ИИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL

UЪԽUЪРЧИ EXAHИKA MECHANICS

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՉԳԱՅԻՆ ԱԿԱԳԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАШИОНАЛЬНОЙ АКАЛЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխոսնիկա

49, N 3, 1996

Механика

ON DETERMINATION OF ELASTIC CHARACTERISTICS AND INITIAL STRESSES IN PLATE AND MEMBRANE (INVERSE PROBLEM)

Ambartsumian S.A., Belubekian M.V., Movsisian L.A.

Ս.Ա.Համրարձումյան , Մ.Վ.Բծլուրնկյան, Լ.Ա.Մովսիսյան

Սալերում և մեմբրաններում առաձգական բնութագրիչների և նախնական լարումների որոշման վերաբերյալ (հակադարձ խնդիր)

Uշխատանքում փործ է արվում, օգտագործելով էկսպերիծենտալ արդյունքները, մշակել ուացիոնալ միջոց սալերի և մեմբրանների առածգական բնութագրիչների և նախնական լսպումների որոշման իամար.

Որոնվող մեծուքյունների որոշման համար առաջարկվում է երկու տարբերակ Առաջին տարբերակ՝ մակերևույրի վրա կիրարված ստատիկ բեռնավորված սալի դեֆորսացված մակնրևույքի անալիզի միջոցով՝ Երկրորդ տարբերակ՝ սալի ազատ տարանման հաճախությունների անալիզի միջոցով

С.А.Амбарцумян, М.В.Белубекян, Л.А.Мовсисян

К определению упругих характеристик и начальных напряжений в пластинках и мембранах (обратная задача)

В работе делается понытка разработать рациональные способы определения коэффициентов упругости и начальных напряжений и неоднородных иластниках и мембранах с использованием результатов, полученных на экспериментов

Предлагается два нарианта определения искомых величии. Первый нариант-иутем анализа деформированной новерхности пластники под действием статически приложенных поверхностных изгрузок. Второй вариант-путем анализа частот своболных колебаний пластники.

In the work an attempt is done to construct a rational method for determination of the elastic coefficients and initial stresses in nonhomogeneous plates and membranes by use of experimental results.

Two variants of unknown values determination are suggested. The first variant is the analysis of the plate deflection under action of the surface static forces. The second variant is the analysis of frequencies of the plate free vibration. It is clear, that the combination of two variants for determination of all unknown parameters may be used too.

1.Equations of motion of the considered plate with a constant thickness h, in the cartesian system of coordinates have the form [1].

$$\frac{\partial N_{i}}{\partial x} + \frac{\partial T_{ii}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T_{ii}}{\partial x} + \frac{\partial N_{i}}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2 M_{\perp}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \left(N_{\perp} + N_{\perp}^n\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(N_{\perp} + N_{\perp}^n\right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\left(T_{\perp} + T_{\perp}^n\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q(x, y, t) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Here, in contrast to the problem classical statement, the unknown initial planar tensions $N_{x}^{0}(x, y), N_{x}^{0}(x, y), T_{xx}^{0}(x, y)$ are included also. In (1.1) we have the known presentations of the plates bending classical nonlinear theory for the moments and tensions

$$N_{\eta} = \frac{Eh}{1 - v^2} (\varepsilon_1 + v\varepsilon_2), \quad N_{\eta} = \frac{Eh}{1 - v^2} (\varepsilon_2 + v\varepsilon_1), \quad T_{\eta} = \frac{Eh}{2(1 + v)} \gamma$$
(1.2)

$$M_{1} = D(\chi_{1} + v\chi_{2}), \quad M_{y} = D(\chi_{2} + v\chi_{1}), \quad H = D(1 - v)\chi_{12}$$
(1.3)

$$\varepsilon_{1} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^{2}, \quad \varepsilon_{2} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^{2}, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\chi_{1} = -\frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}}, \quad \chi_{2} = -\frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}}, \quad \chi_{12} = -\frac{\partial^{2} w}{\partial x \partial y}, \quad D = \frac{Eh^{3}}{12(1-v^{2})}$$
(1.4)

In above mentioned in general case it is assumed that unknown values E. Young's module v-Poisson's ratio, ρ , plate material density and also initial tensions N^v , N^v , T_i^u are functions of coordinates x and y.

2 Equations of the plate static bending can be represented as follows, if unknown values are homogeneous [2]

$$D\Delta^2 w = L(w, \Phi) + T_v^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_v^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2T_w^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q(x, y)$$

$$\Delta^2 \Phi = -\frac{Eh}{2} L(w, w), L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (2.1)$$

where W is the plate deflection, Φ is the stress function and planar tensions are represented by Φ as follows

$$T_{v} = \frac{\partial^{2} \Phi}{\partial y^{2}} , T_{v} = \frac{\partial^{2} \Phi}{\partial x^{2}} , T_{w} = -\frac{\partial^{2} \Phi}{\partial x \partial y}$$
(2.2)

Let us consider a rectangular plate with the following boundary conditions $u = v = w = 0, M_y = 0$ when x = 0, a $u = v = w = 0, M_z = 0$ when x = 0, b

The plate deflection is presented in the form

$$W = \sum_{m=0}^{\infty} f_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{b}$$
(2.4)

(2.3)

Then for nonlinear operator L(w, w) is received [3]

$$L(w,w) = \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{nm}^{(1)} \cos \lambda_m x \cos \mu_n y + \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{nn}^{(2)} \cos \lambda_m x + \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{nn}^{(1)} \cos \mu_n y,$$

where for coefficients $C_{--}^{(k)}$ we have

Bart

As in brought formulas as also in below, it is necessary to account that members with zero or negative indexes are equal to zero.

Tiel .

In this case the particular solution of the second equation of (2, 1) has the form

$$\Phi = \sum_{m,n=1}^{\infty} \Phi_n^{(1)} \cos \lambda_m x \cos \mu_n y + \sum_{m,n=1}^{\infty} \Phi_{mn}^{(2)} \cos \lambda_m x + \sum_{m,n=1}^{\infty} \Phi_{mn}^{(1)} \cos \mu_n y$$

$$\Phi^{(1)} = -\frac{Eh}{2(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2} C_{mn}^{(1)}, \quad \Phi^{(2)} = \frac{Eh}{2\lambda_m^4} C_{mn}^{(2)}, \quad \Phi^{(3)} = -\frac{Eh}{2\mu_n^4} C_{mn}^{(3)}$$
(2.5)

The solution of the homogeneous part of equations (2.1) is presented in the form

$$\Phi^{0} = \frac{P_{x}y^{2}}{2} + \frac{P_{x}x^{2}}{2} - 2P_{x}xy$$
(2.6)

Assuming that planar tensions are constant and satisfying the boundary conditions (2. 3), we receive

$$N_{v} = P_{v} = \frac{Eh}{8(1-v^{2})} \sum_{p,q=1}^{\infty} \left(\lambda_{p}^{2} + v\mu_{q}^{2}\right) f_{pq}^{2}$$

$$N_{v} = P_{v} = \frac{Eh}{8(1-v^{2})} \sum_{p,q=1}^{\infty} \left(v\lambda_{p}^{2} + \mu_{q}^{2}\right) f_{pq}^{2}, T_{vv} = P_{vv} = 0$$
(2.7)

Then the expression for stress function (1) will be

$$\Phi = \frac{P_{,v}^{2}}{2} + \frac{P_{,x}^{2}}{2} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \left[\Phi_{nm}^{(1)} \cos \lambda_{m} x \cos \mu_{n} y + \Phi_{nm}^{2} \cos \lambda_{m} x + \Phi_{nm}^{(3)} \cos \mu_{n} y \right]$$
(2.8)

On the basis of (2, 4) and (2, 8) the nonlinear operator $L(w, \Phi)$ will take the following form

$$L(w,\Phi) = \sum_{n_{i},n=1}^{\infty} F_{n_{i}n} \sin \lambda_{n_{i}} x \sin \mu_{n_{i}} y$$
(2.9)

where

$$\begin{split} F_{n,n} &= \sum_{\alpha=m+1}^{n} F_{\alpha=m}^{(1)} - \sum_{\alpha=m+1}^{n} F_{\alpha=m}^{(1)} + \sum_{\alpha=m+1,\beta=n}^{m-1} F_{\alpha=m}^{(1)} + \sum_{\alpha=1,\beta=n+1}^{n} F_{\alpha=m,\beta=n}^{(1)} + \sum_{\alpha=\beta=1}^{m-1} F_{\alpha=m,\beta=n}^{(1)} + \sum_{\alpha=\beta=1}^{m-1} F_{\alpha=m,\beta=n}^{(1)} + \sum_{\alpha=\beta=1}^{m-1} F_{\alpha=m,n}^{(1)} - \sum_{\alpha=\beta=1}^{m-1} F_{\alpha=m,n}^{(1)} + \sum_{\alpha=\beta=1}^{m-1} F_{\alpha=m,n}^{(1)} - \sum_{\alpha=1}^{m} F_{\alpha=m,n}^{(1)} - \sum_{\alpha=1}^{m-1} F_{\alpha=m,n}^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^{m-1} F_{\alpha=m,n}^{(1)} - \sum_{\alpha=1}^{m} F_{\alpha=m,n}^{(1)} - \sum_{\alpha=1}^{m-1} F_{\alpha=m,n}^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^{m-1} F_{\alpha=$$

$$= \left[- \left(N_{v}^{0} \lambda_{u}^{2} + N_{v}^{0} \mu_{u}^{2} \right) f_{uv} + T_{m}^{0} \sum_{p,q=1}^{0} a_{uquy} f_{pu} \right] \sin \lambda_{u} x \sin \mu_{u} y$$
(2.10)

$$a_{max} = \frac{32}{ab} \frac{\lambda_m \lambda_p \mu_n \mu_q}{\left(\lambda_m^2 - \lambda_p^2\right) \left(\mu_n^2 - \mu_q^2\right)}, \quad \begin{array}{l} m \neq p, m+p\\ n \neq q, n+q \end{array} = 2k+1$$

At last, in accordance with (2, 1), (2, 4), (2, 9) and (2, 10) for unknown $f_{\rm sub}$ we shall receive

$$D(\lambda_{u}^{2} + \mu_{u}^{2})^{2} f_{mn} = F_{mn} - (N_{v}^{0} \lambda_{u}^{2} + N_{v}^{0} \mu_{u}^{2}) f_{mn} + T_{v}^{0} \sum_{p,q} a_{mpnq} f_{pq} + q_{mn} \quad (2.11)$$

where $q_{\rm max}$ are coefficients of sine decay of function q(x, y)

It is necessary to have five values of plate deflection in five points for determining unknown $E, E/(1-v^2), N^0, N^0, T^0$. Then we must determine five f_{num} coefficients from (24). At last we must take five $q_{\rm nu}$ coefficients from the function q(x, y) decay and we shall determine unknown values from five equations of system (2.11).

It is necessary to point, that as here as also later on, some of unknown values can be determined from one-dimensional problem.

3. The linear equation of plate free vibrations will be

$$D\Delta^2 w = N_x^o \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_x^o \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2T_x^o \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$
(3.1)

For simply-supported plate the frequensis are determined from following equations

$$\left[D\left(\lambda_{m}^{2}+\mu_{n}^{2}\right)^{2}+N_{v}^{0}\lambda_{m}^{2}+N_{v}^{0}\mu_{n}^{2}-\rho\hbar\omega^{2}\right]f_{m}-T_{m}^{0}\sum_{p,n}a_{mm}f_{pq}=0$$
(3.2)

If we know four frequencies [4], we must take four equations from (3.2). From the condition that the determinant is equal zero we receive the following system of four equations for determination of N_s^0 , N_s^0 , T_{co}^0 and $D(orE \ell (1 - v^2))$

$$\left(\frac{4\pi^2 D}{a^2} + N_i^0 + N_i^0 - \frac{a^2 \rho h}{\pi^2} \omega_{11}^2 \right) \left(\frac{64\pi^2 D}{a^2} - 4N_i^0 - N_i^0 - \frac{a^2 \rho h}{\pi^2} \omega_{11}^2 \right) = \frac{2^{12}}{3^4} (T_{i1}^0)^2$$

$$\left(\frac{4\pi^2 D}{a^2} + N_i^0 + N_i^0 - \frac{a^2 \rho h}{\pi^2} \omega_{22}^2 \right) \left(\frac{64\pi^2 D}{a^2} - 4N_i^0 - N_i^0 - \frac{a^2 \rho h}{\pi^2} \omega_{22}^2 \right) = \frac{2^{12}}{3^4} (T_{i1}^0)^2$$

$$\left(\frac{25\pi^2 D}{a^2} + N_i^0 + 4N_i^0 - \frac{a^2 \rho h}{\pi^2} \omega_{12}^2 \right)^2 = \frac{2^{12}}{3^4} (T_{i1}^0)^2$$

$$\left(\frac{25\pi^2 D}{a^2} + N_i^0 + 4N_i^0 - \frac{a^2 \rho h}{\pi^2} \omega_{21}^2 \right)^2 = \frac{2^{12}}{3^4} (T_{i1}^0)^2$$

$$(3.3)$$

Let us consider an example for illustration. A square plate $(a \times a)$ with thickness *h* and constant material density ρ is considered. It is known, that $N^0 = N^0 = 0$ and plate frequencies ω_{11}, ω_{22} are found from an experiment. The bending stiffness D and initial shear tension T_{α}^0 are determined

$$D = \frac{a^4}{68\pi^4} \rho h \left(\omega_{11}^2 + \omega_{22}^2 \right)$$

$$2 \left(T_{\alpha}^0 \right)^2 = \frac{a^2 \rho^2 h^2}{\left(16 \right)^2 \left(17 \right)^2 \pi^4} \left(\omega_{22}^2 - \omega_{11}^2 \right) \left(\omega_{22}^2 - 16 \omega_{11}^2 \right)$$
(3.4)

Here $\omega_{22} \ge 4\omega_{11}$ and $T_{0}^{0} = 0$, when $\omega_{22} = 4\omega_{11}$

4.1n general it is impossible to determine the function of nonhomogeneity even in particular case of nonhomogeneous beam by frequences spectrum of a single vibration problem. But there are some problems, when this question has a unique solution. One of these is the problem of heam vibrations with piece-constant along length elasticity moduli $E(x) = E_k$ when $l_{k-1} \le x < l_k$, k = 1, 2, ..., n, $l_0 = 0$, $l_n = l$ (4.1) Such distribution will be possible in a particular case when the beam consists of n anisotropic crystalls and each of the crystalls has different orientation concerning the

beam axes

The direct problem solution, when E(x) is known and material density is constant, is reduced to the solution of following system of equations for simply-supported beam

$$\left[\left(a_0 - 0.5 a_{2m} \right) m^4 - \Omega^2 \right] f_m + \sum_{n=1,m\neq n}^{\infty} 0.5 \left(a_{m+n} - a_{m+n} \right) m^2 n^2 f_n = 0$$
(4.2)

$$a_0 = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{n} E_k \left(l_k - l_{k-1} \right); \quad a_m = \frac{4}{m\pi} \sum_{k=1}^{k} E_k \cos \frac{l_k + l_{k-1}}{2} \frac{m\pi}{l} \sin \frac{l_k - l_{k-1}}{2} \frac{m\pi}{l}$$

From the condition that the determinant of system (4.2) is equal to zero we receive the equation for frequencies ω determining.

It is necessary to have *n* frequencies (in accordance with unknown E_i number) for inverse problem solving. It is possible to do it by the following way also to determine E_i in accordance with matrix diagonal members, and late on to put E_i in nondiagonal members as known.

5.1t is interesting to consider the inverse problem in the membrane case. The membrane is stretched in the direction of x axis by an unknown tension $T_1(y)$ and in the direction of y axis by an unknown tension $T_2(x)$. The deflection function u(x, y) is known, when normal force q(x, y) is given. The determination of tensions T_1 . T_2 is required.

The problem is reduced to solving of equation

$$T_{i}(y)\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} + T_{2}(x)\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}} = q(x, y)$$
(5.1)

with boundary conditions

$$x = 0, a; \quad u = 0$$

$$y = 0, b; \quad u = 0$$
(5.2)

Let us consider the direct problem for the particular case at first. It is assumed that the membrane is square and known tensions satisfy the following conditions

$$T_1(y) = T_0 f(y), \quad T_2(x) = T_0 f(x)$$
 (5.3)

It is required to find the deflection function u(x, y) when the force q(x, y) is given.

The direct problem is solved by use of the following presentations

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \lambda_k x, \quad f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \lambda_k y, \quad a_0 = 1,$$

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y, \quad \lambda_p = \frac{p\pi}{a} (p = m, n, k)$$
(5.4)

After putting (5.4) in (5.1), collection and making equal to zero coefficients of members $\sin \lambda_{\mu} x \sin \lambda_{\mu} y$ we receive the following infinite system of equations with respect to

unknown constants A

$$\lambda_{a_{n}}^{2}\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k}-a_{k-k})A_{nk}+\lambda_{a}^{2}\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k}-a_{n-k})A_{n}+\left[(2a_{0}-a_{2n})\lambda_{a}^{2}+(2a_{0}-a_{2n})\lambda_{a}^{2}\right]A_{n}+$$

$$+\lambda_{m}^{2}\sum_{k=m+1}^{m} (a_{k+m} - a_{k+m})A_{mk} + \lambda_{m}^{2}\sum_{k=m+1}^{m} (a_{k+m} - a_{k+m})A_{km} = -\frac{2q_{mm}}{T_{0}}$$
(5.5)

From (5.5) it follows, that coefficients A_{nu} are determined in unique way, when a_1 and q_{-} are known A_{nun} are determined in unique way independently from conditions (5.3). Hence, the direct problem has unique solution for arbitrary initial tensions. An ordinary method of the direct problem solving is consecutive solving of the shortened system of equations instead of infinite system (5.5). For example, as a first approximation we take, instead of (5.5), the system of four initial equations, in which coefficients A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} , are leaved only. Then these coefficients are determined in unique way.

Let us consider the inverse problem for shortened system. There are known A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{23} , (deflection function or, more exactly, four initial coefficients of deflection function desay), q_{11} , q_{21} , q_{12} , q_{22} (normal force function). It is required to determine initial tensions in the case (5.3). From the shortened system we shall have

$$2A_{11}a_{2} + (A_{12} + A_{21})a_{4} = 2q_{11}\lambda_{1}^{-2}T_{0}^{-1} + 4A_{11} + A_{12} + A_{21}$$

$$(\lambda_{1}^{2}A_{11} + \lambda_{2}^{2}A_{22})a_{1} - \lambda_{2}^{2}A_{12}a_{2} - (\lambda_{1}^{2}A_{11} + \lambda_{2}^{2}A_{22})a_{3} - \lambda_{1}^{2}A_{12}a_{4} =$$

$$= -2q_{12}T_{0}^{-1} - 2(\lambda_{1}^{2} + \lambda_{2}^{2})A_{12} = -2q_{12}T_{0}^{-1} - 2(\lambda_{1}^{2} + \lambda_{2}^{2})A_{12}$$

$$(\lambda_{1}^{2}A_{11} + \lambda_{2}^{2}A_{22})a_{1} - \lambda_{2}^{2}A_{33}a_{2} - (\lambda_{1}^{2}A_{11} + \lambda_{2}^{2}A_{22})a_{3} - \lambda_{1}^{2}A_{34}a_{4} =$$

$$= -2q_{34}T_{0}^{-1} - 2(\lambda_{1}^{2} + \lambda_{2}^{2})A_{24} \qquad (5.6)$$

$$(\lambda_{2}^{2}A_{31} + \lambda_{1}^{2}A_{12})a_{4} + 2\lambda_{2}^{2}A_{23}a_{4} = 2q_{32}T_{0}^{-1} + \lambda_{2}^{2}A_{34} + \lambda_{1}^{2}A_{12} + 4\lambda_{2}^{2}A_{32}$$

The system of (our equation (5.6) determines in unique way coefficients a_1 , a_2 , a_3 , a_4 ,

Acknowledgment. This work was supported by American University of Armenia.

REFERENCES

- Ambartsumian S.A. Theory of anisotropic plates. Hemisphere publishing corporation, 1991, 361p
- Volmir A.S. Nonlinear dynamics of plates and shells -M.: Nauka, 1972. 432p (in russian)
- Movsistan LA. On the stability of elastic-plastic bars for impact loads. Izv. Ac. Nauk of Armenia, Mechanica, 39, N2, 1986,p15-23 (in russian).
- 4. Gik L.D. The vibriations measure.-Novosibirsk, Nauka, 1972, 291p (in russian)

Институт механики ПАН Армении

Поступила в редакцию 03.11.1994

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՉԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАШИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա

49, N 3, 1996

Механика

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАНОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН С АНИЗОТРОПИЕЙ ОБЩЕГО ВИДА

Агаловян Л.А. Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М.

է, Ա. Աղալովյան, Ցու. Մ. Բաղդասարյան, Ա. Մ. Խաչատրյան

Ընդհանուր անիզոտրոպիայով օժտված շնրտավոր սայերի լարվածային - դեֆորմացիոն վիճակի որոշման մասին

Ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթողով դիտարկվում է չերտավոր սալի լարվածային - դե--ֆորմացիոն վիճակի ուսումնասիրության հարցը, երբ չերտերը օժտված են ամենաընդհանուր անիզուտրոպիայով. Ստացված հավասարումները համեմատվում են դասական տեսության համապատասխան հավասարումների հետ։

 $L.A. Aghalovian, Yu.M. Bagdasarian, A.M. Khachatrian \\ On determination of stress - strain state of sandwich - type plates with general anizotropy$

Методом аснимитотического интегрирования рассматривается вопрос определения НДС слоистой анизотронной пластники, слои которой обладают анилотронисй общего инда (21 упругая постоянияя). Проведено сопоставление выведенных основных уравшения с соответствующими уравнениями классической теории слоистых пластии, когда имеется илоскость упругой симметрии.

Рассматривается вопрос определения напряженно-деформирован ного состояния (НДС) слоистой анизотропной пластинки, слон когорой обладают анизотропней общего вида (21 упругая постоянная). Исследо вание проводится методом асимитотического интегрирования уравнений трехмерной задачи теории упругости без принятия каких либо гипотел.

Полное напряженное состояние пластинки образуется на основ ного (внутреннего) и краевого напряженных состояний [1]. В работе асимитотическим методом построено решение, соответствующее внутрен ней задаче. Проведено сопоставление выведенных основных длумерных разрешающих уравнений с соответствующими уравнениями классической теории слоистых пластии, когда имеется плоскость упругой симметрии

1.Для решения задач слоястых балок, пластин и оболочек обычно используется га или иная гипотеза. В нервых исследованиях принималась гипотеза недеформируемых пормалей для всего пакета в целом [2,3]. В последствии были предложены многочисленные модели, обзор которых можно найти, например, в [3-6]. В работе [1] методом асимитотического интегрирования построена приближенная теория изгиба изотронных пластии Асимптотическая теория ортотронных пластии построена в [7 9] В [10] асимптотическим методом исследовано НДС однослойной пластин ки, материал которой обладает анизотронней общего вида. В [11, 12] тем же методом исследовано НДС слоистой пластники, состоящей из произвольного числа упругих изотронных слоев, жестко соединенных друг с другом. Дана классификация двумерных задач в зависимости от величники отношения модулей упругости слабых и иссущих слоев.

Рассмотрим пластинку, состоящую из некоторого числа анизо тронных слоен. Будем считать, что слои имеют различные толщины h_i , козффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$. Общая толщина пластинки 2h. Плоскость отечета выберем гаким образом, чтобы над этой плоскостью распо лагались n слоев, а под ней m слоев, n,m произвольные натуральные числа.

Будем пользоваться декартовой системой координат *x*, *y*, *z*, рас полагая осн *Ox*, *Oy* в плоскости отечета. Внедя безразмерные перемен ные $\xi = x/a$, $\eta = y/a$, $\zeta = z/h$ и безразмерные переменения $U^{(i)} = u^{(i)}/a$, $V^{(k)} = v^{(k)}/a$, $W^{(k)} = w^{(i)}/a$, где *a* характерный тапгенциальный размер пластинки, слой пластинки будут задаваться неравенствами

 $\zeta_{k-1} \leq \zeta \leq \zeta_k (k = 1, 2, ..., n), \quad \zeta_k \leq \zeta_k \leq \zeta_{k+1} (k = -1, -2, ..., -m)$ File

$$\zeta_{z} = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{k} h_{r} \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

$$\zeta_{-k} = -\frac{1}{h} \sum_{n=1}^{k} h_{r} \quad (k = 1, 2, ..., m), \quad \zeta_{0} = 0 \quad (1.1)$$

Считается, что на верхией ($\zeta = \zeta_n$) и нижней ($\zeta = \zeta_{-m}$) лицевых плоскостях пластинки заданы значения компонентов тензора напря жений Соответствующие условия записываются в виде

$$\sigma_{x_{2}} = a / h - X^{*}(x, y) (x, y), \quad \sigma_{x_{2}} = Z^{*}(x, y) \quad \text{при } \zeta = \zeta_{n}$$
(1.2)
$$\sigma_{x_{2}} = -a / h - X^{*}(x, y) (x, y), \quad \sigma_{x_{2}} = -Z^{*}(x, y) \quad \text{при } \zeta = \zeta_{-n}$$

Требуется найти решение уравнений пространственной задачи теории упругости анизотронного тела при граничных условнях (1.2), условнях полного контакта слоев и условиях краевых задач теории упругостя на боковой поверхности (они нока не конкретизируются). В системе вышеприведенных безразмерных координат система уравнений геории упругости синтулярно возмущенная малым параметром. Ее решение складывается из решений внутренцей задачи (основное решение) и пограничного слоя [1, 13].

Решение внутренней задачи ищется в виде

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{-\alpha} \sum_{i=1}^{3} \varepsilon^{i} Q^{(k,i)}$$
(1.3)

где $Q^{(k)}$ любое из компонентов тепзора напряжений или безразмерных перемещений k ого слоя. Целое число q для каждой величины выбирается так, чтобы получить непротиворечивую систему относительно $Q^{(k,s)}$. В нашем случае эта цель достигается при

$$\begin{aligned} q &= 2 \quad \text{ALSR} \quad \sigma_{v}^{(1)}, \sigma_{v}^{(1)}, \sigma_{v}^{(1)}, U^{(1)}, V^{(1)} \\ q &= 3 \quad \text{ALSR} \quad W^{(1)}, \quad q = 1 \quad \text{ALSR} \quad \sigma_{v}^{(1)}, \sigma_{v}^{(1)} \\ q &= 0 \quad \text{ALSR} \quad \sigma_{v}^{(1)} \quad (1.4) \end{aligned}$$

Если считать вклад объемных сил $F_i^{(k)}, F_i^{(k)}, F_i^{(k)}$ того же порядка, что и вклад поверхностных сил, будем иметь

$$\begin{split} F_{i}^{(k)} &= \varepsilon^{-1+\epsilon} a^{-1} F_{i}^{(k,\epsilon)} \big(\bar{\xi},\eta,\zeta\big), \big(x,y\big), F_{\pm}^{(k)} &= \varepsilon^{-1+\epsilon} a^{-1} F_{\pm}^{(k,\epsilon)} \big(\bar{\xi},\eta,\zeta\big) \quad (1.5) \\ F_{i}^{(k,\epsilon)} &= F_{i} \big(a\xi,a\eta,h\zeta\big), \big(x,y,z\big), F_{i}^{(k,\epsilon)} &\equiv 0, \quad s \neq 0, \quad s = \overline{0,S} \end{split}$$

Подставив (1.3) в преобразованные, введением безразмерных координат и безразмерных компонент вектора перемещения, уравнения теории упругости, с учетом (1.4), (1.5) получим следующую систему для определения $Q^{(k,s)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{i}^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{is}^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{iz}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + F_{i}^{(k,s)} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{iz}^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{iz}^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{iz}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + F_{i}^{(k,s)} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{iz}^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{iz}^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{iz}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + F_{i}^{(k,s)} &= 0 \\ \frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \xi} &= a_{11}^{(k)} \sigma_{i}^{(k,s)} + a_{12}^{(k)} \sigma_{i}^{(k,s)} + a_{13}^{(k)} \sigma_{i}^{(k,s-2)} + a_{14}^{(k)} \sigma_{zz}^{(k,s-1)} + a_{15}^{(k)} \sigma_{zz}^{(k,s-1)} + a_{16}^{(k)} \sigma_{zz}^{(k,s-1)} + a_{16}^{(k)} \sigma_{zz}^{(k,s)} + a_{16}^{(k)} \sigma_{zz}^{(k,s)} \\ \frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \eta} &= a_{12}^{(k)} \sigma_{i}^{(k,s)} + a_{21}^{(k)} \sigma_{i}^{(k,s)} + a_{22}^{(k)} \sigma_{zz}^{(k,s-2)} + a_{24}^{(k)} \sigma_{zz}^{(k,s-1)} + a_{2z}^{(k)} \sigma_{zz}^{(k,s-1)} + a_{2z}^{(k)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}^{(k,s)}}{\partial \zeta} &= a_{11}^{(k)} \sigma_{1}^{(k,s-2)} + a_{21}^{(k)} \sigma_{1}^{(k,s-2)} + a_{31}^{(k)} \sigma_{1}^{(k,s-4)} + a_{31}^{(k)} \sigma_{1}^{(k,s-4)} + a_{32}^{(k)} \sigma_{11}^{(k,s-2)} + a_{33}^{(k)} \sigma_{11}^{(k,s-2)} + a_{34}^{(k)} \sigma_{11}^{(k,s-2)} + a_{35}^{(k)} \sigma_{11}^{(k,s-2)} + a_{35}^{(k)} \sigma_{11}^{(k,s-2)} + a_{36}^{(k)} \sigma_{11}^{(k,s-2)} + a_{3$$

$$\chi_{1}^{(k,i)} = -w_{i_{q_{q}}}^{(k,i)}, \quad \chi_{2}^{(k,i)} = -w_{i_{q_{q}}}^{(k,i)}, \quad \tau^{(k,i)} = -2w_{i_{q_{q}}}^{(k,i)}$$
(1.10)

Коэффициенты В_и⁽⁴⁾ определяются по формулам

$$\mathbf{B}_{11}^{(k)} = \left(a_{22}^{(k)}a_{66}^{(k)} - \left(a_{26}^{(k)}\right)^2\right) / \Omega_k, \quad \mathbf{B}_{22}^{(k)} = \left(a_{11}^{(k)}a_{66}^{(k)} - \left(a_{16}^{(k)}\right)^2\right) / \Omega_k$$

$$B_{12}^{(k)} = \left(a_{16}^{(k)}a_{26}^{(k)} - a_{12}^{(k)}a_{66}^{(k)}\right) / \Omega_{k}, \quad B_{66}^{(k)} = \left(a_{11}^{(k)}a_{22}^{(k)} - \left(a_{12}^{(k)}\right)^{2}\right) / \Omega_{k}$$

$$B_{16}^{(k)} = \left(a_{12}^{(k)}a_{20}^{(k)} - a_{16}^{(k)}a_{22}^{(k)}\right) / \Omega_{k}, \quad B_{26}^{(k)} = \left(a_{12}^{(k)}a_{16}^{(k)} - a_{26}^{(k)}a_{11}^{(k)}\right) / \Omega_{k}$$

$$\Omega_{k} = \left(a_{11}^{(k)}a_{22}^{(k)} - \left(a_{12}^{(k)}\right)^{2}\right) a_{66}^{(k)} + 2a_{12}^{(k)}a_{16}^{(k)}a_{26}^{(k)} - a_{11}^{(k)}\left(a_{26}^{(k)}\right)^{2} - a_{22}^{(k)}\left(a_{16}^{(k)}\right)^{2} \quad (1.11)$$

Здесь и в последующем, для удобства, запятыми при нижних индексах выделены частные производные.

Величины со звездочкой для каждого *s* известны, если
построены предыдущие приближения и определяются по формулам

$$w^{(k,i)} = \int_{0}^{s} \left(a_{11}^{(i)} \sigma_{n}^{(k,i-2)} + a_{21}^{(k)} \sigma_{n}^{(k,i-2)} + a_{n1}^{(k)} \sigma_{n}^{(k,i-4)} + a_{21}^{(k)} \sigma_{n}^{(k,i-3)} + a_{22}^{(k)} \sigma_{n}^{(k,i-2)} + a_{23}^{(k)} \sigma_{n}^{(k,i-3)} \right) d\zeta$$

 $u^{(k,i)} = \int_{0}^{s} \left(-w_{\eta}^{(k,i)} + d_{n1}^{(k)} \sigma_{n}^{(k,i-4)} + d_{22}^{(k)} \sigma_{n}^{(k,i-4)} + d_{n2}^{(k)} \sigma_{n}^{(k,i-3)} + d_{n3}^{(k)} \sigma_{n}^{(k,i-2)} + d_{n3}^{(k)} \sigma_{n}^{(k,i-1)} + d_{n3}^{(k)} \sigma_{n}^{(k,i$

$$a_{i}^{(k)} = -\left(a_{ii}^{(k)} B_{11}^{(k)} + a_{2i}^{(k)} B_{12}^{(k)} + a_{i6}^{(k)} B_{16}^{(k)}\right)$$

$$b_{i}^{(k)} = -\left(a_{ii}^{(k)} B_{12}^{(k)} + a_{2i}^{(k)} B_{22}^{(k)} + a_{i6}^{(k)} B_{26}^{(k)}\right)$$

$$c_{i}^{(k)} = -\left(a_{ii}^{(k)} B_{16}^{(k)} + a_{2i}^{(k)} B_{22}^{(k)} + a_{i6}^{(k)} B_{66}^{(k)}\right)$$

$$(i = 1, 2, ..., 6)$$

Удовлетворив граничным условиям (1.2), а также условиям полного контакта на плоскостях $\zeta = \zeta_t$ (k = 1, 2,..., в. 1, 1, 2,..., m+1), все величные можно выразить через компоненты перемещения $u^{(n,s)}$, $v^{(n,s)}$ и $w^{(n,s)}$ Для определения же этих величин получается следующая система уравнений:

$$L_{11}u^{(n,s)} + L_{12}v^{(n,s)} + L_{13}w^{(n,s)} = p_1^{(s)}$$

$$L_{12}u^{(n,s)} + L_{22}v^{(n,s)} + L_{23}w^{(n,s)} = p_2^{(s)}$$

$$L_{11}u^{(n,s)} + L_{21}v^{(n,s)} + L_{33}w^{(n,s)} = q^{(s)}$$

где дифференциальные операторы L_q имеют вид

$$\begin{split} & L_{11} = C_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (1,2;\xi,\eta) \\ & L_{12} = C_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \eta} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ & L_{11} = -\left[K_{11} \frac{\partial^3}{\partial \xi^2} + 3K_{16} \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} + (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \xi \partial \eta^2} + K_{25} \frac{\partial^3}{\partial \eta^4}\right] \quad (1,2;\xi,\eta) \quad (1,15) \\ & L_{54} = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial \xi \partial \eta^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \\ & B \quad (1,14) \quad p_1^{(1)}, q^{(1)} \quad \text{играют роль обобщенных нагрузок, сля вычисления которых получаются формулы \\ & p_1^{(1)} = -(X^{r(4)} + X^{-(5)}) + \sum_{1=0}^{6} (\sigma_{\chi}^{r(4)}(\zeta_{\chi}) - \sigma_{\chi}^{r(4)}(\zeta_{\chi-1})) - \sum_{k=1}^{6} (\sigma_{\chi}^{r(-k,1)}(\zeta_{-k}) - \sigma_{\chi}^{r(-k,2)}(\zeta_{-k+1})) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left[(\zeta_{\chi}^2 - \zeta_{k-1}^2) L_{13}^{(1)} \left(\sum_{j=1}^{n-1} W^{r(j,1)}(\zeta_{j}) \right) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left[(\zeta_{\chi}^2 - \zeta_{k-1}^2) L_{13}^{(1)} \left(\sum_{j=1}^{n-1} W^{r(j,1)}(\zeta_{j}) \right) - \sum_{k=1}^{k-1} W^{r(j,1)}(\zeta_{-j}) \right) \right] \right] + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ (\zeta_{\chi} - \zeta_{k-1}) \left[L_{11}^{(k)} \left(\sum_{j=1}^{n-1} U^{r(j,1)}(\zeta_{j}) \right) + L_{12}^{(k)} \left(\sum_{j=1}^{n-1} V^{r(j,1)}(\zeta_{j}) \right) \right] \right\} \quad (x, y) \\ & q^{(i)} = Z^{+(i)} + Z^{-(i)} + \zeta_n \frac{\partial X^{+(i)}}{\partial \xi} + \zeta_{-m} \frac{\partial X^{-(i)}}{\partial \xi} + \zeta_n \frac{\partial Y^{+(i)}}{\partial \eta} + \\ & + \sum_{k=1}^{m} \left(\sigma_{\chi}^{-(i,k,1)}(\zeta_{-k}) - \sigma_{\chi}^{-(k,1)}(\zeta_{k}) - \sigma_{\chi}^{-(k,1)}(\zeta_{k-1}) \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{m} \left(\sigma_{\chi}^{-(k,1)}(\zeta_{-k}) - \sigma_{\chi}^{-(k,1)}(\zeta_{k-k}) - \sigma_{\chi}^{-(k,1)}(\zeta_{k-1}) \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{m} \left(\sigma_{\chi}^{-(k,1)}(\zeta_{-k}) - \sigma_{\chi}^{-(k,1)}(\zeta_{k-k}) \right) - \\ & - \sum_{k=1}^{m} \left(\sigma_{\chi}^{-(k,1)}(\zeta_{-k}) - \sigma_{\chi}^{-(k,1)}(\zeta_{k-k}) - \sigma_{\chi}^{-(k,1)}(\zeta_{k-1}) \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{m} \left(\sigma_{\chi}^{-(k,1)}(\zeta_{-k}) - \sigma_{\chi}^{-(k,1)}(\zeta_{k-k}) \right) - \\ & - \sum_{k=1}^{m} \left(\sigma_{\chi}^{-(k,1)}(\zeta_{-k}) - \sigma_{\chi}^{-(k,1)}(\zeta_{k-k}) - \sigma_{\chi}^{-(k,1)}(\zeta_{k-1}) \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{m} \left(\sigma_{\chi}^{-(k,1)}(\zeta_{-k}) - \sigma_{\chi}^{-(k,1)}(\zeta_{-k}) \right) + \\ & - \sum_{k=1}^{m} \left(\sigma_{\chi}^{-(k,1)}(\zeta_{-k}) - \sigma_{\chi}^{-(k,1)}(\zeta_{-k}) \right) + \\ & - \sum_{k=1}^{m} \left(\sigma_{\chi}^{$$

$$=\sum_{k=1}^{n} \left[\zeta_{k} \left(\frac{\partial \sigma_{x^{2}}^{*(k,s)}(\zeta_{k})}{\partial \xi} + \frac{\sigma \delta_{x^{2}}^{*(k,s)}(\zeta_{k})}{\partial \eta} \right) + \zeta_{k+1} \left(\frac{\partial \sigma_{x^{2}}^{*(k,s)}(\zeta_{k+1})}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{x^{2}}^{*(k,s)}(\zeta_{k+1})}{\partial \eta} \right) \right] + \\ + \sum_{k=1}^{n} \left[\zeta_{k} \left(\frac{\partial \sigma_{x^{2}}^{*(k,s)}(\zeta_{k})}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{x^{2}}^{*(k,s)}(\zeta_{k})}{\partial \eta} \right) + \zeta_{k+1} \left(\frac{\partial \sigma_{x^{2}}^{*(k,s)}(\zeta_{k+1})}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{x^{2}}^{*(k,s)}(\zeta_{k+1})}{\partial \eta} \right) \right] - \\ - \sum_{k=1}^{n} \left[1/3 \left(\zeta_{k}^{*} - \zeta_{k-1}^{*} \right) L_{ii}^{(k)} \left(\sum_{j=k}^{n+1} W^{*(j,s)}(\zeta_{j}) \right) + 1/2 \left(\zeta_{k}^{*} - \zeta_{k-1}^{*} \right) \times \right] \right] \\ \times \left(L_{13}^{(k)} \left(\sum_{j=k}^{n+1} U^{+(j,s)}(\zeta_{j}) \right) + L_{23}^{(k)} \left(\sum_{j=k}^{n+1} W^{*(j,s)}(\zeta_{j}) \right) \right) \right] +$$
(1.16)
$$+ \sum_{k=1}^{n} \left[1/3 \left(\zeta_{-k}^{*} - \zeta_{-k-1}^{*} \right) L_{ii}^{(k)} \left(\sum_{j=k}^{n+1} W^{*(j,s)}(\zeta_{j}) - \sum_{j=k}^{k+1} W^{*(j-s)}(\zeta_{-j}) \right) \right] + \\ + 1/2 \left(\zeta_{-k}^{*} - \zeta_{-k-1}^{*} \right) \left(L_{14}^{(k)} \left(\sum_{j=k}^{n-1} W^{*(j,s)}(\zeta_{j}) - \sum_{j=k}^{k+1} W^{*(j-s)}(\zeta_{-j}) \right) \right] +$$

$$= L_{23}^{(k)} \left[\sum_{j=1}^{n-1} V^{-j}(\zeta_j) - \sum_{j=1}^{k-1} V^{-j}(\zeta_j) \right]$$

$$= L_{23}^{(k)} \left[\sum_{j=1}^{n-1} V^{-j}(\zeta_j) - \sum_{j=1}^{k-1} V^{-j}(z_j) (\zeta_j) \right]$$

$$W^{-i(\pm k, \pm)} = w^{-i(\pm (k+1), \pm)} (\zeta_{\pm k}) - w^{-i(\pm k, \pm)} (\zeta_{\pm k})$$

$$U^{+i(\pm k, \pm)} = u^{-i(\pm (k+1), \pm)} (\zeta_{\pm k}) - u^{-i(\pm k, \pm)} (\zeta_{\pm k}) + \frac{\partial W^{-i(\pm k, \pm)} (\zeta_{\pm k})}{\partial \xi} \quad (u, v)$$

$$X^{\pm (0)} = X^{\pm}, Y^{\pm (0)} = Y^{\pm}, Z^{\pm (0)} = Z^{\pm}$$

$$X^{\pm(s)} = Y^{\pm(s)} = Z^{\pm(s)} = 0$$
 при $s \neq 0$
Жесткости C_s, K_g, D_g определяются по формулам

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} B_{ij}^{i,k,l} (\zeta_{k} - \zeta_{k-1}) - \sum_{k=1}^{m} B_{ij}^{i-k,l} (\zeta_{-k} - \zeta_{-k+1})$$

$$K_{ij} = 1/2 \sum_{k=1}^{m} B_{ij}^{i,k,l} (\zeta_{k}^{2} - \zeta_{k-1}^{2}) - 1/2 \sum_{k=1}^{m} B_{ij}^{j-k,l} (\zeta_{-k}^{2} - \zeta_{-k+1}^{2})$$

$$D_{ij} = 1/3 \sum_{k=1}^{m} B_{ij}^{i,k,l} (\zeta_{k}^{3} - \zeta_{k-1}^{3}) - 1/3 \sum_{k=1}^{m} B_{ij}^{j-k,l} (\zeta_{-k}^{3} - \zeta_{-k+1}^{3})$$

$$C_{ij} = 1/3 \sum_{k=1}^{m} B_{ij}^{i,k,l} (\zeta_{-k}^{3} - \zeta_{-k+1}^{3}) - 1/3 \sum_{k=1}^{m} B_{ij}^{j-k,l} (\zeta_{-k}^{3} - \zeta_{-k+1}^{3})$$

а операторы $L_{ij}^{(\kappa)}$ имеют вид

$$L_{11}^{(k)} = B_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{66}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (1, 2)$$

$$L_{12}^{(k)} = B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(B_{12}^{(k)} + B_{66}^{(k)}\right) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (1.18)$$

$$L_{13}^{(k)} = -\left[B_{11}^{(k)}\frac{\partial^3}{\partial\xi^3} + \left(B_{12}^{(k)} + 2B_{66}^{(k)}\right)\frac{\partial^3}{\partial\xi\partial\eta^2} + 3B_{16}^{(k)}\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\eta} + B_{26}^{(k)}\frac{\partial^3}{\partial\eta^3}\right] (1.2)$$

$$L_{51}^{(k)} = B_{11}^{(k)} \frac{\partial^{*}}{\partial \xi^{4}} + 2 \Big(B_{12}^{(k)} + 2B_{66}^{(k)} \Big) \frac{\partial^{*}}{\partial \xi^{2} \partial \eta^{2}} + 4B_{16}^{(k)} \frac{\partial^{*}}{\partial \xi^{3} \partial \eta} + 4B_{36}^{(k)} \frac{\partial^{*}}{\partial \eta^{3} \partial \xi} + B_{22}^{(k)} \frac{\partial^{*}}{\partial \eta^{4}} + B_{32}^{(k)} \frac{\partial^{*}}{\partial \eta^{4}} + B_{32}^$$

Носле удовлетворения условиям (1, 2) на лицевых новерхностях, в свою очередь, получаются

$$\begin{aligned} \tau_{z_{2}0}^{(n,s)} &= X^{*(s)} - 1/2\zeta_{s}^{2}\tau_{z_{2}2}^{(n,s)} - \zeta_{n}\tau_{z_{1}1}^{(n,s)} - \sigma_{z_{2}}^{(n,s)}(\zeta_{n}) \quad (x,y) \quad (1.19) \\ \tau_{0}^{(n,s)} &= Z^{*(s)} - 1/6\zeta_{n}^{3}\tau_{z_{1}}^{(n,s)} - 1/2\zeta_{n}^{2}\tau_{z_{2}}^{(n,s)} - \zeta_{n}\tau_{z_{1}}^{(n,s)} - \sigma_{z}^{*(n,s)}(\zeta_{n}) \quad . \end{aligned}$$

Перемещения остальных слоев выражаются через $u^{(n,i)}, v^{(n,i)}$ в $w^{(n,i)}$ по формулам

$$u^{(k,x)} = u^{\{n,x\}} + \sum_{j=k}^{n-1} U^{*(j,x)}(\zeta_j) \quad (u,v)$$

$$w^{\{k,x\}} = w^{\{n,x\}} + \sum_{j=k}^{n-1} W^{*(j,x)}(\zeta_j) \quad (k = 1, 2, ..., n - 1) \quad (1.20)$$

$$u^{\{-k,x\}} = u^{\{n,x\}} + \sum_{j=1}^{n-1} U^{*(j,x)}(\zeta_j) - \sum_{i=1}^{k-1} U^{*(-j,x)}(\zeta_{-i}) \quad (u,v)$$

$$w^{\{-k,x\}} = w^{\{n,x\}} + \sum_{j=1}^{n+1} W^{*(j,x)}(\zeta_j) - \sum_{i=1}^{k-1} W^{*(-j,x)}(\zeta_{-i}) \quad (k = 1, 2, ..., m)$$

а на условий полного контакта между слоями вытекают следующие реуррентные формулы для определения $\tau_{ve0}^{(k+1)}$, $\tau_{ve0}^{(k+1)}$ н $\tau_{ve0}^{(k+1)}$

$$\begin{split} \tau_{i_{10}}^{(k,1)} &= \tau_{i_{10}}^{(k+1)} - 1/2\zeta_{k}^{2} \left(L_{i_{3}}^{(k+1)} w^{k+1,s} - L_{i_{3}}^{(k)} w^{(k,s)} \right) - \\ &- \zeta_{k} \left[\left(L_{i_{1}}^{(k+1)} u^{k+1,s} + L_{i_{2}}^{(k+1)} y^{k+1,s} \right) - \left(L_{i_{1}}^{(k)} u^{k,s,s} + L_{i_{2}}^{(k)} y^{k,s} \right) \right] + \sigma_{c}^{s(k+1,s)} (\zeta_{k}) - \sigma_{c}^{s(k,s)} (\zeta_{k}) - (x, y) \\ \tau_{2v}^{(k,s)} &= \tau_{2v}^{(k+1,s)} + 1/3\zeta_{k}^{2} \left(L_{i_{k}}^{(k+1)} w^{(k+1,s)} - L_{i_{3}}^{(k)} w^{(k,s)} \right) + \\ &+ 1/2\zeta_{k}^{2} \left(L_{i_{3}}^{(k+1,s)} u^{(k+1,s)} + L_{i_{3}}^{(k+1)} v^{(k+1,s)} - L_{i_{3}}^{(k)} u^{(k,s)} - L_{i_{3}}^{(k)} v^{(k,s)} \right) + \\ &+ \zeta_{k} \left(\sigma_{c_{2}}^{s(k+1,s)} (\zeta_{k}) - \sigma_{c_{2}}^{s(k,s)} (\zeta_{k}) \right) + \zeta_{k} \left(\sigma_{c_{3}\eta}^{s(k+1,s)} (\zeta_{k}) - \sigma_{c_{3}\eta}^{s(k,s)} (\zeta_{k}) \right) + \sigma_{c}^{s(k+1,s)} (\zeta_{k}) - \sigma_{c_{3}}^{s(k,s)} (\zeta_{k}) \right) + \end{split}$$

После решения системы (1.14), остальные функции, входящие в (1.8), определяются по формулам (1.9). Таким образом, определяются

все напряжения и перемещения, в том числе и напряжения $\sigma_c^{(k)}, \sigma_c^{(k)}$ и $\sigma_c^{(k)}$, которыми, как обычно, пренебрегаются в классической теории пластии.

 Сопоставим полученные результаты с результатами по классической теории пластии.

Для этого вместо напряжений введем в рассмотрение статически эквивалентные им внутренние силы и моменты по формулам

$$T_{i}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_{i}} \sigma_{i}^{(i,i)} d\zeta + \sum_{i=1}^{m} \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_{i+1}} \sigma_{i}^{(-i,i)} d\zeta \quad (x, y)$$

$$S^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_{i}} \sigma_{ix}^{(i,i)} d\zeta + \sum_{i=1}^{m} \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_{i+1}} \sigma_{ix}^{(-i,i)} d\zeta \quad (x, y)$$

$$N_{i}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_{i}} \sigma_{ix}^{(i,i)} d\zeta + \sum_{i=1}^{m} \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_{i+1}} \sigma_{ix}^{(-i,i)} d\zeta \quad (x, y)$$

$$M_{i}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_{i}} \zeta \sigma_{i}^{(i,i)} d\zeta + \sum_{i=1}^{m} \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_{i+1}} \zeta \sigma_{i}^{(-i,i)} d\zeta \quad (x, y)$$

$$H^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_{i}} \zeta \sigma_{ix}^{(i,i)} d\zeta + \sum_{i=1}^{m} \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_{i-1}} \zeta \sigma_{i}^{(-i,i)} d\zeta \quad (x, y)$$

Используя формулы (2.1), (1.8) (1.10), для тангенциальных и поперечных сил, а также для нагибающих и кругящих моментов имеем $T_{*}^{(*)} = K_{11}\chi_{1}^{(*)} + K_{12}\chi_{2}^{(*)} + K_{16}\tau^{(*)} + C_{11}\varepsilon_{1}^{(*)} + C_{12}\varepsilon_{2}^{(*)} + C_{16}\omega^{(*)} + T_{*}^{(*)}$ (x, y) $S^{(*)} = K_{16}\chi_{1}^{(*)} + K_{26}\chi_{2}^{(*)} + K_{66}\tau^{(*)} + C_{16}\varepsilon_{1}^{(*)} + C_{36}\varepsilon_{2}^{(*)} + C_{66}\omega^{(*)} + S^{*(*)}$ (x, y) $M_{*}^{(*)} = D_{11}\chi_{1}^{(*)} + D_{12}\chi_{2}^{(*)} + D_{16}\tau^{(*)} + K_{11}\varepsilon_{1}^{(*)} + K_{12}\varepsilon_{2}^{(*)} + K_{66}\omega^{(*)} + M_{*}^{*(*)}$ $H^{(*)} = D_{01}\chi_{1}^{(*)} + D_{25}\chi_{2}^{(*)} + D_{66}\tau^{(*)} + K_{16}\varepsilon_{1}^{(*)} + K_{36}\varepsilon_{2}^{(*)} + K_{66}\omega^{(*)} + M_{*}^{*(*)}$ $H^{(*)} = D_{01}\chi_{1}^{(*)} + D_{25}\chi_{2}^{(*)} + D_{66}\tau^{(*)} + K_{16}\varepsilon_{1}^{(*)} + K_{36}\varepsilon_{2}^{(*)} + K_{66}\omega^{(*)} + H^{*(*)}$ (2.2) $N_{*}^{(*)} = \zeta_{n}X^{*(*)} - \left[D_{11}\frac{\partial^{3}w^{(n)}}{\partial\xi^{2}} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^{3}w^{(n)}}{\partial\xi^{2}\partial\eta^{2}} + 3D_{16}\frac{\partial^{3}w^{(n)}}{\partial\xi^{2}\partial\eta} + D_{26}\frac{\partial^{3}w^{(n,*)}}{\partial\eta^{(*)}}\right] - \left[K_{11}\frac{\partial^{2}u^{(n,*)}}{\partial\xi^{2}} + 2K_{16}\frac{\partial^{2}u^{(n,*)}}{\partial\xi\partial\eta} + K_{66}\frac{\partial^{2}u^{(n,*)}}{\partial\eta^{2}} + K_{16}\frac{\partial^{2}v^{(n,*)}}{\partial\xi^{2}} + K_{16}\frac{\partial^{2}w^{(n,*)}}{\partial\xi^{2}} +$

L'IG

$$\begin{split} T_{s}^{*(s)} &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\zeta_{n-1}}^{\zeta_{n}} \left[\sigma_{s}^{*(i,s)} + \sum_{j=1}^{n-1} \zeta L_{111}^{(i)} W^{*(j,s)} \right] d\zeta + \\ &+ \sum_{i=1}^{m} \int_{\zeta_{n-1}}^{\zeta_{n-1}} \left[\sigma_{s}^{*(-i,s)} + \sum_{j=1}^{n} \zeta L_{111}^{(-j)} W^{*(j,s)} - \sum_{j=1}^{(i-1)} \zeta L_{111}^{(-j)} W^{*(-j,s)} \right] d\zeta + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \int_{\zeta_{n-1}}^{\zeta_{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\ell_{111}^{(i)} U^{*(j,s)} + \ell_{12}^{(i)} V^{*(j,s)} \right) d\zeta + \sum_{i=1}^{m} \int_{\zeta_{n-1}}^{\zeta_{n-1}} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \left(\ell_{11}^{(i-1)} U^{*(-j,s)} + \ell_{12}^{(-i)} V^{*(-j,s)} \right) - \right] d\zeta - \\ &- \sum_{i=1}^{i-1} \left(\ell_{1}^{(i-1)} U^{*(-j,s)} + \ell_{12}^{(-i)} V^{*(-j,s)} \right) \right] d\zeta - (x,y) \end{split}$$

а операторы $L_{011}^{(b)}, \ell_{11}^{(b)}, \ell_{12}^{(b)}$ имеют вид

$$L_{(1)}^{(i)} = B_{11}^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + B_{12}^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \quad (1,2;\xi,\eta)$$

$$\ell_{(1)}^{(i)} = B_{11}^{(i)} \frac{\partial}{\partial \xi} + B_{16}^{(i)} \frac{\partial}{\partial \eta}; \quad \ell_{12}^{(i)} = B_{12}^{(i)} \frac{\partial}{\partial \eta} + B_{16}^{(i)} \frac{\partial}{\partial \xi} \qquad (2.4)$$

Величины $T_{y}^{*(e)}, S^{*(e)}, ..., N_{y}^{*(e)}$ определяются аналогичным образом, меняются лишь операторы $L_{111}^{(i)}, \ell_{11}^{(i)}, \ell_{12}^{(i)}$ Они здесь не приводятся, их воспроизвести нетрудно.

Уравнения (1.14) и соответствующие соотношения (1.7)-(1.9) или (2.2), для пулевого приближения совпадают с классическими уравнениями анизотропной слоистой пластинки, когда для каждого слоя имеется плоскость упругой симметрии, параллельная среднюй плоскости *xOy* и принимается гипотеза Кирхгофа-Лява для всего пакета в целом. Усилия, моменты, а также жесткости и компоненты деформаций классической теории (они размерные, отмечены нами черточкой) выражаются через соответствующие всличны пулевого приближения при номощи формул $\overline{T}_i = h \varepsilon^{-2} T_i^{(n)}$ (*x*, *y*), $\overline{S} = h \varepsilon^{-2} S^{(n)}$ $\overline{M}_i = h^2 \varepsilon^{-2} M_i^{(0)} = a^2 M_i^{(0)}$ (*x*, *y*), $\overline{H} = a^2 H^{(0)}$ (2.5)

$$\begin{aligned} \overline{\chi}_{1} &= a^{-1} \varepsilon^{-3} \chi_{1}^{(0)}, \quad \overline{\chi}_{2} &= a^{-1} \varepsilon^{-3} \chi_{2}^{(0)}, \quad \overline{\tau} = a^{-1} \varepsilon^{-4} \tau^{(0)} \\ \overline{\varepsilon}_{1} &= \varepsilon^{-2} \varepsilon_{1}^{(0)}, \quad \overline{\varepsilon}_{2} &= \varepsilon^{-2} \varepsilon_{2}^{(0)}, \quad \overline{\omega} = \varepsilon^{-2} \omega^{(0)} \end{aligned}$$

Следовательно, гипотеза недеформируемых нормалей с определенной точностью применима и для слонстых пластинок с общей анизотропней. Лишь исобходимо при определении $\sigma_i^{(t)}, \sigma_i^{(k)}$ и $\sigma_i^{(k)}$ в первых

уравненнях обобщенного закона Гука наряду с пормальным напряжением $\sigma^{(k)}$ пренебречь также влиянием касательных напряжений $\sigma^{(k)}_{(k)}, \sigma^{(k)}_{(k)}$

В ходе асимптотического интегрирования напряжение $\sigma_{z}^{(1)}$ появляется в основных соотношениях, начиная с приближения s = 2, а напряжения $\sigma_{z}^{(1)}$ п $\sigma_{z}^{(k)}$ с приближения s = 1. Это означает, что пренебрежение $\sigma_{z}^{(1)}$ п риводит к формальной погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$. в то время, как пренебрежение напряжениями $\sigma_{z}^{(1)}$ и $\sigma_{z}^{(1)}$ приводит к погрешности порядка $O(\varepsilon)$. Следовательно, гипотеза Кирхгофа Лява для слоистой иластники со слоями с общей анизотропней (21 упругая константа) приведет к большой погрешности, чем в случае, когда слои орготропные или имеют плоскость упругой симметрии.

На примере двухслойной пластинки, слои которой обладают анизотронней общего вида, выясним, каков вклад общей анизотронии, если вожелать уточнить классические уравнения, когда принимается гипотеза Кирхгофа Лява. Для этого вычислим обобщенные нагрузки, входящие в правые части уравнений (1.14), соответствующие *s* = 1.

$$p_{1}^{(i)} = -\left(p_{15}^{(i)}X^{*} + p_{14}^{(i)}Y^{*}\right)\zeta_{1}^{*} - \left(p_{15}^{(i)}X^{*} + p_{14}^{(i)}\right)\zeta_{-1}^{*} + \left(L_{c1}^{(i)} - L_{c1}^{(-1)}\right)w^{(0)} + \left(L_{c1}^{(i)} - L_{c1}^{(-1)}\right)w^{(0)} + \left(L_{c1}^{(i)} - L_{c1}^{(-1)}\right)w^{(0)} + \left(L_{c1}^{(i)} - L_{c1}^{(-1)}\right)w^{(0)} + \left(L_{c2}^{(i)} - L_{c2}^{(-1)}\right)w^{(0)} + \left(L_{c2}^{(i)} - L_{c2}^{(i)}\right)w^{(0)} + \left(L_{c2}^{(i)} - L_{c2$$

$$p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, q^{(1)} - O(\varepsilon^{(-1)})$$
 (2.8)

то поправка от приближения s = 1 будет порядка первого члена в разложении (1.3) и асимитотика (1.4), следовательно, и класическая теория Кирхгофа Лява, не будут верны. Тогда, исобходимо либо искать другую асимитотику, либо решать трехмерную задачу численными или другими методами. В практических приложениях такие случан можно исключить, варьпровав размерами пластинки.

Из выражений (2.6) для обобщенных нагрузок вытекает, что условия (2.8) могут выполняться в двух случаях:

 а) внешние силы имеют большую изменяемость, б) для материалов, обладающих сильной анизотронней, т. е. когда имеют место соотношения

$$a_i^{(\ell)}, b_i^{(\ell)}, c_i^{(\ell)} - O(\epsilon^{-1})$$
 (i = 4, 5; k = -1, 1) (2.9)

Нопранки от приближения s = 2 будут важны, если $a_{i}^{(k)}, b_{i}^{(k)}, c_{i}^{(k)} - O(\varepsilon^{-2})$ (i = 3, 4, 5; k = 1, 1) (2.10) и чем можно убедиться, если вычислить приведенную нагрузку для пополижения s = 2.

В заключение отметим, что построенные двумерные уравнения и соответствующие им решения верны во внутренней области пластинки, г. е. начиная с расстояний от боковой поверхности, ранных зоне простирания пограничного слоя. Решение погранслоя и вопрос его взаимодействия с внутренним НДС рассматривается как в [8, 9, 14].

The research described in this publication was made possible in part by Grant No MVSOOO from the International Science Foundation.

ЛИТЕРАТУРА

- Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба плас тники методом асимитотического интегрирования уравнении теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вын. 4, с. 668-686.
- Дехницкий С.Г. Анизотронные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
- Албарцулян С. А. Теория анизотропных пластии. М. : Наука, 1967. 268 с.
- Албарнулян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 447 с.
- Григолюк Э.И., Коган Ф.А. Современное состояние теории многослойных оболочек. - ПМ, 1972. т. 8, имп. 6, с. 3-17.

- Никитит В.С., Шапиро К.С. Задачи теории упругости для много слойных сред. М.:Наука, 1973. 131 с.
- Агаловян Л.А. К теории изгиба ортотронных пластин. Инж. журн. МТГ, 1966, N 6, 114-121.
- Агаловян Л.А. К вопросу приведения граничных условий трехмерной задачи к двумерным в теории анизотропных пластинок. Уч. записки ЕГУ, ест. науки, 1978, N 2 (138), с. 20 28.
- Агаловян Л.А. О граничных условиях в теории анизотропных плас тинок. Уч.записки ЕГУ. ест. науки 1978, N 3 (139), с. 21-30.
- Агаловян Л.А., Хачатрян Ш.М. К вопросу определения напряженно деформированного состояния пластинок с общей анизотро иней. В сб.: "XI Всес. конф. по теории оболочек и пластии". Тезпсы докладов М.: 1977.
- Гусейн Заде М.И. Построение теории изгиба слонстых пластинок. Труды VI Всес.конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука. 1966. с. 367 378.
- 12. Гусейн Заде М.И. К построенню теории изгиба слонстых пластниок. ПММ, 1968. т.32, вын. 2. с. 232 243.
- Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений М.: Наука, 1981, 400 с.
- Агаловян Л.А. О погранслое пластинок. Докл. АН Арм. ССР, 1972, т. 55. N.3, с.155

Институт механики НАН Армении

Поступпла в редакцию 17-05. 1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՉԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխոսնիկա

49, N 3, 1996

Механика

О СДВИГОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА Григорян Э. Х., Саркисян Л. В.

է, Խ. Գրիգորյան, Լ. Վ. Սարգսյան

Գյնգոէլնկտրիկ կիսատարածության սահքային տատանումների մասին

Դիտարկվում է խնդիր պյեզոէլեկտրիկ կիսատարածության սահքային տատանումների վերաբերյալ, երբ կիսատարածության եզրային մակերևույթի վրա կիրառված է ըստ գծի կենտրոնացված պերիոդիկ ում, Ցույց է տրված, այեզոէֆեկտով պայմանավորված, եզրից դեպի կիսատարածության խորքը տարածվող ալիքի ասկայությունը Գեռավոր գոտում տեղաթոխության և էլեկտրական պոտենցիալի համար, ստացվել են ասիմպոտոիկ բանաձևեր

E. K. Grigonan, L. V. Sarkislan

About shear vibrations of the piezoelectric half space

В работе рассматринается установлющиется слиятовые колобания паслослектрического полупрастранетна (пасло лектрик класса 6 *mm*) токкатовальной симметрино, когда на граинчной поверхности действует сосредоточенным по лиши периодическая сила. Получены представления неремещений в электрического потенциала в вще суммы волновых и неполновых частей. Окальнается, что шутри среды перемещения состоят тольков на полновых частей, а электрический потенцикал инеет неполновую часть Обпартужено, что укальныке волновые части состоят не втако из новерхностных и обычных воли, но в волны (обуванленной паслояффектоз), распространовления и добычных воли, но в волны (обуванленной паслояффектоз), распространовления и добычных воли, но в волны (обуванленной паслояффектоз), распространовления и дубь от поверхности получиров тране на ложупрических потенциала на дальной зове. В этих асполноточеских формулах отвечено валиче волновой части, распространяющейся верисцьикулярно к граничной поверхности со скоростью объемной полны.

Пусть пьезоэлектрическое полупространство отнесено к прямоугольной системе координат Охуг. Ось г совпадает с главной осью симметрии пьезоэлектрика класса 6 mm тексагональной симметрии. Ось х направлена вдоль границы раздела пьезоэлектрического полупространства и вакуума. Границей раздела является плоскость y = 0, на граничной поверхности действует сила $Pe^{-rot}\delta(x)$. где $\delta(x)$ - функция Дирака, ω - частота колебаний, t - параметр, характеризующий время. В таком случае поле упругих смещений можно искать в виде $\bar{u} = (0,0, w(x, y)b^{-rot})$, а электрические потенциялы

 $\Phi_{h}(x, y, t) = \overline{\Phi}_{h}(x, y)e^{-i\omega t}, \Phi_{h}(x, y, z) = \overline{\Phi}_{h}(x, y)e^{-i\omega t}, \text{ rge } \Phi_{h}(x, y, t)$

соответствует вакууму, а $\Phi(x, y, t)$ упругой среде

Поставленная задача для амплитуд перемещений и электрических

нотенциаллов формулируется в виде следующей граничной задачи [1]

$$\Delta w + k^2 w = 0, \quad \Delta \overline{\Phi}_i = \frac{e_{is}}{\varepsilon_{i1}} \Delta w, \quad 0 < y < \infty, \quad -\infty < x < \infty$$

для вакуума

 $\Delta \overline{\Phi}_{\mu} = 0, \quad -\infty < y < 0, \quad -\infty < x < \infty.$

На границе раздела у = 0 выполняется условие

$$c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \overline{\Phi}_{i}}{\partial y} = P\delta(x), \qquad e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \overline{\Phi}_{i}}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{\Phi}_{h}}{\partial y},$$

$$\overline{\Phi}_{i} = \overline{\Phi}_{h}, (y = 0, -\infty < x < \infty)$$

гле $k = \omega/c$, $c = G/\rho$, $G = c_{44}/(1+\chi^2)$, $\chi^2 = e_{15}^2/\varepsilon_{11}c_{44}$ - коэффициент электромеханической связи, e_{15} - въезоэлектрическая постоянная, ε_{11} - диэлсктрическая постоянная пьезоэлектрика, c_{44} - упругая постоянная, ρ - плотность материала пьезоэлектрика, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Рассмотренная граничиая задача решается с помощью мегода интегрального преобразования Фурьс. В результате для w(x, y), $\overline{\Phi}_{i}(x, y)$, $\overline{\Phi}_{b}(x, y)$ получены формулы

$$w(x,y) = \frac{P}{2\pi} \int \frac{\exp\left[-i(\sigma|x]\right) - i\sqrt{\sigma^2 - k^2}y\right]}{A|\sigma| - B\sqrt{\sigma^2 - k^2}} d\sigma$$
(1)

$$\overline{\Phi}_{c}(x,y) = -\frac{AP}{2\pi e_{s}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-i(\sigma|x|-i|\sigma|y)\right]}{A|\sigma| - B\sqrt{\sigma^{2} - k^{2}}} d\sigma + \frac{e_{1s}}{\varepsilon_{11}} w(x,y)$$
(2)

$$\Phi_{k}(x,y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{P}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left[-i(\sigma|x|+i|\sigma|y)\right]}{A|\sigma| - B\sqrt{\sigma^{2} - k^{2}}} d\sigma$$
(3)

где

$$A = e_{15}^{2} / \varepsilon_{11} (1 + \varepsilon_{11}), B = e_{15}^{2} / \varepsilon_{11} + c_{44}.$$

$$(DVHKUHN | A|\sigma| - B\sqrt{\sigma^{2} - k^{2}} \text{ имсет иули } \pm \sigma_{n} \quad \left(\sigma_{n} = Bk / \sqrt{B^{2} - A^{2}}\right).$$
КОТОРЫЕ ЯВЛЯЮТСЯ ВОЛНОВЫМИ ЧИСЛАМИ ПОВЕРХНОСТИОЙ ВОЛНЫ БЛЮСТЕЙЦА-

которые являются волновыми числами поверхностной волны Блюстейна-Гуляева. Чтобы $w(x, y), \overline{\Phi}_i(x, y), \overline{\Phi}_h(x, y)$ удовлетворяли условням уходящей волны, контур интегрирования в (1), (2), (3) должны обходить точки $-k_n - \sigma_n$ сверху, а точки $k_n \sigma_n$ - синау [2]. Причем $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$

Как видно, подынтегральные функции в выражениях $w(x, y), \overline{\Phi}_{e}(x, y), \overline{\Phi}_{b}(x, y)$ содержат $|\sigma|$, который говорит о том, что эти функции не могут быть граничными значениями аналитических функций, поэтому для вычисления этих интегралов нельзя применять методы теории

функций комплексного переменного. В дальнейшем эти интегралы ириведем к такому виду, чтобы возможно было применить к илм вышеуказанные методы.

Рассмотрим w(x, y) и представим ее в виде

$$w(x, y) = P(I^* + I^-)$$

где

$$I^{*} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{0} \frac{\exp\left[-i\left(\sigma|x| - i\sqrt{\sigma^{2} - k^{2}}\right)y\right]}{A\sigma - B\sqrt{\sigma^{2} - k^{2}}} d\sigma \quad I^{*} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{\exp\left[-i\left(\sigma|x| - i\sqrt{\sigma^{2} - k^{2}}\right)y\right]}{A\sigma + B\sqrt{\sigma^{2} - k^{2}}} d\sigma$$

Далее исследуем I^* , представляя его в виде $I^- = I^+_1 + I^+_2$

r, te

$$I_{1}^{-} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left[-ir(\sigma|\cos\varphi| - i\sqrt{\sigma^{2} - k^{2}}\sin\varphi)\right]}{A\sigma + B\sqrt{\sigma^{2} - k^{2}}} d\sigma$$
$$I_{2}^{-} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} \frac{\exp\left[-ir(\sigma|\cos\varphi| - i\sqrt{\sigma^{2} - k^{2}}\sin\varphi)\right]}{A\sigma + B\sqrt{\sigma^{2} - k^{2}}} d\sigma$$
$$rm x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r = \sqrt{r^{2} + v^{2}}, \quad 0 \in \varphi, \quad z \in z$$

The $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 < \varphi < \pi$.

. Пользуясь подходом, изложенным в работе [3], сделаем в T_1 замену переменных

$$\sigma |\cos \varphi| - i \sqrt{\sigma^2 - k^2} \sin \varphi = \lambda \tag{4}$$

Тогда $I_{\pm}^{-} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(\lambda)} \frac{e^{-i\lambda r}}{A\sigma_2 + B\sqrt{\sigma_2^2 - k^2}} \frac{d\sigma_2}{d\lambda} d\lambda$, где $\sigma_2(\lambda)$ определяется

n. (4) n panna $\sigma_{1}(\lambda) = \lambda |\cos \varphi| - \sqrt{k^{2} - \lambda^{2}} \sin \varphi.$

Контур интегрирования $\gamma(\lambda)$ - по контур в комплексной плоскости λ , который начинается с точки – $k |\cos \varphi|$ и стремится, монотонно убывая, к бесконечности при $\sigma \to -\infty$, при этом обходя точку – $\lambda = -\sigma (|\cos \varphi| + iAB^{-1} \sin \varphi)$ синау. Поскольку подынтегральная функция регулярна в области, содержащейся между линией $\gamma(\lambda)$ и частью действительной оси, обходящей точку вствления $\lambda = -k$ синзу. - $\infty < \lambda < -k$ [созф], то нетрудно видеть, что

$$I_{1}^{-} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-k_{1}\cos\phi|} \frac{e^{-i\lambda r}}{A\sigma_{2} + B\sqrt{\sigma_{2}^{2} - k^{2}}} \frac{d\sigma_{2}}{d\lambda} d\lambda$$
(5)

Далее, носкольку $\sqrt{k^2 - \lambda^2} > 0$ при $-k < \lambda < 0$ и точка $\lambda = -k$

обходит синзу, то $\sqrt{k^2 - \lambda^2}$ будет отрицательно мнимым при $\lambda < -k$ Тогда $\sqrt{k^2 - \lambda^2}$ можно представить в виде $\sqrt{k^2 - \lambda^2} = -i\sqrt{\lambda^2 - k^2}$, подагал $\sqrt{\lambda^2 - k^2} > 0$ при $\lambda < -k$. В таком случае $\sigma_2(\lambda)$ представится в виде $\sigma_3(\lambda) = \lambda |\cos\varphi| + i\sqrt{\lambda^2 - k} \sin\varphi$, $0 < \varphi < \pi$

Теперь переходим к обсуждению интеграла I_{2}^{-} . Негрудно видеть, что $d\lambda/d\sigma = 0$ при $\sigma = -k|\cos\varphi|$. Кроме того, $d\lambda/d\sigma < 0$ при $-k < \sigma < -k|\cos\varphi|$, а при $-k|\cos\varphi| < \sigma < 0$ $-d\lambda/d\sigma > 0$. Имея в виду это, получим

$$I_{2} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-k_{\text{longel}}}^{-k} \frac{e^{-i\Delta t}}{A\sigma_{2} + B\sqrt{\sigma_{2}^{2} - k^{2}}} \frac{d\sigma_{2}}{d\lambda} - \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^{-k_{\text{max}}} \frac{e^{-i\Delta t}}{A\sigma_{1} + B\sqrt{\sigma_{1}^{2} - k^{2}}} \frac{d\sigma_{1}}{d\lambda} d\lambda \quad (6)$$

r,ge

$$\sigma_1(\lambda) = \lambda |\cos \varphi| + \sqrt{k^2 - \lambda^2} \sin \varphi$$

Окончательно имея в виду (5), (6), для 1° получим представление

$$I^{-} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega}}{A\sigma_{i} + B\sqrt{\sigma_{i}^{2} - k^{2}}} \frac{d\sigma_{i}}{d\lambda} d\lambda,$$

где $\sqrt{\lambda^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \lambda^2}$ при $\lambda < -k\sin\varphi$, то есть контур интегрирования обходат гочку нетвления $\lambda = -k$ сверху. Причем $\sigma_{\pm}(\lambda) = \sigma_1(\lambda) = \lambda |\cos\varphi| + i\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ при $-\infty < \lambda < -k\sin\varphi$.

Поступая аналогичным образом относительно I^{*} , получим

$$I^{-} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1\sin\theta}^{0} \frac{e^{-i\lambda t}}{A\sigma_{1} - B\sqrt{\sigma_{1}^{2} - k^{2}}} \frac{d\sigma_{1}}{d\lambda} d\lambda + i \frac{A}{A^{2} - B^{2}} e^{-i\lambda_{0}t}$$

Fig: $\overline{\lambda}_{e} = \sigma_{n} (|\cos \varphi| - iAB^{-1}\sin \varphi)$. Kontyp interphyddanna ofxodur tonry netrionna $\lambda = k$ chury, to ecte $\sqrt{\lambda^{2} - k^{2}} = -i\sqrt{k^{2} - \lambda^{2}}$ from $-k \sin \varphi < \lambda < \infty$.

Таким образом, мы принын к искомому представлению $w(r, \phi)$

$$w(r,\varphi) = -\frac{P}{2\pi} \int_{-\sqrt{\lambda^2 - k^2}}^{\infty} \frac{\left(\lambda \sin\varphi - i\sqrt{\lambda^2 - k^2} |\cos\varphi|e^{i\vartheta} d\lambda\right)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2} \left[B\left(\lambda \sin\varphi - i\sqrt{\lambda^2 - k^2} |\cos\varphi|\right) + iAsg\left(\lambda + k\sin\varphi\right)\left(\lambda\cos\varphi + i\sqrt{\lambda^2 - k^2} \sin\varphi\right)\right]} + \frac{iA}{A^2 - B^2} e^{-i\lambda_2 t}$$

Case
$$\sqrt{\lambda^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \lambda^2}, \quad -\infty < \lambda < \infty$$
(7)

Ветнь функции $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$, удовлетноряющая условию (7), можно выбирать, например, если провести разрезы и комплексной плоскости по лициям – $k - i\infty$, В дальнейшем мы будем иметь дело с указанным образом разрезанной илоскостью

Очевидно, в силу аналитического продолжения, что (7) имеет место во всей комплексной плоскости.

Далее нашей целью будет получение представления $w(r, \varphi)$ в виде суммы интегралов по разрезам $-k - i\infty$, $k + i\infty$ и $-k\sin\varphi - i\infty$, то есть представления в виде суммы волновых частей и части поверхностной волны. Для этого $w(r, \varphi)$ защищем в виде

$$w(r,\varphi) = -\frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda,\varphi) e^{-i\lambda r} d\lambda - \frac{P}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgr}(\lambda + k \sin\varphi) F_2(\lambda,\varphi) e^{-i\lambda r} + \frac{iAP}{A^2 - B^2} e^{-i\lambda r}, \quad (8)$$

r/te

$$F_{i}(\lambda,\varphi) = \frac{B[\lambda\sin\varphi - i\sqrt{\lambda^{2} - k^{2}}[\cos\varphi]]^{*}}{\sqrt{\lambda^{2} - k^{2}}\left[B^{2}(\lambda\sin\varphi - i\sqrt{\lambda^{2} - k^{2}}[\cos\varphi])^{*} + A^{2}(\lambda|\cos\varphi| + i\sqrt{\lambda^{2} - k^{2}}\sin\varphi)^{2}\right]}$$
$$F_{2}(\lambda,\varphi) = \frac{A[\lambda\sin\varphi - i\sqrt{\lambda^{2} - k^{2}}]\cos\varphi](\lambda|\cos\varphi| + i\sqrt{\lambda^{2} - k^{2}}\sin\varphi)}{\sqrt{\lambda^{2} - k^{2}}\left[B^{2}(\lambda\sin\varphi - i\sqrt{\lambda^{2} - k^{2}}]\cos\varphi]\right]^{*} + A^{2}(\lambda|\cos\varphi| + i\sqrt{\lambda^{2} - k^{2}}\sin\varphi)^{2}}$$

Поскольку второй интеграл в (8) ваят от функции, не допускающей продолжения в комплексную илоскость, и так как она содержит функцию sgn $(\lambda + k \sin \varphi)$, то очевидно, что к этому интегралу, непосредствению, нельзя применить методы функций комплексного переменного. Поэтому поступым следующим образом. Рассмотрим однозначные цетви функции $\ln(k \sin \varphi + \lambda)$, одна на которых на вещественной оси равна

$$\ln\{k\sin\varphi + \lambda + i0\} = \ln\{k\sin\varphi + \lambda\} + i\pi\xi(-(k\sin\varphi + \lambda)) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \arg\{k\sin\varphi + \lambda\} < \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\ln(k\sin\varphi+\lambda+i0) = \ln(k\sin\varphi+\lambda) - i\pi\theta(-(k\sin\varphi+\lambda)) \quad \left(-\frac{3\pi}{2} < \arg(k\sin\varphi+\lambda) < \frac{\pi}{2}\right)$$

где $\theta(z)$ функция Хевисайда.

Тогда sgn $(k \sin \varphi + \lambda)$ можно представить в виде

$$\operatorname{sgn}(k\sin\varphi + \lambda) = \frac{1}{\pi i} \ln(k\sin\varphi + \lambda - i0) - \frac{1}{\pi i} \ln(k\sin\varphi + \lambda + i0) + 1$$
(9)

Далее, выражения $sgn(k \sin \varphi + \lambda)$ из (9) нодставим во второй

интеграл в выражении $w(r, \phi)$. В итоге получим

$$w(r,\varphi) = -\frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda) e^{-i\omega} d\lambda + \frac{P}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\lambda,\varphi) \ln(k\sin k\varphi + \lambda - i0) e^{-i\omega} d\lambda - \frac{P}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\lambda) \ln(k\sin \varphi + \lambda + i0) e^{-i\omega} d\lambda - \frac{P}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\lambda,\varphi) e^{-i\omega} d\lambda + \frac{iAP}{A^2 - B^2} e^{-i\lambda_z}$$

Здесь уже $w(r, \phi)$ представлена в виде суммы интегралов, подынтегральные выражения которых аналитически продолжили в соответствующих комплексных плоскостях и поэтому к ним можно применить методы теории функции комплексного переменного. Поступая указанным образом, получим

$$w(r, \phi) = -\frac{iP}{\pi} \int_{0}^{\infty} f_{1}(\tau, \phi) e^{-ir} d\tau e^{i\left(\frac{1}{4}r - \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{P}{\pi} \int_{0}^{\infty} f_{2}(r, \phi) e^{-ir} d\tau e^{i4x} + \frac{iPA}{A^{2} - B^{3}} \exp(i\sigma_{u}|x| - AB^{-1}\sigma_{u}|y)$$
(10)

$$f_1(\tau,\varphi) = \frac{Bi\tau(i\tau+2k) + k^2 \sin\varphi (B\sin\varphi - iA|\cos\varphi|)}{\sqrt{\tau(2k+i\tau)} [(B^2 - A^2)i\tau(2k+i\tau) + k^2 (B\sin\varphi - iA|\cos\varphi|)^2]}$$

$$f_2(\tau, \varphi) = F_2(\lambda, \varphi), \quad \lambda = -k \sin \varphi - i\tau$$

Выше имелось в виду, что на линии $-k - i\infty$ $\ln(k \sin \varphi + \lambda + i0) = \ln(k \sin \varphi + \lambda - i0) + i2\pi.$

Итак, мы получили искомое представление $w(r, \phi)$ Как видно из (10), нервый член представляет обычную объемную волну, второй член это волна, обусловленная цьезоэффектом, распространяющаяся влаубь от поверхности полупространства, а третий член представляет поверхностную волиу. Как нетрудно видеть, второй член это неволновая часть w(r, 0).

Далес, явиду гого, что подынтегральные функции в (10) эксноненциально убывают, то главный вклад в значении интегралов дает их поведение в окрестности нуля. Имея в виду вышесказанное, для $w(r, \varphi)$ ири $r \to \infty$, получим асимитотическую формулу

$$w(r,\varphi) = -\frac{iPA}{B^2 - A^2} \exp(i\sigma_n |x| - AB^{-1}\sigma_n y) + \left[\frac{-iP}{2\pi} \frac{\sin\varphi}{(B\sin\varphi - iA|\cos\varphi|)(kr^{1/2})} + \frac{P}{\sqrt{2\pi}(B\sin\varphi - iA|\cos\varphi|)} \times \right]$$

$$\times \left[\frac{A(A\sin\varphi - iB[\cos\varphi])}{(B\sin\varphi - iA[\cos\varphi])^{2}} - \frac{\sin\varphi}{8} \right] \frac{1}{(kr)^{3/2}} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{1}{4} + \frac{1}{$$

Как видно из (12), последний член формулы (11) представляет волну, распространяющуюся по направлению оси у со скоростью объемной волны.

Приступны к обсуждению $\overline{\Phi}_{i}(x, y)$, рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-i(\sigma|x|-i|\sigma|y)\right]}{A|\sigma|-B\sqrt{\sigma^{2}-k^{2}}} d\sigma = \int_{0}^{\infty} \frac{\exp\left[-ir(\sigma|\cos\varphi|-i\sigma\sin\varphi)\right]}{A\sigma-B\sqrt{\sigma^{2}-k^{2}}} d\sigma - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-ir(\sigma|\cos\varphi|+i\sigma\sin\varphi)\right]}{A\sigma+B\sqrt{\sigma^{2}-k^{2}}} d\sigma$$
(13)

С помощью деформирования контуров интегрирования, для первого интеграла (13) получим

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\exp\left[-ir\left(\sigma\left[\cos\varphi\right]-i\sigma\sin\varphi\right)\right]}{A\sigma-B\sqrt{\sigma^{2}-k^{2}}}d\sigma = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{A\tau-B\sqrt{\tau^{2}+\left(k\overline{z}\right)^{2}}}d\tau$$

а для второго интеграла получим

$$\int_{-}^{0} \frac{\exp\left[-ir\left(\sigma\left[\cos\varphi\right]+i\sigma\sin\varphi\right)\right]}{A\sigma+B\sqrt{\sigma^{2}-k^{2}}} d\sigma = \int_{-A\lambda+B\sqrt{\lambda^{2}-(kz)^{2}}}^{0} d\lambda,$$
(14)

rac $z = |\cos \varphi| + i \sin \varphi$, $\overline{z} = |\cos \varphi| - i \sin \varphi$

Из (15) следует, что интеграл (14) можно рассматривать в комплексной илоскости с разрезами, идущими по линиям $-kz - i\infty$ и $kz + i\infty$. Поступая указанным образом, после деформирования контура интегрирования получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{0} \frac{e^{-iAr}}{A\lambda + B\sqrt{\lambda^{2} - (kz)^{2}}} d\lambda = -\frac{iA}{B^{2} - A^{2}} \exp(i\sigma_{a}|x| - \sigma_{a}y) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\sqrt{(2kz + i\tau)\tau}}{(B^{2} - A^{2})(kz + i\tau)^{2} - B^{2}(kz)^{2}} e^{-i\tau} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-i\tau} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-i\tau} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-i\tau} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-i\tau} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-i\tau} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-it} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-it} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-it} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-it} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-it} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-it} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-it} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-it} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-it} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-it} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-it} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-it} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-it} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-it} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-it} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-it} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - A^{2}} e^{-it} d\tau \exp(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky) + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{4} - ky} + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{B^{2} - i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{4}$$

29

(15)

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{a}^{b}\frac{e^{-i\tau}}{A\tau + B\sqrt{\tau^{2} + (kz)^{2}}}d\tau$$

FORDAL, JAR $\overline{\Phi}_{i}(x, y)$ HOLIYHM

$$\overline{\Phi}_{i}(x, y) = \frac{iA^{2}P}{e_{15}(B^{2} - A^{2})}\exp(i\sigma_{n}|x| - \sigma_{n}y) + \frac{e_{35}}{\varepsilon_{11}}w(x, y) - \frac{ABP}{\pi e_{15}}\int_{0}^{\pi}\frac{\sqrt{(2kz + i\tau)\tau}}{(B^{2} - A^{2})(kz + i\tau)^{2} - B^{2}(kz)^{2}}e^{-i\tau}d\tau\exp\left[i\left(k|x| - \frac{\pi}{4}\right) - ky\right] - \frac{AP}{2\pi e_{15}}\int_{a}^{b}\left[\left(A\tau - B\sqrt{\tau^{2} + (kz)^{2}}\right)^{-1} + \left(A\tau + B\sqrt{\tau^{2} + (kz)^{2}}\right)^{-1}\right]e^{-i\tau}d\tau$$
 (16)

Как видно из (16), в отличне от $w(r, \varphi)$. ($0 < \varphi < \pi$), $\overline{\Phi}_{,}(r, \varphi)$ имеет неволновую часть. Кроме того, в выражении $\overline{\Phi}_{,}(r, \varphi)$ третий член представляет поверхностную волну, распространяющуюся со скоростью объемной волны, которая опять отсутствует в $w(r, \varphi)$ Очевидно, что $\overline{\Phi}_{,}(r, \varphi)$ имеет также волновую часть, распространяющуюся вглубь от поверхности полупространства.

Поступая как выше, для $\overline{\Phi}_{c}(r, \varphi)$ получим асимптотическую формулу при $r \to \infty$

$$\overline{\Phi}_{i}(r,\varphi) = \frac{iA^{2}P}{e_{1s}(B^{2} - A^{2})} \exp(i\sigma_{n}|x| - \sigma_{n}y) + \frac{BP \exp\left[i\left(k|x| - \frac{\pi}{4}\right) - ky\right]}{e_{1s}z^{3/2}\sqrt{2\pi(kr)^{3/2}}} + \frac{iAP \sin\varphi}{\pi Be_{1s}}\frac{1}{kr} + \frac{AP(A\cos 2\varphi - iB\sin\varphi|\cos\varphi|)}{\pi B^{2}e_{1s}(kr)^{2}} + O((kr)^{-5/2}) + \frac{e_{1s}}{\varepsilon_{11}}w(r,\varphi).$$

ЛИТЕРАТУРА

- Балакиреа М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристалах -Новосибирск: Изд. "Наука", 1982.
- Нобя Б. Метод Винера Хонфа. М.: И.Л. 1962.
- Григорян Э.Х. О колебании магнитоупругой среды, возбуждаемой сосредоточенной гармонической силой - Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1978 т. 31, N 5.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 30. 12. 1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՁԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա

49, N 3, 1996

Механика

ДВЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КРУГОВОГО СЕКТОРА

Макарян В. С.

Վ.Ս.Մակարյան

Երկու խնդիր շրջանային սեկտորի համար

Դիտարկված են շրջանային նեկտրի շրջանային նգստիր հանդր Դիտարկված են շրջանային նեկտրիի համվոր առաջին եզրային խնդիր և նման խնդիր, Երբ սեկտորը ունի սիմետրիկ ճաք։ Առաջին խնդիրը բերված է լիովին ռեզուլյար գծային համրահաշվա-կան հավասարումների համակարգի Երկրորդ խնդիրը նախ բերված է զույգ հավասարումների, ապա քվազիլիովին ռեզուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի

V.S.Makanan Two problems for circular sector

Рассмотрены первая основная задача для кругового сектора с произвольным ус лом раствора и аналогичная задача для кругового сектора, имеющего разрез на линии симметрии. Первая задача сведена к решению вполне регулярной бесконечной системы иниейных алтебранческих уравнений Вторая задача сначала сведена к наршым уравнениям, затем к решению кваливнолне регулярной бесконечной системы линейных а исебранческих уравнений

1. Первая основная задача теории упругости для кругового сектора

Решение плоской задачи теории упругости в полярных координатах r, φ , как известно [1.5], приводится к отысканию одной функции $\Phi(r, \varphi)$, удовлетворяющей бигармоническому уравнению.

Преобразованием $r = \text{Re}^{-t}$ задача сводится к отысканию одной функции $F(t, \varphi) = \text{Re}^{-t} \Phi(r, \varphi)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^4 F}{\partial t^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial t^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F = 0$$
(1.1)

Рассмотрим первую основную задачу теории упругости для кругового сектора конечного раднуса с произвольным углом раствора При симметричном нагружении задачу решаем для половины сектора. При этом, граничные условия в координатах $(t, \varphi), t = \ln \frac{R}{r}$ записываются в виде :

условия на круговой части границы

$$\sigma_r(0,\varphi) = f(\varphi), \qquad (0 \le \varphi \le \varphi_1 < \pi)$$

$$\tau_{r\varphi}(0,\varphi) = g(\varphi), \qquad (0 \le \varphi \le \varphi_1 < \pi)$$
(1.2)

условия симметрии

$\tau_{i\varphi}(t,0)=0.$	v(t,0)=0,	$(0 < t < \infty)$	(1.3)
---------------------------	-----------	--------------------	-------

 $(1 \ 1)$

и условия на раднальной части контура $\tau_{i\phi}(t, \phi_i) = g_1(r), \qquad (0 < t < \infty)$ $\sigma_{i\phi}(t, \phi_i) = f_1(t) \qquad (0 < t < \infty)$



$$\sum_{i=1}^{q} F_{i} = 0 \quad \text{mar}$$

$$R \int_{0}^{\varphi_{i}} [f(\varphi)\cos\varphi - g(\varphi)\sin\varphi] d\varphi = \int_{0}^{R} [f_{i}(r)\sin\varphi_{i} - g_{1}(r)\cos\varphi_{i}] dr \quad (1.5)$$

Функцию $F(t, \varphi)$ для кругового сектора $0 \le r < 1, -\varphi_t \le \varphi \le \varphi_t$ при налични одной осн симметрии ($\varphi = 0$) представим в виде суммы тригонометрического ряда и интеграла Фурье

$$F(t,\varphi) = (A_n + tB_n)e^{-t} + \frac{2}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_t(t)\cos\alpha_k\varphi + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\Phi(\beta,\varphi)\cos\beta td\beta \quad (1.6)$$

rae

$$\Psi_{k}(t) = \frac{(-1)^{t} X_{k}}{2} \left[\frac{e^{-(\alpha_{1}-1)t}}{\alpha_{k}-1} - \frac{e^{-(\alpha_{1}+1)t}}{\alpha_{k}+1} \right] - \frac{g_{k}}{2} \left[e^{-(\alpha_{1}-1)t} - e^{-(\alpha_{1}+1)t} \right]$$

$$\Psi_{k}(0) = \frac{(-1)^{t} X_{k}}{\alpha_{k}^{2}-1}, \quad \Psi_{k}'(0) = 0, \quad \alpha_{k} = \frac{k\pi}{\varphi_{1}}$$

$$\Phi(\beta,\varphi) = \gamma(\beta)Y(\beta)\Phi_{1}(\beta,\varphi) + \tilde{g}_{1}(\beta)\Phi_{1}(\beta,\varphi)$$

$$\Phi_{1}(\beta,\varphi) = \beta\Phi_{1}(\beta,\varphi) - \Phi_{2}(\beta,\varphi)$$

(1.7)

причем

$$\Phi(\beta,\varphi_1) = \frac{Y(\beta)}{\beta^2 + 1} + \frac{\widetilde{g}_1(\beta)\sin 2\varphi_1}{2\delta(\beta)}, \quad \int \Phi(\beta,\varphi)d\varphi = \frac{2\beta\gamma(\beta)Y(\beta)}{(\beta^2 + 1)^2} \quad (1.8)$$
$$\Phi'(\beta,\varphi_1) = -\widetilde{g}_1(\beta), \qquad \Phi'(\beta,0) = 0.$$

$$\begin{split} \delta(\beta)\Phi_1'(\beta,\varphi) &= \mathrm{sh}\beta\varphi\cos\varphi\mathrm{ch}\beta\varphi_1\sin\varphi_1 - \mathrm{ch}\beta\varphi\sin\varphi\mathrm{sh}\beta\varphi_1\cos\varphi_1\\ \delta(\beta)\Phi_2'(\beta,\varphi) &= \mathrm{sh}\beta\varphi\cos\varphi\mathrm{sh}\beta\varphi_1\cos\varphi_1 - \mathrm{ch}\beta\varphi\sin\varphi\mathrm{ch}\beta\varphi_1\sin\varphi_1\\ \delta(\beta) &= \mathrm{sh}^2\beta\varphi_1 + \mathrm{sin}^2\varphi_1, \ \gamma(\beta) &= \frac{\mathrm{ch}2\beta\varphi_1 - \cos2\varphi_1}{\mathrm{sh}2\beta\varphi_1 + \beta\sin2\varphi_1}, \ \chi(\beta,t) = \mathrm{sin}\beta t - \beta\cos\beta t\\ g_1 &= \frac{R}{\alpha_k}\int_0^{\infty} g(\varphi)\sin\alpha_k\varphi d\varphi, \quad f_k &= \int_0^{\varphi_1} f(\varphi)\cos\alpha_k\varphi d\varphi, \quad (k = 0.1, 2...)\\ \widetilde{g}_1(\beta) &= \frac{1}{\beta}\int_0^{\infty} rg_1(r)\sin\beta_k t dt, \quad \widetilde{f}_1(\beta) = \int_0^{\infty} rf_1(r)\chi(\beta,t) dt, \quad \widetilde{f}_{10} = \int_0^{\infty} rf_1(r)e^{-t} dt \end{split}$$

При удовлетворении граничным условиям, заданным на дуге окружности ($t = 0, 0 < \varphi < \varphi_1$), используем ортогональность тригономст рических функций, а для удовлетворения условиям, заданным на линиях ($\varphi = const.0 < t < \infty$), кроме обычного интеграла Фурьс, используем интегральные преобразования :

$$\varphi(\beta) = \int_{0}^{\infty} f(t)\chi_{k}(\beta,t)dt \qquad k = 1.2$$

$$f(t) = (-1)^{k} e^{-\gamma t} H_{0}(\gamma) \int_{0}^{\infty} f(x) e^{-\gamma t} dx + \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(\beta)\chi_{k}(\beta,t)d\beta}{\beta^{2} + \gamma^{2}}; \quad (1.9)$$

 $\chi_1(\beta, t) = \gamma \cos \beta t + \beta \sin \beta t, \quad \chi_2(\beta, t) = \gamma \sin \beta t - \beta \cos \beta t.$ (1.10) где γ произвольное число, а $H_0(\gamma)$ - функция Хевисайда.

При выборе (1.6) (1.8) условия симметрии и граничные условия на касательные напряжения удовлетворяются тождественно. Удовлетворяя условиям на пормальные напряжения, получаются следующие уравнения для определения $X_1, Y(\beta), A_0$ и B_0

$$X_{k} + \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{(\alpha_{k}^{2} - 1)\beta\gamma(\beta)Y(\beta)}{\left[\beta^{2} + (\alpha_{k} + 1)^{2}\right]\left[\beta^{2} + (\alpha_{k} - 1)^{2}\right]} d\beta = (-1)^{k} (g_{k} - Rf_{k}) - \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\beta^{2} (\beta^{2} + 3\alpha_{k}^{2} + 1)\widetilde{g}_{1}(\beta)}{\left[\beta^{2} + (\alpha_{k} + 1)^{2}\right]\left[\beta^{2} + (\alpha_{k} - 1)^{2}\right]} d\beta \qquad (k = 1, 2...)$$
$$Y(\beta) + \frac{4}{\varphi_{k}} \sum_{k=1}^{\pi} \frac{(\beta^{2} + 1)\alpha_{k}X_{k}}{\left[\beta^{2} + (\alpha_{k} + 1)^{2}\right]\left[\beta^{2} + (\alpha_{k} - 1)^{2}\right]} = \frac{2B_{0}}{\beta^{2} + 1} + \frac{1}{\beta} \widetilde{f}_{1}(\beta) - \frac{1}{2} \left[\beta^{2} + (\alpha_{k} + 1)^{2}\right]\left[\beta^{2} + (\alpha_{k} - 1)^{2}\right]} = \frac{2B_{0}}{\beta^{2} + 1} + \frac{1}{\beta} \left[\beta^{2} + (\alpha_{k} - 1)^{2}\right]$$

$$-\frac{\left(\beta^{2}+1\right)\sin 2\varphi_{1}}{2\delta(\beta)}\widetilde{g}_{1}(\beta)+\frac{2}{\varphi_{1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}\alpha_{k}^{2}\left(\alpha_{k}^{2}+3\beta^{2}+1\right)g_{k}}{\left[\beta^{2}+\left(\alpha_{k}+1\right)^{2}\right]\left[\beta^{2}+\left(\alpha_{k}-1\right)^{2}\right]}\qquad\left(0<\beta<\infty\right)$$

$$(2A_{0} - B_{0})\varphi_{1} + \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\beta\gamma(\beta)Y(\beta)}{(\beta^{2} + 1)^{2}} d\beta = Rf_{0} + \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\beta^{2}\overline{g}_{1}(\beta)}{\beta^{2} + 1} d\beta$$

$$A_{0} - B_{0} = \int_{0}^{\infty} rf_{1}(r)e^{-s} dt - \frac{2}{\varphi_{1}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} g_{k}$$

$$(1.11)$$

\$P1 1=1

Докажем, что бесконечные системы (1.11) вполне регулярны. Вычислым суммы

$$\rho_{1} = \frac{4|\alpha_{k}^{2} - 1|}{\pi} \int_{0}^{1} \frac{\beta\gamma(\beta)d\beta}{[\beta^{2} + (\alpha_{k} - 1)^{2}][\beta^{2} + (\alpha_{k} + 1)^{2}]} \leq \frac{|\alpha_{k}^{2} - 1|}{\pi\alpha_{k}} \ln \left|\frac{\alpha_{k} + 1}{\alpha_{k} - 1}\right| = \frac{2}{\pi} \left[1 - \frac{2}{3\alpha_{k}^{2}} - \frac{2}{3 \cdot 5\alpha_{k}^{4}} - \frac{2}{5 \cdot 7\alpha_{k}^{6}} - \cdots\right] \rightarrow \frac{2}{\pi} \quad (1 + 2)$$

$$\rho_{2} = \frac{4}{\varphi_{1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{k}(\beta^{2} + 1)}{[\beta^{2} + (\alpha_{k} - 1)^{2}][\beta^{2} + (\alpha_{k} + 1)^{2}]} \leq \frac{4(\beta^{2} + 1)}{\pi} \int_{0}^{1} \frac{\alpha d\alpha}{[\beta^{2} + (\alpha - 1)^{2}][\beta^{2} + (\alpha + 1)^{2}]} = \frac{(\beta^{2} + 1)}{\pi\beta} \operatorname{arcctg} \frac{\beta^{2} - 1}{2\beta} = \frac{2(\beta^{2} + 1)}{\pi(\beta^{2} - 1)} \left[1 - \frac{x^{2}}{3} - \frac{x^{4}}{5} - \frac{x^{6}}{7} - \cdots\right], \quad x = \frac{2\beta}{\beta^{2} - 1}$$
Otherwise $\rho_{1} = 1 - \rho_{2} = \frac{2}{2}$

$$(1 + 13)$$

$$\lim_{n \to \infty} p_1 = \lim_{n \to \infty} p_2 = \frac{2}{\pi}$$
(1.13)

В общем случае свободные члены стремятся к нулю как 0(k⁻¹). При отсутствии касательных напряжений порядок убывания к пулю свободных членов увеличивается на единицу.

 $g_1(r) = g(\phi) = 0, \quad f_1(r) = f(\phi) = P_0 = const.$ В частном случае, когда система (1.11) становится однородным и в силу (1.8) имеет только нулевое решение, кроме

$$A_0 = \frac{1}{2} R P_0 \tag{1.14}$$

2. Плоская задача для кругового сектора с трещиной

Рассматривается плоская задача для кругового сектора, имеющего разрез на линии симметрии сектора (фиг.2). На радиальных частях контура приложены гладкие штампы. На контуре сектора касательные напряжения отсутствуют, нормальные напряжения заданы в виде произвольных интегрируемых функций.

Граничные условия имеют вид

 $\sigma_1(0, \varphi) = f_0(\varphi),$ $v(t, \varphi_1) = a + be^{-1},$ $\tau_{rolr} = 0.$ (2.1) $\sigma_{\varphi}(t, 0) = \sigma(t),$ ($t_0 < t < \infty$); v(t, 0) = 0 ($0 \le t \le t_0$) Условни на τ_{k_P} удовлетворяются тождественно. Из остальных условий (2.1) получим

$$2\sum_{l=1}^{\infty} A_{l} \cos \alpha_{l} \varphi + D - 2A = \int_{0}^{\infty} \left[\Phi^{\prime\prime}(\beta, \varphi) + \Phi(\beta, \varphi) \right] d\beta - Rf_{0}(\varphi) \qquad (0 \le \varphi \le \varphi_{1})$$

$$\int_{0}^{\beta} \frac{\beta^{2} + 1}{\beta} \Phi(\beta, \varphi) d\varphi \chi(\beta, t) d\beta - 4\varphi_{1} D e^{-1} + a_{0} \sin \varphi_{1} + C_{0} e^{-1} = a + b e^{-1}$$
(2.2)

$$\int_{0}^{\infty} \beta \Phi(\beta, 0) \chi(\beta, t) d\beta + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Psi_{k}^{\prime\prime}(t) - \Psi_{k}^{\prime}(t) \right] + 2\Phi_{0}(t) - 3De^{-1} = r\sigma(t) \qquad (t_{0} < t < \infty)$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\beta^{2} + 1}{\beta} \int \Phi(\beta, \varphi) d\varphi \chi(\beta, t) d\beta + C_{0} e^{-1} = 0 \qquad (0 \le t \le t_{0})$$

H3 периого п второго соотпошений (2.2) писем

$$4\varphi_1 D = -2(a - a_0 \sin \varphi_1) - b + c_0 \qquad (2.3)$$

$$B(\beta) \cos \varphi_1 + C(\beta) ch\beta \varphi_1 = \frac{a - a_0 \sin \varphi_1}{\pi} \left[\frac{1}{\varphi_1} - \lim_{t \to 0} \frac{x\beta}{x^2 + \beta^2} \right] \equiv Z(\beta)$$

$$A_k = \frac{2(\alpha_k^2 - 1)}{\varphi_1} \int_0^{\infty} \frac{\beta \left[\bar{X}(\beta) - (-1)^k Z(\beta) \right] d\beta}{\left[\beta^2 + (\alpha_k - 1)^2 \right] \left[\beta^2 + (\alpha_k + 1)^2 \right]} - f_{0k}$$

$$D - 2A = -\frac{2}{\varphi_1} \int_0^{\infty} \frac{\beta \left[\tilde{X}(\beta) - Z(\beta) \right] d\beta}{(\beta^2 + 1)^2} - f_{\infty}$$

rate

$$\bar{X}(\beta) = -C(\beta) \frac{ch^2 \beta \varphi_1 - cos^2 \varphi_1}{cos \varphi_1} + \frac{Z(\beta)ch\beta \varphi_1}{cos \varphi_1} = X(\beta)N_0(\beta)$$

$$C(\beta) = \frac{Z(\beta)ch\beta \varphi_1 - \tilde{X}(\beta)cos \varphi_1}{ch^2 \beta \varphi_1 - cos^2 \varphi_1}; \qquad B(\beta) = \frac{\tilde{X}(\beta)ch\beta \varphi_1 - Z(\beta)cos \varphi_1}{ch^2 \beta \varphi_1 - cos^2 \varphi_1}$$

$$f_{\alpha t} = \frac{R}{\varphi_1} \int_0^{\varphi_1} f_0(\varphi)cos \alpha_t \varphi d\varphi \qquad (k = 0.1, 2...) \qquad (2.4)$$

$$N_0(\beta) = \frac{ch^2 \beta \varphi_1 - cos^2 \varphi_1}{\pi}; \qquad M_n(\beta) = \frac{sh\beta \varphi_1 cos \varphi_1 + \beta ch\beta \varphi_1 sin \varphi_1}{ch^2 \beta \varphi_1 - cos^2 \varphi_1}$$

$$Z(\beta) = \frac{a - a_0 sin \varphi_1}{\pi} \left[\frac{1}{\beta} - \beta \delta(\beta) \right]; \qquad \chi(\beta, t) = sin \beta t - \beta cos \beta t$$
We noccertaint , tays coordinatentii (2.2) получим партые уравнения

$$\int_0^{\omega} \frac{X(\beta) X(\beta, t)}{\beta^2 + 1} d\beta + \int_0^{\omega} e^{-t} = 0 \qquad (0 \le t \le t_0)$$

$$\int_0^{\omega} \frac{\beta X(\beta) X(\beta, t)}{\beta^2 + 1} d\beta = \int_0^{\omega} \frac{\beta Z(\beta) M_0(\beta)}{\beta^2 + 1} \chi(\beta, t) d\beta + 2\Phi_0(t) - -3De^{-t} + \sum_{k=1}^{\omega} \left[\frac{\mu_1''(t) - \Psi_k'(t)}{(t)} \right] - r\sigma(t) \qquad (t_0 < t < 0) \qquad (2.5)$$

Перейдём к решению нарных уравнений (2.5). Умножим оба уравнения на e^{-i} и проинтегрируем первое из них в пределах (0,1), второс в пределах (1, ∞), получим

$$\widetilde{\int}_{0}^{\infty} \left[1 + N(\beta)\right] \frac{X(\beta)\sin\beta t}{\beta^{2} + 1} d\beta = \frac{c_{0}}{2} sht \qquad (0 \le t \le t_{0})$$

$$\widetilde{\int}_{0}^{\infty} \frac{\beta X(\beta)\sin\beta t}{\beta^{2} + 1} d\beta = f_{1}(t) \qquad (t_{0} < t < \infty) \qquad (2.6)$$

1,1e

$$-N(\beta) = 1 - N_{0}(\beta), \quad f_{1} = \int e^{i-x} f(x) dx$$
(2.7)

а через f(t) обозначена правая часть второго уравнения (2.5). Представим решение (2.6) в виде [6]

$$\frac{\beta X(\beta)}{\beta^2 + 1} = \beta \int_0^{\infty} x F_1(x) J_0(\beta x) dx + \sum_{k=0}^{\infty} Z_k J_{2k+1}(\beta t_0) =$$

= $-t_0 F_1(t_0) J_1(t_0 \beta) - \int_{t_0}^{\infty} x F_1'(x) J_1(\beta x) dx + \sum_{k=0}^{\infty} Z_k J_{2k+1}(\beta t_0)$ (2.8)

rge

$$F_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{f_1(t)dt}{\sqrt{t^2 - x^2}}, \qquad G_1(x) = -\frac{c_0}{P} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} t dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} = -\frac{c_0}{2} I_0(x)$$
(2.9)

На основе результатов работы [6], для определения Z, получим систему

$$\frac{Z_{k}}{2(2k+1)} + \int_{0}^{\infty} \left[\sum_{\mu=0}^{\infty} Z_{\mu} J_{2\mu+1}(\beta t_{0}) + \beta \int_{t_{0}}^{\infty} x F_{1}(x) J_{0}(x\beta) dx \right] \frac{N(\beta)}{\beta} J_{2k+1}(\beta t_{0}) d\beta = - \frac{1}{t_{0}} \int_{0}^{t_{0}} t G_{1}(t) P_{k}\left(1 - \frac{2t^{2}}{t_{0}^{2}}\right) dt = \frac{c_{0}}{\pi} \int_{0}^{t_{0}} \frac{\operatorname{shr} \sin[(2k+1)t_{0}]}{\sqrt{t_{0}^{2} - t^{2}}} dt$$
(2.10)

Кроме (2.10) лля определения свободных членов из (2.8) получается ещё одно уравнение

$$t_0 F_1(t_0) = \sum_{l \neq 0}^{\infty} (-1)^k Z_l$$
(2.11)

Пользуясь свойствами функции N(β) и асимитотическими формулами бесселевых функций J_n и K_n при больших значениях индекса нетрудно доказать, что в системе (2.10) сумма модулей коэффициентов при неизвестных стремится к нулю, когда $k \to \infty$. Значит, система (2.10) при $\varphi_1 > 0$ квазивнолие регуляриа.

После приведения всех кратных интегралов к одномерным на основе формулы (2.8) соотношения (2.10) и (2.11) приведем к виду:

$$\begin{aligned} (A - D)t_0 K_n(t_0) + Dt_0^2 K_1(t_n) + \frac{t_0(a - a_0 \sin \varphi_1)}{2} \int_0^\infty \frac{M_n(\beta) J_0(\beta t_n)}{\beta^2 + 1} d\beta = \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{t=0}^\infty (-1)^t Z_t - t_0 \sum_{a=1}^\infty A_t \left\{ K_n [(\alpha_a - 1)t_0] - K_n [(\alpha_a + 1)t_n] \right\} + \frac{\pi t_0}{2} \sigma_n(t_n) \end{aligned}$$

$$\frac{Z_{l}}{2(2k+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{R\sigma_{m}}{\gamma_{m}+2} P_{0}(k,\gamma_{m}+1) - (A-D)P_{0}(k,1) - DP_{l}(k,1) - \sum_{m=0}^{\infty} Z_{m}J_{m} - \sum_{m=1}^{\infty} A_{m}[P_{0}(k,\alpha_{m}-1) - P_{0}(k,\alpha_{m}+1)] + \frac{C_{0}(-1)^{k}}{2}I_{2k+1}(\beta I_{0}) - \sum_{m=1}^{\infty} Z_{m}J_{m} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{m}[P_{0}(k,\alpha_{m}-1) - P_{0}(k,\alpha_{m}+1)] + \frac{C_{0}(-1)^{k}}{2}I_{2k+1}(\beta I_{0}) - \sum_{m=1}^{\infty} Z_{m}J_{m} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{m}[P_{0}(k,\alpha_{m}-1) - P_{0}(k,\alpha_{m}+1)] + \sum_{m=1}^{\infty} Z_{m}J_{m} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{m}[P_{0}(k,\alpha_{m}-1) - P_{0}(k,\alpha_{m}+1)] + \sum_{m=1}^{\infty} Z_{m}J_{m} + \sum_{m=1}^{\infty}$$

$$\frac{a - a_{y} \sin \phi_{1}}{\pi} \int_{0}^{\infty} \mathcal{N}(\beta) J_{2k+1}(\beta t_{0}) d\beta \int_{0}^{\infty} \frac{\mathcal{M}_{0}(y)}{y^{2} + 1} [\delta(y - \beta) - J_{0}(y, \beta, t_{0})] dy \quad (k = 1, 2, 3 \cdots) \quad (2, 1, 3)$$

где $I_n(x), K_n(x)$ – функции Бесселя от мнимого аргумента. $J_n(x)$ функция Бесселя от действительного аргумента. $\delta(x)$ функция Дирака. $H_0(x)$ функция Хевисайда

$$P_{n}(k,q) = \int_{0}^{n} N(\beta) J_{2k+1}(\beta t_{0}) K_{n}(q,\beta) d\beta \qquad (n = 0.1)$$

$$J_{nk} = \int_{0}^{n} \int_{0}^{-1} N(\beta) J_{2m+1}(\beta t_{0}) J_{2k+1}(\beta t_{0}) d\beta \qquad (m,k \ge 0)$$

$$J_{0}(\alpha,\beta,\alpha) = \int_{0}^{n} x J_{0}(\alpha x) J_{0}(\beta x) dx, \qquad K_{n}(\alpha,\beta,\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} x^{n+1} J_{0}(\beta x) K_{n}(\alpha x) dx \qquad (n = 0.1)$$

При получении (2.12) и (2.13) было использовано представление

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i e^{-\gamma_i t} , \qquad \gamma_i > -1$$
(2.15)

где (у ,) монотонно возрастающая последовательность.

Подставляя выражение функцин $X(\beta)$ из (2.8) в (2.3), после ряда элементарных преобразований получим вторую бесконечную систему

$$\frac{\varphi_{1}A_{k}}{2(\alpha_{k}^{2}-1)} = \sum_{m=0}^{\infty} Z_{m}C(m,k) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{m} \Big[D_{0}(\alpha_{m}-1,k) - D_{0}(\alpha_{m}+1,k) \Big] + \\ + (A-D)D_{0}(1,k) + DD_{1}(1,k) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R\sigma_{m}}{\gamma_{m}+2} D_{0}(\gamma_{m}+1,k) + \\ + \int_{0}^{\infty} \frac{\beta(\beta^{2}+1)N_{0}(\beta)d\beta}{\left[\beta^{2}+(\alpha_{k}+1)^{2}\right]} \int_{0}^{\infty} \frac{yZ(y)M_{0}(y)}{y^{2}+1} \Big[\delta(y-\beta) - J_{n}(y,\beta,t_{n}) \Big] dy - \\ - \frac{\varphi_{1}}{2(\alpha_{k}^{2}-1)} \Bigg[f_{uk} + \frac{2(-1)^{k}(a-a_{0}\sin\varphi_{1})}{4\alpha_{k}\varphi_{1}} \Bigg], \qquad (k=1,2,3\cdots)$$
(2.16)
$$\frac{\varphi_{1}}{2} (2A-D-f_{00}) + \frac{a-a_{0}\sin\varphi_{2}}{4} = \sum_{m=0}^{\infty} Z_{m}C(m,0) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} A_{m} \Big[D_{0}(\alpha_{m}-1,0) - D_{0}(\alpha_{m}+1,0) \Big] + DD_{1}(1,0) + \\ + (A-D)D_{0}(1,0) + \int_{0}^{\infty} \frac{\beta N_{0}(\beta)d\beta}{\beta^{2}+1} \int_{0}^{\infty} \frac{yZ(y)M_{0}(y)}{y^{2}+1} \Big[\delta(y-\beta) - J_{0}(y,\beta,t_{0}) \Big] dy -$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{R\sigma_m}{\gamma_m + 2} D_0(\gamma_m + 1, 0). \qquad (k = 0)$$
(2.17)

Здесь введены следующие обозначения:

$$C(m,k) = \int_{0}^{1} \frac{N_{0}(\beta)(\beta^{2}+1)J_{2m+1}(\beta t_{0})}{\left[\beta^{2}+(\alpha_{k}-1)^{2}\right]\left[\beta^{2}+(\alpha_{k}+1)^{2}\right]}d\beta$$
(2.18)
$$D_{n}(b,k) = \int_{0}^{1} \frac{\beta(\beta^{2}+1)N_{0}(\beta)K_{n}(b,\beta,t_{0})}{\left[\beta^{2}+(\alpha_{k}-1)^{2}\right]\left[\beta^{2}+(\alpha_{k}+1)^{2}\right]}d\beta$$
(n = 0,1)

Интегралы (2.18) сходятся очень медленно, что загрудняет вычислительные работы. Их сходимость существенно улучшается, если пользоваться формулами типа

$$C^{101}(m,k) = \int_{0}^{\infty} \frac{(\beta^{2} + 1)J_{2m+1}(\beta t_{0})}{[\beta^{2} + (\alpha_{1} - 1)^{2}][\beta^{2} + (\alpha_{1} + 1)^{2}]} d\beta = (\alpha_{k} > 1)$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}}{4} \frac{\alpha_{k} + 2}{\alpha_{k} + 1} \left\{ K_{2m+1} \left[(\alpha_{k} + 1)t_{0} \right] - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{m} \frac{(-1)^{p} (2m-p)!}{p!} \left[\frac{2}{(\alpha_{k} + 1)t_{0}} \right]^{-2p+2m+1} \right\} - \frac{(-1)^{m-1}}{4} \frac{\alpha_{k} - 2}{\alpha_{k} - 1} \left\{ K_{2m+1} \left[(\alpha_{k} - 1)t_{0} \right] - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{m} \frac{(-1)^{p} (2m-p)!}{p!} \left[\frac{2}{(\alpha_{k} - 1)t_{0}} \right]^{-2p+2m+1} \right\} \right]$$

$$D_{n}^{(m)}(b,k) = \int_{0}^{\infty} \frac{\beta(\beta^{2} + 1)K_{n}(b,\beta,t_{0})}{[\beta^{2} + (\alpha_{k} - 1)^{2}][\beta^{2} + (\alpha_{k} + 1)^{2}]} d\beta = \frac{1}{2\pi} \int_{t_{0}}^{\infty} x^{n-1}K_{n}(bx) \left\{ (\alpha_{k} + 2)K_{0}[(\alpha_{k} + 1)x] - (\alpha_{k} - 2)K_{0}[(\alpha_{k} - 1)] \right\} dx \quad (2.19)$$

$$E(y) = \int_{0}^{\infty} \frac{\beta(\beta^{2} + 1)[\delta(y - \beta) - J_{0}(y, \beta, t_{0})]}{[\beta^{2} + (\alpha_{k} + 1)^{2}]} d\beta = \frac{\pi}{8} \left[(\alpha_{k} + 2)K_{0}(\alpha_{k} + 1, y, t_{0}) - (\alpha_{k} - 2)K_{0}(\alpha_{k} - 1, y, t_{0}) \right].$$

Вычислим теперь контактные напряжения и пормальные перемещения точек берегов трещины. Для этого сначала на основе работы [6], из (2.10) и (2.11) получим

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\beta X(\beta) \sin \beta t d\beta}{\beta^{\frac{n}{2}} + 1} = -\frac{2}{t_0^2} H_0(t_0 - t) \sqrt{t_0^2 - t^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k Z_k U_k \left(\frac{t}{t_0}\right) U_{k-1}\left(\frac{t}{t_0}\right) - \frac{1}{t_0} \left(\frac{t}{t_0}\right) - \frac{1}{t_0} \left(\frac$$

$$-t\int_{t_{n}}^{\infty} \frac{F_{1}'(x)H_{0}(x-t)}{\sqrt{x^{2}-t^{2}}} dx \qquad (0 \le t < \infty)$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{M_{0}(\beta)X(\beta)\sin\beta td\beta}{\beta^{2}+1} = \int_{t_{n}}^{\infty} \frac{xF_{1}(x)H_{0}(x-t)}{\sqrt{x^{2}-t^{2}}} dx +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z_{k}}{2k+1} \left\{ \frac{\sin[(2k+1)u_{0}]}{(-1)^{k}q_{0}^{2k+1}(t)} \qquad (t \le t_{0}) \right\} +$$

$$+\int_{0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} Z_{m}J_{2m+1}(\beta t_{0}) + \beta \int_{t_{n}}^{\infty} xF_{1}(x)J_{0}(x\beta) dx \right] \frac{M(\beta)\sin\beta t}{\beta} d\beta \qquad (0 \le t \le \infty)$$

где U₄ (x)-полином Чебыщена второго рода,

$$u_0 = \arcsin \frac{t}{t_0}, \qquad q_0(t) = \frac{t_0}{t + \sqrt{t^2 - t_0^2}};$$
 (2.21)

Затем, пользуясь очевидными соотношениями преобразования Абеля и формулой (2.11), после ряда преобразований из (2.20) получим

$$\frac{E\nu(t,0)}{2} = \frac{c_0}{2}e^{-t} + \int_0^{\infty} \frac{X(\beta)N_0(\beta)}{\beta^2 + 1}\chi(\beta,t)d\beta = \frac{c_0}{2}e^{-t} - F_1(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} \frac{XF_1(x) - tF_1(x)}{\sqrt{t^2 - x^2}}dx + \int_$$

$$+ \int_{0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} Z_{n} J_{2n+1}(\beta t_{0}) + \beta \int_{t_{0}}^{\infty} x F_{1}(x) J_{0}(x\beta) dx \right] \frac{N(\beta)}{\beta} \chi(\beta, t) d\beta - \frac{1}{t_{0}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} Z_{k} \left[2 \sum_{n=1}^{k} q_{0}^{2k}(t) - \frac{t_{0}}{2k+i} q_{0}^{2k+i}(t) \right]. \qquad (t_{0} < t < \infty)$$

$$(2.22)$$

$$r\sigma_{\varphi}(t,0) = r\sigma(t) + \int_{t}^{a} \frac{\left[xF_{t}(x)\right] - tF(x)}{\sqrt{x^{2} - t^{2}}} dx + \frac{1}{\sqrt{t_{0}^{2} - t^{2}}}$$
(2.23)

$$*\left\{-t_0F_1(t_0) + \frac{1}{t_0}\sum_{k=1}^{\infty} Z_k(-1)^k \left[(2k+1)U_{2k}\left(\frac{t}{t_0}\right) - 1 + \frac{2(t_0^2 - t^2 - t)}{t_0}U_k\left(\frac{t}{t_0}\right)U_{k-1}\left(\frac{t}{t_0}\right) \right]\right\}$$

где функция $\sigma(t)$ является аналитическим продолжением граничной функции $\sigma(t)$ на область ($0 \le t \le t_0$).

На основе формулы (2.22) вычислим v(∞,0). Пользуясь известными свойствами интеграла Фурье, получим

$$\frac{E\nu(\infty,0)}{2} = -F_1(t_0) + \frac{\lim_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} \frac{xF_1(x) - tF_1'(x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx +$$

$$+ \frac{2t_0 \sin^2 \varphi_1}{2\varphi_1 + \sin 2\varphi_1} \left\{ \frac{\pi Z_0}{4} + (A - D)K_1(t_0) + Dt_0 K_2(t_0) + L_{10} + L_{10} \right\} (2.24)$$

$$L_{10} = \frac{\pi}{2t_0} \int_0^\infty \frac{yZ(y)M_0(y)}{y^2 + 1} \left[\delta(y) - \frac{t_0}{y} J_1(t_0 y) \right] dy$$

$$L_{20} = \sum_{k=1}^\infty \left\{ A_k \left[\frac{K_1 \left[(\alpha_k - 1)t_0 \right]}{\alpha_k - 1} + \frac{K_1 \left[(\alpha_k + 1)t_0 \right]}{\alpha_k + 1} \right] - \frac{R \sigma_1 K_1 \left[(\gamma_k + 1)t_0 \right]}{(\gamma_k + 1)(\gamma_k + 2)} \right\}$$

Нользуясь формулами для напряжений, вычислим интегралы

$$\int_{0}^{\infty} \sigma_{\varphi}(t,\varphi) dr = 2A - D + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2A_{i}\cos\alpha_{i}\varphi}{\alpha_{i}-1} + \int_{0}^{\infty} \Phi(\beta,\varphi) d\beta$$
$$\int_{0}^{0} r\sigma_{\varphi}(t,\varphi) dr = R(A - D) \qquad (2.25)$$

Из первой формулы (2.20) при $\varphi = \varphi_1$ получим условие статики

$$P_{i}\sin\varphi_{i} = R\int_{0}^{\infty} f_{0}(\varphi)\cos\varphi d\varphi$$
(2.26)

а при $\varphi = 0$ получается другое условие статики

$$\int_{0}^{R_{0}} \sigma(t) dt + \int_{R_{0}}^{R} \sigma(t) dt = \frac{R}{\sin \varphi_{1}} \int_{0}^{\varphi_{1}} f_{0}(\varphi) \cos(\varphi_{1} - \varphi) d\varphi$$

Из второй формулы (2.26) следует

$$R_{1}P_{1} = \int_{0}^{k_{0}} r\sigma(t)dr + \int_{R_{0}}^{R} r\sigma_{\varphi}(t,0)dr = R(A-D)$$
(2.27)

где P_t -сила, действующая на штами на расстоянии R_t от точки $t=\infty, \sigma(t)$ нагрузка на берегах трещины.

Таким образом, задача свелась к определению коэффициентов A_k н Z_m ($k = 1,2,3,\cdots$, $m = 1,2,3\cdots$) из бесконечных систем (2.13) и (2.16), а также постоянных a_0, c_0, A, D -из первого и четвертого соотношений в (2.4) и (2.12) Соотношение (2.27) является связью между коэффициентами a, b, главным вектором P_i и главным моментом $R_i P_i$, действующим на штамп. Контактные напряжения и перемещения гочек берегов трещины будем определять по формулам (2.23) и (2.24), в частности, максимальное расхождение точек берегов трещины $2\nu(\infty,0)$ определяется формулой (2.25).

Пользуясь асимитотическими формулами, для бесселевых функций нетрудно установить следующие асимитотические новедения коэффициентов бескопечных систем (2.13) и (2.16) 1)при $m = const, k \rightarrow \infty$

$$J_{m,k} = 0 \left[\frac{t_0^{2k}}{(2k)!} \right], \quad P_0(k,m) = 0 \left[\frac{t_0^{2k}}{(2k)!} \right]$$

$$C(m,k) = 0 \left[\frac{1}{\alpha_k^4} \right] \quad D_0(m,k) = 0 \left[e^{-m d_m} \right]$$
(2.28)

2) upu $k = const, m \rightarrow \infty$

$$J_{m,k} = \mathbb{C}\left[\frac{t_0^{2m}}{(2m)!}\right] P_0(k,m) = \mathbb{O}\left[e^{-\alpha_m t_0}\right] \mathbb{O}, \ \mathbb{C}(m,k) = \mathbb{O}\left[\frac{(\alpha_i t_0)^m}{(2m)!}\right], \ \mathbb{D}_0(m,k) = \mathbb{O}\left[e^{-\alpha_m t_0}\right]$$

На этой основе иструдно доказать, что сумма модулей всех коэффициентов в системах (2.13) и (2.16) при возрастании иомера строки стремится к пулю.

Следовательно, совокупность бесконечных систем (2.13) и (2.16) в общем случае квазивполие регулярна.

Во всех приведенных формулах удалось выразить кратные интегралы через быстро схолящиеся ряды или одномерные интегралы, кроме тех членов, которые содержат функцию $Z(\beta)$, или же постоянную $(a - a_0 \sin \varphi_1)$. Для того, чтобы избавиться от этого неудобства, можно поступить следующим образом: свободные члены в формулах для компонент перемещения представим в виде

$$Eu_{0}(t,\varphi) = 2(1-\nu)(A+Dt)e^{-t} + (1+\nu)De^{-t} - a_{0}\cos\varphi + b_{0}\sin\varphi$$

$$Ev_{0}(t,\varphi) = -4\varphi De^{-t} + a_{0}\sin\varphi + b_{0}\cos\varphi + c_{0}e^{-t}$$
(2.29)

и будем считать, что $b_0 \neq 0$, то есть смещаем обычное условне симметрии на отрезке ($\varphi = 0, 0 \leq t \leq t_0 < \infty$). При $t_0 = \infty$ будем считать $b_0 = 0$, то есть приходим к обычным условиям симметрии.

При этом из (2.29) имеем

$$\begin{aligned} Eu_0(\infty,0) &= -a_0, \quad Ev(\infty,0) = b_0 \quad (\varphi = 0) \\ Eu_0(\infty,\varphi_1) &= -a_0\cos\varphi_1 + b_0\sin\varphi_1, \quad (\varphi = \varphi_1) \\ Ev_0(t,\varphi_1) &= a_0\sin\varphi_1 + b_0\cos\varphi_1 + (c_0 - 4\varphi_1D_0)e^{-t}, \quad \varphi = \varphi_1, t \to \infty \end{aligned}$$
CLOBUE COMMETPUN DECIDENT MYCE BELACE

 $\tau_{k_0}(t,0) = 0, \quad Ev(t,0) = -b_0 \quad (0 \le t \le t_0 < \infty)$

а при удовлетворении граничному условию $Ev(t, \phi_1) = a + be^{-t}$ будем

(2.31)

считать, что $a = a_0 \sin \varphi_1 + b_0 \cos \varphi_1$, после чего из этого же условия вместо нервых двух соотношений в (2.3) получаются

$$B(\beta)\cos\varphi_1 + C(\beta)ch\beta\varphi_1 = 0, \quad 4\varphi_1 D = c_0 - b \tag{2.32}$$

Все остальные формулы и выражения, а гакже бесконечные системы остаются в силе, если в них положить $Z(\beta) \equiv 0$, или же $a = a_0 \sin \phi_1$, а в правой части бесконечной системы (2.13) добавить член

$$\frac{b_0}{E} \left\{ (-1)^k I_{2k+1} (\beta t_0) \frac{1}{\pi} \int_0^{t_0} \frac{(1-e^{-t})\sin\left[(2k+1)\arcsin\frac{t}{t_0}\right]}{\sqrt{t_0^2 - t^2}} dt \right\}$$
(2.33.)

илн

$$\frac{b_0}{E} \left\{ (-1)^k I_{2k+1}(\beta t_0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - e^{-t_0 \sin x}) \sin[(2k+1)x] dx \right\}$$
(2.34)

где последний интеграл при $k \to \infty$ стремится к нулю, как $O(k^{-1})$.

ЛИТЕРАТУРА

- Баблоян А.А. Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора в напряжениях. Изв.Ан АрмССР. сер.физ мат наук, 1962. т. 15, No 1.
- Алексанян Р.К., Казанчян Э.П., Саркисян В.Г. Плоская контактная задача теории упругости составного круга. Межвуз. сб.: Механика. ньш. З. Ереван. 1984
- Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах геории упругости.-Л.: Наука, 1968.
- Макарян В.С., Саркисян В.Г. Об одной граничной задаче для упругого кругового сектора. Изв. Ан АрмССР, Механика, 1990. г. 43, No 2.
- 5 Чобанян К.С. Напряжения в упругих составных телах. Ереван: Изд. А.Н. АрмССР, 1987
- 6 Баблоян А.А., Макарян В.С. Решение парных интегральных уравнений, содержащих комбинации тригонометрических функций. Изв НАН Армении, Механика, 1996, т. 49, N 2.
- Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды М.: Наука, 1981.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 7.07-1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՉԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՍԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մնիսանիկա

49, N 3, 1996

Механика

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛОСКОЙ МАГНИТОУПРУГОЙ ВОЛНЫ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ Саркисян С.В.

Ս.Վ.Սարգսյան

Տրանսվերսալ իզոտրոպ առաձգական միջավայրում հարթ մազնիսաառաձգական ալիբների տարածման ճետազոտումը

Դիտարկված է տրանսվերուալ իզոտորոպ առածգական միջավայրում հարթ մազնիսաառածգական ալիքների տարածման խմդիրը։ Սիջավայրը գտնվում է հաստատուն արտաքին մազնիսական ուշտուն և կարող է օժտված իինել ինչախ հրեալական, այնպես էլ վերջավոր հաղորդականությամբ Ստացված է դիսպերսիոն հավասարում, որը ցույց է տալիս, որ գործ ունենք կապակցված ալիքների հետ. Որոշված է ալիքի տարածման ֆազային արագությունը և մարմագործակիցը.

S.V.Sarkisyan Plane magnetoclastic waves propagation in transversal-isotropic clastic medium

Исследуется вадача распространения влосков магнитоупругой волны в трансверследно-плотронной упругой среде. Среда находится по зноснием постоянном магнитном пола и может обладать как идеольной, так и конечной проводимостью. Получено, целеренов-носураннение, которое покальнает, что имеем дело со свядящими волнами. Исследовано налучение уравнение и определены фазовая скорость и козфранцент ва ухалия воли

Изучению процессов колебаний и распространения магнитоупругих воли в электропроводных телах посвящены работы [1-6].

В настоящей работе рассматривается задача распространения магни тоупругой волны в трансверсально изотропной упругой среде

1. Рассмотрим илоские волны магнитоупругости в траневерсально наотронном упругом пространстве, обладающем идеальной проводимостью. Среда находится во внешнем постоянном магнитном поле $B_0(B_{01}, B_{02}, B_{01})$. Введем декартовую систему координат (x, y, z) так, чтобы координатиая илоскость (x, y) совпала с илоскостью изотронни. При исследовании рассматриваемой задачи воспользуемся линисаризо ванными уравнениями магнитоупругости [1-3, 5, 7]. Ниже будем рассматривать случай, когда все функции, фигурпрующие в уравнениях магнитоупругости идеально-проводяней трансперсально-изотронной - реды, являются функциями полько переменных x и / Ири этом предноложении уравнения движения в перемещениях будут иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \left(c_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{pmatrix} u_x - v_{12}^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - v_{13}^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0 \\ -v_{12}^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \left(\left(c_2^2 + v_1^2\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_y = 0 \\ -v_{13}^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \left(\left(c_3^2 + v_1^2\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_z = 0$$
 (1.1)

FRC

$$\begin{aligned} c_{i}^{2} &= \frac{b_{ii}}{\rho}, \quad c_{2}^{2} &= \frac{b_{ss}}{\rho}, \quad c_{i}^{2} &= \frac{b_{44}}{\rho}, \quad v_{i}^{2} &= \frac{\mu_{0}H_{0i}}{4\pi\rho}, \quad v_{q}^{2} &= \frac{\mu_{0}H_{0i}H_{0i}}{4\pi\rho} (i, j = 1.2.3), \\ b_{is} &= G, \quad b_{ii} &= \frac{1}{\Delta E'} \left(\frac{1}{E} - \frac{v^{*2}}{E'} \right), \quad b_{44} &= G', \quad \Delta &= \frac{1+v}{EE'} \left(\frac{1-v}{E} - \frac{2v'^{2}}{E'} \right) \end{aligned}$$

В приведенных уравнениях $U(u_1, u_2, u_3)$ -вектор перемещения точек пространства: ρ и μ_0 -плотность и коэффициент магиитной пронинаемости среды: H_0 и B_0 -папряженность магиитного поля и магиитная индукция. Е. E', G. G', v, v'-упругие характеристики рассматриваемой среды.

Решение уравнения (1.1) представим в виде монохроматической волны, перемещающейся в направлении x с фазовой скоростю у= 0 k.

$$(u_{x}, u_{y}, u_{z}) = (u_{y}^{0}, u_{y}^{0}, u_{z}^{0}) \exp[i(kx - i\omega t)]$$
(1.2)

Подставляя (1.2) в систему уравнений (1.1), получим систему однородных алгебранческих уравнений. Из условия равенства нулю определителя этой системы имеем следующее уравнение:

$$k^{6}(\beta_{11}\beta_{33}(1+\beta_{12})+\beta_{11}\beta_{22}(1+\beta_{13})-(1+\beta_{13})(1+\beta_{12})(1+\beta_{21}+\beta_{31}))+ \\ +k^{4}(\alpha_{1}^{*}(1+\beta_{12})(1+\beta_{21}+\beta_{31})+\alpha_{2}^{2}(1+\beta_{13})(1+\theta_{21}+\beta_{11}+\beta_{21}+\beta_{31})- \\ -\alpha_{2}^{2}\beta_{11}\beta_{33}-\alpha_{3}^{2}\beta_{11}\beta_{32}) - k^{2}\alpha_{1}^{2}\alpha_{2}^{2}(1+\theta_{13}+\theta_{31}+2\beta_{13}+\beta_{33}+\beta_{33})+ \\ +\alpha_{1}^{2}\alpha_{2}^{*}\alpha_{3}^{2}=0$$
(1.3)
rate $\alpha_{1} = \omega \cdot c_{1}^{-1}, \quad \beta_{n} = v_{1}^{2} \cdot c_{1}^{-2}, \quad \theta_{n} = c_{1}^{2} \cdot c_{1}^{-2}$ (1.5)

На уравнения (1.3) путем численной реализации при заданных филико механических характеристиках среды можно найти фазовые скорости и коэффициенты затухания воли. В случае, когда внешнее магнитное поле нараллельно илоскости изотронии, уравнение (1.3) сводится к уравнениям:

$$k^{4}(1+\beta_{12}+\beta_{21})-k^{2}((1+\beta_{21})\alpha_{2}^{2}+(1+\beta_{12})\alpha_{1}^{2})+\alpha_{1}^{2}\alpha_{2}^{2}=0$$
(1.4)

$$k^2 (1 + \beta_{13}) - \alpha_3^2 = 0 \tag{1.5}$$

Из уравнения (1.5) получасм

$$v = c_3 \sqrt{1 + \beta_{13}}$$
 (1.6)

(1.6) показывает, что волна *и*, возмущена электромагнитным полем и ее фазовая скорость увеличилась .

Для уравнения (1.4) рассмотрим сначала частные случан

а) Пусть $B_{01} = B_{02} = 0$ ($v_1 = v_2 = \beta_{12} = \beta_{21} = 0$). Уравнение (1.4) принимает вид

$$(k^2 - \alpha_1^2) \cdot (k^2 - \alpha_2^2) = 0$$
 (1.7)

В этом случае мы имеем дело с волнами u_x , u_x , невозмущенными электромагнитным полем. Волна u_x распространяется со скоростью c_1 , волна u_x со скоростью c_5 .

6) Пусть $B_{01} \neq 0$, $B_{02} = 0$ ($v_2 = \beta_{21} = 0$). Уравнение (1.4) сводится к виду

$$k^{2} - \alpha_{1}^{2} \cdot (k^{2}(1 + \beta_{12}) - \alpha_{2}^{2}) = 0$$
(1.8)

В этом случае волна u_i не возмущена и движется с фазовой скоростью $v = c_1$. Волна u_i возмущена электромагнитным полем и ес фазовая скорость будет $v = c_2 \sqrt{1 + \beta_{12}}$.

в)Ддя $B_{01} = 0, B_{02} \neq 0$ уравнение (1.4) при $\beta_{12} = 0$ приводится к виду

$$(k^{2} - \alpha_{2}^{2}) \cdot (k^{2}(1 + \beta_{2}) - \alpha_{1}^{2}) = 0$$
(1.9)

В этом случае мы имеем дело с невозмущённой волной u_{1} , распространяющейся с фазовой скоростью $v = c_{2}$ и с возмущённой волной u_{1} . для фазовой скорости которой из (1.9) получаем $v = c_{1}\sqrt{1 + \beta_{21}}$ (1.10)

Фазовая скорость волны и, увеличилась.

г) В случае $B_{01} \neq 0, B_{02} \neq 0$ как волна u_{1} . так и волна u_{2} . возмущены электромагнитным полем. Решениями уравнения (1.4) будут выражения

$$k_{1,2}^{2} = \frac{1}{2(1+\beta_{12}+\beta_{21})} \cdot \left(\alpha_{1}^{2}(1+\beta_{12})+\alpha_{2}^{2}(1+\beta_{21})\pm\sqrt{D}\right)$$
(1.11)
$$D = \left(\alpha_{1}^{2}(1+\beta_{12})-\alpha_{2}^{2}(1+\beta_{21})\right)^{2}+4\alpha_{1}^{2}\alpha_{2}^{2}\beta_{12}\beta_{21}>0$$

Ясно, что $k_{1,2}^2 > 0$ и корни вещественны. Решениями уравнения (1.1) (при $u_2 = 0$) являются функции

$$(u_{x};u_{y}) = (A_{1};A_{5})\exp\left(-i\omega\left(t-\frac{x}{\gamma_{1}}\right)\right) + (A_{2};A_{6})\exp\left(-i\omega\left(t+\frac{x}{\gamma_{1}}\right)\right) + + (A_{3};A_{7})\exp\left(-i\omega\left(t-\frac{x}{\gamma_{2}}\right)\right) + (A_{4};A_{8})\exp\left(-i\omega\left(t+\frac{x}{\gamma_{2}}\right)\right)$$
(1.12)

где $\gamma_i = \frac{\omega}{k_i}$. Заметим, что γ_i (i=1,2) являются функциями нараметра

 ω Следовательно, мы имеем дело с волнами, подвергающимися дисперсии. Подставляя (1.12) в (1.1), найдём соотношения между ностоянными $A_k(k=\overline{1,8})$. Имея (1.12), можно определить компоненты пидуцированного электромагнитного воля и вектор плотности электрического тока.

2. Рассмотрим трансверсально изотропную упругую среду, которая имеет конечную проводимость $\bar{\sigma}(\sigma,\sigma,\sigma')$ (σ – коэффициент электричес кой проводимости для плоскости изотропни, σ' – коэффициент электрической проводимости для плоскостей, нормальных изоскости изотропни). Не нарушая общности, предноложим, что среда находится но внешнем постоянном магнитном поле $B_9(B_{01}, B_{02}, 0)$ Магнитная пропицаемость материала среды считается равным единице. В этой среде будем рассматривать распространение плоских воли магнитоупругости. Как и выше, будем пользоваться линсаризированными уравнениями магнитоупругости. Для плоской волны, распространяющейся в направлении оси *x*, получим следующие уравнения магнитоупругости:

$$b_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{\sigma' B_{02}}{c} \left(e_x + \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

$$b_{55} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\sigma' B_{02}}{c} \left(e_x + \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

$$b_{44} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\sigma B_{62}}{c} \left(e_x - \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) - \frac{\sigma B_{01}}{c} \left(e_x + \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) = \rho \frac{\partial^3 u_x}{\partial t^2} \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial e_x}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial h_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial e_2}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial h_x}{\partial t}, \quad e_1 - \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial u_x}{\partial t} = 0$$

$$\frac{4\pi\sigma}{c} \left(e_x + \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) = -\frac{\partial h_1}{\partial x}, \quad \frac{4\pi\sigma'}{c} \left(e_x + \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) = \frac{\partial h_2}{\partial x}$$

Здесь *h* и *e* некторы напряжённости индуцированного магнитного и электрического полей; *с* электродинамическая постоянная.

Система уравнений (2.1) распадается на две системы уравнений. Займёмся исследованием системы уравнений, в которой в качестве неизвестных фигурируют функции $u_{1,2}u_{1,2}e_{1,0}u_{2,2}$. Решение этой системы представим в виде (1.2). Тогда получим следующее характеристическое уравнение

 $(k^2 - \alpha_1^{-2}) \cdot ((k^2 - \alpha_2^{-2})(ik^2\chi' + 1) + \beta_{12}k^2) + \beta_{23}k^2(k^2 - \alpha_2^{-2}) = 0$ (2.2) Здесь введены те же обозначения, которые применялись в случае идеального проводника. Кроме того, введено обозначение $\chi' = c^2(4\pi\sigma'\omega)^{-1}$ Легко видеть, что уравнение (2.2) при $\chi' = 0(\sigma' \to \infty)$ переходит в уравнение (1.4). Рассмотрим ряд частных случаев.

а)Пусть отсутствует первоначальное электромагнитное поле $(B_{01} = B_{02} = 0, \beta_{12} = \beta_{21} = 0)$. Уравнение (2.2) сводится к следующему виду:

$$(k^{2} - \alpha_{1}^{2}) (k^{2} - \alpha_{2}^{2}) (ik^{2}\chi' + 1) = 0$$
(2.3)

Уравнение $(ik^2\chi'+1)=0$ характеризует осцилляцию электромагнитного поля, не связанного с полем деформации. Уравнения $(k^2 - \alpha_1^{-2}) = 0$ и $(k^2 - \alpha_2^{-2}) = 0$ связаны с распространением воли u_1 и u_1 в траневерсально изотропной среде, которые не возмущены электромагнитным полем.

6)Рассмотрим случай $(B_{n1} = 0(\beta_{12} = 0), B_{02} \neq 0)$. Характеристи ческое уравнение (2.2) упрощается до следующего вида:

$$(k^{2} - \alpha_{1}^{2}) \left(k^{4} \chi' - k^{2} (\alpha_{1}^{2} \chi' + i(1 + \beta_{21})) + i \alpha_{1}^{2}\right) = 0$$
(2.4)

Волна u_1 не возмущена электромагнитным полем. Волны u_1, e_3 н h_2 рас пространяются со скоростью $v = \frac{\omega}{k}$. Величина k удовлетворяет уравнению

$$k^{1}\chi' - k^{2}(\alpha_{1}^{2}\chi' + i(1 + \beta_{21})) + i\alpha_{1}^{2} = 0$$
(2.5)

корни которого k_{1,2} будут комплексными. Следовательно, эти волны под вергаются дисперсии и затухают. Фазовая скорость γ_{α} и коэффициент затухания Ψ_{α} определяются по формулам

$$\gamma_{\alpha} = \frac{\omega}{\operatorname{Re}k_{\alpha}}, \quad \psi_{\alpha} = \operatorname{Im}k_{\alpha} \quad (\alpha = 1, 2).$$

Решения рассматриваемых уравнений будут

$$(u_{i};e_{i};h_{2}) = (F_{i};F_{5};F_{5}) \exp\left(-i\omega\left(t-\frac{x}{\gamma_{1}}\right)-\psi_{1}x\right) + (F_{2};F_{6};F_{10}) \cdot \exp\left(-i\omega\left(t+\frac{x}{\gamma_{1}}\right)+\psi_{1}x\right) + (F_{1};F_{7};F_{11}) \cdot \exp\left(-i\omega\left(t-\frac{x}{\gamma_{2}}\right)-\psi_{1}x\right) + (F_{4};F_{8};F_{12}) \cdot \exp\left(-i\omega\left(t+\frac{x}{\gamma_{2}}\right)+\psi_{1}x\right) \right)$$

$$(2.6)$$

в)В случае $B_{01} \neq 0$, $B_{02} = 0$ уравнение (2.2) приводится к следующему:

$$\left(k^{2} - \alpha_{1}^{2}\right) \cdot \left(k^{4} \chi' - k^{2} \left(\alpha_{2}^{2} \chi' + i \left(1 + \beta_{12}\right)\right) + i \alpha_{2}^{2}\right) = 0$$
(2.7)

Заметим, что волна u_1 не возмущена электромагнитным полем. волны же u_1, e_1 н h_2 между собой связаны, их фазовая скорость и коэффициент затухания определяются из следующего уравнения: $k^4 \chi' - k^2 (\alpha_2^+ \chi' + i(1 + \beta_1)) + i\alpha_2^2 = 0$

Эти волны будут затухать и подвергаться дисперени. В данном случае решение уравнений (2.1) имеет шод, аналогичный (2.6).

г)Наконец, в случае, когда $B_{01} \neq 0$, $B_{02} \neq 0$, характеристическое уравнение имеет вид (2.2) и мы имеем дело со связанными волнами $u_{\pm}, u_{\pm}, e_{\pm}$ и h_{\pm} .

Теперь рассмотрим систему уравнений относительно неизвестных функций $u_{+}e_1, e_2 = h_3$, которая следует из уравнений (2.1). Представляя решение этой системы в виде (1.2), придем к следующему характеристическому уравнению:

$$(k^{2} - \alpha_{1}^{2}) (ik^{2} \chi + 1) + \beta_{11}k^{2} = 0, \quad \chi = c^{2}(4\pi\sigma\omega)^{-1}$$
(2.8)

Уравнение (2.8) при $\chi = 0(\sigma \to \infty)$ переходит и уравнение (1.5). При отсутствии первоначального электромагнитного поля ($\beta_{11} = 0$), как нидно из уравнения (2.8), мы имеем дело с волной $u_{...}$ которая не возмущена электромагнитным полем и распространяется с фазовой скоростью c_3 и с осцилляцией электромагнитного поля При наличии магнитного поля уравнение (2.8) по виду совпадает с уравнением (2.5) ($\chi' \sim \chi$, $\alpha_1 \sim \alpha_3$, $\beta_{21} \sim \beta_{13}$).

В случае, когда маглитное поле перпендикулярно илоскости изотролиц $\vec{B}_0(0,0,B_{03})$, следует, что волны u_s и u_s не возмущены электромагнитным полем и распространяются с фазовыми скоростями c_2

п c_3 . А для неизвестных функций u_x, e_3 и h_3 получается сдедующее уравнение:

 $(k^{2} - \alpha_{1}^{2}) (ik^{2}\chi + 1) + \beta_{3}k^{2} = 0$ (2.9)

Уравнение (2.9) по виду совпадает с уравнением (2.5) ($\chi' \sim \chi, \beta_{21} \sim \beta_{31}$). При отсутствии внешнего магнитного поля ($\beta_{31} = 0$), как видно из уравнения (2.9), мы имсем дело с осцилляцией электромагнитного поля и с волной u_i , не возмущенной электромагнитным полем и распространяю щейся со скоростью c_i .

В заключение отметим, что аналогичные исследования можно провести, как при другом направлении внешнего поля,так и в случае, когда волна распространяется периендикулярно плоскости изотропии.

ЛИТЕРАТУРА

- Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоунру гость тонких оболочек и пластин М.: Наука, 1997. 272 с.
- Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Кондрат В.Ф. Магнитотермоупру гость электроводных тел. Кнев: Наукова думка, 1982. 296 с.
- Кудрявцев Б.А., Партон В.З. Магнитотермоупругость Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М., ВИНИТИ, 1981.т. 14.с.3-59
- Физическая акустика под редакцией У. Мезона, пер. с англ., 1973, т.5 пад. "Мир", с.9-74.
- Новацкий В. Электрамогнитные эффекты в твердых телах. М.:Мир. 1986, 159 с.
- Саркисян С.В. Распространение магнитотермоупругих воли в пласти не. Тр : ХУ Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластии. Казань.т. 1, 1990. с.231-236.
- Амбарцумян С.А. Теория анизотропных иластия. (Прочность, устойчивость и колебания). М.::Паука, 1987.360 с.

Ереванский государственный университет Поступила в редакцию

Поступила в редакцию 23.11.1994

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՉԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՍԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա

49, N 3, 1996

Механика

ПРОНИКАНИЕ ИНДЕНТОРОВ В ГРУНТЫ ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРЕМЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Ванцян А.А., Мовсисян А.А.

На основании экспериментальных исследований показано, что с помощью веременных электромагнитных полей, создаваемых в электропроводищей среде, можно существенно унеличить скорость висдрения гнердых инденторов. Подбором сдвига фая колебаний индеитора и подаваемого на среду колебательного электрического сигнала можно в иссколько раз облегиить виедрение индеитора, дополнительно потрагии при эгом шертию – 1 1000 мертии вибратора.

Вопросам проникания твердых инденторов и различные среды, в том числе и грунты, посвящено ряд работ [1-6].

Процесс проникания при наличии импульсных электромагнитных полей (ЭМН) изучен в [7,8], где, в частности, ноказано, что наличие ЭМ полей приводит к существенному уменьшению глубины пропикания. В указаных работах показано, что ЭМП вокруг проникающего индентора создает имич-эффект [9], препятствующий прониканию. Расчеты показа ли, что импульсный ток – 10⁸ А создает дополнительные напряжения на инденторе – 2 + 3 пределов текучести материала среды, в том случае, когда механические напряжения на инденторе – 5 + 5.5 пределов текучести. Полученные результаты позволяют с применением ЭМП увеличнить защитную способность преграды.

Как показывают эксперименты [7,8] по прониканию твердых инденторов в групты при наличии постоянных ЭП, скорость проникания существенно увеличивается (- 20 + 30 раз).

Данное явление объясняется тем. что за счет электроосмоса вода, содержимая в грунте, передвигается к индентору, имеющему отрицательный полюс, и между средой и индентором появляется узкий слой воды, существенно уменьшающий трение. Явление электроосмоса способствует прониканию для тех грунтов, где влажность достаточно большая (- 30 %).

Для тех грунтов, где влажность небольшая, явление электровсмоса не может существенно увеличить скорость проникания.

Однако, для грунтов с малой влажностью, обеспечивающей электропроводимость среды, как показано впервые в настоящей работе, с применением противофазной вибрации индентора и среды можно достигнуть многократного увеличения скорости проникания. Среду можно заставить вибрировать, пропуская через индентор и среду переменный электрический ток. При этом за счет лоренцовой силы среда начинает вибрировать в радиальном направлении (в цилиндрических координатах *г. θ. г.*, где ось *ог* совиадает с направлением проникания) цернодически сжимая и разрежая среду вокруг индентора (фиг. 1).



Φur.1

Фиг 2

Если сдвиг фаз согласовать так, что индентор при движении в направлении од проникал в разреженную среду, го в зависимости от стенени разрежения существенно можно увеличить скорость проникания

На фиг 2 показана схема проведения эксперимента. На катушку 1. сердечник которой является индентором 2. подается переменный ток из генератора З. усиливаемый в усилителе 4. Через индентор и среду 5. подается усиденный в усидителе 6 электрический ток той же частоты, по сдвинутый по фазе. Одновременно сигналы подаваемого тока на среду и сигналы, взятые от датчика 7, закрепленного на инденторе, подавались на двухлучевой осциллограф 8 для определения истинного сдвига фаз подаваемых электрических сигналов. На самонисце 9 снимались днаграммы st (глубина в зависимости от времени). Из генератора 3 можно было получить дискретный сдвиг фаз двух электрических Для более плавного сдвига фаз была смонтирована сигналов дополнительная LRC цень 10, которая дала возможность в пределах ~ ± Т 20 плавно изменять сдвиг фаз (Т период одного колебания). Из дагчика 7 сигнал также подавался на прибор 11 для определения амплитуды колебания индентора

Амлитуда колебания индентора изменялась напряжением сигнала, подаваемого на катушку 1. С помощью амперметров 12, 13 и волыметров 14, 15 измерялись энергии подаваемых на вибратор и среду электри ческих сигналов. Эксперименты были проведены как при резонансных для системы 1, 2, 5 частотах, так и вне резонасных частотах.



Φur.3

На фиг. З показаны диаграммы *st*. Кривые 1, 2, 3. для частот $\omega_1 = 18, \omega_2 = 45, \omega_3 = 26$ при I = 0 (отсутствие тока в среде) . Кривые 4. 5. 6 показывают зависимость *st* для тех же частот, соответствению, и I=0, 0,3A при единге фаз 170 + 175°, т. е. на среду подается сигнал, опережающий движение индентора ~ полпериода. Малую разницу $(-5 \pm 10^{\circ})$ от полнериода можно объяснить релаксацией, г. е. Запаздыва инем среды в полновых процессах. Кривые 7, 8, 9 показывают зависимость *st* процесса, когда в момент движения индентора в направлении проинссе, когда в момент движения индентора в направлении проинскания процессе, когда в момент движения индентора в паравлении проинскания процессодит сжатие среды. Как видно из графиков фиг. 3, в зависимости от сдвига фаз колебании индентора и среды можно в несколько раз (~ 2 + 3) увеличить пли уменьщить скорость проинкания, потратив при этом энергию – 1 1000 от потреблясмой энергии вибращии индеитора. Во время экспериментов наблюдался пропорциональный рост скорости проинкания от амилитуды колебания индеитора.

В настоящих экспериментах амилитуда колебания индентора изменялась в пределах 4 10⁻⁵ + 6 10⁻⁶ М. Резонансиая частота указанной системы была – 26 гц. подавыемый среде ток – 0.03 А. Среда глинистый грунт. влажностью 15-20%

Таким образом, ноказано, что выбором сдвига фаз и частоты колебаний вибратора и среды можно добиться значительного увеличения скорости пропикания индентора в групты.

Из результатов эксперимента выяснилось, что в зависимости от электромеханических параметров системы вибратор среда сдинга фаз колебаний вибратора и подаваемого на среду переменного тока меняется, однако при помощи предлагаемой схемы, приведенной на фиг. 2. всегда можно достигнуть оптимального сдвига фаз, приводящего к увеличению скорости пропикания индепторов в различные среды.

ЛИТЕРАТУРА

- Backman M.E., Goldsmith W. The Mechanics of Penetration Projectiles into targets. Int J. Eng. Sci. 1978, v 16, N 1, pp. 1 100
- 2. Зукас Дж.А. и др. Динамика удара. М. : Мир. 1985.

- Сагомонян А.Я. Динамика пробивания преград. М. : Изд во МГУ. 1988, 220 с.
- Багдоев А. Г., Ванцян А. А. Проникание тонкого тела в металлы и группы. Изв. АН Арм ССР. Механика, 1981; т. 34. N 3, с. 25-38.
- Ванцян А.А. Определение глубниы проникания тонкого тела в металлы. Докл АН Арм ССР, 1981. г. 72. N 2
- Ванцян А.А. Теоретические и экспериментальные результаты проникания в металлы. Исследование по механике твердого деформируемого тела. Ереван: Изд. АН Арм ССР, 1981.
- Ваниян А.А., Петросян Т.Л. Экспериментальное исследование проинкания конуса, переходящего в цилиндр, в групты В сб. – Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван. 1987, 291 с.
- Ванцян А.А. Вибропроникание твердых металлических тел в электропроводящие групты при наличии переменных или постоянных токов Изп. АП Арм ССР. Механика, 1987, т. 40. N 5, с. 40.45
- Багдоев А.Г., Ванцян А.А. Влияние разрядных токов конденсаторов на механические явления в образцах. ПІ Всесоюзный симпозиум "Теоретические вопросы магнитоупругости", 1984.

Институт механики НАП Армении

Поступила в редакцию 21-10-1994

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԳԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա

49, N 3, 1996

Механика

ИЗГИБ ПЪЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Бабаян А. В.

Ա. Վ. Բաթայան

Պինգոկերամիկ գլանային թաղանթի ձռումը ընդլայնական սաճքնրի հաշվառմամբ

Բարակ պիեզոկերամիկ սալերի և քաղանքների լայն կիրառությունը, որպես էներգիայի ցածր համախականությամբ՝ էլեկտրամեխանիկական՝ փոխակերպիչների՝ ակտիվ՝ էլեմենտներ, մեխանիկայի ասալարեզում առաջ են բերվում մի շարք կարևոր խնդիրներ

՝ Մինչ այժմ այդ խնդիրները հիմնականում ուսումնասիրվել են Կիրխհոֆ-Լլավի հիպոթեգների օգտագործմամբ, պիեզոկերամիկայից պատրաստված ըստ հաստության բևեռացված, թաղանըների և սայերի տետության կառուգման համար (6, 7)

՝ Սակայն՝ Կիրխեոֆ-Լյավի տեսությամբ՝ պիեզոկերանիկ՝ սալերի և քաղանքների խնդիրները լուծելիս առաջ են գալիս որոշակի անճշտություններ, այդ պատճառով առաջարկվում է խնդիրները լուծել օգտագործելով ծշղոտվան տեսությունը (1 2):

ճշգրտված տեսությամբ լուծված են սալերի մի շարք խնդիրներ Մ-Ա-Յանբարծումյանի և Ս. Վ Բելուբեկյանի (3-4, 5) աշխատանքներում, բաղանքների համար (8) աշխատությունում

Այս աշխատանքում ուսումնասիրվում է պիեզոկերամիկ գլանային թաղանքի մեխանիկական վարքագինը մի քանի դեպքերի համար

A V. Babayan

Bending of a prezoceramical cylindrical shell with the account of transverse shears

Шпроком применением гонких ныетокерамических и настии и оболочек в качестве активных члементов на вкочастотных электромеханических преоб разователей обусловлены исследования задач электроупругости гонких тел

Эли задачи в основном исследованы с использованием гипотелы Кирхгофа Лява [6]

Однако при решении отях водоч с помощью Кирхгофа-Ляла по вникают некоторые неточности которые могут быть преодолены с использованием уточненных теорий [1/2]

В работах С V. Амбарцумяны и М.В. Белубекяна (3,4,5) с помощью угоч-ненной геории решены некоторые задачи для пластии, в и работе Б.А.Кудрициева, В. З. Цартова, Н. А. Сеника [7] для оболочек.

В настоящей работе с помощью уточненной теории [3,4,5] истледовано поведение пьелокерамической круговой цилиндрической оболочки при различных гипах нагружения

 Рассмотрим осесниметричную задачу пьезокерамической круго вой цилиндрической оболочки постоянной толщины h. равномерно полярнованную вдоль нормали к средниной поверхности оболочки

Цилиндрическая оболочка отнессиа к смешанной системе координат $O\alpha\beta\gamma$ так, что поверхность $\alpha O\beta$ совнадает со средниной поверх ностью оболочки, т. с. материал оболочки воляризован по координатным лициям γ (фиг. 1).

В этом случае уравнения состояния занишутся аналогично [4]

Компоненты деформации и уравнения равновесия оболочки представляются известным образом [2].



Пусть лицевые поверхности оболочки $\gamma = \pm \frac{\hbar}{2}$ электродированы и заданы значения электрического потенциала $\phi(\alpha, \gamma)$ на этих поверх постях:

$$\varphi = \varphi(\alpha, \gamma) = \pm V_0$$
 app $\gamma = \pm \frac{h}{2}$ (1.1)

Уравнения электродинамики для пьезосреды в электростатичес ком приближении запищутся следующим образом [4]:

$$div D = 0 \quad rot E = 0 \tag{1.2}$$

Введя электрический потенциал ф по формулс-

$$E = -grad\phi \tag{1.3}$$

гождественно удовлетворим второму уравнению (1.2), так как

$$E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$$
 $E_2 = 0$ $E_3 = -\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}$ (1.4)

а нервое уравнение (1.2) перенишется следующим образом:

$$\frac{\partial D_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial D_2}{\partial \gamma} = 0 \tag{1.5}$$

Преднолагается, что нялиндрическая оболочка нагружена линь поперечной нагрузкой Z^+ и Z^- , приложенной на поверхностях оболочки $\gamma = \pm \frac{h}{2}$, соответственно.

Задача рассматривается на основании уточненной теории оболочки [1], при этом вместо ранее принятого предположения $e_{ii} \approx O$ предполагается, что понеречная пормальная деформация, обусловленная

электрическим полем, не может быть пренебрежена, и представляется следующим образом [4, 7]

$$e_{11} = d_{11}E_1$$
 (1.6)

В соответствии с основным предположением уточненной теории [1] принимается также, что

$$\sigma_{13} = f(\gamma)\varphi_1(\alpha) \qquad \sigma_{23} = 0 \tag{1.7}$$

где φ_1 искомая функция, $f(\gamma)$ заданная функция, выбранная следующим образом:

$$f(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar^2}{4} - \gamma^2 \right) \tag{1.8}$$

Из уравнений равновесия после известных преобразований для пормального напряжения $\sigma_{\rm tr}$ получим

$$\sigma_{11} = Z_1 + \frac{12}{h^2} I_0(\gamma) Z_2$$
(1.9)

rge

$$Z_{1} = \frac{1}{2} (Z^{*} - Z^{-}), \quad Z_{2} = Z^{*} + Z^{-}$$
(1.10)

$$I_{0}(\gamma) = \int_{0}^{\gamma} f(\gamma) d\gamma = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{h^{2}}{4} - \frac{\gamma^{2}}{3} \right)$$
(1.11)

Обобщая основные положения угочисниой теория на случай задачи электроупругости, предполагаем, что [4]

$$\varphi = \frac{8}{h^*} f(\gamma) \Phi_1(\alpha) + \frac{8\gamma}{h^*} f(\gamma) \Phi_2(\alpha) + \frac{2\gamma}{h} V_0$$
(1.12)

где **Ф**₁, **Ф**₂ искомые функции, характиризующие электростатический потенциал оболочки.

Принимая (1.6) (1.12), одновременно удовлетворяем условням на поверхностях $\gamma = \pm \frac{h}{2}$ оболочки, которые имеют следующий вид:

$$\sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \pm \frac{h}{2}$$

$$\sigma_{13} = Z^{*} \qquad \text{при} \quad \gamma = \frac{h}{2}$$

$$\sigma_{33} = -Z^{*} \qquad \text{при} \quad \gamma = -\frac{h}{2}$$

$$\varphi = \pm V_{0} \qquad \text{при} \quad \gamma = \pm \frac{h}{2} \qquad (1.13)$$

Решая уравнения состояния относительно σ_{11}, σ_{22} и $\sigma_{12},$ польдним.

$$\sigma_{11} = S_{11} (v_{11} + vv_{22}) + A_1' \sigma_{31} - B_1' E_1$$

$$\sigma_{22} = S_{11} (v_{22} + vv_{11}) + A_1' \sigma_{33} - B_1' E_3$$

$$\sigma_{12} = 0$$

$$\sigma_{12} = 0$$

 Δ

$$S_{11} = \frac{S_{11}^{L}}{\Delta} = \frac{1}{S_{11}^{L}(1-v^{2})} \qquad \Delta = \left(S_{11}^{L}\right)^{2} - \left(S_{12}^{E}\right)^{2}$$

$$A_{1}^{s} = \frac{S_{11}^{L}\left(S_{11}^{s} - S_{12}^{t}\right)}{\Delta} = \frac{v^{s}}{1-v} \qquad v = -\frac{S_{12}^{L}}{S_{11}^{E}} \qquad (1.15)$$

$$B_{1}^{s} = \frac{d_{1s}\left(S_{11}^{E} - S_{12}^{E}\right)}{\Delta} = \frac{d_{11}}{S_{11}^{E}(1-v)} \qquad v^{s} = -\frac{S_{13}^{E}}{S_{11}^{E}}$$

$$E_{1} = -\frac{8}{h^{*}}f(\gamma)\frac{d\Phi_{1}}{d\alpha} - \frac{8\gamma}{h^{*}}f(\gamma)\frac{d\Phi_{2}}{d\alpha}$$

$$E_{2} = 0 \qquad (1.16)$$

$$E_{3} = \frac{8\gamma}{h^{*}}\Phi_{1} - \frac{4}{h^{*}}\left(\frac{h^{2}}{4} - 3\gamma^{2}\right)\Phi_{2} - \frac{2}{h}V_{0}$$

для компонент вектора электрической индукций по.

$$D_{1} = -\frac{8\varepsilon_{11}}{h^{3}}f(\gamma)\frac{d\Phi_{1}}{d\alpha} - \frac{8\gamma\varepsilon_{11}}{h^{*}}f(\gamma)\frac{d\Phi_{2}}{d\alpha} + d_{13}f(\gamma)\varphi_{1}$$

$$D_{1} = 0$$
(1.17)

$$D_{3} = \frac{8\gamma}{h^{3}}\varepsilon_{33}^{*}\Phi_{1} - \frac{4}{h^{5}}\left(\frac{h^{2}}{4} - 3\gamma^{2}\right)\varepsilon_{33}^{*}\Phi_{2} - \frac{2}{h}\varepsilon_{33}^{*}V_{0} + B_{1}'\left(e_{11} + e_{22}\right) + d_{33}^{*}\left(Z_{1} + \frac{12}{h^{3}}I_{0}(\gamma)Z_{2}\right)$$

r.1e

$$\varepsilon_{ii}^* = \varepsilon_{ii}^t - \frac{2d_{ii}^2}{S_{ii}^E(1-\nu)}, \qquad d_{iii}^* = d_{iii} + d_{ii}\frac{2\nu'}{1-\nu}$$
(1.18)

Предполагая, что при $\gamma = 0$, $U_1 = U(\alpha)$, $U_2 = 0$, $U_3 = W(\alpha)$ для компонент перемещения какой либо точки оболочки, согласно (1-6). (1.7) и (1.16), получим:

$$U_{i} = U - \gamma \frac{dW}{d\alpha} - \frac{8}{h^{3}} \left(d_{is}I_{0}(\gamma) + \frac{\gamma^{3}}{6} d_{3s} \right) \frac{d\Phi_{1}}{d\alpha} + S_{44}^{T}I_{0}(\gamma)\varphi_{i} + \frac{8}{h^{3}} \left(d_{3s} - d_{is} \right) I_{2}(\gamma) \frac{d\Phi_{2}}{d\alpha}$$

$$U_{2} = 0$$

$$U_{3} = W + \frac{4\gamma^{2}}{h^{2}} d_{33} \Phi_{1} - \frac{4\gamma}{h^{3}} d_{33} \left(\frac{h^{2}}{4} - \gamma^{2}\right) \Phi_{2} - \frac{2\gamma}{h} d_{33} V_{0}$$

где

$$I_{\gamma}(\gamma) = \int \gamma f(\gamma) d\gamma = \frac{\gamma^2}{8} \left(\frac{h^2}{2} - \gamma^2 \right)$$
(1.20)

На основе (1.19) получаются деформации e_a и напряжения σ_a

$$\begin{split} \sigma_{11} &= S_{11} \left(\frac{dU}{d\alpha} + \frac{v}{R+\gamma} W \right) - S_{11} \gamma \frac{d^2 W}{d\alpha^2} + S_{11} S_{14}^{L} I_0(\gamma) \frac{d\varphi_1}{d\alpha} - \\ &- S_{11} \frac{8}{h^3} \left(d_{10} I_0(\gamma) + \frac{d_{10}}{6} \gamma^3 \right) \frac{d^2 \Phi_1}{d\alpha^2} + S_{11} \frac{8}{h^8} (d_{10} - d_{15}) I_2(\gamma) \frac{d^2 \Phi_2}{d\alpha^2} + \\ &+ \frac{8\gamma}{h^4} \left(\frac{S_{11} v}{R+\gamma} \frac{\gamma d_{10}}{2} - B_1' \right) \Phi_1 - \frac{4}{h^5} \left(\frac{S_{11} v}{R+\gamma} 2\gamma d_{10} f(\gamma) - B_1' \right) \frac{d^2 \Phi_2}{d\alpha^2} + \\ &- \frac{2}{h} \left(\frac{S_{11} v}{R+\gamma} \gamma I_{10} - B_1' \right) \Phi_1 - \frac{4}{h^5} \left(\frac{S_{11} v}{R+\gamma} 2\gamma d_{10} f(\gamma) - B_1' \right) \frac{d\varphi_1}{4} - 3\gamma^2 \right) \Phi_2 + A_1 \left(Z_1 + \frac{12}{h^2} I_0(\gamma) Z_2 \right) - \\ &- \frac{2}{h} \left(\frac{W}{R+\gamma} + v \frac{dU}{d\alpha} \right) - S_{10} v \gamma \frac{d^2 W}{d\alpha^2} + S_{10} S_{14}^{T} v I_0(\gamma) \frac{d\varphi_1}{d\alpha} - \\ &- S_{11} v \frac{8}{h^4} \left(d_{15} I_0(\gamma) + \frac{\gamma^4}{6} d_{15} \right) \frac{d^2 \Phi_1}{d\alpha^2} + S_{10} v \frac{8}{h^4} \left(d_{13} - d_{15} \right) \times \\ &\times I_2(\gamma) \frac{d^2 \Phi_2}{d\alpha^2} + \frac{8\gamma}{h^4} \left(\frac{S_{11}}{R+\gamma} \frac{\gamma d_{10}}{2} - B_1' \right) \Phi_1 - \frac{4}{h^5} \left(\frac{S_{11}}{R+\gamma} 2\gamma d_{10} f(\gamma) - B_1' \left(\frac{h^2}{4} - 3\gamma^2 \right) \right) \Phi_2 + \\ &+ A_1' \left(Z_1 + \frac{12}{h^2} I_0(\gamma) Z_2 \right) - \frac{2}{h} \left(\frac{S_{11}}{R+\gamma} \gamma d_{10} - B_1' \right) V_0 \end{split}$$

Из условий статической эквивалентности, для внутренних сил и моментов, отнесенных к единице длины средниной новерхности оболочки с точностью $1 \pm \frac{\gamma}{R_i} \approx 1$, получим $T_1 = S_{11}h \left[\frac{dU}{d\alpha} + \frac{\mathbf{v}}{R} W \right] + \frac{7S_{11}}{240} \left(d_{13} - d_{15} \right) \frac{d^2 \Phi_z}{d\alpha^2} + \frac{S_{11} \mathbf{v} d_{33}}{3R} \Phi_1 + A_1' Z_1 h + 2B_1 V_0$

1.19)

$$T_{2} = S_{11}h \left[\frac{W}{R} + v\frac{dU}{d\alpha}\right] + \frac{7S_{11}v}{240} (d_{33} - d_{15})\frac{d^{2}\Phi_{2}}{d\alpha^{2}} + \frac{S_{11}d_{35}}{3R}\Phi_{1} + A_{1}Z_{1}h + 2B_{1}^{2}V_{0}$$

$$S_{12} = S_{21} = 0 \qquad (1.22)$$

$$N_{1} = \frac{h^{1}}{12}\varphi_{1} \qquad N_{2} = 0$$

$$M_{1} = -S_{11}\frac{h^{2}}{12}\frac{d^{2}W}{d\alpha^{2}} + S_{11}S_{44}^{4}\frac{h^{5}}{120}\frac{d\varphi_{1}}{d\alpha} - S_{11}\frac{h^{2}}{15}\left(d_{15} + \frac{d_{45}}{4}\right)\frac{d^{2}\Phi_{1}}{d\alpha^{2}} - \frac{2}{3}B_{1}^{2}\Phi_{1} - S_{11}v\frac{d_{43}}{30R}\Phi_{2} + A_{1}^{*}\frac{h^{2}}{10}Z_{2} - \frac{S_{11}vd_{11}h^{2}}{6R}V_{0}$$

$$M_{2} = -S_{11}v\frac{h^{3}}{12}\frac{d^{2}W}{d\alpha^{2}} + S_{11}S_{44}^{*}v\frac{h^{5}}{120}\frac{d\varphi_{1}}{d\alpha} - S_{11}v\frac{h^{2}}{15}\left(d_{15} + \frac{d_{44}}{4}\right)\times \frac{d^{2}\Phi_{1}}{4} - \frac{S_{11}d_{44}}{30R}\Phi_{2} - \frac{S_{11}vd_{11}h^{2}}{6R}V_{0}$$

Уравнення равновесня во внутренних силах и моментах имеют вид [2]:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} = 0, \qquad Z_2 + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} - \frac{T_2}{R} = 0 \qquad \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} - N_1 = 0 \qquad (1.23)$$

Нодставляя значения внутренних сил и моментов из (1.22) в (1.23), приходим к следующей системе трех уравнений относительно няти искомых функций $U, W, \phi, \Phi_1, \Phi_2$:

$$S_{11}h\left[\frac{d^{2}U}{d\alpha^{2}} + \frac{v}{R}\frac{dW}{d\alpha}\right] + \frac{7S_{11}}{240}\left(d_{33} - d_{13}\right)\frac{d^{4}\Phi_{3}}{d\alpha^{3}} + \frac{S_{11}vd_{33}}{3R}\frac{d\Phi_{1}}{d\alpha} = -A_{1}h\frac{dZ_{2}}{d\alpha}$$

$$Z_{1} + \frac{h^{2}}{12}\frac{d\varphi_{1}}{d\alpha} - \frac{S_{11}h}{R}\left[\frac{W}{R} + v\frac{dU}{d\alpha}\right] - \frac{7S_{11}v}{240R}\left(d_{33} - d_{15}\right) \times$$

$$\times \frac{d^{2}\Phi_{2}}{d\alpha^{2}} - \frac{S_{11}d_{33}}{3R^{2}}\Phi_{1} - \frac{2B_{1}'}{R}V_{0} - \frac{A_{1}'Z_{1}h}{R} = 0 \qquad (1.24)$$

$$= S_{11}\frac{h^{2}}{12}\frac{d^{3}W}{d\alpha^{3}} + S_{11}S_{14}^{E}\frac{h^{5}}{120}\frac{d^{2}\varphi_{1}}{d\alpha^{2}} - \frac{S_{11}h^{2}}{15}\left(d_{15} + \frac{d_{11}}{4}\right)\frac{d^{3}\Phi_{1}}{d\alpha^{3}} - \frac{2B_{1}'}{30R}\frac{d\Phi_{1}}{d\alpha} - \frac{S_{11}vd_{33}}{d\alpha}\frac{d\Phi_{2}}{d\alpha} - \frac{\varphi_{1}h^{2}}{12} = -A_{1}'\frac{h^{2}}{10}\frac{dZ_{2}}{d\alpha}$$

Система уравнений (1.24) дополняется двумя осредненными уравнениями, которые можно получить из уравнения электростатики (1.5). Первое уравнение получается интегрированием уравнения (1.5) по γ в пределах от $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2}$ второе уравнение получается умножением уравнения (1.5) на γ и интетрированием по γ в тех же пределах. Носле некоторых преобразований задача электроупругости по нормалям поляризованной пьезокерамической полиндрической оболочки приводится к решению следующей системы ияти дифференциольных уравнений:

$$\begin{split} S_{11}h\left[\frac{d^{2}U}{d\alpha^{2}} + \frac{v}{R}\frac{dW}{d\alpha}\right] + \frac{7S_{11}}{240}\left(d_{33} - d_{15}\right)\frac{d^{3}\Phi_{2}}{d\alpha^{3}} + \frac{S_{11}d_{31}}{3R}\frac{d\Phi_{1}}{d\alpha} = -A_{1}^{*}h\frac{dZ_{1}}{d\alpha} \\ Z_{2} + \frac{h^{3}}{12}\frac{d\phi_{1}}{d\alpha} - \frac{S_{11}h}{R}\left[\frac{W}{R} + v\frac{dU}{d\alpha}\right] - \frac{7S_{11}v}{240}\left(d_{33} - d_{15}\right)\frac{d^{2}\Phi_{2}}{d\alpha^{2}} - \frac{S_{11}d_{31}}{3R^{2}}\Phi_{1} - \frac{2B_{1}^{*}}{R}v_{0} - \frac{A_{1}^{*}Z_{1}h}{R} = 0 \\ -S_{11}\frac{h^{3}}{12}\frac{d^{3}W}{d\alpha^{3}} + S_{11}S_{44}^{*}\frac{h^{5}}{120}\frac{d^{2}\phi_{1}}{d\alpha^{2}} - \frac{S_{11}h^{2}}{15}\left(d_{15} + \frac{d_{45}}{4}\right)\frac{d^{3}\Phi_{1}}{d\alpha^{3}} - \\ -\frac{2B_{1}^{'}}{3}\frac{d\Phi_{1}}{d\alpha} - \frac{S_{11}vd_{33}}{30R}\frac{d\Phi_{2}}{d\alpha} - \frac{\phi_{1}h^{3}}{12} = -A_{1}^{'}\frac{h^{2}}{10}\frac{dZ_{2}}{d\alpha} \\ \left[\varepsilon_{11}^{T} + B_{1}^{'}\left(d_{15} + \frac{d_{33}}{2}\right)\right]\frac{d^{2}\Phi_{1}}{d\alpha^{2}} + \frac{3}{2}B_{1}^{'}h\frac{d^{2}W}{d\alpha^{2}} - \frac{h^{3}}{8}\left(d_{15} + B_{1}^{'}S_{44}^{*}\right)\frac{d\phi_{1}}{d\alpha} - \\ -\frac{12}{h^{2}}\varepsilon_{33}^{*}\Phi_{1} + \frac{3B_{1}^{'}d_{33}}{R}V_{3} - \frac{3}{2}d_{13}^{*}Z_{2} = 0 \\ \frac{1}{30}\left[\varepsilon_{11}^{T} - B_{1}^{'}\left(d_{33} - d_{15}\right)\right]\frac{d^{2}\Phi_{2}}{d\alpha^{2}} - \frac{2}{h^{2}}\varepsilon_{33}^{*}\Phi_{2} - \frac{2}{3}B_{1}^{'}\frac{d_{33}}{R}\Phi_{1} = 0 \end{split}$$

Рассмотрим некоторые красвые задачи.

2. Рассмотрим задачу изгиба внешним электрическим потенциалом, пьезокерамической циллидрической оболочки, когда края $\alpha = 0, \alpha = \ell$ шарнирно оперты, а лицевые поверхности циллидрической оболочки электродированы. Оболочка предварительно равномерно поляризована по толщине (γ). На лицевых новерхностях оболочки $\gamma = \pm \frac{h}{2}, \quad \varphi = \pm V_0$. На краях оболочки ($\alpha = 0, \alpha = \ell$) $\varphi = 0, \quad V_0 = 0.$

Система разрешающих уравнений (1.25) для этой задачи примет следующий вид

$$S_{11}h\left[\frac{d^{2}U}{d\alpha^{2}} + \frac{v}{R}\frac{dW}{d\alpha}\right] + \frac{7S_{11}}{240}(d_{33} - d_{13})\frac{d^{3}\Phi_{2}}{d\alpha^{3}} + \frac{S_{11}vd_{33}}{3R}\frac{d\Phi_{1}}{d\alpha} = 0$$

$$\frac{h^{3}}{12} \frac{d\varphi_{1}}{d\alpha} = \frac{S_{11}h}{R} \left[\frac{W}{R} + v \frac{dU}{d\alpha} \right] - \frac{7S_{11}v}{240R} (d_{11} - d_{15}) \frac{d^{2}\Phi_{2}}{d\alpha^{2}} - \frac{S_{11}d_{31}}{d\alpha^{2}} \Phi_{1} - \frac{2V_{0}B_{1}'}{R} = 0$$
(2.1)
$$= S_{11} \frac{h^{3}}{12} \frac{d^{3}W}{d\alpha^{3}} + S_{11}S_{44}^{E} \frac{h^{5}}{120} \frac{d^{2}\varphi}{d\alpha^{2}} - \frac{S_{11}h^{2}}{15} \left(d_{15} + \frac{d_{33}}{4} \right) \frac{d^{3}\Phi_{1}}{d\alpha^{3}} - \frac{2B_{1}'}{d\alpha^{3}} \frac{d\Phi_{1}}{d\alpha} - \frac{S_{11}vd_{31}}{30R} \frac{d\Phi_{2}}{d\alpha} - \frac{\varphi_{1}h^{3}}{12} = 0$$

$$\left[\frac{\varepsilon_{11}^{r}}{R} + B_{1}' \left(d_{15} + \frac{d_{33}}{2} \right) \right] \frac{d^{2}\Phi_{1}}{d\alpha^{2}} + \frac{3}{2} B_{1}'h \frac{d^{2}W}{d\alpha^{2}} - \frac{h^{3}}{8} (d_{15} + B_{1}'S_{44}^{E}) \frac{d\varphi_{1}}{d\alpha} - \frac{12}{h^{2}} \varepsilon_{33}}{e_{33}} \Phi_{1} + \frac{3B_{1}'d_{33}V_{0}}{R} = 0$$

Fpannyune ye.nobust задачи заницутся следующим образом:
$$W = 0, \quad T_{1} = 0, \quad M_{1} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0, \ell$$

$$\varphi = 0 \qquad \text{при} \quad \alpha = 0, \ell$$
 (2.2)
$$\varphi = \pm V_{0} \qquad \text{при} \quad \gamma = \pm \frac{h}{2}$$

Учитывая (1.12), для осредненных граничных условий получим
$$\Phi_{1}(\alpha) = 0 \quad \Phi_{2}(\alpha) = 0 \text{ при} \quad \alpha = 0, \ell$$
 (2.3)

$$W = 0 \qquad \frac{dU}{d\alpha} = 0 \qquad \frac{d^2 W}{d\alpha^2} = S_{44}^{r} \frac{d^2 \varphi}{10} \frac{d\varphi}{d\alpha}$$

Решение системы (2.1) представим в виде

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{\pi n \alpha}{\ell}$$

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{\pi n \alpha}{\ell}$$

$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{\pi n \alpha}{\ell}$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{\pi n \alpha}{\ell}$$
(2.4)

которые удовлетворяют красвым условиям (2.3).

Функцию V₀ также представим в виде ряда

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin \frac{\pi n \alpha}{\ell}$$
(2.5)

где F_n – известные постоянные.

Подставим (2.4), (2.5) в (2.1), получим алгебраическую систему уравнений для определения постоянных интегрирования. После некогорых преобразований для искомых постоянных A_n, B_n, C_n, D_n, E_n нолучим

$$D_{n} = -\frac{I_{2}}{\frac{2}{3}}B_{1}^{\prime}\frac{d_{33}}{R}E_{n}$$

$$C_{n} = \frac{3T_{2}R\left|\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^{2} - 2\frac{T_{1}}{B_{1}^{\prime}d_{33}}\right]}{\frac{h^{3}}{2}\frac{\pi n}{\ell}Q}E_{n} - \frac{\frac{3B_{1}^{\prime}}{R}\left(d_{33} - B_{1}^{\prime}h\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^{2}\frac{C_{11}^{\ell}}{M}\right)}{\frac{h^{3}}{2}\frac{\pi n}{\ell}Q}F_{n}$$

$$B_{n} = \frac{RT_{2}}{2hB_{1}^{\prime}MQ}\left[M\left(d_{15} + B_{1}^{\prime}S_{44}^{\ell}\right) - \frac{2hC_{11}^{\ell}T_{1}}{d_{33}}\right]E_{n} + \frac{2B_{1}^{\prime}C_{11}^{\ell}}{QMR}\left(d_{13} - d_{33} + B_{1}^{\prime}S_{44}^{\ell}\right)F_{n}$$

$$A_{n} = \left[\frac{C_{12}^{\ell}hT_{2}R}{2M\frac{\pi n}{\ell}Q}\left[\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^{2} - 2\frac{T_{1}}{B_{1}^{\prime}d_{33}}\right) - \frac{P_{1}}{h}\frac{\pi n}{\ell}\right]E_{n} + h\frac{2B_{1}^{\prime}C_{12}^{\ell}}{RM\frac{\pi n}{\ell}Q}\left[d_{15} - d_{33} + B_{1}^{\prime}S_{44}^{\ell}\right]F_{n}$$

$$(2.6)$$

$$A_{n} = \left[\frac{C_{12}^{\ell}hT_{2}R}{2M\frac{\pi n}{\ell}Q}\left[\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^{2} - 2\frac{T_{1}}{B_{1}^{\prime}d_{33}}\right) - \frac{P_{1}}{h}\frac{\pi n}{\ell}\right]E_{n} + h\frac{2B_{1}^{\prime}C_{12}^{\ell}}{RM\frac{\pi n}{\ell}Q}\left[d_{15} - d_{33} + B_{1}^{\prime}S_{44}^{\ell}\right]F_{n}$$

$$E_{n} = -\frac{1}{K} \left[B_{t}^{\prime 2} d_{33} \left\{ S_{44}^{E} D_{11}^{E} \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^{2} \frac{12}{5h} \left(d_{33} - \frac{hB_{1}^{\prime}}{6} \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^{2} \frac{C_{11}^{E}}{M} \right) + 2 \left(d_{33} - B_{1}^{\prime} h \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^{2} \frac{C_{11}^{E}}{M} \right) + D_{11}^{E} 2 \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^{4} \frac{C_{11}^{E}}{M} \left(d_{15} - d_{33} \right) \right\} \right] F_{n}$$

$$(2.7)$$

где

$$\begin{split} & K = D_{11}^{E} R^{2} T_{2} \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^{4} \frac{1}{5h} \left[\frac{5}{2} d_{15} d_{15} - \frac{S_{44}^{E}}{2} B_{1}^{\prime} d_{33} - 6P_{2} Q - \frac{5hT_{1} C_{11}^{E}}{M}\right] + R^{2} T_{2} \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^{2} \left[QB_{1}^{\prime} - \frac{B_{1}^{\prime} d_{33}}{2} + \frac{6T_{1} S_{44}^{E} D_{11}^{E}}{5h}\right] + T_{2} T_{1} R^{2} - C_{12}^{E} \frac{d_{33}^{2}}{30} QRB_{1}^{\prime} \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^{2} \\ & M = \left(hC_{12}^{E}\right)^{2} - \left(\frac{C_{11}^{E}}{R}\right)^{2}, \qquad Q = d_{15} + B_{1}^{\prime} S_{44}^{E} - B_{1}^{\prime} h \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^{2} \frac{C_{11}^{E}}{M} \end{split}$$

$$C_{11}^{E} = S_{11}h, \qquad C_{12}^{E} = \frac{S_{11}v}{R}, \qquad D_{11}^{E} = \frac{S_{11}h^{*}}{12}, \qquad P_{1} = \frac{7}{240}(d_{33} - d_{15})$$

$$P_{2} = d_{15} + \frac{d_{33}}{4}, \qquad T_{1} = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^{2} \left[\varepsilon_{11}^{T} + B_{1}'\left(d_{15} + \frac{d_{33}}{2}\right)\right] + \frac{12}{h^{2}}\varepsilon_{33}^{*}$$

$$T_{2} = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^{2} \left[\varepsilon_{11}^{T} - B_{1}'\left(d_{33} - d_{35}\right)\right] \frac{1}{30} + \frac{2}{h^{2}}\varepsilon_{33}^{*}$$

Подставим (2.7) в (2.6) и получим значение постоянных A_n, B_n, C_n, D_n , при помощи которых из (2.4) получим искомые функции $U_*W_*\phi_1, \Phi_1, \Phi_2$.

З.Рассмотрим задачу изгиба иъезокерамической полубесконечной цилиндрической оболочки, когда край $\alpha = 0$ шарнирио закреплен и на краю действует изгибающий момент M_1^0

 $M_1 = M_1^0$, U = 0, W = 0 при $\alpha = 0$ (3.1) Пусть на лицевых поверхностях $\gamma = \pm \frac{h}{2}$ цилиндрической оболоч ки $Z_1 = 0$, $Z_2 = 0$, $V_0 = 0$. Оболочка предварительно поляризована по толщине (γ) и на краю $\alpha = 0$, $\varphi = 0$.

Система разрешающих уравнений (1.25) для этой задачи примет следующий вид:

$$S_{11}h\left[\frac{d^{2}U}{d\alpha^{2}} + \frac{v}{R}\frac{dW}{d\alpha}\right] + \frac{7S_{11}}{240}(d_{11} - d_{15})\frac{d^{3}\Phi_{2}}{d\alpha^{5}} + \frac{S_{11}wd_{13}}{3R}\frac{d\Phi_{1}}{d\alpha} = 0$$

$$\frac{h^{5}}{12}\frac{d\phi_{1}}{d\alpha} - \frac{S_{11}h}{R}\left[\frac{W}{R} + v\frac{dU}{d\alpha}\right] - \frac{7S_{11}v}{240R}(d_{11} - d_{15})\frac{d^{2}\Phi_{2}}{d\alpha^{2}} - \frac{S_{11}d_{33}}{3R^{2}}\Phi_{1} = 0$$

$$-S_{11}\frac{h^{5}}{12}\frac{d^{4}W}{d\alpha^{4}} + S_{11}S_{14}^{E}\frac{h^{5}}{120}\frac{d^{2}\phi_{1}}{d\alpha^{2}} - \frac{S_{11}h^{5}}{15}\left(d_{15} + \frac{d_{11}}{4}\right)\frac{d^{3}\Phi_{1}}{d\alpha^{4}} - \frac{2B_{1}'}{3}\frac{d\Phi_{1}}{d\alpha} - \frac{S_{11}vd_{13}}{30R}\frac{d\Phi_{2}}{d\alpha} - \frac{\phi_{1}h^{5}}{12} = 0$$
(3.2)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{T} + B_{1}^{T} \left(d_{13} + \frac{d_{13}}{2} \right) \end{bmatrix} \frac{d^{2} \Phi_{1}}{d\alpha^{2}} + \frac{3}{2} B_{1}^{T} h \frac{d^{2} W}{d\alpha^{2}} - \frac{h^{3}}{8} \left(d_{15} + B_{1}^{T} S_{44}^{E} \right) \frac{d\phi_{1}}{d\alpha} - \frac{12}{h^{2}} \varepsilon_{13}^{E} \Phi_{1} = 0$$

$$\frac{1}{30} \left[\varepsilon_{11}^{T} - B_{1}^{T} \left(d_{14} - d_{15} \right) \right] \frac{d^{2} \Phi_{2}}{d\alpha^{2}} - \frac{2}{h^{2}} \varepsilon_{34}^{E} \Phi_{2} - \frac{2}{3} B_{1}^{T} \frac{d_{33}}{R} \Phi_{1} = 0$$

Граничные условия занишутся следующим образом:

$$M_1 = M_1^0, U = 0, W = 0$$
 при $\alpha = 0$
 $\varphi = 0$ при $\alpha = 0$ (3.3)
 $\varphi = 0$ при $\gamma = \pm \frac{h}{2}$

Как и в первой задаче, из осредненных граничных условий получим:

$$\Phi_{1}(\alpha) = 0 \qquad \Phi_{2}(\alpha) = 0 \qquad \text{ирп} \qquad \alpha = 0 \qquad (3.4)$$

$$W = 0, \qquad U = 0, \qquad \frac{d^{2}W}{d\alpha^{2}} = S_{44}^{k} \frac{h^{2}}{10} \frac{d\varphi_{1}}{d\alpha} - \frac{12}{S_{14}h^{4}} M_{1}^{4}$$
Pendeduce electronic (3.2) $U W (\alpha, \Phi, \Phi)$ uncertainty is up to:

$$U = Ae^{au}, \quad W = Fe^{au}, \quad \phi_1 = Ce^{au}$$

$$\Phi_1 = De^{au}, \quad \Phi_2 = Ee^{a\theta}, \quad (3.5)$$
ray $A, F, C, D, E, \quad a$ искомые постоянные

Подставив (3.5) в (3.2), получим систему уравнений относительно искомых постоянных *A*, *F*, *C*, *D*, *E*, *a*. Для того, чтобы система имела истривнальные решения, необходимо, чтобы det этой системы был равен нулю, откуда получим:

$$\begin{split} &-a^{2}M\left\{\left(T_{2}a^{2}-\frac{2}{h^{2}}\varepsilon_{33}^{*}\right)\left[\left(T_{1}a^{2}-\frac{12}{h^{2}}\varepsilon_{33}^{*}\right)\left(\left(D_{11}^{E}a^{2}\frac{h^{2}}{10}S_{44}^{E}-\frac{h^{4}}{12}\right)M+\right.\\ &+D_{11}^{E}a^{4}\frac{h^{3}}{12}C_{11}^{E}\right)-\frac{h^{3}}{8}\left(d_{13}+B_{1}^{\prime}S_{44}^{E}\right)a\left(-D_{11}^{E}a^{3}\frac{d_{33}}{3h}M+M\left(\frac{C_{11}^{E}h}{15}P_{2}a^{3}+\frac{2B_{1}^{\prime}}{3}a\right)\right)\right)+\\ &+\frac{3}{2}B_{1}^{\prime}ha^{2}\left(\frac{h^{3}}{12}aC_{11}^{E}\left(-\frac{C_{11}^{E}h}{15}P_{2}a^{3}-\frac{2B_{1}^{\prime}}{3}a\right)-\frac{d_{33}}{3h}M\left(-\frac{h^{3}}{12}+D_{11}^{E}a^{2}\frac{h^{2}}{10}S_{44}^{E}\right)\right)\right]-\\ &-\frac{2}{3}B_{1}^{\prime}\frac{d_{33}}{R}\left[-\frac{h^{3}}{240}\left(d_{15}+B_{1}^{\prime}S_{44}^{E}\right)a^{2}C_{12}^{E}M-\frac{C_{12}^{E}d_{33}}{240}B_{1}^{\prime}h^{4}a^{4}C_{11}^{E}\right]\right\}=0\\ &-a^{2}M\left\{\left(T_{2}a^{2}-\frac{2}{h^{2}}\varepsilon_{33}^{*}\right)\left(\left(T_{1}a^{2}-\frac{12}{h^{2}}\varepsilon_{33}^{*}\right)\left(\left(D_{11}^{E}a^{2}\frac{h^{2}}{10}S_{44}^{E}-\frac{h^{3}}{12}\right)M+\right.\\ &+D_{11}^{E}a^{4}\frac{h^{3}}{12}C_{11}^{E}\right)-\frac{h^{3}}{8}\left(d_{15}+B_{1}^{\prime}S_{44}^{E}\right)a\left(-D_{11}^{E}a^{3}\frac{d_{33}}{3h}M+M\left(\frac{C_{11}^{E}h}{15}P_{2}a^{3}+\frac{2B_{1}^{\prime}}{3}a\right)\right)+\\ &+\frac{3}{2}B_{1}^{\mu}ha^{2}\left(\frac{h^{3}}{12}aC_{11}^{E}\right)-\frac{C_{11}^{L}h}{15}P_{2}a^{3}-\frac{2B_{1}^{\prime}}{3}a\right)-\frac{d_{33}}{3h}M\left(-\frac{h^{3}}{12}+D_{11}^{E}a^{2}\frac{h^{2}}{10}S_{44}^{E}\right)\right)\right]-\end{split}$$

$$-\frac{2}{3}B_{1}^{\prime}\frac{d_{33}}{R}\left[-\frac{h^{3}}{240}\left(d_{15}+B_{1}^{\prime}S_{44}^{E}\right)a^{2}C_{12}^{E}M-\frac{C_{12}^{E}d_{33}}{240}B_{1}^{\prime}h^{4}a^{4}C_{11}^{E}\right]\right]=0$$
(3.6)

rate.

$$\begin{split} M &= \left(C_{12}^{k}h\right)^{2} - \left(\frac{C_{11}^{k}}{R}\right)^{2} \\ C_{11}^{\ell} &= S_{11}h \qquad C_{12}^{k} = \frac{S_{11}V}{R} \qquad D_{11}^{\ell} = \frac{S_{11}h^{k}}{12} \\ P_{1} &= \frac{7}{240} \left(d_{11} - d_{15}\right) \qquad P_{2} = d_{15} + \frac{d_{11}}{4} \qquad T_{1} = \varepsilon_{11}^{T} + B_{1}^{\ell} \left(d_{15} + \frac{d_{11}}{2}\right) \\ T_{2} &= \frac{1}{30} \left[\varepsilon_{11}^{T} - B_{1}^{\ell} \left(d_{11} - d_{15}\right)\right] \end{split}$$

(3.6) является уравнением десятой степени относительно нараметра a_i однако, как нетрудно заметить. $a_a = a_{10} = 0$.

Нас будут интересовать те решения, для которых *а*, меньше нудя.

Вычислим из полученной системы постоянные A_i , F_i , C_i , D_i , выраженные через E_i

$$\begin{split} A_{i} &= \left[-\frac{P_{1}a_{i}}{h} + \frac{h^{4}C_{13}^{L}Q_{i}R}{8MB'_{i}d_{33}} \left(T_{2}a_{i}^{2} - \frac{2}{h^{2}}\varepsilon_{33}^{*} \right) \right] E_{i} \\ F_{i} &= -\left[\frac{h^{3}}{12M}a_{i}C_{i1}^{T}Q_{i} + \frac{d_{33}}{3h} \right] \frac{3R}{2B'_{i}d_{33}} \left(T_{2}a_{i}^{2} - \frac{2}{h^{2}}\varepsilon_{33}^{*} \right) E_{i} \\ D_{i} &= \frac{3R}{2B'_{i}d_{33}} \left(T_{2}a_{i}^{2} - \frac{2}{h^{2}}\varepsilon_{33}^{*} \right) E_{i} \\ C_{i} &= Q_{i}\frac{3R}{2B'_{i}d_{33}} \left(T_{2}a_{i}^{2} - \frac{2}{h^{2}}\varepsilon_{33}^{*} \right) E_{i} \end{split}$$

где

$$Q_{i} = \frac{T_{i}a_{i}^{2} - \frac{12}{h^{2}}\varepsilon_{ii}^{*} - B_{i}^{*}\frac{a_{i}^{*}}{2}d_{ii}}{\frac{h^{4}}{8M}B_{i}^{*}a_{i}^{*}C_{ii}^{*} + \frac{h^{2}}{8}(d_{15} + B_{i}^{*}S_{44}^{*})a_{i}}$$

Удовлетворяя решения (3.4) краевым условням, определим искомые постоянные \tilde{E}_i откуда и получим решение задачи.

4. При отсутствии явления пьезюэффекта достаточно в уравнении (3.6) подставить $d_{\eta} = 0$

$$\left(\varepsilon_{11}^{T}\frac{a^{2}}{30} - \frac{2}{h^{2}}\varepsilon_{13}^{T}\right)\left(\varepsilon_{11}^{T}a^{2} - \frac{12}{h^{2}}\varepsilon_{13}^{T}\right)\left[\frac{h^{2}R^{2}}{12(1-v^{2})}a^{4} - S_{11}S_{44}^{*}\frac{h^{2}}{10}a^{2} + 1\right] = 0 \quad (4.1)$$

Слагаемые в первых двух скобках уравнения (4.1) возникают вследствие электрического поля, а третья вследствие унругого поля.

В случае чисто упругих деформаций для определения нараметра *а* вместо (4,1) имеем уравнение

$$\frac{R^2 h^2}{12(1-v^2)} a^4 - S_{11} S_{44}^{E} \frac{h^3}{10} a^2 + 1 = 0$$
(4.2)

Учитывая, что нам нужны те *a*₁, для которых решения задачи удовлетворяют пулевым краевым условиям в бесконечности, получим.

$$a_{1,2} = -\sqrt{\frac{S_{11}S_{44}^{E}\frac{h^{2}}{10} \pm \sqrt{\left(S_{11}S_{44}^{E}\frac{h^{2}}{10}\right)^{2} - \frac{R^{2}h^{2}}{3(1-\nu^{2})}}{\frac{R^{2}h^{2}}{6(1-\nu^{2})}}}$$
(4.3)

 $a_1 > a_2$

Попробуем определить "лину зоны распространения краевого эффекта. Апалогично [1, 2]

$$\alpha^* = \pi \sqrt{\frac{\frac{R^2 h^2}{6(1-\nu^2)}}{S_{11}S_{44}^E \frac{h^2}{10} + \sqrt{\left(S_{11}S_{44}^E \frac{h^2}{10}\right)^2 - \frac{R^2 h^2}{3(1-\nu^2)}}}$$
(4.4)

Из первых двух скобок уравнения (4.1) для параметра *а*, соответствующей электрическому полю, получим:

$$a_{1}^{*} = -\frac{1}{h} \sqrt{60} \frac{\varepsilon_{11}^{T}}{\varepsilon_{11}^{T}} \qquad a_{2}^{*} = -\frac{1}{h} \sqrt{12} \frac{\varepsilon_{13}^{T}}{\varepsilon_{11}^{T}} \\ a_{1}^{*} < a_{2}^{*}$$
(4.5)

Сравним значения а., соответствующие этим нолям:

$$\frac{a_2}{a_2^*} \sim \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{h}{R}$$
(4.6)

(4.6) означает, что решения при налични электрического поля быстрее затухают, чем решения в случае чисто упругих деформаций.

Автор благодарит академика Амбарцумяна С. А. и профессора Белубекяна М. В за постановку задачи и обсуждение полученных результатов

ЛИТЕРАТУРА

- Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М = Наука, 1974.
- Албарцумян С.А. Теория анизотронных оболочек. М. Физматгиз, 1961.
- Албарцулян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи изгиба и коле бания пьезокерамических пластии. Механика. Ереван Изд. ЕГУ, 1987, вып. б.
- А. Албарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромаг интоупругости иластин. Ереван: Изд. ЕГУ, 1991.
- Амбариумян С.А., Белубекян М.В. К задаче изгиба пьезокерами ческих пластин, поляризованных по координатной линии средникой плоскости. Механика. Ереван: Изд. ЕГУ, 1986, вын. 5.
- Борисейко В.А., Мартыненко В.С., Улитко А.Ф. Соотношения электроупругости пьезокерамических оболочек, поляризованных вдоль одной из координатных линий. Прикладная механика. 1979. N 12. с. 36-62.
- Кудрявцев Б.А., Партон В.З., Сеник Н.А. Соотношения электроупру гости для ньезокерамических пологих оболочек с учетом деформации поперечного сдвига. Физико-химическая механика материалов, 1984, т. 20, N 1.

Ерепанский государственный университет Поступила в редакцию 23. 01 1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա

49, N 3, 1996

Mexauma

О ВОЛНАХ МОДУЛЯЦИИ АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ Саркисян А. В.

Ա. Վ. Սարգսյան

Մազնիսական դաշտում գտնվող անիզոտրոպ զլանային թաղանթի մոդուլացիոն ալիքների մասին

Դիտարկված են երկույնտկան մագնիսական դաշտում գտեղեղ ոչ գծային առածգական որթոսրոս գլանային րագանրում ալիքների տարածումը և նրանկ կայունությունը։ Թաղանջի նյուրը ոժսված է վերջավոր հաղորդակցությամբ։ Նման խնդիրներ դիտարկ-լել են (1.2) աշխատանքներում. (3)-ում ուսումենարիվել են ավը էլ գծային առառանտումները

A. V. Sarkisyan

On the modulative waves of anisotropic cylindrical shell which is situated in magnetic field.

Имучается распространение воли и их устойчивость в нелинейно упругод ортогронной циллиалической оболочке, находящейся в продольном магнитном поле Материал оболочки обладает консчной проводимостью. Подобные задачи для в отропной пластины рассматривались в работах (1.2). В работе [3] были исследованы нединейные колсбыши пластинки.

1. Рассматривается круговая цилиндрическая оболочка находянаяся в постоянном внешнем магнитиом поле, вектор напряженности которого нараллелен образующим цилиндра $(H_n, 0, 0)$.

Преднолагается, что оболочка ортотропная и целинейная, где целинейность описывается следующим образом [4]

$$\sigma_{1} = B_{11}e_{1} + B_{12}e_{2} + B_{1111}e_{1}^{3} + B_{1112}e_{2}^{3}e_{3} + B_{1122}e_{3}e_{2}^{2} + B_{1221}e_{1}^{3}$$
(1.1)
$$\sigma_{1} = B_{12}e_{3} + B_{22}e_{4} + B_{1222}e_{3}^{3} + B_{1122}e_{3}^{2}e_{3} + B_{1112}e_{3}e_{2}^{2} + B_{2222}e_{3}^{3}$$

Задача решается в классической постановке. Уравнения магнитоупругос ти оболочки имеют вид [5]:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\Psi + \frac{H_0}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) = \frac{h_s^* - h_s}{h}, \quad \frac{\partial I_1}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} - \frac{T_2}{R} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\sigma h}{c} H_0 \left(\Psi + \frac{H_0}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right) = 0.$$
(1.2)

Вычисляя усплия и изгибающий момент из (1.1), далее нереходя к неремещениям, при этом как основные, оставим нелинейные члены от прогиба (w), тогда, если решения получениой системы в виде бегущих поли [1,2]:

 $w = a \exp i(\omega t - kx), \quad f = f_a \exp i(\omega t - kx), \quad \Psi = \Psi_a \exp i(\omega t - kx) \quad (1.3)$ το для изгибной частоты получим

$$\omega^{2} = a^{2}B + \frac{B_{11}h^{2}k^{4}}{12\rho} + \frac{1}{\rho R^{2}} \left(B_{22} - \frac{B_{12}^{2}}{B_{11}} \right) + \frac{H_{0}^{2}k}{2\pi\rho h} \left(1 + \frac{ic^{2}k}{2\pi\sigma\omega h} \right)$$
(1.4)

rae

$$B = \frac{1}{R^4 \rho} \left[B_{2222} - \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(B_{1112} - B_{1122} \frac{B_{12}}{B_{11}} + B_{1222} \frac{B_{12}^2}{B_{11}^2} \right) \right] + \frac{h^2 k^4 R^2}{12} \left[27 B_{1111} \left(\frac{B_{12}^2}{B_{11}^2} + \frac{h^2 k^4 R^2}{20} \right) - \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(18 B_{1112} + 3 B_{1222} \right) + B_{1122} \right]$$

При получения (1.4) принято длинноволновое приближение (kh < 1) п. в соответствии с этим, для функции бесселя использованы асимитотические выражения [5].

Дисперсионное уравнение (1.4) для малых амилитуд можно представить в виде :

$$\omega = \omega_0 + a^2 (\partial \omega / \partial a^2)_{a=0}$$
(1.5)

где комплексная линейная частота есть $\omega_0 = \omega_{01} + i\omega_{02}$.

Тогда, в соответствии с (1.4) в (1.5) будем иметь:

$$\left(\omega_{01}\right)^{2} = \frac{B_{11}h^{2}k^{4}}{12\rho} + \frac{1}{\rho R^{2}} \left(B_{22} - \frac{B_{12}^{2}}{B_{11}}\right) + \frac{H_{0}^{2}k}{2\pi\rho h}$$
(1.6)

 $\omega_{0} = H_0 c^2 k^2 / \left(4\pi^2 \rho h^2 \sigma (\omega_{01})^2\right)$

 ω_{01} линейная частота, ω_{02} коэффициент затухания. Для нелинейной части будем иметь:

$$\partial \omega / \partial a^2 = D_c + iD_c \tag{1.7}$$

cae

$$D_1 = B / (2\omega_{o1}), \quad D_2 = -B\omega_{o2} / (2(\omega_{o1})^2).$$

2. Модуляционную устойчивость будем изучать, как в [1,2]. Как известно, в недиссинатнином случае (материал оболочки идеально проводящий $\sigma \rightarrow \infty$, $\omega_{x3} = 0$, $D_2 = 0$, и условие устойчивости воли мо лудящи имеет вид:

$$D_1 d^2 \omega_{01} / dm^2 > 0$$
 (2.1)

ege m = kR.

Иа (1.6) получаем, что

$$l^2 \omega_{\rm ot} / dm^2 \lesssim 0$$
 (2.2)

пря

$$H_{0}^{2} + 4\pi h k R^{2} \rho \frac{B_{11} k^{2} h^{2}}{3\rho R^{2}} + \sqrt{\frac{B_{11} h^{3}}{12\rho R^{4}}} \left[19 \frac{B_{11} h^{2} k^{4}}{12\rho} + \frac{6}{\rho R^{3}} \left(B_{22} - \frac{B_{12}^{2}}{B_{11}} \right) \right]$$
(2.3)

Что касается знака D_1 , то в огличие от изотропного случая, когда для "жестких" материалов оно положительное, а для "мягких" огрицательнос, то здесь, как индио из выражения В, в зависимости от геометрических и филических величий, оно может менять знак Следовательно, в связи с этим, при рассмотрений одного и того же материала в зависимости от геометрических размеров может быть как устойчивость, так и неусгойчивость. В случае, если имеется устойчивость недиссинативной задачи, то диссинативной задаче тем бочее будет устойчивость.

В случае же, если недиссипатовная задача неустойчива, то есть

$$D_1 d^2 \omega_{01} / dm^2 < 0 \tag{2.4}$$

то решение диссипативной задачи будет устойчиво, если

$$\left|\omega_{\alpha z}\right| > \sqrt{\left|D_{1} \frac{d^{2} \omega_{\alpha z}}{dm^{2}} R^{2}\right|}$$
(2.5)

В нашем случае условие (2.5) будет соблюдаться, если напряженность магнитного поля удовлетворяет неравенству:

$$H_0^+ > \left(b + \sqrt{b^+ + 4ad}\right)/2a$$

0.011

$$H_0^2 < (b - \sqrt{b^2 + 4ad})/2a$$

где

$$a = \frac{1}{4h^2 R^2 \rho^2 \pi^2} \left[B + \frac{c^4 k^4}{2h^2 \pi^2 \sigma^2} \right], \qquad b = \frac{2}{3} \frac{B_{11} h B k^4}{\pi \rho^2 R^2}$$
$$d = \frac{2}{3} \frac{B_{11} h^2 k^2 B}{\rho^2 R^2} \left[\frac{3}{R^2} \left(B_{22} - \frac{B_{12}^2}{B_{11}} \right) + \frac{B_{11} h^2 k^2}{12} \right]$$

Таким образом, если диссинация такая, что условие (2.5) удовлетворяет

ся, то, будучи неустойчивой, недиссипативная задача становится устойчи вой.

ЛИТЕРАТУРА

- Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. Нелинейные колебания пластии в продольном магнитном поле. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1982, г. 35, N 1, с. 16 22.
- Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. О влиянии магнитного поля на волны модуляции в пластине и цилиндрической оболочке. Изв. АН Арм ССР, Механика, 1989, т. 42, N 2, с. 3 12.
- Ambartsumian S.A., Belubekian M.V., Minassian M.M. On the Problem of Vibrations of Nonlinear Elastic Electroconductive Plates in Transverse and Longitudinal Magnetic Fields. Nonlinear Mechanics, 1984. V 10, N 2, pp. 141-149
- Малиенстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление поли мерных и композитных материалов. Рига Зинатис. 1980. 572 с.
- 5. Амбарцулян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупру гость тонких оболочек и иластии. М. : Наука, 1977. 272 с

Ереванский Государственный Университет

Поступила в редакцию 19, 12, 1995