

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ / PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՄԵԼԵԿԱՆԻԿ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1996

МОДУЛЯЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНОЙ
ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Багдоев А. Г. Мовсисян Л. А.

Ա. Գ. Բագդոև, Լ. Ա. Մովսիսյան

Ոչ զծային առաձգամածուցիկ զլանային թաղանթի մազուկացրն կայունությունը

Դիտարկվում է ֆիզիկորեն ոչ զծային առաձգամածուցիկ զլանային թաղանթի առանցքասիմետրիկ ծոման ալիքների մոդուլացիոն կայունությունը: Ընդունված է նյութի անսկզմակությունը եւ մածուցիկությունը ընդհանուր տեսքով:

Արագված են պայմաններ ալիքի փարածման կայունության համար:

A. G. Bagdоеv, L. A. Movsisian

The Modulation Stability of Non-linear Viscoelastic Cylindrical Shell

Изучается устойчивость осесимметричных изгибных волн модуляций в физически нелинейной вязкоупругой цилиндрической оболочке. Принимается несжимаемость материала оболочки.

Получены условия устойчивости распространения модуляционной волны. Наличие вязкости приводит к неустойчивости независимо от вида нелинейности.

Изучается устойчивость осесимметричных изгибных волн модуляций в физически нелинейной вязкоупругой цилиндрической оболочке. Нелинейность берется по [1] в кубическом виде, а вязкие операторы различны для линейной и нелинейной частей [2]. Подобная задача для пластины частного вида вязкости рассматривалась в работе [3]. Принимается также несжимаемость материала оболочки. Тогда в пределах применимости теории Кирхгоффа для нормальных компонентов усилий и изгибающего момента имеем

$$\begin{aligned} T_1 &= 4\tilde{G}_1 h(\epsilon_1 + 0,5\epsilon_2) + \frac{32}{3}\tilde{G}_2 h\gamma_2 \left[\epsilon_1^3 + \frac{h^2}{4}\epsilon_1 \chi_1^2 + \right. \\ &\quad \left. + 1,5\epsilon_2 \left(\epsilon_1^2 + \frac{h^2}{12}\chi_1^2 \right) + 1,5\epsilon_1 \epsilon_2^2 + 0,5\epsilon_2^3 \right] \\ T_2 &= 4\tilde{G}_1 h(\epsilon_2 + 0,5\epsilon_1) + \frac{32}{3}\tilde{G}_2 h\gamma_2 \left[\epsilon_2^3 + \right. \\ &\quad \left. + 1,5\epsilon_1 \epsilon_2^2 + 1,5\epsilon_2 \left(\epsilon_1^2 + \frac{h^2}{12}\chi_1^2 \right) + 0,5\epsilon_1 \left(\epsilon_1^2 + \frac{h^2}{12}\chi_1^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$M = \frac{1}{3} \tilde{G}_1 h^3 \chi_1 + \frac{8}{3} \tilde{G}_2 h^3 \gamma_2 \left[\varepsilon_1^2 \chi_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \chi_1 + 0,5 \varepsilon_2^2 \chi_1 + \frac{h^2}{20} \chi_1^3 \right]$$

Здесь h - толщина, а R - радиус оболочки,

$$\tilde{G}_j u = G \left(u - \int \Gamma_j(t-\tau) u(\tau) d\tau \right), \quad G \text{ - модуль сдвига}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{w}{R}, \quad \chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

Уравнения движения берем в виде

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{T_2}{R} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

Подставляя (1.1) и (1.2) в (1.3), ищем ее решение в виде

$$u = b e^{i\tau} + \bar{b} e^{-i\tau}, \quad w = c e^{i\tau} + \bar{c} e^{-i\tau} \quad (1.4)$$

$$\tau = kx - \omega t, \quad \omega = \omega_1 + i\omega_2$$

Тогда получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\rho \omega^2 = G \left[\left(1 - \Gamma_c^{(1)} - i \Gamma_s^{(1)} \right) \left(\frac{h^2 k^4}{3} + \frac{3}{R^2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \gamma_2 \left(1 - \Gamma_c^{(2)} - i \Gamma_s^{(2)} \right) \left(\frac{h^4 k^8}{5} + \frac{2 h^2 k^4}{R^2} + \frac{17}{R^4} e^{2\omega_2 t} c \bar{c} \right) \right] \\ \Gamma_c^{(j)} = \int_0^\infty \Gamma_j(y) \cos \omega y dy, \quad \Gamma_s^{(j)} = \int_0^\infty \Gamma_j(y) \sin \omega y dy \quad (1.5)$$

Последнее уравнение представим в виде

$$\omega = \omega^{(0)} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial A^2} \right) A^2, \quad A = 2|c| \quad (1.6)$$

где линейная частота и коэффициент затухания определяется

$$\omega^{(0)} = \omega_1^{(0)} + i \omega_2^{(0)} \\ \omega_1 = \left(\frac{G}{\rho} \right)^{1/2} \left\{ \left(\frac{h^2 k^4}{3} + \frac{3}{R^2} \right) \left[1 - \Gamma_c^{(1)}(\omega_1^{(0)}) \right] + \right. \\ \left. + 2 \left[1 - \Gamma_c^{(2)}(\omega_1^{(0)}) \right] \left(\frac{h^4 k^8}{5} + \frac{2 h^2 k^4}{R^2} + \frac{17}{R^4} \right) \gamma_2 e^{2\omega_2 t} c \bar{c} \right\}^{1/2} \quad (1.7)$$

$$\omega_1^{(0)} = \omega_1(\gamma_2 = 0)$$

$$\omega_2^{(0)} = \omega_2 = -\frac{1}{2} \Gamma_s^{(1)}(\omega_1^{(0)}) \omega_1^{(0)}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial A^2} = D_1 + iD_2$$

$$D_1 = \frac{1}{4} \frac{G}{\rho} \frac{\gamma_2}{\omega_1^{(0)}} \left(\frac{h^4 k^8}{5} + \frac{2h^2 k^4}{R^2} + \frac{17}{R^4} \right) e^{2i\omega_1^{(0)} t}$$

$$D_2 = -D_1 \frac{\Gamma_s^{(2)}(\omega_1^{(0)}) \omega_1^{(0)} + \omega_2^{(0)}}{\omega_1^{(0)}}$$

2. На основании (1.6) уравнение модуляции запишется в виде [4]

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{d\omega^{(0)}}{dk} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{d^2 \omega^{(0)}}{dk^2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + i(D_1 + iD_2) a |a|^2 = 0 \quad (2.1)$$

$$w = ae^{i\tau_0} + \bar{a}e^{-i\tau_0}, \quad \tau_0 = kx - \omega^{(0)}t, \quad A = 2|a|$$

Для исследования на устойчивость модуляции представляется $a = a' \exp(i\varphi)$ и тогда из (2.1) получится

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a'}{\partial t} + \frac{d\omega_1^{(0)}}{dk} \frac{\partial a'}{\partial x} - \frac{d\omega_2^{(0)}}{dk} a' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_2^{(0)}}{dk^2} \left[\frac{\partial^2 a'}{\partial x^2} - \right. \\ & \left. - a' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_1^{(0)}}{dk^2} \left(2 \frac{\partial a'}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - D_2 a' |a'|^2 = 0 \\ & a' \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{d\omega_1^{(0)}}{dk} a' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{d\omega_2^{(0)}}{dk} \frac{\partial a'}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_1^{(0)}}{dk^2} \left[\frac{\partial^2 a'}{\partial x^2} - \right. \\ & \left. - a' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_2^{(0)}}{dk^2} \left(2 \frac{\partial a'}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + D_1 a' |a'|^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

При исследовании на устойчивость следует полагать

$$a' = a'_0 + \delta a', \quad \varphi = \varphi_0 + \delta \varphi \quad (2.3)$$

Тогда, в нулевом приближении получится

$$\frac{\partial a'_0}{\partial t} - D_2 (a'_0)^3 = 0, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + D_1 (a'_0)^2 = 0 \quad (2.4)$$

в решение уравнений возмущения

$$\delta a' = F \exp(iT), \quad \delta \varphi' = \Phi \exp(iT), \quad T = Kx - \Omega t \quad (2.5)$$

в предположении $\exp(2\omega_2^{(0)}(t)) \approx \text{const}$ приводит к следующему соотношению:

$$z^2 - 3D_2(a'_0)^2 z + z_1(z_1 + 2D_1(a'_0)^2) = 0 \quad (2.6)$$

где

$$z = -i\Omega + iK \frac{d\omega_1^{(0)}}{dk} - \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_2^{(0)}}{dk^2} K^2$$

$$z_1 = iK \frac{d\omega_2^{(0)}}{dk} + \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_1^{(0)}}{dk^2} K^2$$

Условие устойчивости волн модуляций, после отбрасывания малых более высокого порядка, на основании (2.6) с учетом (1.4) запишется в виде

$$\omega_2^{(0)} + \Omega^* \leq 0 \quad (2.7)$$

где

$$\Omega^* = \text{Im } \Omega.$$

Для получения более обозримых результатов, довольствуясь адиабатическим приближением, получим

$$\Omega^* = \frac{3}{2} D_2(a'_0)^2 \quad \text{при} \quad D_1 > 0 \quad (2.8)$$

$$\Omega^* = \frac{3}{2} D_2(a'_0)^2 + \sqrt{|D_1| \frac{d^2\omega_1^{(0)}}{dk^2}} a'_0 K \quad \text{при} \quad D_1 < 0 \quad (2.9)$$

Из приведенных условий (2.7) - (2.9) видно, что если недиссипативная волна устойчива, то при наличии диссипации она также будет устойчивой, а в случае неустойчивой недиссипативной волны, диссипация может привести к устойчивости при выполнении условия

$$\omega_2^{(0)} + \frac{3}{2} D_2(a'_0)^2 + \sqrt{|D_1| \frac{d^2\omega_1^{(0)}}{dk^2}} a'_0 K \leq 0 \quad (2.10)$$

Для оценки полученных условий изучим пример оболочки со следующими данными. Пусть ядра операторов-экспоненциального типа и одинаковы для линейной и нелинейной частей-

$$\Gamma_1(t) = \frac{G - G_\infty}{Gn} \exp\left(-\frac{t}{n}\right), \quad G_\infty = 0,5G$$

При малой вязкости (время релаксации - n -большое) $\Gamma_e \approx 0$,

$\Gamma_s \approx 0,25/n\omega_1^{(0)}$ и линейная частота и коэффициент затухания определяются

$$\omega_1^{(0)} = \sqrt{\frac{G}{\rho} \left(\frac{h^2 k^4}{3} + \frac{3}{R^2} \right)^{1/2}}, \quad \omega_2^0 = -\frac{1}{2} \Gamma_s \omega_1^{(0)} = -0,25 \frac{1}{n}$$

а

$$D_1 = \frac{1}{4} \frac{G}{\rho} \frac{\gamma_2}{\omega_1^{(0)}} \left(\frac{h^4 k^8}{5} + \frac{2h^2 k^4}{R^2} + \frac{17}{R^4} \right), \quad D_2 = -0,25 D_1 \frac{1}{n\omega_1^{(0)}}$$

Для пластинки ($R \rightarrow \infty$) условие (2.10) после отбрасывания малых порядка $(a'_0)^2$ переписывается в виде

$$0,25 \frac{1}{n} \geq \sqrt{\frac{|\gamma_2|}{10}} \frac{G}{\rho} a'_0 K h^2 k^3 \quad (2.11)$$

что выполнимо для весьма малых амплитуд и волновых чисел волны огибающей.

Для цилиндра же с данными $kh = 10^{-1}$, $Rk = 10$ аналогичное условие будет

$$0,25 \frac{1}{n} \geq 23,18 \cdot 10^{-3} \sqrt{|\gamma_2|} \frac{G}{\rho} a'_0 K k \quad (2.12)$$

то есть для оболочки устойчивость будет для меньших значений $a'_0 K$, чем для пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каудерер Г. Нелинейная механика.-М.: ИЛ, 1961. 777с.
2. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердого тела.-М.: Наука, 1977. 384 с.
3. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. К вопросу распространения нелинейных волн в вязкоупругой пластине.- Изв. АН АрмССР, Механика, 1983, т.36, №2, с. 3-9.
4. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах- М.: Наука, 1973. 175 с.
5. Узем Дж. Линейные и нелинейные волны.-М.: Мир, 1977. 622 с.
6. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. - М.: Наука, 1984, 432 с.
7. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. Некоторые вопросы распространения квази-монохроматических нелинейных волн в пластинах и оболочках. - Тр. XII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, Т. I., с. 106-112.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
15. 10. 1993

**ПАРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ
КОМБИНАЦИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

Баблоян А.А., Макарян В.С.

Ա.Տ. Բաբլոյան, Վ.Ս. Մակարյան

Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների կոմբինացիաներ
պարունակող զույգ ինտեգրալ հավասարումներ

Աշխատանքում դիտարկվում են քնդիանուր փխալի զույգ ինտեգրալ հավասարումներ, որոնք պարունակում են եռանկյունաչափական ֆունկցիաների (0.1) կոմբինացիաները: Ներկայացնելով անհայտ ֆունկցիան փարբեր փնքերով, զույգ հավասարումները բերվում են կամ Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարումների լուծմանը փարբեր փիրոյթներում կամ քվադր-լիովին ռեզոլյար-անվերջ համակարգի: Նաշվված են զույգ հավասարումների մեջ մփնող ինտեգրալների այմեքները ամբողջ կիսաառանցքի վրա:

A.H. Babloyan, V.S. Makaryan

Dual Integral Equations, Involving Combinations of Trigonometric Functions

Парными уравнениями занимались многие авторы [1-7]. Общие подходы для решения отдельных классов парных уравнений предложены в работах [4-5]. Обзор по парным уравнениям содержится в работах [4-5].

В данной работе рассматриваются парные интегральные уравнения, содержащие следующие комбинации тригонометрических функций:

$$\chi(\beta, t) = \gamma \sin \beta t - \beta \cos \beta t, \quad \eta(\beta, t) = \gamma \cos \beta t + \beta \sin \beta t \quad (0.1)$$

Разложения по функциям (0.1), а также рассматриваемые здесь парные уравнения встречаются в задачах теории упругости при удовлетворении граничным условиям в радиальных направлениях [9, 11]. На полуоси ($0 < t < \infty$) формулы разложения произвольной функции в интеграл Фурье по функциям (0.1) имеют вид:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\gamma H_0(\gamma) e^{-\gamma t} \int_0^\infty f(x) e^{-x\gamma} dx + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\chi(\beta, t) d\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \int_0^\infty f(x) \chi(\beta, x) dx \\ f(t) &= -2\gamma H_0(\gamma) e^{-\gamma t} \int_0^\infty f(x) e^{-x\gamma} dx + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta(\beta, t) d\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \int_0^\infty f(x) \eta(\beta, x) dx \end{aligned} \quad (0.2)$$

где γ - произвольное число, а $H_0(\gamma)$ - функция Хевисайда

$$H_0(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma > 0 \\ 0, & \gamma < 0 \end{cases}$$

Для полноты здесь же приведем соответствующие формулы разложения для конечной области ($0 < t < T$)

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2\gamma e^{-\eta}}{1 - e^{-2\gamma}} \int_0^T f(x) e^{-\gamma x} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\chi_k(t)}{T(\beta^2 + \gamma^2)} \int_0^T f(x) \chi_k(x) dx \\ f(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx - \frac{2\gamma e^{-\eta}}{1 - e^{-2\gamma}} \int_0^T f(x) e^{-\gamma x} dx + \\ &+ \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k(t)}{\beta^2 + \gamma^2} \int_0^T f(x) \eta_k(x) dx \end{aligned} \quad (0.3)$$

где

$$\chi_k(t) = \gamma \sin \beta_k t - \beta_k \cos \beta_k t, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{T}$$

$$\eta_k(t) = \gamma \cos \beta_k t + \beta_k \sin \beta_k t \quad (0.4)$$

При $\gamma=0$ из (0.2) и (0.3) получаются соответствующие формулы разложения по синусам и косинусам.

При решении парных интегральных уравнений используются формулы обращения интегральных уравнений Абеля, разрывные интегралы Сонина и др. Все эти формулы содержатся в книгах [4, 5, 7] и др., поэтому здесь не приводим.

Сперва рассмотрим парные интегральные уравнения

$$\begin{aligned} Ae^{-\eta} + \int_0^{\infty} \beta' Y(\beta) (1 - \gamma(\beta)) \chi(\beta, t) d\beta &= f(t) \quad (a < t < \infty) \\ cAe^{-\eta} + \int_0^{\infty} Y(\beta) \chi(\beta, t) d\beta &= g(t) \quad (0 < t < a) \end{aligned} \quad (0.5)$$

где $t = \pm 1$, $\gamma \geq 0$ и c - заданные числа, $f(t)$ и $\gamma(t)$ - интегрируемые, а $g(t)$ - кусочно-дифференцируемая функция, причем существует такое число $\varepsilon > 0$, для которого имеют место

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{\varepsilon t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma t e^{\varepsilon t} = 0 \quad (0.6)$$

В уравнениях (0.5) неизвестными являются коэффициент A , функция

$Y(\beta)$, а также значение первого (второго) интеграла в области $0 < t < a$ ($a \leq t < \infty$).

1. Первый способ решения при $l = 1$.

Умножая уравнения (0.5) на $e^{-\gamma t}$ и проинтегрируя первое из них в пределах (t, ∞) , а второе - в пределах $(0, t)$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \beta Y(\beta) [1 - \gamma(\beta)] \sin \beta t d\beta &= f_2(t) \quad (a < t < \infty) \\ \int_0^{\infty} Y(\beta) \sin \beta t d\beta &= -g_2(t) \quad (0 < t < a) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} f_2(t) &= f_1(t) - \frac{A}{2\gamma} e^{-\gamma t}, \quad g_2(t) = g_1(t) - \frac{cA}{\gamma} \operatorname{sh} \gamma t \\ f_1(t) &= \int_t^{\infty} e^{\gamma(t-x)} f(x) dx, \quad g_1(t) = \int_0^t e^{\gamma(t-x)} g(x) dx \end{aligned} \quad (1.2)$$

Парные уравнения (1.1) рассматривались в работах [2-7], где они с использованием интегральных представлений функции Бесселя

$$J_0(\beta x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\cos \beta t dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} = \frac{2}{\pi} \int_x^{\infty} \frac{\sin \beta t dt}{\sqrt{t^2 - x^2}} \quad (1.3)$$

сначала приводим к виду

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \beta Y(\beta) [1 - \gamma(\beta)] J_0(\beta x) d\beta &= F_2(x) \quad (a < x < \infty) \\ \int_0^{\infty} Y(\beta) J_0(\beta x) d\beta &= -G_2(x) \quad (0 < x < a) \end{aligned} \quad (1.4),$$

а затем, по формуле обращения Ханкеля, для определения неизвестной функции $Y(\beta)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} Y(\beta) [1 - \gamma(\beta)] + \int_0^{\infty} z \gamma(z) Y(z) dz \int_0^a x J_0(\beta x) J_0(zx) dx = \\ \int_0^{\infty} x H_2(x) J_0(\beta x) dx \quad (0 \leq \beta < \infty) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$H_k(x) = \begin{cases} -G_k(x) & (0 \leq x \leq a) \\ F_k(x) & (a \leq x < \infty) \end{cases} \quad (k = 1; 2) \quad (1.5)$$

$$G_k(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{g'_k(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}}, \quad F_k(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^\infty \frac{f_k(t) dt}{\sqrt{t^2 - x^2}} \quad (1.6)$$

$$G_2(x) = G_1(x) - c A I_0(\gamma x), \quad F_2(x) = F_1(x) - \frac{A}{\pi \gamma} K_0(\gamma x)$$

При получении (1.6) были использованы интегральные представления функций Бесселя от мнимого аргумента

$$\left(\frac{2z}{\gamma}\right)^{\nu} I_{\nu}(\gamma z) = \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2} + \nu)} \int_0^z (z^2 - y^2)^{\nu - \frac{1}{2}} c h \gamma y dy \quad (1.7)$$

$$\left(\frac{2z}{\gamma}\right)^{\nu} K_{\nu}(\gamma z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \nu)} \int_z^{\infty} e^{-\gamma y} (z^2 - y^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dy$$

Неизвестную постоянную A будем определять из условия ограниченности первого (второго) интеграла уравнений (1.1), (0.5), когда $t \rightarrow a - 0$ ($t \rightarrow a + 0$).

Это условие приводит к соотношению

$$G_2(a) + F_2(a) + \int_0^{\infty} \gamma Y(z) Y(z) J_0(za) dz = 0 \quad (1.8)$$

В силу (1.6) соотношение (1.8) представляем в виде

$$A \left[c I_0(\alpha \gamma) + \frac{1}{\pi \gamma} K_0(\alpha \gamma) \right] = G_1(a) + F_1(a) + \int_0^{\infty} \gamma Y(z) Y(z) J_0(za) dz \quad (1.9)$$

Отметим, что (1.8) является условием эквивалентности парных уравнений (0.5) (при $l = 1$) и (1.1). В случае $\gamma(\beta) \equiv 0$ (1.8) превращается в условие непрерывности функции $H_2(x)$ в точке $x = a$. При $\gamma(\beta) \equiv 0$ и $a \rightarrow 0$ из (1.8) получается выражение для коэффициента свободного члена первого разложения (0.2). При условии (1.8) интегральное уравнение (1.5) принимает вид

$$\beta Y(\beta) [1 - \gamma(\beta)] + \int_0^{\infty} z^2 \gamma(z) Y(z) dz \int_0^a x J_1(\beta x) J_1(xz) dx =$$

$$= - \int_0^{\infty} x H_2'(x) J_1(\beta x) dx \quad (0 \leq \beta < \infty) \quad (1.10)$$

Из (1.5) и (1.10) для интегралов, входящих в (0.5) при $l = 1$, получим следующие значения:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \beta [1 - \gamma(\beta)] Y(\beta) \chi(\beta, t) d\beta &= [G_2'(a) + F_2'(a) + U'(a)] \frac{a H_0(a-t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} + \\ + * \int_1^{\infty} \frac{[x H_2'(x)]' - \gamma t H_2'(x)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dx - H_0(a-t) \int_1^{\infty} \frac{[x U''(x)]' - \gamma t U''(x)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dx \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} Y(\beta) \chi(\beta, t) d\beta &= g(0) - cA + \int_0^{\infty} \frac{\gamma x H_2(x) - t H_2'(x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx + \\ + H_0(t-a) \int_a^{\infty} \frac{\gamma x U(x) - t U'(x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx \quad (0 \leq t < \infty) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\text{где } U(x) = \int_0^{\infty} \beta \gamma(\beta) Y(\beta) J_0(\beta x) d\beta \quad (1.13)$$

а * перед знаком интеграла означает, что влияние обобщенных функций, фигурирующих в подынтегральном выражении, на значение интеграла не учитывается, т.к. оно уже учтено при выделении первого слагаемого формулы (1.11).

Пользуясь решением интегрального уравнения Абеля из (1.11) и (1.12), получим

$$\int_0^{\infty} \beta [1 - \gamma(\beta)] Y(\beta) \chi(\beta, t) d\beta = \gamma f_2(t) - f_2'(t) = f(t) - A e^{-\eta} \quad (a < t < \infty)$$

$$\int_0^{\infty} \beta Y(\beta) \chi(\beta, t) d\beta = g_2'(t) - g_2(t) \gamma = g(t) - c A e^{-\eta} \quad (0 < t < a)$$

т.е. функция $Y(\beta)$, действительно, является решением уравнений (0.5).

2. Второй способ решения (0.5) при $l = 1$.

Приведем уравнения (0.5) к виду (1.1) и представим функцию $Y(\beta)$ в виде

$$\beta Y(\beta) = \beta \int_a^{\infty} x Z(x) J_0(\beta x) dx - \beta \int_0^a x G_2(x) J_0(\beta x) dx =$$

$$= - \int_a^\infty x Z'(x) J_1(\beta x) dx + \int_0^a x G_2'(x) J_1(\beta x) dx \quad (2.1)$$

где принято

$$Z(a) + G_2(a) = 0 \quad (2.2)$$

функция $Z(x)$ подлежит к определению, а $G_2(x)$ определяется формулами (1.2) и (1.6).

На основе (2.1) и (2.2) вычислим интегралы, входящие в (1.1) (1.10)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \beta [1 - \gamma(\beta)] Y(\beta) \sin \beta t d\beta &= \int_0^a \left\{ \frac{t H_0(x-t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} - x \int_0^\infty \gamma(\beta) J_1(\beta x) \sin \beta t d\beta \right\} \times \\ &\times G_2'(x) dx - \int_a^\infty \left\{ \frac{H_0(x-t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} - x \int_0^\infty \gamma(\beta) J_1(\beta x) \sin \beta t d\beta \right\} Z'(x) dx \quad (2.3) \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty Y(\beta) \sin \beta t d\beta = \int_a^\infty \frac{x Z(x) H_0(t-x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx - \int_0^a \frac{x G_2(x) H_0(t-x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx \quad (0 < t < \infty)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \beta [1 - \gamma(\beta)] Y(\beta) J_0(\beta t) d\beta &= \int_0^a \left\{ H_0(x-t) - x \int_0^\infty \gamma(\beta) J_1(\beta x) J_0(\beta t) d\beta \right\} G_2'(x) dx - \\ &- \int_a^\infty \left\{ H_0(x-t) - x \int_0^\infty \gamma(\beta) J_1(\beta x) J_0(\beta t) d\beta \right\} Z'(x) dx \end{aligned}$$

Отсюда следует, что вторые уравнения (0.5) и (1.1) удовлетворяются тождественно. Удовлетворяя первым уравнениям (1.1) или (1.4), для определения функции $Z(x)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} Z(t) - \int_a^\infty x Z(x) dx \int_0^\infty \beta \gamma(\beta) J_0(\beta x) J_0(\beta t) d\beta &= \\ = F_2(t) - \int_0^a x G_2(x) dx \int_0^\infty \beta \gamma(\beta) J_0(\beta x) J_0(\beta t) d\beta \quad (a < t < \infty) \quad (2.4) \end{aligned}$$

Неизвестную постоянную A будем определять из соотношения (2.2), а интегралы в (0.5) легко вычисляются при помощи формул (2.3).

3. Третий способ решения (0.5) при $l = 1$

Представим решение парных уравнений (0.5) или (1.1) в виде

$$\beta [1 - \gamma(\beta)] Y(\beta) = \beta \int_a^\infty x F_2(x) J_0(\beta x) dx - \beta \int_0^a x Z(x) J_0(\beta x) dx =$$

$$= \int_0^a x Z'(x) J_1(\beta x) dx - \int_a^\infty x F_2'(x) J_1(\beta x) dx \quad (3.1)$$

где

$$F_2(a) + Z(a) = 0 \quad (3.2)$$

а функция $F_2(x)$ определяется формулами (1.2) и (1.6). На основе (3.1) и (3.2) вычислим интегралы, входящие в уравнения (1.1) и (1.4).

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \beta [1 - \gamma(\beta)] Y(\beta) \sin \beta t d\beta &= t \int_0^a Z'(x) \frac{H_0(x-t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dx - \\ &- t \int_a^\infty \frac{F_2'(x) H_0(x-t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dx, \quad (0 \leq t < \infty) \\ \int_0^\infty Y(\beta) \sin \beta t d\beta &= \int_a^\infty \left\{ \frac{H_0(t-x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} + \int_0^a \gamma_1(\beta) J_0(\beta x) \sin \beta t d\beta \right\} x F_2(x) dx - \\ &- \int_0^a \left\{ \frac{H_0(t-x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} + \int_0^a \gamma_1(\beta) J_0(\beta x) \sin \beta t d\beta \right\} x Z(x) dx + \\ \int_0^\infty \beta Y(\beta) J_0(\beta t) d\beta &= \int_0^a x Z'(x) dx \int_0^\infty \gamma_1(\beta) J_1(\beta x) J_0(\beta t) d\beta - \\ &- \int_a^\infty x F_2'(x) dx \int_0^\infty \gamma_1(\beta) J_1(\beta x) J_0(\beta t) d\beta + \begin{cases} -Z(t) & (t \leq a) \\ F_2(t) & (t \geq a) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что при выборе (3.1) первые уравнения (0.5) и (1.1) удовлетворяются тождественно. После удовлетворения (1.1) и (1.4) для определения неизвестной функции $Z(t)$ получим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\begin{aligned} Z(t) + \int_0^a x Z(x) dx \int_0^\infty \beta \gamma_1(\beta) J_0(\beta x) J_0(\beta t) d\beta &= \\ &= G_2(t) + \int_a^\infty x F_2(x) dx \int_0^\infty \beta \gamma_1(\beta) J_0(\beta x) J_0(\beta t) d\beta \quad (0 \leq t \leq a) \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\gamma_1(\beta)$ определяется из соотношения

$$[1 - \gamma(\beta)][1 + \gamma_1(\beta)] = 1 \quad (3.5)$$

Постоянную A будем определять из (3.2), а интегралы, входящие в (0.5) легко вычисляются при помощи формул (3.3).

Отметим, что правая часть уравнения (3.4) зависит от неизвестного постоянного A , вследствие чего функция $Z(t)$ является линейной функцией от A . Поэтому значение A целесообразно определить только после решения (3.4).

4. Четвертый способ решения (0.5) при $l = 1$

Представим решение парных уравнений в виде

$$\begin{aligned} \beta[1 - \gamma(\beta)]Y(\beta) &= \beta \int_a^\infty x F_2(x) J_0(\beta x) dx + \sum_{k=0}^\infty b_k J_{2k+1}(\beta a) = \\ &= -a F_2(a) J_1(\beta a) - \int_a^\infty x F_2'(x) J_1(\beta x) dx + \sum_{k=0}^\infty b_k J_{2k+1}(\beta a) \end{aligned} \quad (4.1)$$

и вычислим следующие интегралы:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \beta[1 - \gamma(\beta)]Y(\beta) \sin \beta t d\beta &= -F_2(a) \frac{t H_2(a-t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} - \int_a^\infty \frac{t F_2'(x) H_0(x-t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dx + \\ &+ H_0(a-t) \sum_{k=0}^\infty b_k \frac{\sin(2k+1)u_0}{\sqrt{a^2 - t^2}}, \quad (0 \leq t < \infty) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Y(\beta) \sin \beta t d\beta &= \int_a^\infty \left\{ \frac{H_0(t-x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} + \int_0^\infty \gamma_1(\beta) J_0(\beta x) \sin \beta t d\beta \right\} x F_2(x) dx + \\ &+ \sum_{k=0}^\infty \frac{b_k}{2k+1} \left[(2k+1) \int_0^\infty \gamma_1(\beta) J_{2k+1}(\beta a) \sin \beta t \frac{d\beta}{\beta} + \left\{ \frac{\sin(2k+1)u_0}{(-1)^k q_0^{2k+1}}, \quad (t \geq a) \right\} \right] \\ \int_0^\infty \beta Y(\beta) J_0(\beta t) d\beta &= F_2(t) H_0(t-a) - a F_2(a) \int_0^\infty \gamma_1(\beta) J_1(\beta a) J_0(\beta t) d\beta - \int_a^\infty x F_2'(x) dx \times \\ &\times \int_0^\infty \gamma_1(\beta) J_1(\beta x) J_0(\beta t) d\beta + \sum_{k=0}^\infty b_k \left\{ \frac{H_0(a-t)}{a} P_k \left(1 - \frac{2t^2}{a^2} \right) + \right. \\ &\left. + \int_0^\infty \gamma_1(\beta) J_{2k+1}(\beta a) J_0(\beta t) d\beta \right\} \quad (0 \leq t < \infty) \end{aligned}$$

где $P_k(x)$ - полином Лежандра, $\gamma_1(\beta)$ определяется формулой (3.5),

$$u_0 = \arcsin \frac{t}{a}, \quad q_0 = \frac{t - \sqrt{t^2 - a^2}}{a} \quad (4.3)$$

Приравнявая нулю коэффициент при особенности в первой формуле (4.2), получим уравнение для определения A .

$$aF_2(a) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k \quad (4.4)$$

Из (4.2) следует, что функция (4.1) удовлетворяет первым уравнениям (0.5) и (1.1). Удовлетворяя вторым уравнениям (1.1) и (1.4), для определения неизвестных постоянных b_k получим бесконечную систему

$$\begin{aligned} \frac{b_p}{2(2p+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \int_0^{\pi} \beta^{-1} \gamma_1(\beta) J_{2k+1}(\beta a) J_{2p+1}(\beta a) d\beta = \\ = -\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{g_2(t) \sin(2p+1)u_0}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt - \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$- \int_a^{\infty} x F_2(x) dx \int_0^{\infty} \gamma_1(\beta) J_{2p+1}(\beta a) J_0(\beta x) d\beta \quad (p=0,1,2,\dots)$$

Пользуясь асимптотическими формулами бесселевых функций, легко доказать, что система (4.5) в общем случае квазивполне регулярна, т.к. сумма модулей коэффициентов при неизвестных при $p \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Отметим, что сходимость ряда (4.4) можно улучшить при помощи соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[\frac{(-1)^k}{a} + \int_0^{\infty} \gamma_1(\beta) J_{2k+1}(\beta a) J_0(\beta a) d\beta \right] + G_2(a) + \\ + \int_a^{\infty} x F_2(x) dx \int_0^{\infty} \beta \gamma_1(\beta) J_0(\beta a) J_0(\beta x) d\beta = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

которое получается из (4.2) и второго уравнения (1.4).

После решения бесконечной системы (4.5) постоянную A будем определять из (4.4), а значения интегралов, входящих в (0.5), будем определять по формулам

$$\int_0^{\infty} \beta [1 - \gamma(\beta)] \gamma(\beta) \chi(\beta, t) d\beta = \int_0^{\infty} \frac{[x F_2'(x)]' - \gamma t F_2'(x)}{\sqrt{x^2 - t^2}} H_0(x-t) dx +$$

$$+ \frac{H_0(a-t)}{\sqrt{a^2-t^2}} \left\{ aF_2'(a) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b_k}{a} \times \right. \\ \left. \times \left[(2k+1)U_{2k}\left(\frac{t}{a}\right) - 1 + 2\left(\gamma a - \frac{\gamma t^2}{a} - \frac{t}{a}\right)U_k\left(\frac{t}{a}\right)U_{k-1}\left(\frac{t}{a}\right) \right] \right\} \\ (0 < t < \infty)$$

$$\int_0^{\infty} Y(\beta)\chi(\beta, t)d\beta = \int_a^{\infty} \frac{\gamma x F_2(x) - t F_2'(x)}{\sqrt{t^2 - a^2}} H_0(t-x)dx - \\ - t F_2(a) \frac{H_0(t-a)}{\sqrt{t^2 - a^2}} + \int_a^{\infty} x F_2(x)dx \quad (4.7)$$

$$\int_0^{\infty} \gamma_1(\beta) J_0(\beta x) \chi(\beta, t) d\beta + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \int_0^{\infty} \gamma_1(\beta) J_{2k+1}(\beta a) \chi(\beta, t) \frac{d\beta}{\beta} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b_k}{a} \left[\frac{\gamma a}{2k+1} \begin{cases} T_{2k+1}\left(\frac{t}{a}\right) & (t \leq a) \\ q_0^{2k+1} & (t \geq a) \end{cases} + \begin{cases} -U_{2k}\left(\frac{t}{a}\right) & (t < a) \\ \frac{a q_0^{2k+1}}{\sqrt{t^2 - a^2}} & (t > a) \end{cases} \right]$$

Нетрудно доказать, что в силу условия (4.4) второе выражение (4.7) при $t \rightarrow a \pm 0$ остается ограниченным.

В (4.7) $T_k(x)$ и $U_k(x)$ - полиномы Чебышева первого и второго родов соответственно.

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x), \quad \sqrt{1-x^2} U_k(x) = \sin[(k+1) \arccos x]$$

Таким образом, парные уравнения (0.5) при $l=1$ и $\gamma(\beta) \neq 0$ сводятся или к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода для различных интервалов, или же к бесконечной системе. Во всех случаях при $\gamma(\beta) \equiv 0$ получается замкнутое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Noble B. The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying-factor method - Proc. Camb. Phil. Soc., 1963, v. 59, No 2, 351-362.
2. Цейтлин А.И. О методе парных интегралов и парных рядов и его приложениях к задачам механики - 1966, ПММ, т. 30, No2.
3. Sneddon I.N. Mixed Boundary value problems in Potential theory. - Amsterdam: North-Holl Publ. Com. 1966, 283.

4. Развитие теории контактных задач в СССР. - М. Наука, 1976.
5. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. - Л.: Наука, 1977.
6. Баблюян А.А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. - ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
7. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства. - Инженерно-физический журнал, 1963, том 6, No 10, 67-71.
8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды, М.: Наука, т.1-3, 1981.
9. Макарян В.С., Саргсян В. Об одной граничной задаче для упругого кругового сектора. - Изв. АН АрмССР, Механика, 1990, т.42, No 2.
10. Баблюян А.А., Мкртчян А.М. Решение смешанной задачи для прямоугольника. - Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т.25, No 2.
11. Баблюян А.А., Тоноян В.С. Плоская задача для ортотропного кольцевого сектора. - Изв. Ан Арм ССР физ-мат наук, 1964, т 17, No 5.

Институт Механики НАН Армении

Поступила в редакцию
7.07.1995

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ НАЧАЛЬНЫХ
ВОЗМУЩЕНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ
ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА
ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА ПРОЧНОСТЬ.

Белубекян Э. В., Гнуни В. Ц., Маркарян С. Э.

Է.Վ. Բելուբեկյան, Վ.Ց. Գնունի, Ս.Է. Մարգարյան

Կամպոզիցիոն նյութից պարրաստված ուղղանկյուն սալի սկզբնական զրգռումների մեծագույն արժեքների որոշումը ամրության սահմանափակման դեպքում

Դիտարկվում է եզրագծով ազատ հենված օրտոտրոպի կոմպոզիցիոն նյութի (ԿՄ) մոնոշերտերից պարրաստված սալ: Ենթադրվում է, որ ԿՄ-ի մոնոշերտերը սալի փաթեթում ըստ խաստրության տեղադրված են սալի ՕՄ առանցքի նկատմամբ հաջորդաբար $\pm\varphi$ անկյան տակ:

Սալի խաստրություն ծավալի դեպքում լուծվում է ԿՄ-ի մոնոշերտերի ըստ խաստրության դասավորման անկյունների օպտիմալ ընդ որոշության խնդիրը, որի դեպքում ապահովվում է ամրության պայմանից թույլատրելի սկզբնական զրգռման մեծագույն արժեքը՝ տրված սկզբնական պայմաններով սալի սեփական տատանումների դեպքում:

Դիտարկվում են բնական օրինակներ տարբեր սկզբնական պայմանների եւ սալի զաբաղիբային չափերի արժեքների դեպքերում:

Belubekian E. V., Gnuni V. Ts., Markarian S. E.

The Determination of the Maximum values of the Initial Excitation of the Rectangular Plate Made of Composition Material in Case of Strength Limitation

Рассматривается шарнирно-опертая по контуру прямоугольная пластинка, изготовленная из слоев ортотропного композиционного материала (КМ)

Предполагается, что в пакете пластинки по толщине монослои КМ расположены поочередно под углами $\pm\varphi$ к оси ОХ. В этом случае пакет пластинки в целом можно считать ортотропным.

Решается задача оптимального выбора углов укладки монослоев КМ по толщине пластинки при ее постоянном объеме, обеспечивающего наибольшее допустимое из условия прочности максимальное значение начального возмущения при собственных колебаниях пластинки с заданными начальными условиями.

Рассматривается шарнирно-опертая по контуру прямоугольная пластинка размерами a, b, h , изготовленная из монослоев ортотропного композиционного материала (КМ).

Пластинка отнесена к прямоугольной системе координат $Oxyz$ так, что координатная плоскость $z = 0$ совпадает с срединной плоскостью пластинки.

Предполагается, что в пакете пластинки по толщине монослои КМ расположены поочередно под углами $\pm\varphi$ к оси Ox . В этом случае пакет пластинки в целом можно считать ортотропным.

Решается задача оптимального выбора углов укладки монослоев КМ по толщине пластинки при ее постоянном объеме, обеспечивающего наибольшее допустимое из условия прочности максимальное значение начального возмущения при собственных колебаниях пластинки с начальными условиями.

Рассматриваются числовые примеры при различных начальных условиях и значениях габаритных размеров пластинки.

Следует отметить, что оптимизационные задачи колебаний пластин при различных ограничениях и критериях оптимальности (наибольшая низшая частота колебаний, вес конструкции и т.д.) рассматривались во многих работах. Однако, насколько нам известно, в приведенной здесь постановке задача колебаний пластинки рассматривается впервые. Результаты ее решения могут иметь важное значение при исследовании вопросов динамики тонкостенных конструкций.

1. Дифференциальное уравнение собственных колебаний ортотропной пластинки имеет вид [1]

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

где: $w(x, y, t)$ - функция прогибов пластинки, ρ - плотность КМ, t - время,

$D_{ik} = B_{ik} h^3 / 12$ - изгибные жесткости пластинки, B_{ik} - характеристики упругости монослоя пластинки по ее главным геометрическим направлениям Ox и Oy , которые выражаются через характеристики упругости по главным физическим направлениям B_{ik}^0 по известным формулам поворота [1].

Начальные условия пластинки принимаются в виде

$$w|_{t=0} = C f_1(x, y), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = \chi C f_2(x, y) \quad (2)$$

где C и χC - соответственно максимальные значения начального прогиба и скорости; $|f_i(x, y)| < 1$ - заданные функции распределения начальных прогиба и скорости, которые могут быть разложены в ряды Фурье

$$f_1(x, y) = \sum_m \sum_n f_{1mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \quad (3)$$

$$f_2(x, y) = \sum_m \sum_n f_{2mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y$$

где:

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{b},$$

$$f_{1mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f_1(x, y) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y dx dy$$

$$f_{2mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f_2(x, y) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y dx dy$$

Функция прогибов, удовлетворяющая условиям шарнирного опирания пластинки, представляется в виде

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn}(t) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \quad (4)$$

Подставляя выражение (4) в уравнение (1) и условия (2), получается уравнение для определения функции $w_{mn}(t)$

$$w_{mn}''(t) + \omega_{mn}^2 w_{mn}(t) = 0 \quad (5)$$

и соответствующие начальные условия

$$w_{mn}(t)|_{t=0} = C f_{1mn}, \quad w_{mn}'(t)|_{t=0} = \chi C f_{2mn} \quad (6)$$

где

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho h} (D_{11} \lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \mu_n^2 + D_{22} \mu_n^4) \quad (7)$$

Решая уравнение (5) с удовлетворением условий (6) и подставляя полученное решение в (4), для функции прогибов получается следующее выражение:

$$w = C \sum_m \sum_n \left(f_{1mn} \cos \omega_{mn} t + \chi \frac{f_{2mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t \right) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \quad (8)$$

Деформации в главных геометрических направлениях пластинки определяются по формулам

$$e_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad e_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad e_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Деформации e_{11}, e_{22}, e_{12} пластинки по направлениям укладки монослоев КМ определяются по известным формулам поворота [2], а напряжения в тех же направлениях определяются по формулам

$$\sigma_{11} = B_{11}^0 e_{11} + B_{12}^0 e_{22}, \quad \sigma_{22} = B_{12}^0 e_{11} + B_{22}^0 e_{22}, \quad \sigma_{12} = B_{66}^0 e_{12}$$

Условие прочности пластинки принимается в виде [3]

$$\prod(\sigma_{ik}) = \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{B1}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{B2}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\tau_{B0}} \right)^2 - \frac{\sigma_{11} \sigma_{22}}{\sigma_{B1}^2} \leq 1 \quad (9)$$

где $\sigma_{B1}, \sigma_{B2}, \tau_{B0}$ - прочностные характеристики КМ.

Ставится задача определения оптимального значения угла укладки φ , обеспечивающего наибольшее значение начального максимального прогиба C (или начальной скорости χC) при заданном значении χ , неизменном объеме пластинки и удовлетворении условия прочности (9).

Учитывая линейную зависимость напряжений от максимального начального возбуждения C , условие (9) можно представить в виде

$$\prod(\sigma_{ik}) = C^2 \prod(\sigma_{ik}) \leq 1 \quad (10)$$

При заданном значении χ из условия прочности (10) в наиболее опасной точке пластинки в плоскости $(x, y, 0,5h)$, в зависимости от параметра φ , определяются значения

$$C(\varphi) \left[\max_{x,y,t} \prod(\sigma_{ik}) \right]^{-1/2} \quad \text{при } z = 0,5h \quad (11)$$

Варьированием значением угла φ определяется оптимальный проект пластинки, при котором начальное возмущение $C(\varphi)$ достигает наибольшего значения.

Таким образом, поставленная задача оптимизации сводится к нахождению

$$C = \max_{\varphi} \left[\max_{x,y,t} \prod(\sigma_{ik}) \right]^{-1/2} \quad (12)$$

при ограничении

$$0 \leq \varphi \leq 90^\circ$$

2. Численная реализация задачи произведена для случая, когда функции $f_i(x, y)$ заданы в виде

$$f_1(x, y) = f_2(x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

В качестве КМ приняты однонаправленный углепластик и стеклопластик СВМ 5:1, соответственно со следующими характеристиками:

$$B_{22}^0 = 0,33B_{11}^0, \quad B_{12}^0 = 0,0082B_{11}^0, \quad B_{66}^0 = 0,16B_{11}^0 \\ \sigma_{y1}^0 = 1,9 \cdot 10^{-2} B_{11}^0, \quad \sigma_{B2} = 0,25 \cdot 10^{-2} B_{11}^0, \quad \tau_{B0} = 0,075 \cdot 10^{-2} B_{11}^0$$

и

$$B_{22}^0 = 0,62B_{11}^0, \quad B_{12}^0 = 0,12B_{11}^0, \quad B_{66}^0 = 0,16B_{11}^0 \\ \sigma_{y1}^0 = 1,89 \cdot 10^{-2} B_{11}^0, \quad \sigma_{B2} = 0,77 \cdot 10^{-2} B_{11}^0, \quad \tau_{B0} = 0,5 \cdot 10^{-2} B_{11}^0$$

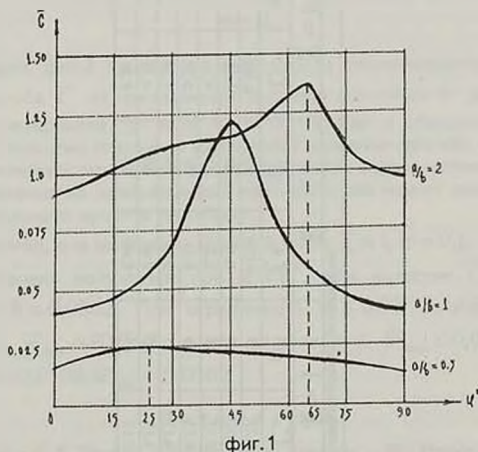
Определен оптимальный угол φ и соответствующее значение приведенного начального прогиба $\bar{C} = C/h$ или скорости $\bar{\chi}\bar{C}$ ($\bar{\chi} = \chi(12\rho a^4 / \pi^4 B_{11}^0 h^2)^{1/2}$) при $\bar{\chi} = 0, 1, \infty$, для различных значений приведенной толщины пластинки $\bar{h} = h/b$ и отношений сторон a/b . Здесь $\bar{\chi} = 0$ соответствует отсутствию начальной скорости ($\chi C = 0$), а $\bar{\chi} = \infty$ - отсутствию начального прогиба ($C = 0$).

В табл. 1 значения $\bar{C}$, $\bar{\chi}\bar{C}$, φ приведены для обоих материалов при $\bar{h} = 0, 1$ и различных значениях a/b .

Из таблицы следует, что в случае однонаправленного углепластика при всех значениях $\bar{\chi}$ оптимальные углы φ получаются одинаковыми при заданном значении a/b , причем при увеличении a/b этот угол увеличивается стремясь к $\varphi = 90^\circ$ для длинной пластинки.

Для случая материала СВМ 5:1 углы получаются одинаковыми при $\bar{\chi} = 0$ и $\bar{\chi} = 1$. Причем здесь происходит довольно резкий переход от $\varphi = 0^\circ$ к $\varphi = 45^\circ$ и $\varphi = 90^\circ$ в зависимости от изменения отношения сторон пластинки. Расчеты показывают, что промежуточные значения оптимальных углов получаются при a/b в интервале (0,75; 1,25).

Интересно отметить, что в случае материала СВМ 5:1 наиболее опасными точками пластинки являются $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0,5$, в то время как для пластинки из углепластика в зависимости от значений a/b и угла φ наиболее опасной является также точка $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0,5$, что объясняется сравнительно малым значением предела прочности на сдвиг τ_{B0} углепластика. В результате, как следует из табл. 1, при увеличении значения a/b в случае материала СВМ 5:1 имеет место увеличение наибольшего значения допустимого максимального начального прогиба пластинки, а в случае однонаправленного углепластика, начиная со значения $a/b = 1$ наибольшее значение начального прогиба остается неизменным.

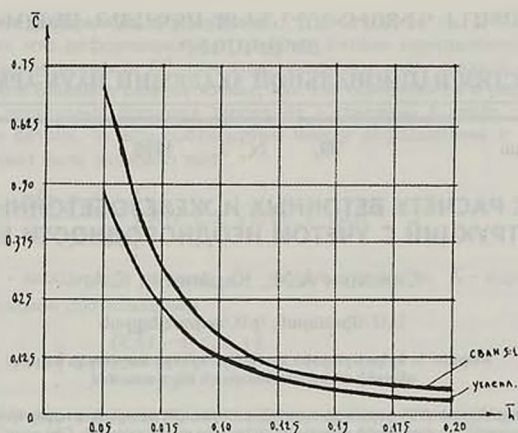


На графиках фиг. 1 для случая однонаправленного углепластика показаны изменения максимального прогиба $\bar{C}$ в зависимости от угла укладки φ при $\bar{h} = 0,1$, $\bar{x} = 1$ для значений $a/b = 0,5; 1; 2$.

Как следует из этих графиков, при $a/b = 1$ наибольшее значение $\bar{C}(\varphi = 45^\circ)$ получается в три раза больше его наименьшего значения ($\varphi = 0^\circ, 90^\circ$), что указывает на возможность существенного увеличения допустимого начального прогиба пластинки путем оптимального выбора угла φ . При других рассмотренных значениях a/b это увеличение несколько меньше: при $a/b = 0,5$ оно составляет 1,5 раза, при $a/b = 2$ — 1,9 раза.

Таблица 1

a / b	Однонаправленный углепластик						СВМ 5:1					
	$\bar{\chi} = 0$		$\chi = 1$		$\chi = \infty$		$\bar{\chi} = 0$		$\bar{\chi} = 1$		$\chi = \infty$	
	C	φ^0	C	φ^0	$\bar{\chi} C$	φ_c^0	C	φ^0	C	φ^0	$\bar{\chi} C$	φ^0
0.5	0.034	25	0.25	25	0.036	25	0.086	0	0.064	0	0.097	0
0.75	0.080	40	0.063	40	0.10	40	0.15	0	0.12	0	0.20	25
1.0	0.14	45	0.12	45	0.23	45	0.20	45	0.17	45	0.36	45
1.25	0.15	50	0.13	50	0.31	50	0.26	90	0.23	90	0.56	60
1.5	0.14	55	0.13	55	0.37	55	0.30	90	0.28	90	0.83	75
1.75	0.14	60	0.13	60	0.46	60	0.33	90	0.32	90	1.2	90
2.0	0.14	65	0.13	65	0.65	65	0.34	90	0.34	90	1.6	90



На графиках фиг.2 приведены зависимости максимального допустимого значения прогиба $\bar{C}$ от приведенной толщины пластинки $\bar{h}$ для обоих рассмотренных материалов при $a/b=1$ и $\bar{x}=1$. Как и следовало ожидать, с увеличением толщины пластинки допустимое значение прогиба уменьшается.

Следует отметить, что если в рассматриваемой задаче оптимизации ввести также ограничение на максимальный прогиб, то это может привести к изменению оптимального проекта пластинки.

Так, например, для материала СВМ 5:1 при $\bar{\chi} = 1, \bar{h} = 0,1, a/b = 0,5$ оптимальный проект получается при $\varphi = 0^\circ$, при котором $\bar{C} = 0,0644$, а $\bar{w}_{\max} = w_{\max}/h = 0,0862$. При ограничении $\bar{w} \leq 0,08$ получается $\varphi = 35^\circ$, $\bar{C} = 0,0586$, $\bar{w}_{\max} = 0,0792$, а при ограничении $\bar{w}_{\max} \leq 0,07$ получается $\varphi = 55^\circ$, $\bar{C} = 0,0506$, $\bar{w}_{\max} = 0,0702$

Литература

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1967, 534с.
2. Timoshenko S. P. and Goodier J. N. Theory of Elasticity, ed., Mc Craw - Hill-New York: 1951.
3. Бажанов З. Л., Гольденблат И. И. и др. Сопротивление стеклопластиков. - М.: Машгиз, 1968.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
19.05.1995

К РАСЧЕТУ БЕТОННЫХ И ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ
КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ БЕТОНА

Симонян А.М., Карапетян К.А.

Ա.Մ.Միմոնյան, Կ.Ա.Կարապետյան

Բետոնն եւ երկաթբետոնե կառուցվածքների հաշվարկի մասին
ընդհանուր անհամասեռության հաշվառումով

Ինչպես ցույց են տրված մի շարք աշխատանքներում բետոնն պարբերի տարբեր կետերում մեխանիկական հատկությունները ժամանակի ընթացքում միմյանցից տարբերվում են: Ընդ որում կառուցվածքների մակերեսային ճնշման ազդեցությամբ ամրությունը եւ առաձգականության մոդուլը զգալիորեն փոքր են, իսկ սուրբը՝ նախքան մեծ, քան նրանց խորքում:

Աշխատանքում դիտարկվում են բետոնն եւ երկաթբետոնն սեղմվող եւ ծովող կառուցվածքների հաշվարկի եւ լարումների գնահատման հարցերը հաշվի առնելով էլիշադակված անհամասեռության փորձարարական հնարավորությունների արդյունքները:

A.M.Simonian, K.A.Karapetian

On Calculation of Concrete and Reinforced Concrete Structures
Taking Account of Concrete Heterogeneity

Как показано в ряде работ, механические свойства в различных точках бетонного элемента со временем различаются друг от друга, при этом вблизи от поверхности конструкции прочность и модуль упругости становятся меньше, а ползучесть выражена больше, чем в глубине его.

В настоящей работе на основе экспериментальных данных рассматривается вопрос расчета и оценки напряжений и несущей способности бетонных и железобетонных сжатых и изгибаемых конструкций с учетом вышеупомянутой неоднородности.

В ряде работ [1-6] экспериментально показано, что в бетонных массивах механические свойства материала со временем становятся неоднородными, а именно: вблизи поверхности массива у бетона прочность и модуль упругости становятся меньше, а ползучесть выражена больше, чем в глубине его. Естественно, это приводит к отличию действительной картины распределения напряжений от расчетной, осуществляемой в предположении об однородности бетона.

В настоящей работе на основе экспериментальных данных рассматривается вопрос расчета и оценки напряжений и несущей способности бетонных и железобетонных сжатых и изгибаемых элементов с учетом вышеупомянутой неоднородности бетона.

1. Расчет сжатых бетонных элементов

У однородных одноосно-сжатых бетонных элементов с поперечным сечением F , независимо от деформационных свойств материала, напряжение

$\sigma(t)$ определяется по формуле $\sigma(t) = \frac{P(t)}{F}$, где P - сжимающая сила. Если

же подвергаются сжатию неоднородные элементы, то в большинстве случаев может быть принято условие однородной деформации, то есть независимос-

ти компонент деформации от координат.

Положим, что деформационные свойства бетона определяются линейной теорией наследственности [7], при этом неоднородность связана не с различием возраста бетона в разных точках, как это принимается в работе [8], а с различием протекания процесса твердения и старения в связи с различной влажностью бетона, то есть соотношение между деформацией ε и напряжением σ может быть записано так:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(x, y, t)}{E(x, y, t)} + \int_0^t K(t, \tau, x, y) \sigma(x, y, \tau) d\tau \quad (1.1)$$

где x и y - координаты сечения, E - модуль упругости, K - ядро ползучести, определяемое соотношением

$$K(t, \tau, x, y) = - \frac{\partial C(t - \tau, \tau, x, y)}{\partial \tau}$$

$C(t, \tau, x, y)$ - мера ползучести, зависящая от времени t , возраста τ и координат x и y поперечного сечения.

Уравнение (1.1) может быть рассматриваемо как интегральное типа Вольтерра II рода относительно $\sigma(x, y, t)$, решение которого запишется так:

$$\sigma(x, y, t) = E(x, y, t) \varepsilon(t) - \int_0^t E(x, y, \tau) \varepsilon(\tau) H(t, \tau, x, y) d\tau \quad (1.2)$$

где $H(t, \tau, x, y)$ - резольвентное ядро интегрального ядра

$$E(x, y, t) K(t, \tau, x, y)$$

Интегральное условие равновесия

$$\int_F \sigma(x, y, t) dF = P(t) \quad (1.3)$$

перепишем в виде следующего уравнения:

$$\varepsilon(t) \int_F E(x, y, t) dF - \int_0^t \varepsilon(\tau) \int_F E(x, y, \tau) H(t, \tau, x, y) dF d\tau = P(t) \quad (1.4)$$

которое может быть решено относительно $\varepsilon(t)$ следующим образом:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\int_F E(x, y, t) dF} \left[P(t) + \int_0^t P(\tau) \chi(t, \tau, x, y) d\tau \right] \quad (1.5)$$

где

$$\chi(t, \tau, x, y) = \chi_1(t, \tau, x, y) \frac{\int_F E(x, y, \tau) dF}{\int_F E(x, y, t) dF}$$

а $\chi_i(t, \tau, x, y)$ - резольвента интегрального ядра

$$\frac{\int_F E(x, y, \tau) H(t, \tau, x, y) dF}{\int_F E(x, y, t) dF}$$

Распределение напряжений $\sigma(x, y, t)$ определяется по формуле (1.2) после подстановки в него выражения (1.5).

Трудности использования этого решения связаны с необходимостью определения резольвентных ядер $H(t, \tau, x, y)$ и $\chi(t, \tau, x, y)$ с помощью рядов Неймана [9], сходимость которых для уравнений (1.1) и (1.4), как для уравнений Вольтерра II рода, всего имеет место. Это обстоятельство препятствует практическому применению настоящего решения. В связи с этим сделаем допущение о подобии неоднородности в отношении упруго-мгновенных и реологических свойств материала, выражающемся в выполнении следующих условий:

$$E(x, y, t) = \frac{E_0(t)}{\eta(x, y)}; \quad C(t - \tau, \tau, x, y) = C_0(t - \tau, \tau) \cdot \eta(x, y) \quad (1.6)$$

где $\eta(x, y)$ - некоторая функция, определяющая неоднородность механического поведения материала, E_0 и C_0 - модуль упругости и мера ползучести в некоторой точке. Принятие этого допущения связано с отнесением части измеряемой деформации к упругой или реологической, что, как известно, всегда условно. Рассмотрение какой-либо доли деформации ползучести как упругой, естественно, приведет, как правило, к расхождению с экспериментальной деформационной кривой лишь в первое время после приложения нагрузки. С другой стороны, допущение это приводит к существенному упрощению расчета напряжений. В этом случае распределение напряжений определяется по следующей формуле, полученной аналогично (1.1) - (1.5)

$$\sigma(x, y, t) = \frac{P(t)}{\eta(x, y) \int_F \frac{dF}{\eta(x, y)}} \quad (1.7)$$

Таким образом, при допущениях (1.6) напряжения в сжатом элементе могут быть определены вне зависимости от протекающей ползучести или от модуля упругости с использованием лишь вида их изменения по координатам, определяемого функцией $\eta(x, y)$.

Определенные трудности здесь связаны с построением функции $\eta(x, y)$, так как проведение эксперимента возможно лишь на образцах достаточно больших размеров, в пределах которых неоднородность уже проявляется; таким образом, для построения функции $\eta(x, y)$ мы можем лишь использовать экспериментальные данные вырезанных из массива образцов, центр тяжести которых соответствует той или иной точке массива.

Рассмотрим расчет напряжения в поперечном сечении колонн на основе

экспериментальных данных о неоднородности легкого бетона на литоидной пемзе [6], загруженного в возрасте 28 дней, в направлении, перпендикулярном слою бетонирования. Деформационные кривые аппроксимировались следующими выражениями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{нар}}(t) &= \sigma_{\text{нар}} \left\{ 1,523 \left[1 - 0,5 \left(e^{-0,005t} + e^{-0,06t} \right) \right] + 1,158 \right\} 10^{-4} \\ \varepsilon_{\text{вн}}(t) &= \sigma_{\text{вн}} \left\{ 0,6558 \left[1 - 0,5 \left(e^{-0,005t} + e^{-0,06t} \right) \right] + 0,4986 \right\} 10^{-4}\end{aligned}\quad (1.8)$$

где значения σ берутся в размерности МПа, наружные слои соответствуют образцам с диаметром 5,5 см, выбуренным из наружного слоя цилиндрического массива с радиусом r_0 , причем центры тяжести этих образцов находятся на расстоянии 4,5 см от поверхности, а внутренние слои соответствуют образцам, выбуренным из внутренних слоев, независимо от расстояния от поверхности.

При принятии условия, что деформации в направлении оси колонны не зависят от r , соотношения (1.8) могут быть переписаны так:

$$\varepsilon(r) = \sigma \eta(r) \left\{ 0,6658 \left[1 - 0,5 \left(e^{-0,005t} + e^{-0,06t} \right) \right] + 0,4986 \right\} 10^{-4} \quad (1.9)$$

где $\eta(r) = 1$ при $r < r_0 - 9$ см, $\eta(r) = 2,322$ при $r = r_0 - 4,5$ см. При принятии наименее благоприятной аппроксимации

$$\eta(r) = \frac{1}{1 - ce^{\chi r}} \quad (1.10)$$

где предполагается, что на поверхности образца ($r = r_0$) материал полностью теряет способность сопротивлению ($\eta(r_0) \rightarrow \infty$), получим

$$c = \left(1 - \frac{1}{2,322} \right)^{\frac{r_0}{4,5}}, \quad \chi = -\frac{1}{4,5} \ln \left(1 - \frac{1}{2,322} \right)$$

Результаты, вычисленные по формуле (1.7) в зависимости от радиуса колонны r_0 , представлены в табл. 1, где $\frac{\sigma_{\text{max}}}{P}$ соответствуют точкам оси ко-

лонны, где по расчету напряжения наибольшие, $\frac{\sigma_{\text{уср}}}{P}$ соответствуют от-

сутствию учета неоднородности, а $k_{\text{пер}} = \frac{\sigma_{\text{max}}}{\sigma_{\text{уср}}}$

Как указано в работе [10], у легких бетонов, находящихся в условиях естественных атмосферных воздействий, образуется визуально наблюдаемый слой с глубиной 8-10 см, и именно в пределах этого слоя имеет место падение прочности и увеличение ползучести. Внутри же бетонного массива прочность и деформационные свойства практически не зависели от места пробуривания образцов.

Естественным представляется для $\eta(r)$ принять следующую ступенчатую

аппроксимацию:

$$\eta(r) = \begin{cases} 1, & r \leq r_0 - 9 \text{ см} \\ 2,322, & r > r_0 - 9 \text{ см} \end{cases} \quad (1.11)$$

что находится в согласии с (1.8) и (1.9).

Результаты расчета согласно (1.11), приведенные в табл. 1, несущественно отличаются от данных, полученных согласно (1.10), при этом предпочтение, видимо, должно быть отдано аппроксимации (1.11), приводящей к более простым вычислениям.

Таблица 1

*Влияние учета неоднородности бетона
на расчетные характеристики сжатых колонн*

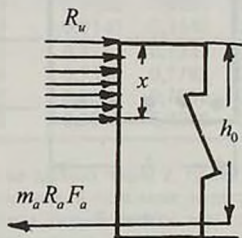
r_0 (см)	$\frac{\sigma_{\text{ср}}}{P} \cdot 10^4$ $\left(\frac{1}{\text{см}^2} \right)$	Аппроксимация (1.10)		Аппроксимация (1.11)		Расчет по предельным состояниям		
		$\frac{\sigma_{\text{ср}}}{P} \cdot 10^4$ $\left(\frac{1}{\text{см}^2} \right)$	$k_{\text{пер}}$	$\frac{\sigma_{\text{ср}}}{P} \cdot 10^4$ $\left(\frac{1}{\text{см}^2} \right)$	$k_{\text{пер}}$	$N_{\text{нес}}$ с учетом неоднородн. (т)	$N_{\text{нес}}$ с без учета неоднородн. (т)	$k_{\text{осл}}$
15	14.147	28.779	2.034	27.114	1.917	47.62	62.55	0.761
20	9.958	14.761	1.855	13.199	1.656	89.16	111.20	0.802
25	5.093	8.743	1.720	7.672	1.506	144.60	173.35	0.834
30	3.537	5.834	1.650	4.984	1.409	213.94	250.20	0.855
40	1.989	2.905	1.460	2.575	1.294	394.32	444.80	0.886
50	1.273	1.736	1.364	1.565	1.229	630.30	695.00	0.907
60	0.884	1.148	1.299	1.050	1.188	921.88	1000.80	0.921

Определение напряжений в колоннах выше осуществлялось в предположении линейной связи между деформациями и напряжениями, однако, как известно, отчетливо проявляющаяся нелинейность упомянутых характеристик бетона может привести к расхождению с расчетными данными, в особенности в условиях, когда напряжения близки к достижению прочности. Это и предопределяет использование расчета по предельным состояниям [11]. Результаты расчета несущей способности колонн с учетом разупрочнения поверхностного слоя, согласно данным, полученным авторами для бетона на литоидной пемзе при нагружении в направлении перпендикулярном слоям бетонирования через 5,5 лет после изготовления ($R_{\text{нар}} = 19,9 \text{ МПа}$, $R_{\text{нл}} = 27,8 \text{ МПа}$) также представлены в табл. I вкпе с отношением предельных значений $N_{\text{нес}}$ с учетом и без учета неоднородности $k_{\text{осл}}$.

Из данных табл. I можно сделать вывод о том, что, вообще говоря, неоднородность незащищенного от атмосферных воздействий бетона, связанная с различием протекания процесса твердения в наружных и внутренних слоях сжатых элементов, может привести к существенному перераспределению напряжений, однако при расчете на прочность по предельным состояниям влияние неоднородности значительно менее существенно, при этом, естественно, с увеличением размера сечения колонны снижение расчетной несущей способности, определяемое коэффициентом ослабления $k_{\text{осл}}$, уменьшается.

2. Расчет изгибаемых элементов из железобетона

Расчет изгибаемых элементов здесь осуществляется для балок прямоугольного сечения с распространением результатов для плит при беспредельном увеличении ширины балок. В основе расчета положено определение несущей способности в виде предельного изгибающего момента $M_{пред}$ по обычной методике [11]. Аналогично п.1, принимается, что наружная полоса сечения с толщиной c имеет прочность $R_{нар}$, отличную от прочности внутренней части сечения $R_{вн}$. Для балок прямоугольного сечения в случае однородного бетона имеем следующие соотношения статики [11] (фиг.1):



фиг.1

$$m_a R_a F_a = R_{вн} b x_0 \quad (2.1)$$

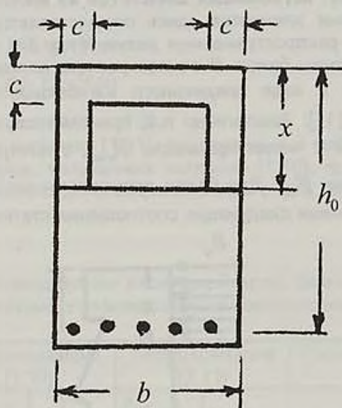
$$M_{пред}^0 = R_{вн} b x_0 \left(h_0 - \frac{x_0}{2} \right) \quad (2.2)$$

где m_a - коэффициент условий работы арматуры, b - ширина изгибаемого элемента, F_a - площадь поперечного сечения арматуры, h_0 - расстояние от кромки сжатой области до центра тяжести арматуры, x_0 - высота сжатой зоны однородного элемента, R_a - прочность арматуры. Здесь площадь сечения арматуры F_a ограничена условием $x_0 < 0,55h_0$.

При рассмотрении изгиба балок с учетом уменьшения прочности наружного слоя с толщиной c (фиг.2) до значения $R_{нар}$, вместо соотношений (2.1) и (2.2) будем иметь

$$m_a R_a F_a = R_{вн} (b - 2c)(x - c) + R_{нар} c(2x + b - 2c) \quad (2.3)$$

$$M_{пред} = R_{вн} (x - c)(b - 2c) \left(h_0 - c - \frac{x - c}{2} \right) + \\ + R_{нар} \left[2cx \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) + (b - c)c \left(h_0 - \frac{c}{2} \right) \right] \quad (2.4)$$



фиг. 2

Как указано в работе [11], на основе анализа экспериментальных данных, проведенных для железобетонных балок, при $\frac{x}{h_0} > 0,55$ разрушение балки

происходит от продавливания бетона, в то время как при $\frac{x}{h_0} < 0,55$ разрушению предшествует существенное увеличение ее прогиба в связи с достижением предела текучести у арматуры. Естественно, требование $\frac{x}{h_0} < 0,55$ является

необходимым при проектировании балок как для однородного, так и для неоднородного бетона. В табл. 2 приведены численные значения коэффициентов $k_{осл} = \frac{M_{пред}}{M_{пред}^0}$ при условии $R_{нар} = 0,7R_{вн}$, что согласуется с данными

[2, 3, 12] и могут быть приняты ориентировочными и для бетонов, исследования возрастной неоднородности которых не проводилось.

Определение значений $k_{осл}$ осуществлено следующим способом. Принято армирование балки, обеспечивающее $x_0 = h_0 / 3$ при этом расчетные значения x во всех рассмотренных случаях не достигали $0,55 h_0$. Учет ослаблений периферийных областей сечения балки, определяющих ее неоднородность, приводил к увеличению x , но уменьшение предельно воспринимаемого изгибающего момента было незначительным и не достигало 9%.

Во второй части табл. 2 рассматривались наиболее неблагоприятные случаи изгиба балки при предельном ее армировании $x_0 = 0,55 h_0$, при этом ослабление поверхностных слоев балки должно привести к недогрузке арматуры, так как увеличение значения x не может быть обоснованным, то есть условие (2.3) не удовлетворяется.

Таблица 2

Таблица коэффициентов ослаблений $k_{осл}$ балок при изгибе вследствие неоднородности бетона

Изгиб при $x_0 = \frac{h_0}{3}$	$\frac{b(см)}{h(см)}$	20	40	60	80	∞
	50	0,9186	0,9343	0,9385	0,9405	0,9458
	40	0,9172	0,9280	0,9309	0,9323	0,9358
	30	0,9155	0,9201	0,9213	0,9219	0,9234
	20	0,9140	0,9140	0,9140	0,9140	0,9140
Изгиб при предельном армировании $x = x_0 = 0,55h$	50	0,7172	0,7947	0,8205	0,8334	0,8716
	40	0,7142	0,7785	0,8000	0,8107	0,8429
	30	0,7090	0,7534	0,7680	0,7752	0,7969
	20	0,7018	0,7098	0,7125	0,7138	0,7178

Как можно заключить из данных табл. 2, проектирование железобетонных балок и плит, эксплуатируемых в условиях непосредственных атмосферных воздействий, целесообразно осуществлять при относительно малом количестве арматуры, что соответствует относительно малым значениям x . Отметим, что при рассмотрении поперечного изгиба (с учетом касательных напряжений от поперечных сил) ситуация оказывается более благоприятной, так как наибольшие касательные напряжения возникают в средней области балки, где прочностные свойства материала не являются сниженными.

Основные выводы

1. Учет возрастной неоднородности бетона может привести к существенному расхождению значений расчетных и действительных напряжений (см. значения $k_{пер}$ в табл. 1).

2. Влияние возрастной неоднородности бетона на результаты прочностных расчетов по несущей способности значительно менее существенно, причем оно тем существеннее, чем меньше размеры конструкции (см. значения $k_{осл}$ в табл. 1 и 2). Поскольку значения $k_{осл}$ в табл. 1 и 2 превышают значения коэффициента неоднородности бетона, принимаемые в пределах 0,55- 0,65 для расчета несущей способности бетона, то, вероятно, возрастная неоднородность бетона может быть и не учитываемой при прочностных расчетах.

3. При проектировании железобетонных изгибаемых элементов имеет смысл избегать предельного армирования, так как при этом ($x_0 / h_0 = 0,55$) влияние возрастной неоднородности бетона на несущую способность изгибаемого элемента оказывается более существенным, чем при меньшем армировании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kemi Torao, Hiraga Tomoaki, Kurabayashi Kiyoshi, Shinozaki Tooru, Aramaki Tetsuo. Strenght distribution of massive concrete Rev. 33 rd Gen. Meet. Cem. Assoc. Jap. Techn. Sess. Tokyo, 1979, Synos, Tokyo, 1979, p. 241-243.
2. Худавердян В.М. О некоторых свойствах летнего бетона. - Сб. Тр. совещания по теории технологии бетонов.- Ереван. Изд. АН АрмССР, 1956, с.287-304.

3. *Ботвина Л.М.* Изучение физико-механических свойств силикатного бетона в условиях сухого и жаркого климата. Ст. Материалы I Всесоюзного координационного совещания по проблеме технологии бетонных работ в условиях жаркого климата. 1970. Ташкент, Узбекистан, 1974, с. 124-127.
4. *Ашрабов А.Б., Тарасов О.Г., Сайганов Р.Ш.* Влияние сухого жаркого климата на прочностные и деформативные свойства бетона.- Строительство и архитектура Узбекистана. 1972, №11, с.8-9.
5. *Reichard T.W.* Creep and drying shrinkage of lightweight and normal-weight concretes. NBS. Monogr. U.S. Dept. Commerce, 1964, №74, p. 111.
6. *Карапетян К.С., Карапетян К.А.* Исследование неоднородности прочности, модуля деформации и ползучести бетонного элемента.- Изв. АН АрмССР. Механика. 1983, т.36, №2, с. 37-53.
7. *Арутюнян Н.Х.* Некоторые вопросы ползучести.- М.- Л.: Гостехтеориздат. 1952. 323 с.
8. *Арутюнян Н.Х.* Теория ползучести неоднородно-стареющих тел. Препринт. №170. М. 1981. 75 с.
9. *Мизлин С.Г.* Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники.- М.- Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1949, 380 с.
10. *Карапетян К.С., Карапетян К.А.* Прочность и деформации различных зон сечения бетонного цилиндра при сжатии.- Изв. АН АрмССР. Механика 1982, т.35, №4, с. 56-67.
11. *Сахновский К.В.* Железобетонные конструкции.- М.: Госстройиздат, 1950, 839 с.
12. *Карапетян К.С., Карапетян К.А.* Влияние высыхания на анизотропию прочности и модуль деформации бетона.- Теоретична и приложна механика. Варна. 1981. Докл. кн.I. София. 1981, с.262-267.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
29.04.1994

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО
СОСТАВНОГО КЛИНА, СОДЕРЖАЩЕГО ЩЕЛЬ

Акопян В.Н.

Վ.Ն.Հակոբյան

Ճնգր պարունակող անիզոտրոպ բաղադրյալ սեպի
համար մի խառը խնդրի մասին

Աշխարհընդուն դիրսրվվում է զանաչին անիզոտրոպիայով օժտված երկու քարքեր սեպերից կազմված բաղադրյալ սեպի հակահարթ լարվածային վիճակը, երբ այն սեպերի միացման գծի երկայնքով թուլացված է վերջավոր ճեղքով, որի ափերից մեկի վրա փրված են լարումները, իսկ մյուս ափի վրա ազդում է հարթ ինքնով բացարձակ կոշի դրոշմ:

Սրացված են խնդրի որոշիչ հավասարումները, երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների փոխրով, եւ կառուցված են երանց փակ լուծումները:

V.N.Hakobian

On a mixed problem for an anisotrope composite wedge involving a crack

Много работ посвящено исследованию напряженно-деформированного состояния однородных и кусочно-однородных тел, содержащих концентраторы напряжения различного типа. Отметим из них работы [1-6], которые наиболее тесно связаны с настоящей работой.

Здесь рассматривается антиплоское напряженное состояние анизотропного составного клина, содержащего щель, на одном из берегов которой действует штамп с плоским основанием. Построено замкнутое решение поставленной задачи.

1. Пусть упругий составной клин из двух разнородных клиньев, изготовленных из материалов, обладающих цилиндрической анизотропией, с углами раствора α и β соответственно, по линии соединения на отрезке $[a, b]$ ослаблен щелью и деформируется под воздействием плоского штампа, который действует на нижний берег щели, а также касательных напряжений $\tau_i(r)$, приложенных к верхнему берегу щели. При этом считается, что боковые кромки клиньев свободны от нагрузок, ось цилиндрической анизотропии проходит через вершину клина и имеет место соотношение $\alpha\alpha_1 = \beta\alpha_2 = \gamma$.

Здесь $\alpha_i = \sqrt{1 - a_{44}^{(i)} / a_{33}^{(i)}}$ ($i = 1, 2$) комбинации упругих постоянных клиньев.

Необходимо определить контактные напряжения под штампом и по линии соединения клиньев, коэффициенты их интенсивностей в вершинах щели, а также раскрытие щели.

Для определенности в дальнейшем все величины, касающиеся верхнего или нижнего клиньев, будем снабжать индексами 1 и 2, соответственно.

Тогда, поставленная задача математически формулируется в виде следую-

щей смешанной граничной задачи:

$$\tau_{\vartheta_z}^{(1)}(r, a) = \tau_{\vartheta_z}^{(2)}(r, -\beta) = 0; \quad (0 < r < \infty)$$

$$\tau_{\vartheta_z}^{(1)}(r, 0) = \tau_{\vartheta_z}^{(2)}(r, 0); \quad w_1(r, 0) = w_2(r, 0); \quad (0 < r < a, \quad b < r < \infty) \quad (1.1)$$

$$\tau_{\vartheta_z}^{(1)}(r, 0) = \tau_1(r); \quad w_2(r, 0) = 0; \quad (a < r < b)$$

Заметим, что функции перемещения $w_i(r, \vartheta)$ ($i = 1, 2$), каждая в области своего определения, удовлетворяют уравнению [7]

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_i}{\partial r} - \frac{2\lambda_i}{r} \frac{\partial^2 w_i}{\partial r \partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \vartheta^2} = 0 \quad (1.2)$$

где $\lambda_i = a_{45}^{(i)} / a_{33}^{(i)}$ - соотношение упругих постоянных соответствующих материалов [7].

Интегрируя уравнения (1.2) при помощи интегрального преобразования Меллина и удовлетворяя условиям (1.1), для определения меры раскрытия щели $w(r) = w_1(r, 0) - w_2(r, 0)$ ($a < r < b$) и скачка напряжений, действующих на берегах щели, $\tau(r) = \tau_1(r) - \tau_2(r)$ ($a < r < b$), получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$r\tau(r) - \frac{\nu_2}{\gamma} \int_a^b \frac{(rr_0)^{\pi/2\gamma}}{r_0^{\pi/\gamma} - r^{\pi/\gamma}} w'(r_0) dr_0 = \lambda r \tau_1(r)$$

$$\nu_1 r w'(r) - \frac{1}{\gamma} \int_a^b \frac{r_0^{\pi/\gamma}}{r_0^{\pi/\gamma} - r^{\pi/\gamma}} \tau(r_0) dr_0 = 0 \quad (1.3)$$

при условиях

$$\int_a^b \tau(r) dr = T_0; \quad w(a) = w(b) = 0 \quad (1.4)$$

Здесь

$$\nu_i = \frac{a_i a_{44}^{(i)}}{d_i}; \quad d_i = \left(a_{45}^{(i)}\right)^2 - \left(a_{44}^{(i)}\right)^2; \quad (i = 1, 2)$$

$$T_0 = \int_a^b \tau_1(r) dr - T_2; \quad \lambda = 1 + \nu_2 / \nu_1$$

а T_2 - действующее на штамп усилие.

При этом контактные напряжения вне щели определяются формулой

$$\tau_{\partial z}^{(j)}(r) = \frac{v_1 v_2}{\gamma r (v_1 + v_2)} \int_a^b \frac{(rr_0)^{\pi/2\gamma}}{r_0^{\pi/2\gamma} - r^{\pi/2\gamma}} w'(r_0) dr_0 \quad (0 < r < a, b < r < \infty) \quad (1.5)$$

Чтобы построить решение системы (1.3), перейдем к новым переменным $x = r^{\pi/2\gamma}$, $s = r_0^{\pi/2\gamma}$ и введем в рассмотрение новые функции $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2$) по формулам

$$\varphi_1(x) = x^{2\gamma/\pi} \tau(x^{2\gamma/\pi}); \quad \varphi_2(x) = v_1 x^{2\gamma/\pi} w'(x^{2\gamma/\pi}). \quad (1.6)$$

Далее, продолжив эти функции на отрицательную полуось соответственно нечетным и четным образом, придем к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) - \frac{\nu}{\pi} \int_L \frac{\varphi_2(s)}{s-x} ds &= f(|x|) \operatorname{sgn} x \\ \varphi_2(x) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi_1(s)}{s-x} ds &= 0 \end{aligned} \quad ; \quad (x \in L) \quad (1.7)$$

условия же (1.4) примут вид:

$$\int_{a_1}^b \frac{\varphi_1(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2\gamma} T_0; \quad \int_{a_1}^b \frac{\varphi_2(x)}{x} dx = 0 \quad (1.8)$$

где

$$f(x) = \lambda x^{2\gamma/\pi} \tau_1(x^{2\gamma/\pi}); \quad \nu = v_2 / v_1$$

$$a_1 = a^{\pi/2\gamma}; \quad b_1 = b^{\pi/2\gamma}; \quad L = (-b_1, -a_1) \cup (a_1, b_1)$$

Умножая второе из уравнений (1.6) на $\pm\sqrt{\nu}$ и суммируя с первым, для определения функций $\psi_{\pm}(x) = \varphi_1(x) \pm \sqrt{\nu} \varphi_2(x)$ получим отдельные интегральные уравнения:

$$\psi_{\pm}(x) \mp \frac{\sqrt{\nu}}{\pi} \int_L \frac{\psi_{\pm}(s)}{s-x} ds = f(|x|) \operatorname{sgn} x \quad (x \in L) \quad (1.9)$$

Очевидно, что после определения функций $\psi_{\pm}(x)$ из (1.9), легко найти функции $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2$) по формулам:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2} [\psi_+(x) + \psi_-(x)]; \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{\nu}} [\psi_+(x) - \psi_-(x)] \quad (1.10)$$

2. Приступим к решению уравнений (1.9) в случае, когда щель конечная и не выходит на вершину клиньев, т.е. когда $0 < a < b < \infty$.

Общее решение уравнений (1.9) имеют вид [6]

$$\psi_{\pm}(x) = \frac{f(|x|) \operatorname{sgn} x}{1+\nu} \pm \frac{\sqrt{\nu} X(\mp x)}{1+\nu} \left[\frac{1}{\pi} \int_L \frac{f(|s|) \operatorname{sgn} s}{X(\mp s)(s-x)} ds + p^{\pm}(x) \right] \quad (x \in L) \quad (2.1)$$

Здесь

$$X(x) = -\sqrt{g} \operatorname{sgn} x \begin{cases} (b_1+x)^{-\gamma_1} (a_1+x)^{\gamma_1-1} (x-a_1)^{-\gamma_1} (b_1-x)^{\gamma_1-1} & (a_1 < x < b_1) \\ (b_1+x)^{-\gamma_1} (-a_1-x)^{\gamma_1-1} (a_1-x)^{-\gamma_1} (b_1-x)^{\gamma_1-1} & (-b_1 < x < -a_1) \end{cases}$$

$p^{\pm}(x) = C_1^{\pm} x + C_0^{\pm}$ - многочлен первой степени с неизвестными коэффициентами c_j ($j=0,1$) и

$$0 < \gamma_1 = \frac{1}{2\pi} \arg g < 1 \quad \left(g = (1-i\sqrt{\nu}) / (1+i\sqrt{\nu}) \right)$$

При этом, под $\arg g$ нужно понимать то значение аргумента числа g , которое находится в интеграле $(0, 2\pi)$.

Подставляя значения функций $\psi_{\pm}(x)$ из (2.1) в (1.10) и учитывая при этом нечетность $\varphi_1(x)$ и четность $\varphi_2(x)$, получим

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) = & \frac{f(|x|) \operatorname{sgn} x}{1+\nu} - \frac{\sqrt{\nu}}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_L \left[\frac{X(x)}{X(s)} - \frac{X(-x)}{X(-s)} \right] \frac{f(|s|) \operatorname{sgn} s}{s-x} ds + \right. \\ & \left. + c_0 [X(x) - X(-x)] + c_1 x [X(x) + X(-x)] \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) = & \frac{1}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_L \left[\frac{X(x)}{X(s)} + \frac{X(-x)}{X(-s)} \right] \frac{f(|s|) \operatorname{sgn} s}{s-x} ds + \right. \\ & \left. + c_0 [X(x) + X(-x)] + c_1 x [X(x) - X(-x)] \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $c_1 = c_1^- = -c_1^+$; $c_0 = c_0^+ = c_0^-$.

Удовлетворяя условиям (1.8), найдем

$$c_0 = -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{f(|s|) ds}{|s| X(s)} - \frac{1+i\sqrt{\nu}}{\gamma} a_1 b_1 T_0; \quad c_1 = -\frac{I_1 + c_0 I_2}{I_3}$$

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{x} \int_L \left[\frac{X(x)}{X(s)} + \frac{X(-x)}{X(-s)} \right] \frac{f(|s|) \operatorname{sgn} s}{s-x} ds$$

$$I_j = \int_{a_1}^{b_1} [X(x) + (-1)^j X(-x)] \frac{dx}{x^{j-1}},$$

После определения $\varphi_j(x)$ ($j=1,2$), при помощи интегрирования и формулы (1.5) легко найти раскрытие щели, контактные напряжения вне щели, а также коэффициенты интенсивности контактных напряжений в концевых точках щели.

Вычислим вышеуказанные величины в одном частном случае, когда $f(x) = T_1 x$, т.е. в случае $\tau_1(x) = \frac{T_1}{\lambda} x^{1-2\gamma/\pi}$. Подставляя значение функции $f(x)$ в (2.2) и (2.3), вычисляя полученные интегралы и переходя к исходным переменным, для $\tau_2(r)$ и $w'(r)$ получим следующие выражения:

$$\tau_2(r) = \frac{1}{r} \left[\frac{T_1}{\lambda} r^{\pi/2\gamma} - (A_3 r^{3\pi/2\gamma} + A_1 r^{\pi/2\gamma}) Q^+(r^{\pi/2\gamma}) - (A_2 r^{\pi/\gamma} + A_0) Q^-(r^{\pi/2\gamma}) \right] \quad (2.4)$$

$$w'(r) = \frac{1}{v_1 r} \left[(B_3 r^{3\pi/2\gamma} + B_1 r^{\pi/2\gamma}) Q^-(r^{\pi/2\gamma}) + (B_2 r^{\pi/\gamma} + B_0) Q^+(r^{\pi/2\gamma}) \right] \quad (2.5)$$

$$(a < r < b)$$

Здесь введены обозначения

$$Q^\pm(x) = X(x) \pm X(-x)$$

$$A_j = \frac{T_1(1+i\sqrt{v})}{2(1+v)} I_j - \frac{\sqrt{v}}{2(1+v)} c_j; \quad B_j = -\frac{A_j}{\sqrt{v}}; \quad (j=0,1,2,3)$$

$$l_0 = -\frac{1}{3} \gamma_1 (1-\gamma_1) (2\gamma_1-1) (b_1-a_1) (2a_1^2+2b_1^2-a_1b_1)$$

$$l_1 = -2\gamma_1 (1-\gamma_1) (a_1^2+b_1^2) - a_1b_1 (2\gamma_1-1)^2$$

$$l_2 = (b_1-a_1) (2\gamma_1-1); \quad l_3 = 1; \quad c_j = 0 \quad (j=2,3)$$

Далее, используя формулы (1.5) и (2.5), для контактных напряжений вне щели и раскрытия щели получим:

$$\begin{aligned} \tau_{0z}(r) = & \frac{2ivg}{(1+v)(g-1)r} \left\{ (A_3 r^{3\pi/2\gamma} + A_1 r^{\pi/2\gamma}) [X_1(r^{\pi/2\gamma}) + X_2(r^{\pi/2\gamma})] + \right. \\ & \left. + (A_2 r^{\pi/\gamma} + A_0) [X_1(r^{\pi/2\gamma}) - X_2(r^{\pi/2\gamma})] - 2A_3 r^{\pi/2\gamma} \right\} \\ & (0 < r < a; \quad b < r < \infty) \quad (2.6) \end{aligned}$$

$$w(r) = \frac{1}{v_1} \int_a^r \left[(B_3 r^{3\pi/2\gamma} + B_1 r^{\pi/2\gamma}) Q^-(r^{\pi/2\gamma}) + (B_2 r^{\pi/\gamma} + B_0) Q^+(r^{\pi/2\gamma}) \right] \frac{dr}{r} \quad (a < r < b) \quad (2.7)$$

При этом

$$X_j(x) = (x + b_1)^{-\gamma_j} (x + a_1)^{\gamma_j-1} (x - a_1)^{-\gamma_j} (x - b_1)^{\gamma_j-1}$$

$$(j = 1, 2, \gamma_2 = 1 - \gamma_1, \quad 0 < x < a_1; \quad b_1 < x < \infty)$$

Теперь вычислим коэффициенты интенсивности $\tau_{9z}(r)$ в концевых точках щели a и b . С этой целью предположим, что $\gamma_1 > \gamma_2$. Тогда будем иметь

$$K_{III}(a) = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow a} (a^{\pi/2\gamma} - r^{\pi/2\gamma})^{\gamma_1} \tau_{9z}(r)$$

$$K_{III}(b) = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow b} (r^{\pi/2\gamma} - b^{\pi/2\gamma})^{\gamma_1} \tau_{9z}(r)$$

Вычисление этих пределов для $K_{III}(a)$ и $K_{III}(b)$ дает следующие значения:

$$K_{III}(a) = - \frac{i\nu\sqrt{\pi}g[A_3 a^{3\pi/2\gamma} + A_2 a^{\pi/\gamma} + A_1 a^{\pi/2\gamma} + A_0]}{2^{1/2-\gamma_1}(1+\nu)(g-1)a^{\frac{\pi(1-\gamma_2)}{2\gamma}+1}(a^{\pi/2\gamma} + b^{\pi/2\gamma})^{\gamma_1}(b^{\pi/2\gamma} - a^{\pi/2\gamma})^{1-\gamma_1}}$$

$$K_{III}(b) = \frac{i\nu\sqrt{\pi}g[A_3 b^{3\pi/2\gamma} - A_2 b^{\pi/\gamma} + A_1 b^{\pi/2\gamma} - A_0]}{2^{1/2-\gamma_1}(1+\nu)(g-1)b^{\frac{\pi(1-\gamma_1)}{2\gamma}+1}(a^{\pi/2\gamma} + b^{\pi/2\gamma})^{\gamma_1}(b^{\pi/2\gamma} - a^{\pi/2\gamma})^{1-\gamma_1}}$$

Аналогичным путем можно вычислить $K_{III}(a)$ и $K_{III}(b)$ в случае $\gamma_1 < \gamma_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман Д.И. Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов.- ДАН СССР, 1940, т.27, №4, с.330-334.
2. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости.- ПММ, 1962, т.26, вып.5, с.907-912.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.- М.: Наука, 1983. 488 с.
4. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.- М.: Наука, 1982. 344 с.
5. Мхитарян С.М. Об одном классе смешанных задач теории упругости.

Abstracts of Symposium "Continuum Mechanics and related Problems of Analysis" dedicated to the Centenary of Academician N.Muskhelishvili; Tbilisi, 1991, p.35.

6. *Мусхелишвили Н.М.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.- М.: Наука, 1966. 707 с.
7. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. - М.: Наука, 1977.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
28. 04. 1994

ЗАДАЧА ГАРАНТИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ РОБОТОМ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ПОЛОЖЕНИИ ЦЕЛЕВОЙ ТОЧКИ

Гукасян А. А., Казарян В. С.

Ա.Ա.Դուկասյան, Վ.Ս.Կազարյան

Ռոբոտի երեխա վորում ղեկավարման խնդիրը նպատակային կետի
մասին ոչ լրիվ ինֆորմացիայի դեպքում

Նկատարվում է կոպոնորուշող մանիպուլյատորի ղեկավարման խնդիրը, երբ օբյեկտի (նպատակա-
յին կետի) դիրքը հայտնի է որևէ լագմության ճշրությունը և այն ճշգրտվում է սպրքերի միջոցով տեղե-
կեպ է և քնդուար ձեռով, մանիպուլյատորի լոնեյի մուրեցման դեպքում: Կիրառելով երաշխավորված մե-
թոդ՝ լոնվում է մանիպուլյատորի լոնեյի օպերիմալ ըստ ժամանակի բերանը նստվածի վրա:

A. A. Gukasian, V. S. Kazarian

The Problem of Guaranteed Control of Robot when the Information
on the Purpose Point Location is Incomplete

Исследуется задача управления адаптивного робота, когда положение объекта (целевой точки)
известно с точностью некоторого множества и по мере приближения схвата манипулятора уточняет-
ся различными приборами непрерывно и дискретно. С применением гарантированного подхода ре-
шена задача синтеза, оптимального по времени приведения схвата манипулятора на отрезок.

Введение. Рассматривается управляемое движение адаптивного робото-
технического комплекса, который схематично показан на фиг. 1. Такие робо-
тотехнические комплексы включают в себе систему управления, исполнитель-
ное устройство-манипулятор (обычно многозвенный антропоморфный меха-
низм с пятью или шестью степенями подвижности), систему очувствления,
обеспечивающую сбор, обработку и передачу соответствующей информации
системе управления. Предполагается, что адаптивный манипулятор автомати-
чески корректирует алгоритм своего поведения при непредвиденных (в опре-
деленных пределах) изменениях как свойств самого робота и цели управле-
ния им, так и окружающей его производственной обстановки. В работе ис-
следуется возможность применения адаптивных робототехнических комплек-
сов при решении задачи управления, когда положение объекта (целевой точ-
ки) управляющей стороне известно с точностью некоторого множества и по
мере приближения схвата манипулятора уточняется различными приборами.

1. Постановка и математическая формулировка задачи управления.
Уравнения движения манипулятора представим в виде

$$\ddot{x} = F(x, M), \quad x(t_0) = x^0 \quad (1.1)$$

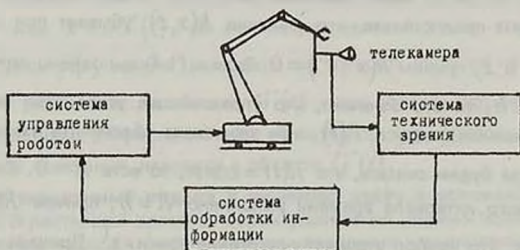
где $x - 2n$ - мерный вектор состояний манипулятора ($x_i = \alpha_i$, $x_{i+n} = \dot{\alpha}_i$,

$i = 1, 2, \dots, n$); α_i включают в себе углы в шарнирах и относительные перемещения звеньев, определяющие конфигурацию манипулятора в пространстве; $M - n$ - мерный вектор управления; t_0 - начальный момент времени.

Пусть начальное состояние манипулятора (схвата) x^0 задано, а конечная (целевая) точка x^1 известна неточно, и ее положение уточняется в процессе движения с помощью измерительных устройств. Информация о положении целевой точки передается в систему управления роботом, где она учитывается при формировании управляющих воздействий. Задача оптимального управления роботом при неполной информации о положении целевой точки состоит в том, что необходимо привести манипулятор (схват) из заданного начального положения в заранее неизвестное конечное положение x^1 с минимизацией некоторого функционала

$$J = \int_{t_0}^T \Phi(x, M) dt \rightarrow \min_{M \in P} \quad (1.2)$$

характеризующего качество переходного процесса.



фиг. 1

Предполагается, что в процессе движения манипулятора управляющему устройству известна не сама точка x^1 , а некоторое "пятно" (изменяющееся со временем), которому эта точка принадлежит. Точнее, в каждый текущий момент времени t на основе данных измерения определяется некоторое выпуклое множество $G(t) \subset R^{2n}$, которому принадлежит вектор x^1 (с вероятностью, равной единице). Область $G(t)$ можно определить векторами $z(t)$ и $R(t, x)$, где $z = z(t)$ некоторая точка области $G(t)$, а $R(t, x)$ - радиус-вектор каждой точки области $G(t)$ относительно $z(t)$. Обозначим через $R(t)$ максимальное значение функции $R(t, x)$, по x

$$R(t) = \max_{x \in G} |R(t, x)| \quad (1.3)$$

Таким образом, управляющее устройство манипулятором в момент времени t располагает вектором $z(t)$, скаляром $R(t)$ и условием $x^1 \in G(t)$. Вектор $z(t)$ можно интерпретировать как прогнозируемое значение вектора x^1 , а число

$R(t)$ - как максимально возможную погрешность прогноза. Будем считать, что вектор $z(t)$ вырабатывается на основе показаний некоторого прибора (оптического детектора, телекамеры и т.д.), после чего информация прибора обрабатывается и вычисляется точность показания прибора по формуле $h = h(x(t), z(t))$, где $x(t)$ - текущее значение фазового вектора (значение вектора $x(t)$ предполагается известным). Здесь $h(x, z)$ - скалярная функция, характеризующая возможность прибора-измерителя. Считаем, что текущее значение радиуса $R(t)$ удовлетворяет условию $R(t) = \min(R(t), h(x, z))$, то есть прибор либо уменьшает значение $R(t)$, либо оставляет его прежним (величина h осуществляет "срезку" радиуса $R(t)$)

$$\dot{h} = \dot{R} \leq 0, \quad R(t) \leq h(x(t), z(t)) \quad (1.4)$$

Для того, чтобы по мере приближения к цели положение точки x^1 уточнялось, будем предполагать, что функция $h(x, z)$ убывает при сближении векторов x и z , причем $h(x^1, x^1) = 0$. Если в (1.4) выполнено строгое неравенство $R < h$, то это означает, что управляющее устройство располагает лучшим значением радиуса $R(t)$, чем это может обеспечить измерительный прибор. Тогда будем считать, что $R(t) = \text{const}$, то есть $\dot{R} = 0$. Если в течение некоторого интервала времени выполнено $R = h$, причем $\dot{R}(t) \leq 0$, то это означает, что прибор уточняет положение точки x^1 . Процесс измерения должен удовлетворять двум основным требованиям: 1) непротиворечивость данных измерений в разные моменты времени; 2) непустота множества значений вектора x^1 , выделяемых измерениями.

Выбирая ту или иную функцию $h(x, z)$, можно описать различные возможности прибора измерителя. Выделим три типа зависимости $h(x, z)$. К первому типу отнесем те зависимости, в которых величина $h(x, z)$ изменяется плавно при приближении x к z . Так например, если точность прибора зависит от расстояния до наблюдаемого объекта, то функция h может принимать вид евклидовой длины. В этом случае при выполнении строгого неравенства в (1.4), в каждый текущий момент времени t должно выполняться условие

$$G(t + \Delta t) \subset G(t) \quad (\Delta t \rightarrow 0)$$

то есть непрерывное сужение области $G(t)$ по мере приближения фазового вектора x к z .

Ко второму типу зависимости отнесем дискретное изменение функции $h(x, z)$. Это означает, что информация о целевой точке может уточняться конечное число раз. Если обозначить через $t_i \in [t_0, T]$ ($i = 0, 1, \dots, n$) момен-

ты времени уточнения информации о положении целевой точки (T - момент совмещения фазового вектора $x(t)$ с x^1), то должно выполняться условие

$$G(t_{i+1}) \subset G(t_i) \subset \dots \subset G(t_0) \quad t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$$

Интервал времени $[t_i, t_{i+1})$ назовем интервалом пассивного наблюдения.

Третий тип изменения функции h является частным случаем второго типа, когда происходит скачкообразное изменение h . Введем множество $G^*(t)$, где $G(t) \subseteq G^*(t)$ - с максимальным радиусом $R^*(t)$ относительно точки $z = z(t)$.

Пусть возможность прибора-измерителя такова, что

$$h(x, z) = \begin{cases} R(t), & \text{при } x \notin G^*(t) \\ 0, & \text{при } x \in G^*(t), \text{ или } x \in \partial G^*(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

(1.5) означает, что пока фазовая точка x находится вне области $G^*(t)$, положение целевой точки не уточняется, а если выполняются условия $x \in G^*(t)$ или $x \in \partial G^*(t)$, то положение целевой точки становится известным. Здесь $R(t)$ можно трактовать как точность прибора на сравнительно больших расстояниях, а область $G^*(t)$ - как область эффективного срабатывания датчика (информационная область), то есть прибор дает практически точное показание, находясь в области $G^*(t)$.

2. Гарантированный подход к решению задач в условиях неопределенности. В настоящее время в теории управления широко используется гарантированный подход к решению задач управления и оценивания [1-6].

Обычно динамика управляемой системы с функционалом записывается в виде:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad u \in U, \quad t_0 \leq t \leq T$$

$$J = J[u] \rightarrow \min, \quad (2.1)$$

где $x \in R^n$ - фазовый вектор системы, u - вектор управляющих параметров, $U \subset R^n$ - область его возможных значений, t - время. При этом предполагается, что управляющая сторона в рамках ограничений $u \in U$ полностью располагает вектором u . Однако, на практике, в частности, в робототехнике, встречаются управляемые системы, в правые части уравнений движения которых входят параметры, находящиеся вне компетенции управляющей стороны. Эти параметры могут формироваться в процессе движения под действием неопределенных случайных факторов или другой активно действующей управляющей стороны. Обозначив вектор этих параметров через v , а область их возможных значений через V , можно записать уравнение динамики в виде

$$\dot{x} = F(x, u, v, t), \quad J = J[u, v]$$

$$u \in U \subset R^n, \quad \dot{z} = v, \quad v \in V \subset R^m, \quad t_0 \leq t \leq T \quad (2.2)$$

вектор V часто называют помехой.

Минимизация функционала $J[u, v]$ по управлению u зависит уже от конкретной реализации $v(t)$. Одним из возможных и часто используемых на практике подходов в этих условиях является гарантированный подход. При этом подходе строится управление u^* , называемое гарантирующим, и соответствующее значение J_* функционала J , такие, что в паре с любой реализацией помех $v(t)$ управление u^* обеспечивает (гарантирует) значение функционала, не превышающее J_* . Математически величины u^* , J_* удовлетворяют экстремальным соотношениям

$$J_* = \max_v \min_u J[u, v] = \max_v J[u^*, v] \quad (2.3)$$

Величина J_* , естественно, зависит от начального значения фазового вектора $x^0 = x(t_0)$. На значение J_* влияет также тот факт, какой класс управлений u рассматривается в задаче.

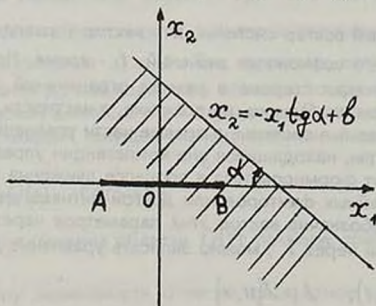
Отметим, что содержательная трактовка задачи гарантированного управления не ограничивается проблемами робототехники.

В задачах робототехники параметры u могут иметь смысл управляющих моментов и усилий, токов или напряжений в двигателях электроприводов и т.д. К числу параметров типа V могут относиться люфты в шарнирах и сочленениях, неопределенность в задании точек x^0 или x^1 , относительно которых известно лишь, что $x^0 \in G^0$, $x^1 \in G^1$ ($G^i \subset R^n$, $i=0,1$), неточность ориентации деталей, инструмента относительно схвата и т.д.

3. Задача гарантированного времени приведения на отрезок. Рассмотрим задачу гарантированного оптимального по времени приведения схвата манипулятора, движение которого описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= u \\ |u| &\leq 1, & x &= (x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

на отрезок AB , длиной $AB = 2a$ ($A(-a, 0)$, $B(a, 0)$) (фиг. 2)



фиг.2.

Пусть точность показания прибора $h(x, z)$ во время приближения схвата к объекту изменяется скачкообразно, по закону

$$h(x, z) = \begin{cases} |AB| & \text{при } x_2 > -\operatorname{tg} \alpha x_1 + b \\ 0 & \text{при } x_2 \leq -\operatorname{tg} \alpha x_1 + b \end{cases} \quad (3.2)$$

Из принципа максимума [7] следует, что оптимально управляющая функция имеет релейный вид $u = \pm 1$, а фазовыми кривыми, по которым схват манипулятора из полуплоскости $x_2 > -\operatorname{tg} \alpha x_1 + b$ приводится на границу l , являются дуги парабол семейства

$$\begin{aligned} u = +1: \quad x_1 &= \frac{1}{2}(x_2)^2 + s_1 \quad (s_1 = \text{const}) \\ u = -1: \quad x_1 &= -\frac{1}{2}(x_2)^2 + s_2 \quad (s_2 = \text{const}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Оптимально гарантированное время приведения на отрезок AB зависит от начальной позиции схвата. Предполагается, что точкой пересечения семейства парабол (3.3) с линией l , является точка A^1 с координатами $A^1(a^1, b^1)$ (фиг. 3)

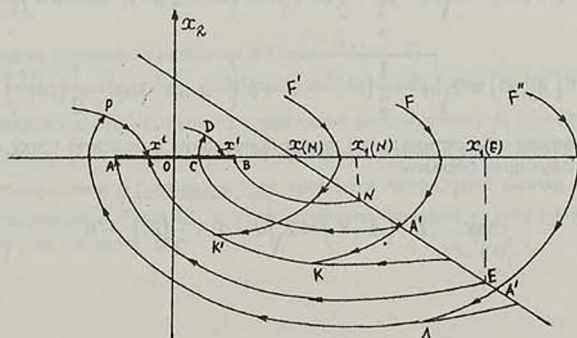
Здесь возможны три следующих частных случая:

а) $x_1(M) \leq a^1 \leq x_1(N)$, где $x_1(M) = b / \operatorname{tg} \alpha$

$$x_1(N) = (1 + b \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} \alpha (b - a \operatorname{tg} \alpha)}) / \operatorname{tg}^2 \alpha$$

В этом случае синтез оптимального приведения на любую точку x^1 отрезка AB имеет вид

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} -1 & \text{на дуге } F^1 A^1 K^1 \\ +1 & \text{на дуге } K^1 x^1 \end{cases} \quad (3.4)$$



фиг. 3

Гарантированным временем приведения на отрезок в случае а) является:

$$\begin{aligned} \max_{-a \leq x^1 \leq a} T(A^1, x^1) &= \max_{-a \leq x^1 \leq a} \left(2\sqrt{a^1 + \frac{1}{2}(b^1)^2} - x^1 + b^1 \right) = \\ &= 2\sqrt{a^1 + \frac{1}{2}(b^1)^2} + a + b^1 = T(A^1, A) \end{aligned}$$

то есть время приведения в точку A .

$$6) x_1(N) \leq a^1 \leq x_1(E), \text{ где } x_1(E) = \left(1 + b \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} \alpha (b + a \operatorname{tg} \alpha)} \right) / \operatorname{tg}^2 \alpha$$

Синтезом оптимального управления в случае б) являются

$$u_1(x_1, x_2) = \begin{cases} -1 & \text{на дуге } FA^1 \\ +1 & \text{на дуге } A^1CD \\ -1 & \text{на дуге } Dx^1 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\text{если } a^1 - \frac{1}{2}(b^1)^2 \leq x^1 \leq a$$

$$u_2(x_1, x_2) = \begin{cases} -1 & \text{на дуге } FA^1K \\ +1 & \text{на дуге } Kx^1 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\text{если } -a \leq x^1 \leq a^1 - \frac{1}{2}(b^1)^2$$

Точка C имеет следующие координаты $C\left(a^1 - \frac{1}{2}(b^1)^2, 0\right)$.

В случаях (3.5), (3.6) время приведения в целевую точку, соответственно, определяется из выражений

$$T^{(1)}(A^1, x^1) = 2\sqrt{x^1 - a^1 + \frac{1}{2}(b^1)^2} - b^1 \left(a^1 - \frac{1}{2}(b^1)^2 \leq x^1 \leq a \right)$$

$$T^{(2)}(A^1, x^1) = 2\sqrt{a^1 + \frac{1}{2}(b^1)^2} - x^1 + b^1 \left(-a \leq x^1 \leq a^1 - \frac{1}{2}(b^1)^2 \right)$$

Гарантированное оптимальное время приведения в целевую точку, определяется следующим образом:

$$T^* = \max_{a^1 - \frac{1}{2}(b^1)^2 \leq x^1 \leq a} T^{(1)}(A^1, x^1) = 2\sqrt{a - a^1 + \frac{1}{2}(b^1)^2} - b^1 \quad (3.7)$$

$$T_*^{(2)} = \max_{-a \leq x^1 \leq a^1 - \frac{1}{2}(b^1)^2} T^{(2)}(A^1, x^1) = 2\sqrt{a^1 + \frac{1}{2}(b^1)^2} + a + b^1 \quad (3.8)$$

Из (3.7) и (3.8) следует, что при $x^1 \in \left[a^1 - \frac{1}{2}(b^1)^2, a \right]$ гарантированным оптимальным временем приведения является время приведения в точку B , а при $x \in \left[-a, a^1 - \frac{1}{2}(b^1)^2 \right]$ - в точку A (фиг. 3).

Так как $b^1 = -\operatorname{tg} \alpha a^1 + b$, то $T(a^1) = T_*^{(1)} - T_*^{(2)}$ является непрерывной функцией от a^1 , которая на концах интервала $[x_1(N), x_1(E)]$ изменяет знак. Следовательно, существует точка $a^0 \in [x_1(N), x_1(E)]$, где $T(a^0) = 0$. То есть время оптимального приведения из точки $A^0(a^0, b^0) \in l$ в точки A и B одинаково.

Рассмотрим теперь случай в) $x_1(E) \leq a^1 < \infty$. Синтез оптимального управления имеет вид

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} -1 & \text{на дуге } F^*A^1 \\ +1 & \text{на дуге } A^1P \\ -1 & \text{на дуге } Px^1 \end{cases} \quad (3.9)$$

а время приведения на целевую точку

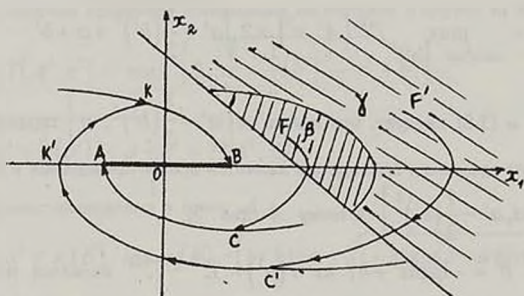
$$T(A^1, x^1) = 2\sqrt{x^1 - a^1 + \frac{1}{2}(b^1)^2} - b^1$$

Гарантированное оптимальное время приведения в случае в) равно

$$\max_{-a \leq x^1 \leq a} T(A^1, x^1) = T(A^1, B) = 2\sqrt{a - a^1 + \frac{1}{2}(b^1)^2} - b^1,$$

то есть равно времени приведения в точку B (фиг. 3).

Итак, парабола семейства (3.3), проходящая через точку $A^0(a^0, b^0)$, разделяет полуплоскость пассивного управления (наблюдения) $x_2 > -\operatorname{tg} \alpha x_1 + \bar{b}$, на две области β и γ (фиг. 4). Если начальная позиция находится в области β , то оптимальным гарантированным временем приведения схвата является время приведения в точку A , а если начальная позиция схвата находится в области γ , то - в точку B .



фиг. 4

Синтез управления, обеспечивающий гарантированный результат по быстрдействию, имеет вид:

$$u_1^*(x_1, x_2) = \begin{cases} -1 & \text{на дуге } FC \\ +1 & \text{на дуге } CA \end{cases} \quad (x_1^0, x_2^0) \in \beta$$

$$u_2^*(x_1, x_2) = \begin{cases} -1 & \text{на дуге } F'C' \\ +1 & \text{на дуге } C'K'K \\ -1 & \text{на дуге } KB \end{cases} \quad (x_1^0, x_2^0) \in \gamma$$

На фиг. 4 приведены качественные картины фазовых кривых и линий переключения управляющей функций, обеспечивающих решение задачи гарантированного управления на отрезке AB .

Согласно принципу оптимальности [7], при непрерывном уточнении положения целевой точки возможно применение метода динамического программирования [8]. Применение указанного метода, решение задачи приводит к исследованию уравнений типа Беллмана-Айзекса.

Авторы благодарят А.А.Меликяна за обсуждение задачи и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений.- М.: Наука, 1970, 420 с.
2. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска.- М.: Наука, 1978. 272 с.
3. Черноусько Ф.Л. Управляемый поиск подвижного объекта.- Изв. АН СССР, ПММ, 1980, т.44, вып. I.
4. Меликян А.А. Минимаксная задача управления при неполной информации о положении целевой точки.- Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1989, №2, с. 111-118.
5. Меликян А.А. Оптимальное гарантирующее управление динамической системой с поиском целевой точки.- ДАН СССР, 1991, т. 316, №4, с. 815-819.
6. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления.- М.: Наука, 1981. 288 с.

7. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. - М.: Наука, 1969.
8. Гукасян А.А. Управление роботом при неполной информации о положении объекта.- Тезисы докл. Межреспубликанской научно-практической конференции творческой молодежи. Минск, 1992, с. 138.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
31.08.1994

**ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ
ОРТОТРОПНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ
ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С
УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА**

Акопян А.С., Киракосян Р.М.

Ա.Ս. Հակոբյան, Ռ.Մ. Կիրակոսյան

Գծայնորեն փոփոխական հասկությունների օրոգորոգող օղակային սայի կայունության
առանցքային շարժման խնդիրը ընդլայնական սահմանի նաշվածությամբ:

Նախորդը լուծվում է գծայնորեն փոփոխական հասկությունների օրոգորոգող օղակային սայի հարթ խնդիրը, երբ սայը գտնվում է արտաքին ներքին կիրառված շտապկորոն ձգող ուժերի ազդեցության տակ: Այնուհետև, օգտագործելով ճիգերի բաշխման համար գրված օրինակագրությունները, ճշգրտված [1] փոփոխական շարժանկներում լուծվում է սայի կայունության առանցքային շարժման խնդիրը: Վերջնական արդյունքները բերվում են անհատի մեծությունների ալյուսակների վրա, որոնց վերլուծությամբ արվում են ընդլայնական սահմանի ազդեցության վերաբերյալ որակական եզրակացություններ:

A. C. Hakobian, R. M. Kirakosian

Axisymmetric Problem of Stability of Orthotropic Ring Plates with Linear Variable Thickness with Colculation Transversal Displacement

Вопросам расчета на прочность и устойчивость переменной жесткости посвящено сравнительно мало публикаций. Среди них следует особо отметить работы [2-5]. В настоящей статье предварительно решается плоская задача ортотропной кольцевой пластинки линейно-переменной толщины при действии радиально растягивающих единичных сил, приложенных по внешнему контуру пластинки. Затем, используя найденные закономерности распределения эталонных усилий, решается осесимметричная задача устойчивости пластинки в рамках уточненной теории [1], учитывающей влияние деформаций поперечных сдвигов. Окончательные результаты решения приводятся в виде таблиц, охватывающих некоторые характерные значения физико-механических и геометрических параметров пластинки. Проводится анализ результатов и делаются качественные заключения.

1. Рассмотрим цилиндрически ортотропную кольцевую пластинку с внутренним и внешним радиусами a и b , толщина которой меняется по закону

$$h = h_0 + h_1 r, \quad h_1 > -\frac{h_0}{b} \quad (1.1)$$

здесь h_0 и h_1 - заданные параметры, r - радиальная координата.

Пусть пластинка радиально растягивается силами равномерной интенсивности p , приложенными по внешнему контуру $r = b$. Попытаемся определить внутренние усилия пластинки. Примем обозначения:

$$r = \rho b, \quad a = \rho_0 b, \quad h = h_0 H, \quad \frac{h_1 b}{h_0} = \chi, \quad p = \sigma_0 h_0 \bar{p} \quad (1.2)$$

$$m^2 = \frac{a_{11}}{a_{22}} = \frac{E_\theta}{E_r}, \quad n = \frac{a_{12}}{a_{22}} = -\nu_{r\theta}, \quad T_r = \sigma_0 h_0 \bar{T}_r, \quad T_\theta = \sigma_0 h_0 \bar{T}_\theta$$

здесь ρ - безразмерная координата ($\rho_0 \leq \rho \leq 1$), a_j - упругие постоянные; E_θ, E_r и $\nu_{r\theta}$ - модули Юнга и коэффициент Пуассона, σ_0 - характерное напряжение материала; T_r и T_θ - радиальное и кольцевое усилия пластинки, а безразмерная толщина определяется формулой

$$H = 1 + \chi \rho, \quad \chi > -1 \quad (1.3)$$

В силу осесимметричности сдвиговое усилие равно нулю, а из уравнения равновесия дифференциального элемента срединной плоскости пластинки следует

$$\bar{T}_\theta = \frac{d}{d\rho} (\rho \bar{T}_r) \quad (1.4)$$

Имея в виду это соотношение и обобщенный закон Гука цилиндрически ортотропного тела [6], уравнение неразрывности пластинки можно представить в виде

$$H \rho^2 \frac{d^2 \bar{T}_r}{d\rho^2} + (3 + 2\chi \rho) \rho \frac{d\bar{T}_r}{d\rho} + [1 - (n + m^2) \rho \chi] \bar{T}_r = 0 \quad (1.5)$$

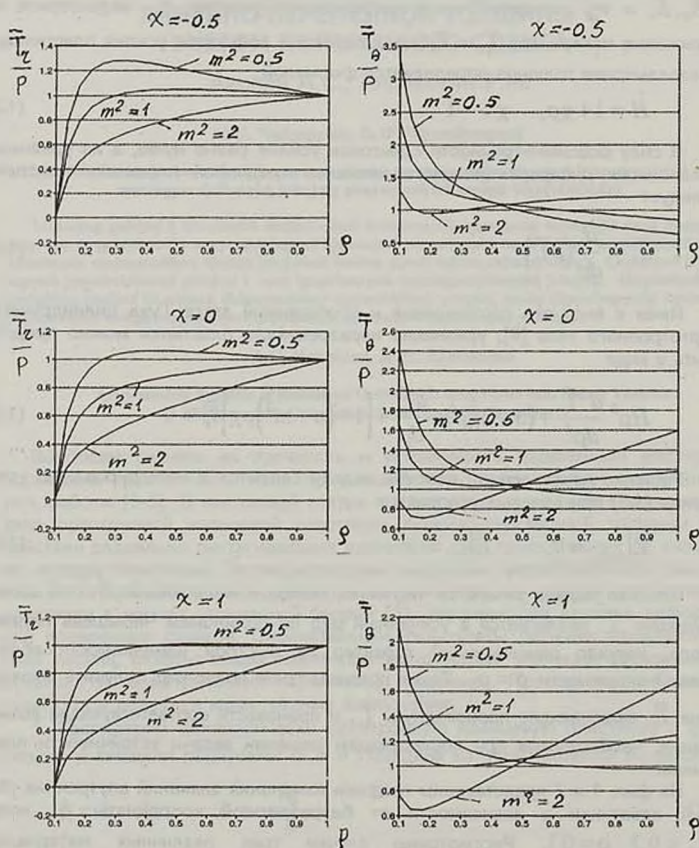
Решение поставленной плоской задачи сводится к интегрированию уравнения (1.5) при краевых условиях:

$$\bar{T}_r|_{\rho=\rho_0} = 0, \quad \bar{T}_r|_{\rho=1} = \bar{p} \quad (1.6)$$

Плоская задача решается численно, методом коллокаций. С этой целью функция $\bar{T}_r$ разлагается в усеченный ряд по полиномам Чебышева первого рода, хорошо описывающий характер ее быстрой изменяемости вблизи малой окружности $\rho = \rho_0$. Такое представление позволяет получить выражение $\bar{T}_\theta$, включающее производную $\bar{T}_r$, и произвести соответствующие вычисления, необходимые при последующем решении задачи устойчивости пластинки.

На фиг. 1 и 2 представлены графики изменения значений внутренних усилий пластинки в зависимости от безразмерной координаты ρ , когда $\nu_{r\theta} = 0,3$; $\rho_0 = 0,1$. Рассмотрены случаи трех различных материалов: $m^2 = E_\theta / E_r = 0,5$; 1 и 2 и трех значений параметра изменяемости толщины пластинки $\chi = -0,5$; 0 и 1. Из этих графиков заключаем, что при $\bar{p} > 0$ внутренние усилия пластинки всюду положительны. С удалением от внутреннего контура пластинки радиальное усилие $\bar{T}_r$ при $E_\theta \geq E_r$ и $\chi \geq 0$ моно-

тонно растет от нуля и на внешнем контуре $\rho = 1$ превращается в единицу. В случае же $E_0 < E_r$ усилие $\bar{T}_r$ имеет максимум, после чего, монотонно убывая, стремится к единице. Наличие этого максимума связано с тем, что внутренние усилия в центре сплошной пластинки при $E_0 < E_r$ имеют особенность. Усилие $\bar{T}_r$ имеет максимум также при $E_0 = E_r$, $\chi < 0$, что объясняется уменьшением толщины пластинки с удалением от ее внутреннего контура.



фиг. 1

фиг. 2

Что касается поведения кольцевого усилия $\bar{T}_\theta$, то из графиков фиг.2 легко заметить, что независимо от характера изменения толщины пластинки оно

при $E_0 < E_r$ является монотонно убывающей функцией от ρ , а при $E_0 > E_r$ имеет минимум. В случае же $E_0 = E_r$ усилие $\bar{T}_0$ монотонно убывает при $\chi \leq 0$, а при $\chi > 0$ имеет минимум.

2. Пусть при некотором значении сжимающих сил p плоская форма равновесия пластинки становится неустойчивой и реализуется равновесие искривленной формы. Ограничимся рассмотрением осесимметричного случая потери устойчивости, которому при шарнирном опирании всегда, а при защемлении — до определенного значения отношения радиусов внутреннего и внешнего контуров пластинки a/b соответствуют наименьшие критические силы [7].

Интенсивность фиктивной поверхностной нагрузки q определится формулой [6]

$$q = \bar{T}_r \frac{d^2 w}{dr^2} + \bar{T}_0 \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \quad (2.1)$$

где W — прогиб пластинки. Положим:

$$w = h_0 \bar{w}, \quad \frac{d\bar{w}}{d\rho} = z, \quad \frac{B_r}{\sigma_0} = d, \quad a_r \sigma_0 = l \quad (2.2)$$

$$\frac{h_0}{b} = s, \quad \varphi_1 = \sigma_0 l, \quad sz - lt = y, \quad M_r = \sigma_0 h_0^2 \bar{M}_r,$$

$$M_\theta = \sigma_0 h_0^2 \bar{M}_\theta, \quad N_r = \sigma_0 h_0 \bar{N}_r,$$

здесь a_r, B_r — параметры материала [6], φ_1 — функция, характеризующая распределение касательных напряжений при изгибе [1].

Безразмерные значения поперечной силы $\bar{N}_r$ и изгибающих моментов $\bar{M}_r, \bar{M}_\theta$ в рамках уточненной теории [1], учитывающей влияния деформаций поперечных сдвигов, имеют выражения

$$\begin{aligned} \bar{N}_r &= \frac{H}{12} \left[8t - d\chi H s^2 \left(\frac{dy}{d\rho} + m^2 v_{r\theta} \frac{y}{\rho} \right) \right] \\ \bar{M}_r &= -\frac{dsH^3}{12} \left(\frac{dy}{d\rho} + m^2 v_{r\theta} \frac{y}{\rho} \right) \\ \bar{M}_\theta &= -\frac{ds m^2 H^3}{12} \left(v_{r\theta} \frac{dy}{d\rho} + \frac{y}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

В силу осесимметричности, пятое уравнение равновесия дифференциального элемента срединной плоскости пластинки отпадает, а третье и четвертое принимают вид

$$\frac{d\bar{N}_r}{d\rho} + \frac{\bar{N}_r}{\rho} + s \left(\bar{T}_r \frac{dz}{d\rho} + \bar{T}_0 \frac{z}{\rho} \right) = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{d\bar{M}_r}{d\rho} + \frac{\bar{M}_r - \bar{M}_0}{\rho} - \frac{\bar{N}_r}{s} = 0 \quad (2.5)$$

С учетом (2.3) из уравнения (2.5) для функции l находим выражение

$$l = -\frac{dHs^2}{8} \left[H \frac{d^2 y}{d\rho^2} + \left(2\chi + \frac{H}{\rho} \right) \frac{dy}{d\rho} + \frac{m^2}{\rho} \left(2v_{r0}\chi - \frac{H}{\rho} \right) y \right] \quad (2.6)$$

В силу этого поперечная сила определится формулой

$$\bar{N}_r = -\frac{ds^2 H^2}{12} \left[H \frac{d^2 y}{d\rho^2} + \left(3\chi + \frac{H}{\rho} \right) \frac{dy}{d\rho} + \frac{m^2}{\rho} \left(3v_{r0}\chi - \frac{H}{\rho} \right) y \right] \quad (2.7)$$

Используя (2.2) и (2.7), уравнение (2.4) можно привести к виду

$$A_1 \frac{d^3 y}{d\rho^3} + A_2 \frac{d^2 y}{d\rho^2} + A_3 \frac{dy}{d\rho} + A_4 y = 0 \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= H(2H + 3l\bar{T}_r)\rho^3 \\ A_2 &= \{4H(3\chi\rho + H) + 3l[(4\chi\rho + H)\bar{T}_r + H\bar{T}_0]\}\rho^2 \\ A_3 &= \{2(6\chi^2\rho^2 + 6\chi\rho H + 3m^2v_{r0}\chi H\rho - m^2H^2) - \\ &\quad - \frac{3\bar{T}_r}{H} \left[\frac{8\rho^2}{ds^2} + (1+m^2)lH^2 - 2\chi\rho l(\chi\rho + H + v_{r0}m^2H) \right] + \\ &\quad + 3l\bar{T}_0(2\chi\rho + H)\}\rho \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} A_4 &= 2m^2(6v_{r0}\chi^2\rho^2 - 3\chi H\rho + H^2) - \frac{6\bar{T}_r l m^2}{H} [\chi\rho(H + v_{r0}H - \\ &\quad - v_{r0}\chi\rho) - H^2] - 3\bar{T}_0 \left[\frac{8\rho^2}{ds^2 H} - m^2 l (2v_{r0}\chi\rho - H) \right] \end{aligned}$$

Условия свободного внутреннего контура пластинки с учетом (2.3) и (2.7) имеют вид:

$$\left(\frac{dy}{d\rho} + m^2 v_{r0} \frac{y}{\rho} \right)_{\rho=\rho_0} = 0, \quad (M_r|_{r=a} = 0) \quad (2.10)$$

$$\left[H \frac{d^2 y}{d\rho^2} + \left(3\chi + \frac{H}{\rho} \right) \frac{dy}{d\rho} + \frac{m^2}{\rho} \left(3v_{r0}\chi - \frac{H}{\rho} \right) y \right]_{\rho=\rho_0} = 0, \quad (N_r|_{r=a} = 0)$$

Так как задача ставится относительно не прогиба, а его производной, то на внешнем контуре достаточно удовлетворить лишь одному условию:
при шарнирном опирании -

$$\left(\frac{dy}{d\rho} + m^2 v_{r0} \frac{y}{\rho} \right)_{\rho=1} = 0, \quad (M_r|_{r=b} = 0) \quad (2.11)$$

при защемлении -

$$y|_{\rho=1} = 0, \quad (u_r|_{r=b} = 0) \quad (2.12)$$

Таким образом, задача определения критических значений сжимающих сил сводится к нахождению собственных чисел уравнения (2.8) при двух условиях на внутреннем контуре (2.10) и одном из условий (2.11) и (2.12) на внешнем контуре пластинки.

Численная реализация решения производится методом коллокаций с разложением функции $y(\rho)$ в усеченный тригонометрический ряд. При этом, внутренние усилия невыпущенной пластинки представляются в виде произведений соответствующих распределений, найденных в предыдущем пункте, и неизвестных значений критических сил $\bar{P}$, взятых с отрицательным знаком.

Подобрав подходящее число точек разбиения промежутка $\rho_0 \leq \rho \leq 1$ и удовлетворив уравнению устойчивости во всех точках разбиения, а краевым условиям - на контурах пластинки $\rho = \rho_0$ и $\rho = 1$, приходим к системе однородных алгебраических уравнений. Из условия существования нетривиальных решений этой системы и определяются критические значения сжимающих сил.

В табл. 1 иллюстрирована динамика сходимости процесса численного определения первой критической силы шарнирно опертой пластинки в одном частном случае, когда

$$v_{r0} = \rho_0 = 0,3, \quad d = 10^3, \quad \chi = 1, \quad E_0/E_r = 2, \quad l/s = 0,05$$

Таблица 1

№	12	16	20	24	28	32	36
$\bar{P}$	4,7544	4,8885	4,9038	4,9056	4,9058	4,9058	4,9058

Из табл. 1 видно, что при числах точек разбиения $N > 24$ первая критическая сила определяется с точностью пяти значащих цифр, что свидетельствует о хорошей сходимости процесса решения не только задачи устойчивости, но и связанной с ней плоской задачи пластинки.

В нижеприведенных таблицах для некоторых характерных значений физико-механических и геометрических параметров пластинки представлены значения первых критических сил $\bar{P}$ и их поправок

$$\Delta = \frac{\bar{p}_{\text{кл}} - \bar{p}}{\bar{p}_{\text{кл}}} \cdot 100\% \quad (2.13)$$

вносимых уточненной теорией по отношению к соответствующим классическим значениям $\bar{p}_{\text{кл}}$. При этом, индексы "1" и "2" относятся к случаям $l = 0,025$ и $l = 0,05$, а индексы "ш" и "з" - к случаям шарнирного опирания (табл.2) и защемления (табл.3), соответственно.

На основе данных этих таблиц заключаем:

1. Учет влияния поперечного сдвига, как и следовало ожидать, приводит к уменьшению критических сил пластинки.

2. Поправка, вносимая уточненной теорией при данных краевых условиях зависит от характера анизотропии материала и от относительной толщины пластинки. При этом она увеличивается с ростом:

а) параметра l , т.е. с уменьшением относительного модуля сдвига материала в поперечной плоскости,

б) отношения модулей Юнга материала кольцевого и радиального направлений E_θ / E_r ,

в) параметра χ , характеризующего скорость возрастания толщины пластинки в радиальном направлении.

3. При неизменных остальных условиях поправка сильно зависит от вида опирания пластинки. Она получается значительно большей при защемлении внешнего контура, чем при его шарнирном опирании. Причем, роль этого фактора более существенна при $E_\theta < E_r$ и заметно ослабевает с возрастанием отношения E_θ / E_r .

4. Увеличение радиуса внутреннего контура шарнирно опертой пластинки ρ_0 приводит к уменьшению значений как критических сил, так и их поправок, чего нельзя сказать для защемленной пластинки.

Таблица 2

$$\nu_{r0} = 0,3; \quad s = 0,05; \quad d = 10^3$$

$m^2 = E_0 / E_r = 0,5$										
ρ_0		0,05			0,1			0,3		
χ		-0,5	0	1	-0,5	0	1	-0,5	0	1
I	0	0,049	0,202	0,944	0,174	0,401	1,36	0,109	0,312	1,35
	0,025	0,048	0,199	0,917	0,172	0,395	1,32	0,108	0,309	1,32
	0,05	0,048	0,197	0,891	0,171	0,388	1,28	0,108	0,305	1,28
	Δ_{1w}	0,61	1,28	2,83	0,92	1,62	3,37	0,55	1,06	2,58
	Δ_{2w}	1,23	2,53	5,54	1,84	3,17	6,52	1,10	2,12	5,10

$$m^2 = E_0 / E_r = 1$$

I	0	0,116	0,456	2,13	0,307	0,814	2,97	0,220	0,647	2,80
	0,025	0,115	0,444	2,00	0,302	0,790	2,78	0,217	0,633	2,66
	0,05	0,113	0,432	1,89	0,297	0,770	2,62	0,215	0,620	2,53
	Δ_{1w}	1,37	2,70	5,83	1,63	2,95	6,33	1,14	2,10	5,07
	Δ_{2w}	2,84	5,24	11,1	3,22	5,73	11,9	2,18	4,14	9,64

$$m^2 = E_0 / E_r = 2$$

I	0	0,247	1,00	4,83	0,531	1,65	6,62	0,442	1,37	5,95
	0,025	0,240	0,949	4,29	0,517	1,56	5,85	0,432	1,32	5,38
	0,05	0,234	0,902	3,86	0,503	1,48	5,25	0,423	1,26	4,91
	Δ_{1w}	2,79	5,29	11,2	2,78	5,28	11,6	2,17	4,19	9,58
	Δ_{2w}	5,39	10,1	20,2	5,36	10,1	20,7	4,28	8,00	17,52

Таблица 3

$$v_{r0} = 0,3; \quad s = 0,05; \quad d = 10^3$$

$m^2 = 0,5$										
	ρ_0	0,05			0,1			0,3		
	χ	-0,5	0	1	-0,5	0	1	-0,5	0	1
I	0	0,331	1,35	5,99	0,560	1,85	7,87	0,546	2,56	14,9
	0,025	0,322	1,26	5,10	0,541	1,72	6,61	0,529	2,37	12,1
	0,05	0,312	1,18	4,40	0,522	1,60	5,68	0,513	2,21	10,21
	Δ_{13}	2,72	6,53	14,8	3,39	7,23	16,0	3,11	7,31	18,6
	Δ_{23}	5,74	12,3	26,5	6,79	13,4	27,8	6,04	13,7	31,5
	$\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{1w}}$	4,45	5,10	5,22	3,68	4,46	4,74	5,65	6,90	7,21
	$\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{1w}}$	4,67	4,86	4,78	3,69	4,22	4,26	5,49	6,46	6,18
$m^2 = 1$										
I	0	0,498	2,02	9,15	0,875	2,86	11,72	0,737	3,12	17,10
	0,025	0,477	1,84	7,47	0,832	2,60	9,46	0,709	2,86	13,68
	0,05	0,457	1,69	6,28	0,794	2,37	7,93	0,683	2,64	11,37
	Δ_{13}	4,22	8,91	18,4	4,91	9,09	19,3	3,799	8,373	20,00
	Δ_{23}	8,23	16,34	31,37	9,2	17,13	32,34	7,327	15,50	33,51
	$\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{1w}}$	3,08	3,30	3,16	3,01	3,08	3,05	3,33	3,99	3,94
	$\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{1w}}$	2,90	3,12	2,83	2,87	2,99	2,72	3,36	3,74	3,48
$m^2 = 2$										
I	0	0,779	3,25	15,44	1,388	4,827	20,21	1,14	4,334	21,84
	0,025	0,729	2,85	11,71	1,293	4,208	15,22	1,08	3,890	16,90
	0,05	0,686	2,54	9,42	1,209	3,728	12,20	1,03	3,520	13,72
	Δ_{13}	6,42	12,3	24,2	6,84	12,8	24,7	5,26	11,5	22,6
	Δ_{23}	11,9	21,9	39,0	12,9	22,8	39,6	9,65	19,9	37,2
	$\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{1w}}$	2,30	2,32	2,16	2,46	2,42	2,13	2,42	2,44	2,36
	$\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{1w}}$	2,20	2,17	1,93	2,41	2,26	1,91	2,25	2,35	2,12

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киракосян Р.М.* Об одной уточненной теории анизотропных пластин переменной толщины.- Изв. АН Армении, Механика, 1991, т.44, № 3.
2. *Коваленко А.Д.* Круглые пластинки переменной толщины.- М.: Физматгиз, 1959. 294 с.
3. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т.* Теория оболочек переменной жесткости.- Киев: Наукова думка, 1981. 544 с.
4. *Лизарев А.Д.* Напряженное состояние термочувствительной кольцевой пластины переменной толщины.- Мат. методы и физ.- мех. поля. 1991, №33.
5. *Cheng Chang-Yun, Yang Xiao.* Buckling and Post-Buckling of Annular Plates Under Nonaxisymmetric Plane Edge Forces.- Appl. Math. and Mech.- 1991.- 12, №5.
6. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин.- М.: Наука, 1987. 360 с.
7. *Хачатрян А.А.* Устойчивость круговой кольцевой пластинки, сжимаемой радиальными силами, приложенными по внешнему контуру.- Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1966, т. 19, №6.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
21. 06. 1994

О ПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЯХ КРУГОВЫХ ДИСКОВ

Гаспарян А. Е., Хачатрян А. А.

Վ.Ե. Գասպարյան, Ա.Ա. Խաչատրյան

Կլոր դիսկերի ետքը տատանումների մասին

Աշխատանքում առանձին դիտարկված են հասարակուն դիսկի առանցքային ուղղությամբ իրականացվող տատանումների դեպքում: Տեղափոխությունների համար սկսված են վերջնական բանաձևեր:

H.E.Gasparian, A.A. Khachatryan

On the plane vibration of circular disks

В работе отдельно рассмотрены осесимметричные радиальные и тангенциальные колебания дисков с постоянными толщинами. Решены конкретные задачи. Получены окончательные выражения для соответствующих перемещений.

В настоящей работе рассматриваются задачи о плоских колебаниях круговых дисков, когда частицы диска совершают движения, оставаясь в своей плоскости. При этом, как обычно принято [1], отдельно рассмотрены осесимметричные радиальные колебания, когда любая частица движется только вдоль соответствующего радиуса, и тангенциальные колебания, когда движения частиц происходят по соответствующим окружностям.

1. Рассмотрим диск постоянной толщины в виде кругового кольца с внутренним и наружным радиусами r_1 и r_2 , соответственно. Пусть внутренний контур диска закреплен, а на наружном контуре действует давление интенсивности q , которое в момент времени $t = 0$ внезапно снимается. Тогда возникнут свободные осесимметричные радиальные колебания.

В этом случае уравнение движения есть

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

а напряжения σ_r и σ_φ определяются через радиальное перемещение $u(r, t)$ следующим образом:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{u}{r} \right), \quad \sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1.2)$$

где E , ν , ρ - модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность материала диска, соответственно.

В силу (1.1) и (1.2) уравнения движения относительно $u(r, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)\rho} \quad (1.3)$$

Для рассматриваемой задачи граничные и начальные условия будут:

$$1) \text{ при } r = r_1 \quad u = 0 \quad 2) \text{ при } r = r_2 \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{u}{r} = 0 \quad (1.4)$$

$$3) \text{ при } t = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$4) \text{ при } t = 0 \quad u = -\frac{qr_2^2(1-\nu^2)}{E[(1+\nu)r_2^2 + (1-\nu)r_1^2]} \left(r - \frac{r_1^2}{r} \right)$$

Отметим, что последнее условие в (1.4) получено решением статической задачи до снятия давления q .

После разделения переменных ($u(r, t) = R(r)T(t)$) из (1.3) получим

$$\frac{1}{R} \left(R'' + \frac{1}{r} R' - \frac{1}{r^2} R \right) = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = -\omega^2 \quad (1.5)$$

или

$$\begin{cases} R'' + \frac{1}{r} R' + \left(\omega^2 - \frac{1}{r^2} \right) R = 0 \\ T'' + a^2 \omega^2 T = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Общие решения уравнений (1.6) имеют вид

$$\begin{aligned} R(r) &= A_1 J_1(\omega r) + A_2 Y_1(\omega r) \\ T(t) &= B_1 \cos a\omega t + B_2 \sin a\omega t \end{aligned} \quad (1.7)$$

Удовлетворив первым двум условиям (1.4), получим следующее трансцендентное уравнение относительно ωr_2 , имеющее неограниченное количество корней

$$\frac{J_1(k\xi_n)}{Y_1(k\xi_n)} = \frac{\xi_n J_0(\xi_n) - (1-\nu)J_1(\xi_n)}{\xi_n Y_0(\xi_n) - (1-\nu)Y_1(\xi_n)}, \quad \xi_n = \omega_n r_2, \quad k = \frac{r_1}{r_2} \quad (1.8)$$

а в силу условия 3) $B_2 = 0$. Поэтому, решение задачи принимает вид

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[Y_1(k\xi_n) J_1(\omega_n r) - J_1(k\xi_n) Y_1(\omega_n r) \right] \cos \omega_n a t \quad (1.9)$$

Для определения величин C_n следует учесть, что функции в квадратных

скобках (1.9) ортогональны в интервале $r_1 \leq r \leq r_2$ с весом r . Тогда, удовлетворив четвертому условию (1.4) и определив C_n , после некоторых преобразований решение рассматриваемой задачи окончательно представим в виде

$$u(x, t) = \frac{\pi q_2 (1 - \nu^2)}{E} \times \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_1(k \xi_n) [\xi_n J_0(\xi_n) - (1 - \nu) J_1(\xi_n)]}{[\xi_n J_0(\xi_n) - (1 - \nu) J_1(\xi_n)]^2 - (\xi_n^2 - 1 + \nu^2) J_1^2(k \xi_n)} \times \right. \\ \left. \times [Y_1(k \xi_n) J_1(\xi_n x) - J_1(k \xi_n) Y_1(\xi_n x)] \right] \cos \frac{\xi_n a}{r_2} t \\ (x = r / r_2) \quad (1.10)$$

В случае сплошного диска ($r_1 = 0$) решение задачи существенно упрощается. Пропуская подробности, приведем окончательные результаты этого случая.

$$u(x, t) = - \frac{2q(1 - \nu^2)r_2}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\xi_n x)}{(\xi_n^2 - 1 + \nu^2) J_1(\xi_n)} \cos \frac{\xi_n a}{r_2} t \quad (1.11)$$

где ξ_n представляют собой корни следующего трансцендентного уравнения:

$$\xi_n J_0(\xi_n) - (1 - \nu) J_1(\xi_n) = 0 \quad (1.12)$$

В таблице приведены несколько первых корней ξ_n уравнения (1.12) при трех значениях коэффициента Пуассона.

Из таблицы видно, что по мере возрастания n влияние изменения коэффициента Пуассона на корни ξ_n становится все меньше и меньше.

Таблица

$n \backslash \nu$	0,2	0,3	0,4
1	1,9844	2,0488	2,1092
2	5,3702	5,3894	5,4085
3	8,5600	8,5719	8,5837
4	11,7232	11,7318	11,7404
5	14,8771	14,8838	14,8904

2. Рассмотрим теперь тангенциальные колебания диска.

Пусть внутренний контур диска ($r = r_1$) закреплен, а на внешнем контуре

($r = r_2$) действуют касательные напряжения (τ_0), которые в момент времени $t = 0$ внезапно снимаются. Тогда возникают свободные тангенциальные колебания.

В этом случае уравнение движения относительно полярного угла $\varphi(r, t)$ имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

где G - модуль сдвига материала диска.

Учитывая, что здесь реальные перемещения точек $u(r, t)$ отсутствуют, а перемещения в тангенциальном направлении $v(r, t)$ происходят по окружностям, имеем $v(r, t) = r\varphi(r, t)$.

Поэтому уравнение движения относительно $v(r, t)$ будет

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2} v = \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad a_1^2 = G / \rho \quad (2.2)$$

а для касательного напряжения будем иметь

$$\tau = Gr \frac{\partial \varphi}{\partial r} = G \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \quad (2.3)$$

Для рассматриваемой задачи граничные и начальные условия будут

$$1) \text{ при } r = r_1 \quad v = 0 \quad 3) \text{ при } t = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (2.4)$$

$$2) \text{ при } r = r_2 \quad \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0 \quad 4) \text{ при } t = 0 \quad v = \frac{\tau_0 r_2^2}{2Gr_1^2} \left(r - \frac{r_1^2}{r} \right)$$

Как видно, эта задача в принципе не отличается от задачи, рассмотренной в предыдущем пункте. Поэтому, не останавливаясь на ходе решения, приведем окончательные результаты решения рассматриваемой задачи.

Таким образом, пользуясь принятыми выше обозначениями, для тангенциального перемещения будем иметь

$$v(x, t) = \frac{\pi r_2 \tau_0}{G} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k\eta_n) [\eta_n J_0(\eta_n) - 2J_1(\eta_n)]}{\eta_n^3 J_1^2(k\eta_n) - [\eta_n J_0(\eta_n) - 2J_1(\eta_n)]^2} \times \\ \times [Y_1(k\eta_n) J_1(\eta_n x) - J_1(k\eta_n) Y_1(\eta_n x)] \cos \frac{\eta_n a_1}{r_2} t \quad (2.5)$$

где $\eta_n = \Omega_n r_2$ представляют собой корни следующего трансцендентного уравнения:

$$\frac{J_1(k\eta_n)}{Y_1(k\eta_n)} = \frac{\eta_n J_0(\eta_n) - 2J_1(\eta_n)}{\eta_n Y_0(\eta_n) - 2Y_1(\eta_n)} \quad (2.6)$$

Рассматривая решения приведенных здесь задач, заключаем, что при колебаниях частицы диска, как и в случае продольных колебаний стержней с переменными поперечными сечениями [2, 3], совершают неперiodические движения и поэтому говорить здесь о периоде колебаний не приходится.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пановко Я.Г.* Основы прикладной теории упругих колебаний.- М.: Машгиз, 1957. 335 с.
2. *Гаспарян А.Е., Хачатрян А.А.* О продольных колебаниях стержней с переменными сечениями.- Изв. НАН Армении, Механика, 1993, т. 46, №3-4, с. 36-41
3. *Гаспарян А.Е., Хачатрян А.А.* Некоторые задачи о продольных колебаниях стержней переменного поперечного сечения.- Изв. НАН Армении, Механика, 1994, т. 47, №5-6, с. 14-23

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
8. 04. 1994

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ СМЕШАННЫХ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН,
СОСТОЯЩИХ ИЗ ЧЕРЕДУЮЩИХСЯ
УПРУГИХ И РЕОЛОГИЧЕСКИХ СЛОЕВ

Геворкян Р. С.

Ռ.Ս. Գեվորգյան

Իրար հաջորդող առաձգական և ռեոլոգիական շերտերից կազմված շերտավոր
օալների խառը խնդիրների ասիմպտոտիկ լուծման մասին

Ասիմպտոտիկ եղանակով լուծված են շերտավոր սալերի խառը խնդիրները, երբ անկազդայալ առաձգական և իզոպրոպ առաձգամածուցիկ շերտերը հաջորդում են իրար: Լուծված են ներքին խնդիրներ, երբ սալի մեկ երեսնային մակերևույթի վրա տրված են կինեմատիկական պայմաններ, իսկ հանդիպակաց երեսնային մակերևույթի վրա տրված են լարումները, Գերլախոխումները և նրանց համապատասխան կոմբինացիաները: Արտաձված են ռեկուրենտ բանաձևեր շերտերում լարումները և Գերլախոխումները հաշվելու համար: Նշված են դեպքեր, երբ իրերացիոն պրոցեսն ընդհատվում է բերելով ճշգրիտ լուծումներ: Բերված են արտաձված բանաձևերի կիրառությունները լուսաբանող օրինակներ:

R.S.Gevorgian

On Asymptotic Solution of Mixed Boundary Problems of Layered Plates,
Consisting of Alternated Elastic and Rheological Layers

Слоистые пластины, состоящие из чередующихся упругих и реологических слоев, широко распространены в качестве конструктивных элементов во многих областях техники и строительства. Многие композиционные слоистые конструктивные элементы летательных и других аппаратов состоят из чередующихся упругих основ и вязкоупругих с реологическими свойствами, упругий фундамент лежит на вязкоупругом основании и др. Разработка методов решения соответствующих задач представляет теоретический и практический интерес.

Асимптотическим методом решаются смешанные краевые задачи пластины (слоя), состоящей из чередующихся упругих анизотропных и наследственно ползучих изотропных слоев четного и нечетного количества, когда на одной лицевой поверхности пластины заданы компоненты вектора перемещения, а на противоположной – статические, кинематические или смешанные условия краевых задач теории упругости. Считается, что между слоями выполняются условия полного контакта. Выведены рекуррентные формулы для вычисления напряжений и перемещений в каждом слое. Приводится анализ распространения фактора времени (зависимости от времени) по компонентам полей напряжений и перемещений трехслойной пластины, когда внешние слои упругие. Считается, что одна из упругих лицевых поверхностей жестко закреплена, а на другую действуют полиномиальные

нормальная и тангенциальные нагрузки. Подобные задачи, в частности, моделируют клеевое соединение двух ортотропных пластин (слоев) с учетом реологических свойств клея.

1. Имеем слоистую тонкую пластину, отнесенную к прямоугольной системе координат

$$Oxyz: \Omega = \left\{ x, y, z: 0 \leq z \leq H, -a \leq x, y \leq a, H = \sum_{i=1}^{\infty} h_i, H \ll a, \right.$$

где a -характерный продольный размер пластины, i -номер слоя толщины

$h_i, \sum_{k=i+1}^n h_k \leq z \leq \sum_{k=1}^n h_k, n$ -количество слоев. Слои под нечетными номерами $i = 2m - 1$ упругие, прямолинейно анизотропные, а под четными номерами $i = 2m$ - упруго-ползучие.

Требуется определить напряженно-деформированное состояние пластины, если на лицевой поверхности $z = 0$ нижнего слоя $i = n$ заданы значения компонентов вектора перемещения

$$u_j(z=0) = u_j^-(x, y), \quad j = x, y, z \quad (1.1)$$

а на противоположной лицевой поверхности $z = H$ ($j = 1$ соответствует первому упругому слою) заданы условия первой краевой задачи

$$\sigma_{jz}(z=H) = \varepsilon^{-1} \sigma_{jz}^+(x, y), \quad j = x, y, z \quad (1.2)$$

второй краевой задачи

$$u_j(z=H) = u_j^+(x, y), \quad j = x, y, z \quad (1.3)$$

или смешанных краевых задач теории упругости

$$a) \quad u_j(z=H)u_j^+, \quad j = x, y, \quad \sigma_{zz}(z=H) = \varepsilon^{-1} \sigma_{zz}^+ \quad (1.4)$$

$$б) \quad u_z(z=H)u_z^+, \quad \sigma_{jz}^-(z=H) = \varepsilon^{-1} \sigma_{jz}^+, \quad j = x, y \quad (1.5)$$

Считается, что между упругими и реологическими слоями пластины выполняются условия полного контакта

$$\sigma_{jz}^{(i)}(z_i) = \sigma_{jz}^{(i+1)}(z_i), \quad u_j^{(i)}(z_i) = u_j^{(i+1)}(z_i), \quad j = x, y, z$$

$$z_i = \sum_{k=i+1}^n h_k, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.6)$$

Индексом i обозначены величины, относящиеся к слою с таким номером.

Для решения поставленной задачи должны быть удовлетворены уравнения равновесия с учетом объемных сил

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(i)}}{\partial z} + F_x^{(i)} = 0 \quad (x, y, z) \quad (1.7)$$

справедливые для всех слоев $i = 1, 2, \dots, n$, соотношения упругости анизотропного тела

$$\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial x} = a_{11}^{(i)} \sigma_{xx}^{(i)} + a_{12}^{(i)} \sigma_{yy}^{(i)} + a_{13}^{(i)} \sigma_{zz}^{(i)} + a_{14}^{(i)} \sigma_{yz}^{(i)} + a_{15}^{(i)} \sigma_{zx}^{(i)} + a_{16}^{(i)} \sigma_{xy}^{(i)} \quad (x, y, z, 1j, 2j, 3j) \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial x} = a_{16}^{(i)} \sigma_{xx}^{(i)} + a_{26}^{(i)} \sigma_{yy}^{(i)} + \dots + a_{66}^{(i)} \sigma_{xy}^{(i)} (x, y, z, 6j, 5j, 4j)$$

справедливые для упругих слоев $i = 2m - 1$, и соотношения наследственной теории ползучести [1] для слоев с четными номерами $i = 2m$

$$\frac{\partial u_x^{(i)}(t)}{\partial x} = \frac{1}{E_i(t)} \left[\sigma_{xx}^{(i)}(t) - \nu_i(t) (\sigma_{yy}^{(i)}(t) + \sigma_{zz}^{(i)}(t)) \right] - \quad (1.9)$$

$$- \int_{\tau_1}^t \left[\sigma_{xx}^{(i)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_i(t, \tau) - (\sigma_{yy}^{(i)}(\tau) + \sigma_{zz}^{(i)}(\tau)) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_{ii}(t, \tau) \right] d\tau \quad (x, y, z)$$

$$\frac{\partial u_x^{(i)}(t)}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(i)}(t)}{\partial x} = \frac{2(1 + \nu_i(t))}{E_i(t)} \sigma_{xy}^{(i)}(t) - \quad (1.10)$$

$$- 2 \int_{\tau_1}^t \sigma_{xy}^{(i)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta_i(t, \tau) + \delta_{ii}(t, \tau)) d\tau \quad (x, y, z)$$

где $E_i(t)$ - модуль упруго-мгновенной деформации, $\nu_i(t)$ - коэффициент поперечной упругой части деформации, $\delta_i(t, \tau) = \frac{1}{E_i(\tau)} + C_i(t, \tau)$ - полная относительная деформация при сжатии или растяжении,

$\delta_{ii}(t, \tau) = \frac{\nu_i(\tau)}{E_i(\tau)} + \nu_{ii}(t, \tau) C_i(t, \tau)$ - полная относительная поперечная деформация, $\nu_{ii}(t, \tau)$ - коэффициент поперечного сжатия при деформации ползучести, $C_i(t, \tau)$ - мера ползучести при сжатии или растяжении, τ - время (момент времени) приложения нагрузки.

Должны быть удовлетворены также условия контакта слоев (1.6), граничные условия (1.1)-(1.5) и условия, заданные на торцах $\partial\Omega$ пластины, которые не конкретизируем, поскольку их влияние окажется существенным в непосредственной близости пограничного слоя [2, 3].

Преобразуя первые два соотношения (1.9) и первое соотношение (1.10),

получим интегральные уравнения Вольтерра второго рода относительно $\sigma_{xx}^{(i)}(t)$, $\sigma_{yy}^{(i)}(t)$, $\sigma_{zz}^{(i)}(t)$, формальными решениями которых являются

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(i)}(t) &= \frac{E_i(t)}{1-v_i(t)} \left(\frac{\partial u_x^{(i)}(t)}{\partial x} + v_i(t) \frac{\partial u_y^{(i)}(t)}{\partial y} \right) + \frac{v_i(t)}{1-v_i(t)} \sigma_{zz}^{(i)}(t) - \\ &- \int_{\tau_1}^t \sigma_{zz}^{(i)}(\tau) R_{2i}(t, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^t \left[\left(\frac{\partial u_x^{(i)}(\tau)}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(i)}(\tau)}{\partial y} \right) R_{ii} + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial u_x^{(i)}(\tau)}{\partial x} - \frac{\partial u_y^{(i)}(\tau)}{\partial y} \right) R_i(t, \tau) \right] d\tau \quad (x, y) \\ \sigma_{yy}^{(i)}(t) &= \frac{E_i(t)}{2(1+v_i(t))} \left(\frac{\partial u_x^{(i)}(t)}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(i)}(t)}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^t \left(\frac{\partial u_x^{(i)}(\tau)}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(i)}(\tau)}{\partial x} \right) R_i(t, \tau) d\tau\end{aligned}\quad (1.11)$$

$$R_i(t, \tau) = \frac{E_i(\tau)}{1+v_i(t)} R_i^*(t, \tau), \quad R_{ii}(t, \tau) = \frac{E_i(\tau)}{1-v_i(\tau)} R_{ii}^*(t, \tau)$$

$$R_{2i}(t, \tau) = \frac{E_i(\tau)}{1-v_i(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_i(t, \tau) - \frac{v_i(\tau)}{1-v_i(\tau)} R_{ii}^*(t, \tau) +$$

$$+ \int_{\tau}^t \frac{E_i(\alpha)}{1-v_i(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_i(\alpha, \tau) R_{ii}^*(\alpha, \tau) d\alpha$$

где $R_i^*(t, \tau)$ и $R_{ii}^*(t, \tau)$ - резольвенты ядер

$$K_i(t, \tau) = \frac{E_i(t)}{1+v_i(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta_i(t, \tau) + \delta_{ii}(t, \tau))$$

$$K_{ii}(t, \tau) = \frac{E_i(t)}{1-v_i(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta_i(t, \tau) - \delta_{ii}(t, \tau))$$

Получим асимптотическое решение поставленных краевых задач. Для этого, следуя [2-6], в (1.7)-(1.11) перейдем к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам

$$x = a\xi, \quad y = a\eta, \quad z = h\zeta, \quad \varepsilon = h/a, \quad h = \max\{h_i\}$$

$$u_x = au, \quad (x, y, z; u, v, w) \quad (1.12)$$

В результате, получим сингулярно возмущенную малым параметром ε систему уравнений относительно компонентов тензора напряжений и вектора перемещения, решение которой (решение внутренней задачи) ищем в виде асимптотического разложения [4-6]

$$Q^{(i)} = \sum_{s=0}^S \varepsilon^s \chi_{Q^{(i,s)}} Q^{(i,s)} \quad (1.13)$$

где $\chi_u = 0$ для перемещений и $\chi_\sigma = -1$ для напряжений. А объемные си-

лы представим в виде разложения $F_j^{(i)} = \sum_{s=0}^S \varepsilon^{-2+s} F_j^{(i,s)} a^{-i}$, $j = x, y, z$.

Подставив (1.13) в указанную сингулярно возмущенную систему и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях каждого уравнения (метод Пуанкаре), получим непротиворечивую систему относительно неизвестных коэффициентов $Q^{(i,s)}$ разложения (1.13). Решив эту систему, получим рекуррентные формулы для вычисления напряжений и перемещений каждого слоя пластинки. Чтобы придавать этим формулам удобный для прикладных приложений вид, целесообразно возвратиться к исходным размерным координатам по (1.12). Расчетные формулы можно представить в виде

$$Q^{(i)} = \sum_{s=0}^S Q^{(i,s)}(x, y, z), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.14)$$

$$\sigma_{jz}^{(i,s)} = \sigma_{jz0}^{(i,s)}(x, y) + \sigma_{jz*}^{(i,s)}(x, y, z)$$

$$\sigma_{jz*}^{(i,s)} = - \int_0^z \left(\frac{\partial \sigma_{jx}^{(i,s-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{jy}^{(i,s-1)}}{\partial y} + F_j^{(i,s)} \right) dz \quad (1.15)$$

$$j = x, y, z; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

для упругих слоев $i = 2m - 1$

$$\sigma_{xx}^{(i,s)} = A_{13}^{(i)} \sigma_{xz0}^{(i,s)} + A_{14}^{(i)} \sigma_{yz0}^{(i,s)} + A_{15}^{(i)} \sigma_{xz0}^{(i,s)} + \sigma_{xx*}^{(i,s)}(x, y, z)$$

$$(xx, yy, xy; 1j, 2j, 6j; j = 3, 4, 5)$$

$$u_x^{(i,s)} = z \left(A_{53}^{(i)} \sigma_{xz0}^{(i,s)} + A_{54}^{(i)} \sigma_{yz0}^{(i,s)} + A_{55}^{(i)} \sigma_{xz0}^{(i,s)} \right) + u_{x0}^{(i,s)}(x, y) + u_{x*}^{(i,s)}(x, y, z)$$

$$(u_x, u_y, u_z; 5j, 4j, 3j; j = 3, 4, 5)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(i,s)} = B_{11}^{(i)} P_1^{(i,s)} + B_{12}^{(i)} P_2^{(i,s)} + B_{16}^{(i)} P_3^{(i,s)} \quad (1.16)$$

$$(xx, yy, xy; 1j, 2j, 6j; j = 1, 2, 6)$$

$$P_1^{(i,s)} = \frac{\partial u_x^{(i,s-1)}}{\partial x} - a_{13}^{(i)} \sigma_{zz}^{(i,s)} - a_{14}^{(i)} \sigma_{yz}^{(i,s)} - a_{15}^{(i)} \sigma_{xz}^{(i,s)} \quad (x, y; 1, 2)$$

$$P_3^{(i,s)} = \frac{\partial u_x^{(i,s-1)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}}{\partial x} - a_{36}^{(i)} \sigma_{zz}^{(i,s)} - a_{46}^{(i)} \sigma_{yz}^{(i,s)} - a_{56}^{(i)} \sigma_{xz}^{(i,s)}$$

$$u_{x\alpha}^{(i,s)} = \int_0^z \left(a_{15}^{(i)} \sigma_{\alpha\alpha}^{(i,s)} + a_{25}^{(i)} \sigma_{yy}^{(i,s)} + \dots + a_{65}^{(i)} \sigma_{xy}^{(i,s)} - q_x \right) dz$$

$$(u_x, u_y, u_z; q_x, q_y, q_z; j5, j4, j3; j = 1, 2, \dots, 6) \quad q_x = \frac{\partial u_z^{(i,s-1)}}{\partial x}(x, y), q_z = 0$$

$$B_{nj}^{(i)} = \left(a_{nk}^{(i)} a_{jk}^{(i)} - a_{nj}^{(i)} a_{kk}^{(i)} \right) / \Delta^{(i)}, \quad n \neq j \neq k \neq n$$

$$B_{kk}^{(i)} = \left(a_{nn}^{(i)} a_{jj}^{(i)} - a_{nj}^{(i)2} \right) / \Delta^{(i)}, \quad B_{nj}^{(i)} = B_{jn}^{(i)}, \quad n, j, k = 1, 2, 6$$

$$A_{kl}^{(i)} = -a_{1l}^{(i)} B_{k1}^{(i)} - a_{2l}^{(i)} B_{k2}^{(i)} - a_{6l}^{(i)} B_{k6}^{(i)}, \quad A_{ml}^{(i)} \neq A_{lm}^{(i)}$$

$$A_{ml}^{(i)} = a_{1m}^{(i)} A_{1l}^{(i)} + a_{2m}^{(i)} A_{2l}^{(i)} + a_{6m}^{(i)} A_{6l}^{(i)} + a_{lm}^{(i)}, \quad m, l = 3, 4, 5$$

$$\Delta^{(i)} = a_{11}^{(i)} a_{22}^{(i)} a_{66}^{(i)} + 2a_{12}^{(i)} a_{26}^{(i)} a_{16}^{(i)} - a_{11}^{(i)} a_{26}^{(i)2} - a_{22}^{(i)} a_{16}^{(i)2} - a_{12}^{(i)2} a_{66}^{(i)}$$

для упруго-ползучих слоев $i = 2m$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(i,s)} = \frac{v_i(t)}{1-v_i(t)} \sigma_{\alpha\alpha 0}^{(i,s)}(t) + \int_{\tau_1}^t \sigma_{\alpha\alpha 0}^{(i,s)}(\tau) R_{2i}(t, \tau) d\tau + \sigma_{\alpha\alpha}^{(i,s)}, \quad (x, y)$$

$$\sigma_{xy}^{(i,s)} = \frac{E_i(t)}{2(1+v_i(t))} \left(\frac{\partial u_x^{(i,s-1)}(t)}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}(t)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^t \left(\frac{\partial u_x^{(i,s-1)}(\tau)}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}(\tau)}{\partial x} \right) R_i(t, \tau) d\tau$$

$$u_x^{(i,s)} = 2z \left[\frac{1+v_i(t)}{E_i(t)} \sigma_{\alpha\alpha 0}^{(i,s)}(t) - \int_{\tau_1}^t \sigma_{\alpha\alpha 0}^{(i,s)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta_i(t, \tau) + \delta_{1i}(t, \tau)) d\tau \right] +$$

$$+ u_{x0}^{(i,s)} + u_{x\alpha}^{(i,s)} \quad (x, y)$$

$$u_z^{(i,s)} = z \left[\frac{1 - v_i(t) - 2v_i^2(t)}{(1 - v_i(t))E_i(t)} \sigma_{zz0}^{(i,s)}(t) - \int_{\tau_1}^t \sigma_{zz0}^{(i,s)}(\tau) R_{z1}(t, \tau) d\tau \right] + \\ + u_{z0}^{(i,s)} + u_{z*}^{(i,s)} \quad (1.17)$$

$$\sigma_{xx}^{(i,s)} = \frac{E_i(t)}{1 - v_i^2(t)} \left(\frac{\partial u_x^{(i,s-1)}(t)}{\partial x} + v_i(t) \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}(t)}{\partial y} \right) + \frac{v_i(t)}{1 - v_i(t)} \sigma_{xx*}^{(i,s)}(t) + \\ + \int_{\tau_1}^t \sigma_{xx*}^{(i,s)}(\tau) R_{21}(t, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^t \left[\left(\frac{\partial u_x^{(i,s-1)}(\tau)}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}(\tau)}{\partial y} \right) R_{11}(t, \tau) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial u_x^{(i,s-1)}(\tau)}{\partial x} - \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}(\tau)}{\partial y} \right) R_{12}(t, \tau) \right] d\tau$$

$$u_{xx}^{(i,s)} = \int_0^z \left[\frac{2(1 + v_i(t))}{E_i(t)} \sigma_{xx*}^{(i,s)} - 2 \int_{\tau_1}^t \sigma_{xx*}^{(i,s)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta_i(t, \tau) + \delta_{11}(t, \tau)) d\tau - \right. \\ \left. - \frac{\partial u_x^{(i,s-1)}}{\partial x} \right] dz \quad (x, y)$$

$$u_{xx}^{(i,s)} = \int_0^z \left[E_i^{-1}(t) \left[\sigma_{xx*}^{(i,s)}(t) - v_i(t) (\sigma_{xx*}^{(i,s)}(t) + \sigma_{yy*}^{(i,s)}(t)) \right] - \right. \\ \left. - \int_{\tau_1}^t \left[\sigma_{xx*}^{(i,s)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) - (\sigma_{xx*}^{(i,s)}(\tau) + \sigma_{yy*}^{(i,s)}(\tau)) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_{11}(t, \tau) \right] d\tau \right] dz$$

$$R_{z1}(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_i(t, \tau) - \frac{2v_i(\tau)}{1 - v_i(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_{11}(t, \tau) + \\ + \frac{2v_i(t)}{E_i(t)} R_{21}(t, \tau) - \int_{\tau}^t R_{21}(\alpha, \tau) \frac{\partial}{\partial \alpha} \delta_{11}(t, \alpha) d\alpha$$

Общий интеграл системы (1.7)-(1.11), выраженный рекуррентными формулами (1.14)-(1.17), содержит $2n$ функций интегрирования $\sigma_{js0}^{(i,s)}, u_{j0}^{(i,s)}$, $j = x, y, z$; $i = 1, 2, \dots, n$ для каждого шага итерации s , которые однозначно определяются из граничных условий (1.1)-(1.5) и из условий контакта слоев (1.6).

2. Удовлетворив условиям контакта слоев, получим

$$\sigma_{jz0}^{(i+1,s)} = \sigma_{jz0}^{(1,s)} + \sum_{k=1}^i \left(\sigma_{jz*}^{(k,s)}(z_k) - \sigma_{jz*}^{(k+1,s)}(z_k) \right) \quad (2.1)$$

$$\bar{j} = x, y, z \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\begin{aligned} u_{x0}^{(i,s)} &= u_{x0}^{(i+1,s)} + u_{x*}^{(i+1,s)}(z_i) + z_i \left(\frac{\mu_x^{(i+1)}(t)}{E_{i+1}(t)} \sigma_{xz0}^{(i+1,s)}(t) - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\tau_i}^t \sigma_{xz0}^{(i+1,s)}(\tau) K_{xz}^{(i+1)}(t, \tau) d\tau \right) - u_{x*}^{(i,s)}(z_i) - \\ &\quad - z_i \left(A_{53}^{(i)} \sigma_{xz0}^{(i,s)} + A_{54}^{(i)} \sigma_{yz0}^{(i,s)} + A_{55}^{(i)} \sigma_{zz0}^{(i,s)} \right) \\ &\quad (u_x, u_y, u_z; \mu_x, \mu_y, \mu_z; \quad xz, yz, zz; \quad 5, 4, 3) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\mu_x^{(i)}(t) = \mu_y^{(i)}(t) = 2(1 + \nu_i(t)), \quad \mu_z^{(i)}(t) = \frac{1 - \nu_i(t) - 2\nu_i^2(t)}{1 - \nu_i(t)}$$

$$K_{xz}^{(i)}(t, \tau) = K_{yz}^{(i)}(t, \tau) = 2 \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta_i(t, \tau) + \delta_{ii}(t, \tau))$$

$$K_{zz}^{(i)}(t, \tau) = R_{3i}(t, \tau)$$

для слоев с нечетными номерами $i = 2m - 1$, а для слоев с четными номерами $2m$

$$\begin{aligned} u_{x0}^{(i,s)} &= u_{x0}^{(i+1,s)} + z_i \left(A_{53}^{(i+1)} \sigma_{xz0}^{(i+1,s)} + A_{54}^{(i+1)} \sigma_{yz0}^{(i+1,s)} + A_{55}^{(i+1)} \sigma_{zz0}^{(i+1,s)} \right) - \\ &\quad - z_i \left(\frac{\mu_x^{(i)}(t)}{E_i(t)} \sigma_{xz0}^{(i,s)}(t) - \int_{\tau_i}^t \sigma_{xz0}^{(i,s)}(\tau) K_{xz}^{(i)}(t, \tau) d\tau \right) + \\ &\quad + u_{x*}^{(i+1,s)}(z_i) - u_{x*}^{(i,s)}(z_i) \quad (u_x, u_y, u_z; \mu_x, \mu_y, \mu_z; \quad xz, yz, zz; \quad 5, 4, 3) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Удовлетворив на поверхности $z = 0$ пластины граничным условиям (1.1), получим

$$u_{j0}^{(n,s)} = u_j^{-(s)}, \quad u_{j0}^{-(0)} = u_j^-, \quad u_j^{-(s)} = 0 \quad s \neq 0, \quad j = x, y, z \quad (2.4)$$

Если на поверхности $z = H$ пластины заданы статические условия (1.2), то для оставшихся неопределенными трех функций интегрирования получим

$$\begin{aligned} \sigma_{jz0}^{(1,s)} &= \sigma_{jz}^{+(s)} - \sigma_{jz*}^{(1,s)}(H), \quad \sigma_{jz}^{+(0)} = \sigma_{jz}^+ \\ \sigma_{jz}^{+(s)} &= 0 \quad s \neq 0, \quad j = x, y, z \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отметим, что формулы (2.4), (2.5) не зависят от того, является ли пос-

ледный слой упругим или упруго-ползучим.

Если на поверхности $z = H$ заданы кинематические условия (1.3), то для определения $\sigma_{jz0}^{(1,s)}$ $j = x, y, z$ получаются интегральные уравнения, формальные решения которых для ортотропных тел дают

$$\sigma_{jz0}^{(1,s)} = U_{jz}^{(s)}(t) + \int_{\tau_1}^t U_{jz}^{(s)}(\tau) R_{jz}(t, \tau) d\tau, \quad j = x, y, z$$

$$U_{xz}^{(s)} = \frac{1}{T_5(t)} \left[V_{xz}^{(s)} - \sum_{k=1}^p \left(W_{xz}^{(k,s)} + D_5^{(k)} \sum_{l=1}^{2k} \left(\sigma_{xz*}^{(l,s)}(z_l) - \sigma_{xz*}^{(l+1,s)}(z_l) \right) \right) \right]$$

(2.6)

$$V_{jz}^{(s)} = u_j^{(s)} - u_j^{(s)} - \sum_{k=1}^n \left(u_{j*}^{(k,s)}(z_{k-1}) - u_{j*}^{(k,s)}(z_k) \right), \quad j = x, y, z$$

$$W_{jz}^{(k,s)}(t) = \sum_{l=1}^{2k-1} h_{2k} \left[\frac{\mu_j^{(2k)}(t)}{E_{2k}(t)} \left(\sigma_{jz*}^{(l,s)}(z_l) - \sigma_{jz*}^{(l+1,s)}(z_l) \right) - \right.$$

$$\left. - \int_{\tau_1}^t \left(\sigma_{jz*}^{(l,s)}(z_l) - \sigma_{jz*}^{(l+1,s)}(z_l) \right) K_{jz}^{(2k)}(t, \tau) d\tau \right], \quad j = x, y, z$$

$$R_{xz}(t, \tau) \text{ - резольвента ядра } T_5^{-1}(t) \sum_{k=1}^p h_{2k} K_{xz}^{(2k)}(t, \tau) \quad (xz, yz, zz; 5, 4, 3)$$

где для нечетного общего количества слоев n имеем

$$T_5(t) = \sum_{k=1}^{(n+1)/2} h_{2k-1} A_{55}^{(2k-1)} + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} h_{2k} \frac{\mu_x^{(2k)}(t)}{E_{2k}(t)}$$

(2.7)

$$(5, 4, 3; \mu_x, \mu_y, \mu_z); \quad D_5^{(k)} = h_{2k+1} A_{55}^{(2k+1)} \quad (5, 4, 3)$$

а для четного общего количества слоев n имеем

$$T_5(t) = \sum_{k=1}^{n/2} \left(h_{2k-1} A_{55}^{(2k-1)} + h_{2k} \frac{\mu_x^{(2k)}(t)}{E_{2k}(t)} \right)$$

(2.8)

$$(5, 4, 3; \mu_x, \mu_y, \mu_z); \quad D_5^{(k)} = h_{2k-1} A_{55}^{(2k-1)}; \quad p = n/2$$

В том случае, когда на поверхности $z = H$ заданы смешанные условия (1.4), то $\sigma_{xz0}^{(1,s)}$ определяется по формуле (2.5), а $\sigma_{yz0}^{(1,s)}$, $\sigma_{zz0}^{(1,s)}$ - по формулам (2.6)-(2.8).

При смешанных условиях (1.5) неизвестная $\sigma_{z0}^{(1,s)}$ определяется по формулам (2.6)-(2.8), а $\sigma_{xz0}^{(1,s)}, \sigma_{yz0}^{(1,s)}$ - по формулам (2.5).

Полученные асимптотические решения сформулированных краевых задач (1.1) -(1.5) позволяют с любой заранее заданной асимптотической точностью определить напряженно-деформированное состояние слоистой пластины во всех ее внутренних точках, кроме небольшой области вблизи поперечных кромок, ширина которой равна глубине затухания решений типа пограничного слоя [2,3]. Для вычисления напряженно-деформированного состояния пластины, справедливого всюду, необходимо к полученным решениям добавить согласованное с ним решение типа пограничного слоя [2,3].

Точность расчетов напряженно-деформированного состояния слоистой пластины по полученным итерационным формулам зависит как от количества шагов, так и от физико-механических свойств материалов слоев и изменяемостей функций $\sigma_{jz}^+, u_j^+, j = x, y, z$, заданных на лицевых поверхностях, что существенно затрудняет ее оценку в приведенной выше общей постановке краевых задач. В каждом же конкретном случае оценка остаточного члена асимптотического разложения (1.3) не представляет трудности. Причем, если граничные функции $\sigma_{jz}^+, u_j^+, j = x, y, z$ являются полиномами степени p , то итерационный процесс обрывается на $p+1$ шаге и получается математически точное решение для слоя.

Заметим, что алгоритм решений приведенных краевых задач не обусловлен конкретно примененной линейной моделью ползучести [1]. Поэтому, полученные рекуррентные расчетные формулы остаются в силе и для других линейных моделей вязкоупругости [7,8], если в полученных формулах заменить ядра ползучести и соответствующие резольвенты согласно выбранной модели.

3. Пусть пластина из композиционного материала состоит из анизотропной основы нечетных слоев, соединенных с помощью изотропного вязкоупругого вяжущего, имеющего физико-механические коэффициенты [1]

$$\begin{aligned} \delta_i(t, \tau) &= E_i^{-1}(\tau) + \varphi_i(\tau)(1 - \exp[-\gamma_i(t - \tau)]) \\ \delta_{ii}(t, \tau) &= \nu_i \delta_i(t, \tau), \quad \nu_i = \text{const} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Одна упругая лицевая поверхность пластины жестко закреплена, а на противоположную -действуют постоянные нагрузки

$$u_j(z=0) = 0, \quad \sigma_{jz}(z=H) = \sigma_{jz}^+ = \text{const}, \quad j = x, y, z \quad (3.2)$$

Итерация обрывается на первом шаге приближения и приводит к точному решению краевой задачи

$$\begin{aligned} \sigma_{jz}^{(i)} &= \sigma_{jz}^+, \quad j = x, y, z; \quad \sigma_{xy}^{(i)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \sigma_{xx}^{(i)} &= A_{13}^{(i)} \sigma_{zz}^+ + A_{14}^{(i)} \sigma_{yz}^+ + A_{15}^{(i)} \sigma_{xz}^+ \quad (xx, yy, 1, 2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
u_x^{(i)} = & \sum_{k=(i+1)/2}^{(n-1)/2} \left[h_{2k} \mu_x^{(2k)} \delta_{2k}(t, \tau_1) \sigma_{xz}^+ + \right. \\
& + h_{2k+1} \left(A_{53}^{(2k+1)} \sigma_{xz}^+ + A_{54}^{(2k+1)} \sigma_{yz}^+ + A_{55}^{(2k+1)} \sigma_{xx}^+ \right) \Big] + \\
& + \left(z - \sum_{k=i+1}^n h_k \right) \left(A_{53}^{(i)} \sigma_{xz}^+ + A_{54}^{(i)} \sigma_{yz}^+ + A_{55}^{(i)} \sigma_{xx}^+ \right) \\
& (u_x, u_y, u_z; \mu_x, \mu_y, \mu_z; xz, yz, zz; 5, 4, 3) \quad i = 1, 3, 5, \dots \\
\mu_x^{(i)} = & \mu_y^{(i)} = 2(1 + \nu_i), \quad \mu_z^{(i)} = (1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)/(1 - \nu_i)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

для слоев с нечетными номерами и

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(i)} = & \frac{\nu_i}{1 - \nu_i} \sigma_{xx}^+ (x, y) \\
u_x^{(i)} = & \sum_{k=(i+2)/2}^{n/2} h_{2k} \mu_x^{(2k)} \delta_{2k}(t, \tau) \sigma_{xx}^+ + \left(z - \sum_{k=i+1}^n h_k \right) \mu_x^{(i)} \sigma_{xx}^+ + \\
& + \sum_{k=i/2}^{(n-1)/2} h_{2k} \left(A_{53}^{(2k+1)} \sigma_{xx}^+ + A_{54}^{(2k+1)} \sigma_{yz}^+ + A_{55}^{(2k+1)} \sigma_{xx}^+ \right) \\
& (u_x, u_y, u_z; \mu_x, \mu_y, \mu_z; xz, yz, zz; 5, 4, 3) \quad i = 2, 4, \dots
\end{aligned} \tag{3.5}$$

для слоев с четными номерами.

Формулы (3.3)–(3.5) показывают, что напряжения, возникающие от постоянной внешней нагрузки, передаются по всем упругим и вязкоупругим слоям без изменения. А перемещения меняются во времени в ползучих слоях и упругих слоях, расположенных выше ползучих. В последнем упругом слое $i = n$ во времени не меняются ни напряжения, ни перемещения. Для переменных по линейным координатам x, y внешних нагрузок, эти выводы имеют точность $O(\varepsilon)$.

Таблица

шаг (порядок)	$I(\varepsilon^0)$	$II(\varepsilon^1)$	$III(\varepsilon^2)$	$IV(\varepsilon^3)$
нагрузки $z = h_1 + h_2 + h_3$	постоянные	линейные	квадратич.	кубические
порядок временного фактора НДС в слоях	(1)	$u_x, u_y, u_z \rightarrow \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$	$\rightarrow \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$	$\rightarrow \sigma_{zz}$
	(2)	$u_x, u_y, u_z \rightarrow \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$	$\rightarrow \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$	$\rightarrow \sigma_{zz}$
	(3)	-----	$\sigma_{xz}, u_x(x, y)$	$\sigma_{zz} \rightarrow \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}, u_z$
$z = 0$	u_x^-	u_y^-	u_z^-	

На предлагаемой таблице показана схема распространения временного фактора (зависимости от времени) по напряжениям и перемещениям трехслойной ортотропной пластины ($n=3$) с ползучим средним слоем при постоянной, линейной, квадратичной и кубической внешних нагрузках, исходя из математически точных решений краевых задач. (Если же нагрузки не полиномиальные, то выводы имеют соответствующие асимптотические порядки $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$). Таким образом, при постоянной и линейной нагрузках, в третьем слое напряженно-деформированное состояние не зависит от времени, а во втором и первом слоях временной фактор не действует на напряжения $\sigma_{xx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$. При квадратичной нагрузке временной фактор действует на σ_{xx}, σ_{yz} всех слоев и u_x, u_y третьего слоя. Только тогда, когда внешние нагрузки - полиномы третьей (и выше) степени, все компоненты напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины меняются во времени.

Автор выражает свою признательность Л. А. Агаловяну.

Л и т е р а т у р а

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести.-М.: ГИТТЛ, 1952. 323 с.
2. Агаловян Л. А. Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач.-Механика. Ереван: Изд. Ереван. ун-та, 1984. №3. с. 51-58.
3. Геворкян Р. С. Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин.- Изв. АН Арм ССР. Механика. 1984, т. 37, №6, с. 3-15.
4. Агаловян Л. А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела.- Механика. Ереван: Изд. Ереван. ун-та, 1982, №2, с. 7-12.
5. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок. - ПММ, 1986, т.50, №2, с. 271-278.
6. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Асимптотическое решение смешанных краевых задач двухслойной полосы, состоящей из упругого и реологического слоев.- Изв.РАН, МТТ, 1992, №5, с. 120-128.
7. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести.-М.: Машиностроение, 1975. 399 с.
8. Миненков Б. В., Стасенко И.В. Прочность деталей из пластмасс. - М.: Машиностроение, 1977. 264 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
1. 06. 1994

ВОЛНЫ ЛЯВА, РАСПРОСТРАНЯЮЩИЕСЯ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕРОВНОСТЯМИ

Мухсихачоян А.Р.

Ա.Ռ. Մուխսիխաչոյան

Պարբերաբար անհարթ եզրի երկայնքով տարածվող Լյավի ալիքների մասին

Գլխավորվում է սահմանային ալիքների տարածումը կիսապարամոյական հեղուկի մեջ սահմանադրված եզր ունեցող առանցքային շերտում: Հետազոտվում են ստացված դիսպերսիոն հավասարումները, ուսումնասիրվում են սահմանային ալիքի փակված ալիքների գոյության և փոխազդեցության հարցերը:

A.R. Mukhsikhachoyan

The wave of Love propagating along the periodical curly edge

Рассматривается распространение сдвиговых поверхностных волн вдоль периодически неровной границы упругого слоя с подложкой. Исследуются полученные дисперсионные уравнения с точки зрения существования и взаимодействия двух типов сдвиговых волн.

Большая практическая значимость привлекла к проблеме распространения поверхностной акустической волны в периодических структурах интерес многих исследователей [1-5]. Для строго синусоидальных неоднородностей с периодом, равным или близким длине поверхностной волны, задача распространения волны Лява была решена в работе [1]. Решение этой же задачи для любых периодических неоднородностей и исследование влияния формы этих неоднородностей на затухание поверхностной волны приведено в работе [2].

Метод решения задачи, используемый в [3], приводит к независимости скорости распространения поверхностной волны от неровности поверхности и результаты сводятся к исследованию амплитуды поверхностной волны в зависимости от степени неровности.

Применяемый подход в работе [4] показывает, что уже в первом приближении скорость сдвиговой поверхностной волны существенно зависит от характеристики неровности поверхности.

Как известно, при ровной границе раздела в изотропном полупространстве (в случае антиплоского напряженно-деформированного состояния) поверхностная волна не распространяется. Однако, немалозвестно, что с прибавлением слоя на полупространство, при определенных условиях появляется сдвиговая поверхностная волна (СПВ)- волна Лява. С другой стороны, известно также, что материалы с неоднородными поверхностями [5] допускают распространение СПВ. Представляется интересным задача, в которой имеется слой (μ_1, ρ_1) с неровной поверхностью раздела с подложкой (μ_2, ρ_2) с точки зрения влияния неровностей на существование волны Лява, и наоборот, влияние слоя на существование волны от неровностей.

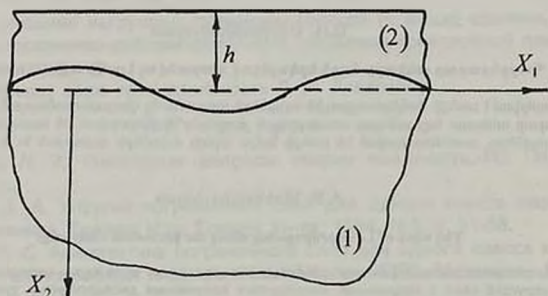
1. Пусть поверхность раздела слоя с подложкой в прямоугольной декартовой координатной системе (x_1, x_2, x_3) задана уравнением

$$x_2 = f(x_1) \quad (1.1)$$

Ось Ox_1 выбираем параллельной, а ось Ox_2 - перпендикулярной к верхней поверхности слоя. Слой занимает область $-h \leq x_2 < f(x_1)$ (фиг. 1).

Поле упругих перемещений задается в виде

$$U_1^{(i)} \equiv 0, \quad U_2^{(i)} \equiv 0, \quad U_3^{(i)} = U_i(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2$$



фиг. 1

Уравнения движения в слое и в подложке, соответственно, записываются следующим образом:

$$\Delta U_i = c_i^{-2} \ddot{U}_i \quad (1.2)$$

где

$$c_i^2 = \frac{\mu_i}{\rho_i}, \quad i = 1, 2, \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$$

При такой постановке задачи граничное условие на свободной от механических нагрузок поверхности слоя $x_2 = h$ примет следующий вид:

$$\sigma_{32}^{(2)} = 0 \quad (1.3)$$

Непрерывность перемещений и напряжений на поверхности раздела слой-полупространство (1.1) выражается следующими соотношениями [1]:

$$[U] = 0, \quad [\sigma_{32}] - [\sigma_{31}] \frac{df}{dx_1} = 0 \quad (1.4)$$

где

$$[U] = U_1 - U_2, \quad [\sigma_y] = \sigma_y^{(1)} - \sigma_y^{(2)}$$

Допустим, что нижняя поверхность слоя изменяется по гармоническому закону, т.е.

$$x_2 = f(x_1) = a \cos v_2 x_1 \quad (1.5)$$

где $v_2 = 2\pi / \Lambda \cdot \Lambda$ - период неоднородностей, a - амплитуда ($a < h$). В дальнейшем предполагается, что неровности являются слабыми

$$\varepsilon = \pi a / \Lambda < 1 \quad (1.6)$$

Такое предположение позволяет граничное условие (1.4) удовлетворять на плоскости $x_2 = 0$

Решения уравнений движения в подложке и в слое ищем соответственно в виде

$$U_1 = \exp(i\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x_2) \sin v_n x_1$$

$$U_2 = \exp(i\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x_2) \sin v_n x_1 \quad (1.7)$$

где $v_n = \pi n / \Lambda$. Далее, следуя по методу, изложенной в работе [4], для СПВ первой формы ($n=1$) перемещения и дисперсионное уравнение в первом приближении запишутся соответственно:

$$U_1 = A \exp[i\omega t - k\alpha_1 x_2] \sin kx_1$$

$$U_2 = [B \sin(k\alpha_2 x_2) + D \cos(k\alpha_2 x_2)] \exp(i\omega t) \sin kx_1 \quad (1.8)$$

где

$$\alpha_1 = (1 - v^2 / c_1^2)^{1/2} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = (v^2 / c_2^2 - 1)^{1/2} \quad (1.9)$$

$$g\alpha_2 \operatorname{tg}(k h \alpha_2) - \alpha_1 + \varepsilon(1 - g) = 0 \quad (1.10)$$

где

$$g = \mu_2 / \mu_1$$

Здесь и в дальнейшем под $v = v_1 = \omega / k$ и $k = v_1$ будем понимать, соответственно, фазовую скорость и волновое число поверхностной волны первой формы. Необходимо также отметить, что при выводе решений (1.8) предполагалось, что α_2 является реальной тогда, когда α_1 может быть только реальной в силу затухания волны в подложке.

Легко заметить, что при $\varepsilon = 0$, т.е. когда слой имеет плоские границы, то дисперсионное уравнение (1.10) приводится к классическому дисперсионно-

му уравнению Лява.

2. Рассматривая длинноволновое приближение ($kh \rightarrow 0$), заметим, что при $\varepsilon^2(1-g)^2 < 1$ вдоль периодически неровной границы раздела слой-подложка распространяется СПВ со скоростью

$$v_0 = c_1 \left[1 - \varepsilon^2(1-g)^2 \right]^{1/2} \quad (2.1)$$

которая больше, чем фазовая скорость СПВ распространяющейся вдоль периодически неровной границы полупространства [4]. Исходя из последнего, можно утверждать, что при $\varepsilon^2(1-g)^2 \geq 1$ поверхностной волны нет.

В зависимости от взаимного расположения трех постоянных величин c_1 , c_2 и v_0 , возможны три разных варианта расположения дисперсионных кривых [6].

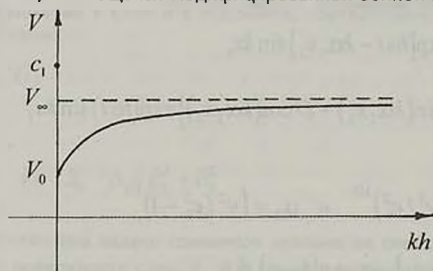
Рассмотрим первый вариант:

$$v_0 < c_1 \leq c_2$$

Как следует из (1.9), α_2 становится мнимой. Пусть $\alpha_2 = i\beta_2$, где β_2 является реальной. Тогда, дисперсионное уравнение (1.10) преобразуется к виду

$$g\beta_2 \operatorname{th}(kh\beta_2) + \alpha_1 - \varepsilon(1-g) = 0 \quad (2.2)$$

Сразу же отметим, что последнее уравнение при $g \geq 1$ решений не имеет. Этот вариант допускает единственную моду распространяющейся поверхностной волны, являющейся модифицированной волной Лява (фиг.2)



фиг.2

Однако, отметим, что такая мода не существует при отсутствии неровности границы, в чем легко убедимся, поставив в уравнение (2.2) $\varepsilon = 0$. При возрастании величины kh , коэффициент затухания волны α_1 монотонно убывает, а фазовая скорость монотонно возрастает, начиная со значения v_0 до конечной величины v_∞ , которая меньше, чем скорость сдвиговой объемной волны подложки c_1 . В коротковолновом приближении ($kh \rightarrow \infty$) определим асимптотическое значение v_∞ , к которой стремится дисперсионная кривая. Тогда, уравнение (2.2) преобразуется к виду [5].

$$g[1 - v^2/c_2^2]^{1/2} + [1 - v^2/c_1^2]^{1/2} = \varepsilon(1 - g) \quad (2.3)$$

Обозначим $v^2/c_1^2 = \sin^2 \varphi$, тогда

$$1 - v^2/c_1^2 = \cos^2 \varphi, \quad 1 - v^2/c_2^2 = 1 - \theta^{-1} \sin^2 \varphi, \quad \theta = \frac{c_2^2}{c_1^2}$$

а уравнение (2.3) приводится к виду

$$\cos^2 \varphi - 2\varepsilon(1 - g)\cos \varphi + \varepsilon^2(1 - g)^2 - g^2(1 - \theta^{-1} \sin^2 \varphi) = 0$$

отсюда определим

$$\cos \varphi = \left\{ \varepsilon(1 - g) \pm g \left[\varepsilon^2 \theta^{-1} (1 - g)^2 + (1 - \theta^{-1})(1 - g\rho) \right]^{1/2} \right\} (1 - g\rho)^{-1}$$

где

$$\rho = \rho_2 / \rho_1$$

Оказывается, что такая волна может существовать только при выполнении определенных условий. Выводим эти условия, исходя из того критерия, что фазовая скорость v существует при $kh \rightarrow \infty$. Последнее имеет место только в случае, если уравнение (2.2) будет иметь решение. Используя следующие оценки

$$(1 - v^2/c_1^2)^{1/2} \geq (1 - c_1^2/c_1^2) = 0$$

$$(1 - v^2/c_2^2)^{1/2} \geq (1 - 1/\theta)^{1/2}$$

и учитывая предположение (1.6), необходимое условие запишем

$$g(1 - g)^{-1}(1 - 1/\theta)^{1/2} \leq \varepsilon < 1 \quad (2.4)$$

Однако, потребовав, чтобы левая часть последнего неравенства была меньше единицы, получим

$$g < \left[1 + (1 - 1/\theta)^{1/2} \right]^{-1} \quad (2.5)$$

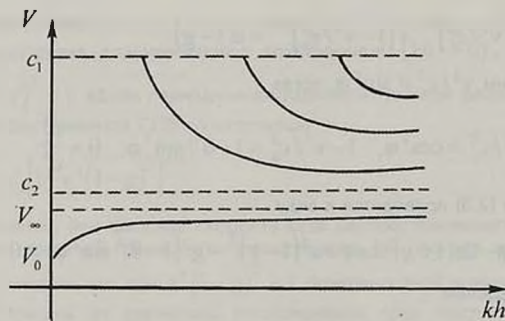
(2.3) и (2.4) составляют условия существования модифицированной поверхностной волны для первого варианта. При $c_1 = c_2$ эти условия упрощаются:

$$0 < \varepsilon < 1, \quad g < 1.$$

Во втором варианте имеем следующее расположение скоростей:

$$c_2 < v_0 < c_1$$

Здесь α_2 становится реальной, и следовательно, рассматривается дисперсионное уравнение (1.10). Соответствующие этому случаю моды изображены на фиг.3. Как видно, они мало отличаются от классических мод волны Лява, а при ровной границе раздела с точностью совпадают с ними. Первая



фиг. 4

В последних двух вариантах с возрастанием фазовой скорости возрастает глубина проникания поверхностной волны.

В конце отметим, что характер изменения мод волны Лява в рассматриваемой задаче аналогично характеру изменения электроупругой волны в системе "пьезоэлектрическое полупространство- проводящий слой" [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуляев Ю.В., Курач Т.Н., Плесский В.П. Отражение поверхностных акустических волн от конечной системы периодических возмущений.- Письма в ЖТФ, 1979, 6, с. 275-278.
2. Лапин А.Д. Распространение поверхностной волны Лява вдоль границы с периодическими неоднородностями.- Акуст.ж., 1980, т.26, вып. 5, с.741-748.
3. Бреховский Л.М. О распространении поверхностных рэлеевских волн вдоль неровной границы упругого тела. - Акуст. ж., 1959, т.5, вып.3, с. 282-289.
4. Белубекян М.В. О распространении упругих сдвиговых волн вдоль периодически неровной поверхности.- Докл. АН АрмССР, 1990, т.90, №2, с. 71-74.
5. Белубекян М.В., Мухсизочоян А.Р. О существовании "стоячей" поверхностной сдвиговой волны вдоль периодически неровной поверхности.- Докл. АН АрмССР, 1992, т.93, №2, с.63-67.
6. R.G.Curtis and M.Redwood Transverse surface waves on a piezoelectric material carrying a metal layer of finite thickness.- J.Appl. Phys., Vol.44, №5, May, 1973.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
3.03.1994