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Здесь число точечных условий N должно быть равно порядку дифференциального уравнения (1), согласно общей теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений [5, 6]. x_{0k} — точки, где заданы условия (2), обычно концы интервала интегрирования, φ_{kj}, ψ_{kj} — постоянные коэффициенты, зависящие лишь от физических и геометрических свойств пластины.

Метод коллокации предполагает точное выполнение уравнения (1)

лишь в конечном числе точек, так называемых точек коллокации. Таким образом, получится дискретная аппроксимация рассматриваемого уравнения на отрезке, которая тем точнее, чем больше число точек коллокации. В общей теории линейных операторов доказана сходимость метода коллокаций при довольно общих предположениях о свойствах оператора. Скорость же сходимости в конкретных случаях может быть исследована с помощью численных экспериментов, что и будет сделано ниже на примерах кольцевых пластин.

Пусть точки коллокации x_k распределены равномерно на интервале интегрирования $[LB, UB]$, включая концы

$$x_k = (k-1) \frac{UB-LB}{NP+1} + LB, \quad k = 1, \dots, NP, \quad (3)$$

где NP — число точек коллокации. Теперь уравнение (1) сводится к системе линейных уравнений относительно значений функции y и ее производных до N -го порядка включительно в точках коллокации

$$\sum_{j=1}^{N+1} [f_j(x_k) + \lambda g_j(x_k)] y^{(j-1)}(x_k) = 0, \quad k = 1, \dots, NP. \quad (4)$$

Объединяя уравнения (4) с точечными условиями (2), получим систему

$$\sum_{j=1}^{N+1} [f_j(t_k) + \lambda g_j(t_k)] y^{(j-1)}(t_k) = 0, \quad k = 1, \dots, NP+N, \quad (5)$$

где точки t_k соответствуют точкам коллокации x_k при $k = 1, \dots, NP$, а остальные N точек t_{k+NP} при $k = 1, \dots, N$ соответствуют точкам x_m , где заданы условия (2). Аналогично, коэффициенты $f_j(t_k)$ и $g_j(t_k)$ есть значения функции f_j и g_j в точках коллокации x_k при $k = 1, \dots, NP$, а при значениях $k = NP+1, \dots, NP+N$ они равны коэффициентам $\varphi_{k-NP,j}$ и $\psi_{k-NP,j}$ точечных условий (2) соответственно.

Имея тот или иной агрегат интерполяции неизвестной функции y в уравнении (1) и условиях (2), можно значительно уменьшить число неизвестных в полученных дискретных уравнениях (5). Подходящим для задач устойчивости и свободных колебаний пластин переменной толщины, также как и для многих других задач того же класса, являются тригонометрические полиномы, в силу гладкости функции y

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{q=1}^{NF} (a_q \cos qax + b_q \sin qax), \quad x \in [LB, UB] \quad (6)$$

Здесь a_0, a_q, b_q — неизвестные коэффициенты, NF — степень тригоно-

метрического полинома (6), ω — базовая частота, обычно $\pi / (UB - LB)$. Можно заметить, что область изменения аргумента x не совпадает ни с полупериодом, ни с полным периодом тригонометрических функций полинома (6), если не имеет место $LB = 0$. Теория тригонометрической полиномиальной интерполяции утверждает, что даже и в этом случае при возрастании степени полинома NF точность аппроксимации увеличивается. Такое асимметрическое представление полинома (6) выбрано специально с тем, чтобы соответствовать реальной физической задаче. Например, в рассматриваемых в следующих пунктах задачах для кольцевой пластины, интервал интегрирования, скажем $[a, b]$, сдвинут от нуля, однако реальные формы потери устойчивости, или формы свободных колебаний определяются на интервале $[-b, b]$.

Поэтому в разложении (6) область изменения аргумента сдвинута и совпадает с областью интегрирования уравнения (1), хотя в большинстве случаев, при $LB \neq 0$, форма потери устойчивости, или свободных колебаний определена на $[-UB, UB]$ или $[0, UB]$. В тех же случаях, когда период тригонометрических функций в разложении (6) должен совпадать с областью интегрирования уравнения (1), следует переменной установить $LB = 0$.

Представление решения y в виде тригонометрического полинома (6) позволяет окончательно свести задачу определения собственных чисел λ дифференциального уравнения (1) при граничных условиях (2) к задаче на собственные значения системы линейных алгебраических уравнений

$$(A - \lambda B)X = 0 \quad (7)$$

относительно вектора неизвестных X , компоненты которого определяются как

$$\begin{aligned} X_{2q+1} &= a_q, \quad q = 0, 1, \dots, NF \\ X_{2q} &= b_q, \quad q = 1, 2, \dots, NF. \end{aligned} \quad (8)$$

Матрицы A и B имеют $NP + N$ строк и $2 \cdot NF + 1$ столбцов и заполнены, которые определяются следующими соотношениями при

$$k = 1, \dots, NP + N, \quad q = 1, \dots, NF$$

$$A_{k1} = f_1(t_k) / 2, \quad B_{k1} = g_1(t_k) / 2$$

$$A_{k, 2q+1} = \sum_{j=1}^{N+1} f_j(t_k) \operatorname{Re}[z_{qj}(t_k)], \quad B_{k, 2q+1} = \sum_{j=1}^{N+1} g_j(t_k) \operatorname{Re}[z_{qj}(t_k)],$$

$$A_{k,2q} = \sum_{j=1}^{N+1} f_j(t_k) \operatorname{Im}[z_{qj}(t_k)], \quad B_{k,2q} = \sum_{j=1}^{N+1} g_j(t_k) \operatorname{Im}[z_{qj}(t_k)]. \quad (9)$$

где $\operatorname{Re}[\cdot]$ и $\operatorname{Im}[\cdot]$ означают соответственно операции взятия действительной и мнимой частей комплексного числа, $z_{qj}(t_k)$ определяется как j -ая производная q -ой комплексной гармоники $e^{iq\omega t}$ с базовой частотой ω , взятая в точке t_k , то есть

$$z_{qj}(t_k) = (iq\omega)^{j-1} e^{iq\omega t_k}. \quad (10)$$

Нетрудно заметить, что степень полинома NF (6) должна быть выбрана так, чтобы матрицы в уравнении (6) получились квадратными $NF = (NP + N - 1) / 2$.

Только при этом значении NF , согласно общей теории задач на собственные значения дифференциальных операторов [6], собственные значения системы линейных алгебраических уравнений [7] при неограниченном увеличении числа точек коллокации NP стремятся к собственным числам λ уравнения (1) и условий (2). Вот почему в уравнении (7) сохранено обозначение λ для параметра, который лишь в пределе совпадает с соответствующим параметром в (1) и (2). Решая систему (7) на собственные значения λ , находим лишь аппроксимацию к искомым собственным значениям задачи (1) (2), то есть, в конечном счете, аппроксимацию к критическим усилиям или собственным частотам анизотропных пластин переменной толщины.

2. Алгоритм численного решения рассматриваемого класса задач устойчивости и свободных колебаний анизотропных пластин переменной толщины, реализующий изложенный выше метод, состоит в построении матриц A и B эквивалентной линейной алгебраической системы (7) по формулам (9) и (10), и вычислении собственных чисел λ системы (7) одним из известных численных методов.

Для решения задачи (7) на собственные значения целесообразно применить QR алгоритм или любую его модификацию, так как этот алгоритм хорошо работает на системах средних размеров. QR алгоритм генерирует последовательность матриц, ортогонально подобной исходной, и при итерациях матрицы сходятся к правой треугольной или квазиреугольной матрице, причем скорость сходимости поддиагональных элементов к нулю управляется отношением модулей различных собственных значений. Скорость сходимости повышается использованием так называемых сдвигов. Для эрмитовых матриц

скорость сходимости удается сделать кубической с соответствующей быстрой стабилизацией диагонального элемента.

Следует отметить, что система (7), являясь приближенным представлением системы (1)-(2), может содержать собственные числа, весьма далекие от собственных чисел исходной системы, так называемые "шумовые" решения. Например, в большинстве случаев физическая постановка задачи, а также свойства дифференциальных операторов в (1) и (2) приводят к вещественным собственным числам λ , однако система (7) может содержать комплексно сопряженные пары собственных чисел. Это обычно имеет место для больших по модулю собственных чисел. Первые же несколько собственных чисел обычно являются хорошими аппроксимациями к искомым. И, поскольку размерность системы (7) может быть задана произвольно, в зависимости от параметра NP — количества точек коллокации, то и число надежных чисел, не содержащих мнимых частей, например, в случае, когда все собственные числа ожидаются вещественными, может быть задано априори. Практически, число точек коллокации NP необходимо бывает задавать достаточно большим, тогда как число интересующих собственных значений ограничивается первыми двумя-тремя, поэтому всегда можно быть уверенным в том, что система (7) хорошо аппроксимирует исходную систему в интересующей области собственных значений.

3. Предложенный метод и реализующие его программные компоненты использованы автором для решения ряда конкретных задач устойчивости и свободных колебаний ортотропных пластинок [8, 9, 10]. Ниже приводятся численные результаты решения этих задач при типичных значениях параметров, призванные проиллюстрировать сходимость метода.

Рассмотрим вначале осесимметрическую задачу устойчивости ортотропной кольцевой пластинки с линейно меняющейся толщиной. В работе [9] предварительно решается плоская задача для ортотропной кольцевой пластинки с линейно меняющейся толщиной при действии радиально растягивающих сил, приложенных на внешнем контуре. Затем, используя найденные закономерности распределения эталонных усилий, решается осесимметрическая задача устойчивости пластинки в рамках уточненной теории [3], учитывающей влияние деформации поперечных сдвигов.

Решение плоской задачи сводится к интегрированию обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, при заданных единичных радиальных усилиях на внешнем контуре и свободном от нагрузки внутреннем контуре.

Применяется метод коллокации с разложением решения в ряд по полиномам Чебышева, реализованный в модуле *DO2JAF* пакета *NAG* [7].

Полученное решение плоской задачи используется затем в осесимметрической задаче устойчивости, которая сводится к задаче на собственные значения линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами в форме (1), где роль параметра λ здесь играет критическая безразмерная нагрузка

$$\bar{p} = \frac{p}{\sigma_0 h_0} \quad (12)$$

где p - интенсивность равномерной растягивающей радиальной нагрузки на внешнем контуре пластинки, σ_0 - характерное напряжение материала, h_0 - толщина пластинки на внутреннем контуре.

Описанный в предыдущих пунктах метод был применен к решению полученной задачи на собственные значения. В работе [9] приводятся графики зависимости безразмерных критических усилий (12) от физико-механических и геометрических параметров пластинки при двух различных типах закрепления пластинки по внешнему контуру: широкое опирание и заделка. Там же приводятся данные, иллюстрирующие динамику сходимости численного решения при возрастании степени дискретизации, определяемой числом NP точек коллокации (3).

Ниже, в табл. 1, приводятся первые три значения критической безразмерной нагрузки (12) при различных значениях параметров пластинки, и при возрастающих значениях числа точек коллокации NP .

Таблица 1

| NP | \bar{p}_1 | \bar{p}_2 | \bar{p}_3 |
|------|-------------|-------------|-------------|
| 8 | 3.289276 | 18.82781 | 25.20926 |
| 10 | 4.434246 | 19.28009 | 25.32463 |
| 12 | 4.754383 | 19.42811 | 25.36006 |
| 14 | 4.855109 | 19.47864 | 25.37174 |
| 16 | 4.888516 | 19.49626 | 25.37561 |
| 18 | 4.899867 | 19.50246 | 25.37692 |
| 20 | 4.903768 | 19.50465 | 25.37736 |
| 22 | 4.905113 | 19.50542 | 25.37751 |
| 24 | 4.905578 | 19.50569 | 25.37757 |
| 26 | 4.905739 | 19.50578 | 25.37758 |
| 28 | 4.905793 | 19.50581 | 25.37759 |
| 30 | 4.905813 | 19.50583 | 25.37759 |

Критические нагрузки кольцевой пластинки: внешние при различной дискретизации

Приведенные данные показывают быструю сходимость метода Уж

при 24 точках коллокации вычисленные значения имеют четыре-пять значащих цифр. Дальнейшее увеличение числа точек коллокации приводит лишь к слабой осцилляции вокруг точного значения, из-за неизбежного накопления ошибок в процессе вычислений. Заметим, что для инженерных расчетов, при общепринятой точности в две-три значащие цифры, достаточно будет выбрать $NP = 16$.

4. Рассмотрим теперь задачу свободных осесимметрических колебаний ортотропной кольцевой пластинки с линейно меняющейся толщиной. В работе [10] получены уравнения этой задачи при пренебрежении инерцией вращения и тангенциальными перемещениями срединной плоскости, и с учетом поперечных сдвигов. Уравнения являются дифференциальными пятого порядка относительно функции

$$y = s \frac{df}{dp} - \chi \varphi \quad (13)$$

при обозначениях

$$s = \frac{h_0}{b}, \quad \chi = \alpha, B,$$

где h_0 - толщина пластинки на внутреннем контуре, b - внешний радиус, f - форма свободных колебаний пластинки при прогибах $\omega = h_0 f \cos \omega_n t$, α, B - параметры материала, φ - амплитуда гармонических колебаний функции $\varphi_1 = B \varphi \cos \omega_n t$, описывающей распределение по толщине поперечного сдвига.

Вместе с граничными условиями на внешнем и внутреннем контурах пластины, определяемыми отсутствием усилий на внутреннем контуре и шарнирном или защемленном закреплении на внешнем контуре, задача свободных осесимметричных колебаний сводится к задаче на собственные значения полученного дифференциального уравнения относительно функции (13) в форме (1)-(2) при параметре λ в форме

$$\Omega_n^2 = \frac{h_0^2 \omega_n^2 d}{B_r} \quad (14)$$

где ω_n - круговая частота собственных колебаний пластинки, d - плотность ее материала.

Численный метод, описанный выше, был применен в работе [10] к полученной задаче собственных значений, и ряд численных значений был приведен при различных физических и геометрических параметрах пластинки для различных условий закрепления. В табл. 2 для типичных значений параметров пластинки при свободном внутреннем и шарнирно

оператором внешнего контуре, приводятся значения первых трех собственных чисел Ω_n , вычисленных с различной дискретизацией NP .

Приведенные данные показывают, как и в случае задачи устойчивости, хорошую сходимость метода. Уже при числе точек коллокации $NP = 23$ вычисленные собственные числа имеют две значащие цифры, что вполне достаточно для инженерных приложений.

5. Рассмотренные численные примеры подтверждают правильность выбранной тригонометрической полиномиальной аппроксимации решений

Таблица 2

| NP | Ω_1 | Ω_2 | Ω_3 |
|------|------------|------------|------------|
| 11 | 0.0610135 | 0.0821126 | 0.1696936 |
| 13 | 0.0550261 | 0.0941775 | 0.1684714 |
| 15 | 0.0533273 | 0.0977904 | 0.1678758 |
| 17 | 0.0167100 | 0.0525690 | 0.0992897 |
| 19 | 0.0180677 | 0.0521817 | 0.0999957 |
| 21 | 0.0186871 | 0.0519710 | 0.1003521 |
| 23 | 0.0190046 | 0.0518525 | 0.1003397 |
| 25 | 0.0191759 | 0.0517845 | 0.1006413 |
| 27 | 0.0192716 | 0.0517452 | 0.1006973 |
| 29 | 0.0193252 | 0.0517220 | 0.1007286 |
| 31 | 0.0193558 | 0.0517083 | 0.1007461 |
| 33 | 0.0193733 | 0.0517004 | 0.1007561 |
| 35 | 0.0193833 | 0.0516957 | 0.1007618 |
| 37 | 0.0193891 | 0.0516930 | 0.1007650 |

Собственные числа кольцевой пластины, вычисленные при различной дискретизации

задач устойчивости и свободных колебаний анизотропных пластин переменной толщины. Предложенный метод показал хорошую сходимость на широком спектре задач [8, 9, 10], где дифференциальные операторы зачастую при экстремальных значениях параметров имели быстро меняющиеся коэффициенты, оказывающие эффект, близкий к устранимым разрывам.

Таким образом, есть все предпосылки дальнейшего расширения класса решаемых задач теории анизотропных пластин, приводимых к уравнениям вида (1) при точечных условиях (2). Многие задачи устойчивости и свободных колебаний из теории анизотропных оболочек также могут быть при ряде упрощающих предположений приведены к

уравнениям и условиям требуемого вида и решены численно предложенным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластики. М.: Физматгиз, 1957. 463 с.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1967. - 266 с.
3. Киракосян Р. М. Об одной уточненной теории анизотропных пластин переменной толщины. Изв. АН Армении. Механика, 1991, т. 44 N 3, с. 26-33.
4. Акопян А. С., Киракосян Р. М. О нижних оценках критических сил сжатых полос линейно переменной толщины. Изв. НАН РА, Механика, 1995, т. 48, N 3, с. 69-74.
5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М.: Мир, 1970. 521 с.
6. Коллати Л. Задачи на собственные значения. С техническими приложениями, пер. с нем., М.: Мир, 1968. 504 с.
7. NAG Fortran Library Manual. Mark 8, 1980, NAG Central Office, Vandury Road, Oxford OX26NN, UK.
8. Акопян А. С., Киракосян Р. М. Об устойчивости ортотропных пластин переменной толщины с учетом поперечных сдвигов. - Изв. НАН Армении, Механика, 1995 г., т. 48, N 4, с. 3-8.
9. Акопян А. С., Киракосян Р. М. Осесимметричная задача устойчивости ортотропной кольцевой пластинки линейно-переменной толщины с учетом поперечного сдвига. - Изв. НАН Армении, Механика, 1996 г., т. 49 N 2, с. 52-61.

Институт механики НАН РА

Поступила в редакцию
17.07 1995

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА
ПРОНИКАНИЯ ТВЕРДОГО ИНДЕНТОРА В
АНИЗОТРОПНУЮ СРЕДУ ПО ГИПОТЕЗЕ
НОРМАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ

Багдоев А.Г., Ванцян А.А., Хачатрян Б.К.,
Хачатрян Л.А.

Ա. Գ. Բագդոև, Ա. Ա. Վանցյան, Բ. Կ. Խաչատրյան, Լ. Ա. Խաչատրյան
Անիզոտրոպ միջավայր պինդ մարմնի ներթափանցման դինամիկ խնդրի լուծումը
ըստ նորմալ կտրվածքների վարկածի

Թվային եղանակով լուծված է պինդ մարմնի անիզոտրոպ միջավայր ներթափանցման դինամիկ խնդիրը օգտագործելով նորմալ կտրվածքների վարկածը Ուսումնասիրված է լարումների վարքը ինչպես մարմնին մոտ պլաստիկ տիրույթում, այնպես էլ մարմնի վրա կախված միջավայրի անիզոտրոպ հատկությունից

A. G. Bagdoyev, A. A. Vantsyan, B. K. Khachatryan, L. A. Khachatryan

The penetration of rigid indenter into anisotropic medium on hypothesis of normal cross sections

На основе гипотезы нормальных сечении численно решена динамическая задача проникания твердого тела в анизотропную среду. Изучено поведение напряжений как в пластической области, так и вне ее в зависимости от свойств анизотропии среды.

Задачи проникания твердых инденторов в изотропную среду в предположении, что имеет место идеально-пластическое течение вблизи индентора, сопрягающееся с линейно упругим решением, и при допущении о применимости гипотезы плоских сечений, рассмотрены в [1-5].

Аналогичная по математической постановке задача о взрыве в среде с цилиндрической и сферической симметриями рассмотрена в [5-7]. При тех же предположениях задача проникания узкого индентора в анизотропную среду рассмотрена в работе [8]. Показано, что [9] при наличии трансверсальной изотропии, для которой предел текучести для плоскости изотропии вдвое больше осевого, имеет место резкое возрастание напряжений на инденторе. Этот результат проверен экспериментально [9].

В настоящей статье рассматривается задача проникания не слишком тонкого индентора в форме конуса, переходящего в цилиндр, в

анизотропную среду. Как и в [10, 11] сделано предположение, подтвержденное экспериментально в [1, 9], о том, что скорости частиц вблизи от индентора направлены по его нормали.

В цилиндрических координатах ось ox выбрана по направлению проникания индентора, ось or по радиусу, тогда, записав связь компонент тензора скоростей деформации и напряжений в пластической области, а также условие текучести Мизеса, для дивергентов напряжений можно найти [8]

$$\begin{aligned}\sigma'_{rr} &= -\frac{\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}(2F+G)+\dot{\varepsilon}_{xx}(2F+H)}{a\alpha} \\ \sigma'_{xx} &= -\frac{\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}(F-G)+\dot{\varepsilon}_{xx}(F+2H)}{a\alpha} \\ \sigma'_{\theta\theta} &= -\frac{\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}(2G+F)+\dot{\varepsilon}_{xx}(F-H)}{a\alpha}, \quad \alpha = 3(FH+FG+GH)\end{aligned}\quad (1)$$

Используя условие Мизеса и (1), для множителя a имеем

$$\begin{aligned}a^2 &= \frac{9H}{\alpha^2}[\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}(F+G)+\dot{\varepsilon}_{xx}F]^2 + \frac{G}{\alpha^2}[\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}(3F+2G)+\dot{\varepsilon}_{xx}(F+H)]^2 + \\ &+ \frac{9F}{\alpha^2}[\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}G+\dot{\varepsilon}_{xx}H]^2 + \frac{2}{M}\dot{\varepsilon}_{xx}^2\end{aligned}\quad (2)$$

Как и в [1-5], удовлетворяются уравнения движения в радиальном направлении, в то время, как для определения касательной индентору компонент скорости частиц, можно использовать уравнение движения в осевом направлении, причем для σ_{xx} с помощью соотношения $\sigma_{xx} = \sigma_{rr} + \sigma'_{xx} - \sigma'_{rr}$ и (1) можно записать

$$\sigma_{xx} = \sigma_{rr} + \frac{3F\frac{f-x}{r^2}\delta f' - 3H\frac{\delta\gamma'}{r}}{a\alpha}\quad (3)$$

С учетом равенства

$$\sigma'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta} = -\frac{3F(2\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} + \dot{\varepsilon}_{xx})}{a\alpha}\quad (4)$$

и условий $v_r = \gamma v_x$, $\gamma = \operatorname{tg}\beta$, где β — полуугол в вершине конуса уравнения радиального движения примет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial r} - \frac{3F(2\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} + \dot{\varepsilon}_{xx})}{a\alpha} + \frac{1}{aM}\frac{\partial\dot{\varepsilon}_{xx}}{\partial x} = \\ = \rho\delta\left[\frac{f'^2}{r} + \frac{f-x}{r}f'' + \gamma f'' - \frac{(f-x)^2}{r^3}\delta f'^2 - \frac{f-x}{r^2}\delta\gamma f'^2\right]\end{aligned}\quad (5)$$

где уравнение конической части индентора $r_i = \gamma(f - x)$, $f(t)$ есть глубина проникания, ρ - плотность среды.

Учитывая соотношения [8]

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha} = -\frac{\delta \gamma f'}{r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \left\{ \frac{f-x}{r^2} + \frac{\gamma}{r} \right\} \delta f', \quad \varepsilon_{r_i} = -\frac{\delta}{r^2} (r + f - x) f' \quad (6)$$

и интегрируя уравнение (5), можно получить

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & \left(3F\gamma - \frac{\alpha}{M} \right) \frac{1}{\sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{2a_1 r + a_2}{2\sqrt{a_1}} + \sqrt{a_1 r^2 + a_2 r + a_1} \right| - \\ & - 6F(f-x) \frac{1}{\sqrt{a_3}} \operatorname{Arth} \frac{2a_1 + a_2 r}{2\sqrt{a_1} \sqrt{a_1 r^2 + a_2 r + a_1}} + \frac{\rho \delta^2 f'^2 (f-x)^2}{2r^2} + \quad (7) \\ & + \frac{1}{r} \rho \delta^2 \gamma f'^2 (f-x) + \rho \delta [f'^2 + (f-x)f''] (nr + \rho \delta \gamma f' r + \frac{c(x,t)}{\cos^2 \beta}) \end{aligned}$$

где $c(x,t)$ определяется из условий равенства нормальных компонент перемещений и напряжений на поверхности $r = r_i \xi$, определяемая из условия Мизеса. В (7) введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} a_1 &= 9HG^2\gamma^2 + G(2F + 2G - H)^2\gamma^2 + 9F(G - H)^2\gamma^2 + \frac{2\alpha^2}{M} = a'_1 \\ a_2 &= 9HG(F + G)\gamma(f-x) + G(3F + 2G)(2F + 2G - H)\gamma(f-x) + \\ &+ 9FG(G - H)\gamma(f-x) + \frac{2\alpha^2}{M}(f-x) = a'_2 \xi, \quad \xi = (f-x) \end{aligned}$$

$$a_3 = \left[9H(F + G)^2 + G(3F + 2G)^2 + 9FG^2 + \frac{2\alpha^2}{M} \right] (f-x)^2 = a'_3 \xi^2$$

Распространяя гипотезу нормальных сечений также на упругую область, с учетом закона Гука для напряжений, в упругой области можно записать

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= a_{11} \left[\frac{f-y}{r} \gamma - \frac{(f-y)^2}{2r^2} \right] \delta + a_{12} \frac{(f-y)^2}{2r^2} \delta \\ \sigma_{\theta\theta} &= a_{11} \left[\frac{f-y}{r} \gamma - \frac{(f-y)^2}{2r^2} \right] \delta + a_{22} \frac{(f-y)^2}{2r^2} \delta \\ \sigma_{r_i} &= a_{11} \left[\frac{f-y}{r} \gamma - \frac{(f-y)^2}{2r^2} \right] \delta + a_{21} \frac{(f-y)^2}{2r^2} \delta \\ \sigma_{r_i} &= a_{55} \frac{f-y}{r} \delta \left(\gamma - \frac{f-y}{2r} \gamma - 1 \right) \quad (8) \end{aligned}$$

Используя непрерывность нормальных компонент напряжений при $r = r_k \xi_0$ и с учетом

$$\sigma_m = \sigma_n \sin^2(n\bar{r}) + \sigma_{11} \cos^2(n\bar{r}) + 2\sigma_{12} \cos(n\bar{r}) \sin(n\bar{r})$$

для определения постоянной интегрирования $c(x, t)$ можно получить соотношение

$$\begin{aligned} & \left[\frac{f-x + \gamma_i \xi_0}{r_k \xi_0} \gamma - \frac{(f-x + \gamma_i \xi_0)^2}{2r_k^2 \xi_0^2} \right] \delta(a_{11} \cos^2 \beta + a_{11} \sin^2 \beta) + \\ & + \frac{(f-x + \gamma_i \xi_0)^2}{2r_k^2 \xi_0^2} \delta(a_{21} \sin^2 \beta + a_{22} \cos^2 \beta) + \\ & + a_{35} \frac{f-x + \gamma_i \xi_0}{r_k \xi_0} \delta \left(\gamma - \frac{f-x + \gamma_i \xi_0}{2r_k \xi_0} \gamma - 1 \right) \sin^2 \beta = \\ & = \left(3F\gamma - \frac{\alpha}{M} \right) \frac{1}{\sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{2a_1 r_k \xi_0 + a_1}{2\sqrt{a_1}} + \sqrt{a_1 r_k^2 \xi_0^2 + a_2 r_k \xi_0 + a_1} \right| - \\ & - 6F(f-x) \frac{1}{\sqrt{a_1}} \operatorname{Arth} \frac{2a_1 + a_2 r_k \xi_0}{2\sqrt{a_1} \sqrt{a_1 r_k^2 \xi_0^2 + a_2 r_k \xi_0 + a_1}} + \frac{\rho \delta^2 f'^2 (f-x)^2}{2r_k^2 \xi_0^2} + \\ & + \frac{\rho \delta^2 \gamma f'^2 (f-x)}{r_k \xi_0} + \rho \delta [f'^2 + (f-x)f''] \ln r_k \xi_0 + \rho \delta \gamma f'' r_k \xi_0 + c(x, t) \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя значение $c(x, t)$ из (9) в (7) на индикаторе для σ_n с учетом того, что $r_k = \gamma(f-x)$, после группировки получается значение

$$\sigma_n = A_1 f'^2(t) + A_2 \xi f''(t) + A_3 \quad (10)$$

где введены следующие обозначения:

$$A_1 = \rho \delta \left[\frac{\delta(\xi^2 - 1)}{2\xi_0^2 \gamma^2} + \frac{\delta(\xi_0 - 1)}{\xi_0} - \ln \xi_0 \right], \quad A_2 = -\rho \delta [\ln \xi_0 + \gamma^2(\xi_0 - 1)],$$

$$\begin{aligned} A_3 = & \left(3F\gamma - \frac{\alpha}{M} \right) \frac{1}{\sqrt{a_1}} \ln \left| \frac{2a_1' \gamma + a_1' + 2\sqrt{a_1'} \sqrt{a_1' \gamma^2 + a_2' \gamma + a_1'}}{2a_1' \gamma \xi_0 + a_1' + 2\sqrt{a_1'} \sqrt{a_1' \gamma^2 \xi_0^2 + a_2' \gamma \xi_0 + a_1'}} \right| - \\ & - \frac{6F}{\sqrt{a_1}} \left[\operatorname{Arth} \frac{2a_1' + a_2' \gamma}{2\sqrt{a_1'} \sqrt{a_1' \gamma^2 + a_2' \gamma + a_1'}} - \operatorname{Arth} \frac{2a_1' + a_2' \xi_0 \gamma}{2\sqrt{a_1'} \sqrt{a_1' \xi_0^2 \gamma^2 + a_2' \xi_0 \gamma + a_1'}} \right] + \\ & + \left[\frac{1}{\xi_0} + \gamma^2 - \frac{(1 + \gamma^2 \xi_0)^2}{2\xi_0^2 \gamma^2} \right] \delta(a_{11} \cos^2 \beta + a_{11} \sin^2 \beta) + \frac{\delta(1 + \gamma^2 \xi_0)}{2\xi_0^2 \gamma^2} \times \\ & \times (a_{21} \sin^2 \beta + a_{22} \cos^2 \beta) + a_{35} \frac{1 + \gamma^2 \xi_0}{\xi_0 \gamma} \delta \left(\gamma - \frac{1 + \gamma^2 \xi_0}{2\xi_0} - 1 \right) \sin^2 \beta \end{aligned}$$

Для σ_{rr} в пластической области можно получить выражение

$$\sigma_{rr} = -\frac{\alpha\delta}{M} \frac{(r+f-x)f'}{\sqrt{a_1 r^2 + a_2 r + a_3}} \quad (11)$$

Подставляя упругое решение (8) при $r = r_k \xi_0$ в условие текучести Мизеса для определения ξ_0 , имеет место формула

$$4k^2 \delta^2 \left\{ H[(\gamma - k)(a_{11} - a_{12}) + k(a_{12} - a_{22})]^2 + G[(\gamma - k)(a_{11} - a_{13}) + k(a_{12} - a_{21})]^2 + F[(\gamma - k)(a_{13} - a_{12}) + k(a_{23} - a_{22})]^2 + Ma_{33}^2(1-k)^2 \right\} = 1 \quad (12)$$

где

$$k = \frac{1}{2\gamma\xi_0} + \frac{\gamma}{2}$$

Для определения максимальной глубины проникания необходимо вычислить силу сопротивления P , где

$$P = 2\pi \int_0^{\zeta} r_k \left(-\frac{\partial r_k}{\partial x} + k_1 \right) \sigma_{nn} \cos \beta dx \quad \text{при } f < \zeta \quad (13)$$

k_1 — коэффициент трения между средой и индентором. Для σ_{nn} с учетом формулы

$$\sigma_{nn} = \sigma_{rr} \sin^2(n\bar{r}) + \sigma_{\theta\theta} \cos^2(n\bar{r}) + 2\sigma_{r\theta} \cos(n\bar{r}) \sin(n\bar{r})$$

можно записать при $r = r_k = \gamma\xi$

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \sigma_{rr} \sin^2 \beta + \left[\sigma_{rr} + \frac{3F(f-x)}{a\alpha r^2} \delta f' - \frac{3H\delta\gamma'}{a\alpha r} \right] (1 - \sin^2 \beta) + \\ &+ \sigma_{r\theta} \sin 2\beta = \sigma_{rr} + \left[\frac{3F(f-x)\delta}{a\alpha r^2} - \frac{3H\delta\gamma'}{a\alpha r} \right] f' \cos^2 \beta - \\ &- \frac{\alpha\delta}{M} \frac{\gamma+1}{\sqrt{a_1'\gamma^2 + a_2'\gamma + a_3'}} f' \sin 2\beta \end{aligned}$$

или в новых обозначениях

$$\sigma_{nn} = A_1 f'^2(t) + A_2 \xi f''(t) + A_3 + B_1 - B_2 f'(t) \quad (14)$$

$$\text{где } B_1 = \frac{3\delta(F - \gamma^2 H)}{a\alpha\gamma^2} \cos^2 \beta, \quad \bar{a} = a \frac{\xi}{f'}, \quad B_2 = \frac{\alpha\delta}{M} \frac{(\gamma+1) \sin 2\beta}{\sqrt{a_1'\gamma^2 + a_2'\gamma + a_3'}}$$

С учетом (13) и (14) для силы сопротивления можно записать для $f < \zeta$ (ζ — высота конусной части индентора)

$$P = -2\pi\gamma(\gamma + k_1) \int_0^{\zeta} \xi (A_1 f'^2 + A_2 \xi f'' - B_2 f' + B_1 + A_3) \cos \beta d\xi \quad (15)$$

после интегрирования и обозначения

$$2\pi\gamma(\gamma + k_1) \cos\beta / m = \chi$$

уравнение движения $mf'' = -P$ (где m - масса индентора)

$$f'' \left(1 - \chi A_2 \frac{f^3}{3} \right) = \chi A_1 \frac{f^2}{2} f'^2 - \chi B_2 \frac{f^2}{2} f' + \chi B_1 \frac{f^2}{2} + \chi A_3 \frac{f^2}{2} \quad (16)$$

вводя обозначения $f' = p(f)$, $f'' = p'p$ (16) примет вид

$$p'p \left(1 - \chi A_2 \frac{f^3}{3} \right) = \chi \frac{f^2}{2} (A_1 p^2 - B_2 p + B_1 + A_3) \quad (17)$$

Численно решая (17), при $f=0$ $p=v_0$, можно определить $p=v_1$

скорость индентора в момент $f=\zeta$ и можно вычислить $\frac{dp}{df} = \frac{f''}{p}$ (для

любых f).

При дальнейшем проникании, то есть для $f > \zeta$, интеграл (15) после интегрирования от 0 до ζ примет вид

$$P = -2\pi\gamma(\gamma + k_1) \left(A_1 f \frac{\zeta^2}{2} + A_2 \frac{\zeta^3}{3} f'' - B_2 \frac{\zeta^2}{2} f + B_1 \frac{\zeta^2}{2} + A_3 \frac{\zeta^2}{2} \right)$$

после чего уравнение движения примет вид

$$p'p \left(1 - \chi A_2 \frac{\zeta^3}{3} \right) = \frac{\zeta^2}{2} \chi (A_1 p^2 - B_2 p + B_1 + A_3)$$

откуда

$$\begin{aligned} f - \zeta &= \frac{1 - \chi A_2 \frac{\zeta^3}{3}}{\frac{\zeta^2}{2} \chi} \int_{\zeta}^f \frac{p dp}{A_1 p^2 - B_2 p + B_1 + A_3} = \\ &= \frac{2(3 - \chi A_2 \zeta^3)}{3\zeta^2 \chi} \left\{ \frac{1}{2A_1} \ln(A_1 p^2 - B_2 p + B_1 + A_3) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_2}{A_1 \sqrt{4A_1(B_1 + A_3) - B_2^2}} \operatorname{arctg} \frac{2A_1 p - B_2}{\sqrt{4A_1(B_1 + A_3) - B_2^2}} \right\} \quad (18) \end{aligned}$$

или

$$f - \zeta = \frac{2(3 - \chi A_2 \zeta^3)}{3\zeta^2 \chi} \left[\frac{1}{2A_1} \ln \frac{A_1 f'^2 - B_2 f' + B_1 + A_3}{A_1 v_1^2 - B_2 v_1 + B_1 + A_3} + \right.$$

$$+ \frac{B_2}{A_1} \frac{1}{\sqrt{4A_1(B_1 + A_1) - B_2^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2A_1 f' - B_2}{\sqrt{4A_1(B_1 + A_1) - B_2^2}} - \right. \\ \left. - \operatorname{arctg} \frac{2A_1 v_1 - B_2}{\sqrt{4A_1(B_1 + A_1) - B_2^2}} \right) \quad (19)$$

В (19) $f = f_{\max}$ при $f' = 0$

Вычислены значения f_{\max} , $\sigma_{rr}(r, x, f)$, $\sigma_{xx}(r, x, f)$, $\sigma_{rz}(r, x, f)$ при заданных значениях постоянных

$v_0 = 800 M / \text{сек}$; $m = 10^{-3} \text{ кг}$; $\tau_{rr} = \tau_{\theta\theta} = 3 \cdot 10^8 \text{ Па}$;

$r_0 = 4 \cdot 10^{-1} M$; $\tau_{rz} = (0,55; 0,6; 0,7; 0,99)\tau_{rr}$,

$\rho = 2700 \text{ кг} / M^3$; $k_1 = 0,15$; $\beta = 0,2; 0,3; 0,4$;

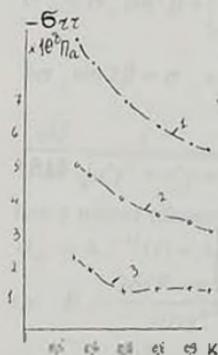
$a_{11} = a_{22} = 7^{-1} \cdot 10^{-10}$; $a_{12} = -25^{-1} \cdot 10^{-10}$; $a_{33} = a_{11} = -7^{-1} \cdot 10^{-11}$;

$a_{31} = 4,5^{-1} \cdot 10^{-10}$; $\tau_{rz} = 10^8 \text{ Па}$; $\xi = 1,7 \cdot 10^{-2} M$

$0 < x < f$, $r_1 < r < 2r_1 \xi_0$, $r_1 = \gamma(f - x)$

и значения $\sigma_{rr}(r_1, x_1, f)$; $\sigma_{xx}(r_1, x_1, f)$; $\sigma_{rz}(r_1, x_1, f)$ при $f > x > f - \xi$ и $r_1 = \gamma(f - x)$.

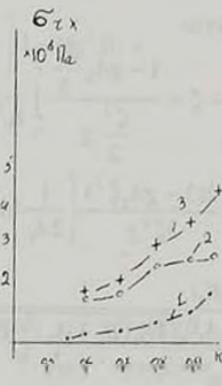
С целью подробного изучения влияния основного параметра анизотропии $k = \tau_{rz} / \tau_{rr}$ на поведение особенности, имеющей место в выражениях напряжений и на глубину проникания индентора, проведен тщательный численный анализ.



Фиг.1



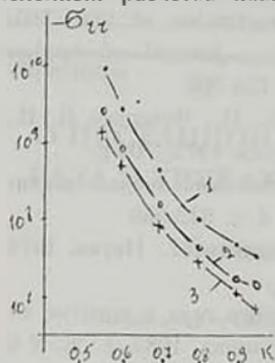
Фиг.2



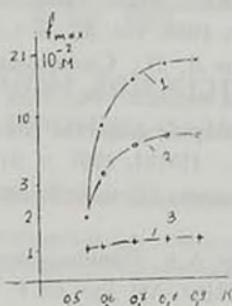
Фиг.3

Изучено влияние параметра k на σ_{rz} как в пластической области, так и на инденторе при разных β . Вычислены также значения $v(k, \beta)$ и $f_{\max}(k, \beta)$. Указанные величины вычислены на десяти разных гл

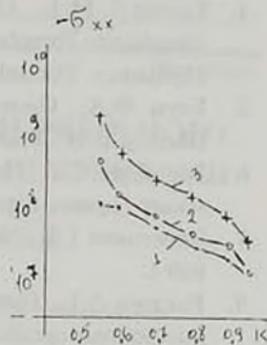
бинах проникания индентора. На фиг. 1 б приведены зависимости указанных величин лишь для двух значений f и x , хотя результаты численных расчетов позволяют проследить за всем процессом проникания



Фиг.4



Фиг.5



Фиг.6

ния. На фиг. 1.2 приведены значения $\sigma_{xx}(k, \beta)$ и $\sigma_{zz}(k, \beta)$ в момент, когда $f = 8 \cdot 10^{-4} M$ и $x = 3,7 \cdot 10^{-3} M$, т.е. для средних сечений конической части индентора, а на фиг. 4.5 в момент, когда $f = 1,5 \cdot 10^{-2} M$, т.е. когда индентор проник на величину конусной части и $x = 1,2 \cdot 10^{-2} M$. Из графиков видно, что всегда наблюдается резкое увеличение σ_{xx} при $k \rightarrow 0,5$. Для острых инденторов (кривые 1), где $\beta = 0,2$, влияние эффекта анизотропии более существенно, чем для кривых 2,3, где $\beta = 0,3$ и $\beta = 0,4$, соответственно. Наблюдается зависимость эффекта от координаты x : около вершины индентора σ_{xx} и σ_{zz} при $k \rightarrow 0,5$ приобретают порядок 10^{10} Па, когда около цилиндрической части индентора σ_{xx} и $\sigma_{zz} \sim 10^7 \div 10^8$ Па.

На фиг.6 приведена зависимость $f_{max}(k)$ для разных β . Как и следовало ожидать, из поведения напряжений на инденторе эффект уменьшения глубины проникания для острых инденторов намного больше.

Таким образом, применение гипотезы нормальных сечений, как и при применении гипотезы плоских сечений, показывает, что за счет подходящего выбора анизотропии среды можно существенно уменьшить глубину проникания индентора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Backman M.E., Goldsmith W. The Mechanics of Penetration Projectiles into targets. Int. J. Eng. Sci. 1978, v.16,N1, pp. 1-100.

2. Сагомонян А.Я. Проникание. – М.: Изд-во МГУ, 1974.
3. Багдоев А.Г., Вацян А. А. Проникание тонких тел в упругие среды. – Изв. АН Арм ССР, Механика, 1981, т. 34, N1, с. 3-14.
4. Forrestal M.J., Okajima K., Luk V.K. Penetration of 6061 T651 Aluminum Targets With Rigid Long Rods. – Journal of Applied Mechanics, December, 1988, vol. 55, N 4, pp. 755-760.
5. Баум Ф.А., Орленко Л. П., Станкович К. П., Чельшев В. П., Щехтер Б.И. Физика взрыва. – М.: Изд. Наука, 1975. 704 с.
6. Григорян С.С. Некоторые вопросы математической теории деформации горных пород. – ПММ, 1967, т. 31, N 4, с. 643-669.
7. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. 640 с.
8. Багдоев А.Г., Вацян А.А. Проникание тонкого тела в упругие анизотропные среды. – Изв. АН Арм ССР, Механика, 1983, т. 36, N 6, с. 23-30.
9. Багдоев А.Г., Вацян А.А., Григорян М.С. Влияние анизотропных свойств металлических образцов на проникание. – Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1988, т. 41, N 6, с. 28-34.
10. Сагомонян А. Я. Динамика пробития преград. – М.: Изд. МГУ, 1988.
11. Нонов В.Н., Огибалов П.М. Напряжения в телах при импульсном нагружении. – М.: Высшая школа, 1975. 463 с.
12. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
13. Вацян А.А. Проникание тупого конуса, переходящего в цилиндр, в первоначально упругую среду. – Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. 1987.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
3.05.1995

О НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ РЕАЛЬНОГО
ГАЗА В ТРУБАХ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

Бабаджанян Г.А., Данциелян Л.Е.

Գ. Ա. Բաբաջանյան, Լ. Ե. Դանցիելյան

Իրական գազի ոչ ստացիոնար շարժումը ծակտակեց պատերով խողովակներում

Գաղվածում քննարկվում է հարթ և զլանային ծակտակեց (թափանցիկ) պատերով իրական (մածուցիկ) գազի ոչ ստացիոնար շարժումը, երբ խախտվում է շարժման ստացիոնար ռեժիմը գազամուղի վերջնամասում հոսքի դադարեցման պատճառով:

Դրված խնդիրը բերվում է երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալներով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրմանը համապատասխան սկզբնական և եզրային պայմանների տրոմով: Կատարելով հատուկ ծևով գծայնացում (ըստ L և U Լեյբնցզոնի) և օգտվելով ինտեգրալ ձևափոխության հնարավորությունից, ստացվում են փակ ֆունկցիոնալ լուծումներ և որոշվում են գազի շարժման արագության, ճնշման, խտության երկայնական և ընդլայնական ելքի փոփոխման օրինաչափությունները, որպես ժամանակի և կետի կորդինատների ֆունկցիա:

Գաղված է թվային օրինակ և կառուցված են համապատասխան գրաֆիկներ

G. H. Babadjanian, L. E. Danielian

About nonstationary motion of real gas in pipes with penetrable walls

Рассматривается нестационарное движение реального газа в плоской и цилиндрической трубах с проницаемыми стенками. Задача сводится к решению нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, которые решаются методом интегральных преобразований. Определяются законы изменения давления, скорости, плотности а также продольные и поперечные расходы газа как функции от времени и координаты точки. Вычислены конкретный числовой пример и построены графики соответствующих газодинамических параметров

1. Рассматривается одномерное, нестационарное изотермическое движение реального (вязкого) газа в трубах с проницаемыми стенками. Такие исследования, помимо теоретического значения, имеют и многие практические применения. Так, например, магистральные, промышленные и распределительные городские газопроводы, водопроводы и паропроводы часто работают при нестационарных режимах и имеют в ряде точек по длине трубопровода отбор или подкачку жидкости (газа). При исследовании таких задач дискретное распределение точек отбора (подкачки) можно во многих случаях заменить их непрерывным

распределением [1]. Поэтому исследование таких задач можно свести к изучению движения жидкости в трубах с проницаемыми стенками. В общем случае перепад давления, будучи переменным по длине и по времени, определяется потерями на трение, инерционным сопротивлением и разностью отметок трубопровода. Однако, для горизонтального, достаточно длинного газопровода с постоянным сечением, при движении газа с малой скоростью в уравнениях движения влиянием инерционного сопротивления, уклона трубопровода на изменение давления можно пренебречь [2].

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\xi \rho u^2}{D_1}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + D_2 \rho(p - p_b) = 0 \quad (1.1)$$

$$p - p_b = \rho z RT$$

В системе (1.1) первое уравнение - это уравнение движения; второе уравнение неразрывности с учетом отбора (отсоса) или подкачки (вдува); третье уравнение состояния газа. В этой системе p , ρ и u - средние по сечению трубы давление, плотность и скорость газа, ξ - коэффициент сопротивления, p_b - внешнее давление, R - газовая постоянная, T - абсолютная температура, z - коэффициент сжимаемости газа, D_1 и D_2 - постоянные, зависящие от геометрических характеристик трубы и от степени проницаемости стенок. В формулах (1.1) при $p - p_b > 0$ имеет место отсос жидкости, а при $p - p_b < 0$ - вдувание.

Для плоской трубы $D_1 = 4h$, $D_2 = \frac{k}{2h}$, а для цилиндрической $D_1 = 4a$, $D_2 = \frac{2k}{a}$, где k - коэффициент проницаемости; $2h$ - ширина плоского канала; a - радиус трубы.

Известно, что при ламинарном режиме движения для плоской трубы $\xi = \frac{12\nu}{hu}$, а для цилиндрической $\xi = \frac{32\nu}{au}$, где ν - кинематический коэффициент вязкости.

Исключая из системы (1.1) переменные $u(x,t)$, $\rho(x,t)$ и вводя обозначение $(p(x,t) - p_b)^2 = P(x,t)$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{b} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{kP}{h} \quad (1.2)$$

- для плоской трубы и

$$\frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{b_1} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{4kP}{a} \quad (1.3)$$

для цилиндрической трубы.

$$\text{Здесь } b = \frac{3\mu}{h^2}, \quad b_1 = \frac{8\mu}{a^2}$$

где μ - динамический коэффициент вязкости

Поставленная нестационарная задача решается при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad P &= P_H = (p_H - p_0)^2 \\ \text{при } x=L \quad \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\ \text{при } t=0 \quad P &= P_0(x) \end{aligned} \quad (1.4)$$

где p_H - давление в начальном сечении трубы; L - длина трубопровода; $P_0(x)$ - закон изменения квадрата давления при стационарном режиме работы.

Второе граничное условие системы (1.4) показывает, что в конце трубы расход газа прекращается мгновенно, вследствие чего и возникает нестационарный режим движения.

Таким образом, решение задачи сводится к интегрированию нелинейных дифференциальных уравнений (1.2) и (1.3) с крайевыми условиями (1.4).

2. Точное функциональное решение дифференциальных уравнений (1.2) и (1.3) невозможно. Их решают численными или приближенными методами. Воспользуемся приближенным методом решения [3]. Для нахождения первого приближения примем переменный коэффициент

при $\frac{\partial P}{\partial t}$ постоянным и равным среднему значению давления в трубе при стационарном режиме работы, т. е. $\sqrt{P} = p_{0,r} = \text{const}$. Тогда уравнения (1.2) и (1.3) примут следующий вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = A_1 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - A_2 P \quad (2.1)$$

где $A_1 = \frac{p_{0,r}}{b} = \frac{p_0 h^2}{3\mu}$, $A_2 = \frac{kp_{0,r}}{h}$ для плоской трубы и

$A_1 = \frac{p_0}{b_1} = \frac{p_0 a^2}{8\mu}$, $A_2 = \frac{4kp_{0,r}}{a}$ для цилиндрической трубы. Решение

уравнения (2.1) ищем в виде

$$P(x, t) = P_0(x) + P_1(x, t) \quad (2.2)$$

Из уравнения (2.1) получим два дифференциальных уравнения

$$\frac{d^2 P_0}{dx^2} - \frac{A_2}{A_1} P_0 = 0 \quad (2.3)$$

и

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = A_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - A_2 P_1 \quad (2.4)$$

Уравнение (2.3) описывает стационарное движение газа со следующими граничными условиями:

$$\text{при } x=0 \quad P_0 = P_H = (p_H - p_h)^2 = \text{const}$$

$$\text{при } x=0 \quad \frac{dP_0}{dx} = -2b(p_H - p_h)u_H = \text{const} \quad (2.5)$$

Решением уравнения (2.3) при граничных условиях (2.5) будет

$$P_0(x) = P_H \operatorname{ch} \sqrt{\frac{kb}{h}} x - 2bu_H \sqrt{P_H} \sqrt{\frac{h}{kb}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{kb}{h}} x \quad (2.6)$$

для плоской трубы и

$$P_0(x) = P_H \operatorname{ch} 2\sqrt{\frac{kb_1}{a}} x - b_1 u_H \sqrt{P_H} \sqrt{\frac{a}{kb_1}} \operatorname{sh} 2\sqrt{\frac{kb_1}{a}} x \quad (2.7)$$

- для цилиндрической трубы.

Перейдем к решению уравнения (2.4).

Исходя из постановки задачи, при решении уравнения (2.4) нужно задавать следующие краевые условия:

$$\text{при } x=0 \quad P_1 = 0$$

$$\text{при } x=L \quad \left. \frac{\partial P_1}{\partial x} \right|_{x=L} = - \left. \frac{\partial P_0}{\partial x} \right|_{x=L} = 2bu_H(p_H - p_h) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{kb}{h}} L -$$

$$- P_H \sqrt{\frac{kb}{h}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{kb}{h}} L = B_1$$

$$\text{при } t=0 \quad P_1 = 0 \quad (2.8)$$

для плоской трубы и

$$\text{при } x=0 \quad P_1 = 0$$

$$\text{при } x=L$$

$$\left. \frac{\partial P_1}{\partial x} \right|_{x=L} = - \left. \frac{\partial P_0}{\partial x} \right|_{x=L} = 2b_1 u_H (p_H - p_h) \operatorname{ch} 2\sqrt{\frac{kb_1}{a}} L -$$

$$-2P_{II} \sqrt{\frac{kb_1}{a}} \operatorname{sh} 2\sqrt{\frac{kb_1}{a}} L = B_2$$

$$\text{при } t=0 \quad P_I = 0 \quad (2.9)$$

- для цилиндрической трубы.

Применяя к уравнению (2.4) и крайним условиям (2.8) преобразования Лапласа, получим

$$\frac{d^2 \bar{P}_1}{dx^2} - \frac{A_2 + s}{A_1} \bar{P}_1 = 0 \quad (2.10)$$

$$\text{при } x=0 \quad \bar{P}_1 = 0$$

$$\text{при } x=L \quad \frac{d\bar{P}_1}{dx} = \frac{B_1}{s} \quad (2.11)$$

где $\bar{P}_1 = \int_0^{\infty} e^{-st} P_1 dt$, s - параметр преобразования.

Решением уравнения (2.10) будет

$$\bar{P}_1 = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} \quad (2.12)$$

$$\text{здесь } \beta = \sqrt{\frac{s + A_2}{A_1}}$$

С помощью граничных условий (2.11), определяя постоянные интегрирования C_1 и C_2 , решение дифференциального уравнения (2.10) примет вид:

$$\bar{P}_1 = \frac{B_1 \operatorname{sh} \beta x}{\beta \operatorname{sch} \beta L} \quad (2.13)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа и проводя все математические вычисления, для оригинала функции $P_1(x, t)$ получим следующие выражения:

$$P_1(x, t) = B_1 \left[\sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} x}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} L} + 2 \frac{A_1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\mu_n x}{L} e^{-s_n t}}{s_n \sin \mu_n} \right] \quad (2.14)$$

- для плоской трубы и

$$P_1(x, t) = B_2 \left[\sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} x}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} L} + 2 \frac{A_1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\mu_n x}{L} e^{-\lambda_n^2 t}}{s_n \sin \mu_n} \right] \quad (2.15)$$

для цилиндрической трубы

В формулах (2.14) и (2.15)

$$s_n = -A_2 - \frac{\mu_n^2 A_1}{L^2}, \quad \mu_n = \frac{2n-1}{2} \pi \quad (2.16)$$

Подставляя $P_0(x)$, $P_1(x, t)$ из формул (2.6), (2.7), (2.14) и (2.15) в равенство (2.2) и переходя к старым переменным, для давления газа окончательно получим

$$\begin{aligned} p(x, t) = p_0 + \{ & (p_H - p_0)^2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}} x - \frac{6\mu}{h^2} (p_H - p_0) u_H \sqrt{\frac{h^3}{3\mu k}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}} x + \\ & + \left[\frac{6\mu}{h^2} (p_H - p_0) u_H \operatorname{ch} \sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}} L - (p_H - p_0)^2 \sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}} L \right] \times \\ & \times \left[\frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}} x}{\sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}} L} - \right. \\ & \left. - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{\pi}{L} \exp \left(-p_{0n} \left[\frac{k}{h} + \frac{h^2 (2n-1)^2}{3\mu L^2} \pi^2 \right] t \right)}{\left(\frac{3\mu k}{h^3} + \frac{\mu_n^2}{L^2} \right) L} \right] \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

для плоской трубы и

$$\begin{aligned} p(x, t) = p_0 + \{ & (p_H - p_0)^2 \operatorname{ch} 2 \sqrt{\frac{8\mu k}{a^3}} x - \frac{8\mu}{a^2} u_H (p_H - p_0) \sqrt{\frac{a^3}{8\mu k}} \operatorname{sh} 2 \times \\ & \times \sqrt{\frac{8\mu k}{a^3}} x + \left[\frac{8\mu}{a^2} u_H (p_H - p_0) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{8\mu k}{a^3}} L - 2(p_H - p_0)^2 \sqrt{\frac{8\mu k}{a^3}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{8\mu k}{a^3}} L \right] \times \\ & \times \left[\frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{32\mu k}{a^3}} x}{\sqrt{\frac{32\mu k}{a^3}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{32\mu k}{a^3}} L} - \right. \\ & \left. - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{\pi}{L} \exp \left(-p_{0n} \left[\frac{k}{a} + \frac{a^2 (2n-1)^2}{8\mu L^2} \pi^2 \right] t \right)}{\left(\frac{8\mu k}{a^3} + \frac{\mu_n^2}{L^2} \right) L} \right] \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \left. \frac{(-1)^{n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \exp \left(-p_{0,cr} \left[\frac{4k}{a} + \frac{a^2}{8\mu L^2} \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4} \right] t \right)}{\left(\frac{32\mu k}{a^3} + \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4L^2} \right) L} \right\}^{1/2}$$

для цилиндрической трубы.

Скорость, плотность, продольный и поперечный расходы газа определяются по формулам

$$u(x, t) = -\frac{1}{b} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.19)$$

$$\rho(x, t) = \frac{p - p_h}{zRT} \quad (2.20)$$

$$G_{\text{прод.}}(x, t) = 2hu(x, t)\rho(x, t) \quad (2.21)$$

$$G_{\text{попер.}}(x, t) = k(p - p_h)\rho(x, t) \quad (2.22)$$

для плоской трубы и

$$u(x, t) = -\frac{1}{b_1} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.23)$$

$$\rho(x, t) = \frac{p - p_h}{zRT} \quad (2.24)$$

$$G_{\text{прод.}}(x, t) = \pi a^2 \rho(x, t) u(x, t) \quad (2.25)$$

$$G_{\text{попер.}}(x, t) = 2\pi a k (p - p_h) \rho(x, t) \quad (2.26)$$

для цилиндрической трубы.

В формулах (2.21), (2.22), (2.25), (2.26) расходы вычислены в единице времени.

Для нахождения решения задачи во втором приближении переменный коэффициент \sqrt{P} в уравнениях (1.2) и (1.3) примем в следующем виде

$$\begin{aligned} \sqrt{P} &= p_H + (p_{0,cr} - p_H) e^{-\frac{\lambda x}{2}} = p_{0,cr} \left[\frac{p_H}{p_{0,cr}} + \left(1 - \frac{p_H}{p_{0,cr}} \right) e^{-\frac{\lambda x}{2}} \right] = \\ &= p_{0,cr} f(t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

где λ — постоянная, зависящая от среднего давления, геометрических характеристик трубы и степени проницаемости стенок.

$\lambda = \frac{p_0 k}{h}$ для плоской трубы и $\lambda = \frac{4 p_0 k}{a}$ для цилиндрической трубы [3].

Выбор переменного коэффициента \sqrt{P} в виде (2.27) обосновывается тем, что при $t \rightarrow \infty$ давление в трубе стремится к давлению в начальном сечении ($p(x, \infty) \rightarrow p_{II}$), а при $t \rightarrow 0$ - к среднему давлению стационарного режима движения газа ($p(x, 0) \rightarrow p_{0cp}$).

Подставляя (2.27) в уравнение (1.2) и (1.3), получим

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{p_{0cp}}{b} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{k p_{0cp}}{h} P \quad (2.28)$$

и

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{p_{0cp}}{b_1} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{4k p_{0cp}}{a} P \quad (2.29)$$

где

$$\tau = \int_0^t f(t) dt = \frac{p_{II}}{p_{0cp}} t + \frac{2}{\lambda} \left(1 - \frac{p_{II}}{p_{0cp}} \right) \left(1 - e^{-\frac{\lambda t}{2}} \right) \quad (2.30)$$

Как видно, уравнение (2.28) и (2.29) отличаются от соответствующих уравнений (1.2) и (1.3) тем, что в них переменная t заменяется на τ с помощью выражения (2.30). Поэтому для нахождения решения задачи во втором приближении достаточно в формулах (2.17)-(2.26) переменную t заменить на τ , определяемую формулой (2.30).

Можно построить решение задачи и в третьем приближении, принимая переменный коэффициент \sqrt{P} в уравнениях (1.2) и (1.3) в следующем виде:

$$\sqrt{P} = p_{0cp} f(t) \varphi(x) \quad (2.31)$$

где $f(t)$ определяется по формуле (2.27), а $\varphi(x)$ - известная функция, обусловленная законом распределения давления при стационарном режиме работы. Однако, нахождение решения в третьем приближении в данной работе не приводится, так как оно связано с большими математическими трудностями и вычислениями.

Отметим, что если в формулах (2.17) (2.30) принять $k = 0$, то получим выражения, описывающие закономерности нестационарного движения газа в трубах со сплошными стенками.

3. Приведем численный пример для движения газа в цилиндрической трубе.

Для решения конкретного числового примера зададим следующие данные:

$$p_H = 5 \text{ атм.} \quad u_H = 10 \text{ м/сек.}, \quad L = 10^3 \text{ м}, \quad a = 0.4 \text{ м}$$

$$k = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4/\text{кг сек.}, \quad \mu = 10^{-8} \text{ кг сек/м}^2$$

Предварительно вычислив $P_{0,p}$ по формуле

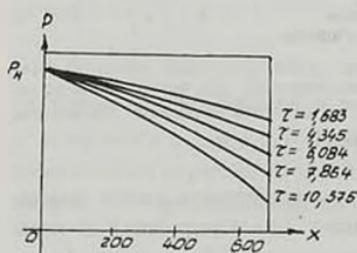
$$P_{0,p} = \frac{1}{L} \int_0^L P_0(x) dx$$

получаем $P_{0,p} = 2.76$.

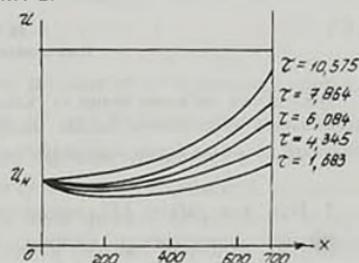
Численный пример вычисляется, ограничиваясь вторым приближением.

Изменения давления и скорости вычисляются соответственно по формулам (2.18) и (2.23).

Распределения давления вдоль трубопровода в различные моменты времени приведены на фиг. 1, а графики изменения скорости по времени и вдоль трубопровода приведены на фиг. 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабровский С.А., Щербаков С.Г., Гусейн Заде М.А. Движение газа в газопроводах с путевым отбором. М.: Изд. Наука, 1972. 48 с.
2. Бабаджанян Г.А., Даниелян Л.Е. Неустановившееся движение реального газа в цилиндрической трубе с прошищаемыми стенками. Илв. АН АрмССР, Механика, 1971, т. 24, № 6, с. 3-13.
3. Лейбеньон Л. С. Собрание трудов. Т. 11. М.: Изд. АН СССР, 1953. 273 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
23.02.1995

ДОЖДЕВАЯ ЭРОЗИЯ ПОЧВЫ НА СКЛОНАХ ВОЗВЫШЕННОСТЕЙ

Տագոմոնյան Ա. Կ.

Ա. Յա. Սաղոմոնյան
Հողի անճրեային էրոզիան բարձունքների լանջերին

Ռեսումնափրվում է հողի շարժումը բարձունքների լանջերին Հողի վերին շերտի համար առաջարկվում է օգտագործել համասեռ, անսեղմելի հեղուկի մոդելը Հողի շարժման արագության բաղադրիչները որոշվում են կվադրատուրաներով

A. Ja. Sagomonian
Rain erosion of soil of hillsides

Исследуется движение почвы на склонах возвышенностей. Для верхнего слоя почвы предлагается использовать модель однородной несжимаемой жидкости. Компоненты скоростей движения почвы определяются в квадратурах.

1. Как и в работе [1], предполагается, что жидкость капель дождя, достигнув поверхности склона, проникает (фильтрируется) в поры почвы. В результате, непосредственно под поверхностью склона образуется слой водонасыщенной почвы — суспензии, которая под действием силы тяжести и возникающих при движении диссипативных сил, стекает к подножию возвышенности. При этом часть жидкости, не проникающая в почву, образует на поверхности склона сплошной слой воды, также стекающий к подножию. Здесь весь этот процесс считается установившимся, а движение — плоскопараллельным. В пространстве дождя над склоном объемная концентрация ω жидкости капель постоянна и равномерно распределена. Граница между областью дождя и слоем жидкости над склоном является поверхностью разрыва параметров среды. Склон представляет собой пористую поверхность с концентрацией пор m , равной объемной концентрации (пористости) m . Величина m постоянна и равномерно распределена в почве. Поверхность склона является границей между слоями жидкости и суспензии. Вне слоя суспензии почва находится в покое. Различные виды почв после водонасы-

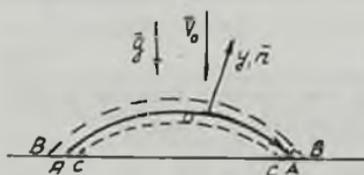
нения образуют стекающую в слое суспензию с различными физико-механическими свойствами. В зависимости от этих свойств исследование движения суспензии в слое можно проводить на основе модельных сред: вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости, вязко-пластической несжимаемой среды и двухфазной среды - смеси жидкости с малыми твердыми частицами [2,3]. В настоящей работе суспензия моделируется однородной, несжимаемой ньютоновской жидкостью. Плотность суспензии определяется по формуле

$$\rho_0 = m\rho + (1-m)\rho_1 \quad (1)$$

где ρ - плотность воды, ρ_1 плотность вещества почвы. Динамическая вязкость суспензии μ (эффективный коэффициент вязкости) предполагается постоянной и заданной. Коэффициент μ больше коэффициента вязкости жидкости каплеждя η . При малой объемной концентрации c твердых сферических частиц в суспензии, А. Эйнштейном получена формула [3]

$$\mu = \eta \left(1 + \frac{5}{2}c \right), \quad c \ll 1 \quad (2)$$

При больших концентрациях, вязкость μ зависит от градиента скорости. Сведения о коэффициенте вязкости μ при больших концентрациях c содержатся в книге [4]. Схематично, картина движения в слоях, образованных в окрестности поверхности склона возвышенности, показана на фиг. 1. Горизонтальной линией на этой фигуре обозначена поверхность Земли.



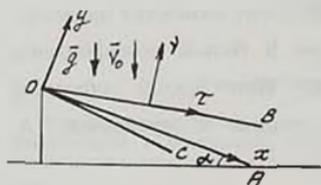
Фиг. 1

Векторы ускорения силы тяжести \bar{g} и скорости каплеждя \bar{V}_0 параллельны и одинаково направлены к горизонтальной линии. Стрелками показаны направления движения в слоях. В плоскости движения ось x направлена вдоль поверхности склона вправо к подножию. Ось y - по внешней нормали к поверхности склона. Скорость фильтрации жидкости каплеждя в почву \bar{w} подчинено закону Дарси при ламинарном движении жидкости в порах [5]. Скорость \bar{w} определяется как секундный расход жидкости на единицу площади поперечного сечения почвы. Эта скорость связана с действительной скоростью \bar{w}_0 жидкости в порах почв равенством

$$w = mw_0 \quad (3)$$

Величины w_0 и w' имеют порядок нескольких миллиметров в секунду, скорость v_0 капле дождя имеет порядок 7-9 метров в секунду. Предполагается, что отношения характерных толщин слоев к среднему радиусу кривизны поверхности склона малы. Так же малы отношения порядков величин скоростей вдоль осей x и y . При этих ограничениях будут выполнены условия, при которых можно пользоваться приближенными уравнениями Рейнольдса для описания движения вязкой несжимаемой жидкости в слоях [6].

Ниже, при исследовании, поверхность склона считается плоскостью, наклонную к горизонтальной поверхности Земли под углом α (фиг. 2).



Фиг.2

В плоскости движения на фиг.2 линия OA изображает плоскость склона, OB есть граница между областью дождя и слоем жидкости, линия OC разделяет слой суспензии от остальной неподвижной части почвы возвышенности. Изменением поверхности склона в процессе эрозии пренебрегается. Начало неподвижной системы координат берется в вершине возвышенности, ось x направляется вдоль плоскости выбранного склона возвышенности, вниз к подножию, ось y — перпендикулярно к оси x (фиг. 2).

Предполагается, что подлежащие определению кривые OB и OC сходятся в одной и той же точке — в начале координат (вершине возвышенности). Представим эти линии соответственно уравнениями, определяющими толщину слоев

$$y = H(x), \quad y > 0; \quad y = h(x), \quad y < 0 \quad (4)$$

Приближенные уравнения Рейнольдса, описывающие движение жидкости в слое над поверхностью склона, представляются в виде [6]

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \sin \alpha + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

где v , w — компоненты скорости жидкости вдоль x и y . На граничной поверхности разрыва между слоем и областью дождя уравнения сохранения массы и количества движения несжимаемой жидкости представляются равенствами

$$v_{\tau} = V_{0\tau}, \quad v_y = \omega V_{0y}, \quad \rho \omega V_{0y} (V_{0y} - v_y) = P_1 - P_0 \quad (6)$$

Здесь $\vec{\tau}$, \vec{V} — единичные векторы вдоль касательной и нормали к граничной линии, символы с индексами τ , V суть проекции вектора на эти направления; P_1 , P_0 — давления за и перед поверхностью разрыва. Из

Уравнение неразрывности в системе (5) позволяет определить компоненты скоростей w и w_1 в квадратурах по заданным значениям v и n в формулах (12) и (18). Постоянные в квадратурах определяются из условий $y = H$, $w = w^*$, $y = 0$, $w_1 = w'_0$, где w^* и w'_0 даны формулами (8) и (26).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагомонян А. Я. К вопросу дождевой эрозии почв. - Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т. 49, N 1 с. 20-31.
2. Реология суспензии (сб. статей). - М.: Мир, 1975.
3. Бетчелор Дж. Введение в динамику жидкости. - М.: Мир, 1973.
4. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. - М.: Мир, 1971.
5. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. - М.: Гостехиздат, 1947.
6. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Гостехиздат, 1955.
7. Слезкин Н. А. О течении вязкой жидкости при наличии свободной границы и пористого дна. - Ж-л. ВМУ, матем., механ., 1957, N 5, с. 3-5.
8. Бабаджанян Г. А., Дашелян Л. Е. Течение вязкой жидкости в открытом пористом русле. - Изв. АН Арм.ССР, сер. физ. мат. наук, 1963, т. 16, N 3, с. 83-90.

МГУ им. М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию
12.07.1994

уравнения количества движения в формуле (6) следует, что давление за разрывом P_x мало отличается от давления. Например, при $\omega = 10^{-2}$, $V_0 = 10$ м/с для воды давление P_x отличается от P_0 меньше одного процента. Из первых двух равенств (6) с помощью первого уравнения (4), в согласии с фиг.2, нетрудно получить соотношения

$$\frac{v_x}{V_0} = \frac{H' + \operatorname{tg} \alpha}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{1/2} (1 + H'^2)^{1/2}}, \quad -\frac{v_y}{\omega V_0} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha H'}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{1/2} (1 + H'^2)^{1/2}}$$

$$H' = \frac{dH}{dx} \quad (7)$$

Пусть v^* , w^* обозначают значения компонент скорости v , w в слое, непосредственно за граничной поверхностью разрыва. Эти значения определяются следующими выражениями

$$\frac{v^*}{V_0} = \frac{\operatorname{tg} \alpha (1 + \omega H'^2) - (1 - \omega) H'}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{1/2} (1 + H'^2)}, \quad \frac{w^*}{V_0} = \frac{(1 - \omega) \operatorname{tg} \alpha H' - (\omega + H'^2)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{1/2} (1 + H'^2)} \quad (8)$$

$$y = H(x)$$

Теперь проинтегрируем второе уравнение в формуле (5) и полученное подставим в левую часть первого уравнения этой формулы. В результате придем к уравнениям

$$P - P_0 = -\rho g \cos \alpha (y - H(x))$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{g}{v} (\cos \alpha H'(x) - \sin \alpha), \quad v = \frac{\eta}{\rho} \quad (9)$$

Последнее уравнение дважды проинтегрируем по:

$$v = \frac{g}{2v} (\cos \alpha H' - \sin \alpha) y^2 + C_1 y + C_2 \quad (10)$$

Предполагается, что непосредственно за граничной поверхностью разрыва напряжение сдвига равно нулю. В рамках принятых приближений Рейнольдса это приводит к условию

$$y = H(x), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

Значение скорости v за этой граничной поверхностью определено первым равенством формулы (3). Оба эти условия достаточны для нахождения величин C_1 и C_2 в формуле (10). В результате получим

$$v = \frac{g}{2v} (\cos \alpha H(x) - \sin \alpha) (y - H)^2 + v^*$$

$$\frac{v^*}{V_0} = \frac{\operatorname{tg} \alpha (1 + \omega H'^2) - (1 - \omega) H'}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{1/2} (1 + H'^2)} \quad (12)$$

Выше было показано, что $P_x \approx P_u$. На поверхности склона ($y = 0$) скорость $v = V$, где

$$V = \frac{gH^2}{\nu} (\cos \alpha H'(x) - \sin \alpha) + v^* \quad (13)$$

2. Слой суспензии под поверхностью склона моделируется несжимаемой вязкой жидкостью с плотностью ρ_0 и постоянным коэффициентом динамической вязкости μ . Концентрация жидкости капель дождя в порах суспензии в процессе движения остается постоянной. Компоненты скорости суспензии вдоль осей x , y обозначим через u и w . Движение в слое подчиним приближенным уравнениям Рейнольдса, приведенным в формуле (5). Выкладки аналогичные, сделанным выше, приводят к следующей формуле для давления в суспензии

$$P - P_u = P_0 g \cos \alpha (\varepsilon H(x) - y), \quad \varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad y \leq 0 \quad (14)$$

Для скорости частиц суспензии вдоль оси x , эти выкладки приводят к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{g}{\nu_0} (\varepsilon \cos \alpha H(x) - \sin \alpha), \quad \nu_0 = \frac{\mu}{\rho_0} \quad (15)$$

Отсюда интегрированием по y получим

$$u = \frac{g}{2\nu_0} (\varepsilon \cos \alpha H(x) - \sin \alpha) y^2 + C_1 y + C_2 \quad (16)$$

Обозначим значение скорости u на поверхности склона ($y = 0$) через U . На поверхности склона должны выполняться условия

$$y = 0, \quad V = U, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\eta}{\mu} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (17)$$

Граничные условия (17) и (13) определяют величины C_1 , C_2 в формуле (16). В результате получим

$$u = \frac{g}{2\nu_0} (\varepsilon \cos \alpha H' - \sin \alpha) y^2 - \frac{\eta}{\mu} \frac{g}{\nu} (\cos \alpha H' - \sin \alpha) H y + U, \quad (18)$$

$$U = V$$

На другой границе слоя суспензии отсутствует движение частиц вдоль оси x :

$$y = -h(x), \quad u = 0 \quad (19)$$

Используя это условие из (18), получим уравнение, определяющее толщину слоя суспензии

$$\frac{\rho}{2v_0} (\varepsilon \cos \alpha H' - \sin \alpha) h^2 + \frac{\eta \rho}{\mu v} (\cos \alpha H' - \sin \alpha) H h + V = 0 \quad (20)$$

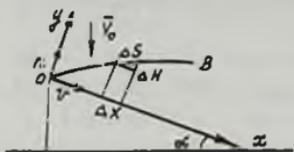
или в другой записи

$$(\varepsilon H' - \operatorname{tg} \alpha) h^2 + 2 \frac{\eta}{\mu} \frac{v_0}{v} (H' - \operatorname{tg} \alpha) H h + 2V \frac{v_0}{g} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 0 \quad (21)$$

где скорость V берется по формуле (13). Секундный расход суспензии в слое, стекающей к подножию возвышенности, определяется интегралом

$$Q = \rho_0 \int_{-h}^0 u dy = \frac{\rho_0 g}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \left[(\varepsilon H' - \operatorname{tg} \alpha) \frac{h^3}{6v_0} - \frac{\eta}{\mu} (H' - \operatorname{tg} \alpha) \frac{H h^2}{2v} \right] + \rho_0 V h \quad (22)$$

Для производства расчетов по полученным выше формулам необходимо определить толщину слоя жидкости $H(x)$ над поверхностью склона.



Фиг. 3

Воспользуемся интегральным выражением закона сохранения массы установившегося движения в этом слое. Выделим элемент объема $ABCD$ между границами слоя, как показано на фиг. 3. Условие о том, что изменение массы несжимаемой жидкости в этом объеме за время Δt равно нулю,

записывается так

$$\int_0^H v dy - \int_0^{H+\Delta H} v dy + \omega V_0 (\alpha - \beta) \Delta s - m w_0' \Delta x = \frac{\partial}{\partial t} \left[H \Delta x + \frac{\Delta H \Delta x}{2} \right] \Delta t = 0$$

или, после сокращений

$$-\int_H^{H+\Delta H} v dy + \omega V_0 \cos(\alpha - \beta) \Delta s - m w_0' \Delta x = 0$$

После перехода к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta H \rightarrow 0$, так как

$$dx = ds \cos \beta, \quad dH = H'(x) dx, \quad \operatorname{tg} \beta = H'(x) = \frac{dH}{dx}.$$

из последнего выражения получим

$$-v^* H' + \omega V_0 \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha H'}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} - m w_0' = 0 \quad (23)$$

Скорость v^* определена по формуле (8). Символом w_0' обозначена средняя действительная скорость проникания жидкости в поры почвы на поверхности склона ($y = 0$). Заменяя значение v^* по формуле (8), из (23) получим

$$\left(1 - \frac{m}{V_0} w'_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}\right) H'^2 - (1 - \omega) \operatorname{tg} \alpha H' - \left(\frac{m}{V_0} w'_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \omega\right) = 0 \quad (24)$$

Дифференциальное уравнение (24) решается при заданном значении скорости w'_0 и граничном условии

$$x = 0, \quad H = 0 \quad (25)$$

В ряде работ, например [7,8] принято, что скорость w'_0 пропорциональна давлению на поверхности склона. В рассматриваемой работе такая зависимость записывается в виде

$$w'_0 = \gamma \rho g \cos \alpha H(x) = \gamma \rho g \frac{H(x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad (26)$$

где γ — коэффициент пропорциональности. Используя это равенство из (24), получим

$$\left(1 - \frac{m \gamma \rho g}{V_0} H\right) H'^2 - (1 - \omega) \operatorname{tg} \alpha H' - \left(\frac{m \gamma \rho g}{V_0} H - \omega\right) = 0 \quad (27)$$

Заметим, что при постоянном значении скорости w'_0 действительные решения уравнения (24), удовлетворяющие условиям (25) будут прямыми линиями, исходящими из начала координат. Если допустить, что граничная линия $y = H(x)$ мало отличается от прямой так, что в уравнении (24) H'^2 малая величина и в этом уравнении можно пренебречь первым членом, то придем к выражению

$$(1 - \omega) \operatorname{tg} \alpha H' + \frac{m}{V_0} w'_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \omega = 0$$

Подставив в этом уравнении значение w'_0 по формуле (26) и интегрируя его при условии (25), придем к решению

$$B - H(x) = B e^{-\beta x}, \quad B = \frac{\omega V_0}{m \gamma \rho g}, \quad \beta = \frac{m \gamma \rho g}{(1 - \omega) \operatorname{tg} \alpha V_0} \quad (28)$$

Из решения (28) следует, что толщина слоя жидкости асимптотически при $x \rightarrow \infty$ приближается к величине B : $0 \leq H \leq B$. Решения квадратного относительно производной $H'(x)$, уравнения (27) определяются квадратурой. Действительные решения удовлетворяют условию (25). При этом производная $H'(x)$ должна быть положительной: $H' > 0$.

К ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ
ПЛАСТИНКИ - ПОЛОСЫ, НАГРУЖЕННОЙ ПО
ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ КРОМКЕ

Анапян А.К., Хачатрян А.А.

Ա. Կ. Անանյան, Ա. Ա. Խաչատրյան

Բեռնավորված ուղղաձիգ եզրով կիսանվերջ սալ-շերտի ծոման խնդրի մասին

Աշխատանքում քննարկվում է օժանդակ ֆունկցիաների միջոցով սալերի ճշգրտված տեսության հավասարումների բերումը ավելի պարզ հավասարումների. տարբեր եղանակներով. Այդ հավասարումների հիման վրա դիտարկվում են իզոտրոպ նյութից պատրաստված կիսանվերջ սալ-շերտի ծոման խնդիրներ. հողակապորեն ամրացված հանդիպակաց կիսանվերջ կողմերով և տարբեր եղանակներով բեռնավորված վերջավոր երրորդ կողմով Ստացված լուծումները թույլ են տալիս դատել ինչպես ծոման հավասարումների, այնպես էլ Կիրխոֆի կլասիկ տեսության կիրառելիության սահմանների մասին եզրային պայմանների ճշգրտման դեպքում:

A. K. Ananyan, A. A. Khachatryan

On One Bending Problem of a Semi-Infinite Plate Layer Loaded by Its Rectilinear Edge

Известно, что учет поперечных сдвигов в теории пластин приводит к повышению порядка уравнений изгиба пластины [1]. При этом появляется возможность более точного удовлетворения граничным условиям на кромке пластины. Более того, возможны некорректные постановки задач в рамках гипотезы Кирхгофа [2], а с учетом поперечных сдвигов эта некорректность устраняется. Решение задач изгиба пластины по уточненной теории С.А.Амбарцумяна в общем случае проводится к решению трех уравнений относительно прогиба срединной плоскости и двух перекрывающихся усилий.

В статье обсуждаются различные варианты приведения уравнений уточненной теории пластин к более простым уравнениям с помощью вспомогательных функций. На основе этих уравнений рассматриваются задачи изгиба полубесконечной пластины - полосы, шарнирно опертой по полубесконечным кромкам при нагружениях различного вида на кромке ограниченного размера. Полученные решения позволяют судить как о применимости различных вариантов уравнений изгиба, так и о применимости гипотезы Кирхгофа при уточнении граничных условий.

1 Из уточненной теории анизотропных пластин [1] известно, что задача изгиба пластинки приводится к решению трех дифференциальных уравнений относительно нормального перемещения $W(x, y)$ и неизвестных $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ функций, с соответствующими граничными условиями. В частности, для изотропной пластинки уравнения за-

даны изгиба следующие:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{1+\nu}{EI_0} Z$$

$$-D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w + \frac{EI_1}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{2I_1}{(1-\nu)I_0} \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{EI_0}{1+\nu} \varphi$$

$$-D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w - \frac{EI_1}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{2I_1}{(1-\nu)I_0} \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{EI_0}{1+\nu} \psi$$
(1.1)

где $I_1 = \int_{-h}^h zI(z)dz$, $I_0 = \int_{-h}^h f(z)dz$, $I(z) = \int_0^z f(z)dz$

$f(z)$ - функция, характеризующая закон изменения касательных напряжений τ_x и τ_y по толщине пластинки, причем $f(-h) = f(h) = 0$.

В [3] задача изгиба пластинки приведена к решению системы двух независимых уравнений относительно нормального перемещения и введенной новой искомой функции. В частности, в работе [3] введена новая $\Phi(x, y)$ функция, которая связана с функциями $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ следующим образом:

$$\Phi(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.2)$$

С учетом (1.2) система уравнений (1.1), после некоторых несложных преобразований, приводится к следующей системе двух независимых уравнений относительно прогиба $W(x, y)$ и функции $\Phi(x, y)$:

$$D\Delta\Delta W = Z - \frac{2I_1}{(1-\nu)I_0} \Delta Z, \quad \Delta\Phi - \frac{I_0}{I_1} \Phi = 0 \quad (1.3)$$

В работе [4] также введена новая функция $F(x, y)$, которая связана с функциями $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ следующим образом:

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \psi(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (1.4)$$

В этом случае система (1.1) приведена к следующим двум уравнениям:

$$D\Delta\Delta W = Z - \frac{2I_1}{(1-\nu)I_0} \Delta Z, \quad \Delta F = -\frac{1+\nu}{EI_0} Z \quad (1.5)$$

Первое уравнение системы (1.5) получается при подстановке второго и третьего уравнений системы (1.1) в первое уравнение этой же системы с учетом первого уравнения. А при подстановке (1.4) в первое уравнение (1.1) получится второе уравнение системы (1.5). Таким

образом, очевидно, что при получении системы (1.5) первое уравнение системы (1.1) было использовано дважды. Из вышесказанного следует, что система (1.5) не эквивалентна системе (1.1). Поэтому было предложено вместо второго уравнения системы (1.5) взять из системы (1.1) любое уравнение кроме первого. Это предложение тоже является некорректным, так как ее использование при решении задач цилиндрического изгиба пластины приводит к противоречию.

В настоящей работе сделана попытка преобразовать систему (1.1) с учетом (1.4), и привести ее к следующему виду:

$$D\Delta\Delta W = Z - \frac{2I_1}{(1-\nu)I_0}\Delta Z, \quad -D\Delta W + \frac{2EI_1}{1-\nu^2}\Delta F = \frac{I_0E}{1+\nu}F + A \quad (1.6)$$

где $A = \text{const}$.

Теперь рассмотрим задачу изгиба изотропной полубесконечной пластинки полосы с шарнирно опертными противоположными полубесконечными сторонами, а на третьей стороне крутящий момент и перерезывающая сила равны нулю, а изгибающий момент равен M_0 .

Пусть изотропная полубесконечная пластинка-полоса постоянной толщины в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) занимает область пространства $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y < \infty$, $-\bar{h} \leq z \leq \bar{h}$. Согласно (1.6) для изотропной полубесконечной пластинки-полосы задача изгиба при отсутствии поперечной нагрузки приводится к решению следующих двух уравнений:

$$\Delta\Delta W = 0, \quad \Delta W = -\frac{I_0E}{(1+\nu)D}F - \frac{A}{D} \quad (1.7)$$

Выбранные граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} x=0, a, \quad W=0, \quad M_1=0, \quad F=0 \\ y=0, \quad M_2=M_0, \quad N_2=0, \quad H=0 \\ y \rightarrow \infty, \quad W \rightarrow 0, \quad F \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Постоянная $A=0$, так как $y \rightarrow \infty$; $W \rightarrow 0$, $F \rightarrow 0$.

$$\text{Полагая функцию прогиба } W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin \mu_n x \quad (1.9)$$

$$\text{где } \mu_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$\text{и функцию } F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin \mu_n x \quad (1.10)$$

удовлетворяются поставленные условия шарнирного опирания

Подставляя значения прогиба $W(x, y)$ из (1.9) в первое уравнение

(1.7) и удовлетворяя граничному условию $y \rightarrow \infty$ для функции притока получится следующее выражение:

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + A_n \nu) e^{-\mu_n y} \sin \mu_n x \quad (1.11)$$

Подставляя (1.10) и (1.11) во второе уравнение (1.7), для функции $F(x, y)$ получим:

$$F(x, y) = \frac{2(1+\nu)D}{EI_0} A_n \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n e^{-\mu_n y} \sin \mu_n x \quad (1.12)$$

Как видно, постановка этой задачи некорректна, так как число постоянных равно двум, а на границе $y=0$ даны три граничные условия. Во избежание такой неточности вместо крутящего момента и перерезывающей силы необходимо взять обобщенную перерезывающую силу равной нулю. Тогда (1.8) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} x=0, a. \quad W=0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{3I_1}{h^3} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad F=0 \\ y=0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{3I_1}{h^3} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) = -\frac{M_0}{D} \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$-\frac{2h^3}{3} \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + 2I_1 \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + I_0 \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$y \rightarrow \infty, \quad W \rightarrow 0, \quad F \rightarrow 0$$

гдегибающий момент и обобщенная перерезывающая сила выражены через искомые функции $W(x, y)$ и $F(x, y)$.

Представим M_0 в виде следующего ряда:

$$M_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \mu_n x \quad (1.14)$$

где a_n — известные постоянные. Умножив обе части (1.14) на $\sin \mu_n x$ и интегрируя в пределах от 0 до a , нетрудно получить значения этих постоянных:

$$a_n = \frac{2M_0}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n} \quad (1.15)$$

Удовлетворяя граничным условиям на торце $y=0$ получается система алгебраических уравнений. Решая эту систему и подставляя постоянные в уравнение (1.11) и (1.12), с учетом (1.15), получим:

$$\begin{aligned} W(x, y) = -\frac{2M_0 a^2}{(3+\nu)D\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} - \frac{4I_1 \mu_n^2}{(1-\nu)I_0} - \mu_n y \right] \times \\ \times e^{-\mu_n y} \sin \mu_n x \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$F(x, y) = \frac{4(1+\nu)M_0}{(3+\nu)EI_0\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} e^{-\mu_n y} \sin \mu_n x \quad (1.17)$$

2. Решим ту же задачу с теми же граничными условиями на основе системы (1.3). Согласно (1.3) задача изгиба при $Z=0$ приводится к решению следующих двух уравнений:

$$\Delta \Delta W = 0, \quad \Delta \Phi - \frac{I_0}{I_1} \Phi = 0 \quad (2.1)$$

Граничные условия (1.8) запишутся следующим образом:

$$x=0, a, \quad W=0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{3I_1^2(1-\nu)}{h^3 I_0} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

$$y=0, \quad \Delta W - (1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{2I_1}{I_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta W + \frac{3I_1^2(1-\nu)}{h^3 I_0} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{M_0}{D}$$

$$D \frac{\partial}{\partial y} \Delta W + 2GI_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial x} + \frac{2I_1}{(1-\nu)I_0} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta W - \frac{3I_1}{2h^3} \left[\Phi - \frac{2I_1}{I_0} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] = 0$$

$$y \rightarrow \infty \quad W \rightarrow 0 \quad \Phi \rightarrow 0$$

где изгибающий и крутящий моменты, а также перерезывающая сила выражены через искомые функции $W(x, y)$ и $\Phi(x, y)$. Удовлетворением граничных условий на торце $y=0$ получается система алгебраических уравнений. Решение указанной задачи имеет вид:

$$W(x, y) = -\frac{2M_0 a^2}{(3+\nu)D\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^3} \left[1 + \frac{\omega_n}{3+\nu} \right]^3 \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} - \mu_n y \right) \times \\ \times e^{-\mu_n y} \sin \mu_n x \quad (2.2)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{4(1+\nu)M_0}{(3+\nu)EI_0\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \left[1 + \frac{\omega_n}{3+\nu} \right]^3 e^{-\mu_n y} \cos \mu_n x \quad (2.3)$$

$$\text{где } \omega_n = \frac{4I_1 \mu_n (\mu_n - \mu_{0n})}{I_0}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \mu_{0n}^2 = \mu_n^2 + \frac{I_0}{I_1}$$

В работе [5] решена первоначальная система уравнений (1.1), в случае $f(z) = 1 - \frac{z^2}{h^2}$ и для прогиба получено следующее выражение:

$$W(x, y) = -\frac{4M_0 a^2}{(3+\nu)D\pi^3} \sum_{n=1,3}^{\infty} \left[\frac{1+\nu}{(1-\nu)n} - \frac{\pi}{an^2} y \right] \times$$

$$\times \left(1 - \frac{4}{3 + \nu} \frac{m_0}{n l_0 + \sqrt{1 + n^2 l_0^2}} \right)^{-1} e^{-\frac{m_0}{n}} \sin \frac{n\pi}{a} y \quad (2.4)$$

$$\text{где } l_0 = \frac{2\pi h}{a\sqrt{10}}$$

По классической теории пластинок соответствующее выражение для прогиба $W(x, y)$ следующее:

$$W^n(x, y) = -\frac{2M_0 a^2}{(3 + \nu) D \pi^n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^n} \left[\frac{1 + \nu}{1 - \nu} - \mu_n y \right] e^{-\mu_n x} \sin \mu_n y \quad (2.5)$$

Выбрав функцию $f(z) = 1 - \frac{z^2}{h^2}$, для I_0 и I_1 получится

$$I_0 = \frac{4}{3} h^3 \quad I_1 = \frac{8}{15} h^5 \quad (2.6)$$

В частном случае, когда $n = 1$, подсчитаем максимальные значения прогиба с помощью формул (1.16), (2.2), (2.4), (2.5).

$$W\left(\frac{a}{2}, 0\right) = W_1 = -\frac{4M_0 a^2}{(3 + \nu) D \pi^3} \left[\frac{1 + \nu}{1 - \nu} - \frac{8\pi^2 h^2}{1 - \nu a^2} \right] \quad (2.7)$$

$$W\left(\frac{a}{2}, 0\right) = W_2 = -\frac{4M_0 a^2}{(3 + \nu) D \pi^3} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \left[1 - \frac{8\pi}{\sqrt{10}(3 + \nu)} \times \right. \quad (2.8)$$

$$\left. \times \left(1 - \frac{\pi\sqrt{2} h}{\sqrt{5} a} \right) \frac{h}{a} \right]^{-1}$$

$$W\left(\frac{a}{2}, 0\right) = W_3 = -\frac{4M_0 a^2}{(3 + \nu) D \pi^3} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \left[1 - \frac{4}{3 + \nu} \frac{l_0}{l_0 + \sqrt{1 + l_0^2}} \right]^{-1} \quad (2.9)$$

$$W\left(\frac{a}{2}, 0\right) = W_4 = -\frac{4M_0 a^2}{D \pi^3} \frac{1 + \nu}{(3 + \nu)(1 - \nu)} \quad (2.10)$$

Из полученных результатов очевидно, что отличие максимального прогиба, полученного из формулы (1.16), имеет порядок $\frac{h^2}{a^2}$, а остальные значения отличия максимального прогиба, вычисленные соответственно по формулам (2.2) и (2.4), имеют порядок $\frac{h}{a}$. То есть принятые формулы (1.4) в задачах изгиба пластины при отсутствии поперечной нагрузки приводят к более грубым результатам и применение этих формул целесообразно

3. Принимается, что на кромке $y=0$ изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю, а крутящий момент равен H_0 . Здесь надо отметить, что эта задача по классической теории Кирхгофа не имеет смысла. В этом случае воспользуемся системой (2.1). Граничные условия записываются следующим образом:

$$x=0, a \quad W=0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{3I_1^2(1-\nu)}{h^3 I_0} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

$$y=0, \quad \Delta W - (1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{2I_1}{I_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta W + \frac{3I_1^2(1-\nu)}{h^3 I_0} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x} = 0$$

$$D \frac{\partial}{\partial y} \Delta W + 2GI_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} + \frac{2I_1}{(1-\nu)I_0} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta W - \frac{3I_1}{2h^3} \left[\Phi - \frac{2I_1}{I_0} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] = -\frac{H_0(x)}{D(1-\nu)}$$

$$y \rightarrow \infty \quad W \rightarrow 0 \quad \Phi \rightarrow 0$$

Представим $H_0(x)$ в виде ряда

$$H_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi}{a} x \quad (3.1)$$

где b_n — известные постоянные, которые выражаются следующим образом:

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a H_0(x) \cos \frac{n\pi}{a} x dx \quad (3.2)$$

Удовлетворением граничным условиям на торце $y=0$ получается система алгебраических уравнений. Решение указанной задачи имеет вид:

$$W(x, y) = \frac{1}{D(1-\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\mu_n^2} \frac{2 + \omega_n + (1-\nu)\mu_n y}{3 + \nu + \omega_n} e^{-\mu_n y} \sin \mu_n x \quad (3.3)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{2(1+\nu)}{(3+\nu)EI_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left[1 + \frac{\omega_n}{3+\nu} \right]^{-1} e^{-\mu_n y} \cos \mu_n x \quad (3.4)$$

В частном случае возьмем $H_0(x) = H_0 \cos \frac{\pi}{a} x$

Из (3.3) и (3.4) получим

$$W(x, y) = \frac{H_0 a^2}{(1-\nu)D\pi^2} \frac{2 + \omega_1 + (1-\nu)\mu_1 y}{3 + \nu + \omega_1} e^{-\mu_1 y} \sin \mu_1 x \quad (3.5)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{2(1+\nu)H_0}{(3+\nu)EI_1} \left[1 + \frac{\omega_1}{3+\nu} \right]^{-1} e^{-\mu_0 x} \cos \mu_1 x \quad (3.6)$$

где ω_1 с учетом (2.6) будет

$$\omega_1 = \frac{4\pi\sqrt{10}}{5} \frac{h}{a} \left[\frac{\pi\sqrt{10}}{5} \frac{h}{a} - \sqrt{1 + \frac{2\pi^2 h^2}{5a^2}} \right]$$

Выражение максимального прогиба из (3.5) будет равно

$$W\left(\frac{a}{2}, 0\right) = W_3 = \frac{H_0 a^2}{(1-\nu)D\pi^2} \frac{2 + \omega_1}{3 + \nu + \omega_1} \quad (3.7)$$

Принимая отношение $\frac{h}{a}$ малой по сравнению с единицей $\left(\frac{h}{a} \ll 1\right)$ и

подсчитывая отношения (3.7) и (2.8), получим

$$\left| \frac{W_3}{W_2} \right| = \frac{\pi}{2(1+\nu)} \frac{H_0}{M_0} \quad (3.8)$$

Из формулы (3.8) видно, что при $\nu = 1/3$ отношение $\frac{W_3}{W_2}$ приблизи-

тельно равно отношению $\frac{H_0}{M_0}$. Следовательно, если H_0 и M_0 имеют одинаковый порядок, их эффект на величину прогиба одинаков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Госиздат, 1987.
2. Васильев В.В. К дискуссии по классической теории пластин. - МТТ, Изв. РБН, 1995, N 4, с. 140-149.
3. Хачатрян А.А. Некоторые задачи изгиба трансверсально-изотропных круглых пластинок. - Инж. ж. МТТ, Изв. АН СССР, 1966, т.3, с. 110-115.
4. Белубекян В.М. Канд. дисс. "Определение коэффициентов особенностей в некоторых задачах теории упругости секторных тел". ЕГУ, 1991.
5. Хачатрян А.А. Об изгибе полубесконечной пластинки нагрузкой, распределенной по краю. - Изв. АН АрмССР, сер. - мат. н., 1965, г. 18, N 2, с. 39-47.

Институт механики НАН РА

Поступила в редакцию
31.05.1996