ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1996

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПРОВОДЯЩИХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ПЛАСТИН

Багдасарян Г.Е., Микилян М.А.

Գ.Ե. Բաղդասարյան, Մ.Ա. Միկիլյան

Հաղորդիչ ֆերոմագնիսական սալի մագնիսաառաձգական տատանումների մաթեմատիկական մոդելավորումը

Ելնելով առաձգական կայունության տեսության և մագնիսապես փափուկ ֆերոմագնիսական մարմնի մագնիսաառաձգականության տեսության հիմնական դրույթներից, ստացված են ստացիոնար մագնիսական դաշտում հաղորդիչ ֆերոմագնիսական մարմնի մագնիսաառաձգական գրգռված վիճակը նկարագրող հավասարումները և եզրային պայմանները: Օգտվելով Կիրխհոֆի վարկածներից և ասիմպտոտիկ մեթոդից, բարակ սալերի դեպքում ձևակերպված խնդիրը բերված է երկչափի: Նախկինում համանման ուսումնասիրություններ կատարվել ընդլայնական մագնիսական դաշտում գտնվող անհաղորդիչ ֆերոմագնիսական սալերի մագնիսաառաձգական կայունության վերաբերյալ

G.E.Bagdasarian, M.A.Mikikian

Mathematical modeling of magnetoelastic vibrations of a conducting ferromagnetic plates

Исходя из основных положений теории упругой устойчивости [1] и теории магнитоупругости магнитомягкого ферромагнитного тела [2,3], введены уравнения и соответствующие граничные условия, описывающие возмущенное магнитоупругое состояние проводящих ферромагнитных тел в стационарном магнитном поле. Принимая гипотезу Кирхгоффа и применяя, предложенный в работах [4,5], асимптотический метод, сформулированная трехмерная задача сведена к двумерной в случае тонких пластин. Предложенный здесь способ сведения трехмерных задач к двумерным был использован в работах [5,6] при исследовании магнитоупругих колебаний проводящих неферромагнитных пластин и позволил решать конкретные задачи для пластин конечных размеров. Имеются также некоторые результаты, относящиеся к вопросу магнитоупругой устойчивости непроводящих ферромагнитных пластин в поперечном магнитном поле [7,8].

1. Постановка задачи магнитоупругой устойчивости проводящего ферромагнитного тела. Пусть изотропное электропроводящее тело (отнесенное к декартовой прямоугольной системе координат X_1, X_2, X_3) изготовлено из упругого магнитомягкого ферромагнитного материала и находится во внешнем стационарном магнитном поле с заданным вектором напряженности H_0, электромагнитные свойства среды, окружающей тело, эквивалентны свойствам вакуума

Известно, что при помещении ферромагнитного тела в магнитное поле происходит намагничивание материала, приводящее как к изменению напряженности магнитного поля во всем пространстве, так и к появлению массовых и поверхностных сил. Под действием этих сил в теле устанавливается начальное невозмущенное состояние, характеризующееся вектором перемещения $\vec{u}_0$, тензором упругих напряжений σ_0 и векторами $\bar{B}$, $\bar{M}$, $\bar{H}$ магнитной индукции, намагниченности и напряженности невозмущенного магнитного поля.

Интенсивность указанных сил магнитного происхождения, в силу стационарности невозмущенного состояния, определяется следующими формулами [2,3]

$$\bar{X} = \mu_0 \left(\bar{M} \bar{\nabla} \right) \bar{H} \qquad \text{(объемные силы)}$$

$$\bar{P}_0 = \left[\hat{T}^{(e)} - \hat{T} \right] \bar{N} \qquad \text{(поверхностные силы)} \qquad (1.1)$$

где μ_0 – магнитная постоянная $\left(\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H / A^2\right)$, ∇ – оператор Гамильтона, $\bar{N}$ – единичный вектор внешней нормали к невозмущенной поверхности пластинки, которую, как и в обычной теории упругой устойчивости [1], отождествляется с поверхностью Г начального недеформированного тела, $\hat{T}$ – тензор напряжений Максвелла

$$T_{ik} = H_i B_k - \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}^2 \delta_{ik}$$

$$T_{ik}^{(e)} = H_i^{(e)} B_k^{(e)} - \frac{1}{2} \mu_0 \left[\vec{H}^{(e)} \right]^2 \delta_{ik} \qquad (1.2)$$

индекс "e" здесь и в дальнейшем обозначает принадлежность к внешней области (пространство вне пластинки).

Векторы $\bar{B}$ и $\bar{H}$ в вакууме связаны соотношением $\bar{B}^{(e)} = \mu_0 \bar{H}^{(e)}$, а в магнитомягком ферромагнитном материале с линейной характеристикой – соотношением

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M}) = \mu_0 (\bar{H} + \chi \bar{H}) = \mu_0 \mu_r \bar{H} \qquad (1.3)$$

и удовлетворяет (в квазистатическом приближении) уравнениям Максвелла, которые с учетом (1.3) имеют вид

$$\text{rot } \bar{H} = 0, \qquad \text{div } \bar{H} = 0$$

$$\text{rot } \bar{H}^{(e)} = 0, \qquad \text{div } \bar{H}^{(e)} = 0 \qquad (1.4)$$

В (1.3) χ – магнитная восприимчивость, $\mu_r = \chi + 1$ – относительная магнитная проницаемость материала пластинки.

Следовательно, напряженность невозмущенного магнитного поля $\vec{H}$ (складываемая из напряженности заданного внешнего магнитного поля $\vec{H}_0$ и напряженности магнитного поля $\vec{H}^0$, создаваемого намагничиванием тела $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}^0, \vec{H}^{(e)} = \vec{H}_0 + \vec{H}^{0(e)}$) является решением уравнения (1.4) и удовлетворяет следующим известным условиям сопряжения на поверхности Г недеформированной пластинки:

$$\left[\vec{B} - \vec{B}^{(e)}\right]\vec{N} = 0, \quad \left[\vec{H} - \vec{H}^{(e)}\right]\times\vec{N} = 0 \qquad (1.5)$$

и следующие условия на бесконечности:

$$\vec{B}^{(e)} \to \mu_0\vec{H}_0 \quad \text{или} \quad \vec{H}^{0(e)} \to 0 \quad \text{при} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \infty \qquad (1.6)$$

Для полного описания невозмущенного состояния остается привести уравнения и соответствующие поверхностные условия относительно компонент σ_{ik}^0 тензора упругих напряжений невозмущенного состояния. Определение σ_{ik}^0, согласно (1.1), сводится к решению следующей задачи классической теории упругости:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_{ik}^0}{\partial x_k} + X_i = 0 \\ &\hat{\sigma}^0\vec{N} = \vec{P}_0 \end{aligned} \qquad (1.7)$$

Таким образом, задача магнитоупругости невозмущенного состояния сводится к поэтапному решению следующих двух задач: 1) определение характеристик невозмущенного магнитного поля на основе (1.3)-(1.6); 2) определение напряжений σ_{ik}^0 невозмущенного состояния на основе (1.7) с использованием (1.1), (1.2) и решения первой задачи.

Отметим (как это видно из (1.5)-(1.7) и сделанного предположения относительно нормали $\vec{N}$), что при решении указанных выше задач (при определении магнитоупругих характеристик невозмущенного состояния) не учитывается влияние деформации невозмущенного состояния и, как следствие этого, определение характеристик невозмущенного магнитного поля сводится к задаче определения магнитного поля недеформированной пластинки. Отметим также, что появление в невозмущенном состоянии магнитного давления

$\bar{P}^0$ обусловлено разрывом компонент тензора напряжений Максвелла на поверхности пластинки. Указанный разрыв является следствием того, что магнитная проницаемость материала пластинки μ_r отлична от единицы ($\mu_r >> 1$) и поэтому нормальная компонента напряженности магнитного поля и тангенциальные компоненты вектора магнитной индукции на поверхности Г претерпевают разрыв

Сообщим упругому проводящему ферромагнитному телу некоторое упругое возмущение $\vec{u}$. В результате каждая характеристика невозмущенного состояния получит соответствующее возмущение $\left(\hat{\sigma}+\hat{\sigma},\ \ P_0+\vec{P},\ \ \vec{H}+\vec{h},\ldots\right)$ и магнитоупругая система перейдет в состояние возмущенного движения. Характеристики возмущенного движения должны удовлетворять нелинейным уравнениям теории магнитоупругости проводящего магнитомягкого ферромагнитного тела и условиям сопряжения на его деформированной поверхности [2,3]. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и поверхностные условия аналогично работам [1,3,9] линеаризуются. В результате получаются следующие линейные уравнения и граничные условия относительно возмущений соответствующих магнитоупругих величин невозмущенного состояния (влиянием токов смещения на характеристики упругих колебаний пренебрежено).

уравнения во внутренней области (в области, занимаемой телом)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma_{ik}+\sigma^0_{im}\frac{\partial u_k}{\partial x_m}\right)+f_k=\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}$$

$$\sigma_{ik}=\frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ik}+\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{jj}\delta_{ik}\right),\ \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (1.8)$$

$$\bar{f}=(\operatorname{rot}\bar{h})\times\mu_0\bar{H}+\mu_0\chi\left[\left(\bar{H}\nabla\right)\bar{h}+\left(\bar{h}\nabla\right)\bar{H}\right]$$

$$\operatorname{rot}\bar{h}=\sigma\left[\bar{e}+\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\times\bar{B}\right] \qquad (1.9)$$

$$\operatorname{rot}\bar{e}=-\mu_0\mu_r\frac{\partial\bar{h}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\bar{h}=0$$

уравнения во внешней области (в области вне тела пластинки)

$$\operatorname{rot}\bar{h}^{(e)}=0,\qquad \operatorname{div}\bar{h}^{(e)}=0$$

$$\operatorname{rot}\bar{e}^{(e)}=-\mu_0\frac{\partial\bar{h}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\bar{e}^{(e)}=0 \qquad (1.10)$$

граничные условия на поверхности недеформированной пластинки

$$\left(\sigma_{ik}+\sigma_{im}^{0}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\right)N_k=\left[t_{ki}^{(e)}-t_{ki}\right]N_k+\left[T_{km}^{(e)}-T_{km}\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_m}N_k \qquad (1.11)$$

$$\left[\mu_r h_k-h_k^{(e)}\right]N_k=\left[\mu_r H_m-H_m^{(e)}\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_m}N_i$$

$$\vec{N}\times\left[\vec{e}^{(e)}-\vec{e}\right]=\left[\vec{B}^{(e)}-\vec{B}\right]v^{(n)} \qquad (1.12)$$

$$\varepsilon_{nmk}\left\{\left[h_n-h_n^{(e)}\right]N_m-\left[H_n-H_n^{(e)}\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_m}N_i\right\}=0$$

В (1.8)-(1.12) E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность, σ – коэффициент электропроводности материала пластинки, $\vec{e}$ – вектор напряженности возмущенного электрического поля, ε_{nmk} – тензор Леви-Чивита, $v^{(n)}$ – величина нормальной скорости частицы, находящейся на поверхности разрыва, t_{ki}, $t_{ki}^{(e)}$ – возмущения компонент тензора напряжений Максвелла для тела и окружающей среды соответственно

$$t_{ki}=\mu_0\mu_r\left(h_i H_k+h_k H_i\right)-\delta_{ki}\mu_0\vec{H}\vec{h}$$

$$(1.13)$$

$$t_{ki}^{(e)}=\mu_0\left[h_i^{(e)}H_k^{(e)}+h_k^{(e)}H_i^{(e)}-\delta_{ki}\vec{H}^{(e)}\vec{h}^{(e)}\right]$$

К системе уравнений (1.9), (1.10) необходимо присоединить также условия затухания возмущений электромагнитных величин на бесконечности.

2. Двумерные уравнения магнитоупругой устойчивости тонкой пластинки. Пусть упругая изотропная проводящая ферромагнитная пластинка постоянной толщины $2h$ в прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 расположена так, что ее срединная плоскость совпадает с координатной плоскостью (x_1, x_2). Для сведения трехмерных уравнений магнитоупругой устойчивости (1.8) к двумерным уравнениям устойчивости тонких пластин принимается гипотеза недеформируемых нормалей, согласно которой имеем следующие известные соотношения.

$$u_1=u-x_3\frac{\partial w}{\partial x_1},\qquad u_2=v-x_3\frac{\partial w}{\partial x_2},\qquad u_3=w(x_1,x_2,t), \qquad (2.1)$$

где $u(x_1,x_2,t)$, $v(x_1,x_2,t)$ и $w(x_1,x_2,t)$ – возмущения перемещений точек срединной плоскости пластинки.

Используя (2.1) из закона Гука для σ_{11}, σ_{22} и σ_{12} получаются следующие приближенные выражения:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial v}{\partial x_2} - x_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\right]$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial u}{\partial x_1} - x_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)\right] \quad (2.2)$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} - 2x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right]$$

Как и в обычной теории упругой устойчивости тонких пластин, будем считать, что деформации удлинения и сдвига малы по сравнению с соответствующими углами поворота $2\vec{\omega} = \operatorname{rot}\vec{u}$ и, в своей очереди эти последние величины малы по отношению к единице. Кроме того, всеми величинами, характеризующими влияние поворотов ω_3 вокруг оси $0x_3$, будем пренебрегать. Согласно изложенному, подставляя (2.1) и (2.2) в (1.8) и осредняя полученные при этом уравнения по толщине пластинки, с учетом (1.7), получим следующие двумерные уравнения магнитоупругой устойчивости рассматриваемой пластинки:

$$L_1(u,v) + \frac{1-\nu^2}{2Eh}(\sigma_{11}^{+} - \sigma_{11}^{-}) + \frac{1-\nu^2}{2Eh}\int_{-h}^{h}[f_1 + G_1(w)]dx_3 = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$L_2(u,v) + \frac{1-\nu^2}{2Eh}(\sigma_{22}^{+} - \sigma_{22}^{-}) + \frac{1-\nu^2}{2Eh}\int_{-h}^{h}[f_2 + G_2(w)]dx_3 = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (2.3)$$

$$D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - t_{11}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - 2t_{12}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - t_{22}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\sigma_{33}^{+} - \sigma_{33}^{-}\right) -$$

$$-h\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sigma_{13}^{+} + \sigma_{13}^{-}\right) - h\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sigma_{23}^{+} + \sigma_{23}^{-}\right) - \int_{-h}^{h}[f_3 - G(w) + x_3 K]dx_3 -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-h}^{h} x_3 G_1(w)dx_3 - \frac{\partial}{\partial x_2}\int_{-h}^{h} x_3 G_2(w)dx_3 = 0.$$

В уравнениях (2.3) индексами "+" и "-" здесь и в дальнейшем отмечены значения соответствующих величин на поверхностях пластинки $x_3 = h$ и $x_3 = -h$ соответственно:

$$L_1(u,v) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{1+n}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$L_2(u,v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{2.4}$$

$$G = X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad G_i = X_3 \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad k = \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \qquad t_{ik}^0 = \int_{-h}^{h} \sigma_{ik}^0 dx_3 \qquad (i,k=1,2)$$

t_{ik}^0 — усилия, характеризующие невозмущенное состояние пластинки, которые определим, решая задачу (1.7).

Входящие в уравнение (2.3) неизвестные величины $\sigma_{i3}^{\pm}$ $(i=1,2,3)$ определяем, используя поверхностные условия (1.10) при $x_3 = \pm h$. Из этих условий, с учетом (1.7) и (2.1) имеем

$$h_1^{\pm} - h_1^{(e)\pm} = \frac{\chi}{\mu_r} H_{03}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_1},$$

$$h_2^{\pm} - h_2^{(e)\pm} = \frac{\chi}{\mu_r} H_{03}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_2},$$

$$\mu_r h_3^{\pm} - h_3^{(e)\pm} = \chi\left[H_{01}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_1} + H_{02}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_2}\right], \tag{2.5}$$

$$e_1^{\pm} - e_1^{(e)\pm} = \chi\mu_0 H_{02}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial t},$$

$$e_2^{\pm} - e_2^{(e)\pm} = -\chi\mu_0 H_{01}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial t},$$

$$\sigma_{13}^{\pm} = \mu_0 H_{03}^{(e)}\left[h_1^{(e)\pm} - h_1^{\pm}\right] - \mu_0\chi H_{01}^{(e)}\left[H_{01}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_1} + H_{02}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_2}\right], \tag{2.6}$$

$$\sigma_{23}^{\pm} = \mu_0 H_{03}^{(e)}\left[h_2^{(e)\pm} - h_2^{\pm}\right] - \mu_0\chi H_{02}^{(e)}\left[H_{01}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_1} + H_{02}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_2}\right],$$

$$\sigma_{33}^{\pm} = \mu_0 H_{01}^{(e)}\left[h_1^{\pm} - h_1^{(e)\pm}\right] + \mu_0 H_{02}^{(e)}\left[h_2^{\pm} - h_2^{(e)\pm}\right] +$$

$$+\mu_0\chi H_{03}^{(e)}\left[\frac{\chi}{\mu_r} h_3^{\pm} - \left(H_{01}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_1} + H_{02}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_2}\right)\right].$$

Поверхностные условия (2.5) являются следствием непрерывности нормальной компоненты магнитной индукции возмущенного магнитного поля и тангенциальных компонент возмущенного электромагнитного поля на лицевых поверхностях пластинки $(x_1 = \pm h)$. Аналогичные условия имеют место и на боковой поверхности пластинки. Например, если часть торцевой поверхности является плоской с внешней нормалью, параллельной оси $0x_1$, то на этой части боковой поверхности при $x_1 = \mathrm{const}$ условие непрерывности нормальной компоненты магнитной индукции, согласно (1.12), (2.1) и (1.5), запишется следующим образом:

$$\mu_r h_1 - h_1^{(e)} = \chi\left[H_{02}^{(e)}\frac{\partial u}{\partial x_2} - H_{03}^{(e)}\frac{\partial w}{\partial x_1} - x_1 H_{02}^{(e)}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right]. \tag{2.7}$$

Подставляя (2.6) в систему (2.3), замечаем, что в ней кроме основных неизвестных функций u,v,w входят также значения компонент H_i и $H_i^{(e)}$ невозмущенного магнитного поля (которые определяются из решения задачи (1.4)-(1.6)) и значения возмущений h_i и $h_i^{(e)}$. Определение h_i и $h_i^{(e)}$ сводится к решению уравнений (1.9) и (1.10) с краевыми условиями (2.5) на лицевых поверхностях пластинки и условиями типа (2.7) на боковой поверхности пластинки. К этим условиям необходимо присоединить также условия $h_i^{(e)} \to 0$ на бесконечности.

3. О приведении трехмерной задачи магнитоупругой устойчивости тонких пластин к двумерной. Как видно из предыдущего пункта, в двумерные уравнения (2.3) устойчивости пластинки входят величины $H_i, H_i^{(e)}$, h_i и $h_i^{(e)}$, являющиеся решениями трехмерных задач (1.4)-(1.6) и (1.9), (1.10), (2.5), (2.7) соответственно. Указанные задачи, насколько нам известно, нельзя решить в явном виде. Поэтому, в основном, применяются приближенные или численные методы решения подобных задач. В работе [10] численным методом решены задачи определения $H_i^{(e)}$ и $h_i^{(e)}$ в случае сверхпроводящей пластинки-полосы (случай, когда присутствие пластинки наиболее сильно влияет на изменение $H_i^{(e)}$ и $h_i^{(e)}$) в продольном магнитном поле. Численные результаты показывают, что величины $H_i^{(e)}$ и $h_i^{(e)}$ вне некоторого, достаточно узкого пограничного слоя, практически совпадают с величинами $H_i^{(e)*}$ и $h_i^{(e)*}$, являющимися решением тех же задач в случае бесконечной пластинки. Исходя из этого, в дальнейшем будем принимать $H_i = H_i^*$, $H_i^{(e)} = H_i^{(e)*}$, $h_i =$

h_i^* и $h_i^{(e)} = h_i^{(e)*}$. Легко проверить, что величины H_i^*, $H_i^{(e)*}$ и B_i^*, $B_i^{(e)}$ определяются формулами:

$$\vec{H}^{(e)*} = \vec{H}_0, \quad \vec{B}^{(e)*} = \mu_0 \vec{H}^{(e)*} = \mu_0 \vec{H}_0 = \vec{B}_0$$
$$H_1^* = H_{01}, \quad H_2^* = H_{02}, \quad H_3^* = \frac{1}{\mu_r} H_{03}, \quad \vec{B}^* = \mu_0 \mu_r \vec{H}^* \tag{3.1}$$

Решение задачи, определяющей h_i^* и $h_i^{(e)*}$, будем искать в классе гармонических волн, представляя искомые магнитоупругие возмущения в виде

$$u = u_0 \exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)], \quad u \to (u, v, w),$$
$$Q = q(x_3)\exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)], \quad Q \to (h_i^{*(e)}, e_i^{*(e)}, h_i^*, e_i^*) \tag{3.2}$$

где k_1 и k_2 – волновые числа.

Подставляя (3.2) в уравнения (1.9), (1.10) и удовлетворяя поверхностным условиям (2.5), определяем неизвестные функции $q(x_3)$ (выраженные через u_0, v_0, ω_0) и, следовательно, интересующие нас величины h_i^* и $h_i^{*(e)}$. Выражения для указанных величин, в общем случае, когда заданное магнитное поле имеет произвольное направление, получаются громоздкими и здесь не приводятся. Поэтому ограничиваемся рассмотрением двух наиболее важных случаев задания внешнего магнитного поля: поперечное магнитное поле и продольное магнитное поле.

а) **Поперечное магнитное поле**. В этом случае для электромагнитных возмущений, после выполнения вышеуказанных операций, получаются следующие выражения:

$$h_1 = H_{03}\left\{\frac{\nu\chi \operatorname{ch}\nu x_3}{\mu_r\delta_2}\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\mu_0\mu_r\sigma \operatorname{sh}\nu x_3}{k\nu\delta_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\mu_0\sigma}{\nu^2}\left(1 - \frac{\nu(1+\mu_r kh)}{\delta_2}\operatorname{ch}\nu x_3\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial t}\right\}, \tag{3.3}$$

$$h_2 = H_{03}\left\{\frac{\nu\chi \operatorname{ch}\nu x_3}{\mu_r\delta_2}\frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\mu_0\mu_r\sigma \operatorname{sh}\nu x_3}{k\nu\delta_1}\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\mu_0\sigma}{\nu^2}\left(1 - \frac{\nu(1+\mu_r kh)}{\delta_2}\operatorname{ch}\nu x_3\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\partial t}\right\},$$

$$h_1 = H_{01}\left\{-\frac{\chi \operatorname{sh} \nu x_3}{\mu_r \delta_2}\Delta w - \frac{\mu_0\sigma}{\nu^2}\left(1-\frac{k\mu_r \operatorname{ch}\nu x_3}{\delta_1}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu_0\sigma}{\nu^2}\left(x_3-\frac{1+\mu_r kh}{\delta_2}\operatorname{sh}\nu x_3\right)\frac{\partial \Delta w}{\partial t}\right\},$$

где

$$\begin{aligned} &k^2 = k_1^2 + k_2^2, \quad \nu^2 = k_1^2 + k_2^2 + \mu_0\mu_r\sigma i\omega, \\ &\delta_1 = \nu \operatorname{sh}\nu h + k\mu_r \operatorname{ch}\nu h, \quad \delta_2 = \nu \operatorname{ch}\nu h + k\mu_r \operatorname{sh}\nu h. \end{aligned} \tag{3.4}$$

В дальнейшем будем принимать, что края пластинки неподвижны в своей плоскости. В этом случае, на основе (3.1) легко заметить, что задача (1.7) имеет следующее решение $\sigma^n_{33} = \chi^2 B_0^2 / 2\mu_0\mu_r^2$, а остальные компоненты тензора равны нулю. Учитывая сказанное из (2.3) в силу (3.1) и (3.3) замечаем, что задачи продольных и поперечных магнитоупругих колебаний пластинки для рассматриваемого случая разделяются и описываются следующими уравнениями

уравнения продольных колебаний

$$L_1(u,v) + \frac{(1-\mu^2)B_0^2\sigma}{E\nu^2\mu_r}\left[1+\frac{\mu_r(\nu^2-k^2)+\chi\nu^2}{k\delta_1}\frac{\operatorname{sh}\nu h}{\nu h}\right]\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}\right)=$$

$$=\frac{\rho(1-\mu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{3.5}$$

$$L_2(u,v) + \frac{(1-\mu^2)B_0^2\sigma}{E\nu^2\mu_r}\left[1+\frac{\mu_r(\nu^2-k^2)+\chi\nu^2}{k\delta_1}\frac{\operatorname{sh}\nu h}{\nu h}\right]\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)=$$

$$=\frac{\rho(1-\mu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

уравнение поперечных колебаний

$$\begin{aligned} &D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{2\chi h B_0^2}{\mu_0\mu_r}\left(1+\frac{\chi \operatorname{sh}\nu h}{\delta_2 h}-\frac{\chi\delta_3}{\mu_r\delta_2 h}\right)\Delta w - \\ &-\frac{2h\sigma B_0^2}{\nu^2\mu_r}\left[\frac{\chi\delta_3}{\delta_2 h}\big(2+\mu_r(1+kh)\big)+\frac{k^2h^2}{3}+\frac{\nu^2-k^2}{\nu^2}\frac{1+\mu_r kh}{\delta_2 h}\delta_3\right]\frac{\partial \Delta w}{\partial t}=0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$\delta_3 = \nu h \operatorname{ch}\nu h - \operatorname{sh}\nu h.$$

Из (3.6) легко получить уравнение поперечных магнитоупругих колебаний пластинки в случае диэлектрического ферромагнитного материала ($\sigma = 0$), полученного в [7,8] и в случае проводящего неферромагнитного материала ($\chi = 0$), полученного в [9,11]

Интересным является также случай идеально проводящего ферромагнитного материала ($\sigma \to \infty$, $\chi \neq 0$) Уравнение поперечных колебаний для этого случая представляется в виде

$$\left(D + \frac{2h^3}{3} \frac{B_0^2}{\mu_0 \mu_r^2} \right) \Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2hB_0^2}{\mu_0} (1 + kh) \Delta w = 0, \qquad (3.7)$$

которое при $\chi = 0$ (идеально проводящий неферромагнитный материал) совпадает с уравнением магнитоупругих колебаний рассматриваемой пластинки в поперечном магнитном поле, полученным в [12,13] на основе предположения бесконечности пластинки.

Уравнение (3.7) показывает, что в отличие от диэлектрической ферромагнитной пластинки (такая пластинка теряет статическую устойчивость в поперечном магнитном поле [7]), идеально проводящая ферромагнитная пластинка вобщее говоря, является устойчивым под действием указанного магнитного поля. Отметим также, что уравнение (3.7) не получается из уравнения (3.6) путем предельного перехода ($\sigma \to \infty$). Оно получено обычным путем на основе гипотезы недеформируемых нормалей и модели идеального проводника. Причиной несовпадения уравнения (3.7) с уравнением, полученным из (3.6) при $\sigma \to \infty$ является то, что при выводе уравнения (3.6) использованы условия непрерывности тангенциальных составляющих магнитного поля на поверхности пластинки. Указанные условия непрерывности в случае модели идеального проводника нарушаются вследствие появления индуцированного поверхностного тока.

б) **Продольное магнитное поле** В этом случае аналогичным образом, как выше, для возмущений магнитного поля получаются выражения:

$$h_1 = \delta \mathrm{sh}\, \nu x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(B_{01} \frac{\partial w}{\partial x_1} + B_{02} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) - \frac{\nu^2 - k^2}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\left(\frac{\mathrm{ch}\, \nu x_3}{\mathrm{ch}\, \nu h} - 1 \right) \frac{B_{02} u - B_{01} v}{\mu_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{h}{\mu_0} \left(\frac{\mathrm{sh}\, \nu x_3}{\mathrm{sh}\, \nu h} - \frac{x_3}{h} \right) \left(B_{01} \frac{\partial w}{\partial x_2} - B_{01} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \right] \qquad (3.8)$$

$$h_2 = \delta \mathrm{sh}\, \nu x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(B_{01} \frac{\partial w}{\partial x_1} + B_{02} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \frac{\nu^2 - k^2}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\left(\frac{\mathrm{ch}\, \nu x_3}{\mathrm{ch}\, \nu h} - 1 \right) \frac{B_{02} u - B_{01} v}{\mu_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{h}{\mu_0} \left(\frac{\mathrm{sh}\, \nu x_3}{\mathrm{sh}\, \nu h} - \frac{x_3}{h} \right) \left(B_{01} \frac{\partial w}{\partial x_2} - B_{02} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \right]$$

$$h_3 = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\nu^2 - k^2}{\nu^2} + \frac{k^2}{\nu^2} \delta \mathrm{ch}\, \nu x_3 \right) \left(B_{01} \frac{\partial w}{\partial x_1} + B_{02} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)$$

где

$$\delta = \frac{\mu_1 k^2 - \nu^2}{k\delta_1}.$$

Используя условия неподвижности края пластинки в своей плоскости, легко заметить, что задача (1.7) для рассматриваемого случая имеет нулевое решение: $\sigma^0_{ik} = 0$. Учитывая это и выражения (3.8) из (2.3), как и в случае поперечного магнитного поля, получается, что уравнения продольных и поперечных магнитоупругих колебаний отделяются и имеют вид.

уравнения продольных колебаний

$$L_1(u,v) + \frac{\nu^2 - k^2}{\nu^2}\frac{\delta_1(1-\mu^2)}{E\nu h\,\mathrm{ch}\,\nu h}\left[\chi\frac{\partial}{\partial x_2}\left(B_{01}\frac{\partial}{\partial x_1} + B_{02}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + B_{02}\Delta\right]\left(\frac{B_{02}u - B_{01}v}{\mu_0}\right) =$$

$$= \frac{\rho(1-\mu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (3.9)$$

$$L_2(u,v) + \frac{\nu^2 - k^2}{\nu^2}\frac{\delta_1(1-\mu^2)}{E\nu h\,\mathrm{ch}\,\nu h}\left[\chi\frac{\partial}{\partial x_1}\left(B_{01}\frac{\partial}{\partial x_1} + B_{02}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + B_{01}\Delta\right]\left(\frac{B_{01}v - B_{02}u}{\mu_0}\right) =$$

$$= \frac{\rho(1-\mu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

уравнение поперечных колебаний

$$D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2\chi h}{\mu_0 \nu^2}\left[1 + \delta\left(\mathrm{ch}\,\nu h - \frac{2\,\mathrm{sh}\,\nu h}{\nu h}\right)\right]L(\Delta w) - \frac{2\sigma h\mu}{\nu^2}\frac{\partial}{\partial t}\Big\{(1 -$$

$$-\delta\frac{\mathrm{sh}\,\nu h}{\nu h}\Big)L(w) + \left(\frac{\delta_1}{\nu^2 \mathrm{sh}\,\nu h} - \frac{h^2}{3}\right)\Delta\left[B_0^2\Delta w - L(w)\right]\Big\} = 0 \qquad (3.10)$$

где дифференциальный оператор L определяется выражением

$$L = B_{01}^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2B_{01}B_{02}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{02}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \text{а} \quad B_0^2 = B_{01}^2 + B_{02}^2.$$

Из (3.9) и (3.10) легко получить уравнение магнитоупругих колебаний пластинки в случае проводящего неферромагнитного материала ($\chi = 0$), полученные в [9,11] и следующее уравнение, описывающее поперечные колебания диэлектрической ($\sigma = 0$) ферромагнитной пластинки в продольном магнитном поле

$$D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\chi h}{\mu_0}\left[1 + \frac{\chi(kh\,\mathrm{ch}\,kh - 2\,\mathrm{sh}\,kh)}{kh(\mathrm{sh}\,kh + \mu_r\,\mathrm{ch}\,kh)}\right]L(w) = 0 \qquad (3.11)$$

Уравнение (3.11) показывает, что рассматриваемая пластинка (вспомним, что края пластинки неподвижны в своей плоскости) может терять статическую устойчивость в продольном магнитном поле

Интересным является также случай идеально проводящего ферромагнитного материала ($\sigma \to \infty$, $\chi \neq 0$). Уравнение поперечных колебаний для этого случая получается в виде

$$D_* \Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2h}{\mu_0 \chi}\left(1 + \frac{1}{kh}\right) L(w) = 0 \tag{3.12}$$

$$D_* = D + \left(2h^3 B_0^2 \middle/ 3\mu_0 \right)$$

которое при $\chi = 0$ идеально проводящий неферромагнитный материал совпадает с уравнением магнитоупругих колебаний рассматриваемой пластинки в продольном магнитном поле, полученном в [12,13]. Здесь также уравнение (3.12) не получается из (3.10) путем предельного перехода ($\sigma \to \infty$).

Таким образом, получены основные уравнения возмущенного состояния проводящей ферромагнитной пластинки как в поперечном (уравнения (3.5)-(3.7)), так и в продольном (уравнения (3.9)-(3.12)) магнитных полях, в которые входят неизвестные волновые числа k_1 и k_2. К этим уравнениям в каждой конкретной задаче необходимо присоединить условия закрепления краев пластинки. Волновые числа k_1 и k_2 определяем, используя асимптотический метод, развитый в работах [4-6]. В дальнейшем будем рассматривать прямоугольные пластинки, принимая $\left| \nu^2 h^2 \right| << 1$. В случаях диэлектрических или идеально проводящих пластин это условие заменяется более простым условием $k^2 h^2 << 1$. Используя указанное предположение, уравнения поперечных колебаний упрощаются и принимают следующий вид

$$D \Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\chi h}{\mu_0 \mu_r}\left(1 + \frac{\chi}{1 + \mu_r kh} \right) B_0^2 \Delta w -$$

$$- \frac{2h^3}{3} \sigma B_0^2 \left(1 + \frac{\chi}{\mu_r} + \frac{\chi(1 - kh)}{1 + \mu_r kh} \right) \frac{\partial \Delta w}{\partial t} = 0 \tag{3.13}$$

в случае поперечного магнитного поля и

$$\left[1 + \frac{\mu_0 \mu_r \sigma h}{k\alpha(1 + kh)} \frac{\partial}{\partial t} \right] \left(D\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{2\chi h}{\mu_0 \alpha} L(w) - \frac{2\sigma h \mu_r}{k^2 \alpha} L\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) = 0,$$

$$\alpha = \frac{\mu_r + kh}{1 + kh} \tag{3.14}$$

в случае продольного магнитного поля.

Из уравнения (3.13) видно (помимо известного факта [7] о потере ста тической устойчивости ферромагнитной пластинки под действием поперечного магнитного поля), что учет намагниченности материала пластинки ($\chi \neq 0$) может существенно (χ раза) усилить демпфирующее действие магнитного поля, если вспомнить, что для обычных ферромагнитных материалов $\chi \sim 10^{2} - 10^{4}$

Переходим к вопросу определения волновых чисел k_1 и k_2. Как показано в работе [6], при определении k_1 и k_2 можно ограничиться случаем идеально проводящего материала. Т.е. волновые числа, определяемые (указанным асимптотическим методом), на основе уравнения и соответствующих граничных условий идеально проводящей пластинки, можно (с точностью теории тонких пластин) использовать в задачах колебания тонких пластин из материала конечной проводимости. Следовательно, асимптотический метод будем применять лишь относительно уравнения (3.7) или (3.12) при обычных условиях закрепления краев пластинки. Для определенности рассмотрим колебание прямоугольной пластинки со сторонами a_1 и a_2 в продольном магнитном поле $H_0 = (H_{01}, 0, 0)$. Условия на контуре будем пока считать произвольными. Уравнение поперечных колебаний для рассматриваемого случая, согласно (3.12), имеет вид

$$D_*\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2h}{\mu_0} B_{01}^2 \left[\frac{1+kh}{kh} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right] = 0. \tag{3.15}$$

Уравнение (3.15) решено асимптотическим методом в работах [4-6] при обычных условиях на контуре пластинки. В результате в зависимости от типа магнитоупругих возмущений и от способа закрепления краев пластинки получаются следующие системы трансцендентных уравнений относительно волновых чисел k_1 и k_2:

1. Случай шарнирно опертой по всему контуру прямоугольной пластинки:

$$k_1 = \frac{n\pi}{a_1}, \qquad k_2 = \frac{m\pi}{a_2}, \qquad (m, n = 1, 2, 3...) \tag{3.16}$$

2. Случай защемленной пластинки (в этом случае формы магнитоупругих колебаний пластинки распадаются на четыре группы по типам симметрии):

$$\operatorname{ctg}\frac{k_1 a_1}{2} = -\frac{k_1}{r_1}, \qquad \operatorname{ctg}\frac{k_2 a_2}{2} = -\frac{k_2}{r_2}, \tag{3.17}$$

для симметричных в обоих направлениях форм колебаний и

$$\mathrm{tg}\frac{k_1 a_1}{2}=\frac{k_1}{r_1}, \qquad \mathrm{tg}\frac{k_2 a_2}{2}=\frac{k_2}{r_2} \tag{3.18}$$

для антисимметричных в обоих направлениях форм колебаний.

Для остальных смешанных форм колебаний уравнения относительно k_1 и k_2 получаются из приведенных, комбинируя соответствующим образом одно из уравнений (3.18) с другим из (3.19).

В системах (3.17), (3.18) введены обозначения

$$r_1^2 = k_1^2 + 2k_2^2 + \frac{2h(1+kh)}{\mu_0 khD_*}B_{01}^2$$

$$r_2^2 = 2k_1^2 + k_2^2 \tag{3.19}$$

3. Случаи других граничных условий. Соответствующим образом, комбинируя приведенные уравнения, можно получить уравнения относительно волновых чисел k_1 и k_2 для других видов опорного закрепления. Например, если края $x_1=0$ и $x_1=a_1$ жестко защемлены, а края $x_2=0$ и $x_2=a_2$ шарнирно оперты, то в случае симметричных колебаний имеем

$$\mathrm{ctg}\frac{k_1 a_1}{2}=-\frac{k_1}{r_1}, \qquad k_2=\frac{(2n-1)\pi}{a_2}. \qquad (n=1,2,3...) \tag{3.20}$$

Вернемся к случаю поперечного магнитного поля, опираясь на уравнение (3.7). Принимая вышеизложенный асимптотический метод относительно этого уравнения при различных граничных условиях, легко установить, что частота магнитоупругих колебаний определяется формулой

$$\omega^2 = \frac{D_*}{2\rho h}\left[\left(k_1^2+k_2^2\right)^2+\frac{2hB_0^2k^2}{\mu_0 D}(1+kh)\right] \tag{3.21}$$

а волновые числа являются решениями уравнений (3.17)-(3.19), в которых величины r_n необходимо заменить выражениями

$$r_1^2 = k_1^2 + 2k_2^2 + \frac{2h(1+kh)}{\mu_0 D_*}B_0^2$$

$$r_2^2 = 2k_1^2 + k_2^2 + \frac{2h(1+kh)}{\mu_0 D_*}B_0^2 \tag{3.22}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.-Л. Гостехиздат, 1948. 212с.
2. Broun W.F. Magnetoelastic Interactions. New York. Springer Verlag. 1966. 155p.

3 Pao y.h. and Yeh C.S. A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids. Int. J. Eng. Sci., v 11, 1973, p. 415-436.

4 Болотин В.В. Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинок. Инж. сб. 1960, т.31, с. 3-14

5 Багдасарян Г.Е. Асимптотический метод исследования магнитоупругих колебаний прямоугольных пластин. Мат. методы и физ. мех. Поля, 1986, N24, с. 72-75

6. Акопян Н.З., Багдасарян Г.Е. Колебания прямоугольной проводящей пластинки в продольном магнитном поле. Изв. АН Арм ССР. Механика, 1987, т.49, N3, с. 11-18

7 Мун, Пао И-Синь. Колебания и динамическая неустойчивость стержня-пластинки в поперечном магнитном поле. Тр. Американского общества инженеров и механиков. Сер. Е, Прикладная Механика, 1969, N1, с. 98-108.

8. Багдасарян Г.Е., Данoян Э.А. Математическое моделирование колебаний двухслойных магнитострикционных пластин. Изв. РАН. Механика твердого тела, 1992, N3, с. 87-94.

9. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М. Наука 1977. 272 с.

10 Багдасарян Г.Е., Пилипосян Г.Т. Исследование магнитоупругой устойчивости сверхпроводящей пластинки на основе численного решения внешней задачи Неймана. Изв. НАН Армении, Механика, 1995, т. 48, N2, с.13-26

11 Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Колебания и устойчивость токонесущих упругих пластин. —Ереван: Изд. НАН Армении, 1992. 121 с.

12 Kaliski S. Magnetoelastic vibration of perfectly conducting plates and bars assumig the principle of plans sections. Proc. Vibr. 1962, V 3, N4, p 225-234

13. Багдасарян Г.Е. Уравнение магнитоупругих колебаний идеально проводящих пластин. Прикл. Механика 1983, т. 19, N12, с 87-91.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 11.03.1996

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЧАСТОТ НЕОДНОРОДНОЙ БАЛКИ

Мовсисян Л.А.

Լ.Ա.Մովսիսյան

Անհամասեռ հեծանի հաճախությունների որոշման մասին

Տրվում է կամայական անհամասեռության ազատ հենված հեծանի սեփական հաճախությունները որոշելու եղանակ: Քննարկվում է հաճախությունների վարքը, երբ անհամասեռությունը պատահական ֆունկցիա է: Բերված է հակադարձ խնդրի օրինակ, տրված հաճախություններով որոշել անհամասեռության վարքը:

L.A.Movsisian

To determination of frequency of nonhomogeneous beam

Дается способ определения собственных частот шарнирно опертых балок произвольной неоднородности. Изучается характер изменения частот в случае, когда неоднородность является случайной функцией. Приведен пример обратной задачи, когда по частотам можно определить неоднородность.

1. Рассмотрим прямолинейную балку из неоднородного материала (неоднородность может быть как непрерывной, так и разрывной составной). Поперечное сечение и неоднородность симметричны относительно плоскости изгиба (xz).

Уравнение свободных продольно-изгибных колебаний приведем с учетом поперечных сдвигов, то есть перемещение по оси балки и перпендикулярного к ней направлениях представится

$$u_x = x(x,t) + zu_1(x,t), \quad u_z = w(x,t) \tag{1.1}$$

тогда, принимая, что характеристика упругости и плотность можно представить в виде сумм четных и нечетных функций относительно z, для уравнений свободных колебаний будем иметь

$$\frac{\partial T}{\partial x} = I_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = I_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q + I_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_3\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

где

$$T = J_1\varepsilon + J_2\chi, \quad M = J_2\varepsilon + J_3\chi, \quad Q = K^2 J_4\gamma$$

$$J_1 = \int_F E_0 dF,\quad J_2 = \int_F E_1 z dF,\quad J_3 = \int_F E_0 z^2 dF \tag{1.3}$$

$$J_4 = \int_F G_0 dF,\quad I_1 = \int_F \rho_0 dF,\quad I_2 = \int_F \rho_1 z dF,\quad I_3 = \int_F \rho_0 z^2 dF$$

Коэффициент K подбирается, исходя из формы поперечного сечения балки а

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x},\quad \chi = \frac{\partial u_1}{\partial x},\quad \gamma = u_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{1.4}$$

В частности, для балки прямоугольного сечения $(1\times h)$, которая по длине состоит из n столбиков, длина k того $-l_k - l_{k-1}(l_0 = 0,\ l_n = l)$, а в каждом столбике находится p_k кирпичиков со своими постоянными $E_k^{(\alpha)}$, $\rho_k^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1,2,\dots,p_k)$ и толщинами $h_k^{(\alpha)}$ функции $J_j(x)$ и $I_j(x)$ определяется формулами

$$J_j(x) = \sum_{k=1}^{n} J_k^{(j)} L_k(x),\quad J_k^{(j)} = \int_{-h/2}^{h/2} E_k^{(\alpha)} z^{j-1} dz,\quad j = 1,2,3$$

$$J_k^{(4)} = \sum_{\alpha=1}^{p_k} G_{mk}^{(\alpha)}, h_k^{(\alpha)}\quad I_j(x) = \sum_{k=1}^{n} I_k^{(j)} L_k(x),\quad I_k^{(j)} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_k^{(\alpha)} z^{j-1} dz$$

$L_k(x) = H(x - l_{k-1}) - H(x - l_k)$, $H(x)$ – функция Хевисайда

В дальнейшем будут рассмотрены частные задачи.

2. Если неоднородность балки только по длине и к тому же не быстро изменяющаяся функция, то можно пользоваться класической теории $\left(u_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}\right)$ и при этом учитывать, что уравнения продольных и поперечных движений распадаются

Для изгибных колебний будем иметь

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[E_0 J \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] + \rho_0 F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,\quad (J_3 = E_0 J, I_1 = \rho_0 F) \tag{2.1}$$

Заметим только, что и в общем случае решение можно построить таким же образом, как и для (2 1)

Для балки с шарнирно-опертыми концами решение (2 1) будем искать в виде

$$w = e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin \lambda_m x,\quad \lambda_m = \frac{m\pi}{l} \tag{2.2}$$

Тогда, представляя функции $E_0(x)$ и $\rho_0(x)$ также в виде рядов [1,2]

$$E_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m\cos\lambda_m x,\quad \rho_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}b_m\cos\lambda_m x \tag{2.3}$$

и подставляя (2.2) и (2.3) в (2.1), для определения частот получим систему относительно

$$\left[(2\alpha_0-\alpha_{2m})m^4-\Omega(2b_0-b_{2m})\right]f_m+\sum_{q=1,\,q\neq m}^{\infty}\left[(\alpha_{m-q}-\alpha_{m+q})m^2q^2-\Omega(b_{m-q}-b_{m+q})\right]f_q=0 \tag{2.4}$$

где

$$\Omega=\frac{\omega^2 Fl^4}{\pi^4 J}$$

Частоты определятся из равенства нулю детерманата системы (2.4).

В случае постоянной плотности $(b_0\neq 0,\quad b_m=0,\quad m=1,2,\ldots)$ можно показать, что определитель системы (2.4) – нормальный [3]. Для этого обозначим $\varphi_m=m^2 f_m$ и условие разрешимости (2.4) запишем

$$\det\left\|\delta_{mq}-c_{mq}\right\|=0,\quad \delta_{mq}=\begin{cases}1, & при\ m=q\\ 0, & при\ m\neq q\end{cases} \tag{2.5}$$

$$c_{mm}=\frac{2b_0\Omega}{(2a_0-a_{2m})m^4},\quad c_{mq}=\frac{(a_{m-q}-a_{m+q})}{m^2(2a_0-a_{2m})}$$

Принимая, что a_m имеют порядок хотя бы m^{-1}, представим двойной ряд

$$\sum_{m,q}^{\infty}|c_{mq}|=\sum_{m=1}^{\infty}|c_{mm}|+\sum_{m,q,\,m\neq q}^{\infty}|c_{mq}|<C_1\sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{1}{m^4(m-\beta)}\right|+C_2\sum_{m,q}^{\infty}\left|\frac{1}{m^4(q^2-m^2)(m-\beta)}\right| \tag{2.6}$$

где C_1, C_2 и β – постоянные.

Так как $\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^2-m^2}=\frac{3}{4m^2}$, то второе слагаемое в (2.6) будет вида первого.

Таким образом, двойной ряд сходится, следовательно, собственные частоты можно определить методом редукции и процесс этот сходится [3].

Между прочим, в пользу предложенного способа определения частот говорит не только то, что он применим в случаях, когда невозможно решение уравнений с переменными коэффициентами, но и то, что часто быстро приводит к желаемым результатам. Например, для составного стержня (продольное колебание) из двух частей l_1, E_1 и l_2, $E_2(\rho_1=\rho_2)$ первые две частоты, определение из трансцендентного уравнения

$$a_1 \operatorname{tg}\frac{\omega l_1}{a_1} + a_2 \operatorname{tg}\frac{\omega l_2}{a_2} = 0, \quad a_i = \sqrt{\frac{E_i}{\rho}}$$

равны $\frac{\omega l_1}{a_1} = 0{,}998; 2{,}143$ при $l_2 = 3l_1, \quad E_2 = 2{,}25E_1$.

А вот частоты, определенные из системы двух уравнений, аналогичной (2.4), соответственно равны $\frac{\omega l_1}{a_1} = 1{,}002; 2{,}202$, то есть наибольшая разница между точными и приближенными решениями меньше, чем 3%, причем ее можно свести к нулю, увеличивая число привлекаемых уравнений.

В качестве примера рассмотрим случай $\rho_0 = \mathrm{const}$ из двух материалов, чередующихся один за другим

$$E_0(x) = \begin{cases} E_1, l_{2(k-1)} \le x \le l_{2k-1}, k = 1,2,\ldots,\frac{n}{2} \\ E_2, l_{2k-1} \le x \le l_{2k} \quad n = 2j \end{cases} \tag{2.7}$$

Коэффициенты a_m определяются как $(n = 2j, \quad j = 1,2,\ldots)$

$$a_0 = \frac{n}{2l}(E_1 a + E_2 b), \quad a = l_{2k-1} - l_{2k}, \quad b = l_{2k} - l_{2k-1} \tag{2.8}$$

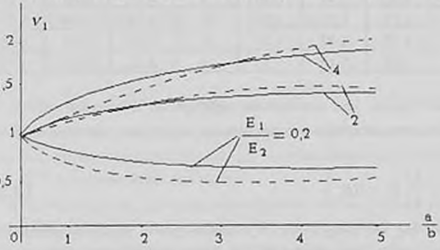
$$a_m = \frac{4}{m\pi}(E_1 - E_2)\sin\frac{m\pi a}{2l}\sum_{p=1}^{n/2}\cos\frac{m\pi}{4l}\left[(2p-1)a + 2(p-1)b\right]$$

Таблица 1

$\frac{E_1}{E_2}$ / ν_i	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
ν_1	0,82 0,87	1 1	1,10 1,12	1,16 1,22	1,21 1,32	1,24 1,41	1,27 1,50	1,29 1,58	1,21 1,66	1,33 1,73
ν_2	3,40 3,46	4 4	4,45 4,47	4,81 4,90	5,13 5,29	5,41 5,66	5,66 6,00	5,89 6,32	6,10 6,63	6,29 6,93
ν_3	7,47 7,79	9 9	9,92 10,06	10,57 10,02	11,08 11,91	11,50 12,73	11,86 13,50	12,19 14,23	12,48 14,92	12,76 15,59

В табл.1 помещены значения первых трех относительных частот $\nu_i = \left(\Omega_i \rho / E\right)^{1/2}$ при $a / b = 1$ для различных E_1 / E_2.

Для каждой ν_i в первых строках помещены значения при $n = 2$, а во вторых $n = 16$ (были вычислины также для случаев $n = 4;8;12$). Были взяты определители до десятого порядка для выяснения процесса сходимости. Из табл 1 видно, что для $n = 16$ для приведенных отношений E_1 / E_2 при определении частот можно пользоваться средним значением для модуля упругости, то есть принимать $E_0(x) = (E_1 + E_2)/2$ (для некоторых E_1 / E_2 это имеет место уже при $n = 8$ или $n = 12$)



Фиг.1

На фиг.1 приведены кривые первой относительной частоты v_1, в зависимости от a / b для различных E_1 / E_2. Сплошные линии соответствуют случаю $n = 16$, а пунктирные $n = 2$

3 Рассмотрим теперь задачу, когда имеется неоднородность по толщине. Для симметрично собранной трехслойной балки, концы которой шарнирно оперты, частоты с точностью до λ_m^4 определяются

$$\omega_{m1}^2 = \frac{J_1}{I_1}\lambda_m^4\left(1 - \Lambda_m\right), \quad \omega_{m2}^2 = K^2\frac{J_2}{I_1}\left(1 + \Lambda_m\right) \tag{3.1}$$

$$\Lambda_m = \left(\frac{J_1}{K^2 J_2} + \frac{I_2}{I_1}\right)\lambda_m^2, \quad J_1 = \frac{h_1^3}{12}E_1 + HE_2$$

$$J_2 = K^2\left(G_1 h_1 + 2G_2 h_2\right), \quad I_1 = \rho_1 h_1 + 2\rho_2 h_2, \quad I_2 = \rho_1\frac{h_1^3}{12} + \rho_2 H$$

$$H = \frac{1}{6}\left(4h_2^3 + 6h_2^2 h_1 + 3h_2 h_1^2\right), \quad h = h_1 + 2h_2$$

В табл 2 приведены значения $\frac{12l^2\Lambda_1}{\pi^2 h^2}$ при $K^2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\rho_1 = \rho_2$ для различных h_2 / h_1 и E_2 / E_1

Т а б л и ц а 2

E_2/E_1 / h_2/h_1	0	0,01	0.1	1	5	10	100
0.1	2.28	2.29	2.40	3	4.29	4.86	5.74
0.2	1.72	1.75	1.97	3	4.18	4.50	4.87
0.3	1.32	1.37	1.79	3	3.79	3.94	4.10
0.4	1.08	1.18	1.53	3	3.37	3.42	3.47

Из табл.2 видно, как для большого интервала отношений E_2/E_1 и h_2/h_1 основную изгибную частоту можно определить по классической теории

$$\omega_1^2 = \frac{\pi^4}{\rho h l^4}\left(\frac{h_1^3}{12}E_1 + HE_2\right) \tag{3.2}$$

4. До сих пор мы предпологали неоднородность детерминированной. Однако, полученные результаты можно использовать также для случаев, когда неоднородность является случайной функцией. Будем различать два типа неоднородности. В одном случае неоднородность, которая возникает благодаря наличию в среде разнородных материалов.

Здесь нас будет интересовать неоднородность следующего вида. Известно, многие материалы, кристаллы которых анизотропные [4], в макромасштабе ведут себя как изотропные. Однако, если в исследуемом объекте (например, в балке) имеется всего несколько кристаллов и каждый из них по-разному ориентирован относительно какой-то оси, будем иметь неоднородность — в каждом участке, занимаемом данным кристаллом, будут свои упругие постоянные (таковыми являются, например, стержни-балки из силикона). Так как приводимый в дальнейшем материал носит иллюстративный характер, то по понятным соображениям рассматриваются наиболее простые модели и наиболее простой закон вероятности.

Будем считать, что кристаллы сами ортотропные, а ось балки не совпадает ни с одной из главных направлений упругости, то есть закон Гука в системе главных направлений записывается

$$\varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j, \quad \sigma_i = A_{ij}\varepsilon_j \tag{4.1}$$

Если один из кристаллов при получении балки поворачивались относительно оси z на некоторый угол $\varphi_4^{(1)}$, а другие относительно y на $\varphi_4^{(2)}$, то связь между напряжением и деформацией относительно оси балки (x) запишется

$$\varepsilon_i^{(k)} = b_{11}^{(k)}\sigma_i^{(k)}, \quad E_i^{(k)} = \frac{1}{b_{11}^{(k)}}, \quad (i = 1,2)$$

При этом

$$b_{11}^{(k)} = A^{(i)} + B^{(i)}\cos 2\varphi_k^{(i)} + C^{(i)}\cos^2 2\varphi_k^{(i)}$$

$$A^{(i)} = \frac{1}{4}\left(a_{11} + a_{1+i,1+i} + a_3^{(i)}\right), \quad B^{(i)} = \frac{1}{2}\left(a_{11} - a_{1+i,1+i}\right)$$

$$C^{(i)} = \frac{1}{4}\left(a_{11} + a_{1+i,1+i} - a_3^{(i)}\right)$$

$$a_3^{(1)} = 2a_{12} + a_{66}, \quad a_3^{(2)} = 2a_{13} + a_{55}, \quad (i = 1,2).$$

Если известны законы распределения случайных величин $\varphi_k^{(i)}$, то по формулам преобразования случайных величин можно определить законы для $E_i^{(k)}$ и в дальнейшем для частот.

В частном случае, для трехслойной балки в классической постановке, или для примера п 2, когда при определении частот можно довольствоваться диагональным приближением $\left(\Omega_m = \left(a_0 - 0{,}5a_{2m}\right)m^4\right)$, частоты есть линейные функции от E_1 и E_2

$$\omega_m^2 = X_1(m)E_1 + X_2(m)E_2 \tag{4.3}$$

Выражение $X_i(m)$ можно взять из (2.5), (2.8) и (3.2)

Считая, что одни кристаллы поворачивалась относительно оси z Z а вторые относительно оси y и для $\varphi_k^{(i)}$ справедливы законы равномерной плотности, для функции распределения квадрата частоты будем иметь

$$F(\omega^2) = f_1 f_2 \frac{1}{X_1 X_2} S \tag{4.4}$$

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\omega^2 - E_1(X_1 + X_2)\right]^2, & (X_1 + X_2)E_1 < \omega^2 < X_1E_1 + X_2E_1 \\ \frac{1}{2}(E_2 - E_1)\left[2\omega^2 - X_1(E_1 + E_2) - 2X_2E_1\right], & X_1E_1 + X_2E_2 < \omega^2 < X_1E_1 + X_2E_2 \\ X_1X_2(E_2 - E_1)(E_2 - E_1) - \frac{1}{2}(\omega^2 - X_1E_1 - X_2E_2) & \end{cases}$$

$$X_1E_1 + E_2X_2 < \omega^2 < X_1E_1 + X_2E_2$$

Формула (4.4) получена при определенных предположениях относительно E_i и X_i, что видно из выражений неравенств, кривые $E_i = E_i(\varphi_i)$ заменены ломаными

$$f_i(E_i)=\frac{dF_i}{dE_i},\quad F_i=\frac{2}{\pi}\left[\varphi_i^{(0)}\frac{E-E_i}{E_i^{*}-E_i}+\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_i^{(0)}\right)\frac{E-E_i}{E_i^{*}-E_i}\right] \qquad (4.5)$$

$$E_i=E_i(\varphi_i=0),\quad E_i=E_i\left(\varphi_i=\frac{\pi}{2}\right),\quad E_i^{*}=E_i\left(\varphi_i=\varphi_i^{(0)}\right).$$

$\varphi_i^{(0)}$ – точка стационарности.

Для "однослойной" балки из однонаправленных кристаллов, каждый из которых на φ_1 перевернут относительно z и φ_1 -относительно новой оси y' коэффициент b_{11} будет

$$b_{11}=A+B\cos 2\varphi_2+C\cos^2 2\varphi_2 \qquad (4.6)$$

здесь

$$A=\frac{1}{4}\left[(A_1+a_{11}+2D+\Phi)+(B_1+2K+F)\cos 2\varphi_1+C_1\cos^2 2\varphi_1\right]$$

$$B=\frac{1}{2}\left[(A_1-a_{11})+B_1\cos 2\varphi_1+C_1\cos^2 2\varphi_1\right]$$

$$C=\frac{1}{4}\left[(A_1+a_{11}-2D-\Phi)+(B+2K-F)\cos 2\varphi_1+C_1\cos^2 2\varphi_1\right]$$

$$D=\frac{1}{2}(a_{13}+a_{33}),\quad K=\frac{1}{2}(a_{13}-a_{33})$$

$$\Phi=\frac{1}{2}(a_{44}+a_{55}),\quad F=\frac{1}{2}(a_{55}-a_{44})$$

Определяя стационарные точки поверхности $E(\varphi_1,\varphi_2)$ при определении вероятностных характеристик E по заданным законам относительно φ_i здесь поверхность заменяется "пирамидой".

В качестве примера взят материал силикона с данными $c_{11}=166GPa,\ C_{12}=63.8GPa,\ C_{44}=79.5GPa$

$$A_{11}=\frac{C_{11}+C_{12}}{(C_{11}-C_{12})(C_{11}+2C_{12})};\quad A_{12}=-\frac{C_{12}}{(C_{11}-C_{12})(C_{11}+2C_{12})},\quad A_{44}=\frac{1}{C_{44}} \qquad (4.7)$$

Расчеты дают $E_1=E_{min}=130.6GPa$ (при $\varphi_1=\varphi_2=0$).

$$E_2=169.8GPa\left(\varphi_1=\frac{\pi}{4},\varphi_2=0\right),\quad E_{max}=187.2GPa=E_1,$$

$$\left(\varphi_1=\frac{\pi}{4},\varphi_2=0.6158\right),\quad <E>154.5GPa.$$

Между прочим, среднее значение E, вычисленное здесь, мало отличается от вычисленных по формулам Фойгта-$165.9GPa$ и Ройсса $154.87GPa$

Для законов равномерных плотностей для φ_1 и φ_2 функция распределения для E (то же и для ω^2) будет

$$F(E)=\begin{cases}\dfrac{(E-E_1)^2}{(E_2-E_1)(E_3-E_1)}, & E_1\le E\le E_2\\[2ex] 1-\dfrac{(E_3-E)^2}{(E_3-E_1)(E_3-E_1)}, & E_2\le E\le E_3\end{cases}\tag{4.8}$$

В последних примерах вопрос должен быть поставлен следующим образом. Какова вероятность, чтобы ω^2 (или ω) находился в требуемом интервале?

Расчеты показывают, что вероятность того, чтобы квадрат частоты находился соответственно ±5%, ±10%, ±15% от квадрата частоты со средним E, равны 0,34, 0,68; 0,92, а чтобы частота отличалась от средней ±5%, равна 0,69

5 Кстати, приведенные в п 2 результаты можно использовать также и для решения обратной задачи по заданным частотам определить неоднородность. Правда, в общем случае неоднородности по решению одной задачи невозможно этого сделать, однако, в частных случаях, например, если по длине неоднородность следующего типа имеется конечное число интервалов и в каждом из них модуль упругости постоянен, то можно достигнуть цели, имея значения частот, равных по числу неизвестных модулей. В частности, по примеру п 2, по двум частотам можно определить E_1 и E_2. Если известны ω_1 и $\omega_2\left(\Omega_i=\dfrac{\omega_i^2 Fl^4}{\pi^4 J}\right)$, то E_1 и E_2 в первом приближении определятся

$$E_1=\frac{1}{17}(\xi+\eta),\quad E_2=\frac{1}{17}(\xi-\eta)\tag{5.1}$$

$$\xi=\Omega_1+\Omega_2,\quad \eta=\frac{1}{\zeta}\sqrt{(\Omega_2-16\Omega_1)(16\Omega_1-\Omega_2)}$$

$$\zeta=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{4n}(2n-1)}{\cos\frac{\pi}{4n}}+\frac{1}{3}\frac{\cos\frac{3\pi}{4n}(2n-1)}{\cos\frac{3\pi}{4n}}\right]$$

Формулы выведены для случая одинаковых длин интервалов участков с различными коэффициентами. В то же время можно их уточнить, беря последующие приближения. Такую же процедуру можно применить также для определения распределения температуры в балке, когда свойство материала изменяется в зависимости от температуры

Выполнение данной работы поддерживалось американским университетом в Армении

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А. Об устойчивости упругой балки при продольном ударе. - Докл. АН АрмССР. 1969, т.49, №3, с.124-130.
2. Мовсисян Л.А. К устойчивости упруго-пластических стержней при ударных нагрузках. - Изв.АН АрмССР. Механика. 1986, т.39, №2 с.15-23
3. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приблеженные методы высшего анализа. - М.-Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
4. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. - М.: Наука, 1977. 400с.

Институт механики НАН РА

Поступила в редакцию
26.10.1994

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

ELASTIC WAVES PROPAGATION IN AN ELASTIC LAYER WITH CUBIC ANISOTROPIC PROPERTIES

Kazarian K.B., Belubekian M.V.

Կ.Բ. Ղազարյան, Մ.Վ. Բելուբեկյան

Առաձգական ալիքների տարածումը խորանարդային սիմետրիայի հատկություններով օժտված անիզոտրոպ շերտում

Քննարկվում է առաձգական ալիքների տարածումը շերտում, որի նյութը ունի խորանարդային բյուրեղի հատկություններ: Ստացված է խնդրի դիսպերսիոն հավասարումը կապակցված երկայնական և լայնական ալիքների փուլային արագությունների նկատմամբ:

Երկար ալիքների մոտավորությամբ ստացված են անջատված հավասարումներ, որոնք որոշում են հեծանի լայնական տատանումների հաճախությունները և ձողում երկայնական ալիքի փուլային արագությունը: Կարճ ալիքների մոտավորությամբ խնդիրը հանգում է Ռելեյի տիպի մակերևութային ալիքի ուսումնասիրությանը: Հետազոտված է բյուրեղի անիզոտրոպ հատկության ազդեցությունը.

К.Б. Казарян, М.В. Белубекян

Распространение упругих волн в слое с анизотропными свойствами кубической симметрии

Обсуждается задача распространения упругих волн в слое из материала со свойствами кубического кристалла. Получено дисперсионное уравнение задачи относительно связанных фазовых скоростей продольных и поперечных волн.

В длинноволновом приближении получены раздельные уравнения относительно частот колебаний поперечных и продольных волн балки. В коротковолновом приближении задача сводится к изучению поверхностных волн Рэлея. Исследовано влияние анизотропных свойств кристалла.

This paper discusses a dinamic problem of an elastic wave propogation along an infinite layer with anisotropic properties of a single cubic crystal. The dispersion equation are deduced relating the coupled SP and P waves patterns phase velocities. In long a wave approximation the beam flexural and extensional vibration equations are obtained. In a short waves approximation the equation of the surface Releigh type waves is deduced. By means of the Kirchoff theory of plate the two dimensional dynamic equation of anisotropic plate is deduced. A comparition between the obtained results is carried out and effect of anisotropy is studied.

STATEMENT OF THE PROBLEM

In the fixed Cartesian laboratory system $\left(X_1, X_2, X_3\right)$ the governing equations are listed as follows:

Constitutive equations [7]

$$\sigma_{ik} = (c_{11} - c_{12})s_{ik} + c_{12}s; \quad (i = k)$$

$$(i\,;k = 1,2,3)$$

$$\sigma_{ik} = 2c_{44}s_{ik}; \qquad (i \neq k) \tag{1}$$

$$s = s_{11} + s_{22} + s_{33}$$

The strain- mechanical displacements equations

$$s_{ik} = \frac{1}{2}\left(u_{i,k} + u_{k,i}\right) \tag{2}$$

The equation of motion

$$\sigma_{ik,k} = \rho u_{i,tt} \tag{3}$$

In the above σ_{ik}, s_{ik}, u_i are components of the stress and strain tensors and displacement vector. Material properties are the elastic modulus c_{11}, c_{12}, c_{44}; the mass density ρ

We consider the infinite elastic layer of the 2d thickness.

We take the Cartesian laboratory system (X_1, X_2, X_3) coincident with the crystallophysics system. The X_1, X_2 axis are directed along the interface. The X_3 axis is directed perpendicular to the interface of the layer.

It is supposed that interfaces $X_3 = \pm d$ are free from mechanical stresses.

From (1-3), it follows that the coupled SP, P- wave patterns are separated from SH - wave pattern.

SOLUTION OF THE PROBLEM

Later we ω, ll investigate the plane deformation case (the coupled SP, P-wave patterns).

Taking $X_1 = X$, $X_3 = Z$, $u_1 = u(X,Z)$, $u_3 = v(X,Z)$, from (1-3) we obtain the following governing equation with respect to the displacements U,V

$$c_l^2 u_{,xx} + c_t^2 u_{,zz} + \left[c_l^2 - c_t^2(2\gamma - 1)\right] v_{,xz} = u_{,tt}$$

$$c_t^2 v_{,xx} + c_l^2 v_{,zz} + \left[c_l^2 - c_t^2(2\gamma - 1)\right] u_{,xz} = v_{,tt} \tag{4}$$

At the free $X_3 = \pm d$ interfaces we have the following boundary conditions

$$\sigma_{xz} = 0; \quad \sigma_{zz} = 0$$

$$u_{,z} + v_{,x} = 0, \quad v_{,z} + (1 - 2\vartheta\gamma)u_{,x} = 0 \tag{5}$$

In the (4-5) $c_l = (c_{11} / \rho)^{1/2}$ is the velocity of the p wave. $c_t = (c_{44} / \rho)^{1/2}$ is the velocity of the SP wave. $\vartheta = c_t^2 / c_l^2 = c_{44} / c_{11}$; $\gamma = (c_{11} - c_{12}) / 2c_{44}$ is the coefficient of anisotropy.

Taking solution of (4) in the form of the plane monochromatic waves

$$u = u_0 \exp\left[i(kX - \omega t)\right]; \quad v = v_0 \exp\left[i(kX - \omega t)\right] \tag{6}$$

(k is the wave number, ω is the frequency of the wave) we come to the set of ordinary differential equations

$$\vartheta u_{0,zz} - k^2(1-\beta\vartheta)u_0 + ik\left[1-\vartheta(2\gamma-1)\right]v_{0,z} = 0$$

$$v_{0,zz} - \vartheta k^2(1-\beta)v_0 + ik\left[1-\vartheta(2\gamma-1)\right]u_{0,z} = 0 \tag{7}$$

where $\beta = \omega^2 / k^2 c_t^2$.

The solution of (7) can be written in the form

$$v_0 = A_1 \mathrm{sh}(kp_1 Z) + A_2 \mathrm{ch}(kp_1 Z) + A_3 \mathrm{sh}(kp_2 Z) + A_4 \mathrm{ch}(kp_2 Z) \tag{8}$$

$$u_0 = \alpha_1 A_1 \mathrm{sh}(kp_1 Z) + \alpha_1 A_2 \mathrm{ch}(kp_1 Z) + \alpha_2 A_3 oh(kp_2 Z) + \alpha_2 A_4 oh(kp_2 Z)$$

$$\alpha_j = \frac{p_j^2 - \vartheta(1-\beta)}{p_j\left[1-\vartheta(2\gamma-1)\right]} \qquad (j=1;2)$$

In (8) $\pm p_1$, $\pm p_2$ are the roots of the characteristic equation

$$p^4 - p^2\left[2(2\gamma-1) - \beta(1+\vartheta) + 4\vartheta\gamma(1-\gamma)\right] + (1-\beta\vartheta)(1-\beta) = 0 \tag{9}$$

In the case, of an antisymmetry with respect to plane Z=0, when $v_0(Z)$ is the even function and $u_0(Z)$ is an odd function, according to the boundary conditions (5) we come to the following dispersion equation

$$\frac{\mathrm{th}(kp_1 d)}{\mathrm{th}(kp_2 d)} = \frac{f_1 g_2 p_1}{f_2 g_1 p_2} \tag{10}$$

where

$$f_i = p_i^2 + (1-2\vartheta\gamma)(1-\beta); \quad g_i = p_i^2 + (1-2\vartheta\gamma+\vartheta\beta)$$

Let us consider the limiting cases.

If the length of wave is $l = 2\pi / K >> d$

then taking

$$\mathrm{th}(kp_i d) \cong kp_i d\left[1 - \frac{1}{3}(kp_i d)^2\right] \tag{11}$$

and using eq.(10) , we come to

$$\beta(1+\vartheta-2\vartheta\gamma) = \frac{1}{3}(kd)^2\Big[p_1^2 p_2^2 + (p_1^2+p_2^2)(1-2\vartheta\gamma+\vartheta\beta) + \\ +(1-2\vartheta\gamma+\vartheta\beta)(1-2\vartheta\gamma)(1-\beta)\Big] \tag{12}$$

From eq. (9) we have

$$p_1^2 p_2^2 = (1-\beta\vartheta)(1-\beta); \quad p_1^2 + p_2^2 = 2(2\gamma-1) - \beta(1+\vartheta) + 4\vartheta\gamma(1-\gamma)$$

Then according to (10), the equation (12) can be written as

$$\beta - \frac{k^2 d^2}{3}\left[4\gamma(1-\vartheta\gamma) - (3-4\vartheta\gamma)\beta - \beta^2\vartheta\right] = 0 \tag{13}$$

Introducing the new variable $\zeta = \omega^2 / k^2 c_l^2 (\beta = \zeta / \vartheta)$,we can rewrite eq (13) in the form

$$\zeta - \frac{k^2 d^2}{3}\left[4\gamma\vartheta(1-\vartheta\gamma) - (3-4\vartheta\gamma)\zeta - \zeta^2\right] = 0 \tag{14}$$

This equation determines the first mode of flexural (bending) vibration of the layer.

Since $\gamma\vartheta = (c_{11} - c_{12}) / 2c_{11}$, this equation does not depend upon the coefficient c_{44}

Using technical notations

$$c_{11} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad c_{12} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad c_{44} = \tilde{G} \tag{15}$$

where E is the Young modulus, ν is Poisson ratio, $\bar{G}$ is shear modulus.

($\bar{G} = E / 2(1+\nu)$ for isotropic materials)

we can rewrite eq. (14) as follows

$$\rho\omega^2 - \frac{Ek^4d^2}{3(1-\nu^2)} + \underline{\frac{\rho^2\omega^4(1+\nu)(1-2\nu)d^2}{3(1-\nu)E} + \frac{k^2d^2\rho\omega^2(1+\nu)}{3(1-\nu)}} = 0 \tag{16}$$

Taking $-i\omega = \delta / \delta t$, $ik = \delta / \delta X$, we can rebuild the beam flexural vibration equation

$$\frac{2Ed^3}{3(1-\nu^2)} w_{,xxxx} + 2\rho d w_{,tt} - \underline{\frac{2(1+\nu)d^3\rho}{3(1-\nu)} w_{,xxtt}} - \underline{\frac{2(1+\nu)(1-2\nu)d^3\rho^2}{3(1-\nu)E} w_{,tttt}} = 0 \tag{17}$$

In eqs.(16,17) the underlined expressions are negligible ones and in general they are not taken into account.

Thus, for the cubic crystals in a beam approximation we have the classic dynamics equation of isotropic media

In a short wave approximation, taking instead of the hyperbolic functions the value one, we can obtain the equation determining the surface wave dimensionless phase velocity

$\xi = \omega / kc_t$

$$\xi^2 = \frac{4\gamma(1-\vartheta)\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-\xi^2} + \sqrt{1-\xi^2\vartheta}} \tag{18}$$

The necessary and sufficient condition for the existance of the surface wave in the cubic crystal is $\vartheta < 1$.

For the isotropic materials this condition is always satisfied, since $c_t < c_l$ For the cubic crystal, this condition may be not take place.

If $\vartheta \geq 1$ the equation (18) has not real roots in the interval $0 < \xi < \vartheta^{-1/2}$

Let us consider the symmetrical case , when $v_0(Z)$ is the odd function and $u_0(Z)$ is the even function

Then, according to the boundary conditions (5) we have the following dispersion equation

$$\frac{\mathrm{th}(kp_2d)}{\mathrm{th}(kp_1d)} = \frac{f_1g_2p_1}{f_2g_1p_1} \tag{19}$$

In a long wave approximation the equation (19) coincides with the equation of an isotropic beam.

In the short wave approximation we come to the eq. (18)

EQUATIONS OF A THIN PLATE

Now we will obtain the equations of a thin plate using the Kirchoff theory of plate. The investigation shall be carried out in a laboratory orthogonal system having one common axis with the crystallophysics system (X_1, X_2, X_3).

We take the rectangular Cartesian laboratory system (X, Y, Z) in such a way the coordinate plane (X, Y) coincides with the middle plane of the plate. The Z axis is directed along the normal to the plate middle plane and is coincides with the X_3 axis. The X, Y axes are twisted out on φ angle with respect to X_1, X_2 axes.

In the new system the constitutive equations have the form [6]

$$\sigma_{xx} = c_{11}s_{xx} + c_{12}\left(s_{yy} + s_{zz}\right) - \frac{c}{2}\left[\left(s_{xx} - s_{yy}\right)\sin^2 2\varphi + s_{xy}\sin 4\varphi\right]$$

$$\sigma_{yy} = c_{11}s_{yy} + c_{12}\left(s_{xx} + s_{zz}\right) + \frac{c}{2}\left[\left(s_{xx} - s_{yy}\right)\sin^2 2\varphi + s_{xy}\sin 4\varphi\right]$$

$$\sigma_{xy} = 2c_{44}s_{xy} - c\left[\frac{1}{4}\left(s_{yy} - s_{xx}\right)\sin 4\varphi - s_{xy}\sin^2 2\varphi\right]$$

$$\sigma_{zz} = c_{11}s_{zz} + c_{12}\left(s_{xx} + s_{yy}\right) \tag{20}$$

$$\sigma_{xz} = 2c_{44}s_{xz}; \quad \sigma_{yz} = 2c_{44}s_{yz};$$

$$c = c_{11} - c_{12} - 2c_{44}$$

Taking assumptions of the Kircholf theory

$$s_{xz} = s_{yz} = s_{zz} = 0; \tag{21}$$

$$u_x = -Zw,_x; \quad v_y = -Zw,_y; \quad u_z = w(X, Y)$$

and supposing σ_{zz} to be small, we can obtain the following constitutive equation concerning the stresses σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} acting in the plate middle plane

$$\sigma_{xx} = -\left(B'_{11}w,_{xx} + B'_{12}w,_{yy} + 2B'_{16}w,_{xy}\right)$$

$$\sigma_{yy} = -\left(B'_{12}w,_{xx} + B'_{22}w,_{yy} + 2B'_{26}w,_{xy}\right) \tag{22}$$

$$\sigma_{xy} = -\left(B'_{16}w,_{xx} + B'_{26}w,_{yy} + 2B'_{44}w,_{xy}\right)$$

In these equations the following notations are used

$$B'_{11} = B_{11} - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi B_0; \quad B'_{22} = B_{11} - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi B_0$$

$$B'_{12} = B_{12} + \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi B_0; \quad B'_{44} = B_{44} - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi B_0 \tag{23}$$

$$B'_{16} = -\frac{1}{4}\sin 4\varphi B_0; \quad B'_{26} = \frac{1}{4}\sin 4\varphi B_0$$

where

$$B_0 = B_{11} - B_{12} - 2B_{44}$$

$$B_{11} = B_{22} = \left(c_{11}^2 - c_{12}^2\right)/c_{11};$$

$$B_{12} = c_{12}\left(c_{11} - c_{12}\right)/c_{11}$$

$$B_{44} = c_{44}$$

The plate bending vibration equation has the form

$$M_{x,xx} + 2H_{,xy} + M_{y,yy} = \rho w_{,tt} \tag{24}$$

where

$$M_x = \int_{-d}^{d}\sigma_{xx}ZdZ; \quad M_y = \int_{-d}^{d}\sigma_{yy}ZdZ; \quad H = \int_{-d}^{d}\sigma_{xy}ZdZ$$

are bending and torque moments

Using technical coefficients we have

$$M_x = -D\left(w_{,xx} + \nu w_{,yy}\right) + \frac{1}{2}\bar{D}\sin^2 2\varphi\left(w_{,xx} - w_{,yy}\right) + \frac{1}{2}\bar{D}\sin 4\varphi w_{,xy} \tag{25}$$

$$M_y = -D\left(\nu w_{,xx} + w_{,yy}\right) - \frac{1}{2}\bar{D}\sin^2 2\varphi\left(w_{,xx} - w_{,yy}\right) - \frac{1}{2}\bar{D}\sin 4\varphi w_{,xy}$$

$$H = -\left(\frac{4\tilde{G}d^3}{3} + \tilde{D}\sin^2 2\varphi\right)\omega_{,xy} + \frac{1}{4}\tilde{D}\sin 4\varphi\left(w_{,xx} - w_{,yy}\right)$$

where

$$D = \frac{2d^3E}{3\left(1-\nu^2\right)}; \quad \tilde{D} = \frac{2d^3}{3}\left(\frac{E}{1+\nu} - 2\tilde{G}\right)$$

Finally, the plate vibration equation has the form

$$D\left(w_{,xxxx} + 2\left(1 - \tilde{D}/D\right)w_{,xxyy} + w_{,yyyy}\right) -$$

$$-\frac{\tilde{D}}{2}\sin^2 2\varphi\left(w_{,xxxx} - 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}\right) - \tag{26}$$

$$-\tilde{D}\sin 4\varphi\left(w_{,xxxy} - w_{,xyyy}\right) + 2\rho d w_{,tt} = 0$$

For isotropic material it is necessary to take $\bar{D} = 0$

The beam equation has the form

$$\left(D - \frac{\tilde{D}}{2}\sin^2 2\varphi\right)w_{,xxxx} + 2\rho d w_{,tt} = 0 \tag{27}$$

When $\varphi = 0$, we come to eq. (17).

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors would like to express their thanks to the American University of Armenia for supporting this work

REFERENCES

1. L.Tolstoy, E.Usdin. Dispersive Properties of Stratified Elastic and Liquid Media. Bull. Seism. Soc. Amer., 44, 1954
2. R.Stoneley. The Propogation of Surface Waves in a Cubic Crystal. Proc. Royal Soc. of London. Vol. 232, 1955
3. P.E. Dieulesant, D.Royer, Ondes Elastique dans les Soliders, Masson, 1974
4. S.A. Ambartsumian, Theory of Anisotropic Plates, Technomic, Stanford, 1970
5. W.Menz, Micro actuators in Liga Technique. Int. Jour. Applied Electromagnetic in Materials, V2, 4, 1992
6. T.Kosavada, K.Suzuki and Y.Tomikawa, A Card Sending Linear Ultrasonic Motor Using Multi-beam Piezoelectric Vibrators. Int. Jour. Applied Electromagnetics in Materials, V2, 4, 1992
7. Т.Д.Шермергор, Теория упругости микронеоднородных сред, Наука, М, 1977

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
7.11.1994

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА ПРОЧНОСТЬ

Белубекян Э.В., Маркарян С.Э.

Է.Վ. Բելուբեկյան, Ս.Է. Մարգարյան

Կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված գլանային թաղանթի սկզբնական գրգռումների մեծագույն արժեքների որոշումը ամրության սահմանափակման դեպքում

Դիտարկվում է եզրագծով ազատ հենված օրթոտրոպ կոմպոզիցիոն նյութի մոնոշերտերից պատրաստված գլանային թաղանթի պանել

Թաղանթի հաստատուն կշռի դեպքում լուծվում է ԿՆ-ի մոնոշերտերի ըստ հաստության դասավորման անկյունների օպտիմալ ընտրության խնդիրը, որի դեպքում ապահովվում է ամրության պայմանից թույլատրելի սկզբնական գրգռման մեծագույն արժեքը սալի սեփական տատանումների դեպքում

E.V. Beloubekian, S.E. Markarian

The Determination of the Maximum Values of the Initial Excitation of the Cylindrical Shell of Composition Material in Case of Strenght Limitation

Рассматривается шарнирно-опертая по контуру панель цилиндрической оболочки изготовленная из монослоев ортотропного композиционного материала (КМ)

Решается задача оптимального выбора угла укладки монослоев КМ по толщине оболочки при ее постоянном весе, обеспечивающего наибольшее допустимое из условия прочности максимальное значение начального возмущения при собственных колебаниях оболочки

Рассматривается шарнирно-опертая по контуру панель цилиндрической оболочки размерами a, b, h, R, изготовленная из монослоев ортотропного композиционного материала (КМ).

Оболочка отнесена к цилиндрической системе координат Oxyz так, что координатная поверхность $z=0$ совпадает с срединной поверхностью, а ось Oz направлена к центру кривизны оболочки.

Предполагается, что в пакете оболочки по толщине монослои КМ расположены поочередно под углами $\pm\varphi$ к оси Ox. В этом случае пакет оболочки в целом можно считать ортотропным.

Решается задача оптимального выбора угла укладки монослоев КМ по толщине оболочки при её постоянном весе, обеспечивающего наибольшее допустимое из условия прочности максимальное значение начального возмущения при собственных колебаниях оболочки.

Рассматриваются числовые примеры при различных начальных условиях и значениях габаритных размеров оболочки

1.Система дифференциальных уравнений собственных колебаний ортотропной оболочки в цилиндрической системе координат имеет вид [1]

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,$$

$$a_{11}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+(a_{66}-2a_{12})\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+a_{22}\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, \qquad (1)$$

где $w(x,y,t)$ функция прогибов, $\Phi(x,y,t)$ функция усилий, ρ плотность материала оболочки, t время, $C_{ij}=B_{ij}h,\ D_{ij}=B_{ij}h^3/12$ жесткости оболочки, $a_{ij}=D_{ij}/\left(C_{11}C_{22}-C_{12}^2\right)$, $a_{66}=1/C_{66}$ характеристики упругости монослоя KM по главным геометрическим направлениям оболочки, которые выражаются через характеристики упругости KM по его главным физическим направлениям B_{ij}^0 по известным формулам поворота [1]

Начальные условия оболочки принимаются в виде

$$w\big|_{t=0}=Cf_1(x,y),\quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=\xi Cf_2(x,y), \qquad (2)$$

где C и ξC соответственно максимальные по модулю значения начального прогиба и скорости, $\left|f_i(x,y)\right|\le 1$ заданные функции распределения начального прогиба и скорости, которые могут быть разложены в ряды Фурье

$$f_1(x,y)=\sum_m\sum_n f_{1mn}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y,$$

$$f_2(x,y)=\sum_m\sum_n f_{2mn}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y, \qquad (3)$$

где $\lambda_m=\dfrac{m\pi}{a}$, $\mu_n=\dfrac{n\pi}{b}$,

$$f_{imn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f_i(x,y)\sin\lambda_m x\sin\mu_n y\,dx\,dy$$

Предполагается, что функции распределения $f_i(x,y)$ таковы, что начальный прогиб и скорость направлены обратно оси Oz, чтобы исключить потерю устойчивости оболочки.

Функции прогибов и усилий, удовлетворяющие условиям шарнирного опирания краев оболочки, представляются в виде

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn}(t) \sin\lambda_m x \sin\mu_n y,$$

$$\Phi = \sum_m \sum_n \Phi_{mn}(t) \sin\lambda_m x \sin\mu_n y. \tag{4}$$

Подстановкой (4) в уравнение (1) и условия (2), получается выражение для определения функции $\Phi_{mn}(t)$

$$\Phi_{mn}(t) = \frac{1}{R} \cdot \frac{\lambda_m^2 w_{mn}(t)}{a_{11}\lambda_m^4 + (a_{66} - 2a_{12})\lambda_m^2\mu_n^2 + a_{22}\mu_n^4} \tag{5}$$

и уравнение относительно функции $w_{mn}(t)$

$$w_{mn}^{..}(t)\omega_{mn}^2 + w_{mn}(t) = 0 \tag{6}$$

с соответствующими начальными условиями

$$w_{mn}(t)\big|_{t=0} = Cf_{1mn}, \quad w_{mn}^{.}(t)\big|_{t=0} = \xi C f_{2mn}, \tag{7}$$

где

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho h}\left(D_{11}\lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda_m^2\mu_n^2 + D_{22}\mu_n^4\right) +$$
$$+ \frac{\lambda_m^4}{R^2\left(a_{11}\lambda_m^4 + (a_{66} - 2a_{12})\lambda_m^2\mu_n^2 + a_{22}\mu_n^4\right)} \tag{8}$$

Решая уравнение (6), с удовлетворением условий (7), и подставляя полученное решение в (4), для функций прогибов и усилий получается

$$w = C\sum_m \sum_n \left(f_{1mn}\cos\omega_{mn}t + \xi\frac{f_{2mn}}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t \right)\sin\lambda_m x \sin\mu_n y,$$

$$\Phi = C\sum_m \sum_n \frac{\lambda_m^2}{R\left(a_{11}\lambda_m^4 + (a_{66} - 2a_{12})\lambda_m^2\mu_n^2 + a_{22}\mu_n^4\right)} \times \tag{9}$$
$$\times\left(f_{1mn}\cos\omega_{mn}t + \xi\frac{f_{2mn}}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t \right)\sin\lambda_m x \sin\mu_n y.$$

Деформации в главных геометрических направлениях оболочки определяются по формулам

$$e_{xx} = a_{22}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - a_{12}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$e_{yy} = -a_{12}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + a_{11}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$e_{xy} = -a_{66}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.$$

Деформации e_{11}, e_{22}, e_{12} оболочки по направлениям укладки монослоев КМ определяются по известным формулам поворота [2], а напряжения в тех же направлениях определяются по формулам обобщенного закона Гука

$$\sigma_{11} = B_{11}^0 e_{11} + B_{12}^0 e_{12},$$

$$\sigma_{22} = B_{12}^0 e_{11} + B_{22}^0 e_{22},$$

$$\sigma_{12} = B_{66}^0 e_{12}.$$

Условие прочности в наиболее опасных точках оболочки принимаются в виде [3]

$$\Pi(\sigma_{ij}) = \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{B1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{B2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\tau_{B0}}\right)^2 - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{B1}^2} \le 1, \qquad (10)$$

где σ_{B1}, σ_{B2}, σ_{B0} -прочностные характеристики монослоя КМ

Ставится задача определения оптимального значения угла укладки φ, обеспечивающего наибольшее значение начального максимального прогиба C (или начальной скорости ξC) при заданном значении ξ, неизменном весе оболочки и удовлетворении условия прочности (10)

Учитывая линейную зависимость напряжений от максимального начального возбуждения C, условие (10) можно представить в виде

$$\Pi(\sigma_{ij}) = C^2\bar{\Pi}(\sigma_{ij}) \le 1. \qquad (11)$$

При заданном значении ξ из условия прочности (10) в наиболее опасной точке оболочки в зависимости от параметра управления φ, определяются значения

$$C(\varphi) = \left[\max_{x,y,z,t}\bar{\Pi}(\sigma_{ij})\right]^{-1/2} \qquad (12)$$

Варьированием значением угла φ определяется оптимальный проект оболочки, при котором начальное возмущение $C(\varphi)$ достигает наибольшего значения.

Таким образом, поставленная задача оптимизации сводится к нахождению

$$C = \max_{\varphi}\left[\max_{x,y,z,t}\bar{\Pi}(\sigma_{ij})\right]^{-1/2} \qquad (13)$$

при ограничении $0 \le \varphi \le 90^0$

2.Численная реализация задачи произведена для случая, когда функции $f_i(x,y)$ заданы в виде

$$f_1(x,y) = f_2(x,y) = -\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y.$$

В качестве КМ приняты однонаправленный угленластик и стеклопластик СВАМ 5:1 соответственно со следующими характеристиками

$B_{22}^0 = 0{,}33B_{11}^0$, $B_{12}^0 = 0{,}0082B_{11}^0$, $B_{66}^0 = 0{,}16B_{11}^0$,

$\sigma_{B1} = 1{,}9\cdot10^{-2}B_{11}^0$, $\sigma_{B2} = 0{,}25\cdot10^{-2}B_{11}^0$, $\tau_{B0}^0 = 0{,}075\cdot10^{-2}B_{11}^0$.

и

$B_{22}^0 = 0{,}62B_{11}^0$, $B_{12}^0 = 0{,}12B_{11}^0$,

$B_{66}^0 = 0{,}16B_{11}^0$,

$\sigma_{B1} = 1{,}89\cdot10^{-2}B_{11}^0$, $\sigma_{B2} = 0{,}77\cdot10^{-2}B_{11}^0$, $\tau_{B0} = 0{,}5\cdot10^{-2}B_{11}^0$.

Определены оптимальный угол φ и соответствующее значение приведенного начального прогиба $\overline{C} = C/h$ или скорости $\bar{\xi}\overline{C}\left(\bar{\xi} = \xi\left(12\rho a^4/\pi^4B_{11}{}^0h^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ при $\bar{\xi} = 0{,}1,\infty$, для различных значении приведенной толщины оболочки $\bar{h} = h/b$ и отношений сторон a/b. Здесь $\bar{\xi} = 0$ соответствует отсутствию начальной скорости $(\xi C = 0)$, а $\bar{\xi} = \infty$ отсутствию начального прогиба $(C = 0)$

В таблице 1 приведены оптимальные значения угла φ и соответствующие значения $\overline{C}_{max}$ и $\bar{\xi}\overline{C}_{max}$ для рассмотренных материалов соответственно при $\bar{h} = 0{,}05$, $b^2/Rh = 20$ и $\bar{h} = 0{,}1$, $b^2/Rh = 10$ и различных значений a/b. Там же для сравнения приведены значения $\overline{C}_{max}$ и $\bar{\xi}\overline{C}_{max}$ соответствующие значения угла φ

Из таблицы следует, что в случае однонаправленного угленластика при всех значениях $\bar{\xi}$ оптимальные углы φ получаются одинаковыми при заданном значении a/b, причем при увеличении a/b этот угол уменьшается, стремясь к $\varphi = 0^0$ для длинной оболочки.

Для случая материала СВАМ 5:1 оптимальные углы получаются одинаковыми при $\bar{\xi} = 0$ и $\bar{\xi} = 1$. Причем здесь происходит переход от $\varphi = 0^0$ к $\varphi = 90^0$ в зависимости от изменения отношения сторон оболочки, а при $a/b = 1$ оптимум достигается при $\varphi = 0^0$ и $\varphi = 90^0$

Сравнение оптимального проекта $\left(\overline{C}_{max}, \ \overline{\xi}\overline{C}_{max}\right)$ с невыгодным проектом $\left(\overline{C}_{min}, \ \overline{\xi}\overline{C}_{min}\right)$ согласно таблице 1, показывает на возможность существенного увеличения допустимых параметров начального возбуждения путем оптимального выбора углов укладки монослоев КМ.

Таблица 1

	$\overline{h} = 0{,}05, \quad b^2 / Rh = 20$					
	Однонаправленный углепластик					
a / b	$\overline{\xi} = 0$		$\overline{\xi} = 1$		$\overline{\xi} = \infty$	
	$\overline{C}_{max}$	φ^0	$\overline{C}_{max}$	φ^0	$\overline{\xi}\overline{C}_{max}$	φ^0
0,5	0,081	60	0,0667	60	0,118	60
1	0,282	45	0,269	45	0,928	45
1,5	0,318	35	0,311	35	1,489	35
2	0,324	30	0,319	30	1,882	30
	$\overline{C}_{min}$		$\overline{C}_{min}$		$\overline{\xi}\ \overline{C}_{min}$	
0,5	0,044	90	0,0349	90	0,0571	90
1	0,0849	0,90	0,0793	0,90	0,221	0,90
1,5	0,124	0	0,12	0	0,489	0
2	0,176	0	0,173	0	0,914	0
	$\overline{h} = 0{,}1, \quad b^2 / Rh = 10$					
	СВАМ 5:1					
a / b	$\overline{\xi} = 0$		$\overline{\xi} = 1$		$\overline{\xi} = \infty$	
	$\overline{C}_{max}$	φ^0	$\overline{C}_{max}$	φ^0	$\overline{\xi}\overline{C}_{max}$	φ^0
0,5	0,0713	0	0,0552	0	0,0872	0
1	0,154	0,90	0,137	0,90	0,332	45
1,5	0,231	90	0,221	90	0,745	90
2	0,285	90	0,279	90	1,395	90
	$\overline{C}_{min}$		$\overline{C}_{min}$		$\overline{\xi}\ \overline{C}_{min}$	
0,5	0,057	90	0,042	90	0,0622	90
1	0,139	45	0,128	40,50	0,305	0,90
1,5	0,201	15	0,192	10	0,613	0
2	2,228	0	0,222	0	0,995	0

Следует отметить, что если в рассматриваемой задаче оптимизации ввести также ограничение на максимальный прогиб, то это может привести к изменению оптимального проекта оболочки.

Так например, для материала СВАМ 5:1 при $\bar{\xi} = 1$, $\bar{h} = 0,1$, $a / b = 0,5$ оптимальный проект получается, при $\varphi = 0^0$, при котором $\overline{C} = 0,0552$a, $\bar{w}_{max} = w_{max} / h = 0.0713$. При ограничении $|\bar{w}| \le 0,07$ получается $\varphi = 10^0$, $\overline{C} = 0,0544$, $\bar{w}_{max} = 0,0701$, а при ограничении $|\bar{w}| \le 0,06$ получается $\varphi = 65^0$, $\overline{C} = 0,0458$, $\bar{w}_{max} = 0,0601$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М. Наука 1974. 448с.
2. Timoshenko S.P. and Goodier J.N. Theory of elasticity. ed., mc Craw-Hill, New York, 1951.
3. Бажанов В.Л., Гольденблат И.И. и др. Сопротивление стеклопластиков, М.: Машина, 1968.

Институт механики НАН РА

Ереванский Государственный Университет

Поступила в редакцию 28.07.1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ОСОБЕННОСТИ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ, УСИЛЕННЫМИ КУСОЧНО ОДНОРОДНЫМИ НАКЛАДКАМИ

Григорян Э. Х.

Է. Խ. Գրիգորյան

Կոնտակտային լարումների եզակիության գործակիցների մասին, կտոր-առ-կտոր համասեռ վերադիրներով ուժեղացված առաձգական մարմինների վերաբերյալ խնդիրներում

Աշխատանքում դիտարկվում է հակահարթ խնդիր առաձգական կիսատարածության վերաբերյալ, որի եզրային մակերևույթի վրա գտնվում է նրա հետ ամրակցված կտոր-առ-կտոր համասեռ անվերջ շերտ: Շերտը կազմված է երկու տարբեր հատկություններով օժտված կիսաանվերջ շերտերից: Որոշվում են բարակապատ շերտի և կիսատարածության կոնտակտի տեղամասում գործող կոնտակտային լարումների եզակիության գործակիցները, ինչպես նաև երկու կիսաանվերջ շերտերի միացման տեղամասի կոնտակտային լարումների եզակիության գործակիցը:

E. K.Grigorian

About Coefficients of Singularity of Contact Stresses in Problems for Elastic Bodyes Reinforced with Partly-homogeneous Stiffeners

В работе рассматривается антиплоская задача для упругого полупространства, на граничной поверхности которого находится сцепленный с ним кусочно-однородный бесконечный слой. Слой состоит из двух полубесконечных слоев с различными упругими свойствами. Полупространство и слой деформируются под действием сил, приложенных на граничной поверхности слоя. Определяются коэффициенты особенности контактных напряжений, действующих на участке контакта тонкостенного слоя с полупространством, а также коэффициент особенности контактных напряжений, действующих на участке контакта между полубесконечными слоями.

В работе рассматривается антиплоская задача для упругого полупространства, на граничной поверхности которого находится сцепленный с ним кусочно-однородный бесконечный слой. Слой состоит из двух полубесконечных слоев с различными упругими свойствами. Полупространство и слой деформируются под действием сил, приложенных на граничной поверхности слоя. Предлагается метод решения поставленной задачи, который допускает получить решение задачи для тонкостенного слоя. Кроме того, определяются коэффициенты особенности контактных напряжений, действующих на участк контакта слоя с полупространством, а также коэффициент особенност контактных напряжений, действующих на участке контакта межд полубесконечными слоями.

Решены многие задачи теории упругости для массивных тел в вид упругих полуплоскостей, полосы, клина, полупространства с тонким покрытиями или, как принято говорить, накладками. Во всех эти задачах относительно накладки принимается гипотеза об одномерно континууме, заключающаяся в том, что при деформации толщин накладки считается неизменяемой, а напряженное состояние одноосны После принятой гипотезы задачи значительно упрощаются и поддаютс эффективному решению, а результаты считаются достаточно достоверными. Но когда накладка имеет края, несмотря на вышесказанное, возникают некоторые вопросы, требующие объяснени. Например, рассмотрим задачу для упругой полуплоскости, усилен полубесконечной накладкой [1,2]. Здесь после принятой гипотезы об одномерном континууме, контактные напряжения в концевой точк накладки имеют корневую особенность, а в точной постановке показате особенности должен зависеть от упругих констант материалов накладки и полуплоскости. Это говорит о том, что после принятия гипотез решение задачи в некоторой окрестности концевой точки накладки не соответствует истине. Поэтому нет смысла, после принятия гипотез говорить о коэффициенте особенности контактных напряжений. Поэтому возникает вопрос определения контактных напряжений в окрестност концевой точки, при этом используя решение полученного посл принятия гипотезы. Этому вопросу посвящена работа [3], где на пример антиплоской задачи для полупространства с полубесконечным слоем дается ответ поднятых выше вопросов.

Аналогичный вопрос возникает и в том случае, когда наклад кусочно однородна. Здесь в точной постановке в точке соединени накладок контактные напряжения имеют особенность, показате которой зависит от упругих констант материалов накладки и упруго полуплоскости, а в случае гипотезы - логарифмическую особенность [4]. Здесь опять возникает вопрос определения контактных напряжени в окрестности точки соединения накладок, при этом используя полученно решение после принятия гипотезы об одномерном континууме. Ответы н обсуждаемые вопросы будут даны ниже, на примере антиплоской задач для упругого полупространства, граничная поверхность которого усилен бесконечным кусочно-однородным слоем.

Рассмотрим антиплоскую задачу для упругого полупространства, на граничной поверхности которого находится сцепленный с ним бесконечный слой. Слой состоит из двух полубесконечных слоев с различными упругими свойствами. Полупространство и слой деформируются под действием сил, приложенных на граничной поверхности слоя. Поставленная задача формулируется в виде следующих граничных задач для кусочно-однородного слоя и полупространства :

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2}=0,\quad -h<y<0,\quad -\infty<x<\infty, \qquad (1)$$

$$\mu^-\left.\frac{\partial W_1}{\partial y}\right|_{y=-0}=-\tau(x),\quad \mu^-\left.\frac{\partial W_1}{\partial y}\right|_{y=-h}=-f(x),\quad -\infty<x<0, \qquad (2)$$

$$\mu^+\left.\frac{\partial W_1}{\partial y}\right|_{y=-0}=-\tau(x),\quad \mu^+\left.\frac{\partial W_1}{\partial y}\right|_{y=-h}=-f(x),\quad 0<x<\infty, \qquad (3)$$

$$\mu^-\left.\frac{\partial W_1}{\partial x}\right|_{x=-0}=\mu^+\left.\frac{\partial W_1}{\partial x}\right|_{x=+0}\qquad W_1(-0,y)=W_1(+0,y) \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0,\quad 0<y<\infty,\quad -\infty<x<\infty, \qquad (5)$$

$$\mu\left.\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{y=0}=-\tau(x),\quad -\infty<x<\infty \qquad (6)$$

$$W(x,+0)=W_1(x,-0),\quad -\infty<x<\infty \qquad (7)$$

Здесь $W_1(x,y)$ – перемещения точек кусочно-однородного бесконечного слоя по направлению оси z, $\tau(x)$ – контактные напряжения, $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ – интенсивность сил, действующих на слое, μ^-,μ^+ – модули сдвига слоя соответственно при $x<0$ и $x>0$, $W(x,y)$ – перемещения точек полупространства по направлению z, μ – модуль сдвига упругого полупространства, h – толщина слоя.

Для решения граничной задачи (1), (2), (3) введем функции

$W_1(x,y)=W_1^+(x,y)+W_1^-(x,y),\quad W_1^\pm(x,y)=\Theta(\pm x)W_1(x,y),$

$\tau(x)=\tau^+(x)+\tau^-(x),\quad \tau^\pm(x)=\Theta(\pm x)\tau(x),$

$f(x)=f^+(x)+f^-(x),\quad f^\pm(x)=\Theta(\pm x)f(x),$

где $\Theta(x)$ – функция Хевисайда.

Очевидно, что $W_1^{\pm}(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) при $x>0$ и $x<0$ соответственно. Теперь, применяя к (1) действительное преобразование Фурье, для $\overline{W}_1^{\pm}(\sigma,y)$ получим

$$\frac{d^2\overline{W}_1^{\pm}(\sigma,y)}{dy^2}-\sigma^2\overline{W}_1^{\pm}(\sigma,y)=\pm\frac{\partial W_1}{\partial x}\Big|_{x=\pm 0}\mp i\sigma W_1(\pm 0,y) \qquad (8)$$

где

$$\overline{W}_1^{+}(\sigma,y)=\int_0^{\infty}W_1(x,y)e^{i\sigma x}dx,\quad \overline{W}_1^{-}(\sigma,y)=\int_{-\infty}^{0}W_1(x,y)e^{i\sigma x}dx,$$

$(-\infty<\sigma<\infty)$

Далее введем функции [5]

$$\overline{\Phi}(\sigma,y)=\overline{W}_1^{+}(\sigma,y)+\overline{W}_1^{+}(-\sigma,y),$$

$$\overline{\Psi}(\sigma,y)=\overline{W}_1^{-}(\sigma,y)+\overline{W}_1^{-}(-\sigma,y)$$

Сначала рассмотрим функцию $\overline{\Phi}(\sigma,y)$. Согласно (3) и (8) для $\overline{\Phi}(\sigma,y)$ будем иметь

$$\frac{d^2\overline{\Phi}(\sigma,y)}{dy^2}-\sigma^2\overline{\Phi}(\sigma,y)=2\frac{\partial W_1(x,y)}{\partial x}\Big|_{x=+0} \qquad (9)$$

при граничных условиях

$$\frac{d\overline{\Phi}(\sigma,y)}{dy}\Big|_{y=0}=-\frac{1}{\mu^{*}}\left(\overline{\tau}^{+}(\sigma)+\overline{\tau}^{+}(-\sigma)\right),$$

$$\frac{d\overline{\Phi}(\sigma,y)}{dy}\Big|_{y=-h}=\frac{1}{\mu^{*}}\left(\overline{f}^{+}(\sigma)+\overline{f}^{+}(-\sigma)\right) \qquad (10)$$

Решение граничной задачи (9), (10) при y = 0 имеет вид

$$\overline{\Phi}(\sigma,0)=-\frac{\mathrm{cth}(\sigma h)}{\mu^{*}\sigma}\overline{\tau}^{+}(\sigma)-\frac{\mathrm{cth}(\sigma h)}{\mu^{*}\sigma}\overline{\tau}^{+}(-\sigma)-$$

$$-\frac{1}{\sigma\mathrm{sh}(\sigma h)}\int_{-h}^{0}\mathrm{ch}\left[|\sigma|(h+\eta)\right]g_1(\eta)d\eta+\overline{f}_1(\sigma),$$

где

$$\overline{f}_1(\sigma)=\frac{1}{\mu^{*}}\frac{\overline{f}^{+}(\sigma)+\overline{f}^{+}(-\sigma)}{\sigma\mathrm{sh}(\sigma h)},\quad g_1(y)=2\frac{\partial W_1}{\partial x}\Big|_{x=+0}$$

Далее, разрешив граничную задачу (5), (6) для трансформанты Фурье функции $W(x,0)$, получим

$$\overline{W}(\sigma,0)=\overline{W}^{+}(\sigma,0)+\overline{W}^{-}(\sigma,0)=\frac{1}{\mu|\sigma|}\left(\overline{\tau}^{+}(\sigma)+\overline{\tau}^{-}(\sigma)\right) \qquad (11)$$

Тогда, учитывая условие контакта (7), получим

$$\overline{W}^{+}(-\sigma,0)-\overline{W}^{-}(\sigma,0)=-\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^{+}}\operatorname{cth}(|\sigma|h)\right)\frac{\overline{\tau}^{+}(\sigma)}{|\sigma|}-$$

$$-\frac{1}{\mu|\sigma|}\overline{\tau}^{-}(\sigma)-\frac{\operatorname{cth}(\sigma h)}{\mu^{+}\sigma}\overline{\tau}^{+}(-\sigma)+\bar{f}_1(\sigma)- \tag{12}$$

$$-\frac{1}{\sigma\operatorname{sh}(\sigma h)}\int_{-h}^{0}\operatorname{ch}\left[|\sigma|(h+\eta)\right]g_1(\eta)d\eta$$

Далее из (8) и граничных (4), при учете (7), будем иметь

$$-\frac{1}{\sigma\operatorname{sh}(\sigma h)}\int_{-h}^{0}\operatorname{ch}\left[|\sigma|(h+\eta)\right]g(\eta)d\eta=\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^{-}}\operatorname{cth}(|\sigma|h)\right)\frac{\overline{\tau}(\sigma)}{|\sigma|}+$$

$$+\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^{+}}\operatorname{cth}(|\sigma|h)\right)\frac{\overline{\tau}^{+}(\sigma)}{|\sigma|}-\left(\frac{\bar{f}^{+}(\sigma)}{\mu^{+}}+\frac{\bar{f}^{-}(\sigma)}{\mu^{-}}\right)\frac{1}{\sigma\operatorname{sh}(\sigma h)}, \tag{13}$$

где

$$g(y)=\left.\frac{\partial W_1}{\partial x}\right|_{x=0}-\left.\frac{\partial W_1}{\partial x}\right|_{x=-0}$$

Теперь, имея в виду (13) и что (4)

$$g(y)=\frac{\mu^{-}-\mu^{+}}{2\mu^{-}}g_1(y)$$

окончательно из (12) получим искомое функциональное уравнение

$$\left[\overline{W}^{-}(\sigma,0)-\overline{W}^{+}(-\sigma,0)\right]\left(\frac{\mu^{+}-\mu^{-}}{\mu^{+}+\mu^{-}}\right)=\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^{+}}\operatorname{cth}(|\sigma|h)\right)\frac{\overline{\tau}^{+}(\sigma)}{|\sigma|}+$$

$$+\left(\frac{1}{\mu}+\frac{2}{\mu^{-}+\mu^{+}}\operatorname{cth}(|\sigma|h)\right)\frac{\overline{\tau}^{-}(\sigma)}{|\sigma|}+ \tag{14}$$

$$+\frac{\mu^{+}-\mu^{-}}{\mu^{-}(\mu^{+}+\mu^{-})}\operatorname{cth}(\sigma h)\frac{\overline{\tau}^{+}(-\sigma)}{\sigma}-\overline{F}_1(\sigma)$$

где

$$\overline{F}_1(\sigma)=\left(\frac{1}{\mu^{+}}\bar{f}^{+}(\sigma)+\frac{2}{\mu^{+}+\mu^{-}}\bar{f}^{-}(\sigma)+\frac{\mu^{+}-\mu^{-}}{\mu^{+}(\mu^{+}+\mu^{-})}\bar{f}^{+}(-\sigma)\right)\frac{1}{\sigma\operatorname{sh}(\sigma h)}$$

Использовав функцию $\overline{\Psi}(\sigma,0)$, можно аналогичным образом получить функциональное уравнение следующего вида

$$\left[\overline{W}^{+}(\sigma,0)-\overline{W}^{-}(-\sigma,0)\right]\left(\frac{\mu^{-}-\mu^{+}}{\mu^{+}+\mu^{-}}\right)=\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^{-}}\operatorname{cth}|\sigma|h\right)\frac{\overline{\tau}^{-}(\sigma)}{|\sigma|}+$$

$$+\left(\frac{1}{\mu^{-}}+\frac{2}{\mu^{-}+\mu^{+}}\operatorname{cth}(|\sigma|h)\right)\frac{\bar{\tau}^{+}(\sigma)}{|\sigma|}+ \tag{15}$$

$$+\frac{\mu^{-}-\mu^{+}}{\mu^{-}\left(\mu^{+}+\mu^{-}\right)}\operatorname{cth}(\sigma h)\frac{\bar{\tau}^{-}(-\sigma)}{\sigma}-\bar{F}_{1}(\sigma),$$

где

$$\bar{F}_{1}(\sigma)=\left(\frac{1}{\mu^{-}}\bar{f}^{-}(\sigma)+\frac{2}{\mu^{+}+\mu^{-}}\bar{f}^{+}(\sigma)+\frac{\mu^{-}-\mu^{+}}{\mu^{-}\left(\mu^{-}+\mu^{+}\right)}\bar{f}^{-}(-\sigma)\right)\frac{1}{\sigma\operatorname{sh}(\sigma h)}$$

Далее продолжим следующим образом. Применив к (14), (15) обратное преобразование Фурье, после чего продифференцировав по x и в итоге получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\mu^{-}}+\frac{1}{\mu^{+}}\right)\frac{1}{s-x}+\frac{\mu^{-}-\mu^{+}}{\mu^{+}\left(\mu^{+}+\mu^{-}\right)}\frac{1}{s+x}\right]\tau(s)ds-$$

$$-\left(\frac{1}{\mu^{-}}+\frac{2}{\mu^{+}+\mu^{-}}\right)\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\tau(-s)}{s+x}ds+\frac{1}{\mu^{-}}\int_{0}^{\infty}r_{1}\left(x,s\right)\tau(s)ds- \tag{16}$$

$$-\frac{2}{\mu^{+}+\mu^{-}}\int_{0}^{\infty}K_{1}(x+s)\tau(-s)ds=\varphi(x),$$

$$\left(\frac{1}{\mu^{-}}+\frac{2}{\mu^{+}+\mu^{-}}\right)\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\tau(s)}{s+x}ds+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\frac{\mu^{-}-\mu^{+}}{\mu^{-}\left(\mu^{+}+\mu^{-}\right)}\frac{1}{s+x}-\left(\frac{1}{\mu^{-}}+\frac{1}{\mu^{-}}\right)\frac{1}{s-x}\right]\times$$

$$\times\tau(-s)ds-\frac{1}{\mu^{-}}\int_{0}^{\infty}r_{2}\left(x,s\right)\tau(-s)ds+\frac{2}{\mu^{+}+\mu^{-}}\int_{0}^{\infty}K_{1}(x+s)\tau(s)ds=\varphi(-x),$$

$(0<x<\infty)$

где

$$r_{1}(x,s)=K(s-x)+\frac{\mu^{-}-\mu^{+}}{\mu^{-}+\mu^{-}}K(s+x)+\frac{\mu^{+}}{h\left(\mu^{+}+\mu^{-}\right)},$$

$$r_{2}(x,s)=K(s-x)+\frac{\mu^{+}-\mu^{-}}{\mu^{+}+\mu^{-}}K(s+x)+\frac{\mu^{-}}{h\left(\mu^{+}+\mu^{-}\right)},$$

$$K_{1}(x+s)=K(x+s)-\frac{1}{2h},\quad K(x)=\frac{1}{2h}\operatorname{cth}\left(\frac{\pi x}{2h}\right)-\frac{1}{\pi x},$$

$$\varphi(x)=F_{1}(x)+\frac{1}{h\left(\mu^{+}+\mu^{-}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)ds$$

$$\varphi(-x) = F_2'(-x) + \frac{1}{\pi(\mu^+ + \mu^-)} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds$$

$$F_j'(x) = \frac{dF_j(x)}{dx}, \quad j = 1,2$$

Отметим, что выше использовалось условие равновесия слоя, которое записывается в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds \qquad (17)$$

Таким образом, задача свелась к решению сингулярных интегральных уравнений (16).

Для решения (16) произведем замену переменных $u = \ln s$, $v = \ln x$ в (16). После этого, применив к полученной системе уравнений комплексное преобразование Фурье, получим

$$\left[\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^+}\right)\text{ch}\pi\alpha + \frac{\mu^- - \mu^+}{\mu^-(\mu^- + \mu^+)}\right]\overline{\tau}_1(\alpha) - \left(\frac{1}{\mu} + \frac{2}{\mu^+ + \mu^-}\right)\overline{\tau}_2(\alpha) =$$

$$= i\text{sh}\pi\alpha \cdot \overline{A}(\alpha)$$

$$\left(\frac{1}{\mu} + \frac{2}{\mu^+ + \mu^-}\right)\overline{\tau}_1(\alpha) - \left[\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^-}\right)\text{ch}\pi\alpha + \frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^-(\mu^- + \mu^+)}\right]\overline{\tau}_2(\alpha) = \qquad (18)$$

$$= i\text{sh}\pi\alpha \cdot \overline{B}(\alpha)(-1 < \text{Im}\,\alpha < -\omega)$$

где

$$\overline{A}(\alpha) = \overline{K}_2(\alpha) + \overline{R}_1(\alpha) + \overline{\varphi}_1(\alpha), \quad \overline{B}(\alpha) = \overline{K}_1(\alpha) + \overline{R}_2(\alpha) + \overline{\varphi}_2(\alpha),$$

$$R_1(v) = -\frac{1}{\mu^+} \int_{-\infty}^{\infty} r_1(e^v, e^u) e^u \tau_1(u)du, \quad \tau_1(u) = \tau(e^u),$$

$$R_2(v) = \frac{1}{\mu^-} \int_{-\infty}^{\infty} r_2(e^u, e^v) e^u \tau_2(u)du, \quad \tau_2(u) = \tau(-e^u)$$

$$K_1(v) = -\frac{2}{\mu^- + \mu^+} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(e^u + e^v) e^u \tau_1(u)du$$

$$K_2(v) = \frac{2}{\mu^- + \mu^+} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(e^u + e^v) e^u \tau_2(u)du,$$

$$\varphi_1(u) = \varphi(e^u), \quad \varphi_2(u) = \varphi(-e^u).$$

$\alpha_1 = -i\omega$ является нулем определителя системы (18), находящейся в полосе $-1 < \text{Im}\,\alpha < 0$, а под $\overline{f}(\alpha)$ понимается преобразование Фурье функции $t(u)$.

Причем

$$0 < \omega = \frac{1}{\pi}\arccos\left(1 - \frac{\mu(\mu^{+} - \mu^{-})^{2}}{(\mu + \mu^{+})(\mu + \mu^{-})(\mu^{+} + \mu^{-})}\right) < \frac{1}{2}$$

Далее, определив из (18) $\bar{\tau}_1(\alpha)$, $\bar{\tau}_2(\alpha)$, после чего применив к ним обратное преобразование Фурье, при этом имея в виду теорему Коши о вычетах, и переходя к переменным x, s, будем иметь

$$\tau(x) = \int_0^{\infty} R_{11}(x,s)\tau(s)ds + \int_0^{\infty} R_{12}(x,s)\tau(-s)ds + K^{+}x^{-\omega} + \Psi_1(x),$$

$$\tau(x) = \int_0^{\infty} R_{21}(x,s)\tau(s)ds + \int_0^{\infty} R_{22}(x,s)\tau(-s)ds + K^{-}x^{-\omega} + \Psi_2(x), \qquad (19)$$

$(0 < x < \infty)$

где

$$K^{+} = \frac{1}{\pi}\frac{\mu\mu^{+}\mu^{-}}{\mu(\mu^{+} + \mu^{-}) + 2\mu^{+}\mu^{-}}\left[\frac{\mu^{-}(\mu + \mu^{-})}{\mu^{-}(\mu + \mu^{+})}A(-i\omega) - B(-i\omega)\right], \qquad (20)$$

$$K^{-} = \frac{1}{\pi}\frac{\mu\mu^{+}\mu^{-}}{\mu(\mu^{+} + \mu^{-}) + 2\mu^{+}\mu^{-}}\left[A(-i\omega) - \frac{\mu^{-}(\mu + \mu^{+})}{\mu^{+}(\mu + \mu^{-})}B(-i\omega)\right], \qquad (21)$$

$$A(-i\omega) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\frac{2}{\mu^{-} + \mu^{+}}K_1(x+s)\tau(-s) - \frac{1}{\mu^{+}}r_1(x,s)\tau(s)\right)dsx^{\omega-1}dx + \bar{\varphi}_1(-i\omega),$$

$$B(-i\omega) = -\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\frac{2}{\mu^{-} + \mu^{+}}K_1(x+s)\tau(s) - \frac{1}{\mu^{-}}r_2(x,s)\tau(-s)\right)dsx^{\omega-1}dx + \bar{\varphi}_2(-i\omega),$$

$$R_{11}(x,s) = -\frac{1}{\pi}\frac{\mu(\mu + \mu^{-})(\mu^{+} + \mu^{-})}{(\mu^{+} + \mu^{-} + 2\mu)(2\mu^{+}\mu^{-} + \mu(\mu^{+} + \mu^{-}))}\int_0^{\infty} T_1(x,t)r_1(s,t)dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\frac{\mu}{\mu^{+} + \mu^{-} + 2\mu}\int_0^{\infty} T_2(x,t)q_1(s,t)dt,$$

$$R_{12}(x,s) = \frac{1}{\pi}\frac{\mu\mu^{-}}{(\mu^{+} + \mu^{-})\mu + 2\mu^{+}\mu^{-}}\int_0^{\infty} T_2(x,t)q_2(s,t)dt +$$

$$+\frac{2}{\pi}\frac{\mu\mu^{+}(\mu + \mu^{-})}{(\mu^{+} + \mu^{-} + 2\mu)(2\mu^{+}\mu^{-} + \mu(\mu^{+} + \mu^{-}))}\int_0^{\infty} T_1(x,t)K_1(s+t)dt.$$

$$R_{21}(x,s) = \frac{1}{\pi}\frac{\mu\mu^-}{(\mu^+ + \mu^-)\mu + 2\mu^+\mu^-}\int_0^{\infty} T_2(x,t)q_3(s,t)dt +$$

$$+\frac{2}{\pi}\frac{\mu\mu^-(\mu+\mu^+)}{(\mu^+ + \mu^- + 2\mu)(2\mu^+\mu^- + \mu(\mu^+ + \mu^-))}\int_0^{\infty} T_1(x,t)K_1(s+t)dt.$$

$$R_{22}(x,s) = -\frac{1}{\pi}\frac{\mu(\mu+\mu^+)(\mu^+ + \mu^-)}{(\mu^+ + \mu^- + 2\mu)(2\mu^+\mu^- + \mu(\mu^+ + \mu^-))}\int_0^{\infty} T_1(x,t)r_2(s,t)dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\frac{\mu}{\mu^+ + \mu^- + 2\mu}\int_0^{\infty} T_2(x,t)q_4(s,t)ds.$$

Интегралы, содержащие $T_1(x,t)$, понимаются в смысле главного значения по Коши

$$T_1(x,t) = \frac{\lambda(x^{2-\omega}t^{\omega} + x^{\omega}t^{2-\omega}) - 2xt}{(x^2 - t^2)t}$$

$$T_2(x,t) = \frac{x^{2-\omega}t^{\omega} + x^{\omega}t^{2-\omega} - 2xt}{(x^2 - t^2)t}$$

$$\lambda = \frac{\mu(\mu^+ - \mu^-)^2}{(\mu+\mu^+)(\mu+\mu^-)(\mu^+ + \mu^-)} - 1$$

$$q_1(s,t) = K(s+t) + \frac{\mu(\mu^- - \mu^+)}{\mu(\mu^+ + \mu^-) + 2\mu^+\mu^-}K(s-t) -$$

$$-\frac{\mu^+(\mu+\mu^-)}{h(2\mu^+\mu^- + \mu(\mu^+ + \mu^-))}$$

$$q_2(s,t) = K(s-t) + \frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^- + \mu^+ + 2\mu}K(s+t) + \frac{\mu+\mu^-}{h(\mu^- + \mu^+ + 2\mu)}$$

$$q_3(s,t) = K(s-t) + \frac{\mu^- - \mu^+}{\mu^- + \mu^+ + 2\mu}K(s+t) + \frac{\mu+\mu^+}{h(\mu^- + \mu^+ + 2\mu)}$$

$$q_4(s,t) = K(s+t) + \frac{\mu(\mu^+ - \mu^-)}{\mu(\mu^+ + \mu^-) + 2\mu^+\mu^-}K(s-t) -$$

$$-\frac{\mu^-(\mu+\mu^+)}{h(2\mu^+\mu^- + \mu(\mu^+ + \mu^-))}$$

$$\Psi_1(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\mu^- + \mu^+ + 2\mu}{\mu(\mu^+ + \mu^-)}\overline{\varphi}_2(\sigma) + \right.$$

$$\left.+\left(\frac{\mu^- - \mu^+}{\mu^-(\mu^- + \mu^+)} - \frac{(\mu+\mu^-)\operatorname{ch}\pi\sigma}{\mu\mu^-}\right)\overline{\varphi}_1(\sigma)\right]\frac{\operatorname{sh}\pi\sigma}{\Pi(\sigma)}x^{-i\sigma}d\sigma.$$

$$\Psi_2(x) = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\mu^- + \mu^+ + 2\mu}{\mu(\mu^+ + \mu^-)}\overline{\varphi}_1(\sigma) + \right.$$

$$\left.+\left(\frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^+(\mu^- + \mu^+)} - \frac{(\mu+\mu^-)\operatorname{ch}\pi\sigma}{\mu\mu^+}\right)\overline{\varphi}_2(\sigma)\right]\frac{\operatorname{sh}\pi\sigma}{\Pi(\sigma)}x^{-i\sigma}d\sigma.$$

$$\Pi(\sigma) = (\operatorname{ch}\pi\sigma + \lambda)(\operatorname{ch}\pi\sigma + 1)$$

Итак, поставленную задачу наконец свели к решению системы интегральных уравнений второго рода (19). Кроме того, определили вид коэффициентов особенности (20), (21).

Теперь обратимся к вопросу разрешимости уравнений (19). Так как $R_{mn}(x,s)$ $(m,n=1,2)$ имеют порядок $O(x^{-\infty})$ при $x\to\infty$ и фиксированном s, то отсюда следует, что система уравнений (19) не допускает решение с помощью метода последовательных приближений в $L_1(0,\infty)$. Но если известны значения $\tau(x)$ при $a<|x|<\infty$, где a некоторое конечное число, то (19) можно записать в виде

$$\tau(x) = \int_0^a R_{11}(x,s)\tau(s)ds + \int_0^a R_{12}(x,s)\tau(-s)ds +$$

$$+\int_a^\infty [R_{11}(x,s)\tau(s) + R_{12}(x,s)\tau(-s)]ds + K^+x^{-\infty} + \Psi_1(x).$$

$$\tau(-x) = \int_0^a R_{21}(x,s)\tau(s)ds + \int_0^a R_{22}(x,s)\tau(-s)ds +$$

$$+\int_a^\infty [R_{21}(x,s)\tau(s) + R_{22}(x,s)\tau(-s)]ds + K^-x^{-\infty} + \Psi_2(x) \qquad (22)$$

$(0<x<a)$

Тогда (22) можно решать с помощью метода последовательных приближений и тем самым определить $\tau(x)$ при $|x|<a$. Значит вопрос состоит в определении $\tau(x)$ при $|x|>a$.

Известен метод [5], который хорошо практикуется, дающий возможность определить приближенное значение $\tau(x)$, справедливое только при $a<|x|<\infty$. Прибегнув к этому методу, решение граничной задачи (1), (2), (3) ищем в виде

$$W_i^{(n)}(x,y)=\frac{1}{h}W_0(x,s)+\frac{2}{h}\sum_{k=1}^{n}W_k(x)\cos\lambda_k y,\quad \lambda_k=\frac{k\pi}{h} \tag{23}$$

где n любое конечное целое число.

Далее, подставляя $W_i^{(n)}(x,y)$ в (1) и удовлетворив граничным и контактным условиям, определим $W_k(x)$. После чего, применив к $W_i^{(n)}(x,0)$ преобразование Фурье, получим

$$(-\sigma^2)\overline{W}_i^{(n)}(\sigma,0)=\frac{\overline{\tau}_n^+(\sigma)}{h\mu^+}+\frac{\overline{\tau}_n^-(\sigma)}{h\mu^-}+\frac{2}{h}\sigma^2\left(\frac{1}{\mu^-}\overline{\tau}_n^-(\sigma)+\frac{1}{\mu^+}\overline{\tau}_n^+(\sigma)\right)\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k^2+\sigma^2}+\frac{2}{h}\frac{(\mu^--\mu^+)\sigma^2}{\mu^-+\mu^+}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\overline{\tau}_n^-(-i\lambda_k)}{\mu^-}-\frac{\overline{\tau}_n^+(i\lambda_k)}{\mu^+}\right)\frac{1}{\lambda_k^2+\sigma^2}+\overline{F}_n(\sigma),$$

где

$$\overline{F}_n(\sigma)=-\frac{2}{h}\sigma^2\left(\frac{\overline{f}^+(\sigma)}{\mu^+}+\frac{\overline{f}^-(\sigma)}{\mu^-}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\lambda_k^2+\sigma^2}+$$

$$+\frac{2}{h}\frac{(\mu^--\mu^+)\sigma^2}{\mu^-+\mu^+}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\overline{f}^+(i\lambda_k)}{\mu^+}-\frac{\overline{f}^-(-i\lambda_k)}{\mu^-}\right)\frac{(-1)^k}{\lambda_k^2+\sigma^2}-$$

$$-\frac{u_0}{h}-\frac{1}{\mu^-h}\overline{f}^-(\sigma)-\frac{1}{\mu^-h}\overline{f}^+(\sigma),$$

u_0 неизвестная постоянная, которая определяется из (17). Имея в виду (11) и условие контакта (7), после некоторых преобразований, для определения $\overline{\tau}^+(\sigma)$, $\overline{\tau}^-(\sigma)$ получим функциональные уравнения

$$\overline{K}_n(\sigma)\overline{\tau}_n^+(\sigma)+\overline{\tau}_n^-(\sigma)+\frac{2(\mu^+-\mu^-)}{\mu^++\mu^-}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{n}\frac{(\lambda^+\overline{\tau}_n^+(i\lambda_k)-\lambda^-\overline{\tau}_n^-(-i\lambda_k))\sigma^2}{(\lambda_k^2+\sigma^2)(\lambda^-+|\sigma|+\lambda^-b_n(\sigma))}+\frac{\mu\overline{F}_n(\sigma)}{\lambda^-+|\sigma|+\lambda^-b_n(\sigma)}=0 \tag{24}$$

где

$$K_n(\sigma)=\frac{\lambda^+ + |\sigma| + \lambda^+ b_n(\sigma)}{\lambda^- + |\sigma| + \lambda^- b_n(\sigma)},\quad \lambda^+ = \frac{\mu}{\mu^+ h},$$

$$\lambda^- = \frac{\mu}{\mu^- h},\quad b_n(\sigma)=2\sigma^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k^2+\sigma^2}$$

Решение уравнения (24) построим методом факторизации [4,6]. Для этого, поскольку $\overline{K}_n(\sigma)\to 1$ при $|\sigma|\to\infty$, $K_n(\sigma)$ можно представить в виде

$$\overline{K}_n(\sigma)=\frac{\overline{K}_n^+(\sigma)}{\overline{K}_n^-(\sigma)}. \tag{25}$$

где $K_n^+(x)=0$ при $x<0$, а $K_n^-(x)=0$ при $x>0$,

$$\overline{K}_n^\pm(\sigma)=\exp\left[\pm\overline{G}_n^\pm(\sigma)\right],\quad G_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\overline{K}_n(\sigma)\right)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

Разрешив (24), получим

$$\begin{gathered}\overline{K}_n^+(\sigma)\overline{\tau}_n^+(\sigma)+\frac{2(\mu^+-\mu^-)}{\mu^++\mu^-}\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda^+\tau_n^+(i\lambda_k)-\lambda^-\tau_n^-(-i\lambda_k)\right)\overline{\psi}_{kn}^+(\sigma)=\\=\overline{\Phi}_n^+(\sigma)\\ \overline{K}_n^-(\sigma)\overline{\tau}_n^-(\sigma)+\frac{2(\mu^+-\mu^-)}{\mu^++\mu^-}\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda^+\tau_n^+(i\lambda_k)-\lambda^-\tau_n^-(-i\lambda_k)\right)\overline{\psi}_{kn}^-(\sigma)=\\=\overline{\Phi}_n^-(\sigma)\end{gathered} \tag{26}$$

где

$$\overline{\Phi}_n(\sigma)=-\frac{\mu\overline{F}_n(\sigma)}{\lambda^-+|\sigma|+\lambda^-b_n(\sigma)},$$

$$\overline{\Phi}_n^\pm(\sigma)=2\sum_{k=1}^{n}\overline{\varphi}_{kn}^\pm(\sigma)-\frac{2(\mu^--\mu^+)}{\mu^++\mu^-}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\lambda^+\overline{f}^+(i\lambda_k)-\lambda^-\overline{f}^-(-i\lambda_k)\right)\times$$

$$\times\overline{\psi}_{kn}^\pm(\sigma)+\overline{\varphi}_{0n}^\pm(\sigma)+\mu\frac{u_0}{h}\overline{\psi}_{0n}^\pm(\sigma).$$

$$\overline{\psi}_{kn}(\sigma)=\frac{\sigma^2\overline{K}_n^-(\sigma)}{(\lambda_k^2+\sigma^2)(\lambda^-+|\sigma|+\lambda^-b_n(\sigma))}=\overline{\psi}_{kn}^+(\sigma)+\overline{\psi}_{kn}^-(\sigma).$$

$$\overline{\psi}_{kn}^+(\sigma)=\int_0^{\infty}\psi_{kn}(x)e^{i\sigma x}dx,\quad \overline{\psi}_{kn}^-(\sigma)=\int_{-\infty}^{0}\psi_{kn}(x)e^{i\sigma x}dx.$$

$$\frac{\sigma^2\left(\lambda^+\overline{f}^+(\sigma)+\lambda^-\overline{f}^-(\sigma)\right)}{(\lambda_k^2+\sigma^2)(\lambda^-+|\sigma|+\lambda^-b_n(\sigma))}=\overline{\varphi}_{kn}(\sigma)=\overline{\varphi}_{kn}^+(\sigma)+\overline{\varphi}_{kn}^-(\sigma).$$

$$\overline{\varphi}^+_{1n}(\sigma)=\int_0^\infty \varphi_{1n}(x)e^{i\sigma x}dx,\quad \overline{\varphi}^-_{1n}(\sigma)=\int_{-\infty}^0 \varphi_{1n}(x)e^{i\sigma x}dx$$

Как видно из (26), для определения $\overline{\tau}^+_n(\sigma)$, $\overline{\tau}^-_n(\sigma)$ достаточно иметь значения $\overline{\tau}^+_n(-i\lambda_k)$, $\overline{\tau}^-_n(-i\lambda_k)$. Для этого в первом уравнении (26) подставим $\sigma=i\lambda_m$, а во втором $\sigma=-i\lambda_m$. В итоге для определения $\overline{\tau}^+_n(i\lambda_k)$, $\overline{\tau}^-_n(-i\lambda_k)$ получим систему уравнений

$$\overline{K}^+_n(i\lambda_m)\overline{\tau}^+_n(i\lambda_m)+\frac{2(\mu^+-\mu^-)}{\mu^++\mu^-}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda^+\overline{\tau}^+_n(i\lambda_k)-\lambda^-\overline{\tau}^-_n(-i\lambda_k)\right)\overline{\varphi}^+_{1n}(i\lambda_k)=\overline{\Phi}^+_n(i\lambda_m)$$

$$\overline{K}^-_n(-i\lambda_m)\overline{\tau}^-_n(-i\lambda_m)+\frac{2(\mu^+-\mu^-)}{\mu^++\mu^-}\times \tag{2.7}$$

$$\times\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda^+\overline{\tau}^+_n(i\lambda_k)-\lambda^-\overline{\tau}^-_n(-i\lambda_k)\right)\overline{\varphi}^+_{1n}(-i\lambda_k)=\overline{\Phi}_n(-i\lambda_m)$$

$(m=1,2,\ldots,n;\quad n=0,1,2,\ldots)$

Как следует (27), $\overline{\tau}^\pm_n(\sigma)$ при $|\sigma|\to\infty$ имеют порядок $0\left(|\sigma|^{-1}\right)$, что говорит о том, что $\tau^\pm_n(x)$ при $|x|\to 0$ имеют логарифмическую особенность. Но мы выдели выше, что $\tau^\pm(x)\sim K^\pm|x|^{-\alpha}$ при $|x|\to 0$. Отсюда можно заключить, что $\tau_n(x)$ является приближенным значением $\tau(x)$ при $a_n<|x|<\infty$. Очевидно, что при увеличении n значения a_n будут уменьшаться и стремиться к нулю при $n\to\infty$. Значит, если заменим в (22) a на a_n, $\tau(x)$ на $\tau_n(x)$ $\left(a_n<x<\infty\right)$, мы определим $\tau(x)$ при $0<x<a_n$ и тем самым определим значения $\tau(x)$ при $0<x<\infty$, о чем говорилось выше. Далее, подставляя таким образом полученное решение в (20), (21), определим коэффициенты особенности K^+_n, K^-_n.

В частном случае, если взять нулевое приближение, т.е.

$$\overline{\tau}^+_0(\sigma)=\frac{\overline{\Phi}^+_0(\sigma)}{\overline{K}^+_0(\sigma)},\quad \overline{\tau}^-_0(\sigma)=\frac{\overline{\Phi}^-_0(\sigma)}{\overline{K}^-_0(\sigma)},$$

где

$$\overline{K}_0(\sigma)=\frac{\lambda^++|\sigma|}{\lambda^-+|\sigma|},\quad \overline{\Phi}^\pm_0(\sigma)=\overline{\varphi}^\pm_{00}(\sigma),$$

го нетрудно видеть, что оно будет соответствовать задаче для тонкостенного слоя, где принимается гипотеза о том, что перемещения по толщине не изменяются (23). Далее, определив из (22) значения $\tau_0(x)$ при $|x| < a_*$, определим, таким образом, $\tau_0(x)$ при $0 < x < \infty$, а тем самым и K_*^1.

После определения $\tau^+(x), \tau^-(x)$, представляет интерес определение напряжения в упругом кусочно однородном слое. Для этого следует определить $W_1(0, y)$ и контактные напряжения $P(y)$ $(-h < y < 0)$. Не останавливаясь на подробностях, приведем выражения $P(y)$ и $W_1(0, y)$. Они имеют вид

$$W_1(0, y) = -\frac{1}{\pi(\mu^+ + \mu^-)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{\tau}(\sigma)\mathrm{ch}[|\sigma|(y+h)] - \bar{f}(\sigma)\mathrm{ch}(|\sigma|y)}{\sigma\mathrm{sh}(\sigma h)}d\sigma,$$

$$P(y) = \frac{\mu^-}{\mu^+ + \mu}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\,\mathrm{sgn}\,\sigma\left(\bar{\tau}^+(\sigma)\mathrm{ch}(|\sigma|(y+h)) - \bar{f}^+(\sigma)\mathrm{ch}(|\sigma|y)\right)}{\mathrm{sh}(|\sigma|h)}d\sigma +$$

$$+\frac{\mu^+}{\mu^+ + \mu^-}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\,\mathrm{sgn}\,\sigma\left(\bar{\tau}^-(\sigma)\mathrm{ch}(|\sigma|(y+h)) - \bar{f}^-(\sigma)\mathrm{ch}(|\sigma|y)\right)}{\mathrm{sh}(|\sigma|h)}d\sigma$$

$(-h < y < 0)$

Далее ввиду того, что

$$\bar{\tau}^+(\sigma) \sim i\Gamma(1-\omega)e^{-i\omega\frac{\pi}{2}}K^+(\sigma + i0)^{\omega-1} \qquad \text{при } |\sigma| \to \infty$$

$$\bar{\tau}^-(\sigma) \sim -i\Gamma(1-\omega)e^{-i\omega\frac{\pi}{2}}K^-(\sigma - i0)^{\omega-1} \qquad \text{при } |\sigma| \to \infty$$

где

$(\sigma \pm i0)^{\omega-1} = \sigma_+^{\omega-1} - e^{2i\omega\pi}\sigma_-^{\omega-1}, \quad \sigma_+^{\omega-1} = \theta(\sigma)\sigma^{\omega-1},$

$\sigma_-^{\omega-1} = \theta(-\sigma)|\sigma|^{\omega-1}$

можно показать, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\,\mathrm{sgn}\,\sigma\bar{\tau}^+(\sigma)\mathrm{ch}(|\sigma|(y+h))}{\mathrm{sh}(|\sigma|h)}d\sigma \sim -\frac{K^+}{\sin\dfrac{\pi\omega}{2}}(-y)^{-\omega} \qquad \text{при } y \to 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\,\mathrm{sgn}\,\sigma\bar{\tau}^-(\sigma)\mathrm{ch}(|\sigma|(y+h))}{\mathrm{sh}(|\sigma|h)}d\sigma \sim \frac{K^-}{\sin\dfrac{\pi\omega}{2}}(-y)^{-\omega} \qquad \text{при } y \to 0$$

Тогда

$$P(y) \sim K_p(-y)^{-\omega} \qquad \text{при } y \to 0$$

где K_p выражается через K^+, K^- по формуле

$$K_p = \frac{\mu^+ K^- - \mu^- K^+}{\left(\mu^- + \mu^+\right)\sin\frac{\pi\omega}{2}}$$

Работа выполнена по заказу фирмы "Анушик".

ЛИТЕРАТУРА

1. Koiter W. T. On the duffusion of load form a stiffener into a sheet. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1955, vol. 8, N 2, p. 165-178.
2. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М: Машиностроение, 1980. 416 с.
3. Григорян Э. Х. О коэффициентах интенсивности контактных напряжений в задачах для упругих тел с накладками. Межвузовский сб. научных трудов. Механика. Ереван: Изд. ЕГУ, 1986, N 5, с. 130-140.
4. Григорян Э. Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. Ученые записки ЕГУ, естеств. науки, 1979, N 3, с. 29-34.
5. Нобл Б. Метод Винера - Хопфа. - М.: ИЛ., 1962. 279 с.
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. - Изд-во 3-е, перераб. и дополн. М.: Наука, 1977. 640 с.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию 1.02.1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

ПРОЕКТИРОВАНИЕ КРУГОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С МАГНИТОГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Азатян Л.Д.

Լ.Դ.Ազատյան

Մագնիսագազադինամիկական հարվածային ալիքի հետ փոխազդող կոմպոզիցիոն նյութից կազմված կլոր սալի նախագծումը

Աշխատանքում դիտարկված է մագնիսագազադինամիկական հարվածային ալիքի հետ փոխազդեցությունը առաձգական շերտավոր կլոր սալի հետ. Լուծված է այդ սալի օպտիմալ պրոյեկտման (նախագծման) խնդիրը. այն է՝ գտնված է ռադիալ և շրջանային ուղղություններով ամրավորված էլեմենտար շերտերի այնպիսի բաշխում սալի շերտերում, որի դեպքում սալի կոշտությունը լինում է մաքսիմալ. Մագնիսական գազադինամիկայի գծայնացված հավասարումները լուծվում են փոփոխականների անջատման մեթոդով և գտնվում է ճշգրիտ լուծումը. Սակայն թվային հաշվարկների համար օգտագործված են մոտավոր բանաձևեր մագնիսական դաշտի և գազի ճնշումը սալի վրա հաշվելու համար. Բերված են թվային հաշվարկների արդյունքները

L.D.Azatian

Design of round plate from composition material, interacted with magnetogasodynamic shock wave

В работе рассмотрено взаимодействие круглой упругой слоистой пластинки с магнитогазодинамической ударной волной. Решена задача оптимального проектирования этой пластинки, а именно найдено такое распределение армирующих элементов в окружном и радиальном направлениях круглой пластинки, которое обеспечивает ее максимальную жесткость. Линеаризированные уравнения магнитной газодинамики решены методом разделения переменных и найдено точное решение задачи. Но для получения числовых данных использованы приближенные формулы для определения магнитного поля и давления газа на пластинку. Приведены результаты численных расчетов

Рассматривается задача определения оптимальной структуры круглой пластинки из композиционного материала, закрепленной в жесткой безграничной стенке, при ее взаимодействии с магнитогазодинамической ударной волной. Пусть пластинка радиуса R отнесена к цилиндрической системе координат (r,Θ,z) так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью (r,Θ) Начало координат принимаем в центре пластинки, ось Oz направлена противоположно движению волны.

Предполагается, что пластинка состоит из $2n$ слоев, поочередно армированных в радиальном и окружном направлениях. При этом, слои с нечетной нумерацией $(1,3,\ldots,2n-1)$ состоят из k_1 элементарных слоев, армированных в радиальном направлении, а слои с четной нумерацией $(2,4,\ldots,2n)$ из k_2 таких же слоев, армированных в окружном направлении Следовательно, толщины слоев пластинки с нечетной нумерацией будут $\delta_0 k_1$, а с четной нумерацией $\delta_0 k_2$, где δ_0 толщина элементарного слоя

Таким образом, пластинку общей толщины $2h$ можно представить как собранную из n одинаковых слоев толщины $\delta = \delta_0 k$, где $k = k_1 + k_2$, армированных волокнами в радиальном и окружном направлениях Величина $\xi = k_1 / k$ определяет относительную толщину радиально армированных слоев пластинки в пакете [1].

Пусть магнитогазодинамическая ударная волна движется со скоростью v_0 и в момент $t = 0$ сталкивается с поверхностью пластинки. Пластинка, другая сторона которой соприкасается с вакуумом, находится в кольцевом магнитном поле $\bar{B}$ Плазма, в которой распространяется ударная волна, предполагается невязкой, нетеплопроводной, имеющей бесконечную электропроводность $(\sigma = \infty)$ Очевидно, что вектор магнитной индукции $\bar{B}$ начального невозмущенного состояния должен удовлетворять уравнениям магнитостатики

$$\operatorname{rot} \bar{B} = 0, \qquad \operatorname{div} \bar{B} = 0$$

из которых следует, что азимутальное начальное магнитное поле является функцией от координаты r. Обозначим через $\bar{B}_0(0, B_\Theta, 0)$ среднее значение вектора магнитной индукции $\bar{B}$

Будем приписывать индексы 0 и 1 давлению P, плотности ρ, скорости частиц газа $\bar{v}$, магнитному полю $\bar{B}$, скорости звука c впереди и за фронтом падающей волны. Течение за падающей волной определяется из соотношений для прямого скачка уплотнения [2]. Значения параметров за падающим скачком приведены в работе [3].

Параметры газа за отраженной ударой волной представляем в виде [3]

$$\bar{P}_2 = P_2 + P,\quad \bar{\rho}_2 = \rho_2 + \rho,\quad \bar{B}_2 = B_2 + b \tag{1}$$
$$\bar{v}_2 = v(v_r, v_z),\quad \bar{c}_2 = c_2 + c$$

где P_2, ρ_2, B_2, c_2 давление, плотность, магнитная индукция и скорость звука за отраженной ударной волной в случае ее взаимодействия с безграничной жесткой стенкой. Эти параметры приведены в работе [3].

После подстановки (1) в основную систему уравнений магнитной газодинамики [4] и линеаризации, получим

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{B_2}{4\pi\rho_2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rb_\Theta), \tag{2}$$
$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{B_2}{4\pi\rho_2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(rb_\Theta),$$
$$\frac{\partial b_\Theta}{\partial t} = -B_2\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial P}{\partial t} + \rho_2(c_2)^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0.$$

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к совместному решению системы (2), уравнения движения круглой пластинки [5]

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r}D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}D_{22}\frac{\partial w}{\partial r} + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z = 0 \tag{3}$$

и уравнений Максвелла для электромагнитного поля внутри непроводящей пластинки (в вакууме)

$$\operatorname{rot}\bar{h}^{(i)} = \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{e}^{(i)}}{\partial t},\quad \operatorname{rot}\bar{e}(i) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{h}^{(i)}}{\partial t}, \tag{4}$$
$$\operatorname{div}\bar{h}^{(i)} = 0,\quad \operatorname{div}\bar{e}^{(i)} = 0.$$

Пользуясь известными выражениями для жесткостей пластинки, составленной из ортотропных слоев [6], для рассматриваемого случая получаются следующие значения жесткостей [1]

$$C_{11} = \left[(B_r - B_\Theta)\xi + B_\Theta\right]h,$$
$$C_{22} = \left[(B_\Theta - B_r)\xi + B_r\right]h,$$
$$D_{11} = \frac{1}{12}h^3\left[(B_r - B_\Theta)\xi + B_\Theta\right]$$

$$D_{22} = \frac{1}{12} h^3 \left[(B_\theta - B_r)\xi + B_r \right]$$

Здесь B_r и B_θ упругие характеристики армированного пластика в направлении армирования и перпендикулярно к нему, w прогиб, m масса пластинки, приходящаяся на единицу площади срединной плоскости, Z нагрузка, которая имеет вид [4]

$$Z = P_s + P + T_{zz} - T_{zz}^{(0)} \tag{5}$$

Здесь P избыточное давление газа, T_{zz} и $T_{zz}^{(0)}$ компоненты максвелловского тензора напряжений в газе и в вакууме соответственно, $\vec{h}^{(0)}$, $\vec{e}^{(0)}$ векторы возмущений магнитного и электрического полей B и E; c скорость света в вакууме ($c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек).

К системам дифференциальных уравнений (2), (3) и (4) необходимо присоединить условия непроницаемости стенки, условия непрерывности касательных составляющих электрического поля на поверхности пластинки и условия затухания всех видов возмущений на бесконечности

$$v_z\big|_{z=h} = \begin{cases} -\dfrac{\partial w}{\partial t} & \text{при } r < R \\ 0 & \text{при } r > R \end{cases} \tag{6}$$

$$e_r = e_r^{(0)} \qquad \text{при } z = h \tag{7}$$

$$q\Big|_{\substack{z \to \infty \\ r \to \infty}} \to 0 \tag{8}$$

где q любая из возмущенных величин.

К этим условиям надо присоединить нулевые начальные условия

$$q\big|_{t=0} = \frac{\partial q}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0 \tag{9}$$

В настоящей работе рассматривается круглая пластинка, жестко заделанная по кромкам в безграничную жесткую стенку

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \qquad \text{при} \qquad r = R \tag{10}$$

В качестве приближенного выражения для функции w принимается

$$w = f(t)\omega(r) = f(t)\left[1 - \alpha\left(\frac{r}{R}\right)^{n_r+1} + \beta\left(\frac{r}{R}\right)^{4}\right] \tag{11}$$

где

$$n_r = \sqrt{C_{22} / C_{11}}, \quad \alpha = \frac{4}{3 - n_r}, \quad \beta = \frac{1 + n_r}{3 - n_r}$$

Введем функции φ и h_θ такие, что

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \qquad v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \qquad b_\theta = \frac{h_\theta}{r}$$

Тогда из первого и второго уравнений системы (2) можно получить

$$P = -\rho_2 \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{B_2}{4\pi}\frac{h_\theta}{r} \tag{12}$$

Из третьего и четвертого уравнений системы (2) имеем

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\rho_2 (c_2)^2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\rho_2 (c_2)^2}{rB_2}\frac{\partial h_\theta}{\partial t} = 0 \tag{13}$$

Исключая h_θ из (12) и (13), получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\rho_2}{1+\lambda_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\rho_2 c_2^2 \lambda_0^2}{1+\lambda_0^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} \tag{14}$$

Здесь и в дальнейшем штрихи опускаем. $\lambda_0^2 = B_2^2 / 4\pi\rho_2 c_2^2$

Подставляя (14) в (13), получаем

$$\frac{\partial h_\theta}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial h_\theta}{\partial t} = -\frac{B_2}{c_2^2\left(1+\lambda_0^2\right)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{B_2}{\left(1+\lambda_0^2\right)}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} \tag{15}$$

После интегрирования по t, из (14) имеем

$$P(t,r,z) = -\frac{\rho_2}{1+\lambda_0^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\rho_2 c_2^2 \lambda_0^2}{1+\lambda_0^2}\frac{1}{r}\int_0^t \frac{\partial\varphi}{\partial r}dt + g(r,z) \tag{16}$$

Так как в момент $t=0$ соприкосновения ударной волны с пластинкой возмущения отсутствуют, то есть при $t=0$ $P = \varphi = \partial\varphi / \partial t = 0$, то в (16) можно положить $g(r,z)=0$. Аналогичными рассуждениями из (15) можно получить

$$h_\theta(r,t,z) = -\frac{B_2}{c_2^2\left(1+\lambda_0^2\right)}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{B_2}{1+\lambda_0^2}\frac{1}{r}\int_0^t \frac{\partial\varphi}{\partial r}dt \tag{17}$$

Формулами (16) и (17) устанавливается связь между функциями P, φ, и h_θ и φ. То есть, определив функцию φ, по формулам (16) и (17) можно определить P и h_θ. Перейдем к определению функции φ. Четвертое уравнение системы (2) с учетом (16) принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{A}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_2^2+\lambda^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \tag{18}$$

где

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 c_2^2, \qquad A = 1/\left(1+\lambda_0^2\right).$$

Применяя интегральное преобразование Лапласа [7] к уравнению (18) и граничным условиям (6), (8), а также учитывая условие (9), будем иметь

$$\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial r^2}+\frac{A}{r}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial r}+\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial z^2}=\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}\overline{\varphi}, \qquad (19)$$

$$v_{z=0}=\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\begin{cases}-s\overline{f}(s)\omega(r) & при \quad r<R, \\ 0 & при \quad r>R\end{cases} \qquad (20)$$

$$\overline{\varphi}\Big|_{\substack{z\to\infty \\ r\to\infty}}\to 0 \qquad (21)$$

Здесь

$$\overline{\varphi}=\int\limits_0^{\infty}\varphi e^{-st}dt, \quad \overline{f}_s=\int\limits_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt \qquad (22)$$

Решение уравнения (19) будем искать методом Фурье. Положим

$$\overline{\varphi}(s,r,z)=X_{(r)}Y_{(z,s)} \qquad (23)$$

Подставляя (23) в (19), получаем

$$\frac{X''(r)}{X(r)}+\frac{A}{r}\frac{X'(r)}{X(r)}+\frac{Y''(z,s)}{Y(z,s)}-\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}=0, \qquad (24)$$

отсюда

$$X''(r)+\frac{A}{2}X'(r)+n^2X(r)=0 \qquad (25)$$

$$Y''_{(z,s)}-\left(n^2+\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}\right)Y_{(z,s)}=0 \qquad (26)$$

Интегрируя (26) и учитывая условие на бесконечности (21), получаем

$$Y_{(z,s)}=C_1(n,s)e^{-z\sqrt{n^2+\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}}} \qquad (27)$$

Решением уравнения (25), с учетом (21) и ограниченности решения в точке $r=0$, будет

$$X_{(r)}=C_2r^{\nu}J_{\nu}(nr) \qquad (28)$$

Здесь J_{ν} функция Бесселя порядка ν, где $\nu=\lambda_0^2/2(1+\lambda_0^2)$ не есть целое число

Общим видом функции $\overline{\varphi}$ является

$$\overline{\varphi}=\int\limits_0^{\infty}r^{\nu}C(n,s)J_{\nu}(n,r)e^{-z\sqrt{n^2+\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}}}dn \qquad (29)$$

Для определения $C(n,s)$ используем граничное условие (20), которое запишем в виде интегрального разложения Фурье-Бесселя [8]

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = -r^{\nu}\int_0^{\infty} nJ_\nu(nr)\int_0^R s\bar f(s)\omega(\rho)J_\nu(n\rho)\rho^{1-\nu}\,d\rho\,dn \qquad (30)$$

с другой стороны, согласно (29)

$$\left.\frac{\partial\bar\varphi}{\partial z}\right|_{z=h} = -r^{\nu}\int_0^{\infty} J_{\nu(nr)}C(n,s)\sqrt{n^2+\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}}\; e^{-h\sqrt{n^2+\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}}}\,dn \qquad (31)$$

Из (30) и (31) следует

$$C_{(n,s)} = -\frac{ns\bar f(s)}{\sqrt{n^2+\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}}}\, e^{h\sqrt{n^2+\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}}}\int_0^R \rho^{1-\nu}\omega(\rho)J_\nu(n\rho)\,d\rho \qquad (32)$$

Таким образом, для $\bar\varphi$ получаем

$$\bar\varphi = \int_0^{\infty} r^{\nu}J_\nu(nr)n\frac{s\bar f(s)}{\sqrt{n^2+\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}}}\, e^{-(z-h)\sqrt{n^2+\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}}}\int_0^R \rho^{(1-\nu)}\omega(\rho)J_\nu(n\rho)\,d\rho\,dn \qquad (33)$$

Используя теорему о свертках [7], получим

$$\varphi = \sqrt{c_2^2+\lambda^2}\int_0^{\infty} r^{\nu}nJ_\nu(nr)\bar\omega(n)\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(t-\tau)J_0\left[n\sqrt{c_2^2+\lambda^2}\sqrt{\tau^2-\frac{(z-h)^2}{c_2^2+\lambda_2}}\right]d\tau\,dn \qquad (34)$$

где

$$\bar\omega(n) = \int_0^R \rho^{1-\nu}J_\nu(n\rho)\omega(\rho)\,d\rho$$

Вычисляя производные функции φ по t, r, подставляя в формулы (16) и (17), получим выражения для возмущенного давления P и компоненты возмущения магнитного поля b_θ. Эти выражения ввиду их громоздкости не приводятся в работе. Компонента $T_{z\theta}$ максвелловского тензора напряжений в газе после линеаризации определяется по формуле

$$T_{z\theta} = -\frac{B_z}{4\pi}b_\theta$$

Для определения компоненты $T_{z\theta}^{(e)}$ максвелловского тензора напряжений в пластинке (в вакууме), необходимо найти $b_\theta^{(e)}$, которое согласно уравнениям Максвелла для вакуума (4), определяется из уравнения

$$\frac{\partial^2 b_\theta^{(t)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial b_\theta^{(t)}}{\partial r}+\frac{\partial^2 b_\theta^{(t)}}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 b_\theta^{(t)}}{\partial t^2} \tag{35}$$

Получим условие для $b_\theta^{(t)}$ на поверхности пластинки. Для этого используем граничное условие (7)

$$e_r = e_r^{(t)} \qquad \text{при} \qquad z = h$$

Для идеально проводящего газа из закона Ома следует

$$\bar{e} = -\frac{1}{c}\left(\bar{v}+\bar{B}_2\right)=\frac{1}{c}\left(B_2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{i} - B_2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{k}\right) \tag{36}$$

Отсюда

$$e_r = e_r^{(t)} = \frac{1}{c}B_2\frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad \text{при} \qquad z = h$$

С учетом условия (11) легко найти

$$e_r^{(t)}\Big|_{z=h} = \begin{cases} -\dfrac{1}{c}B_2\dfrac{\partial w}{\partial t} & при \quad r < R \\ 0 & при \quad r > R \end{cases} \tag{37}$$

Из первого уравнения системы (4) следует

$$\frac{1}{c}\frac{\partial e_r^{(t)}}{\partial t} = -\frac{\partial b_\theta^{(t)}}{\partial z} \tag{38}$$

Из (37) и (38) получим следующее граничное условие для функции $b_\theta^{(t)}$:

$$\frac{\partial b_\theta^{(t)}}{\partial z}\Bigg|_{z=h} = \begin{cases} \dfrac{1}{c^2}B_2\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} & при \quad r < R, \\ 0 & при \quad r > R \end{cases} \tag{39}$$

Таким образом, мы должны решить уравнение (35) при нулевых начальных данных

$$b_\theta^{(t)} = \frac{\partial b_\theta^{(t)}}{\partial t} = 0 \qquad \text{при } t = 0$$

граничном условии (39) и условии затухания возмущения на бесконечности

$$b_\theta^{(t)}\Big|_{\substack{r\to\infty \\ z\to-\infty}} \to 0$$

Принцип решения этого уравнения тот же, что и выше (метод Фурье). Поэтому, не приводя выкладок, запишем окончательное решение в виде

$$b_\theta^{(i)} = \frac{B_z}{c}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t-\tau)\int_0^{\infty} nJ_0(nr)\overline{\omega}(n)J_0\left[nc\sqrt{\tau^2 - \frac{(z-h)^2}{c^2}}\right]dnd\tau \qquad (40)$$

где

$$\overline{\omega}(n) = \int_0^R \rho\omega(\rho)J_0(n\rho)d\rho .$$

$J_0(nr)$ функция Бесселя нулевого порядка. $f(t)$ и $\omega(r)$ функции, определяемые формулой (11). С учетом (40) можно определить $T_{zz}^{(i)}$

Понятно, что точное решение задачи представляет собой большие трудности. Поэтому для получения числовых данных будем пользоваться упрощенными формулами для определения нагрузки Z, которые позволяют свести задачу к интегрированию дифференциального уравнения второго порядка. В настоящей работе получены конкретные числовые результаты для случая, когда для определения избыточного давления, компоненты максвелловского тензора напряжений в газе использованы приближенные формулы, полученные на основании применения гипотезы плоского отражения

$$P = -\frac{c_2\rho_2}{\sqrt{1+\lambda_0^2}}\frac{\partial w}{\partial t}, \quad T_{zz} = -\frac{c_2\rho_2\lambda_0^2}{\sqrt{1+\lambda_0^2}}\frac{\partial w}{\partial t}$$
$$T_{zz}^{(i)} = \frac{B_z^2}{4\lambda c}\frac{\partial w}{\partial t} \qquad (41)$$

Согласно (5) и (41) рассматриваемая задача сводится к решению следующего дифференциального уравнения.

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r}D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}D_{22}\frac{\partial w}{\partial r} + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} +$$
$$+c_2\rho_2\left(\sqrt{1+\lambda_0^2} + \frac{c_2}{c}\lambda_0^2\right)\frac{\partial w}{\partial t} = P_2 \qquad (42)$$

Подставляя прогиб пластинки в виде (11) и применяя метод Бубнова-Галеркина к уравнению (42), для определения стрелы прогиба получим уравнение

$$A_n\frac{d^2 f}{dt^2} + B_n\frac{df}{dt} + C_n f = F_n \qquad (43)$$

где

$$A_n = \frac{mR^2}{2}\left[1 - \frac{4\alpha}{n_r+3} + \frac{2\beta}{3} + \frac{\alpha^2}{n_r+2} + \frac{\beta^2}{5} - \frac{4\alpha\beta}{n_r+7}\right],$$

$$B_n = \frac{\rho_2 c_2 R^2}{2}\left[1 - \frac{4\alpha}{n_r+3} + \frac{2\beta}{3} + \frac{\alpha^2}{n_r+2} + \frac{\beta^2}{5} - \frac{4\alpha\beta}{n_r+7}\right]\left(\sqrt{1+\lambda_0^2} + \frac{c_2}{c}\lambda_0^2\right),$$

$$C_n = \frac{1}{R^2}\left[4\beta\left(1 - \frac{2\alpha}{n_r+3} + \frac{\beta}{3}\right)(9D_{11} - D_{22}) - \alpha(n_r+1)(nr^2 D_{11} - D_{22})\right]\times$$

$$\times\left[1 - \alpha\frac{n_r-1}{2n_r} + \beta\frac{n_r-1}{n_r+3}\right]$$

$$F_n = \frac{P_1 R^2}{2}\left(1 - \frac{2\alpha}{n_r+3} + \frac{\beta}{3}\right)$$

Решение уравнения (43) запишется в виде

$$f(t) = \frac{F_n}{A_n}\frac{e^{\gamma t}\left(\gamma\sin\sqrt{D}t - \sqrt{D}\cos\sqrt{D}t\right) + \sqrt{D}}{\sqrt{D}\left[\left(\sqrt{D}\right)^2 + \gamma^2\right]} \qquad \text{при } D > 0,$$

$$f(t) = \frac{F_n}{A_n\gamma^2}\left[e^{\gamma t}(\gamma t - 1) + 1\right] \qquad \text{при } D = 0,$$

$$f(t) = \frac{F_n}{A_n}\frac{e^{\gamma t}\left(\sqrt{-D}\,\mathrm{ch}\sqrt{-D}t - \gamma\,\mathrm{sh}\sqrt{-D}t\right) - \sqrt{-D}}{\sqrt{-D}\left[\left(\sqrt{-D}\right)^2 - \gamma^2\right]} \qquad \text{при } D < 0.$$

Здесь $D = C_n / A_n - B_n^2 / 4A_n^2$, $\gamma = -B_n / 2A_n$

Ставится задача нахождения оптимальной пластинки заданного веса из условия

$$\min_{\xi}\max_{t,r} w(t,r,\xi), \quad 0 \le \xi \le 1, \quad t \ge 0$$

В качестве численного примера рассматривается пластинка, составленная из монослоев композиционного материала со следующими значениями коэффициентов упругости:

$$B_{\theta} = 0.025B_r, \quad B_{r\theta} = 0.0066B,$$

В таблице приведены оптимальные значения параметра ξ и соответствующие значения безразмерного прогиба $\bar{f} = f / 2h$ в центре пластинки для различных значений параметра $\bar{a}^2 = B_0^2 / 4\pi\rho_0 c_0^2$.

характеризующего начальное магнитное поле Расчеты проведены для значения $\lambda_* = 2h / R = 0.05$.

$\bar{a}$	0	0 01	0.05	0.1	0.5	1
$\bar{J}$	0.3291	0.3287	0 3271	0.3114	0.1982	0.0765
ξ	0.72	0.72	0.72	0 72	0 75	0.77

Как следует из таблицы, магнитное поле ослабляет воздействие ударной волны на пластинку, что может быть использовано в практических целях Этот же эффект был получен в работе [3].

Данная работа выполнена по заказу фирмы "Анушик" Автор благодарит Гнуни В.Ц за участие в обсуждении работы и ценную консультацию.

ЛИТЕРАТУРА

1.Белубекян Э.В., Гнуни В.Ц. К вопросу проектирования гибкой круглой пластинки из композиционного материала Инж.пробл строительной механики. Ереван, 1985

2.Калихман Л.Е. Элементы магнитной газодинамики. М.:Атомиздат, 1964.

3.Азатян Л.Д. Оптимальное проектирование пластинки полосы, взаимодействующей с магнитогазодинамической ударной волной Изв.НАН РА, Механика, 1995, т.48, N4, с 33-42

4.Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М В Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977.

5.Лехницкий С.Г Теория упругости анизотропного тела М Наука, 1977

6.Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек М Наука, 1974

7 Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М. Наука, 1965.

8 Снеддон И. Преобразования Фурье. М. Изд. ИЛ, 1995

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 2.03.1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛН В БЕСКОНЕЧНОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Гаспарян А.Е., Хачатрян А.А.

Հ.Ե Գասպարյան, Ա.Ա.Խաչատրյան
Միաչափ ալիքների տարածումը անվերջ միկրոբևեռ միջավայրում մագնիսական դաշտի ճաշվառմամբ

Ուսումնասիրվում է մագնիսամիկրոբևեռ ալիքների տարածումը, նրանց արագությունների կախվածությունը հաճախականությունից և արտաքին մագնիսական դաշտից

A E Gasparian, A A Khachatrian
Propagation one-dimensional wave in the infinity micropolar continuum with the magnetic field

Исследуется процесс распространения магнитомикрополярных волн, поведение их скоростей в зависимости от частоты и напряженности внешнего магнитного поля

Уравнения, описывающие волновой процесс в магнитомикрополярной идеально-проводящей среде при наличии внешнего постоянного магнитного поля, имеют вид [1]

$$\left(c_1^2+c_3^2\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{U}-\left(c_2^2+c_3^2\right)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{U}+c_3^2\operatorname{rot}\overline{\varphi}+\frac{1}{\rho}\overline{F}^{(e)}=\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$\left(c_4^2+c_5^2\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{\varphi}-c_4^2\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{\varphi}+\omega_0^2\operatorname{rot}\overline{U}-2\omega_0^2\overline{\varphi}=\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial t^2} \tag{2}$$

где

$$c_1^2=\frac{1}{\rho}(\lambda+2\mu),\ c_2^2=\frac{\mu}{\rho},\ c_3^2=\frac{\chi}{\rho},\ c_4^2=\frac{\gamma}{J\rho},\ c_5^2=\frac{\alpha+\beta}{J\rho}$$

$$\omega_0^2=\frac{\chi}{J\rho}=\frac{c_3^2}{J},\ \overline{F}^{(e)}=\frac{1}{4\pi}\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\overline{U}\times\overline{H}_0\right)\right]\times\overline{H}_0 \tag{3}$$

Здесь $\overline{U}$ вектор смещения; $\overline{\varphi}$ вектор микрополярного вращения, $\overline{F}^{(e)}$ объемная сила электромагнитного происхождения (пондеромоторная сила), λ и μ коэффициенты Ляме; ρ-плотность материала; χ, α, β и

γ дополнительные упругие коэффициенты изотропной микрополярной упругости; J динамическая характеристика среды (мера инерции при вращении), $\overline{H}_0$ вектор напряженности внешнего магнитного поля

Исследования простейшего типа волн сразу же выясняют существенные черты распространения магнитомикрополярных волн, их характер, скорость распространения, дисперсию и затухание. Характер распространения волн легче всего проследить на примере монохроматической волны, распространяющейся в направлении оси Ox_1

Предполагая, что в уравнениях (1) и (2) функции $\overline{U}$ и $\overline{\varphi}$ зависят только от $x_1 \equiv x$ и t, получим систему уравнений для компонентов вектора смещения и вектора микрополярного вращения

$$\left(c_1^2+c_1^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho}F_1^{(e)}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},\quad \left(c_2^2+c_3^2\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-c_3^2\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}+\frac{1}{\rho}F_2^{(e)}=\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

$$\left(c_2^2+c_3^2\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+c_3^2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}+\frac{1}{\rho}F_3^{(e)}=\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},\quad c_4^2\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2}-c_5^2\frac{\partial u_3}{\partial x}-2\omega_0^2\varphi_2=\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \qquad (4)$$

$$c_4^2\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2}+c_5^2\frac{\partial u_2}{\partial x}-2\omega_0^2\varphi_3=\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2},\quad \left(c_4^2+c_5^2\right)\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}-2\omega_0^2\varphi_1=\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}$$

здесь $F_1^{(e)}$, $F_2^{(e)}$ и $F_3^{(e)}$ определяются из последнего соотношения (3) в виде

$$F_1^{(e)}=\left(H_{20}^2+H_{30}^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-H_{10}H_{20}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-H_{10}H_{30}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}$$

$$F_2^{(e)}=H_{10}^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-H_{10}H_{20}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},\quad F_3^{(e)}=H_{10}^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}-H_{10}H_{30}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \qquad (5)$$

В зависимости от направления напряженности внешнего магнитного поля возможны следующих два варианта, когда система уравнений (4) упрощается

а) $H_{10}=0,\quad H_{20}\neq 0,\quad H_{30}\neq 0$

Тогда

$$F_1^{(e)}=\left(H_{20}^2+H_{30}^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},\quad F_2^{(e)}=F_3^{(e)}=0 \qquad (6)$$

б) $H_{10}\neq 0,\quad H_{20}=H_{30}=0$

Тогда $F_1^{(e)}=0,\quad F_2^{(e)}=H_{10}^2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2},\quad F_3^{(e)}=H_{10}^2\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}$ (7)

Отметим, что в случае а) в системе (4) от второго по пятое уравнения не зависят от напряженности внешнего магнитного поля и это исследовано в работах [2,3], поэтому здесь их рассматривать не будем.

Что же касается первого уравнения, то оно в силу (6) приводится к виду

$$\left(c_1^2 + c_3^2 + v_A^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad v_A^2 = \frac{1}{4\pi\rho}\left(H_{20}^2 + H_{30}^2\right) \qquad (1.1)$$

Решения уравнения (1.1) ищем в виде

$$u_1(x,t) = A\exp\left[ik(x - vt)\right] \qquad (1.2)$$

где $k = 2\pi / l$, l длина волны, получим следующую фазовую скорость для распространяющейся волны

$$v_1^2 = c_1^2 + c_3^2 + v_A^2 \qquad (1.3)$$

которая совпадает с фазовой скоростью продольной магнитоупругой волны при $\chi = 0$ $\left(c_3^2 = 0\right)$. Эти волны подобны классическим волнам без вращения и распространяются без дисперсии.

Последнее уравнение системы (4) описывает процесс распространения волн продольного микровращения [2]. В нем отсутствует напряженность магнитного поля. Скорость этих волн $\left(v_2\right)$ зависит от волнового числа k

$$v_2^2 = c_4^2 + c_5^2 + 2\omega_0^2 / k^2 \qquad (1.4)$$

следовательно, распространяющиеся волны обладают дисперсией. Здесь, введя угловую частоту $\omega_2 = kv_2$, фазовую скорость v_2 (1.4) можно представить в следующем виде.

$$v_2^2 = \left(c_4^2 + c_5^2\right)\frac{\omega^2}{\omega^2 - 2\omega_0^2} \qquad (1.5)$$

В случае б), подставляя (1.2) в первое уравнение системы (4), получим волны продольного смещения [2] с фазовой скоростью

$$v_1^2 = c_1^2 + c_3^2 \qquad (1.6)$$

распространяющиеся без дисперсии.

Учитывая (7) для определения функций $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$, $\varphi_2(x,t)$, и $\varphi_3(x,t)$ из системы (4) будем иметь

$$\left(c_2^2 + c_3^2 + v_A^2\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - c_3^2\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad \left(c_2^2 + c_3^2 + v_A^2\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + c_3^2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

$$c_4^2\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - c_3^2\frac{\partial u_3}{\partial x} - 2\omega_0^2\varphi_2 = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}, \quad c_4^2\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + c_3^2\frac{\partial u_2}{\partial x} - 2\omega_0^2\varphi_3 = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} \qquad (1.7)$$

$$v_A^2 = \frac{1}{4\pi\rho}H_{10}^2$$

Монохроматические волны, распространяющиеся в положительном направлении оси Ox_1, имеют следующий вид

$$\left(u_2, u_3, \varphi_2, \varphi_3\right)=\left(u_{20}, u_{30}, \varphi_{20}, \varphi_{30}\right)\exp\left[ik(x-vt)\right] \tag{1.8}$$

где u_{20}, u_{30}, φ_{20} и φ_{30} постоянные

Подставляя (1.8) в (1.7), получим следующее дисперсионное уравнение для определения фазовой скорости распространения этих волн

$$Av^4 - Bv^2 + C = 0 \tag{1.9}$$

где $\quad A = 1 - 2\omega_0^2/\omega^2, \quad C = c_4^2\left(c_2^2 + c_3^2 + v_A^2\right)$

$$B = c_4^2 + \left(c_2^2 + v_A^2\right)\left(1 - 2\omega_0^2/\omega^2\right) + c_3^2\left(1 - \omega_0^2/\omega^2\right)$$

Дисперсионое уравнение (1.9) при произвольном значении ω имеет два корня.

$$v_1^2 = \frac{\omega^2}{2\left(\omega^2 - 2\omega_0^2\right)}\left[c_4^2 + \left(c_2^2 + v_A^2\right)\left(1 - 2\omega_0^2/\omega^2\right) + c_3^2\left(1 - \omega_0^2/\omega^2\right) + \sqrt{D}\right] \tag{1.10}$$

$$v_4^2 = \frac{\omega^2}{2\left(\omega^2 - 2\omega_0^2\right)}\left[c_4^2 + \left(c_2^2 + v_A^2\right)\left(1 - 2\omega_0^2/\omega^2\right) + c_3^2\left(1 - \omega_0^2/\omega^2\right) - \sqrt{D}\right] \tag{1.11}$$

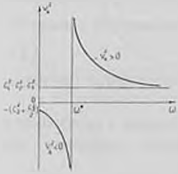
где дискриминант D всегда положителен и имеет следующий вид:

$$D = \left[c_4^2 - c_2^2 - c_3^2 - v_A^2 + 2\omega_0^2\left(c_2^2 + v_A^2 + c_3^2/2\right)/\omega^2\right]^2 + 4c_3^2c_4^2\omega_0^2/\omega^2 \tag{1.12}$$

Таким образом, в бесконечной магнитомикрополярной, как и в микрополярной средах, существуют монохроматические волны, которые распространяются с четырьмя различными скоростями $\left(v_1, v_2, v_3, v_4\right)$

2 Как видно из (1.4) и (1.6), скорости v_2 и v_3 не зависят от напряженности внешнего магнитного поля и они рассмотрены в работе [2]. В этом пункте будем исследовать поведение скоростей волн v_1 и v_4 в зависимости от величины напряженности внешнего магнитного поля и частоты ω при условии

$$\frac{1}{4\pi\rho}H_{10}^2 = v_A^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2 - 2\omega_0^2}\left[c_4^2 - c_2^2 - c_3^2 + \omega_0^2\left(2c_2^2 + c_3^2\right)/\omega^2\right] \tag{2.1}$$



Фиг 1

Очевидно, что условие (2.1) имеет смысл при $\omega > \omega^* = \sqrt{2}\omega_0$. Это означает, что $\omega = \omega^*$ является критической частотой для распространения альфвеновских волн. Схематической график зависимости v_1^2 от ω приведен на фиг 1.

Таким образом, если напряженность внешнего постоянного магнитного поля удовлетворяет условию (2.1), при $\omega > \omega^*$ в маг изомикрополярной среде альфвеновская волна распространяется со скоростью $v_A^2 = H_{10}^2/4\pi\rho$, причем $v_A^2(\omega\to\infty) = c_4^2 - c_3^2 - c_1^2$

Из (1.12) с учетом (2.1) получим

$$D = 4c_1^2c_4^2\omega_0^2/\omega^2 \tag{2.2}$$

С учетом (2.1) и (2.2) для v_3^2 и v_4^2 из (1.10) и (1.11) будем иметь

$$v_3^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2-2\omega_0^2}\left(c_4^2 + c_1c_4\omega_0^2/\omega^2\right) \tag{2.3}$$

$$v_4^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2-2\omega_0^2}\left(c_4^2 - c_1c_4\omega_0^2/\omega^2\right) \tag{2.4}$$

Фиг 2

Схематический график зависимости v_3^2 и v_4^2 от ω приведен на фиг 2

Здесь очевидно, что в промежутке $0<\omega<\omega^*$ $v_3^2<0$; в промежутке $0\le\omega\le\omega^*\sqrt{c_1/2c_4}<\omega^*$ $v_4^2>0$, а в промежутке $\omega^*\sqrt{c_1/2c_4}<\omega<\omega^*$ $v_4^2<0$

Поскольку условие (2.1) имеет смысл при $\omega>\omega^*$, следует, что скорости v_3 и v_4 будут существовать только при $\omega>\omega^*$.

Таким образом, при условии (2.1) в микрополярной среде могут распространяться волны поперечного смещения v_3 и волны поперечного микровращения v_4 при $\omega>\omega^*$. При $\omega\to\infty$ скорости этих волн стремятся к одной и той же скорости c_4.

3. Рассмотрим поведение скоростей волн v_3 и v_4 в зависимости от частоты ω с учетом напряженности внешнего постоянного магнитного поля.

Если в (1.10) и (1.11) подставим $H_0=0$ $\left(v_A^2=0\right)$, согласованное решение для v_3 и v_4 (то есть $v_3>v_4$) будет возможно при условии [2]

$$c_4^2 \ge c_3^2 + c_1^2 \tag{3.1}$$

Прит нарушении условия (3.1) микрополярные волны не существуют

Ниже будем рассматривать случаи, при которых в зависимости от величины напряженности внешнего постоянного магнитного поля возможны согласованные решения для v_3 и v_4.

1) При условии

$$H_{01}^2 / 4\pi\rho < c_4^2 - c_2^2 - c_1^2 \qquad (3.2)$$

анализ решений (1.11) показывает, что $\left(v_4^2\right)_\omega > 0$. Качественный вид зависимости для v_1^2 и v_4^2 от частоты ω приведен на фиг 3.

Фиг 3

Здесь при отсутствии магнитного поля $\left(v_A^2 = 0\right)$, приведенные результаты совпадают с результатами, полученными в работе [2].

2)При условии

$$H_{01}^2 / 4\pi\rho = c_4^2 - c_2^2 - c_1^2 \qquad (3.3)$$

из (1.11) имеем $\left(v_4^2\right)_\omega > 0$. Схематический график зависимостей v_1^2 и v_4^2 от ω аналогичен фиг 3, но с той разницей, что скорости распространения волн v_1 и v_4^2 при $\omega \to \infty$ стремятся к одному и тому же пределу $\left(c_2^2 + c_1^2 + v_4^2\right)$.

3)При условии

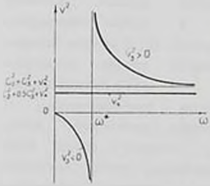
$$c_4^2 - c_2^2 - c_1^2 < H_{01}^2 / 4\pi\rho < c_4^2 - c_2^2 - c_1^2 / 2 \qquad (3.4)$$

схематический график зависимостей v_1^2 и v_4^2 от частоты ω тоже аналогичен фиг 3, поэтому здесь не приводится.

4)При условии

$$H_{01}^2 / 4\pi\rho = c_4^2 - c_2^2 - c_1^2/2 \qquad (3.5)$$

из (1.11) имеем $\left(v_4^2\right)_\omega = 0$, то есть волна распространяется с постоянной скоростью v_4 и схематический график зависимостей v_1^2 и v_4^2 от ω приведен на фиг 4.



Фиг.4

Фиг.5

5)При условии

$$H_{01}^2 / 4\pi\rho > c_4^2 - c_2^2 - c_3^2/2 \qquad (3.6)$$

из (1.11) следует, что $\left(v_4^2\right)_{\infty} < 0$. Это означает, что имеем качественно новый схематический график для v_4^2 в зависимости от частоты ω (фиг 5).

Таким образом, анализ решений (1.10) и (1.11) показывает, что учет внешнего постоянного магнитного поля при распространении магнитомикрополярных волн в идеально проводящих средах в зависимости от величины напряженности магнитного поля, приводит не только к количественным, но и к качественно новым результатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaliski S. and Nowacki W. Wave-type Equations of Thermo-Magneto Mikroelasticity Bull. Acad. Polon. ser. sci. Techn., 13(1970), 155[277]
2. Эринген А.К. Теория микрополярной упругости. Разрушение. Т.2. М.: Мир, 1975. с.646-751
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 20.04.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПРОНИКАНИЯ ТВЕРДОГО КОНУСА В ПЕРВОНАЧАЛЬНО-УПРУГУЮ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНУЮ СРЕДУ

Асатрян В.Л., Багдоев А.Г., Ванцян А.А.

Վ.Լ.Ասատրյան, Ա.Գ.Բագդոև, Ա.Ա.Վանցյան

Նախապես առաձգական տրանսվերսալ - իզոտրոպ միջավայր անվերջ կոշտ կոնի ներթափանցման դինամիկ խնդրի լուծումը:

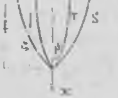
Հարթ կտրվածքների վարկածի հիման վրա լուծված է անվերջ կոշտ կոնի ներթափանցման դինամիկ խնդիրը: Ցույց է տրված դինամիկ անդամների և միջավայրի անիզոտրոպիայի ազդեցությունը ներթափանցման պրոցեսի վրա

V. L. Asatryan, A.G.Bagdoev, A.A.Vantsyan

The solution of dynamic problem of penetration of rigid cone into initially elastic transversal - isotropic medium

Рассматривается задача проникания твердого бесконечного конуса в трансверсально изотропную среду по гипотезе плоских сечений. Показано влияние динамических членов и анизотропии среды на процесс проникания

Рассматривается задача проникания твердого бесконечного конуса в трансверсально-изотропную среду по гипотезе плоских сечений. Задача проникания тонкого твердого тела в анизотропную среду в квазистатической постановке решена в [1]. Для изотропной среды динамическая задача проникания твердого индентора решена в [2].



Фиг 1

В рассматриваемой модели проникания вводится поверхность разрушения, впереди которой среда упругая, а позади нее пластическая. Если рассматривать среду, подчиняющуюся уравнениям Прандтля-Рейса, то следует полагать

$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{\mu}\dot{s}_{ij} + \frac{\varepsilon_*}{\tau_*}s_{ij}$, где для простоты взята изотропная среда (μ – модуль сдвига). Предполагая $\frac{\tau_*}{\mu\varepsilon_*}\frac{d}{dt} << 1$, т.е. считая задачу квазистатической, можно получить уравнения пластического течения. Из результатов, полученных для данной среды, следует [1] $\varepsilon_* = 2\frac{v_r}{r} = 2\frac{r_1}{r^2}\frac{\partial r_1}{\partial t}$, тогда получится для порядков величин $\frac{\tau_*}{\mu}\frac{r^2}{2r_1^2} << 1$. При $r/r_1 \sim 1$, в силу малости, τ_*/μ можно в уравнениях течения пренебречь первым слагаемым, что выполняется в области пластичности на некотором удалении от поверхности разрушения. При $\frac{r^2}{r_1^2} \sim \frac{\mu}{\tau_*}$, т.е. вблизи поверхности разрушения, следует удерживать все слагаемые. Таким путем, мы обосновываем правильность использования уравнений идеальной теории пластичности вблизи тела, а вдали от него следует сращивать решение с упругим решением. Такая модель принята в квазистатической по терминологии [6] задаче, которая соответствует идеальной пластичности. То, что принимается модель идеальной пластичности позади фронта разрушения, сделана в указанной статье и в статьях А. Я. Сагомоняна.

Вначале рассматривается задача для тела формы криволинейного конуса, переходящего в цилиндр, уравнение которого берется в форме

$$r_1 = r_0 - \beta(\zeta - f + x)^{\nu} \tag{1}$$

где ось Ox направлена вдоль направления проникания, $r_0 = \beta\zeta^{\nu}$ есть радиус цилиндрической части тела, f – глубина проникания, ζ – высота конуса, $\nu > 1$, β – постоянная, (фиг. 1). Как и в [1], радиальная скорость частиц при выполнении гипотезы плоских сечений имеет вид [1]

$$v_r = \frac{r_1}{r}\frac{\partial r_1}{\partial t} \tag{2}$$

откуда с учетом (1)

$$\begin{aligned} \frac{dv_r}{dt} = \frac{\beta^2\nu^2}{r}(\zeta - f + x)^{2(\nu-1)}f'^2 + \frac{r_1}{r}\beta\nu(\zeta - f + x)^{\nu-1}f'' - \\ -\beta\nu(\nu-1)\frac{r_1}{r}(\zeta - f + x)^{\nu-2}f'^2 - \frac{r_1^2}{r^3}\beta^2\nu^2(\zeta - f + x)^{2(\nu-1)}f'^2 \end{aligned} \tag{3}$$

В области пластичности вблизи индектора можно записать для связи тензора скоростей деформаций и тензора напряжений [5]

$$
\begin{aligned}
\dot\varepsilon_{rr} &= \bar a\left[H(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})+G(\sigma_{rr}-\sigma_{zz})\right]\\
\dot\varepsilon_{\theta\theta} &= \bar a\left[H(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr})+F(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{zz})\right]\\
\dot\varepsilon_{zz} &= \bar a\left[G(\sigma_{zz}-\sigma_{rr})+F(\sigma_{zz}-\sigma_{\theta\theta})\right]
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Условие текучести Мизеса записывается в виде

$$H(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})^2+G(\sigma_{rr}-\sigma_{zz})^2+F(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{zz})^2=1 \qquad (5)$$

В (4) и (5) F, G, H даются формулами

$$2F=\frac{1}{\tau_{\theta\theta}^2}+\frac{1}{\tau_{zz}^2}-\frac{1}{\tau_{rr}^2},\quad 2G=\frac{1}{\tau_{zz}^2}+\frac{1}{\tau_{rr}^2}-\frac{1}{\tau_{\theta\theta}^2},\quad 2H=\frac{1}{\tau_{rr}^2}+\frac{1}{\tau_{\theta\theta}^2}-\frac{1}{\tau_{zz}^2} \qquad (6)$$

где τ_{zz}, τ_{rr}, $\tau_{\theta\theta}$ пределы текучести в соответствующих направлениях, величина $\bar a$ в формулах (4) подлежит определению.

Согласно гипотезе плоских сечений $\dot\varepsilon_{zz}\approx 0$ и из (4) можно получить

$$\sigma_{zz}-\sigma_{\theta\theta}=-\frac{G}{F}(\sigma_{zz}-\sigma_{rr}) \qquad (7)$$

Вводя девиаторы напряжения $\sigma_{zz}-\sigma=\sigma_{zz}$, $\sigma_{rr}-\sigma=\sigma_{rr}$,

$$\sigma_{\theta\theta}-\sigma=\sigma_{\theta\theta},\ \text{где}\ 3\sigma=\sigma_{zz}+\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta} \qquad (8)$$

систему уравнений (4) можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{zz}+\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}=0\\
&\sigma_{zz}=\sigma_{\theta\theta}+\frac{G}{F}(\sigma_{rr}-\sigma_{zz}) \qquad (9)\\
&\frac{\dot\varepsilon_{\theta\theta}}{\bar a}=H(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr})+F(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{zz})
\end{aligned}
$$

и обозначая

$$\sigma_{rr}=\frac{\dot\varepsilon_{\theta\theta}}{\bar a}\bar\sigma_{rr},\quad \sigma_{\theta\theta}=\frac{\dot\varepsilon_{\theta\theta}}{\bar a}\bar\sigma_{\theta\theta},\quad \sigma_{zz}=\frac{\dot\varepsilon_{\theta\theta}}{\bar a}\bar\sigma_{zz} \qquad (10)$$

условие текучести Мизеса можно переписать в виде

$$H(\bar\sigma_{rr}-\bar\sigma_{\theta\theta})^2+G(\bar\sigma_{rr}-\bar\sigma_{zz})^2+F(\bar\sigma_{\theta\theta}-\bar\sigma_{zz})^2=\frac{\bar a^2}{\dot\varepsilon_{\theta\theta}^2} \qquad (11)$$

Из (9) можно получить

$$\bar\sigma_{zz}=\frac{F-G}{\alpha},\quad \bar\sigma_{rr}=\frac{2F+G}{-\alpha},\quad \bar\sigma_{\theta\theta}=\frac{2G+F}{\alpha} \qquad (12)$$

где $\alpha=3(GF+GH+FH)$

Для определения неизвестного $\bar a$ в (4) из (11) и (12) следует

$$\frac{\varepsilon_{\theta\theta}^2}{\bar{a}^2} = \frac{\alpha}{3(G+F)} \tag{13}$$

Из уравнения движения, записанного из предположения гипотезы плоских сечений

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = \rho\frac{dv_r}{dt} \tag{14}$$

и из соотношений (10), (12) можно получить

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} - \sqrt{\frac{3(G+F)}{\alpha}}\frac{1}{r} = \rho\frac{dv_r}{dt} \tag{15}$$

Интегрируя уравнение (15) с учетом (3), получим

$$\sigma_{rr} = \sqrt{\frac{3(G+F)}{\alpha}}\ln r + A\ln r - \frac{B}{2r^2} + c, \tag{16}$$

где

$$A = \rho\beta^2 v^2(\zeta - f + x)^{2(v-1)} f'^2 + \rho r_1\beta v(\zeta - f + x)^{v-1} f'' -$$

$$-\rho\beta v(v-1)r_1(\zeta - f + x)^{v-2} f'^2$$

$$B = -\rho r_1^2\beta^2 v^2(\zeta - f + x)^{2(v-1)} f'^2$$

c_1 постоянная интегрирования.

Из (16) видно, что для среды, в которой $\alpha \to 0$, $\sigma_{rr} \to \infty$. Причиной особого поведения σ_{rr} при $\alpha \to 0$, также для общего случая без гипотезы плоских сечений, является нарушение условий выпуклости поверхности текучести (11).

Записав соотношения (4) в виде

$$\sigma_{rr} = -\frac{(2F+G)\varepsilon_{\theta\theta}/\bar{a} + (2F+H)\dot{\varepsilon}_{rr}/\bar{a}}{\alpha};$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(2G+F)\varepsilon_{\theta\theta}/\bar{a} + (F-H)\varepsilon_{rr}/\bar{a}}{\alpha}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{(F-G)\varepsilon_{\theta\theta}/\bar{a} + (F+2H)\varepsilon_{rr}/\bar{a}}{\alpha} \tag{17}$$

и ограничиваясь случаем трансверсальной изотропной среды, для которой

$$F = G = \frac{1}{2\tau_{zz}^2},\quad H\frac{1}{\tau_{rr}^2} - \frac{1}{2\tau_{zz}^2},\quad \alpha = \frac{3}{\tau_{zz}^2}\left(\frac{1}{\tau_{rr}^2} - \frac{1}{4\tau_{zz}^2}\right)$$

условие текучести Мизеса (5) можно в плоскости ε_{rr} $\varepsilon_{\theta\theta}$ записать в виде

$$\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{xx}}{\bar{a}}-\frac{\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}}{\bar{a}}\right)^2+\frac{\dot{\varepsilon}_{xx}}{\bar{a}}\frac{\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}}{\bar{a}}\left(4-\frac{\tau_{xr}^2}{\tau_{xx}^2}\right)=\frac{1}{\tau_{xx}^2}\left(1-\frac{\tau_{xr}^2}{4\tau_{xx}^2}\right) \tag{18}$$

Уравнение (18) в переменных $\varepsilon_{11}/\bar{a}$, $\varepsilon_{\theta\theta}/\bar{a}$ даст в случае $\tau_{u} = 2\tau_{11}$ замкнутую кривую, а в случае $\tau_u > 2\tau_{11}$ гиперболу

В случае $\tau_{rr} = 2\tau_{11}$ получается вырожденное уравнение $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{\theta\theta}$ Таким образом, при $\tau_u \geq 2\tau_{11}$ условие пластичности для выпуклой кривой нарушается, что приводит при $\tau_u \to 2\tau_{11}$ к бесконечным и при $\tau_u > 2\tau_{11}$ к мнимым напряжениям. Тем не менее, при $\tau_u - 2\tau_{11}$ малом, но конечном, получается эффект значительного увеличения сопротивления среды и уменьшения глубины проникания

В [4] исследуется случай отклонения решения от значений, полученных по гипотезе плоских сечений. Как выяснилось, и в данной в [4] постановке получается при $\tau_u \to 2\tau_{11}$ бесконечные напряжения, что, как показано выше, связано с невыполнением условия выпуклости поверхности (кривой) пластичности

В упругой области между напряжениями и деформациями имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr} = a_{11}\varepsilon_{rr} + a_{12}\varepsilon_{\theta\theta} \quad \sigma_{r\theta} = a_{44}\varepsilon_{r\theta} \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}\\
&\sigma_{\theta\theta} = a_{12}\varepsilon_{rr} + a_{22}\varepsilon_{\theta\theta} \quad \sigma_{rz} = a_{55}\varepsilon_{rz}\\
&\sigma_{11} = a_{13}\varepsilon_{rr} + a_{23}\varepsilon_{\theta\theta} \quad \sigma_{\theta z} = a_{66}\varepsilon_{\theta z} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}
\end{aligned} \tag{19}$$

В силу того, что скорость упругих волн намного больше, чем скорость проникания, то в упругой области инерционными членами можно пренебречь. Подставляя (19) в уравнение равновесия, можно записать

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{a_{22}}{a_{11}}\frac{u_r}{r^2}=0 \tag{20}$$

решение которого находится в виде

$$u_r = cr^n \qquad n = -\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \tag{21}$$

Используя (19), (21) и (16), можно получить

$$\sigma_{rr} = \left[\sqrt{\frac{3(G+F)}{\alpha}}+A\right]\ln\frac{r}{r_k\xi_0}+\frac{B}{2}\left(\frac{1}{r_k^2\xi_0^2}-\frac{1}{r^2}\right)+\sigma_{rr}^c \tag{22}$$

где $r = r_k\xi_0$ уравнение фронта пластичности S; σ_{rr}^c напряжение из упругой области при $r = r_k\xi_0$. Для определения ξ_0, подставляя (19) в условие текучести Мизеса, с учетом (21), получим

$$H\left(a_{11}n - a_{12}n + a_{12} - a_{22}\right)^2 + G\left(a_{11}n - a_{13}n + a_{12} - a_{33}\right)^2 +$$
$$+E\left(a_{13}n - a_{11}n + a_{32} - a_{21}\right) = \frac{1}{c^{2}r_1^{2(n-1)}\xi_0^{2(n+1)}} = \bar{c} \tag{23}$$

Подставляя σ'_{rr}, записанное с учетом (21), (19), и используя (23) для σ_{rr} при $r = r_1$, следует получить

$$\sigma_{rr} = -\left[\sqrt{\frac{3(G+F)}{\alpha}} + A\right]\ln\xi_0 + \left(a_{11}n + a_{12}\right)c^{-\frac{1}{2}} + \frac{B}{2}\left(\frac{1}{r_1^2\xi_0^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) \tag{24}$$

Используя непрерывность скоростей на фронте $r = r_1\xi_0$

$$\frac{1}{\xi_0}\frac{\partial r_1}{\partial t} = \frac{\partial c}{\partial t}r_1^n\xi_0^n, \qquad \bar{c} = \frac{1}{\xi_0^{n+1}}\frac{r_1^{1-n}}{1-n}$$

и с учетом (23) для определения ξ_0 получим

$$\xi_0^4 = \frac{\bar{c}}{(1-n)^2}$$

Для трансверсально-изотропной среды F = G или $\tau_{rr} = \tau_{r\theta}$,

$a_{11} = a_{22} = \lambda + 2\mu,\quad n = -1,\quad a_{12} = \lambda,\quad a_{13} = a_{23},\quad a_{44} = \mu$,

$a_{55} = a_{66}$, где λ, μ коэффициенты Ламе.

$$\bar{c} = 8\mu^2(F + 2H),\quad \xi_0^4 = 2\mu^2(F + 2H),\quad \alpha = 3\left(F^2 + 2FH\right)$$

Подставляя $\bar{c}$ в (24), для σ_{rr} на теле получится

$$\sigma_{rr} = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{2}{F+2H}} + A\right)\ln 2\mu^2(F+2H) - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{F+2H}} +$$
$$+\frac{B}{2r_1^2}\left[\frac{1}{\xi_0^2} - 1\right] \tag{25}$$

Для трансверсально "изотропной" среды, где $\tau_{rr} = \tau_{r\theta}$

$$F + 2H = 2\left(\frac{1}{\tau_{sr}^2} - \frac{1}{4\tau_{ss}^2}\right),\quad \mu^2\left(\frac{1}{\tau_{sr}^2} - \frac{1}{4\tau_{ss}^2}\right) > 1$$

что выполняется для металлов, следовательно, $\sigma_{rr} \to -\infty$ [1, 3, 4]

Поэтому для сред со свойством $\tau_{rr} = 2\tau_{rs}$ глубина проникания за счет анизотропии уменьшается, что наблюдается экспериментально на опытах со слоистыми композитами [4].

Сила сопротивления прониканию имеет вид

$$P = 2\pi \int_0^R r_i \left(-\frac{\partial r_i}{\partial x} + k_1 \right) (-\sigma_{xx}) dx \qquad (26)$$

где для конуса $\nu = 1$, $r_i = \beta(f - x)$; k_1 коэффициент трения

Подставляя (25) и (26), с учетом (10), для конуса

$$P = A_1 f^2 + A_2 f^2 f'^2 + A_3 f^3 f''$$

где

$$A_1 = \beta(\beta + k_1)\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2}{F + 2H}}\left[2 + \ln 2\mu^2(F + 2H)\right]$$

$$A_2 = \beta'(\beta + k_1)\frac{\pi}{4}\rho\left[2\frac{1 - \zeta_0^2}{\xi_0^2} + \ln 2\mu^2(F + 2H)\right]$$

$$A_3 = \beta'(\beta + k_1)\frac{\pi}{6}\rho \ln 2\mu^2(F + 2H)$$

Записав уравнение движения $mf'' = -P$, m масса конуса и вводя обозначение $f'^2 = p(f)$, можно получить уравнение

$$-(m + A_3 f^3)p = 2(A_1 + A_2 p)f^2$$

Интегрируя, используя начальное условие $t = 0$, $p = v_0^2$ для f'^2, получим

$$f'^2 = -\frac{A_1}{A_2} + \left(v_0^2 + \frac{A_1}{A_2}\right)\left(1 + \frac{A_3 f^3}{m}\right)^{-\frac{2}{3}\frac{A_2}{A_3}}$$

Максимальная глубина проникания, с учетом того, что при $f = f_{max}$, $f' = 0$, дается формулой

$$f_{max}^3 = \frac{m}{A_3}\left[\left(\frac{A_1}{A_1 + A_2 v_0^2}\right)^{-\frac{3}{2}\frac{A_3}{A_2}} - 1\right]$$

Ускорение тела дается в виде

$$f'' = -\left(v_0^2 + \frac{A_1}{A_2}\right)\frac{A_2}{m}f^2\left(1 + \frac{A_3}{m}f^3\right)^{-\frac{2}{3}\frac{A_2}{A_3} - 1}$$

Ниже приведены графики $f'(k, f, \beta)$, $f''(k, f, \beta)$, $f_{max}(k, \beta)$, где $k = \tau_u / \tau_u$

Фиг. 2

1 β=0.22; 2 β=0,6, 3 β=1, 4 β=5

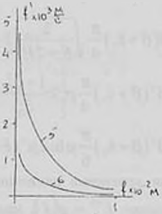
На фиг. 2 приведены зависимости $f(k)$ для разных β. Зависимость скорости проникания от координаты x при разных β и k приведена на фиг 3 и 4. Как видно из фиг 3 и 4, при $k \to 2$ имеет место сильное затухание скорости. Зависимость $f(k)$ для разных β показывает, что для $\beta > 1$ характер изменения скорости по глубине сильно отличается для случаев $\beta < 1$

Фиг. 3

K = 1,6 ÷ 1,99; для β=0,22;

для 8 β=0,6;

для 16 β=5



Фиг. 4

K = 1,6 ÷ 1,99; для β=100 ,

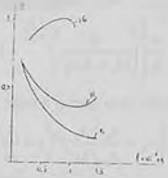
для 6 β=1000

Аналогичное явление в зависимости ускорения от координаты x имеет место для разных β Как видно из фиг 5, при $\beta \geq 1$ зависимость $f''(f)$ имеет экстремальный характер (кривая 11 ÷ 14)

Фиг. 5

K=1,6 ÷ 1,99 для β=0,22,

для 13 β=1



Фиг 6

K= 1 ÷ 1,99 для β=0.22;

для 6 β=0,6 ;

для 11 β=1 ,

для 16 β= 5

Расчеты показывают, что для тупых тел замедление проникающего тела в дюраль имеет большое значение в начальной стадии $\left(\ddot{r} - 270\cdot10^{6}\,\text{м}/\text{сек}^{2}\right.$ при $\left.\beta=5\div10\right)$. Для более тупых тел β -100, 1000, 1700 основное замедление имеет место на малых глубинах, следовательно, инерционные члены основную роль играют при поверхностном слое в начальной стадии проникания. Все данные на графиках взяты в системе СИ.

На фиг.6 приведены зависимости отношения динамических членов к статическим от глубины для разных растворов угла при вершине проникающего тела. Как видно из фиг. 6, для тонких тел (кривая 1), где β-0,2, инерционные слагаемые составляют 0,1 часть от статических членов, следовательно, квазистатический подход решения задачи проникания для тонких тел оправдывается. Для тел с конической частью β > 0,6 необходимо учитывать динамические члены. На фиг. 6 приведена также зависимость отношения динамических и статических слагаемых от анизотропии среды.

Приведенные расчеты для больших β с использованием гипотезы плоских сечений не являются точными и могут лишь качественно указать тенденцию изменения ускорений для тупых инденторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Ванцян А.А. Проникание тонкого тела в упругие анизотропные среды. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1983, т. 36, N 6, с.23-30.
2. Сагомонян А.Я. Динамика пробивания преград. М.: Изд.МГУ, 1988.
3. Багдоев А.Г., Ванцян А.А., Григорян М.С. Влияние анизотропных свойств металлических слоистых образцов на проникание. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1988, т. 41, N 6, с.28-34.
4. Багдоев А.Г., Ванцян А.А., Григорян М.С. Исследование особенности напряжений в анизотропной пластической среде при проникании конуса. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1989, т. 42, N 4, с.52-57.
5. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956.
6. Backman M.E., Goldsmit W. The mechanics of penetration of projectiles into targets. International Journal of Engineering Science. 1978, vol. 16, N 1, p. 2-99.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
4.09.1992

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ДВИЖУЩИМИСЯ ПЛОСКОСТЯМИ

Бабаджанян Г.А.

Գ.Հ.Բաբաջանյան

Մածուցիկ հեղուկի ոչ ստացիոնար շարժումը զուգահեռ շարժվող հարթությունների միջև

Հոդվածում ուսումնասիրվում է երկու զուգահեռ հարթությունների միջև գտնվող մածուցիկ անսեղմելի հեղուկի ոչ ստացիոնար շարժումը, որը պայմանավորված է հարթությունների հանգստի վիճակից նրանց հարթ զուգահեռ հաստատուն արագությամբ շարժմամբ

Որոշվում է հեղուկի արագության, շփման ուժի փոփոխման օրենքները, որպես Y և t-փոփոխականների ֆունկցիա Լուծված խնդրի արդյունքները ավելի ընդհանուր են և նրանցից կարելի է ստանալ լուծումներ տարբեր մասնավոր դեպքերի համար. ուսումնասիրությունն ունի տեսական և գործնական հետաքրքրություն

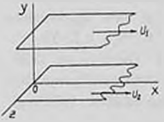
G.H.Babadjanian

Nonstationary motion of viscous liquid between parallel moving planes

Исследуется нестационарное ламинарное движение несжимаемой вязкой жидкости между двумя параллельно движущимися плоскостями. Нестационарность движения жидкости обусловлена внезапным смещением плоскостей из состояния покоя.

Найдены законы изменения скорости и силы трения на стенках и между слоями жидкости, зависящих от времени и координат

1. Рассматривается нестационарное изотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости между параллельными плоскостями, совершающими плоско-параллельное поступательное движение с заданными постоянными скоростями, из состояния покоя. При этом вязкая неподвижная жидкость, заполняющая всё пространство между плоскостями, получает мгновенное разгонное движение, обусловленное движением плоскостей. Требуется найти закономерности развивающегося со временем движение жидкости при условии, что плоскости, неограниченные по осям x и z, движутся в своих плоскостях со скоростями U_1 и U_2 вдоль оси Ox в одну сторону и расположены друг от друга на расстоянии h (фиг. 1).



Фиг 1

Принимая движение частиц жидкости прямолинейным и направленным вдоль оси Ох, пренебрегая силой тяжести, считая давление всюду постоянным, уравнения движения, начальные и граничные условия для рассматриваемой задачи запишутся в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad t = 0 \quad y > 0, \quad u = 0 \\ &\text{при} \quad t > 0 \quad y = 0, \quad u = U_2 \\ &\text{при} \quad t > 0 \quad y = h, \quad u = U_1 \end{aligned} \tag{1.2}$$

где u скорость движения частиц жидкости, ν кинематический коэффициент вязкости.

2.Задача решается методом операционного исчисления. Выполняя преобразование Лапласа над дифференциальным уравнением (1.1), начальными и граничными условиями (1.2) по переменному t, получим

$$\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} + \frac{\lambda}{\nu}\bar{u} = 0 \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} &\text{при} \;\; y = 0 \quad \bar{u} = \frac{U_2}{\lambda} \\ &\text{при} \;\; y = h \quad \bar{u} = \frac{U_1}{\lambda} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $\bar{u} = \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t} u\,dt$, а λ-параметр преобразования. Интегрируя дифферециальные уравнения (2.1), получим общее решение в виде

$$\bar{u} = C_1 e^{\beta y} + C_2 e^{-\beta y} \tag{2.3}$$

где $\beta = \sqrt{\frac{\lambda}{\nu}}$

Определяя по условиям (2.2) постоянные интегрирования C_1 и C_2, для изображения искомой функции $\bar{u}(y,\lambda)$ получим

$$\bar{u}(y,\lambda) = \frac{U_1 \mathrm{Sh}\beta y}{\lambda \mathrm{Sh}\beta h} + \frac{U_2 \mathrm{Sh}\beta(h-y)}{\lambda \mathrm{Sh}\beta h} \tag{2.4}$$

Совершая обратное преобразование Лапласа для оригинала искомой функции $u(y,t)$, будем иметь

$$u(y,t) = U_1\left[\frac{y}{h} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \mathrm{Sin}\frac{n\pi y}{h}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right)}{n}\right] +$$

$$+U_2\left[\frac{h-y}{h}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin\frac{n\pi(h-y)}{h}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right)}{n}\right] \qquad (2.5)$$

Формула (2.5) описывает закон изменения скорости течения жидкости между рассматриваемыми плоскостями. Легко убедиться, что величина $u(y,t)$, определяемая формулой (2.5), удовлетворяет начальному и граничным условиям (1.2). Действительно, $u(y,t)$ обращается в нуль при $t=0$, так как известно, что [1]

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin\frac{n\pi y}{h}}{n}=-\frac{y}{h}$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin\frac{n\pi(h-y)}{h}}{n}=-\frac{h-y}{h} \qquad (2.6)$$

Из этого следует, что ряды, стоящие в правой части (2.5), равномерно сходятся, так как каждый из его членов по модулю меньше соответствующего члена в (2.6). что касается выполнения граничных условий, то легко проверить, что из (2.5) при $y=0$ $u=U_2$ и при $y=h$ $u=U_1$. При стремлении t к бесконечности, распределение скорости становится линейным, т.е

$$\lim_{t\to\infty}u(y,t)=\frac{y}{h}(U_1-U_2)+U_2 \qquad (2.7)$$

Для силы трения из (2.5) получим

$$\tau=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\mu}{h}(U_1-U_2)+\frac{2\mu}{h}\left[U_1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{n\pi y}{h}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right)-\right.$$

$$\left.-U_2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{n\pi(h-y)}{h}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right)\right] \qquad (2.8)$$

Силы трения на нижней $(y=0)$ и верхней $(y=h)$ плоскостях будет

$$\tau_{y=0}=\frac{\mu}{h}(U_1-U_2)+\frac{2\mu}{h}\left[U_1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right)-U_2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right)\right] \qquad (2.9)$$

$$\tau_{y=h}=\frac{\mu}{h}(U_1-U_2)+\frac{2\mu}{h^2}\left[U_1\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right)-U_2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right)\right] \qquad (2.10)$$

Как видно из формул (2.9) и (2.10), для начального момента $t=0$ силы трения на подвижных стенках обращаются в бесконечность. В последую щем они будут убывать, стремясь к общему пределу

$$\tau = \frac{\mu}{h}(U_1 - U_2) \tag{2.11}$$

Такое поведение сил трения на стенках свидетельствует о наличии явления удара плоскостей по жидкости в начале движения. Полученный результат не является стандартным и будет представлять практический интерес. Отметим, что из формул (2.5) - (2.11) можно получить соответствующие результаты для частных случаев [2], [3], [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжик И.М. и Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.Л., Гостехтеориздат, 1951. 52с.
2. Тарг С.М.Основные задачи теории ламинарных течений. - М.Л. Гостехтеориздат, 1951. 101с.
3. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. - М. Гостехтеориздат, 1955. 319с.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Изд-во иностр.лит., 1956. 74с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 14.11.1994

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

ЗАДАЧА ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН В УПРУГОЙ СРЕДЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Овсепян В.В.

Վ. Վ. Հովսեփյան

Գլանային խոռոչով առաձգական միջավայրում մագնիսաառաձգական մակերևույթային ալիքների խնդիրը

Աշխատանքում ուսումնասիրվել է հաստատուն մագնիսական դաշտում գտնվող իդեալական հաղորդիչ միջավայրի, խոռոչի ուղղությամբ տարածվող, մագնիսաառաձգական մակերևույթային ալիքների գոյության հարցը

Մակերևույթային ալիքների գոյության համար դուրս է բերված բավարար պայման: Օգտագործելով Բեսելի ֆունկցիաների ասիմպտոտիկ բանաձևերը ստացվել է վերը նշված պայմանի մոտավոր տարբերակը

Աշխատանքի վերջում Պուասոնի գործակցի և մագնիսական դաշտի մի քանի տարբեր արժեքների համար զետեղված են այդ պայմանի, ինչպես նաև նրա մոտավոր տարբերակի թվային հաշվարկները

V.V. Hovsepian

The problem for the surface magnitoelastic waves in the elastic medium with the cylindrical cavity

В работе исследован вопрос существования поверхностных магнитоупругих волн для бесконечно упругого идеально проводимого пространства с цилиндрической полостью. По направлению образующей цилиндра действует постоянное магнитное поле.

Для существования поверхностных волн получено достаточное условие и его приближенный вариант. Для этих условий приведены результаты численных расчетов при различных значениях магнитного поля и коэффициента Пуассона.

Задачам о распространении поверхностных волн в пространстве с цилиндрической полостью посвящен ряд работ [1-4]. В работе [5] рассмотрено влияние магнитного поля на распространение магнитоупругих цилиндрических волн сжатия от полости. В данной работе в цилиндрической системе координат (r,φ,z) исследуется распространение поверхностной магнитоупругой волны в бесконечном, упругом, идеально проводимом пространстве с цилиндрической полостью. По направлению образующей цилиндрической полости действует постоянное магнитное поле $(0, 0, H_0)$

1. Общие граничные условия при $r = a$ возьмем в виде [6]

$$\left[\overline{H}^{(e)} - \overline{H}\right]\times \hat{n} = \frac{4\pi}{c}\overline{J}_s + \frac{v_n}{c}\left[\overline{E}^{(e)} - \overline{E}\right], \quad \left[\overline{H}^{(e)} - \overline{H}\right]\hat{n} = 0$$

$$\left[\overline{E}^{(e)} - \overline{E}\right]\hat{n} = 4\pi\rho_s, \quad \left[\overline{E}^{(e)} - \overline{E}\right]\times \hat{n} = -\frac{v_n}{c}\left[\overline{H}^{(e)} - \overline{H}\right]$$

$$-\overline{\sigma}_r\hat{n} + \left[\overline{T}_r^{(e)} - \overline{T}_r\right]\hat{n} = 0 \qquad (1.1)$$

где $v_n = \frac{\partial u_r}{\partial t}$, $\overline{J}_s$ — вектор плотности полного электрического тока, ρ_s — объемная плотность электрического заряда, c — электродинамическая постоянная, численно равная скорости света в пустоте ($c = 3\cdot 10^{10}$ см/сек); $\overline{\sigma}_r = \sigma_{rr}\hat{i}_r + \sigma_{r\varphi}\hat{i}_\varphi + \sigma_{rz}\hat{i}_z$; $\overline{T}_r^* = \overline{T}_{rr}^*\hat{i}_r + \overline{T}_{r\varphi}^*\hat{i}_\varphi + \overline{T}_{rz}^*\hat{i}_z$ (под T^* понимается как T, так и $T^{(e)}$), $\overline{H}, \overline{H}^{(e)}$ и $\overline{E}, \overline{E}^{(e)}$ — векторы напряженности соответственно магнитного и электрического полей.

Уравнения Максвелла следующие

$$r < a, \quad \mathrm{rot}\,\overline{H}^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{E}^{(e)}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\,\overline{H}^{(e)} = 0, \quad \mathrm{rot}\,\overline{E}^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{H}^{(e)}}{\partial t},$$

$$\mathrm{div}\,\overline{E}^{(e)} = 0. \qquad (1.2)$$

Учитывая

$\overline{H} = \overline{H}\left(h_r, h_\varphi, H_0 + h_z\right)$, $\overline{H}^{(e)} = \overline{H}^{(e)}\left(h_r^{(e)}, h_\varphi^{(e)}, H_0^{(e)} + h_z^{(e)}\right)$, $H_0 = H_0^{(e)}$, $\overline{E} = \overline{E}\left(e_r, e_\varphi, e_z\right)$, $\overline{E}^{(e)} = \overline{E}^{(e)}\left(e_r^{(e)}, e_\varphi^{(e)}, e_z^{(e)}\right)$, после линеаризации тензора Максвелла получим граничные условия в виде

$$h_z^{(e)} - h_z = 4\pi c^{-1}J_\varphi, \quad h_\varphi^{(e)} - h_\varphi = 4\pi c^{-1}J_z, \quad J_z = 0$$

$$e_r^{(e)} - e_r = 4\pi\rho_s, \quad h_r^{(e)} = h_r, \quad e_z^{(e)} = e_z, \quad e_\varphi^{(e)} = e_\varphi \qquad (1.3)$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{H_0}{4\pi}\left(h_z^{(e)} - h_z\right), \quad \sigma_{zr} = \frac{H_0}{4\pi}\left(h_r^{(e)} - h_r\right), \quad \sigma_{\varphi r} = 0$$

Для идеального проводника

$$h_r = H_0\frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad h_\varphi = H_0\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad h_z = -H_0\left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi}{r\partial\varphi}\right) \qquad (1.4)$$

$$e_r = -\frac{H_0}{c}\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}, \quad e_\varphi = \frac{H_0}{c}\frac{\partial u_r}{\partial t}, \quad e_z = 0 \qquad (1.5)$$

2. Рассмотрим задачу в плоскости (r, z). Компоненты перемещений u_r, u_z $(u_\varphi = 0)$ и компоненты возмущенного электромагнитного поля не зависят от координаты φ. Рассматриваются установившиеся колебания.

Для этого случая из уравнения Максвелла имеем

$$r < a \quad \nabla^2 h_z^{(e)} = -\frac{\omega^2}{c^2} h_z^{(e)}, \quad \frac{\partial e_\varphi^{(e)}}{\partial z} + \frac{e_\varphi^{(e)}}{r} = \frac{i\omega}{c} h_z^{(e)} \tag{2.1}$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Уравнения движения с учетом пондеромоторной силы будут

$$c_l^2\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2}\right) + c_t^2\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \left(c_l^2 - c_t^2\right)\frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} +$$

$$+\frac{H_0}{4\pi\rho}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2}\right) = -\omega^2 u_r \tag{2.2}$$

$$c_t^2\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + c_l^2\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \left(c_l^2 - c_t^2\right)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}\right) = -\omega^2 u_z$$

Постановка задачи следующая : решаются уравнения движения (2.2), уравнения Максвелла (2.1) с граничными условиями (1.3).

Применяя интегральное преобразование Фурье по z соответственно к уравнениям движения (2.2), к уравнениям (2.1) и к граничным условиям (1.3), получим

$$\left(c_l^2 + \frac{H_0^2}{4\pi\rho}\right)\left(\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_1}{dr} - \frac{u_1}{r^2}\right) + \left[\left(c_t^2 + \frac{H_0^2}{4\pi\rho}\right)\alpha^2 - \omega^2\right]u_1 -$$

$$-i\alpha\left(c_l^2 - c_t^2\right)\frac{du_3}{dt} = 0 \tag{2.3}$$

$$c_t^2\left(\frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_3}{dr}\right) - \left(\alpha^2 c_l^2 - \omega^2\right)u_3 - i\alpha\left(c_l^2 - c_t^2\right)\left(\frac{du_1}{dr} + \frac{u_1}{r}\right) = 0$$

$$\frac{d^2 h_3^{(e)}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dh_3^{(e)}}{dr} - \alpha^2 h_3^{(e)} = -\frac{\omega^2}{c^2}h_3^{(e)}, \quad \frac{de_2^{(e)}}{dr^2} + \frac{e_2^{(e)}}{r} = \frac{i\omega}{c}h_3^{(e)} \tag{2.4}$$

$$c_l^2\frac{du_1}{dr} - i\alpha\left(c_l^2 - 2c_t^2\right)u_3 + \frac{1}{a}\left(c_l^2 - 2c_t^2\right)u_1 + \frac{H_0^2}{4\pi\rho}\left(\frac{du_1}{dr} + \frac{u_1}{r}\right) = -\frac{H_0}{4\pi\rho}h_3^{(e)}$$

$$\frac{du_3}{dr} - i\alpha u_1 = 0, \quad e_2^{(e)} = \frac{H_0 i\omega}{c}u_1 \tag{2.5}$$

где α – параметр интегрирования (или волновое число по образующей цилиндрической полости), c_l и c_t – скорости распространения соответственно продольной и поперечной волны, $u_1, u_1, h_1^{(e)}$ и $e_2^{(e)}$ интегральные преобразования Фурье соответственно функций $u_r, u_z, h_z^{(e)}$ и $e_\varphi^{(e)}$; ρ плотность материала

Решения уравнений (2.3) и (2.4) имеют вид

$$u_1 = A_1 K_1(\lambda_1 r) + A_2 K_1(\lambda_2 r), \quad u_1 = B_1 K_0(\lambda_1 r) + B_2 K_0(\lambda_2 r) \tag{2.6}$$

$$h_1^{(e)} = D_0^{(e)} I_0(v_1 r), \quad e_2^{(e)} = -\frac{i\omega}{c v_1} D_0^{(e)} I_1(v_1 r) \tag{2.7}$$

где $I_n(x)$ и $K_n(x)$ $(n = 0,1)$ модифицированные функции Бесселя, A_n и B_n искомые постоянные

$$A_n = \varphi_n B_n, \quad \varphi_n = -\left(\lambda_n^2 c_l^2 + \omega^2 - \alpha^2 c_l^2\right)\left[i\alpha\lambda_n\left(c_l^2 - c_t^2\right)\right]^{-1} \tag{2.8}$$

λ_n являются корнями характеристического уравнения

$$\begin{gathered}(1+\theta\chi)\lambda^4 + \left[\eta(\theta\chi + \theta + 1) - \chi(1+\theta) - 2\right]\lambda^2 + \\ + (1 + \chi - \eta)(1 - \theta\eta) = 0\end{gathered} \tag{2.9}$$

где $\theta = c_t^2 / c_l^2$, $\eta = \omega^2 (\alpha c_t)^{-2}$, $\chi = H_0^2 / 4\pi\rho c_t^2$, $\lambda_n = \lambda_n / \alpha$.

Подставляя (2.6) и (2.7) в граничные условия (2.5), получим следующее дисперсионное уравнение

$$\begin{gathered}R(\eta) \equiv \left[\lambda_1^2(1-2\theta) - \theta\eta + 1\right]\left[(1-2\theta)(1-\theta) + \theta(1+\theta\chi)\lambda_2^2 + \right. \\ \left. + (\theta\eta - 1)(1+\theta\chi)\right]\lambda_2 \frac{K_0(\lambda_2 \alpha a)}{K_1(\lambda_2 \alpha a)} - \left[\lambda_2^2(1-2\theta) - \theta\eta + 1\right]\times \\ \times\left[(1-2\theta)(1-\theta) + \theta(1+\theta\chi)\lambda_1^2 + (\theta\eta - 1)(1+\theta\chi)\right]\lambda_1 \times \\ \times \frac{K_0(\lambda_1 \alpha a)}{K_1(\lambda_1 \alpha a)} - \theta(\theta\eta - 1)\left[\frac{2}{\alpha a} + v_1 \chi \frac{I_0(v_1 \alpha a)}{I_1(v_1 \alpha a)}\right](\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(1-\theta) = 0\end{gathered} \tag{2.10}$$

где $v_1 = \left(1 - \omega^2 / \alpha^2 c^2\right)^{1/2}$

Отметим, что для предельных случаев $\chi = 0$ и $\alpha a \to \infty$ из уравнений (2.10) получим дисперсионные уравнения, приведенные в работах [1] и [7].

Исследуем дисперсионное уравнение (2.10) в интервале $0 < \eta < 1 + \chi$. При $\eta = 0$ $\lambda_2^2 = 1$, $\lambda_1^2 = \dfrac{1+\chi}{1+\theta\chi}$ и

$$R(0) = -\theta(1-\theta)^2\left\{-4\lambda_1\frac{K_0(\lambda_1\alpha a)}{K_1(\lambda_1\alpha a)} + \frac{(2+\chi)^2}{1+\theta\chi}\frac{K_0(\alpha a)}{K_1(\alpha a)} + \frac{\chi}{1+\theta\chi}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{2}{\alpha a} + \nu_1\chi\frac{I_0(\nu_1\alpha a)}{I_1(\nu_1\alpha a)}\right]\right\} < 0.$$

При $\eta = 1+\chi$ $\lambda_2^2 = 0$, $\lambda_1^2 = (1-\theta\chi-\theta-\theta\chi^2)(1+\theta\chi)^{-1}$.

Для существования хотя бы одного решения в интервале $0<\eta<1+\chi$, достаточно потребовать $R(1+\chi)>0$, то есть

$$\frac{K_0\left(\alpha a\sqrt{(1-\theta\chi-\theta-\theta\chi^2)/1+\theta\chi}\right)}{K_1\left(\alpha a\sqrt{(1-\theta\chi-\theta-\theta\chi^2)/1+\theta\chi}\right)} > \frac{2}{\alpha a}\sqrt{(1-\theta\chi-\theta-\theta\chi^2)/1+\theta\chi} \qquad (2.11)$$

При $\chi = 0$ из условия (2.11) получим необходимое и достаточное условие для существования поверхностной волны без учета магнитного поля, приведенное в работе [1].

Если для больших аргументов в разложениях бесселевых функций сохранить только два слагаемых, то из условия (2.11) получим

$$8\sqrt{1-\theta\chi-\theta-\theta\chi^2}(\alpha a)^2 - \frac{1}{\sqrt{1+\theta\chi}}(17-16\theta-15\theta\chi-16\theta\chi^2)\alpha a - \qquad (2.12)$$

$$-6\sqrt{1-\theta\chi-\theta-\theta\chi^2} > 0$$

3 Некоторые результаты численных расчетов условия (2.11), (2.12) и работы [1] при различных значениях $\theta = (1-2\nu)[2(1-\nu)]^{-1}$ и χ приведены в табл. 1 соответственно в столбцах I, II и III. Здесь λ длина волны, D диаметр цилиндра.

Таблица 1

ν	$\lambda\theta^{-1} = \pi(\alpha a)^{-1}$					
			I	II		III
	$\chi = 10^{-5}$	$\chi = 0{,}05$	$\chi = 0{,}08$	$\chi = 0{,}1$	$\chi = 0{,}05$	
0,5	1,88085	1,86336	1,8611	1,86051	1,79473	1,88359
0,3	1,80385	1,77336	1,76151	1,7565	1,74445	1,80721
0	1,6626	1,61231	1,58634	1,57084	1,62548	1,66828
0,3	1,47025	1,39671	1,35531	1,32878	1,45033	1,48358
0,5	1,26903	1,15105	1,04744	1,03761	1,29118	1,31628

Для фиксированного значения ν и χ, если $\alpha a > \pi D\lambda^{-1}$, существует поверхностная волна, скорость которой дается решением уравнения

(2.10) в промежутке $0 < \eta < 1 + \chi$. Отметим, что в случае задачи с учетом магнитного поля поверхностная волна возникает при больших значениях параметра αa, чем при аналогичной задаче без учета магнитного поля. Отметим также, что с увеличением значения напряженности магнитного поля увеличивается величина параметра αa.

Автор выражает благодарность Белубекяну М. В., а также участникам семинара "Волновые процессы" Института механики НАН Армении за ценные советы при обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М. В., Овсепян В. В. Об условии существования поверхностной волны для упругого пространства с цилиндрической полостью. — Докл. АН Армении, 1990, т. 91, N 4, с. 169-172.
2. Миндлин Я. А. Распространение волн по поверхности бесконечно длинного цилиндра, представляющего собой вырез в бесконечно упругом пространстве. — ДАН СССР, 1944, т. 42, N 4, с. 155-159.
3. Викторов И. А. Волны типа рэлеевских на цилиндрических поверхностях. — Акуст. ж., 1958, т. IУ, вып. 2, с. 131-136.
4. Biot M. A. Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Bare Contaning a Fluid. — J. App. ph. 1952, vol. 23, N 9, p. 997-1005.
5. Селезов И. Т., Селезова Л. В. Волны в магнитоупругих средах. — Киев: Наукова думка, 1975. 164 с.
6. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. Колебания и устойчивость токонесущих упругих пластин. — Ереван: Изд. АН Армении, 1992. 124 с.
7. Kaliski S., Rogula D. Rayleigh waves in a magnetic fields in the case of a perfect contuctor. — Proc. Vibr. Probl., Pol Acad. Eci., 1960, 1, N 5, p. 63-80.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
12.09.1994

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

ВОЛНЫ, ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВДОЛЬ КРОМКИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ

Самвелян Л. А.

Լ. Ա. Սամվելյան

Նախապես լարված բարակ սալի եզրով տեղայնացված ալիքներ

Դիտարկվում է կիսաանվերջ սալ, որը ձգված է անվերջությունում կիրառված ռավասա-բաշխված ուժով: Ուսումնասիրվում է այդ սալի ազատ եզրով տեղայնացված ալիքների տարածումը: Ցույց է տրված, որ հնարավոր են երկու տեսակի ալիքների տարածում, ինչպես Ռելեի տիպի, այնպես էլ մաքուր ծռման: Ստացված են նշված ալիքների գոյության պայմանները

L A Sumvelan

The waves which are localized along initialy stressed thin plate edge

Известно, что вдоль торца полубесконечной тонкой пластинки могут распространяться упругие поверхностные волны как типа Релея, так и чисто изгибные [1,2]. В настоящей работе исследуется влияние предварительного однородного растяжения (сжатия) на скорости поверхностных волн.

1. Пусть пластинка занимает область $-\infty < x < \infty$, $0 \le y < \infty$, $-h \le z \le h$. Пластина предварительно растянута (сжата) по направлению оси ox, так что начальное состояние пластинки определяется однородным напряженным состоянием, для которого $\sigma_{11}^0 = \sigma_0 = \text{const}$ ($\sigma_0 > 0$ при растяжении, $\sigma_0 < 0$ при сжатии), а остальные компоненты тензора напряжений тождественно равны нулю.

В отношении тонкой пластинки принимается гипотеза Кирхгофа, согласно которой задача обобщенного плоского напряженного состояния отделяется от задачи изгиба пластинки. При этом уравнения колебаний обобщенного плоского напряженного состояния пластинки относительно перемещений u, v срединной поверхности пластинки имеют вид

$$\Delta u + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Delta v + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа, ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига, ρ – плотность материала пластинки.

Изгибные колебания пластинки описываются следующим уравнением

$$D\Delta^2 w - 2h\sigma_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \tag{1.2}$$

При помощи преобразования

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{1.3}$$

система уравнений (1.1) приводится к раздельным уравнениям относительно φ и ψ

$$c_1^2\Delta\varphi \pm c_0^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad c_2^2\Delta\psi \pm c_0^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

$$c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho}, \quad c_0^2 = \frac{|\sigma_0|}{\rho}$$

Решения уравнений (1.4), удовлетворяющие условиям затухания амплитуды волны при $y \to \infty$, имеют вид

$$\varphi = Ae^{-k\nu_1 y}\exp i(\omega t - kx), \quad \psi = Be^{-k\nu_2 y}e^{i(\omega t - kx)} \tag{1.5}$$

где

$$\nu_1^2 = 1 + \theta(\theta_1 - \eta), \quad \nu_2^2 = 1 + \theta_1 - \eta, \quad k > 0,$$

$$\theta = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1-\nu}{2}, \quad \theta_1 = \pm\frac{c_0^2}{c_2^2}, \quad \eta = \frac{\omega^2}{k^2 c_2^2}, \quad \theta < 1, \quad |\theta_1| < 1 \tag{1.6}$$

Из условия $\nu_1^2 > 0$, $\nu_2^2 > 0$ следует, что искомый параметр η, характеризующий скорость поверхностной волны, должен удовлетворять условию

$$0 < \eta < 1 + \theta_1 \tag{1.7}$$

В случае, когда при $y = 0$ удовлетворяются условия свободного края пластинки, характеристическое уравнение, определяющее скорость локализованной волны, имеет вид

$$R(\eta) \equiv \left[2 + (\theta_1 - \eta)\right]^2 - 4\sqrt{1 + \theta(\theta_1 - \eta)}\,\sqrt{1 + (\theta_1 - \eta)} = 0 \tag{1.8}$$

Очевидно, что уравнение (1.8) заменой $\eta_1 = \eta - \theta_1$ приводится к уравнению Рэлея. Отсюда следует, что при $\theta_1 < 0$ уравнение (1.8) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию (1.7). При

$\theta_1 > 0$ уравнение (1.8) имеет два решения $\eta = \theta_1$ и $\eta = \eta_R$. Легко показать, что решение $\eta = \theta_1$ тривиальное решение $(u = v = 0)$. В частности, если $\theta = 1/3$ $(\nu = 1/3)$, скорость поверхностной волны определяется следующим образом

$$\eta = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} + \theta_1$$

Легко показать, что в случаях граничных условии закрепления края пластинки, либо условий закрепления края, либо условий Навье, локализованная волна вдоль края пластинки не может существовать.

2. Рассмотрим изгибные волны, локализованные вдоль края y = 0 пластинки. Имея в виду требования затухания, решение уравнения (1.2) представляется в виде

$$w = \left(Ae^{-k\alpha_1 y} + Be^{-k\alpha_2 y}\right)\exp i(\omega t - kx) \tag{2.1}$$

где

$$\alpha_1^2 = 1 + \sqrt{\xi^2 - \gamma}, \quad \alpha_2^2 = 1 - \sqrt{\xi^2 - \gamma}$$
$$\xi^2 = \frac{2\rho h\omega^2}{Dk^4}, \quad \gamma = \frac{2h\sigma_0}{Dk^2} \tag{2.2}$$

Для того, что решение (2.1) было затухающим при $y \to \infty$, необходимо выполнение условия

$$0 \le \xi^2 < 1 + \gamma \tag{2.3}$$

Отсюда, очевидно, что на параметр γ следует наложить ограничение $\gamma > -1$, т.к при $\gamma \le -1$ (при сжатии) соответствующая форма волны будет неустойчивой

Граничные условия для свободного края пластинки y = 0 (равенство нулю изгибающего момента и обобщенной перерезывающей силы) имеет вид [3]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] = 0 \tag{2.4}$$

Подставляя решение (2.1) в (2.4), получим систему линейных однородных уравнений относительно произвольных постоянных A, B Приравняв детерминант указанной системы уравнений нулю, после некоторых преобразований получим дисперсионное уравнение, определяющее скорость поверхностной изгибной волны

$$K_1(\eta) \equiv \alpha_1^2\alpha_2^2 + 2(1-\nu)\alpha_1\alpha_2 - \nu^2 = 0 \tag{2.5}$$

Аналогичного вида дисперсионное уравнение получено также в [4]. Определение скорости поверхностной волны фактически приводится к исследованию корней квадратного уравнения (2.5) относительно $\alpha_1\alpha_2$. Отсюда легко получить, что при $\gamma \geq 0$ (растяжении) уравнение (2.5) всегда имеет решение, удовлетворяющее условию затухания (2.3). При этом соответствующий корень находится в промежутке $(\gamma, 1+\gamma)$, откуда следует, что выражения (2.2) для α_1 и α_2 действительны. Следовательно, амплитуда волны (2.1) затухает по глубине без колебаний. В случае $-1 < \gamma < 0$ (сжатие), изгибная поверхностная волна существует не для всех γ. Условие существования определяется следующим образом

$$\gamma > -2 + \nu + \sqrt{(1-\nu)^2 + \nu^2} \qquad (2.6)$$

Например, при $\nu = 0$ должно выполняться условие $\gamma > -1$, что совпадает с ограничением на устойчивость, при $\nu = \frac{1}{3}$ и $\nu = \frac{1}{2}$ соответственно, $\gamma > -0{,}92$ и $\gamma > -0{,}8$

Можно показать, что при других классических граничных условиях на краю $y = 0$ поверхностная волна не существует.

3 Пусть полубесконечная пластинка занимает область $0 \leq x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-h \leq z \leq h$. Рассмотрим волны, локализованные вдоль края $X = 0$, где приложена предварительно растягивающая (сжимающая) нагрузка. Решение уравнения (1.2), с учетом требования затухания амплитуды волны, при $x \to \infty$ имеет вид

$$w = \left(Ae^{-k\beta_1 x} + Be^{-k\beta_2 x}\right)\exp i(\omega t - ky) \qquad (3.1)$$

где

$$\beta_{1,2} = 1 + \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\xi^2 + \gamma + \frac{\gamma^2}{4}} \qquad (3.2)$$

Условие затухания решения (3.1) при $x \to 0$ имеет вид

$$0 < \xi^2 < 1 \qquad (3.3)$$

На краю $x = 0$ принимаются условия равенства нулю изгибающего момента и обобщенной перерезывающей силы. Эти условия записываются следующим образом :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{2h\sigma_*}{D}w\right]=0 \tag{3.4}$$

где $\sigma_* = \sigma_0$ в случае консервативной нагрузки на краю $x = 0$,
$\sigma_* = 0$ в случае следующей нагрузки.

Требование, чтобы решение (3.1) удовлетворяло граничным условиям (3.4), приводит к следующему дисперсионному уравнению :

$$K(\xi)=\beta_1^2\beta_2^2+\left[2(1-\nu)+\gamma_*\right]\beta_1\beta_2-\nu\left(\nu+\gamma-\gamma_*\right)=0 \tag{3.5}$$

здесь $\gamma_* = \gamma$ для консервативной, $\gamma_* = 0$ для следующей нагрузки

Исследование уравнения (3.5) при условии (3.3) показывает, что изгибная поверхностная волна всегда существует (с учетом $\gamma > -1$) в случае консервативной нагрузки ($\gamma_* = \gamma$). В случае же следующей нагрузки, необходимое и достаточное условие существования поверхностной волны получается в виде

$$-\nu<\gamma<\frac{(3+\nu)(1-\nu)}{\nu} \tag{3.6}$$

Следует отметить, что в случае растяжения $(\gamma > 0)$, при проверке выполнения правой части неравенства (3.6), необходимо также сравнение с условием прочности

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 336 с.
2. Коненков Ю. К. Об изгибной волне "рэлеевского" типа. Акуст. ж., 1960, т. 6 в. 1, с. 124-126
3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин (Прочность, устойчивость и колебания). М.: Наука, 1987. 360 с.
4. Белубекян В. М., Белубекян М. В. Об изгибной волне, локализованной вдоль кромки токонесущей пластинки. В сб.: Инженерно-физические проблемы новой техники. Изд. МГТУ, 1992. с.58-59.