

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ / PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA  
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ  
МЕХАНИКА  
MECHANICS

1996

**ДИНАМИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ О  
ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МЕЖДУ ФУНДАМЕНТОМ И ЕГО  
УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ**

Абрамян Б.Л.

Բ.Լ.Աբրահամյան

Կառուցվածքի հիմնաքափի և նրա առանցքային հիմքի միջև փոխազդեցության  
մասին դինամիկ կոնտակտային խնդիրներ

Համառոտ ձևով ցույց են տրվում կառուցվածքի կոշոր հիմնաքափի և նրա առանցքային հիմքի միջև  
փոխազդեցության ուղղությամբ 2D-րդ դրվում կառուցված աշխատանքները

**B.L.Abrahamyan**

**Dynamic Contact Problems on Interaction Between the Building's  
Footing and Its Elastic Foundation**

Исследование вопросов, касающихся взаимодействия между колеблющимся упругим сооружением, его жесткого фундамента и упругого основания, на котором они установлены, с сейсмическими волнами, проходящими через упругое основание, имеет важное практическое значение.

По-видимому, в рамках линейной теории упругости, возможно установить взаимосвязь между геометрическими и физическими параметрами сооружения, его фундамента и упругого основания сейсмическими параметрами, и варьированием этих параметров достигнуть для сейсмических параметров минимальных значений.

Произведенные исследования в этой области представляются выполненными, в некоторых случаях, с упущениями. При исследовании вопросов иногда принимаются такие исходные допущения, что полученные конечные результаты для искомых величин, к сожалению, оказываются, или неубедительными, или такие, что их невозможно применять на практике. В редких случаях в исследованиях учитывается собственный вес массивного сооружения.

Из-за отсутствия возможности подробного изложения о методах, применяемых при исследовании рассмотренных задач, и о полученных результатах, в упомянутых ниже исследованиях, здесь приводятся лишь краткие литературные указания.

Взаимодействия между жестким фундаментом сооружения и его упругим основанием в некоторой мере исследовались и до нашего столетия и результаты этих исследований, безусловно, использовались в строительной технике. Из новых исследований, выполненных в 20-ом веке, относящихся к взаимодействию между жесткими фундаментами сооружений и их упругих оснований, на которых расположены фундамент с сооружением, и через которые проходит сейсмическая волна, в первую очередь следует отметить исследования М.Био [1] и А.Г.Назарова [2,3].

В первой из этих работ строится математическая теория колебаний упругих систем, когда затухание колебаний не принимается во внимание. Показывается применение этого исследования для определения амплитуд колебаний сооружения при землетрясениях.

Во второй из исследований [2], сравнительно упрощенным методом, выводятся дифференциальные уравнения движения упругого тела, происходящего под действием сейсмической волны, с учетом внутреннего трения упругого тела. В другой работе [3] выведены интегро-дифференциальные уравнения движения упругой среды относительно функции перемещения, в которых учтено взаимодействие между фундаментом сооружения и грунтом при землетрясении. Рассматриваются различные случаи: для малых поперечных размеров фундамента по сравнению с длиной сейсмической волны, а также для случая с широкой опорной базой и низким расположением центра тяжести.

В другой своей работе [4] А.Г.Назаров отмечает, что в наиболее строгой постановке проблема инженерной сейсмологии является проблемой механики твердого деформируемого тела, начиная с процесса возникновения землетрясения в очаге, его распространения, и кончая его воздействием на сооружения. При этом сооружение должно рассматриваться как часть рельефа местности.

В одной работе этого же автора [5], в сильно упрощенном виде, дается расчет сооружения на сейсмостойкость. В этой работе сооружение рассматривается как упругий брус, защемленный в основании, и оценивается период основных свободных колебаний сооружения.

Сейсмические нагрузки на сооружения оцениваются также и в работе [6], в которой также сооружение рассматривается как консольный стержень.

Одной из первых работ, посвященных исследованию колебаний весомого тела, периодически колеблющегося под действием гармонической нагрузки, представляется работа Сана [7]. Здесь весомое тело берется с круглым основанием и лежащим на упругом изотропном полубесконечном грунте.

В упрощенном виде вертикальные, угловые и другие виды колебаний фундаментов рассматривались в работах [8-10].

В работе [8] рассматривается, круглый в плане, фундамент, лежащий на упругом полупространстве без сцепления, который под действием динамической нагрузки совершает горизонтальные, вертикальные и угловые гармонические колебания. В работе [9] горизонтальные, вертикальные и угловые колебания сооружения рассматриваются с допущением, что сооружение имеет вид круглого цилиндра, и что на контактной области на поверхности упругого полупространства, в случае горизонтальных и вертикальных колебаний, контактные напряжения являются постоянными. В работе [10] рассматриваются вертикальные, а также другие формы колебаний фундаментов, лежащих на упругих основаниях без сцепления.

В ряде работ Н.М.Бородачева [11-14] рассматриваются осесимметричные гармонические колебания жесткого, круглого в плане, штампа, лежащего на упругом полупространстве без сцепления. В такой же постановке (при отсутствии сцепления) Н.М.Бородачев рассмотрел также и осесимметричные колебания жесткого штампа с кольцевым основанием [15]. Определяется амплитуда вертикальных колебаний.

Осесимметричные колебания невесомого жесткого круглого штампа, лежащего на изотропном однородном упругом полупространстве, под действием гармонической нагрузки, исследовались в работе [16]. Здесь рассмотрены две задачи: для штампа, лежащего на упругом основании без трения и сцепления, и для штампа при полном его сцеплении. При решении этих задач вводятся интегральные уравнения, решающие задачи, и предлагается прибли-

женный метод для решения этих уравнений.

Вертикальные колебания жесткого круглого штампа, лежащего на упругом полупространстве без сцепления, исследовались также в работах [17-24].

Из упомянутых работ в [18] рассматриваются осесимметричные колебания штампа, лежащего без сцепления на двухслойном упругом основании. Решение задачи сводится к интегральному уравнению первого рода. Исследуются вопросы разрешимости полученного интегрального уравнения. Предлагается для решения этого уравнения приближенный метод, который основан на факторизации функций.

Вертикальные колебания круглых фундаментов, лежащих на поверхности упругого полупространства со сцеплением, исследовались в работе [25].

Две осесимметричные динамические задачи о действии круглого упругого штампа, находящегося на поверхности упругого полупространства, с допущением, что область контактного круга на поверхности полупространства меняется (при сжатии штамп расширяется, при отходе сужается) рассматривались в работе [26].

Осесимметричные колебания круглой упругой плиты, лежащей на упругом полупространстве, рассматривались также в работе [27].

Осесимметричные колебания жесткого штампа на двухслойном упругом полупространстве исследовались в работе [28]. В этой работе при рассмотрении задачи об осесимметричной вибрации заглубленного в верхний упругий слой основания круглого жесткого штампа (при равенстве высоты штампа и толщины слоя) принимается, что заглубление малое, и что касательные напряжения под слоем и штампом отсутствуют. Решение задачи сведено к интегральному уравнению второго рода. Контактные напряжения под штампом определяются с использованием теории вычетов.

В ряде работ В.А.Бабешко [29-32] исследовались интегральные уравнения и системы интегральных уравнений динамических контактных задач теории упругости. В этих, а также и в некоторых других работах этого автора, устанавливаются свойства функций и ядер, входящих в интегральные уравнения, при которых обеспечивается единственность решений рассматриваемых интегральных уравнений и становится возможным построить эти решения приближенными методами. В работе [33] решение задачи о колебаниях круглого штампа сводится к интегральному уравнению первого рода. Вопросы существования и единственности решения этого уравнения были исследованы в вышеупомянутых работах В.А.Бабешко.

В монографии И.И.Воровича и В.А.Бабешко [34] приводятся математический анализ и прикладные методы решения динамических смешанных задач теории упругости. Эти методы могут быть использованы при рассмотрении вибраций деталей машин, фундаментов и оснований. В работе изучается также вопрос разрешимости различных типов интегральных уравнений.

Несимметричные контактные задачи, относящиеся к колебаниям жестких штампов, или фундаментов, установленных на упругих основаниях, привлекают к себе внимание многих исследователей.

В работе [35] исследуется влияние протяженности сооружения в связи с прохождением сейсмической волны через упругое основание сооружения.

В работе [36], при помощи кратных интегралов, получено уравнение для определения податливости грунта (упругого основания под фундаментом) при действии гармонической вертикальной нагрузки. Это уравнение решается численно.

В работах [37-41] рассматривались угловые колебания жестких штампов (сплошного круглого и кольцевого), находящихся на упругом полупространстве без сцепления.

В работах [42-45] исследуются угловые и горизонтальные колебания жесткого штампа, с круговым основанием. В рассмотренных задачах динамические нагрузки берутся приложенными непосредственно к штампам. Задачи о горизонтальных и угловых колебаниях рассматриваются независимо друг от друга. При этом решение задачи об угловых колебаниях штампа строится с допущением, что касательные напряжения на всей поверхности упругого полупространства (в том числе и под штампом) отсутствуют. В задаче же о горизонтальных колебаниях штампа, на всей поверхности упругого полупространства, считаются отсутствующими нормальные напряжения (штамп не находится под нагрузкой, или он невесомый). В работе [44] считается, что фундамент может подвергаться изгибу.

Исследованию горизонтальных и угловых колебаний жестких штампов фундаментов посвящены также работы [46-52]. В работах [46, 49] решения задач приводятся к интегральным уравнениям второго рода. В работе [50] задача решается численным методом. В работе [48] исследование горизонтальных и угловых колебаний рассматриваются в связанном виде. В работе [51] вместе с угловыми колебаниями рассматриваются также и крутильные колебания.

Вибрации скользящих и качающихся фундаментов, и окружающей их почвы, изучались в работе [53].

Горизонтальные и угловые колебания штампов, в условиях плоской задачи теории упругости, различными способами исследовались во многих работах. Такие задачи рассматривались также в монографии В.М. Сеймова [54], в которой содержатся также и исследования некоторых задач о колебаниях жестких штампов на упругом полупространстве.

В работах Э.Е.Хачияна [55-57] исследовались, как влияние протяженности фундамента, так и влияния высоты сооружения. Произведенные расчеты на сейсмостойкость сооружений даются в форме, удобной для применения в инженерной практике.

Динамическая реакция упругого основания от колебаний фундаментов произвольной формы (в том числе и прямоугольных) изучалась в работах [58-63]. В работах [59, 61] указывается, что при рассмотрении контактной задачи фундамента с упругим основанием, для выяснения истинного характера динамической реакции основания, необходимо обязательно учитывать давление фундамента (то есть необходимо принимать во внимание вес фундамента). Авторы работы [59], на частном примере, показали влияние осадки круглого фундамента, в особенности его центральной точки, на реакции упругого основания под фундаментом. По-видимому, в этой работе впервые отмечается, что законы распределения контактных напряжений под фундаментом в динамических задачах оставляют свое влияние реакции упругого основания, и, с этой точки зрения, под фундаментом перемещения должны быть определены прежде, чем выясняется характер динамической реакции упругого основания.

В работах [62, 63] получены интегральные уравнения, которые в дальнейшем решаются численными методами. Здесь исследуется взаимодействие жесткого прямоугольного фундамента с сейсмическими волнами при отсутствии веса фундамента, но с учетом сцепления фундамента с его упругим основанием - полупространством.

Вертикальные и горизонтальные колебания круглых фундаментов рассматривались в работах [64-68].

В работе [69] изучались колебания эллиптических фундаментов.

В работе [70] исследовались вертикальные колебания круглого жесткого фундамента, лежащего на насыщенном жидкостью упругом полупространстве. Решение задачи сведено к интегральному уравнению второго рода. Ди-

намическая задача о колебаниях массивного фундамента, лежащего на анизотропном основании, рассматривалась в работе [71].

Вертикальные колебания кругового штампа, лежащего на упругом полупространстве, имеющего цилиндрическую полость, исследовались в работе [72]. В этой работе использованы теория парных интегральных уравнений и интегральное преобразование Вебера-Оппа. В работе приводятся численные результаты.

Вибрации двух круглых штампов разных радиусов на поверхности упругой слоистой среды, когда штампы не касаются друг друга и под штампами отсутствуют касательные напряжения, рассматривались в работе [73].

Вибрации фундаментов исследуются также в работе [74].

Экспериментальные исследования колебаний фундаментов выполнялись в работах [75, 76]. В работе [75] строится функция, связывающая амплитуду гармонической силы, действующей на фундамент, с амплитудой колебаний фундамента.

В работе же [76] исследовались сейсмические колебания твердых тел и фундаментов, вызванных землетрясениями. Определяются амплитуды колебаний фундамента, динамические характеристики упругих оснований фундаментов (коэффициент жесткости, коэффициент демпфирования и другие параметры). В этой работе выяснено, что коэффициент жесткости основания уменьшается при увеличении частоты колебаний.

Зависимость сейсмических параметров от геометрических и физических параметров конструкций исследуется в работе [77].

Амплитуды колебаний упругих тел вычисляются также в работах [78, 79].

В работе [80] рассматриваются горизонтальные и угловые гармонические колебания, сцепленного с упругим полупространством, кругового в плане, жесткого весомого фундамента, когда действующая динамическая нагрузка приложена непосредственно к фундаменту. Здесь определение контактных напряжений под фундаментом на поверхности упругого полупространства сводится к решению системы интегральных уравнений второго рода. Выводятся аналитические выражения для определения амплитуд горизонтальных и угловых колебаний фундамента. Эти амплитуды выражаются через геометрические и физические параметры фундамента и его упругого основания, через контактные напряжения, возникшие под фундаментом, а также через амплитуду, вызывающей колебания гармонической нагрузки и ее частотного параметра.

В работе [81] рассматриваются горизонтальные, вертикальные и угловые гармонические колебания сцепленного с упругим полупространством, кругового в плане, жесткого весомого фундамента, когда действующая гармоническая нагрузка приложена на поверхности упругого полупространства - основания фундамента, на конечном расстоянии от фундамента. Выведены аналитические формулы для определения амплитуд колебаний.

Из полученных в работах [80, 81] результатов, осуществлением предельного перехода, при устремлении частотного параметра к нулю, получены решения соответствующих задач статической теории упругости [80, 82].

Вопросам, связанным с распространением упругих волн в сооружениях, посвящена монография [83].

Отметим еще, что задачи, посвященные колебаниям жестких фундаментов, исследовались также в работах [84-86].

Сопоставляя различные исследования, касающиеся взаимодействия между геометрическими и физическими параметрами сооружений, их жестких фундаментов и упругих оснований с сейсмическими параметрами, можно делать вывод, что на величины сейсмических параметров важное влияние имеет рас-

положение центра тяжести сооружения и его жесткого фундамента вместе взятых, а также вид сцепления жесткого фундамента к упругому основанию.

Из-за высокого расположения центра тяжести увеличиваются инерционные силы, а также и сейсмические параметры фундамента и сооружения.

С этой точки зрения для понижения величин сейсмических параметров конструкций, подлежащих построению в сейсмически активных районах, следует пользоваться новой архитектурой, в которой, при конструировании зданий, всякими способами необходимо достигнуть низкому расположению центра тяжести всего здания (рекомендуется, например, нижние этажи высотных зданий построить из тяжелых материалов, верхние этажи - из легких).

Для понижения сейсмических параметров необходимо также правильно определить осадку центральной точки жесткого фундамента здания, и, зависящие от этой осадки, контактные напряжения под фундаментом.

Для выяснения наилучшего способа установления жесткого фундамента на упругом неоднородном основании (полное сцепление, мягкое сцепление, допускающее частичное скольжение фундамента на упругом основании; сцепление слоистого фундамента, составленного из двух жестких фундаментов с упругим тонким слоем между ними), по-видимому, следует провести дополнительные исследования с рассмотрением новых задач о колебаниях фундаментов, различным образом составленных и различным образом установленных на упругом основании.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Biot M.* Theory of Vibration of Buildings During Earthquake. ZAMM, Bd. 14, 1934, heft 4, 213-223; See also: "Theory of Elastic Systems Vibrating under Transient Impulse with an Application to Earthquake-proof Buildings. Proc. Nat. Acad. Sci. v. 19, febr. 1933, No. 2, p. 262-268.
2. *Назаров А.Г.* Теория колебаний с учетом внутреннего трения в применении к сейсмостойкости сооружения.- Тр. Тбилисского геофизического института Грузинского филиала АН СССР, 1937, т. 2, с. 1-21.
3. *Назаров А.Г.* О взаимодействии между фундаментом сооружения и основанием при землетрясении.- Тр. Тбилисского геофизического института, т. 4, 1939, с. 35-63.
4. *Назаров А.Г.* К проблеме исследований по инженерной сейсмологии.- ДАН Арм. ССР, 1975, т. 60, № 2, с. 94-99.
5. *Назаров А.Г.* Упрощенный способ расчета сооружений на сейсмостойкость.- Изв. АН Арм. ССР, сер. тех. наук, 1956, т. 9, № 10, с. 55-63.
6. *Лейдерман Ю.Р.* Об оценках сейсмических нагрузок, действующих на сооружение.- Изв. АН Узб. ССР, сер. техн. наук, 1958, № 4, с. 31-39.
7. *Sung T.Y.* Vibration in Semi-infinite Solids Due to Periodic Loading.- Harvard Univ. Soil Mech., ser. 48, 1955 (Reprint: Amer. Society for Testing Materials, Spec. Techn., 1953, No. 156, 35-68).
8. *Bycroft G.N.* Forced Vibrations of a Rigid Circular Footing on a Semi-infinite Elastic Space, and on an Elastic Stratum.- Philosophical Transactions of the Roy. Soc. of London, v. 248, ser. A, jan. 1956, No. 948, p. 327-368.
9. *Sato Y., Yamaguchi R.* Vibration of Buildings in the Elastic Foundation.- Bull. Earthquake Res. Inst. Univ. Tokyo, v. 35, 1957, No. 3, p. 545-565.
10. *Toriumi I.* Vibration in Foundations of Machines, Technical Repts, Osaka Univ., v. 5, march 1955, No. 146, 103-126.
11. *Бородачев Н.М.* О решении динамической контактной задачи для полупространства в случае осевой симметрии.- Изв. АН СССР, ОТН, механика и машиностроение, 1960, № 4, с. 141-144.

12. *Бородачев Н.М.* Динамическая контактная задача для штампа с плоским круглым основанием, лежащего на упругом полупространстве. - Изв. АН СССР, механика и машиностроение, 1964, № 2, с.82-90.
13. *Бородачев Н.М.* Вертикальные колебания круглого штампа на упругом полупространстве. - Строительная механика и расчет сооружений. М., 1964, № 5, 33-35.
14. *Бородачев Н.М.* Определение динамических напряжений в упругом полупространстве под штампом с плоским круглым основанием.- Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4, с.158-160.
15. *Бородачев Н.М.* Динамическая контактная задача для штампа с плоским кольцевым основанием, расположенного на упругом полупространстве.- Сб. "Прочность и пластичность", Изд. "Наука", М., 1971, с.298-302.
16. *Закорко В.Н., Ростовцев Н.А.* К динамической контактной задаче стационарных колебаний упругого полупространства.- ПММ, 1965, т.29, вып.3, с.545-552.
17. *Аводжоби.* Приближенное решение задачи о колебаниях жестких тел на упругих основаниях при больших значениях коэффициента частот.- Прикл. механика (Тр. Американск. Общ. инженеров-механиков, сер.Е- русский перевод), 1971, т.38, № 1, с.110-116.
18. *Бабешко В.А., Ворович И.И., Селезнев М.Г.* Вибрация штампа на двухслойном основании.- ПММ, 1977, т.41, вып.1, с.166-172.
19. *Лобысев В.Л., Яковлев Ю.С.* Осесимметричная динамическая задача теории упругости со смешанными граничными условиями.- Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 4, с.103-108.
20. *Поручиков В.Б.* Осесимметричная динамическая задача о штампе на упругом полупространстве.- Вестник МГУ, 1966, № 6, с.114-120.
21. *Awojobi A.O.* Vibration of Rigid Bodies on Non-homogeneous Semi-infinite Elastic Media.-Quart. Journ. of Mechanics and Appl. Mathematics, v.26, nov. 1973, part 4, p.483-498.
22. *Awojobi A.O., Grootenhuis P.* Vibration of Rigid Bodies on Semi-infinite Elastic Media.- Proc. of Roy. Soc. London, v.287, 1965, № 1408, p.27-63.
23. *De T.K.* Dynamic Contact Problem of Steady Periodic Vibrations on an Elastic Half-space.- ZAAAM, Bd. 52, heft 11, 1972, 549-551.
24. *Robertson I.A.* Forced Vertical Vibration of a Rigid Circular Disc on a Semi-infinite Elastic Solid.- Proc. Camb. Philos. Soc., 1966, v.62, No.3, p.547-553.
25. *Novak M., Beredugo Y.O.* Vertical Vibrations of Embedded Footings. Journ. of the Soil Mechanics and Foundation Division.- Proc. of the Amer. Soc. of Civil Engineers, v.98, dec. 1972, SM.12, p.1291-1310.
26. *Brock L.M.* Wave Propagation in an Elastic Half-space Due to Surface Pressure over a Non-uniformly Changing Circular Sone.- Quart. Appl. Math., v.38, 1980, No.1, p.37-49.
27. *Krenk S., Schmidt H.* Vibration of an Elastic Circular Plate on an Elastic Half Space. A direct approach.- Journ. Appl. Mech. (Trans. ASME, ser.E), v.48, 1981, No.1, p. 161-168.
28. *Бабешко В.А., Золотарева Л.И.* Осесимметричная задача о вибрации заглубленного в грунте штампа. Проблемы вибросейсмических методов исследования.- Сб. науч. работ под ред. А.С. Алексеева и А.Т.Горбачева, Новосибирск, 1979, с.7-17.
29. *Бабешко В.А.* Об интегральном уравнении некоторых динамических контактных задач теории упругости и математической физики.- ПММ, 1969, т.33, вып. 1, с.52-60.
30. *Бабешко В.А.* О единственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач.- ДАН СССР, 1973, т.210, № 6, с.1310-1313.

31. *Бабешко В.А.* О системах интегральных уравнений динамических контактных задач.- ДАН СССР, 1975, т.220, № 6, с. 1293 - 1296.
32. *Бабешко В.А.* Новый эффективный метод решения динамических контактных задач. - ДАН СССР, 1974, т. 217, №4, с. 777 - 780.
33. *Бабешко В.А., Прягуна О.Д.* Об одном методе в теории динамических контактных задач для круглых штампов.- Изв. АН СССР. МТТ. 1981, № 2, с.22-28.
34. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.- М.: Наука, 1979, 320 с.
35. *Синицын А.П.* Влияние бегущей сейсмической волны на массивные сооружения.- Тр. института физики Земли АН СССР, 1961, № 17, с.87-99.
36. *Томсон, Кобори.* Динамическая податливость прямоугольного фундамента на упругом полупространстве.-ПМ (Тр. Американ. Общ. инж. механиков, сер. Е- русский перевод), 1963, т.30, 4, с.116-121.
37. *Буряков А.Н.* Динамическая контактная задача об угловых колебаниях кольцевого штампа, расположенного на упругом полупространстве.- Изв. высш. учебн. заведений "Строительство и Архитектура", Новосибирск, 1970, № 6, с.40-47.
38. *Буряков А.Н.* Горизонтальные колебания штампа с плоским кольцевым основанием, расположенного на упругом полупространстве.- Изв. высш. учебн. заведений "Строительство и Архитектура", Новосибирск, 1971, № 12, с.51-59.
39. *Муравский Г.Б.* О гармонических колебаниях штампа на упругом изотропном полупространстве.- Строительная механика и расчет сооружений, М., 1969, № 4, с.39-43.
40. *Муравский Г.Б.* Гармонические колебания штампа на упругом полупространстве при действии силы, приложенной к поверхности полупространства.- Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 6, с.134-139.
41. *Сугалов Л.С.* Изгибные колебания штампа с плоским круглым основанием на упругом полупространстве.- Изв. высш. учебн. заведений, "Строительство и Архитектура", Новосибирск, 1966, № 6, с.25-33.
42. *Gladwell G.M.L.* Forced tangential and rotatory vibration of a rigid circular disc on a semi-infinite solid.-Intern. Journ. of Engin. Sci., v.6, 1968, No.10, p.591-607.
43. *Parmelee R.A.* Building-foundation interaction effects.-Journ. of the Engin. Mech. division (Proc. of ASCE), v.93, 1963, EM, 2, p.131 - 152.
44. *Parmelee R.A., Perelman D.C., Lee S.L.* Seismic Response of Multiple - Story Structures on Flexible Foundations. Bull.-Seism. Soc. of Amer., v.59, 1969, p.1061-1070.
45. *Parmelee R.A., Perelman D.C., Lee S.L., Keer L.M.* Seismic Response of Structure-foundation Systems.- Journ. Engin. Mech. Division (Proc.of ASCE), v.94, dec. 1968, EM.6, 1295-1315.
46. *Луко, Вестман.* Динамика жесткого фундамента, соединенного с упругим полупространством.- ПМ (Тр. Американ. Общ. инж. механиков, сер. Е - русский перевод), т.39, 1972, № 2, с.211-219.
47. *Beredugo Y.O.* Modal Analysis of Coupled Motion of Horizontally Excited Embedded Footings.- Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.4, apr./june 1976, No.4, p.403-410.
48. *Beredugo Y.O., Novak M.* Coupled Horizontal and Rocking Vibration of Embedded Footings.- Canadian Geotechnical; Journ. v.9, 1972, p.477-497.
49. *Luco J.E., Westmann R.A.* Dinamic Response of Circular Footings.- Journ. Engin. Mech. Division (Proc. ASCE), v.97, oct. 1971, p.1371-1395.
50. *Luco J.E., Wong H.L., Trifunac M.D.* A Note on the Dynamic Response of

- Rigid Embedded Foundations.- Earthquake Engin. and Structural Dynamics, v.4, oct./dec. 1975, No.2, p.119-127.
51. *Novak M., Sachs K.* Torsional and Coupled Vibrations of Embedded Footings.-Intern. Journ. Earthquake Engin. and Structural Dynamics, v.2, 1973, p.11-33.
  52. *Veletsos A.E., Wei Y.T.* Lateral and Rocking Vibrations of Footings.-Journ. of Soil Mech. Found. Division (Proc.ASCE) v.97, 1971, p.1227-1248.
  53. *Krizek R.T., Gupta D.C., Parmelee R.A.* Coupled Sliding and Roking of Embedded Foundations.- Journ. of the Soil Mechanics and Found. Division (Proc.ASCE), dec. 1972, v. 98, SM.12, p.1347-1357.
  54. *Сеймов В.М.* Динамические контактные задачи. Киев: Наукова думка, 1976. 283 с.
  55. *Хачиян Э.Е.* К исследованию сейсмического воздействия на сооружения с учетом протяженности.-ДАН Арм.ССР, 1975, т.60, № 3, с.171-177.
  56. *Khachian E.E.* Seismic influence on stratum accounting the eliminated links and local damages.- Proc. of the third European symposium on earthquake Engineering, Sofia, 1971, p.573-581.
  57. *Khachian E.E.* A Study of Seismic Influences on Structures Considering Their Lenght and Height.- In: Preprints of the sixth world conference on Earthquake Engin. New-Dehli, 1977, p.317-322.
  58. *Chase Y.S., Hall J.R.Jr., Richart F.E.Jr.* Dynamic Pressure Distribution Beneath a Ring Footing.- Proc.sixth International conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Montreal, Canada, 1965, v.2, 3/5, p.22-26.
  59. *Housner G.W., Castellani A.* Discussion of "Comparison of Footing Vibration with Theory",- Journ. of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, v.95, 1969, No.SM.1, p.360-364.
  60. *Lysmer J., Richart F.E.Jr.* Dynamic Response of Footing to Vertical Loading.- Journ. of Soil Mechanics and Foundations Divisions, ASCE, 1966, v.92, No.SM.1, p.65-91.
  61. *Richart F.E.Jr., Whitman R.V.* Comparisson of Footing Vibration with Theory.- Journ. of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 1967, v.93, No.SM.6, p.143-168.
  62. *Wong H.L., Luco J.E.* Dynamic Response of Rigid Foundations of Arbitrary Shape.- Earthquake Engin. and Structural Dynamics, oct./dec.1976, v.4, No.6, p.579-587.
  63. *Wong H.L., Luco J.E.* Dynamic Response of Rectangular Foundations to Obliquely Incident Seismic Waves.- Earthquake Engin. and Struct. dynamics, v.6, jan./febr. 1978, No.1, p.3-16.
  64. *Balendra J.* Free Vibration of a Shear Wall-frame Building on an Elastic Foundation.- Journ. Sound Vibration, v.96, oct.1984, № 4, p.537-546.
  65. *Hall J.R.Jr.* Coupled Rocking Arid Sliding Oscillations of Rigid Circular Footings.- Proc. of Intern. Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth materials, 1967, p.139-148.
  66. *Nagendra M.V., Sridharan A.* Response at Circular Footings to Vertical Vibration.- Journ. of the Geotechn. Engin. Division, Proc. of ASCE, v.107, july 1981, Gt.7, technical notes, p.989-995.
  67. *Nagendra M.V., Sridharan A., et al.* Foundation Response to Horizontal Vibration.- Indian Geotechn. Journ., v.12, apr.1982, No.2, p.132-151.
  68. *Sankaran K.S., Subrahmanyam M.S., Sostry K.R.* Horizontal Vibration - New Lumped Parameter Model. Proc. of 9-th Intern. conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Tokyo, v.2, 1977, 4/35, 365-368.
  69. *Arabinde R.* Dynamic Response of Elliptical footings. Intern. Journ. of Solids

and Structures, v.22, 1986, No.3, 293-306.

70. Kassir M.K., Bandyopadhyay K.K., Xu J. Vertical Vibration of Circular Footing on a Saturated Half-space. Intern. Journ. of Engin. Sci., v.27, 1989, No.4, 353-361.
71. Молев М.О. О расчете массивных фундаментов на анизотропных основаниях, находящихся под действием динамической нагрузки.- Изв. высш. учебн. заведений "Строительство и Архитектура", Новосибирск, № 6, 1987, с. 34-37.
72. Малиц П.Я., Сницер А.Р. Вертикальные колебания кругового штампа на упругом полупространстве с цилиндрической полостью. Динамические системы.- Сб. науч. работ, Киев, № 8, 1989, с. 30-36.
73. Бабешко В.А. Вибрация двух круглых штампов на слоистой среде.- ПММ, 1976, т.40, вып.6, с. 1104-1112.
74. Hsieh T.K. Foundation Vibrations. Proceed. of the Institution of Civil Engineers, London, v.22, 1962, June, 211-226.
75. Ильичев В.А., Таранов В.Г. Экспериментальное изучение взаимодействия вертикально колеблющегося фундамента и его основания.- Основания, фундаменты и механика грунтов, 1976, № 2, с.9-13.
76. Ho, Michael M.K., Burwash W.T. Vertical Vibrations of a Rigid Foundation, Resting on Sand. Vibration Effects of Earthquakes on Solids and Foundations. American Society of Testing and Materials, 1969, 197-232.
77. Done G.T.S., Hughes A.D. The Response of a Vibrating Structure as a Function of Structural Parameters. Journ. of Sound and Vibrations, v.38, Jan. 1975, No.2, 255-266.
78. Moore P.J. Calculated and Observed Vibration Amplitudes. Journ. of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, v.97, 1971, No.SM.1, 141-148.
79. Wiggins R.A. Body Wave Amplitude Calculation. II. Geophysical Journ. of the Roy. Astron. Soc. (United Kingdom), v.46, 1976, 1-10.
80. Абрамян Б.Л., Гаспарян А.В. Об одном методе определения амплитуд горизонтальных и угловых колебаний жесткого весоного фундамента, лежащего на упругом однородном полупространстве со сцеплением.- Изв. НАН Армении, Механика, 1994, т.47, № 3-4, с. 10 - 22.
81. Абрамян Б.Л., Саакян А.В., Гаспарян А.В. О взаимной связи геометрических и физических параметров колеблющихся жестких фундаментов и их упругих оснований с сейсмическими параметрами.- Докл. НАН Армении. 1995, т. 95, № 4.
82. Абрамян Б.Л., Саакян А.В., Гаспарян А.В. О действии на весоный фундамент нормальной сосредоточенной силы, приложенной на конечном расстоянии от фундамента.- Докл. НАН Армении. 1996, т. 96, № 1.
83. Doyle J.F. Wave propagation in structures. Springer-Verlag, 1989, 258 p.
84. Абрамян Б.Л., Енгибарян С.А., Саакян А.В. Несимметричные колебания жесткого круглого фундамента, лежащего на упругом полупространстве со сцеплением.- Докл. расширенных заседаний семинара института прикладной математики им.И.Н.Векуа, Тбилиси, 1989, т.4, № 2, 9-11.
85. Овсепян В.В. О колебаниях упругого полупространства со сцепленным с ним жестким весоным фундаментом. "Механика деформируемого твердого тела", Сб. научн. тр. Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1990, 257-264.
86. Salmon M.A., Thou S.A., Huang W. Wave Diffraction, by Rigid Foundation. Journ. of Engin. Mech. Division, Proc. of ASCE, v.99, 1973, 902-906.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
17.08.1994

## К ВОПРОСУ ОБ УДАРНЫХ ВОЛНАХ В ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А.

Ա.Գ.Բագդոև, Լ.Ա.Մովսիսյան

Ջերմաառձգական միջավայրում հարվածային ալիքների հարցի սահման

Ոչ գծային առաձգական ծալի եւ զլանային խտուցով միջավայրի համար դիտարկվում են միաչափ եռալիքային ալիքների դուրսածնան խնդիրները ջերմության առկայությամբ, երբ դիֆուզիայի տեսությամբ են ջերմություն:

Գծային դրվածքի դեպքում ցույց է դրվում, որ առաձգական ալիքի ամպլիտուդան երկայնի ջերմության ազդեցությամբ կարելի է արեամարին:

Էկվում են ոչ գծային խնդիրների լուծումները հարվածային ալիքների վրա:

A.G.Bagdoyev, L.A.Movsician

About Problem of Shock Waves in the Thermoelastic Media

Рассматриваются две одномерные задачи распространения ударных волн термостязанной нелинейно-упругой среде - плоское деформированное состояние. В [1] подобные задачи изучались для вязкоупругой среды, а в [2] - те же задачи при наличии магнитного поля. Роль диссипации в настоящем исследовании играет связанная теплопроводность.

1. Пусть имеется полубесконечное пространство, на границе которого заданы скорость перемещения и температура

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = f(t) \quad (1.1)$$

$$T(x, t) = T_0(t) \quad \text{при} \quad x = 0$$

Определяющий закон возьмем в виде [3] с добавлением температурных членов. В случае плоского деформированного состояния ( $\zeta_3 = 0$ ) в квадратичном приближении он имеет вид [3]

$$\sigma_1 = A_1 \varepsilon_1 + A_2 \varepsilon_2 - A_3 T + A_4 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2$$

$$\sigma_2 = A_2 \varepsilon_1 + A_1 \varepsilon_2 - A_3 T + A_4 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 \quad (1.2)$$

где

$$A_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad A_2 = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$A_3 = \frac{E\alpha}{1-2\nu}, \quad A_4 = \frac{E\chi_1}{9(1-2\nu)}$$

В настоящем пункте  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$ . Уравнения движения среды и теплопроводности примут вид

$$\begin{aligned} A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A_3 \frac{\partial T}{\partial x} + 2A_4 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{1}{\chi} \frac{\partial T}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \end{aligned} \quad (1.3)$$

в отсутствии теплоисточников.

Начальные условия берем нулевыми. Прежде чем приступить к решению нелинейной задачи, сначала рассмотрим ту же задачу в линейной постановке для получения выводов, которые будут использованы для основной задачи.

Произведя преобразование Лапласа по  $t$  (с учетом условий на бесконечности), для изображений получаем

$$\bar{u} = c_1 \exp(-k_1 x) + c_2 \exp(-k_2 x), \quad T = d_1 \exp(-k_1 x) + d_2 \exp(-k_2 x) \quad (1.4)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{p^2}{a^2} \left( 1 - \frac{A_3}{A_1} \chi \eta \right), \quad k_2^2 = \frac{p}{\chi} \left( 1 + \frac{A_3}{A_1} \chi \eta \right) \\ a^2 &= \frac{A_1}{\rho}, \quad A_1 c_j \left( k_j^2 - \frac{p^2}{a^2} \right) = A_3 k_j d_j \end{aligned} \quad (1.5)$$

Выражения  $k_j$  приведены для больших моментов времени ( $p$  - мало), так как и нелинейную задачу будем рассматривать для больших  $x$  и  $t$  (окрестности фронта).

В таком приближении коэффициенты  $c_j$  определяются на основании (1.4)

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\bar{r}(p)}{p} - \frac{A_3}{A_1} \sqrt{\frac{\chi}{p}} \bar{T}_0(p) \\ c_2 &= \frac{A_3}{A_1} \sqrt{\frac{\chi}{p}} \left[ \bar{T}_0 + \frac{\chi \eta}{a} \bar{r}(p) \right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

Откуда видно, что на фронте упругой волны влиянием граничной температуры можно пренебречь и при этом вклад  $c_2$  в общее решение мал по сравнению с  $c_1$ .

Такой качественный вывод позволяет при рассмотрении нелинейной задачи на фронте упругой волны учитывать только влияние члена от  $f(t)$ .

Теперь перейдем к нелинейной задаче. Введя в (1.3) новую переменную

$$\tau = t - \frac{x}{a_1}, \quad a_1^2 = a^2 \left( 1 + \frac{A_3}{A_1} \chi \eta \right) \quad (1.7)$$

из второго уравнения можно получить

$$T = \frac{\chi\eta}{a_1} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \chi\eta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\chi^2\eta}{a_1^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (1.8)$$

с учетом которого первое уравнение дает

$$\frac{\partial F}{\partial x} + KF \frac{\partial F}{\partial \tau} = \delta \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2}, \quad F = \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (1.9)$$

Здесь

$$K = \frac{A_4}{A_1 + A_3\chi\eta} \frac{1}{a_1^2}, \quad \delta = \frac{1}{2a_1^3} \frac{A_3\chi^2\eta}{A_1 + A_3\chi\eta}$$

Уравнение (1.9) исследовано многими авторами [2,5]. Согласно [2], задавая граничное условие в виде фиг. 1 работы [2] и рассматривая сначала задачу без диссипации ( $\delta = 0$ ), можно получить позади волны

$$F = f(Y_1), \quad \tau = KFx + Y_1 \quad (1.10)$$

а впереди

$$F = f(Y_2), \quad \tau = KFx + Y_2 \quad (1.11)$$

Для передней волны  $F(Y_2) = 0$  и закон равенства площадей под кривой  $F(Y)$  и секущей дает [5]

$$F^2(Y_1) = -\frac{2}{K\chi} \int_0^{Y_1} f(Y) dY \quad (1.12)$$

Так как  $\alpha\eta < E$ , то знак  $K$  определяется  $A_4 - \chi_1$ . Для типично упругой среды  $\chi_1 < 0$  и ударная волна получится при  $f(Y_0) < 0$ .

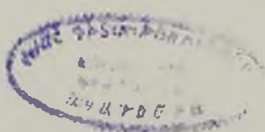
При  $x \rightarrow \infty$  получаем  $Y_1 \rightarrow Y_0$  и  $f(Y_0) = 0$ , что дает

$$F(Y_1) = -\sqrt{-\frac{2}{K\chi} \int_0^{Y_1} f(Y) dY} \quad (1.13)$$

Аналогичное рассуждение применим и для задней волны, для которой  $F(Y_1) = 0$ . Тогда получится, что

$$F(Y_2) = -\sqrt{\frac{2}{K\chi} \int_{Y_0}^{\infty} f(Y) dY} \quad (1.14)$$

Между ударными волнами решение имеет вид



$$F(Y_{1,2}) = F(Y_0) \frac{\tau - Y_0}{1 + Kx F(Y_0)} \quad (1.15)$$

а для больших  $x$

$$F(Y_{1,2}) = \frac{\tau - Y_0}{Kx} \quad (1.16)$$

которое удовлетворяет уравнению (1.9).

При  $\delta \neq 0$  точное решение (1.9), переходящее в (1.16), дается в виде [2].

$$F = \frac{1}{Kx} \left( \tau - Y_0 \operatorname{th} \frac{Y_0 \tau}{2\delta x} \right) \quad (1.17)$$

2. В случае задачи о цилиндрическом взрыве исходные уравнения следующие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial T}{\partial t} - \eta \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_r + \epsilon_\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$ ,  $\epsilon_\theta = \frac{u}{r}$

Вблизи фронта волны уравнение (2.1) упрощается по вышеприведенным соображениям и оставляются только члены основного порядка малости.

Тогда окончательное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{F}{r} + KF \frac{\partial F}{\partial \tau} = \delta \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} \quad (2.2)$$

Как и выше, сначала рассмотрим случай  $\delta = 0$ . Тогда решение примет вид

$$\sqrt{r} F = C(Y_{1,2}), \quad \tau = 2CK\sqrt{r} + Y_{1,2} \quad (2.3)$$

При  $r = r_0$   $F(t, r_0) = f(t)$ , что дает

$$\tau = 2K\sqrt{rr_0} f(Y_{1,2}) + Y_{1,2} \quad (2.4)$$

Используя закон площадей [2,5], для переднего фронта получим

$$F(Y_1) = \sqrt{-\frac{1}{Kx^{3/2} r_0^{-1/2}} \int_0^{Y_1} f(Y) dY} \quad (2.5)$$

а для заднего фронта -

$$F(Y_2) = \sqrt{-\frac{1}{Kx^{3/2} r_0^{-1/2}} \int_{Y_0}^{\infty} f(Y) dY} \quad (2.6)$$

Между фронтами ударных волн из (2.4) можно получить

$$F(Y_{1,2}) = \frac{f'(Y_0)(\tau - Y_0)}{1 + 2Kr^{1/2}r_0^{1/2}f'(Y_0)} \quad (2.7)$$

Для  $r \rightarrow \infty$

$$F(Y_{1,2}) = \frac{\tau - Y_0}{2Kr^{1/2}r_0^{1/2}}, \quad F = \frac{\tau - Y_0}{2Kr} \quad (2.8)$$

что представляется точным решением (2.2) при  $\delta = 0$ .

Как и в первом случае, решение диссипативной задачи  $\delta \neq 0$ , которое переходит в (2.7), есть

$$F = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2} f, \quad F = \frac{1}{2Kr} \left(\tau - \text{th} \frac{Y_0 \tau}{4\delta r}\right) \quad (2.9)$$

Однако в отличие от (1.17), (2.9) есть приближенное решение.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. К вопросу определения ударной волны в нелинейных задачах теории упругости. - Изв. АН АрмССР, Механика, 1968, т.21, №3.
2. Ахиян Ж.О., Багдоев А.Г. Решение задачи о движении упругой среды в магнитном поле под действием ударной нагрузки. - Изв. АН АрмССР. Механика, 1973, т.26, №1, с.36-50.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика. - М.: ИЛ, 1961. 777 с.
4. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. - М.: Мир, 1970. 256 с.
5. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. - М.: Мир, 1977. 622 с.

Институт Механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
9.08.1994

## К ВОПРОСУ ДОЖДЕВОЙ ЭРОЗИИ ПОЧВ

Сагомонян А. Я.

Ա.Յ.Սողոմոնյան

Բնահողերի անձրևային ողողման հարցի մասին

Փորձ է կառուարվում մաթեմատիկորեն մոդելավորել անձրևաջրերով բնանույի ողողումը, որպես  
մալուրկին թելով քրահագեցած բնանույի և քրի շերտերի շարժում

A. Ya. Sagomonyan

On the problem of rain erosion of grounds

Предлагается математическая модель о дождевой эрозии почв, как движение слоев воды и  
суспензии по пористому склону. Приведены уравнения фильтрации и вязких жидкостей для  
двухфазной среды.

Исследование процессов эрозии является одной из задач борьбы с ней. Результаты полевых и лабораторных исследований позволяют ставить вопрос о создании математических моделей описания процессов эрозии почв. Ниже этот вопрос рассматривается в случае водной, а конкретнее, дождевой эрозии на склонах возвышенностей Земли. По достижении капель дождя поверхности склона, жидкость капель фильтруется в поры почвы, образуя водонасыщенную среду. Под действием силы тяжести и возникающих сдвиговых сил на поверхности склона образуется подвижный слой водонасыщенной почвы, стекающей к пониженной поверхности Земли. Различные виды почв после водонасыщения можно рассматривать как суспензию с различными физико-механическими свойствами. В настоящей работе исследование суспензий проводится на основе двух модельных сред. Водонасыщенная почва-суспензия, состоящая из потока воды, содержащей твердые частицы определенной концентрации (например, водонасыщенная песчанная почва), рассматривается как ньютоновская жидкость, вязкость которой зависит от этой концентрации [1]. Из опытов известно, что суспензия типа глинистых растворов при своем движении, наряду с вязкостью проявляет также пластические свойства [2]. В таких средах существует предельное напряжение сдвига (предел текучести), при превышении которого начинается течение по закону вязкой жидкости. При сдвиге ниже предела текучести суспензия рассматривается как твердое тело. Коэффициент вязкости и предел текучести зависят от пористости почвы и скорости сдвига.

Основываясь на этих свойствах, здесь суспензия - глинистый раствор - моделируется линейной вязко-пластической средой [3,4]. Чаше не вся жидкость капель дождя, достигших поверхности склона, фильтруется в почву. Тогда, над подвижным слоем водонасыщенной почвы возникает слой ньютоновской жидкости, так же стекающей к подножию возвышенности. На процесс водной эрозии почвы на склонах возвышенностей, характерный малыми скоростями частиц сре-

ды (сантиметры в секунду), может оказать влияние вращения Земли. Исследование этого вопроса удобно проводить в осях координат, жестко связанных с Землей. В этих осях уравнения движения содержат дополнительно силы инерции: центробежную силу, которая действует одинаково на подвижные и покоящиеся частицы и силу Кориолиса на единицу массы  $-2\vec{\omega}_0 \times \vec{u}$  ( $\vec{\omega}_0$  - угловая скорость Земли,  $\vec{u}$  - относительная скорость частиц). По своему влиянию центробежная сила эквивалентна малому изменению ускорения силы тяжести и обычно отдельно не рассматривается. Наиболее важную роль в относительном движении играет кориолисова сила. Пусть  $U$  - характерная величина относительной скорости частиц,  $L$  - характерный линейный размер, на протяжении которого относительная скорость частиц изменяется на порядок. Тогда, отношение величин  $(\vec{u} \nabla) \vec{u}$  к  $2\vec{\omega}_0 \times \vec{u}$  в уравнении относительно движения среды имеет порядок  $R_0 = \frac{U}{L\omega_0}$ .

Это отношение называется числом Россби [5]. При  $R_0 \gg 1$  можно пренебречь влиянием силы Кориолиса. При  $R_0 \ll 1$ , определяющим фактором будет действие силы Кориолиса. Если число Россби порядка единицы, то эффект от величин  $\rho(\vec{u} \nabla) \vec{u}$  и  $\rho 2\vec{\omega}_0 \times \vec{u}$  будут одного порядка. Наблюдения показывают, что движение водонасыщенной почвы на поверхности склона может иметь волновой характер типа волн "на мелкой воде" [5,6]. Решение системы уравнений, описывающих движение водонасыщенной почвы в слое на склонах возвышенностей Земли на моделях вязкой жидкости и вязко-пластической среды, с учетом силы тяжести, вращения Земли, образования волн, требует привлечения современных вычислительных машин. С другой стороны, необходима разработка методов решения задач проблемы при упрощающих условиях, когда можно пренебречь факторами, мало влияющими на процесс движения. Во многих случаях такой подход позволяет получить простые решения, вполне пригодные для практического использования. Например, при исследовании многих задач принято поверхность Земли считать горизонтальной плоскостью, а ускорение силы тяжести - направленной перпендикулярно к этой плоскости [5,7]. Основанием такого приближения является малая кривизна поверхности Земли и сравнительная ограниченность линейных размеров области движения. Сила Кориолиса влияет только на форму траектории в относительном движении частиц среды и в ряде случаев ею тоже можно пренебречь. В рассматриваемых здесь задачах приняты эти приближения. Кроме того, не учитывается образование волн и делаются другие допущения, упрощающие исследование.

2. В дальнейшем, поверхность склона возвышенности считается плоскостью, наклонную к горизонту под углом  $\alpha$  (фиг. 1). Влиянием границ поверхности склона пренебрегается, так что эта поверхность является неограниченной плоскостью. Скорость капель дождя  $\vec{V}_0$  и ускорение силы тяжести  $\vec{g}$  направлены одинаково, перпендикулярно горизонту (фиг. 1). Объемная концентрация  $\Omega$  жидкости капель в дождевом пространстве над поверхностью склона распределена равномерно. Подвижная часть водонасыщенной почвы - слой суспензии, примыкающей к поверхности склона, является однородной несжимаемой средой. Скорость частиц суспензии вдоль плоскости склона считается однонаправленной. В силу сделанных предположений это движение будет плоским. Возьмем начало координат  $x, y$  на поверхности склона, ось  $x$  на этой поверхности направим по скорости суспензии вдоль склона, ось  $y$  - вдоль внешней нормали  $\vec{n}$  плоскости склона (фиг. 1). Как указано выше, над пористой поверхностью склона образуется слой вязкой жидкости. Составляющие скорости частиц этой жидкости в направле-

нии оси  $X$  считаются однонаправленными, по направлению, совпадающему с однонаправленным движением суспензии. Другая составляющая скорости этого плоского движения направлена в отрицательную сторону оси  $y$ . Эта скорость равна действительной скорости  $w_0$  фильтрации жидкости на пористой поверхности склона. Фильтрация происходит в отрицательном направлении оси  $y$ . В условиях предполагаемого ламинарного движения жидкости в порах почвы, фильтрация определяется законом Дарси [8]



фиг. 1

$$\bar{w} = -\frac{\lambda \rho}{\eta} \nabla \left( \frac{p}{\rho} + y g \cos \alpha \right) \quad w = m w_0 \quad (1)$$

В равенствах (1) скорость фильтрации  $\bar{w}$  определяется как расход жидкости на единицу площади поперечного сечения почвы. Величина  $\lambda$ , имеющая размерность площади, называется коэффициентом проницаемости,  $\eta$  - коэффициент вязкости,  $p, \rho$  - давление и плотность жидкости в порах. Второе равенство формулы (1) устанавливает связь между скоростью фильтрации  $w$  и действительной скоростью  $w_0$  жидкости в порах. В этом равенстве  $m$  обозначает объемную концентрацию пор почвы - пористость. Толщина области водонасыщенной почвы возвышенности  $l$ , при сделанных выше ограничениях определяется интегралом

$$l = \int_0^l |\bar{w}| dt \quad (2)$$

При постоянных значениях  $m, \eta, \lambda$ , учитывая несжимаемость сред и однородность фильтрации из формулы (1), получим

$$w = -\left( \frac{\lambda \rho g}{\eta} \cos \alpha + \frac{\lambda}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

Если пренебрегается изменением давления и фильтрация происходит только под действием силы тяжести, то согласно (1) и (3), получим

$$w = -\frac{\lambda \rho g}{\eta} \cos \alpha, \quad w = m w_0 \quad (4)$$

Таким образом, пористая поверхность склона является границей между слоем жидкости и слоем суспензии. Предполагается, что на этой границе заданы скорости  $w$  и  $w_0$  по закону Дарси. Другой границей слоя жидкости является поверхность раздела его с областью дождя. В силу принятых условий, эту поверхность можно считать плоскостью, параллельной плоскости склона. Расстояние между границами слоя жидкости по оси  $y$  - толщину слоя жидкости, обозначим через  $H(t)$  (фиг. 1). Над граничной поверхностью  $y = H$  скорость жидких капель  $\bar{V}_0$  и концентрация  $\omega$ , заданные постоянные величины, равномерно распределенные в дождевом пространстве. Если  $ds$  - элемент этой поверхности, то в единицу времени через  $ds$  в слой вытечет количество несжимаемой жидкости  $dM_1$ :

$$dM_1 = \rho \omega ds (\dot{H} + V_0 \cos \alpha), \quad \dot{H} = \frac{dH}{dt}$$

где  $\dot{H}$  - скорость граничной поверхности. За это же время через элемент  $ds$  противоположной границы слоя (поверхности склона), из жидкого слоя в почву (суспензию), вытечет жидкость в количестве  $dM_2$ :

$$dM_2 = \rho m v_0 ds$$

По закону сохранения массы, при сделанных выше предположениях разность  $dM_1 - dM_2$  равна секунднему изменению массы жидкости в объеме слоя

$$ds \cdot H \cdot 1 \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\rho H ds) = \rho H ds$$

Это равенство определяет скорость  $\dot{H}$  границы

$$\dot{H} = \frac{\omega V_0 \cos \alpha - m v_0}{1 - \omega} = \frac{\omega V_0 \cos \alpha - w}{1 - \omega} \quad (5)$$

При прохождении жидкости каплей через поверхность  $y = H(t)$ , концентрация и скорость жидкости терпят разрыв. В общей постановке давление также может терпеть разрыв. В рассматриваемой задаче плоской одномерной фильтрации несжимаемой жидкости, нормальная составляющая скорости жидкости за поверхностью разрыва равна  $w_0$  и направлена вдоль отрицательной оси  $y$ . Пренебрегая изменением внутренней энергии несжимаемой жидкости, условия на поверхности разрыва  $y = H$ , выражающие основные законы механики, запишутся в виде равенств

$$\omega \rho (\dot{H} + V_{0n}) = \rho (\dot{H} + w_0), \quad \rho \omega (\dot{H} + V_{0n}) (V_{0n} - w_0) = p - p_0 \quad (6)$$

$$\omega \rho (\dot{H} + V_{0n}) \left( \frac{w_0^2 - V_{0n}^2}{2} \right) = -p w_0 + \omega p_0 V_{0n}, \quad v_\tau = V_0 \sin \alpha, \quad V_{0n} = -V_0 \cos \alpha$$

где  $p$  - давление,  $v_\tau$  - касательная составляющая скорости частиц жидкости непосредственно за поверхностью разрыва. Скорость  $V_\tau$  направлена параллельно оси  $x$ . В дальнейшем предполагается, что давление не терпит раз-

рыва ( $p = p_a, p_a$  - давление в дождевом пространстве и в порах почвы до фильтрации жидкости). Массой воздуха пренебрегается. Итак, одно из границ слоя подвижной суспензии является поверхностью склона (ось  $X$ ). Вторая граница, проходящая внутри возвышенности, является поверхностью раздела между слоем подвижной суспензии и неподвижной почвой. В силу условий задачи эта граница будет плоскостью, параллельной поверхности склона. Пусть  $h(t)$  - толщина слоя суспензии, тогда, положение второй границы определится уравнением  $y = -h(t)$ . Плотность однородной несжимаемой суспензии обозначим через  $\rho_0$ :

$$\rho_0 = m\rho + (1-m)\rho_1 \quad (7)$$

где  $\rho_1$  - плотность материала почвы. Символом  $v(y, z)$  обозначим скорость однонаправленного движения частиц в слое несжимаемой жидкости вдоль оси  $X$ . Скорость однонаправленного вдоль оси  $X$  частиц в слое суспензии обозначим через  $u(y, t)$ . По постановке задач составляющие скоростей по оси  $y$  считаются постоянными. Действующей силой в этих задачах является сила тяжести. Поэтому в уравнениях движения в обоих слоях силы инерции в направлении  $y$  не возникают:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \cos \alpha, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho_0 g \cos \alpha, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

С учетом этих равенств и однонаправленности скоростей частиц сред. уравнения движения в слое жидкости и в слое суспензии, с напряжениями, соответственно, представляются в виде

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \rho g \sin \alpha + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}, \quad \tau_{yx} = \eta \frac{\partial v}{\partial y} \quad (8)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = \rho_0 g \sin \alpha + \frac{\partial \tau_{yx}^0}{\partial y} \quad (9)$$

где  $\tau_{yx}, \tau_{yx}^0$  - напряжения сдвига в слое жидкости и в слое суспензии.

3. Пусть суспензия представляет собой поток жидкости с твердыми, несвязанными частицами определенной концентрации. Будем рассматривать такую суспензию как ньютоновскую несжимаемую жидкость с коэффициентом вязкости  $\mu$ . Тогда в уравнении (9) напряжение сдвига представляется равенством

$$\tau_{yx}^0 = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (10)$$

Коэффициент  $\mu$  определяется из опыта [9]. При малых объемных концентрациях вещества почвы  $z$ , для этого коэффициента, А. Эйнштейном получена формула [2]

$$\mu = \eta(1 + kz)$$

где  $\eta$  - коэффициент вязкости жидкости без примесей. Для сферических частиц почвы множитель  $k = 2,5$ .

В настоящем исследовании коэффициенты  $\eta$  и  $\mu$  считаются постоянными известными величинами, и уравнения (8) и (9) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -a + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad a = \frac{g \sin \alpha}{v}, \quad v = \frac{\eta}{\rho} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -b + \frac{1}{v_0} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad b = \frac{g \sin \alpha}{v_0}, \quad v_0 = \frac{\eta}{\rho_0} \quad (12)$$

Установим граничные условия этих уравнений. На границе между слоями жидкости и суспензии, то есть на поверхности склона должны выполняться условия

$$y = 0, \quad u = U, \quad v = V, \quad U = V, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \eta \frac{\partial v}{\partial y} \quad (13)$$

На границе между областью дождя и слоем жидкости давление равно  $p_a$ , а напряжение сдвига предполагается равным нулю, скорость частиц определяется последним равенством формулы (6):

$$y = H(t), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad v = V_0 \sin \alpha, \quad p = p_a \quad (14)$$

На границе слоя суспензии  $y = -h(t)$  должно выполняться условие

$$y = -h(t), \quad u(-h(t)) = 0 \quad (15)$$

Уравнения (11) и (12) известны как уравнения теплопроводности. Математические методы решений этих уравнений хорошо разработаны [10]. Здесь эти уравнения решаются эффективным методом последовательных приближений, изложенным в работах [11, 12]. Для уравнения (11) за первое приближение возьмем решение  $v_1$  следующего уравнения с граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0; \quad y = 0, \quad v = V = U; \quad y = H, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad v_1 = U(t) \quad (16)$$

Решение  $v_1$  подставим в правую часть уравнения (1) и дважды проинтегрируем по  $y$ , получим

$$v = \left( \frac{\dot{U}}{v} - a \right) \frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2, \quad \dot{U} = \frac{dU}{dt} \quad (17)$$

Ограничимся вторым приближением  $v_2$ , которое равно сумме  $v_1$  и решения (17). Постоянные  $c_1$  и  $c_2$  во втором приближении  $v_2$  определяются из тех же граничных условий (16).

В результате придем к выражению

$$v = v_2 = U(t) - \left( \frac{\dot{U}}{v} - a \right) \frac{2Hv - v^2}{2} \quad (18)$$

Второе равенство в условиях (14) приводит к уравнению

$$y = H, \quad U - \frac{H^2}{2v} \dot{U} = V_0 \sin \alpha - \frac{a}{2} H^2 \quad (19)$$

которое решается при условиях  $t = 0, U = V_0 \sin \alpha; H(t)$  определяется из (5), причем  $H(0) = 0$ . Последнее равенство в условиях (13) теперь запишется так:

$$y = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\eta}{\mu} \left( \frac{\dot{U}}{v} - a \right) H = \varepsilon(t) \quad (20)$$

Задача свелась к решению уравнения (12) при условиях (20) и (15). За первое приближение решения  $u_1$  берем решение следующего уравнения с условиями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad y = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon; \quad y = -h, \quad u = 0; \quad u_1 = \varepsilon(h + y) \quad (21)$$

где  $\varepsilon$  определено по формуле (20). Подставим  $u_1$  в правую часть уравнения (12) и проинтегрируем дважды по  $y$ , в результате будем иметь:

$$u = \frac{\dot{\varepsilon} y^3}{6v_0} + \frac{\dot{\varepsilon} h + \varepsilon \dot{h} - v_0 b}{2v_0} y^2 + c_1 y + c_2 \quad (22)$$

точка над символом означает производную по времени. Ограничимся вторым приближением  $u_2$ , которое равно сумме первого приближения  $u_1$  и решения (22). Постоянные  $c_1, c_2$  во втором приближении также определяются условиями в формуле (21). В результате придем к следующему решению во втором приближении

$$u = u_2 = \varepsilon(h + y) + \frac{\dot{\varepsilon}}{6v_0} (h^3 + y^3) - \frac{\dot{\varepsilon} h + \varepsilon \dot{h} - v_0 b}{2v_0} (h^2 - y^2) \quad (23)$$

Напишем это решение для  $y = 0$  и присоединим к полученному соотношению уравнение (19):

$$U = \varepsilon h + \frac{\dot{\varepsilon}}{6v_0} H^3 - \frac{\dot{\varepsilon} h + \varepsilon \dot{h} - v_0 b}{2v_0} H^2, \quad \varepsilon = -\frac{\eta}{\mu} \left( \frac{\dot{U}}{v} - a \right) H \quad (24)$$

$$U = \frac{H^2}{2v} \dot{U} - \frac{a}{2} H^2 + V_0 \sin \alpha, \quad \dot{H} = \frac{\omega V_0 \cos \alpha - w}{1 - \omega}, \quad w = \frac{\rho \lambda g}{\mu}$$

В настоящей работе все коэффициенты предполагаются постоянными. Поэтому скорость изменения толщины жидкого слоя  $\dot{H} = D$  постоянна:

$H = Dt$ . Система уравнений (24) определяет скорость суспензии  $V = U$  на границе склона ( $y = 0$ ) и толщину слоя суспензии  $h(t)$  при условии  $t = 0, h = 0$ . Секундный расход через поперечное сечение слоя суспензии определяется интегралом

$$Q = \rho_0 \int_{-h}^0 u dy = \rho_0 \left( \frac{\varepsilon h^2}{2} + \frac{\dot{\varepsilon} h^4}{8v_0} - \frac{\dot{\varepsilon} h + \varepsilon \dot{h} - v_0 b}{3v_0} h^3 \right) \quad (25)$$

Практический интерес представляют решения уравнений (11) и (12) в квазистатическом приближении, когда в этих уравнениях пренебрегаются ускорениями частиц среды. Тогда уравнения, соответственно, запишутся в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -a; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -b \quad (26)$$

Уравнения (26) решаются при прежних граничных условиях. Решение первого уравнения для слоя жидкости представляется в виде:

$$v = U + a \left( Hy - \frac{y^2}{2} \right), \quad U = \frac{2V_0 \sin \alpha - aH^2}{2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a(H - y) \quad (27)$$

Согласно граничному условию (13) скорость частиц суспензии и ее производная по  $y$ , на поверхности склона принимают значения

$$y = 0, \quad u = U = \frac{2V_0 \sin \alpha - aH^2}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\eta}{\mu} aH \quad (28)$$

Решение второго уравнения (26), определяющее скорость частиц суспензии, дается формулой

$$u = b \frac{h^2 - y^2}{2} + \varepsilon(h + y), \quad \varepsilon = \frac{\eta}{\mu} aH, \quad H = Dt, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -by + \varepsilon \quad (29)$$

На поверхности склона скорость  $w$  равна скорости  $U$ , определенной по формуле (28):

$$y = 0, \quad bh^2 + 2\varepsilon h = 2U, \quad U = \frac{2V_0 \sin \alpha - aH^2}{2}$$

Эти соотношения определяют толщину слоя суспензии

$$h = \frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 2Ub}}{b}, \quad U = \frac{2V_0 \sin \alpha - aH^2}{2} \quad (30)$$

В полученных соотношениях  $\varepsilon$  и  $H$  определены равенствами в (29). Расход суспензии через поперечное сечение слоя здесь определяется по формуле

$$Q = \rho_0 \int_{-h}^0 u dy = \rho_0 \left( \frac{b}{3} h^3 + \varepsilon \frac{h^2}{2} \right) \quad (31)$$

4. Пусть теперь моделью суспензии является несжимаемая линейно-вязко-пластическая среда. Тогда в уравнении (9), описывающем однонаправленное движение суспензии в слое, напряжение сдвига определяется равенством

$$\tau_{yx}^0 = \pm k + \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad |\tau_{yx}^0 \mp k| \geq \frac{\partial u}{\partial y}$$

В рассматриваемой задаче  $\frac{\partial u}{\partial y} > 0$ . Поэтому перед величиной  $k$  - пределом текучести среды, берем положительный знак

$$\tau_{yx}^0 = k + \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (32)$$

Эксперименты показывают существенную зависимость коэффициентов  $k$  и  $\mu$  от пористости почвы [9]. Кроме того, предел текучести зависит от связности почвы, а коэффициент вязкости - от скорости сдвига [2]. В естественных условиях пористость и водонасыщенность почвы убывает с глубиной (вдоль отрицательной оси  $y$ ), а значения  $k$  и  $\mu$  увеличиваются [9]. Установление зависимостей коэффициентов  $k$  и  $\mu$  от пористости водонасыщенной почвы-суспензии, а пористость от глубины (оси  $y$ ) является неотложной задачей. При уменьшении концентрации вещества почвы в суспензии (росте пористости) коэффициент  $\mu$  приближается к конечному пределу - коэффициенту  $\eta$  жидкости, а предел текучести  $k$  стремится к нулю. Минимальные значения  $k$  и  $\mu$  достигаются на поверхности склона. Здесь, для определенности, без должного обоснования предполагается, что коэффициент вязкости постоянен, а предел текучести - известная функция  $y$ :

$$k = k(y), \quad \mu = \text{const}, \quad y \leq 0$$

При такой зависимости, согласно (32), уравнение (9) примет вид

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = \rho_0 g \sin \alpha + k'(y) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \mu = \text{const}$$

Принимая линейный закон зависимости  $k$  от  $y$  и на поверхности склона ( $y = 0$ ), предел текучести равен нулю, получим

$$k = -k_0 y, \quad \mu = \text{const}, \quad y \leq 0 \quad (33)$$

коэффициенты  $k_0$  и  $\mu$  считаются известными величинами. Теперь уравнению (9) и формуле (32) можно придать вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -c_0 + \frac{1}{v_0} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad c_0 = \frac{g}{v_0} \sin \alpha - \frac{k_0}{\mu}$$

$$\tau_{yx}^0 = -k_0 y + \mu \frac{\partial u}{\partial y}; \quad y \leq 0; \quad y = 0, \quad k = 0 \quad (34)$$

При наличии, над слоем суспензии, ньютоновской жидкости сохраняются условия (13)

$$y=0, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \eta \frac{\partial v}{\partial y}, \quad v(0, t) = u(0, t) = U \quad (35)$$

На другой границе суспензии  $y = -h$  выполняется условие (15). За первое приближение решения уравнения (34) возьмем решение  $u_1$  следующего уравнения с граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad y=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon; \quad y=-h, \quad u=0; \quad u_1 = \varepsilon(h+y) \quad (36)$$

где  $\varepsilon$  определен формулой (20). Подставим  $u_1$  в правую часть уравнения (34). После двойного интегрирования по  $y$  получим

$$u = \frac{\dot{\varepsilon} y^3}{6v_0} + \frac{\dot{\varepsilon} h + \dot{h} \varepsilon - v_0 c_0}{2v_0} y^2 + c_1 y + c_2 \quad (37)$$

Ограничимся вторым приближением  $u_2$ , которое равно сумме  $u_1$  и решения (37). Постоянные  $c_1, c_2$  во втором приближении определим при граничных условиях (36). В результате, для второго приближения решения уравнения (34) будем иметь:

$$u = u_2 = \varepsilon(h+y) + \frac{\dot{\varepsilon}}{6v_0} (h^3 + y^3) - \frac{\dot{\varepsilon} h + \dot{h} \varepsilon - v_0 c_0}{2v_0} (h^2 - y^2) \quad (38)$$

На границе раздела слоев жидкости и суспензии ( $y=0$ ) должны выполняться условия

$$U = \varepsilon h + \frac{\dot{\varepsilon}}{6v_0} h^3 - \frac{\dot{\varepsilon} h + \dot{h} \varepsilon - v_0 c_0}{2v_0} h^2$$

$$U - \frac{H^2}{2v} \dot{U} = V_0 \sin \alpha = \frac{aH^2}{2}, \quad \varepsilon = -\frac{\eta}{\mu} \left( \frac{\dot{U}}{v} - a \right) H \quad (39)$$

Уравнения (39) определяют величины  $U$  и  $h$  при начальных условиях

$$t=0, \quad U = V_0 \sin \alpha, \quad h=0$$

Расход суспензии через поперечное сечение слоя равен:

$$Q = \rho_0 \left[ \frac{\varepsilon}{2} h^2 + \frac{2}{3v_0} (\dot{\varepsilon} h + \dot{h} \varepsilon - v_0 c_0) h^3 + \frac{3}{24} \frac{\dot{\varepsilon}}{v_0} h^4 \right] \quad (40)$$

Таким образом, расход зависит не только от толщины слоя  $h$ , но и от скорости изменения этой толщины. Если в уравнении (34) пренебречь ускорением, то получим уравнение в квазистатическом приближении. Решение анало-

гичного уравнения движения в слое жидкости приведено в формулах (27) и (28). В квазистатическом приближении, при установленных выше граничных условиях, скорость частиц в слое суспензии определяется формулой

$$u = c_0 \frac{h^2 - y^2}{2} + \varepsilon(h + y), \quad \varepsilon = \frac{\eta}{\mu} aH \quad (41)$$

На границе склона ( $y = 0$ )

$$u = U = c_0 \frac{h^2}{2} + \varepsilon h, \quad U = \frac{1}{2} (2V_0 \sin \alpha - aH^2)$$

Из этих соотношений определяется толщина слоя суспензии

$$h = \frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 2Uc_0}}{c_0}; \quad y = -h, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = c_0 h + \varepsilon \quad (42)$$

Расход среды через поперечное сечение слоя суспензии определяется интегралом

$$Q = \rho_0 \int_{-h}^0 u dy = \rho_0 \left( \frac{c_0 h^3}{3} + \varepsilon \frac{h^2}{2} \right) \quad (43)$$

В ряде работ [13,14] принимается, что скорость проникания жидкости в поры почвы линейно зависит от давления, с коэффициентом пропорциональности  $K$ . В рассматриваемой задаче это условие запишется так:

$$w_0 = -K\rho g \cos \alpha H(t) \quad (44)$$

Тогда уравнение (5) заменится следующим:

$$\dot{H} = \frac{\omega V_0 \cos \alpha - mK\rho g \cos \alpha H}{1 - \omega} \quad (45)$$

Интегрируя это уравнение при  $t = 0$ ,  $H = 0$ , получим

$$B - H = Be^{-At}, \quad A = \frac{1}{1 - \omega} \frac{\cos \alpha}{mK\rho g}, \quad B = \frac{\omega V_0}{mK\rho g} \quad (46)$$

Для сравнения порядка величин, в системе единиц килограмм-сила, метр, секунда, приведем значения предела текучести и коэффициента вязкости глинистой суспензии (концентрация глины по весу 62,2% [9]) и металла в вязко-пластическом состоянии (сталь 6 [3]); суспензия:  $k = 5,74$ ,  $\mu = 1,1$ ; металл:  $k = 4 \cdot 10^7$ ,  $\mu = 4 \cdot 10^3$ .

Отметим, что в этих же единицах измерения, коэффициент вязкости воды определяется из равенства:  $\eta \cdot 10^6 = 103$ , при  $20^\circ\text{C}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Реология суспензий (сб.статей), "Мир", 1975.
2. Ричардсон Э. Динамика реальных жидкостей.- М., Мир, 1965.
3. Ильюшин А.А. Основные уравнения вязко-пластического течения.- Уч. за-

писки МГУ, вып.39, механика, изд. МГУ, 1940.

4. *Фрейзенталь Л., Гейригер Х.* Математическая теория неупругой среды. - М.: Физматгиз, 1962.
5. *Бэтчелор Дж.* Динамика реальных жидкостей. - М.: Мир, 1973.
6. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. - М.: Мир, 1981.
7. *Прандтль Л.* Гидроаэродинамика. - М.: ИЛ, 1951.
8. *Лейбензон Л.С.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. - М.: Гостехиздат, 1947.
9. *Воларович М.П.* Применение методов исследования вязкости и пластичности в прикладной минералогии. - Труды ин-та прикладной минералогии. 1934, вып.66.
10. *Карлслюу Г., Егеръ Д.* Теплопроводность твердых тел. - М.: Физматгиз, 1964.
11. *Швец М.Е.* О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. - ПММ, 1939, т. XIII, вып. 3, с. 251-266.
12. *Кочетков А.М.* Приближенное решение некоторых задач нестационарного движения вязко-пластической среды. - ПММ, 1950, т. XIV, вып.4, с. 433-436.
13. *Слезкин Н.А.* О течении вязкой жидкости при наличии свободной границы и пористого дна. - ВМУ, матем, механ., 1957, №5, с.3-5.
14. *Бабаджаниян Г.А., Даниелян Л.Е.* Течение вязкой жидкости в открытом пористом русле. - Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1963, т. XVI, № 5, с. 83-90.

МГУ

Поступила в редакцию  
12.07.1994

## НЕСИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОПОРНОГО ПОДШИПНИКА

Петросян Л.Г.

Լ.Գ.Պետրոսյան

Նեոսարանային առանցքակալի եփրոդինամիկական բնութագրերի  
որոշման ոչ սիմետրիկ մոդելի մասին

Տիրք ընդունելով ոչ սիմետրիկ լարման փոխարժեքի անսկզբնականության մոտացված հոդովի շարժման հոմոտարությունների համակարգը՝ սպասվում են բարձր շերտում եղանակի հոսքի կիմնական հոմոտարությունների մասնագիտացված փոխարժեքը: Գրելվում են զրոյան ինտրաշերտում ունեցող եփրոդակով եփրոդային ստիմանային առանցքակալի կիմնական եփրոդինամիկական բնութագրերը:

L.G.Petrosian

Non-Symmetrical Model for Determining Hydrodynamic Characteristics of Bearing Journal

На основе системы уравнений движения вязкой несжимаемой структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений получена специализированная форма основных уравнений при течении жидкости в тонком слое. Найденные основные гидродинамические характеристики опорного подшипника скольжения с цилиндрической расточкой вкладыша.

1. Система уравнений движения вязкой несжимаемой структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений имеет вид [1]

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + (\nu + \nu_r) \nabla^2 \vec{v} + 2\nu_r \nabla \times \vec{\omega} + \vec{f} \quad (1.2)$$

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 2\nu_r (\nabla \times \vec{v} - \vec{\omega}) + (c_0 + c_d - c_a) \nabla (\nabla \cdot \vec{\omega}) + (c_d + c_a) \nabla^2 \vec{\omega} + \vec{c} \quad (1.3)$$

Здесь  $\rho$  - массовая плотность жидкости,  $p$  - давление,  $I$  - скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы,  $\vec{v}$  - вектор скорости точки,  $\vec{\omega}$  - вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума,  $\nu$  - кинематическая ньютоновская вязкость,  $\nu_r$  - кинематическая вращательная вязкость,  $c_0, c_d, c_a$  - коэффициенты моментной вязкости,  $d(\dots)/dt$  - полная производная по времени,  $\nabla$  - пространственный градиент,  $\vec{f}$  - вектор массовой силы,  $\vec{c}$  - вектор массового момента.

Рассматривая течение слоя жидкости между разделяемыми ею трущимися поверхностями, совместим плоскость  $xOz$  с поверхностью, развернутой на плоскость, или с касательной плоскостью к этой поверхности в какой-либо точке элемента трущейся пары, относительно которого будем рассматривать

движение другого элемента пары и движение слоя жидкости. Ось  $Oy$  совместим с нормалью к поверхности трущейся пары, с которой совмещаем плоскость  $xOz$ .

Так рассмотрим установившееся течение вязкой несимметричной жидкости в тонком слое между приблизительно параллельными поверхностями, радиусы кривизны которых достаточно велики по сравнению со средней толщиной  $\delta$ . При этом предполагается, что течение жидкости происходит в направлениях  $x$  и  $z$ , и что толщина  $\delta$  мала по сравнению  $v/U$ , где  $U$  - характерная скорость течения. Ввиду малости  $\delta$  будем считать, что составляющая скорости  $V$  значительно меньше  $u$  и  $w$  ( $v \ll u$  и  $w$ ) и что, кроме того, вследствие прилипания жидкости к стенкам изменения  $u$  и  $w$ , как и составляющих  $\omega_x$  и  $\omega_z$ , в направлении осей  $Ox$  и  $Oz$ , соответственно, происходит гораздо медленнее, чем в направлении оси  $Oy$ , а это означает: производная по  $y$  значительно больше, чем другие производные  $\partial/\partial y \gg \partial/\partial x$  и  $\partial/\partial z$ .

Имеем

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{\omega}) = \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right)$$

тогда другие компоненты значительно малы. Компонента  $\nabla \times \vec{v}$  на  $y$ , то есть  $\left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ , а также  $\partial v/\partial x$  и  $\partial v/\partial z$  малы по сравнению  $\partial u/\partial y$  и  $\partial w/\partial y$ .

Уравнение (1.3) в проекциях на декартовы оси координат не будет содержать соответствующего члена из выражения  $\nabla(\nabla \cdot \vec{\omega})$ , так как  $\nabla^2 \vec{\omega} \gg \nabla(\nabla \cdot \vec{\omega})$ .

Тогда, отбрасывая в уравнениях движения (1.2) и (1.3) малые по сравнению с другими, и пренебрегая, как обычно, массовыми силами и массовыми моментами, в проекциях на декартовы оси координат получим следующие приближенные уравнения течения вязкого несимметричного слоя:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = (v + v_r) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2v_r \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = (v + v_r) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2v_r \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \quad (1.5)$$

$$(c_a + c_d) \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} - 2v_r \left( 2\omega_x - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.6)$$

$$(c_a + c_d) \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} - 2v_r \left( 2\omega_z + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.8)$$

Уравнения (1.4) - (1.8) совместно с уравнением неразрывности (1.1) являются дифференциальными уравнениями смазочного слоя структурной несимметричной жидкости.

2. Используя условие прилипания слоя жидкости к поверхностям, ограничивающим смазочный слой, граничные условия для скоростей  $u$  и  $w$ , а также угловых скоростей  $\omega_x$  и  $\omega_z$ , можно записать в виде

$$\text{при } y = 0 \quad u = 0, w = 0, \omega_x = 0, \omega_z = 0$$

$$\text{при } y = h \quad u = U, w = W, \omega_x = 0, \omega_z = 0 \quad (2.1)$$

где  $U$  и  $W$  - составляющие относительной скорости верхнего элемента трущейся пары в направлении осей  $Ox$  и  $Oz$ ,  $h = \delta$ .

В уравнениях (1.4) - (1.8) можно провести интегрирование по переменной  $y$ . Тогда, используя граничные условия (2.1), из (1.4) - (1.8) получим

$$\omega_x = -\frac{1}{2\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial z} \left( \frac{\text{sh } ky}{\text{sh } kh} h - y \right) - \frac{1}{2} C_B \left( \text{ch } ky - \frac{\text{ch } kh - 1}{\text{sh } kh} \text{sh } ky - 1 \right) \quad (2.2)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{\text{sh } ky}{\text{sh } kh} h - y \right) - \frac{1}{2} C_A \left( \text{ch } ky - \frac{\text{ch } kh - 1}{\text{sh } kh} \text{sh } ky - 1 \right) \quad (2.3)$$

$$u = \frac{1}{\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{y^2}{2} - \frac{N^2 h}{k} \frac{\text{ch } ky - 1}{\text{sh } kh} \right) + U - C_A \left\{ y - \frac{N^2}{k} \left[ \text{sh } ky - \frac{(\text{ch } ky - 1)(\text{ch } kh - 1)}{\text{sh } kh} \right] \right\} \quad (2.4)$$

$$w = \frac{1}{\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial z} \left( \frac{y^2}{2} - \frac{N^2 h}{k} \frac{\text{ch } ky - 1}{\text{sh } kh} \right) + W - C_B \left\{ y - \frac{N^2}{k} \left[ \text{sh } ky - \frac{(\text{ch } ky - 1)(\text{ch } kh - 1)}{\text{sh } kh} \right] \right\} \quad (2.5)$$

где

$$N = \left( \frac{v_r}{v + v_r} \right)^{1/2}, \quad C_A = \frac{1}{2} \left( \frac{h}{\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{U}{\frac{h}{2} - \frac{N^2}{k} \text{th } \frac{kh}{2}} \right), \quad k = \frac{N}{l} \quad (2.6)$$

$$l = \left( \frac{c_n + c_d}{4\nu} \right)^{1/2}, \quad C_B = \frac{1}{2} \left( \frac{h}{\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{W}{\frac{h}{2} - \frac{N^2}{k} \text{th } \frac{kh}{2}} \right)$$

Обозначив скорость сближения граничных поверхностей вдоль  $Oy$  через  $V$ , интегрируя по  $y$  уравнение неразрывности в пределах толщины слоя  $h$ , получим

$$V = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy - \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w dy \quad (2.7)$$

В уравнении (2.7) интегралы из себя представляют расход смазки в данном поперечном сечении слоя соответственно в направлении осей  $Ox$  и  $Oz$  и, согласно (2.4) и (2.5), равны

$$\begin{aligned} \int_0^h u dy &= -\frac{h^3}{\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial x} f(N, l, h) + \frac{1}{2} U h \\ \int_0^h w dy &= -\frac{h^3}{\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial z} f(N, l, h) + \frac{1}{2} W h \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$f(N, l, h) = \left[ \frac{1}{12} + \frac{l^2}{h^2} - \frac{Nl}{2h} \operatorname{cth} \frac{kh}{2} \right] \quad (2.9)$$

Подставляя (2.8) в уравнение (2.7), будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ h^3 f(N, l, h) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ h^3 f(N, l, h) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \rho\nu V + \frac{\rho\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} (Uh) + \frac{\rho\nu}{2} \frac{\partial}{\partial z} (Wh) \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) является обобщением известного уравнения Рейнольдса для давлений на случай движения вязкой несжимаемой жидкости с несимметричным тензором напряжений.

Это уравнение является фундаментальным в гидродинамической теории смазки несимметричных жидкостей.

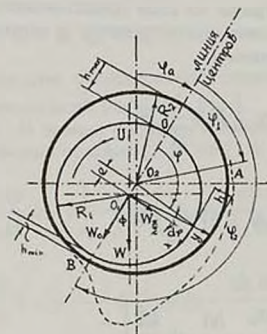
3. Найдем решение задачи расчета гидродинамических характеристик опорного подшипника с цилиндрической расточкой вкладыша.

Как показывают опыты с подшипником скольжения, когда на цапфу действует нагрузка, то по отношению к подшипнику цапфы располагаются эксцентрически, причем центры их смещаются относительно центра подшипника вниз и в сторону вращения, как это схематично показано на фиг. 1, и между рабочими поверхностями шейки и вкладыша подшипника, ниже линии центров  $O_1O_2$  образуется клинообразный сужающийся в направлении движения слой смазки. По длине этого слоя гидродинамическое давление в слое смазки постоянно увеличивается по направлению течения, а затем, достигнув максимума, падает до своей первоначальной величины в сечении, расположенном несколько далее наиболее узкого сечения слоя смазки. Об этом свидетельствуют также измерения распределения давления масла по окружности шейки, полученные Тихвинским и Свифтом при испытаниях опорных подшипников турбин при различных нагрузках [2].

Имеем цилиндрический подшипник при эксцентрическом расположении шипа. Полагаем, что смазочное вещество заполняет все пространство между

шипом и подшипником. Движение смазки в смазочном слое будем считать плоским. Практически это означает, что при расчете не принимается во внимание то, что длина шипа, охваченного подшипником, конечна (отношение длины шейки на толщину слоя  $l_{ш}/c \approx 10^3$  [3]).

Обозначим радиус шипа  $R_1$ , радиус подшипника  $R_2$ , а переменную толщину слоя смазки между ними  $h$  (фиг.1).



Фиг. 1.

Пусть шип вращается равномерно по часовой стрелке и пусть линейная скорость на поверхности шипа равна  $U$ . Эксцентриситет  $e = (\lambda/\lambda_2)$  принимается очень малым по сравнению с радиусами окружностей  $R_1$  и  $R_2 > R_1, e \ll R_1, R_2$ .

Положение жидкой частицы в смазочном слое определяется криволинейными координатами  $x$  и  $y$ , где  $x$  измеряется вдоль дуги окружности радиуса  $R_1$ , а  $y$  отсчитывается от точки поверхности шипа по направлению нормали к окружности. При этом точка  $O$  — неподвижная точка, взятая в том месте, где расстояние между шипом и подшипником является наибольшим. Введем центральный угол  $\varphi$ , отсчитываемый от  $OO_1$  в направлении вращения шипа, тогда  $x = R_1 \varphi$ .

Примем, что толщина слоя смазки  $h$  столь мала по сравнению с радиусом шипа  $R_1$ , что кривизной координатных линий можно пренебречь и считать для течения в смазочном слое справедливым уравнение Рейнольдса для давлений (2.10). Решение задачи для полного подшипника в этом приближении в случае классической ньютоновской жидкости было дано Зоммерфельдом [4]. Несимметричная модель гидродинамической теории цилиндрического полного подшипника рассмотрена в работе [5]. В [6] рассмотрено течение микрополярной жидкости в половинном подшипнике.

В теории смазки радиальных подшипников скольжения принято описать толщину смазочного слоя уравнением

$$h(\varphi) = c(1 + \varepsilon \cos \varphi) \quad (3.1)$$

Здесь  $c$  — радиальный зазор,  $\varepsilon = e/c$ .

По величине  $\varepsilon$  определяют минимальный зазор между цапфой и подшипником  $h_{\min} = c(1 - \varepsilon)$ . По условию обеспечения жидкостного трения в двигателе любых размеров значение  $h_{\min}$  должно быть больше линейной шероховатости [3]. Так, шатунный подшипник четырехтактного двигателя ГАЗ-21 автомобиля "Волга" имеет  $h_{\min} = 8 \cdot 10^{-6}$  м [3] (для воды при радиусе капилляра  $r_0 \leq 10^{-6}$  м течение не описывается формулой Гагена-Пуазейля, причем с уменьшением радиуса капилляра отклонение от него сильно возрастает).

Для определения поля давления в смазочном слое применим модифицированное уравнение Рейнольдса для давлений (2.10), которое в случае стационарного плоского движения вязкой несжимаемой жидкости и скольжения трущихся пар в направлении одной координаты имеет вид (здесь и далее индекс 1 у  $R$  опущен)

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ h^3 \frac{\partial p}{\partial \varphi} f(N, l, h) \right] = \frac{\rho v}{2} UR \frac{\partial h}{\partial \varphi} \quad (3.2)$$

Интегрируя (3.2), получим

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \frac{UR\eta}{h^3 f(N, l, h)} (h - h_i), \quad \eta = \rho v \quad (3.3)$$

где  $h_i$  - постоянная интегрирования, определяющая одновременно точки экстремума давления.

Для нахождения постоянной интегрирования необходимо знать расположение смазочного слоя и протяженность участка смазки (область положительных давлений).

Несмотря на наличие большого числа исследований, посвященных решению уравнения Рейнольдса для давления, вопрос о границах протяженности и размещения смазочного слоя в опорном подшипнике остается дискуссионным. Протяженность участка смазки зависит от количества смазки, подаваемой в зазор при заданном расположении шипа в подшипнике и заданных величинах относительно зазора и относительной длины подшипника (вкладыша).

На расположение смазочного слоя и его начало очень большое влияние оказывают такие конструктивные особенности вкладыша, как размещение смазочных канавок, карманов, отверстий и т.п.

Предположение о начале смазочного слоя на кромке нагруженной части вкладыша или в наиболее широком месте зазора, практически имеющих место величины относительно зазора  $\psi = c/R$ , хорошо отвечает опыту, сообщая чему и выбирают угол  $\varphi_1$  начала несущей части слоя. Смещение начала смазочного слоя в сторону некоторого увеличения угла  $\varphi_1$  в очень небольшой степени будет влиять на величину давлений в первой половине области положительных давлений.

Многие исследователи используют граничные условия, основанные на предположении, что давление масла в месте минимального зазора равно нулю. Так, А. Стодола, Л. Гюмбель, М.И. Яновский, А.К. Дьячков и др. предполагают, что эта гипотеза верна [8]. В 1957 и 1963 г.г. Н.Типей и А.Ника провели дополнительные опыты. По их мнению, наилучшее совпадение результатов расчета с опытом получается в том случае, когда предполагают, что масляной слой обрывается в месте минимальной толщины пленки  $\varphi_2 = \pi$  [9].

По данным опыта с цилиндрическими подшипниками  $\varphi_1 = \pi/3$ - угол наклона радиальной плоскости, проведенный через начало несущего слоя к линии центров, а  $\varphi_2 = \pi$ - угол наклона радиальной плоскости, проведенный через конец несущего слоя к линии центров [3].

Тогда, граничные условия для  $p$  будут иметь вид

$$p = 0 \text{ при } \varphi_1 = \pi/3 \text{ и } \varphi_2 = \pi \quad (3.4)$$

Интегрируя (3.3) по  $\varphi$ , в пределах от  $\varphi_1$  до  $\varphi$ , будем иметь для гидродинамического давления

$$p(\varphi) = \int_{\varphi_1=\pi/3}^{\varphi} dp = \frac{1}{2} \eta UR f_1(\varphi) - \eta R Q f_2(\varphi) \quad (3.5)$$

где

$$f_1(\varphi) = \int_{\pi/3}^{\varphi} \frac{d\varphi}{h^2 f(N, L, h)}, \quad f_2(\varphi) = \int_{\pi/3}^{\varphi} \frac{d\varphi}{h^3 f(N, L, h)}, \quad Q = \frac{U h_1}{2} = \frac{f_1(\pi)}{f_2(\pi)} \quad (3.6)$$

Связь с секундным расходом жидкости  $Q$ , через любое сечение зазора подшипника, с постоянным  $h_1$  можно находить, сравнивая уравнение (3.3) с первым уравнением (2.8).

Для безразмерного давления в зазоре имеем

$$P(\varphi) = \frac{1}{2} F_1(\varphi) - Q \cdot F_2(\varphi) \quad (3.7)$$

где

$$P = \frac{p(\varphi) c^2}{UR \eta}, \quad F_1(\varphi) = \int_{\pi/3}^{\varphi} \frac{\alpha d\varphi}{H^2 f(N, L, H)}, \quad F_2(\varphi) = \int_{\pi/3}^{\varphi} \frac{\alpha d\varphi}{H^3 f(N, L, H)}$$

$$f(N, L, H) = \frac{1}{12} + \frac{1}{(LH)^2} - \frac{N}{2LH} \operatorname{cth} \frac{NLH}{2},$$

$$H = \frac{h}{c}, \quad L = \frac{c}{l}, \quad Q = \frac{QU}{c} = \frac{F_1(\pi)}{2F_2(\pi)}$$

4. Найдем результирующую всех сил давления и трения - главный вектор реакции жидкости, действующий на шип. Будем считать, что в подшипнике отсутствует торцевое течение. Так как величины  $c$  и  $h$  считаются малой по сравнению с  $R$ , то при вычислении результирующей силами трения, имеющей порядок  $1/c$  по сравнению с силами давления, порядок которых равен  $1/c^2$ , можно пренебречь [10,11].

При постоянной по величине и направлению приложенной к шипу внешней силы,  $\bar{W}$  - несущая способность смазочного слоя - равна этой силе.

Отнеся главный вектор  $\bar{W}$  к единице длины вдоль оси подшипника, будем иметь

$$W_{\pi/2} = W \sin \Phi = R \int_{\pi/3}^{\pi} p \sin \varphi d\varphi \quad (4.1)$$

для нормальной к линии центров нагрузки  $W_{\pi/2}$  и

$$W_0 = W \cos \Phi = -R \int_{\pi/3}^{\pi} p \cos \varphi d\varphi \quad (4.2)$$

- для компонента нагрузки  $W_0$ , действующей вдоль линии центров. Здесь  $\Phi$  - фазовый угол между линией действия нагрузки и линией центров.

Интеграл (4.1) проще всего вычислить по частям, найдем

$$W_{\pi/2} = -R \int_{\pi/3}^{\pi} p d(\cos \varphi) = R \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \cos \varphi d\varphi$$

Подставляя сюда  $\partial p / \partial \varphi$  из (3.3), с учетом (3.6), получим в безразмерной форме

$$W_{\pi/2}^* = \frac{W_{\pi/2} c^2}{\eta R^2 U} = \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{H^2 f(N, L, H)} - Q^* \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{H^3 f(N, L, H)} \quad (4.3)$$

Аналогично вычислим интеграл (4.2), найдем

$$W_0 = -R \int_{\pi/3}^{\pi} p d(\cos \varphi) = R \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin \varphi d\varphi$$

Сюда, подставляя  $\partial p / \partial \varphi$  из (3.3), с учетом (3.6), получим в безразмерной форме

$$W_0^* = \frac{W_0 c^2}{\eta R^2 U} = \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{H^2 f(N, L, H)} - Q^* \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{H^3 f(N, L, H)} \quad (4.4)$$

Для несущей способности подшипника имеем

$$W^* = (W_0^{*2} + W_{\pi/2}^{*2})^{1/2} \quad (4.5)$$

5. Определим коэффициент нагруженности цилиндрического радиального подшипника. При выводе дифференциальных уравнений для смазочного слоя при его малой толщине упрощения свелись к тому, что из уравнений движения выпали отдельные (второстепенные) слагаемые, обусловленные вязкостью, и слагаемые всех квадратичных членов инерции - движение смазки оказалось независимым от числа Рейнольдса [1, 12, 13].

Так как силы инерции входят лишь в число Рейнольдса и Эйлера, представляющий отношение сил давления к силам инерции, поэтому, чтобы зависимость между динамическими критериями подобия не зависела от сил инерции, число  $Re$  и  $Eu$  должны комбинироваться так, чтобы силы инерции при этом исключились. Такими единственными комбинациями являются произведения  $Re \cdot Eu$  и  $Re \cdot Eu \tau$ , которые дают новые критерии, представляющие собой отношение нормальных и касательных усилий в смазочном слое к силам вязкости соответственно. Эти новые критерии являются числами Лаг-

ранжа [14] для нормальных и касательных усилий. Число Лагранжа  $Eu \cdot Re = Gc\psi / 2l_{вк} \cdot R\eta U$ , отвечающее среднему нормальному давлению, называется коэффициентом грузоподъемности или нагруженности  $\zeta$  [3,8]. Поскольку  $U = K\Omega$ , где  $\Omega$ - угловая скорость вращения шипа, то

$$\zeta = \frac{G \psi}{l_{вк} d \eta \Omega} \quad (5.1)$$

Здесь  $d = 2R$  - диаметр шейки вала,  $G$ - внешняя нагрузка.

Из (4.5) и (5.1), получим

$$W^* = 2\zeta \quad (5.2)$$

6. Найдем геометрическое место линии центров  $\alpha$ -градусного радиально-го подшипника (подшипники, вкладыши которых имеют сбоку масляные карманы, уменьшающие дугу охвата шипа до  $\alpha < 180^\circ$ , называются  $\alpha$ -градусными центрально-нагруженными [8]). Так как расположение границы смазочного слоя, то есть угол  $\varphi_1$ - наклон радиальной плоскости, проведенный через начало несущего слоя, также угол  $\varphi_2$ - наклон радиальной плоскости, проведенный через конец несущего слоя, измеряются от места максимальной толщины смазочной пленки, то есть от линии смещения центров цапфы и подшипника, то становится понятным важность вопроса об определении геометрического места линии центров: угол  $\varphi_a$ - наклон линии центров к линии действия вектора внешней нагрузки.

Угол  $\varphi_a$ , который численно равен  $\Phi$  - фазовому углу, найдется из формулы (4.3) и (4.4), тогда

$$\operatorname{tg} \varphi_a = \frac{W_{\pi/2}^*}{W_0^*} = \frac{\frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{H^2 f(N, L, H)} - Q^* \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{H^3 f(N, L, H)}}{\frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{H^2 f(N, L, H)} - Q^* \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{H^3 f(N, L, H)}} \quad (6.1)$$

7. Структурная несимметричная жидкость характеризуется двумя безразмерными параметрами.

Параметр связи  $N$ , определенный формулой

$$N = \left( \frac{v_r}{v + v_r} \right)^{1/2}$$

характеризует связь уравнений поступательного и вращательного движения. Когда  $v_r \rightarrow 0$ , то получаем  $N \rightarrow 0$ , эти уравнения разделяются и уравнение поступательного движения сводится к классическому уравнению Навье-Стокса.

Второй важный безразмерный параметр  $L$  представляет собой отношение зазора между шипом и подшипником  $c$  к характерной материальной длине вещества  $l$ , то есть

$$L = \frac{c}{l}, \quad l = \left( \frac{c_a + c_d}{4v} \right)^{1/2}.$$

Это число характеризует взаимосвязь между геометрией системы и свойствами жидкости.

Параметр  $l$  имеет размерность длины и может быть отождествлен с некоторой характеристикой вещества, зависящей от размера молекул или зерен, введенных в смазку присадки, для улучшения условия работы подшипников. Нужно полагать, что эффекты несимметричности жидкости будут значительными, когда  $l$  велико, либо маломинимальная толщина слоя смазки. Если последняя считается малой, то чем больше  $l$ , тем ярче будут выражены эффекты несимметричности жидкости.

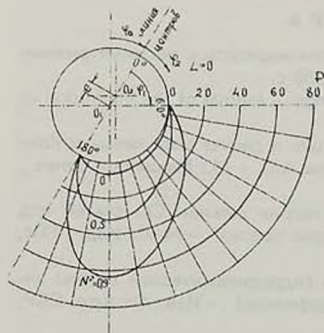
Выражения для давления (3.7) и несущей способности (4.5) сводятся к классическому решению при  $N \rightarrow 0$  или  $L \rightarrow \infty$

$$\lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ \text{или} \\ N \rightarrow 0}} P = P_{\text{кл}}, \quad \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ \text{или} \\ N \rightarrow 0}} W^* = W_{\text{кл}}^*$$

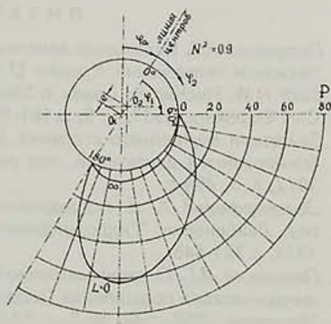
В третьем предельном случае  $L \rightarrow 0$  классическое решение умножается на  $1/(1-N^2)$ .

$$\lim_{L \rightarrow 0} P = P_{\text{кл}} \frac{1}{(1-N^2)}, \quad \lim_{L \rightarrow 0} W^* = W_{\text{кл}}^* \frac{1}{(1-N^2)}$$

На фиг. 2 показаны графики зависимости безразмерного давления от угла  $\varphi$  при различных значениях  $N^2$  и  $L=0$ , а на фиг. 3 показаны графики зависимости безразмерного давления от угла  $\varphi$  при различных значениях параметра  $L$  и  $N^2=0,9$ . Графики показывают, что снижение  $L$  соответствует возрастанию давления. Предельные случаи  $L \rightarrow 0$  и  $L \rightarrow \infty$  дают верхнюю и нижнюю границы гидродинамического давления. Во всех случаях давление оказалось больше рассчитанной по теории ньютоновской жидкости.



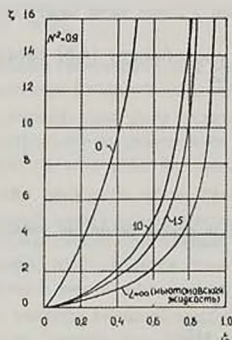
Фиг. 2.



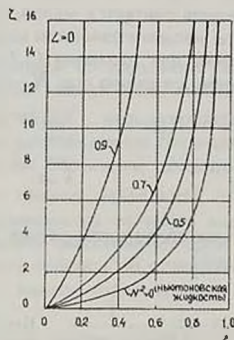
Фиг. 3.

На фиг.4 и 5 показаны графики зависимости коэффициента нагруженности цилиндрического радиального подшипника в зависимости от эксцентриситета  $\varepsilon$  при различных значениях параметра  $L$  и  $N$ . Предельные случаи  $L \rightarrow 0$  и  $L \rightarrow \infty$  дают, соответственно, верхнюю и нижнюю границу коэффициента грузоподъемности подшипника. Во всех случаях коэффициент грузоподъемности оказался больше рассчитанной по теории Навье-Стокса.

Фиг. 4 и 5 свидетельствуют о благоприятном влиянии использования при-  
садок для улучшения условий работы подшипников, в частности, для повышения несущей способности.



Фиг.4.



Фиг.5.

Для выявления влияния учета микроструктуры жидкости на величину  $\Phi_d$  был произведен численный эксперимент исследований формулы (6.1) при различных значениях параметра связи  $N$  и параметра взаимности между геометрией и свойствами жидкости  $L$ . Результаты численного эксперимента показывают, что учет микроструктуры жидкости мало влияет на геометрическое расположение линии центров на величину  $\Phi_d$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Петросян Л.Г. Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений.-Ереван: ЕГУ, 1984. 308 с.
2. Swift H.W. Fluctuating Loads in Sleeve Bearings. - Journal of the Institution of Civil Engineers, 1937, v. 5, p.161-195.
3. Двигатели внутреннего сгорания. Конструкция и расчет поршневых и комбинированных двигателей, под ред. Орлина А.С. - М.: Машиностроение, 1972, т. 3, 464 с.
4. Зоммерфельд А. К. гидродинамической теории смазки. Сб. статей под ред. Лейбензона. "Гидродинамическая теория смазки". - М.-Л.: Изд. ГТТИ, 1934, с.361-448.
5. Петросян Л.Г. О несимметричной модели гидродинамической теории цилиндрического подшипника (задача Зоммерфельда) . - Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1989, т.42, № 3, с. 54-64.
6. Prakach J., Sinha P. Lubrication Theory for Micropolar Fluids and Its Application to a Journal Bearing. - Int. J. Engng. Sci., 1975, vol.13, № 3, p.217-232.

7. *Петросян Л.Г.* К вопросу о масштабном эффекте в асимметричной гидромеханике. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1984, т. 37, № 3, с. 35-41.
8. *Коровчинский М.В.* Теоретические основы работы подшипников скольжения. - М.: Машгиз, 1959, 403 с.
9. *Токарь И.Я.* Проектирование и расчет опор трения. - М.: Машиностроение, 1971, 196 с.
10. *Тарг С.М.* Основные задачи теории ламинарных течений. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1951, 420 с.
11. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. -М.: Наука, 1978. 736 с
12. *Петросян Л.Г.* Элементарная гидродинамическая аналогия прокатки (моментная теория). - Проблема машиностроения, 1981, вып. 13, с. 38-42.
13. *Петросян Л.Г.* Моментная гидродинамическая теория прокатки. -Прикладная механика, 1982, т.18, № 4, с. 116-121.
14. *Гухман А.А.* Физические основы теплопередачи. - М.-Л.: Энергоиздат, 1934, т. 1, 314 с.

Ереванский Государственный Университет

Поступила в редакцию  
30.06.1993

## ДВА СПОСОБА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНО ДЛИТЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ГЛИНИСТЫХ ГРУНТОВ СДВИГУ

Месчян С.Р.

Ս. Ռ. Մեսչյան

Կաճային գերհեռոդների սահմանի իրարարևոյ դիմադրության որոշման երկու եղանակ

Նախկին եւ եւր կարարված փորձառական եկարգոյութուններով սրորդված է, որ կաճային գեր-  
հեռոդների սահմանի սրունդարը (ըստ ՀՈՍՏ 12248-78-ի)  $\tau_{f, st}$  մնացորդային  $\tau_r$  եւ եւրարքեւ  $\tau_{f, \infty}$  դի-  
մադրութունները իրար գործնականորեն եւականար են: Պարզված է  $\tau_{f, \infty}$ -ի որոշման եւնարարութուն-  
նը ինչպես սահմանի ծնայախրումների վերահսկման, այնպես էլ շաշափող լարումների վերահսկման  
եղանակներով եւ սահմանի մնացորդային դիմադրութունը կարված չէ եւնուշների վարձարվման  
սրարգոյութիւնը:

S. R. Meschyan

Two Methods for Determination of Extremely Long-Term Resistance of Clayey Soils to Shear

На основании ранее выполненных работ и новых экспериментальных исследований установлено практическое равенство стандартного (по ГОСТ 12248-78)  $\tau_{f, st}$ , остаточного  $\tau_r$  и предельно дли-  
тельного  $\tau_{f, \infty}$  сопротивлений глинистых грунтов сдвигу. Установлена возможность определения  $\tau_{f, \infty}$  испытанием образцов как в режиме контроля деформаций сдвига (по методу затухающих деформаций сдвига), так и контроля касательных напряжений различными постоянными скоростями кручения (сдвига) образцов и независимость остаточного сопротивления грунтов сдвигу  $\tau_r$  от скорости их испытания.

Длительное сопротивление сдвигу (изменяемость сопротивления сдвигу во времени)  $\tau_{f, st}$  и его наименьшее значение - предельно длительное сопротив-  
ление сдвигу  $\tau_{f, \infty}$  - являются одним из основных показателей реологических свойств глинистых грунтов. Эти показатели в лабораторных условиях опреде-  
ляются испытанием образцов как в режиме контроля деформации сдвига, так и в режиме контроля касательных напряжений, испытанием образцов при различных скоростях сдвига [8, 10].

Исследования длительного сопротивления сдвигу глинистых грунтов были начаты в начале тридцатых годов [10]. Интерес к этим исследованиям существенно возрос после публикации работы А. Казагранде и Уилсона [12], в которой, в частности, было установлено снижение (вследствие ползучести) до 80-40 % прочности грунта через 30 дней, определенной испытанием образцов в течение 15 минут. Аналогичные результаты были получены А.М.Скибицким [7], Р. Петерсоном [15], М.Н. Гольдштейном и С.С.Бабицкой

[2-4], С. С.Вяловым [1] и др.

Исследованиями Я.Л.Когана и А. И.Чухровой [5] было установлено снижение "мгновенной" прочности в начале опыта, а после - возрастание по мере увеличения длительности испытания образцов. Результаты, полученные автором этой статьи в 1960 г. [6,9], полностью совпали с результатами этих авторов. Было установлено также [9], что истинно-стандартное сопротивление глинистых грунтов сдвигу  $\tau_{f,ст}$ , определяемое в режиме контроля ступеней затухающих деформаций сдвига [11] (по ГОСТ 12248-78), является наименьшим значением их прочности - предельно длительным сопротивлением сдвигу  $\tau_{f,м}$ .

В 1964 г. М.Н.Гольдштейном и С.С.Бабицкой [3] и А.У.Скемптоном [13], испытанием образцов в режиме контроля касательных напряжений, было исследовано пиковое  $\tau_{f,0}$  и остаточное сопротивление глинистых грунтов сдвигу  $\tau_r$  [14]. Было установлено, что: 1)  $\tau_{f,0}$  зависит, а  $\tau_r$  не зависит от скорости испытания образцов; 2) остаточное сопротивление сдвигу  $\tau_r$  либо равно, либо не превышает его предельно длительного значения [3].

Таким образом, существуют два способа определения предельно длительного сопротивления глинистых грунтов сдвигу. Причем, если **первый способ** - способ определения истинно-стандартного сопротивления сдвигу  $\tau_{f,ст}$  при испытании образцов в режиме контроля ступеней затухающих деформаций сдвига (по ГОСТ 12248-78) проверен весьма длительными опытами образцов грунта на ползучесть, то этого нельзя сказать о **втором методе** - о способе определения остаточного сопротивления сдвигу  $\tau_r$ . К сожалению, не выполнено сопоставление результатов, получаемых по двум указанным способам.

Чтобы убедиться в возможности применения отмеченных выше двух методов для определения предельно длительного сопротивления глинистых грунтов сдвигу  $\tau_{f,м}$  и проверки справедливости равенства  $\tau_r \equiv \tau_{f,ст} \equiv \tau_{f,м}$ , нами выполнено специальное экспериментальное исследование\*, результаты которого излагаются ниже. Испытания образцов грунтов выполнены на приборах М-5 [10].

1. Осуществлено испытание суглинка нарушенного сложения за лабораторным номером 64-88 ( $\rho_s = 2650 \text{ кг/м}^3$ ;  $w_L = 0,388$ ;  $w_p = 0,247$ ;  $J_p = 0,141$ ) для определения сопротивления сдвигу по методам затухающих деформаций сдвига (ГОСТ 12248-78) и при различных постоянных скоростях кручения (сдвига): 0,2; 0,5 и 2,0 мм/мин.

Испытаны четыре серии образцов-близнецов, диаметром 101 мм, высотой 24 мм, в количестве 22 штук ( $\rho_0 = 1789 \text{ кг/м}^3$ ;  $w_0 = 0,264$ ) твердой консистенции ( $J_L = -0,12$ ) после месячного уплотнения под давлением  $\sigma_z = 0,2 \text{ МПа}$  ( $\rho_f = 1980 \text{ кг/м}^3$ ,  $w_f = 0,237$ ). Повторность опытов трехкратная.

Для испытания образцов-близнецов в режиме контроля касательных напряжений - при различных постоянных скоростях кручения (сдвига) был использован гибрид приборов М-5 и разрывной машины Р-5 Ивановского завода испытательных приборов.

Результаты испытания четырех серий образцов - близнецов приведены в табл. 1.

\* Испытания образцов выполнены С.Г.Айрояном и Т.Л.Петросяном под руководством и при участии автора.

Таблица 1

**Данные об остаточном  $\tau_r$  и стандартном  $\tau_{f,ст}$   
сопротивлениях сдвигу грунта 64-88**

| $\tau_r$ в МПа,<br>при скоростях сдвига (в мм/мин) |       |       |         | $\tau_{f,ст}$<br>МПа | $\frac{\tau_r}{\tau_{f,ст}}$ |
|----------------------------------------------------|-------|-------|---------|----------------------|------------------------------|
| 0,2                                                | 0,5   | 2,0   | среднее |                      |                              |
| 0,131                                              | 0,122 | 0,134 | 0,129   | 0,136                | 0,95                         |

В опытах, выполненных в режиме контроля касательных напряжений, деформация сдвига не сопровождалась снижением прочности грунта, т. е., при отсутствии  $\tau_{f,0}$ . Зависимость  $\tau - \gamma$  соответствовала кривой для пластичного грунта, установленной Д. Тролопом и К. Ченом [14]. Это вполне закономерно, поскольку испытывался грунт нарушенного сложения, который за месяц уплотнения под действием 0,2 МПа не мог приобрести значительную структурную прочность.

Результаты опытов полностью подтвердили правильность сделанного выше предположения о практическом равенстве стандартного  $\tau_{f,ст}$  и остаточного  $\tau_r$  сопротивлений грунта сдвигу. Опыты подтвердили также независимость  $\tau_r$  от скорости сдвига, установленного ранее другими исследователями [3].

2. Как и в пункте 1, осуществлено испытание суглинка 64-88 нарушенного сложения ( $\rho_0 = 1640 \text{ кг/м}^3$ ,  $w_0 = 0,125$ ,  $J_L = -0,22$ ) в режимах контроля деформации сдвига и контроля касательных напряжений при трех различных постоянных скоростях сдвига: 0,4; 2,0 и 4,0 мм/мин. Повторность опытов трехкратная.

В отличие от рассмотренного выше случая, испытывался грунт относительно небольшой плотности и твердой консистенции. Были рассмотрены: изменения сопротивления грунта сдвигу при более больших скоростях (4 мм/мин) и деформациях (до 30 мм и более) сдвига.

Результаты испытания образцов-близнецов приведены в табл. 2.

Таблица 2

**Данные о сопротивлениях грунта сдвигу,  
определенные в двух режимах испытания**

| $\tau_{f,ст}$<br>МПа | Сопротивления сдвигу $\tau_r$ в МПа<br>при скоростях сдвига (мм/мин) |       |       |       |         | $\frac{\tau_r}{\tau_{f,ст}}$ |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|---------|------------------------------|
|                      | дефор.<br>сдвига<br>в мм                                             | 0,4   | 2,0   | 4,0   | среднее |                              |
| 0,139                | 3                                                                    | 0,152 | 0,158 | -     | 0,155   | 0,90                         |
|                      | 10                                                                   | -     | -     | 0,154 | 0,154   | 0,90                         |
|                      | 12                                                                   | 0,146 | -     | -     | 0,146   | 0,95                         |
|                      | 16                                                                   | -     | 0,152 | 0,151 | 0,151   | 0,92                         |
|                      | 30                                                                   | 0,146 | 0,152 | 0,151 | 0,151   | 0,92                         |

Из данных табл. 2 следует, во-первых, что при деформациях 10 мм и выше имеет место пренебрежимо малое (до 3%) снижение сопротивления грунта сдвигу. Иначе говоря и в этом случае деформации сдвига практически протекали без снижения прочности грунта ( $\tau_{f,0} \cong \tau_r$ ) по причинам как изложенным выше, так и относительно небольших скоростей кручения (сдвига) при продолжительностях опытов; значительно отличных от мгновенного деформирования.

Примечательным является то, как и в рассмотренном в пункте 1 случае остаточное сопротивление грунта сдвигу  $\tau_r$  практически не зависит от скорости сдвига при широком диапазоне ее изменямости, хотя как продолжительность испытания, так и пути развития деформации сдвига различны. Это говорит о стабильности  $\tau_r$  и необходимости и целесообразности его использования при расчете оснований и сооружений из грунтовых материалов по первому предельному состоянию.

Полученные нами данные полностью согласуются с данными, полученными ранее М.Н.Гольдштейном и С.С.Бабицкой, А.У.Скемптоном и другими, а сопоставление  $\tau_r$  и  $\tau_{f,st}$  показывает их практическое равенство. Следовательно, является справедливым равенство  $\tau_{f,st} \cong \tau_r \cong \tau_{f,\infty}$ .

3. Осуществлено испытание на кручение рассмотренного выше грунта 64-88 нарушенного сложения в двух режимах. Образцы-близнецы ( $\rho_0 = 1785 \text{ кг/м}^3$ ;  $w_0 = 0,204$ ;  $J_L = -0,3$ ) твердой консистенции в количестве 18 штук уплотнены тремя сериями (по шесть образцов в каждой) под давлением 0,1; 0,3 и 0,5 МПа в течение 77 дней и испытаны на кручение (сдвиг) под действием этих же давлений. Повторность опытов трехкратная.

В каждой серии по три образца-близнеца испытаны по ГОСТ 12248-78 для определения  $\tau_{f,st}$ , а три - с постоянной скоростью среза (сдвига) 2 мм/мин для определения пикового  $\tau_{f,0}$  и остаточного  $\tau_r$  сопротивления грунта сдвигу.

Средние показатели данных испытания образцов приведены в табл. 3. Данные, приведенные в табл. 3, показывают, что пиковое сопротивление сдвигу  $\tau_{f,0}$  обнаружено только при испытании четырех образцов. Уменьшение  $\tau_{f,0}$  до его остаточного значения  $\tau_r$  составляет примерно 10%. В этом случае проявление  $\tau_{f,0}$  может быть объяснено как большой плотностью и продолжительностью предварительного уплотнения, так и разбросом опытных данных. Как будет показано ниже (см. п. 4) оно все же связано с разбросом опытных данных.

Таблица 3

**Данные о сопротивлении сдвигу грунта 64-88, определенные в трех различных состояниях**

| NN<br>серии | $\sigma_z$<br>МПа | $\tau_{f,st}$<br>МПа | $\tau_{f,0}$<br>МПа  | $\tau_r$<br>МПа | $\frac{\tau_{f,st}}{\tau_r}$ | Разбор<br>данных<br>определения<br>$\tau_r$ , % | Разбор<br>данных<br>определения<br>$\tau_{f,st}$ , % |
|-------------|-------------------|----------------------|----------------------|-----------------|------------------------------|-------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| 1           | 0,1               | 0,0905               | 0,087) <sup>x</sup>  | 0,0724          | 1,25                         | 12                                              | 26                                                   |
| 2           | 0,3               | 0,113                | 0,145) <sup>xx</sup> | 0,142           | 0,80                         | 8                                               | 13                                                   |
| 3           | 0,5               | 0,146                | 0,207                | 0,187           | 0,78                         | 20                                              | 12                                                   |

Примечание: )<sup>x</sup> - одно определение, )<sup>xx</sup> - два определения.

В рассмотренном случае расхождение между  $\tau_{f,ст}$  и  $\tau_r$  колеблется в ту или другую сторону до 25%, что обусловлено сложностью изготовления образцов-близнецов грунта твердой консистенции. Поскольку примерно в таких же пределах находятся разбросы данных определения  $\tau_{f,ст}$  и  $\tau_r$ , то можно принять, что они практически равны.

4. Осуществлено испытание двадцати образцов суглинка за номером 67-93 ( $\rho_s = 2640 \text{ кг/м}^3$ ;  $\rho_0 = 1910 \text{ кг/м}^3$ ;  $w_0 = 0,215$ ;  $w_L = 0,350$ ;  $w_p = 0,225$ ;  $J_p = 0,125$ ) твердой консистенции ( $J_L = -0,08$ ). Образцы предварительно уплотнены в течение 100 дней под давлением 0,8 МПа, а затем разгружены до 0,2 МПа (8 образцов), 0,4 МПа (6 образцов) и 0,6 МПа (6 образцов) и испытаны под этими давлениями по двум режимам, рассмотренным выше. При режиме контроля касательных напряжений испытания образцов выполнены двумя скоростями сдвига (кручения): 2,0 и 0,2 мм/мин). Повторность опытов двухкратная, а при  $\sigma_z = 0,2$  МПа и  $V = 2,0$  мм/мин - четырехкратная. Начальный коэффициент пористости образцов  $e_0 = 0,69$ , а после разгрузки до 0,2; 0,4 и 0,6 МПа соответственно:  $e_0(0,2 \text{ МПа}) = 0,621$ ,  $e_0(0,4 \text{ МПа}) = 0,625$  и  $e_0(0,6 \text{ МПа}) = 0,597$ .

Рассматриваемое экспериментальное исследование выполнено с целью установления влияния большой плотности грунта на изменяемость касательных напряжений до их предельного значения при двух данных значениях скоростей кручения (сдвига).

Результаты испытания переуплотненных образцов грунта 67-93 приведены в табл. 4. В этой таблице приведены также данные о деформациях сдвига, длительности и времени наступления остаточного сопротивления сдвигу испытанных образцов.

Таблица 4

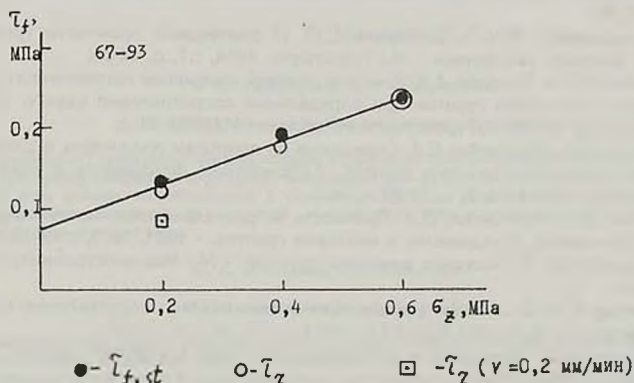
Данные испытания грунта 67-93 в двух режимах на кручение (сдвиг) образцов

| NN<br>серии | $\sigma_z$<br>МПа | $\tau_{f,ст}$<br>МПа | $\tau_r$ (МПа) при<br>скоростях<br>сдвига<br>(мм/мин). |         | $\tau_{r,ст}$<br>МПа | Общая<br>деформация<br>сдвига (мм)<br>при скоростях<br>(мм/мин) |     | Время (мин)<br>наступления<br>$\tau_r$ при<br>скоростях<br>сдвига<br>(мм/мин): |     | $\frac{\tau_{f,ст}}{\tau_{r,ст}}$ |
|-------------|-------------------|----------------------|--------------------------------------------------------|---------|----------------------|-----------------------------------------------------------------|-----|--------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------------------------------|
|             |                   |                      | 2,0                                                    | 0,2     |                      | 2,0                                                             | 0,2 | 2,0                                                                            | 0,2 |                                   |
| 1           | 0,2               | 0,137                | 0,125                                                  | (0,088) | 0,125                | 12                                                              | 7   | 6                                                                              | 30  | 1,1                               |
| 2           | 0,4               | 0,194                | 0,177                                                  | 0,181   | 0,179                | 16                                                              | 7   | 10                                                                             | 32  | 1,08                              |
| 3           | 0,6               | 0,236                | 0,293                                                  | 0,237   | 0,265                | 17                                                              | 16  | 12                                                                             | 38  | 0,89                              |

Опыты показали, что данные  $\tau_{f,ст}$  и  $\tau_r$ , определенные в двух режимах испытания, практически совпадают. Исключение составляет только при  $\tau_r = 0,088$  МПа и скорости сдвига:  $V = 0,2$  мм/мин, которое выпадает из общей закономерности зависимости ( $\tau_r \equiv \tau_{f,ст}$ ) -  $\sigma_z$  и поэтому исключено из рассмотрения. Полученные результаты опытов еще раз подтвердили справедливость равенства  $\tau_r = \tau_{f,ст}$  и возможность определения  $\tau_{f,ст}$  двумя, рас-

смаатриваемыми режимами (методами) испытания образцов грунта.

Еще раз приходится отметить, что для наших условий наиболее приемлемым является испытание образцов методом затухающих деформаций сдвига (по ГОСТ 12248-78) - в режиме контроля деформации сдвига. Несмотря на то, что определение  $\tau_{f,st} = \tau_{f,m}$  по этому методу требует значительно большего времени и более трудоемко, мы пока должны воспользоваться им, поскольку устройства для определения  $\tau_c$  в режиме контроля касательных напряжений, в странах СНГ промышленностью не выпускаются.



Фиг. 1

Опыты показали, что несмотря на большую плотность и продолжительность предварительного уплотнения образцов грунта нарушенного сложения, не был зафиксирован ни один случай проявления "пикового" сопротивления сдвигу. Это можно объяснить как недостаточной структурной прочностью грунта - отсутствием структурного сцепления  $c_c$  [8], так и относительно небольшими скоростями испытания образцов в режиме контроля касательных напряжений, не позволяющими определение "мгновенного" сопротивления сдвигу. Измерительная аппаратура использованного устройства не позволяла фиксацию касательных напряжений при более больших скоростях кручения. После устранения указанного недостатка нашего устройства мы сумеем проверить сказанное выше.

Отметим также, что при испытании образцов в режиме контроля касательных напряжений зафиксирована, кроме одного случая (при  $\sigma_z=0,2$  МПа,  $v=2$  мм/мин), контратация (уплотнение) от 0,1 до 0,3 мм. Эти данные в 2-3 раза выше данных, полученных при испытании образцов в режиме контроля деформации сдвига, совпадающие с полученными ранее автором результатов [10]. Они согласуются также с отсутствием "пиковой" прочности испытанных образцов.

Резюмируя изложенное выше, можно отметить, что для определения  $\tau_{f,\infty}$  глинистых грунтов можно пользоваться как результатами  $\tau_{f,st}$ , определяемого методом затухающих деформаций сдвига, так и  $\tau_c$ , определяемом в режиме контроля касательных напряжений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Вялов С. С., Пекарская Н. К., Максимьяк Р. В.* Изменение прочностных свойств грунта в процессе ползучести. // *Acta Academial Scientiarum Hungarica* - 1968.- Tomus 63(1-4), p. 377-438.
2. *Гольдштейн М. Н.* Ползучесть и длительная прочность глинистых грунтов. // Труды совещания по инженерно-геологическим свойствам горных пород и методам их изучения.-М.-1957. Том 11. -с.5-13.
3. *Гольдштейн М. Н. и Бабицкая С. С.* Расчет устойчивости откосов с учетом ползучести сдвига. // *Вопросы геотехники.*- М.: Транспорт.-1964, № 7., с.83-95.
4. *Гольдштейн М.Н. и Бабицкая С.С.* О длительной прочности грунтов. // *Вопросы геотехники .-* М.: Транспорт.- 1964, т.7, с. 44-56.
5. *Коган Я.Л. и Чухрова А.И.* Влияние условий изменения напряженного состояния глинистых грунтов при определении сопротивления сдвигу. Сообщение № 153 ВНИИ транспортного стр-ва. - М.:1959, 46 с.
6. *Коган Я.Л., Иоселевич В.А.* Совещание по вопросам ползучести и длительной прочности глинистых грунтов. // *Основания, фундаменты и механика грунтов.* - 1961, № 2, с. 27-29.
7. *Коган Я.Л., Иоселевич В.А.* Прочность и "длительная прочность" грунтов. // *Основания, фундаменты и механика грунтов.* - 1961, № 5, с.19-20.
8. *Маслов Н.Н.* Прикладная механика грунтов. - М.: Машиностроение, 1949. 329с.
9. *Месчян С.Р.* О влиянии длительности испытания на сопротивление сдвигу грунтов. // *Докл. АН Арм. ССР*, 1961, т. 32, № 1, с. 31-36.
10. *Месчян С.Р.* Начальная и длительная прочность глинистых грунтов .- М.: Недра, 1978. 207 с.
11. Руководство по лабораторному определению физико-механических характеристик грунтов при устройстве оснований сооружений.- М.: Госстройиздат, 1956. 76 с.
12. *Casagrande A., Wilson S.D.* Effekt of Loading on the Stregs of Clays and Shales at Constant Water Content. - *Geotechnique.*- 1951,2, p. 251-263.
13. *Skempton A.W.* Long-term Stability of Clay Siopes. - *Geotechnique.* - 1964, v.14, № 2, p. 77-101.
14. *Trollop D., Chan C.* Soil Structure and Step-strain Phenomenon. - *Proc. Amer. Sos. Civil Eng-rs.*1960, v.86, sm.2, pt.1, paper 2431, p. 1-99.
15. *Peterson R.* Discussion. *Proceed. 3 Internat. Conf. Soil Mech. and Found Eng.*, Zurich. 1953, v.3, p. 211.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
14.07.1994

## КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ШАРОВОГО СЕКТОРА

Геворкян Г. З., Макарян В. С.

Գ. Զ. Գևորգյան, Վ. Ս. Մակարյան

Գ-նդային սեկտորի համար կոնտակտային խնդիր

Դիտարկված է առաձգական գնդային սեկտորի և կոշտ ուղղիկ կոնի կոնտակտային խնդիրը: Գնդի և կոնի զազարները համընկնում են: Գնդային մակերևույթի վրա պրված են լարումները: Կոնուսով և խնդրի փակ լուծումը, ուսումնասիրված է լարվածային վիճակը, բացանայրված են լարումների եզակիությունները, պրված են արարքի բևեռավորման ձևեր, որոնց պնդում լարումների կոպրակումները վերաբերում են:

G. Z. Gevorkian, V. S. Makarian

The Contact Problem for a Sector of a Sphere

Рассматривается контакт упругого шарового сектора с жестким гладким конусом. Вершина конуса совпадает с центром шара. На сферической части поверхности заданы напряжения. Построено замкнутое решение задачи, исследовано напряженное состояние, выделены особенности напряжений, найдены формы внешних нагрузок при которых концентрация напряжений исчезает.

Построению общих решений дифференциальных уравнений теории упругости в сферических координатах, решению конкретных задач и обзору литературы посвящены [1-8].

Плоская задача для кругового сектора с жестким гладким клином была рассмотрена ранее в [9].

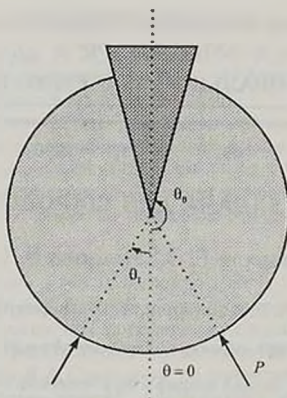
В сферической системе координат дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для осесимметричной задачи без учета массовых сил имеют вид

$$(\lambda + 2\mu)r \sin\theta \frac{\partial e}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega \sin\theta) = 0$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - 2\mu \frac{\partial}{\partial r} (r\omega) = 0 \quad (1)$$

$$e = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (U_\theta \sin\theta)$$

$$\omega = \frac{1}{2r} \left[ \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r U_\theta) \right]$$



фиг. 1

где  $\lambda$ ,  $\mu$  - коэффициенты Ламе.

Общее решение уравнений (1) для конуса с произвольным углом раствора  $\theta_0$  представляется в виде [4,5]:

$$U_r(r, \theta) = u_0(r, \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(r) P_{\nu_k}(\cos \theta) + \int_0^{\infty} f_1(\theta, \gamma) T_1(r, \gamma) d\gamma$$

$$U_{\theta}(r, \theta) = v_0(r, \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(r) P_{\nu_k}^1(\cos \theta) + \int_0^{\infty} f_2(\theta, \gamma) T_2(r, \gamma) d\gamma$$

где

$$\begin{aligned} u_k(r) &= r^{\nu_k+1} A_k (\nu_k + 1) \left[ \nu_k - (\nu_k + 2)a \right] + \nu_k B_k r^{\nu_k-1} + \\ &\quad + r^{-\nu_k} C_k \nu_k \left[ \nu_k + 1 - (\nu_k - 1)a \right] + D_k (\nu_k + 1) r^{-\nu_k-2} \\ v_k(r) &= r^{\nu_k+1} A_k \left[ \nu_k + 3 - (\nu_k + 1)a \right] + B_k r^{\nu_k-1} + \\ &\quad + r^{-\nu_k} C_k \left[ -\nu_k + 2 + \nu_k a \right] - D_k r^{-\nu_k-2}; \quad (\nu_k > 0) \end{aligned} \quad (2)$$

$$f_1(\theta) = A(\gamma) \cos \theta P_m(\cos \theta) + B(\gamma) \sin \theta P_m^1(\cos \theta)$$

$$f_2(\theta) = C(\gamma) \sin \theta P_m(\cos \theta) + D(\gamma) \cos \theta P_m^1(\cos \theta)$$

$$T_k(r) = r^{\alpha} (E_k \sin \gamma t + F_k \cos \gamma t), \quad k = 1, 2$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad m = -\frac{1}{2} + i\gamma, \quad t = \ln \frac{R}{r}$$

В случае конуса, содержащего вершину  $r = 0$ , постоянные  $C_k$ ,  $D_k$  берем

равными нулю. В случае же полой сферы (усеченного конуса) эти постоянные сохраняются.

$v_k$  определяются из трансцендентного уравнения, которое зависит от граничных условий на конической поверхности.

$u_0(r, \theta)$ ,  $v_0(r, \theta)$  - частные решения, вид которых зависит от типа граничных функций.

Напряжения определяются через перемещения по закону Гука.

Граничные условия в рассматриваемом случае следующие:

$$\begin{aligned} U_0(r, \theta_0) &= \alpha_0 r, \quad \tau_{r\theta}(r, \theta_0) = 0 \quad (0 \leq r \leq R) \\ \sigma_r(R, \theta) &= f(\theta), \quad \tau_{r\theta}(R, \theta) = g(\theta) \quad (0 \leq \theta \leq \theta_0) \end{aligned} \quad (3)$$

Если взять уравнение, определяющее  $v_k$  в виде  $P_k^1(\cos \theta_0) = 0$ , то условие для касательного напряжения на конической поверхности удовлетворяется тождественно, а условие  $U_0(r, \theta_0) = \alpha_0 r$  в данном виде позволяет вычислить интегралы в выражениях для перемещений и напряжений.

В этом случае для перемещений получим:

$$\begin{aligned} U_r(r, \theta) &= A_0 r + \frac{2}{3} \alpha_0 a r \left[ h_2(\theta) - h_0(\theta) + \operatorname{ctg} \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \ln r \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} u_k(r) P_{v_k}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (4)$$

$$U_\theta(r, \theta) = \alpha_0 r \left[ \frac{a}{3} h_2'(\theta) + \left( 1 - \frac{a}{3} \right) h_0'(\theta) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(r) P_{v_k}'(\cos \theta)$$

где

$$h_0(\theta) = -\operatorname{ctg} \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \left[ 1 + 2 \ln \left( \cos \frac{\theta}{2} \right) + 2 \operatorname{ctg}^2 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \ln \left( \cos \frac{\theta_0}{2} \right) \right]$$

$$h_2(\theta) = \frac{1}{6} \operatorname{ctg} \left( \frac{\theta_0}{2} \right) - \frac{3 \cos 2\theta + 1}{6 \sin 2\theta_0}$$

Для компонент напряжений получим формулы

$$\frac{\sigma_r(r, \theta)}{\mu} = S_0 + \frac{4}{3} \alpha_0 a \operatorname{ctg} \left( \frac{\theta_0}{2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r) P_{v_k}(\cos \theta)$$

$$\frac{\sigma_\theta(r, \theta)}{\mu} = S_0 + 2\alpha_0 \left[ \frac{a}{3} h_2''(\theta) + \left( 1 - \frac{a}{3} \right) h_0''(\theta) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ T_{1k}(r) P_{\nu_k}(\cos\theta) + T_{2k}(r) P_{\nu_k}^1(\cos\theta) \right] \\
& \frac{\sigma_{\varphi}(r, \theta)}{\mu} = S_0 + 2\alpha_0 \operatorname{ctg} \theta \left[ \frac{d}{3} h_2'(\theta) + \left( 1 - \frac{d}{3} \right) h_0'(\theta) \right] \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ F_{1k}(r) P_{\nu_k}(\cos\theta) + F_{2k}(r) P_{\nu_k}^1(\cos\theta) \right] \quad (5) \\
& \frac{\tau_{r\varphi}(r, \theta)}{\mu} = \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{3} \left[ h_2'(\theta) - h_0'(\theta) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k(r) P_{\nu_k}^1(\cos\theta)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
S_0 &= \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} A_0 + \frac{2\alpha_0(1+\nu)}{3(1-\nu)} \operatorname{ctg} \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \ln r + \\
& + \frac{2\alpha_0}{3(1-\nu)} \left[ 2(1-2\nu) h_2(\theta) + (1+\nu) h_0(\theta) + \frac{\nu(4-5\nu)}{1-2\nu} \operatorname{ctg} \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \right] \\
R_k(r) &= 2u_k'(r) - \frac{2\nu}{1-\nu} e_k(r), \quad \tau_k(r) = v_k'(r) + \frac{u_k(r) - v_k(r)}{r} \\
T_{1k}(r) &= \frac{2u_k(r)}{r} - 2n_1 \frac{v_k(r)}{r} - \frac{2\nu}{1-\nu} e_k(r), \quad T_{2k}(r) = -2v_k(r) \frac{\operatorname{ctg}(\theta)}{r} \\
F_{1k}(r) &= \frac{2u_k(r)}{r} - \frac{2\nu}{1-\nu} e_k(r), \quad F_{2k}(r) = 2v_k(r) \frac{\operatorname{ctg}(\theta)}{r} \quad (6) \\
e_k(r) &= A_k(\nu_k + 1)(2\nu_k + 3)r^{\nu_k}, \quad n_1 = \nu_k(\nu_k + 1)
\end{aligned}$$

Удовлетворяя граничным условиям на сферической поверхности и решая полученные уравнения относительно  $A_k$ ,  $B_k$ , для постоянных входящих в решение задачи получим

$$\begin{aligned}
A_0 &= -\frac{\alpha_0}{3} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} + \frac{(1-2\nu)}{2\mu(1+\nu)} f_0 \\
\Delta_k A_k &= \frac{1-\nu}{2\mu} (\nu_k g_k - f_k) + \frac{\alpha_0 \Omega_k (1+\nu+\nu\nu_k)}{n_1(\nu_k+3)} \\
(\nu_k-1)\Delta_k B_k &= \frac{f_k}{4\mu} \left[ 2\nu-2+(\nu_k+1)^2 \right] + \frac{g_k(\nu_k+1)}{4\mu} \left[ 2\nu-(\nu_k+1)(\nu_k-2) \right] -
\end{aligned}$$

$$-\frac{\alpha_0 \Omega_k v_k}{2(1-v)n_1(n_1-6)} \left[ (v_k^2-1)(1+v+vv_k) - 2(1-v^2)(3+v_k) \right]$$

где

$$\Delta_k = v_k^2 + v_k + 1 + v(2v_k + 1), \quad (1 - \cos \theta_0) f_0 = \int_0^{\theta_0} f(\theta) \sin \theta d\theta$$

$$g_k \omega_k = n_1 \int_0^{\theta_0} g(\theta) P_{v_k}^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad f_k \omega_k = \int_0^{\theta_0} f(\theta) P_{v_k}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (7)$$

$$\omega_k = \int_0^{\theta_0} P_{v_k}^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta = - \frac{\sin \theta_0 P_{v_k}(\cos \theta_0)}{2v_k + 1} \frac{\partial P_{v_k}^1(\cos \theta_0)}{\partial v_k}$$

$$\Omega_k = -\sin \theta_0 P_{v_k}(\cos \theta_0) / \omega_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

В табл. 1 приведены значения  $v_k$  и  $\omega_k$  для некоторых значений  $\theta_0$ .

Таблица 1

| $\theta_0$ | k          | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       |
|------------|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\pi/6$    | $v_k$      | 6.83540 | 12.9083 | 18.9364 | 24.9514 | 30.9606 | 36.9669 | 42.9715 | 48.9749 |
|            | $\omega_k$ | 0.02224 | 0.01235 | 0.00855 | 0.00654 | 0.00529 | 0.00444 | 0.00383 | 0.00337 |
| $\pi/4$    | $v_k$      | 4.40533 | 8.44711 | 12.4633 | 16.4719 | 20.4773 | 24.4809 | 28.4835 | 32.4855 |
|            | $\omega_k$ | 0.05003 | 0.02778 | 0.01923 | 0.01471 | 0.01190 | 0.01000 | 0.00862 | 0.00758 |
| $\pi/3$    | $v_k$      | 3.19569 | 6.21953 | 9.22885 | 12.2338 | 15.2369 | 18.2390 | 21.2405 | 24.2416 |
|            | $\omega_k$ | 0.08894 | 0.04939 | 0.03419 | 0.02614 | 0.02116 | 0.01778 | 0.01533 | 0.01347 |
| $\pi/2$    | $v_k$      | 2.      | 4.      | 6.      | 8.      | 10.     | 12.     | 14.     | 16.     |
|            | $\omega_k$ | 0.20000 | 0.11111 | 0.07692 | 0.05882 | 0.04761 | 0.03999 | 0.03448 | 0.03030 |
| $2\pi/3$   | $v_k$      | 1.42412 | 2.90434 | 4.39574 | 5.89100 | 7.38801 | 8.88596 | 10.3845 | 11.8833 |
|            | $\omega_k$ | 0.35408 | 0.19741 | 0.13673 | 0.10457 | 0.08465 | 0.07111 | 0.06130 | 0.05387 |
| $3\pi/4$   | $v_k$      | 1.24508 | 2.54899 | 3.86854 | 5.19403 | 6.52234 | 7.85219 | 9.18298 | 10.5144 |
|            | $\omega_k$ | 0.44490 | 0.24952 | 0.17298 | 0.13233 | 0.10713 | 0.09000 | 0.07758 | 0.06818 |
| $5\pi/6$   | $v_k$      | 1.11565 | 2.27797 | 3.45796 | 4.64583 | 5.83779 | 7.03210 | 8.22787 | 9.42462 |
|            | $\omega_k$ | 0.53975 | 0.30671 | 0.21324 | 0.16326 | 0.13222 | 0.11109 | 0.09577 | 0.08417 |

Для корней с большими индексами можно использовать асимптотическую формулу [4]

$$\left(v_k + \frac{1}{2}\right) \theta_0 = \left(k + \frac{1}{4}\right) \pi - \frac{3 \theta_0 \operatorname{arctg} \theta_0}{2 \pi (4k+1)}$$

или рекуррентное соотношение

$$v_{k+1} = v_k + \pi/\theta_0 + O(v_k^3), \quad k > 8$$

Из выражений для напряжений видно, что особенности напряжений в

центре шара обусловлены наличием логарифмического слагаемого в свободных членах и первыми членами рядов, содержащих  $r^{\nu_1-2}$ , которая фигурирует во всех напряжениях при коэффициенте  $B_1$ . Анализ и численные результаты табл.2 показывают, что первый корень уравнения  $P^1(\cos\theta) = 0$ ,  $\nu_1 \geq 2$  при  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , а при  $\pi/2 < \theta_0 < \pi$   $1 < \nu_1 < 2$ . То есть степенная особенность в напряжениях проявляется, когда упругая часть больше полушара. В табл. 2 приведены значения первых корней  $\nu_1$  трансцендентного уравнения, определяющие степень особенностей напряжений при вершине конуса в зависимости от  $\theta_0$ . Вычисления проведены начиная с  $\theta_0 = 2.5^\circ$  с шагом  $2.5^\circ$  ( $\pi/72$ ). Таблица составлена по возрастанию  $\theta_0$  по строкам

Таблица 2

|        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 87.318 | 43.411 | 28.776 | 21.460 | 17.070 | 14.145 | 12.055 | 10.489 |
| 9.270  | 8.296  | 7.499  | 6.835  | 6.274  | 5.793  | 5.376  | 5.012  |
| 4.691  | 4.405  | 4.150  | 3.921  | 3.713  | 3.525  | 3.353  | 3.196  |
| 3.051  | 2.918  | 2.795  | 2.680  | 2.574  | 2.475  | 2.383  | 2.296  |
| 2.215  | 2.139  | 2.067  | 2      | 1.936  | 1.876  | 1.820  | 1.766  |
| 1.715  | 1.667  | 1.621  | 1.577  | 1.536  | 1.497  | 1.460  | 1.424  |
| 1.390  | 1.358  | 1.328  | 1.299  | 1.271  | 1.245  | 1.220  | 1.197  |
| 1.175  | 1.154  | 1.134  | 1.116  | 1.098  | 1.083  | 1.068  | 1.054  |
| 1.042  | 1.032  | 1.022  | 1.015  | 1.008  | 1.004  | 1.001  | 1      |

Следовательно, при  $r \rightarrow 0$  напряжения можно представить асимптотическими формулами

$$\frac{\sigma_r^*(r, \theta)}{\mu} = R_0^* + R_1^* \ln r + R_2^* r^{\nu_1-2}, \quad \frac{\sigma_\theta^*(r, \theta)}{\mu} = T_0^* + T_1^* \ln r + T_2^* r^{\nu_1-2}$$

$$\frac{\sigma_\varphi^*(r, \theta)}{\mu} = F_0^* + F_1^* \ln r + F_2^* r^{\nu_1-2}, \quad \frac{\tau_{r\theta}^*(r, \theta)}{\mu} = \tau_0^* + \tau_1^* \ln r + \tau_2^* r^{\nu_1-2}$$

где

$$R_0^* = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} A_0 + \frac{2\alpha_0(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} + \frac{2\alpha_0}{3(1-\nu)} [(1-2\nu)h_2(\theta) - (1+\nu)h_0(\theta)]$$

$$T_0^* = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} A_0 + 2\alpha_0 \nu \left[ \frac{1}{3(1-\nu)} + \frac{1}{1-2\nu} \right] \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} +$$

$$+ \frac{\alpha_0}{3(1-\nu)} [2(1-2\nu)h_2(\theta) - 2(1+\nu)h_0(\theta) + (1-2\nu)h_2''(\theta) + (5-4\nu)h_0''(\theta)]$$

$$F_0^* = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} A_0 + 2\alpha_0 \nu \left[ \frac{1}{3(1-\nu)} + \frac{1}{1-2\nu} \right] \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} +$$

$$+ \frac{\alpha_0}{3(1-\nu)} \left[ 2(1-2\nu) h_2(\theta) - 2(1+\nu) h_0(\theta) + \left[ (1-2\nu) h_2'(\theta) + (5-4\nu) h_0'(\theta) \right] \operatorname{ctg} \theta \right]$$

$$\tau_0^* = \frac{\alpha_0(1-2\nu)}{3(1-\nu)} \left[ h_2'(\theta) - h_0'(\theta) \right]$$

$$R_1^* = T_1^* = F_1^* = \frac{\alpha_n(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2}, \quad \tau_1^* = 0$$

$$R_2^* = -f_1 \nu_1 (\nu_1 - 1) P_{\nu_1}(\cos \theta), \quad T_2^* = -\left[ \nu_1^* P_{\nu_1}(\cos \theta) + \operatorname{ctg} \theta P_{\nu_1}^1(\cos \theta) \right] f_1$$

$$F_2^* = \left[ \nu_1 P_{\nu_1}(\cos \theta) + \operatorname{ctg} \theta P_{\nu_1}^1(\cos \theta) \right] f_1, \quad \tau_2^* = -2f_1 (\nu_1 - 1) P_{\nu_1}^1(\cos \theta)$$

Распределение напряжений и значения коэффициентов особенностей напряжений зависят от формы внешних нагрузок и от области их приложения.

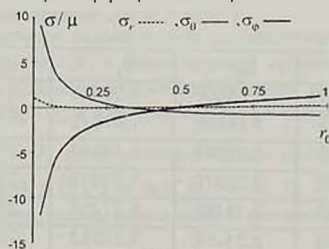
На фиг. 2-5 приведены графики распределения напряжений на поверхности контакта шара и конуса  $\theta = \theta_0 = 5\pi/6$ . Во всех последующих графиках

$$\sigma_r \text{ --- }, \sigma_\theta \text{ ———— }, \sigma_\varphi \text{ —————}$$

Рассмотрим несколько вариантов нагрузок:

1. Внешние нагрузки отсутствуют  $f(\theta) = g(\theta) = 0$ ,  $\alpha_0 = 1$ .

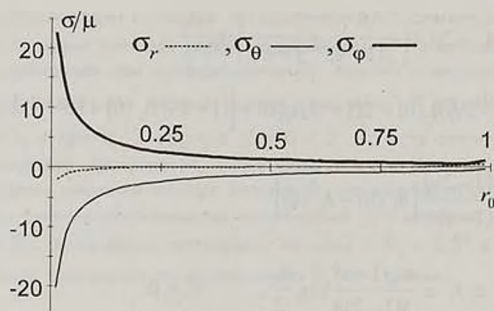
В этом случае напряжения возникают из-за нормальных перемещений, заданных на берегах конической выемки, имеют как логарифмическую, так и степенную особенности, коэффициент которой зависит линейно от  $\alpha_0$ .



фиг. 2

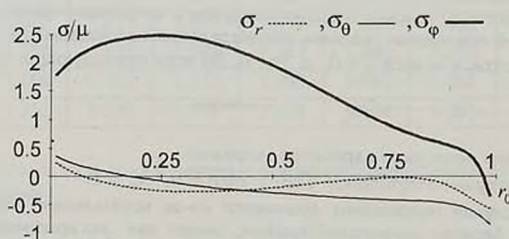
2. Сосредоточенная сила при  $\theta_0 = 0$ ,  $f(\theta) = \frac{\mu \delta(\theta)}{2\pi \sin \theta}$ ,  $g(\theta) = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$

причем определяется из условия  $\frac{P}{\mu R^2} = \frac{2\pi}{\mu} \int_0^{\theta_0} (R, \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta = 1$ , где  $P$  — равнодействующая внешних нагрузок по оси  $\theta = 0$ .



фиг. 3

3. Нормальные силы, распределенные по окружности  $\theta = \theta_1$ , где  $\theta_1$  определяется из уравнения  $P_v(\cos \theta_1) = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ ,  $f(\theta) = \mu \delta(\theta_1 - \theta) / \pi \sin 2\theta_1$ ,  $g(\theta) = 0$ ,  $P / \mu R^2 = 1$



фиг. 4

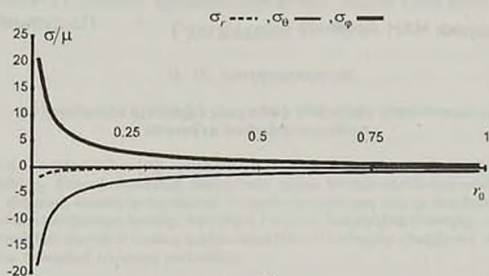
Таблица 3

| $\theta_0$ | $\theta_1$ | $\theta_0$ | $\theta_1$ | $\theta_0$ | $\theta_1$ |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1.61443    | 0.979878   | 1.65806    | 1.00425    | 1.7017     | 1.02842    |
| 1.74533    | 1.05238    | 1.78896    | 1.07612    | 1.8326     | 1.09962    |
| 1.87623    | 1.12288    | 1.91986    | 1.14588    | 1.9635     | 1.16861    |
| 2.00713    | 1.19105    | 2.05076    | 1.21319    | 2.0944     | 1.235      |
| 2.13803    | 1.25648    | 2.18166    | 1.27759    | 2.22529    | 1.29832    |
| 2.26893    | 1.31864    | 2.31256    | 1.33853    | 2.35619    | 1.35796    |
| 2.39983    | 1.37689    | 2.44346    | 1.3953     | 2.48709    | 1.41314    |
| 2.53073    | 1.43037    | 2.57436    | 1.44696    | 2.61799    | 1.46284    |
| 2.66163    | 1.47796    | 2.70526    | 1.49227    | 2.74889    | 1.50568    |
| 2.79253    | 1.51813    | 2.83616    | 1.52952    | 2.87979    | 1.53977    |
| 2.92343    | 1.54876    | 2.96706    | 1.55639    | 3.01069    | 1.56253    |
| 3.05433    | 1.56706    | 3.09796    | 1.56985    |            |            |

В табл.3 приведены значения  $\theta_1$  решений  $P_{\nu_1}(\cos\theta) = 0$ , при которых исчезают степенные особенности в напряжениях при  $r \rightarrow 0$ , для различных  $\theta_0$ .

4. Нормальные силы, распределенные по поверхности  $0 \leq \theta \leq \theta_0/2$ ,

$$f(\theta) = \frac{2\mu H(\theta - \theta_1)}{\pi(1 - \cos 2\theta_1)}, \quad g(\theta) = 0, \quad \alpha_0 = 0, \quad P/\mu R^2 = 1, \quad H(\theta_1 - \theta) - \text{функция Хевисайда.}$$



фиг 5.

5. При  $\alpha_0 = 0$  и равномерном нагружении сферической поверхности нормальными сжимающими силами, касательные напряжения всюду исчезают, нормальные напряжения  $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_\phi$  - всюду внутри тела и мы имеем дело с всесторонним сжатием.

Интересно сравнить эти результаты с результатами [9]. Простые формулы в плоском случае давали возможность сделать качественные выводы относительно поведения напряжений, их особенностей и свойствах внешних нагрузок, устраняющих степенные особенности напряжений (коэффициент особенности в центре сектора превращается в нуль).

Когда внешняя нагрузка задана в виде сосредоточенных нормальных сил, приложенных по линии  $\theta = \theta_1$ , в обоих случаях существуют значения  $\theta_1$  при которых степенная особенность исчезает во всех напряжениях. В случае плоской задачи  $\theta_1 = \theta_0/2$ , а в осесимметричном случае  $\theta_1$  определяется из уравнения  $P_{\nu_1}(\cos\theta) = 0$ , где  $\nu_1$  - первый корень уравнения  $P_{\nu_1}^1(\cos\theta_0) = 0$ .

Причем, значения  $\theta_1 > \theta_0/2$  и при  $\theta_0 \rightarrow \pi$ ,  $\theta_1 \rightarrow \theta_0/2$ . Существуют и другие виды нагружения, также устраняющие степенные особенности напряжений.

### Л и т е р а т у р а

1. Ляв А. Математическая теория упругости.-М.: Физматгиз. 1970 .
2. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости.- М.: 1955.
3. Соляник-Красса К. В. Осесимметричная задача теории упругости.-М.: Стройиздат, 1987. 337 с.
4. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел.- Киев: Наукова Думка, 1978.
5. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространствен-

ных задачах теории упругости.-Киев: Наукова думка, 1979.

6. *Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Баблюян А. А.* О вдавливании жесткого штампа в упругую сферу.-ПММ, 1964, т. 28, в. 6, 1101-1105.
7. *Нуллер Б. М.* Контактная задача для упругого бесконечного конуса.-ПММ, 1970, т. 34, в. 2, с. 339-348.
8. *Keer L. M., Parihar K. S.* Elastic Stress Singularities at Conical Inclusions. Int. Journal of Solids and Structures. 1978, vol. 14, №4, 261-263.
9. *Макарян В. С., Саркисян В. Г.* Об одной граничной задаче для упругого кругового сектора. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1990, т. 43, № 2, 3-11.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
10.01.1996

# ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Գուլգազյան Դ. Ր.

Գ. Ռ. Դուլգազարյան

Ոչ շրջանային զլանային թաղանթի սեփական տատանումների  
մոտավոր հաճախությունները

Դիսկրիվում է երբեքում չափելի պայմաններով, ոչ շրջանային փակ զլանային թաղանթի սեփական տատանումները: Տեղափոխումների նկարմամբ տված հավասարումների համակարգը ընթրում է տեսականական վեկտորի նորմալ կոմպոնենտի նկարմամբ ութերորդ կարգի մեկ հավասարման: Մոմենտային եւ անոմենտ խնդիրների համար, օգտվելով Բուբնով-Գալերկինի միտողից, ստացվում են մոտավոր հաճախությունների որոշման համար հավասարումներ: Մասնավոր դեպքերում մոտավոր հաճախությունների համար ստացվում են պարզ բանաձևեր:

G. R. Gulgazarian

The Approximate Free Frequencies of Noncircular Cylindrical Shells

Рассматриваются собственные колебания замкнутой некруговой цилиндрической оболочки с условием Навье на торцах. Система уравнений в перемещениях сведена к одному уравнению восьмого порядка относительно нормальной компоненты вектора перемещения. Для моментной и безмоментной задачи, используя метод Бубнова-Галёркина, получены уравнения для определения приближенных собственных частот. В частных случаях получены простые формулы для приближенных собственных частот.

**ВВЕДЕНИЕ.** В соответствии с технической теорией, определение частот тонкой упругой оболочки рассматриваемого типа приводит к задаче на собственные значения вида [1].

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - \frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\sigma}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} = \lambda u_1 \\ & -\frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} - \frac{1+\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_3}{R} \right) = \lambda u_2 \end{aligned} \quad (0.1)$$

$$\mu^4 \Delta u_3 - \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{\sigma}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{u_3}{R^2} = \lambda u_3,$$

$$u_2|_{0,l} = u_3|_{0,l} = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \sigma \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \sigma \frac{u_3}{R} \Big|_{0,l} = \sigma \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_2}{R} \right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \sigma \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} \Big|_{0,l} = 0, \quad \frac{\partial' u_i(\alpha, 0)}{\partial \beta'} = \frac{\partial' u_i(\alpha, s)}{\partial \beta'} \quad (0.2)$$

$$\frac{\partial' u_i(\alpha, 0)}{\partial \beta'} = \frac{\partial' u_i(\alpha, s)}{\partial \beta'}, \quad i=1,2, \quad j=0,1, \quad r=0,1,2,3$$

Здесь  $u_1, u_2, u_3$  - проекции смещения точки срединной поверхности;  $l$  - длина образующей;  $S$  - полная длина направляющей кривой;  $\alpha$  и  $\beta$  - ортогональные координаты точки срединной поверхности:  $0 \leq \alpha \leq l$ ;  $0 \leq \beta \leq s$ ;  $\mu^4 = h^2 / 12$  ( $h$  - относительная толщина оболочки);  $R = R(\beta)$  - радиус кривизны направляющей, который предполагается периодической с периодом  $S$ .  $\Delta$  - оператор Лапласа. Спектральный параметр  $\lambda$  связан с собственной частотой  $\omega$  формулой

$$\lambda = (1 - \sigma^2) \omega^2 \rho / E \quad (0.3)$$

где  $\rho$  - плотность,  $E$  - модуль Юнга,  $\sigma$  - коэффициент Пуассона. Задачи (0.1), (0.2) в предположении, что изменяемость напряженного и деформированного состояния велика, рассмотрены в [2].

Введя в рассмотрение вектор-функцию  $f(\alpha, \beta) = (u_1, u_2, u_3)$ , можно систему (0.1) записать сокращенно в виде

$$(\mu^4 N_0 + L_0) f = \lambda f \quad (0.4)$$

Если ввести скалярное произведение по формуле

$$(f^{(1)}, f^{(2)}) = \int_0^l \int_0^s (u_1^{(1)} u_1^{(2)} + u_2^{(1)} u_2^{(2)} + u_3^{(1)} u_3^{(2)}) d\alpha d\beta \quad (0.5)$$

то, как нетрудно проверить, задача (0.1), (0.2) в соответствующем гильбертовом пространстве порождает самосопряженный положительно определенный оператор. При  $\mu \neq 0$  задача (0.1), (0.2) имеет дискретный спектр. Заметим, что оператор  $\mu^4 N + L$  является эллиптическим в смысле Дуглиса-Ниренберга [3].

Исходя из вышеуказанных свойств задачи (0.1), (0.2), можно доказать, что приближенные собственные числа задачи (0.1), (0.2), построенные по методу Бубнова-Галёркина, сходятся к соответствующим точным значениям этих чисел [4], с. 273.

Положим в (0.4)  $\mu = 0$ . Так, возникающая вырожденная (безмоментная) система

$$L_0 f = \lambda f \quad (0.6)$$

с граничными условиями

$$u_2|_{0,l} = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \sigma \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \sigma \frac{u_3}{R} \Big|_{0,l} = 0, \quad \frac{\partial' u_i(\alpha, 0)}{\partial \beta'} = \frac{\partial' u_i(\alpha, s)}{\partial \beta'} \quad (0.7)$$

$$i = 1, 2, \quad j = 0, 1$$

порождает самосопряженную (неотрицательно определенную) задачу. Скалярное произведение то же, что и в (0.5). Заметим, что спектр задачи (0.6), (0.7) не является чисто дискретным [1].

Задача (0.1), (0.2) допускает разделение переменных. Подставив

$$u_1 = u(\beta) \cos \frac{k\pi}{l} \alpha, \quad u_2 = v(\beta) \sin \frac{k\pi}{l} \alpha, \quad u_3 = w(\beta) \sin \frac{k\pi}{l} \alpha \quad (0.8)$$

(где  $k$  - целое), придем к системе уравнений

$$\begin{aligned}
& -\frac{1-\sigma}{2} u_{\beta\beta}'' - \frac{1+\sigma k\pi}{2} \frac{1}{l} v_{\beta}' + \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 u + \frac{\sigma k\pi}{R} \frac{1}{l} w = \lambda u \\
& -v_{\beta\beta}'' + \frac{1+\sigma k\pi}{2} \frac{1}{l} u_{\beta}' + \frac{1-\sigma}{2} \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 v + \left( \frac{w}{R} \right)' = \lambda v
\end{aligned} \quad (0.9)$$

$$\mu^4 \bar{\Delta} w - \frac{1}{R} v_{\beta}' + \frac{\sigma k\pi}{R} \frac{1}{l} u + \frac{w}{R^2} = \lambda w$$

где оператор  $\bar{\Delta} = \frac{d^2}{d\beta^2} - \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2$

Граничные условия (0.2) принимают вид

$$u^{(j)}(0) = u^{(j)}(s), v^{(j)}(0) = v^{(j)}(s), w^{(r)}(0) = w^{(r)}(s), \quad j=0,1, \quad r=0,1,2,3 \quad (0.10)$$

Введя в рассмотрение вектор-функцию  $f(\beta) = (u, v, w)$ , можно систему (0.9) записать сокращенно в виде

$$(\mu^4 n_0 + l_0) f = \lambda f \quad (0.11)$$

Если ввести скалярное произведение по формуле

$$(f_1, f_2) = \int_0^s (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2) d\beta \quad (0.12)$$

то, как нетрудно проверить, задача (0.9), (0.10) в соответствующем гильбертовом пространстве порождает самосопряженный положительно определенный оператор. Подставим в (0.9)  $\mu = 0$ . Так, возникающая вырожденная (безмоментная) система

$$l_0 f = \lambda f \quad (0.13)$$

с граничными условиями

$$u^{(j)}(0) = u^{(j)}(s), \quad v^{(j)}(0) = v^{(j)}(s), \quad j=0,1 \quad (0.14)$$

порождает самосопряженную (неотрицательно определенную) задачу. Скалярное произведение то же, что и в (0.12). Заметим, что спектр краевой задачи (0.13), (0.14) ( $k$  фиксировано) вещественен, неотрицателен и состоит из изолированных собственных значений конечной кратности с двумя точками сгущения:  $\lambda = 0$  и  $\lambda = +\infty$  [1], с. 78. Ясно, что вне любого  $(0, \epsilon)$  интервала, приближенные собственные числа задачи (0.13), (0.14), построенные по методу Бубнова-Галёркина, сходятся к соответствующим точным значениям этих чисел.

**1. Приведение системы к одному уравнению.** Систему (0.1) сведем к одному уравнению для  $u_3$  аналогично [5], предполагая, что  $R(\beta)$  и  $R^{-1}(\beta)$  достаточное число раз дифференцируемые.

Продифференцируем первое уравнение системы (0.1) по  $\alpha$  два раза, а затем независимо два раза по  $\beta$ , второе уравнение дифференцируем один раз по  $\alpha$  и один раз по  $\beta$ . Используя еще первое уравнение системы (0.1), исключим  $u_2$ ;

$$\left( \Delta\Delta + \frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda\Delta + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} \right) u_1 =$$

$$= -\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2} \left( \frac{u_3}{R} \right) + \sigma \frac{\partial^3}{\partial\alpha^3} \left( \frac{u_3}{R} \right) + \frac{2\lambda\sigma}{1-\sigma} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{u_3}{R} \right) \quad (1.1)$$

Аналогичным образом получим уравнение, в котором будет исключено  $u_1$ . Для этой цели продифференцируем второе уравнение сначала два раза по  $\alpha$ , а затем независимо два раза по  $\beta$ , первое же уравнение продифференцируем один раз по  $\alpha$  и один раз по  $\beta$ . Используя еще второе уравнение системы (0.1), исключим  $u_1$ :

$$\left( \Delta\Delta + \frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda\Delta + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} \right) u_2 =$$

$$= (2+\sigma) \frac{\partial^3}{\partial\beta\partial\alpha^2} \left( \frac{u_3}{R} \right) + \frac{\partial^3}{\partial\beta^3} \left( \frac{u_3}{R} \right) + \frac{2\lambda}{1-\sigma} \frac{\partial}{\partial\beta} \left( \frac{u_3}{R} \right) \quad (1.2)$$

Перепишем третье уравнение системы (0.1) в виде

$$\mu^4 R \Delta \Delta u_3 - \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \sigma \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + (R^{-1} - \lambda R) u_1 = 0 \quad (1.3)$$

Произведем над (1.3) операцию  $\Delta\Delta + \frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda\Delta + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma}$  и затем подставим туда выражения (1.1) и (1.2).

В результате всех преобразований придем к следующему уравнению восьмого порядка с одним неизвестным  $u_3$ :

$$\mu^4 \left( \Delta\Delta R \Delta \Delta u_3 + \frac{3-\sigma}{1-\sigma} \lambda \Delta R \Delta \Delta u_3 + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} R \Delta \Delta u_3 \right) -$$

$$- \lambda \Delta \Delta R u_3 - \frac{3-\sigma}{1-\sigma} \lambda^2 \Delta R u_3 + (1-\sigma^2) \frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} \left( \frac{u_3}{R} \right) +$$

$$+ \lambda \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} \left( \frac{u_3}{R} \right) + (3+2\sigma)\lambda \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \left( \frac{u_3}{R} \right) + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} (R^{-1} - \lambda R) u_3 = 0 \quad (1.4)$$

Подставляя  $u_3$  из (0.8) в (1.4), придем к обыкновенному дифференциальному уравнению восьмого порядка для  $w$ :

$$\mu^4 \left( \Delta \Delta \Delta \Delta \Delta w + \frac{3-\sigma}{1-\sigma} \lambda \Delta \Delta \Delta \Delta w + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} R \Delta \Delta w \right) -$$

$$- \lambda \Delta \Delta \Delta w - \frac{3-\sigma}{1-\sigma} \lambda^2 \Delta \Delta w + (1-\sigma^2) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 \frac{w}{R} +$$

$$+ \lambda \frac{d^2}{d\beta^2} \left( \frac{w}{R} \right) - (3+2\sigma)\lambda \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \frac{w}{R} + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} (R^{-1} - \lambda R) w = 0 \quad (1.5)$$

Таким образом, исследование задачи (0.9), (0.10) привели к исследова-

нию уравнения (1.5) с периодическим граничным условием

$$w^{(r)}(0) = w^{(r)}(s), \quad r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \quad (1.6)$$

## 2. Определение приближенных собственных чисел моментной задачи

1. *Общий случай.* Исходя из метода Бубнова-Галеркина, приближенное решение задачи (1.5), (1.6) ищем в виде

$$w_n(\beta) = \sum_{m=1}^n A_m \sin \frac{2m\pi}{s} \beta \quad (2.1)$$

Коэффициенты  $A_m$  определяем из условия, чтобы левая часть уравнения (1.5) после подстановки в нее  $w_n(\beta)$  вместо  $w$  оказалось ортогональной к функциям  $\sin \frac{2\nu\pi}{s} \beta$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, n$  на отрезке  $[0, s]$ . Это приводит к системе уравнений:

$$\sum_{m=1}^n a_{\nu m} A_m = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} a_{\nu m} = & \left[ \mu^4 \left( t_{kv}^2 - \frac{3-\sigma}{1-\sigma} \lambda t_{kv} + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} \right) t_{km}^2 + \right. \\ & \left. + \left( -\frac{2\lambda^3}{1-\sigma} - \lambda t_{kv}^2 + \frac{3-\sigma}{1-\sigma} \lambda^2 t_{kv} \right) \right] R_{\nu m} + \left[ \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} + \right. \\ & \left. + (1-\sigma^2) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 - \lambda t_{kv} - 2(1+\sigma) \lambda \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] K_{\nu m} \\ & t_{kv} = \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 + \left( \frac{2\nu\pi}{s} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$R_{\nu m} = \frac{2}{s} \int_0^s K(\beta) \sin \frac{2\nu\pi}{s} \beta \sin \frac{2m\pi}{s} \beta d\beta \quad (2.4)$$

$$K_{\nu m} = \frac{2}{s} \int_0^s \frac{1}{K(\beta)} \sin \frac{2\nu\pi}{s} \beta \sin \frac{2m\pi}{s} \beta d\beta$$

Чтобы система (2.2) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель обратился в нуль. Отсюда приходим к уравнению для определения приближенных собственных чисел задачи (1.5), (1.6)

$$\left| a_{\nu m} \right|_{\nu=1}^n = 0 \quad (2.5)$$

В частности, если оболочка такая, что  $R_{\nu m}$  и  $K_{\nu m}$  при  $\nu \neq m$  достаточно малы, т. е.

$$R_{\nu m} \approx 0, \quad K_{\nu m} \approx 0 \quad \text{при} \quad \nu \neq m \quad (2.6)$$

то уравнение (2.5) можно заменить совокупностью уравнений

$$a_{vv} = 0, \quad v = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

Следовательно, для таких оболочек все приближенные собственные числа задачи (1.5), (1.6) определяются из совокупности уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{2}{1-\sigma} \lambda^3 - \left( \frac{2}{1-\sigma} \mu^4 t_{kv}^2 + \frac{3-\sigma}{1-\sigma} t_{kv} + \frac{2}{1-\sigma} \frac{K_{vv}}{R_{vv}} \right) \lambda^2 + \\ & + \left( \frac{3-\sigma}{1-\sigma} \mu^4 t_{kv}^3 + t_{kv} \frac{K_{vv}}{R_{vv}} + 2(1+\sigma) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \frac{K_{vv}}{R_{vv}} + t_{kv}^2 \right) \lambda - \\ & - \left( \mu^4 t_{kv}^4 + (1-\sigma^2) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 \frac{K_{vv}}{R_{vv}} \right) = 0, \quad v = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

Заметим, что для замкнутой круговой цилиндрической оболочки со свободными краями в [6] получено частотное уравнение, сходственное с (2.8).

2. *Преимущественно изгибные колебания.* Подставим в первые два уравнения системы (0.9)  $\lambda = 0$ , которое соответствует случаю пренебрежения тангенциальными силами инерции. Из полученной системы исключим  $u$  и  $v$

$$\mu^4 \bar{\Delta} \bar{\Delta} R \bar{\Delta} \bar{\Delta} w - \lambda \bar{\Delta} \bar{\Delta} R w + (1-\sigma^2) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \frac{w}{R} = 0 \quad (2.9)$$

Использование метода Бубнова-Галёркина приводит к уравнению вида (2.5), для определения приближенных собственных чисел задачи (2.9), (1.6), где

$$a_{vm} = (\mu^4 t_{kv}^2 t_{km}^2 - \lambda t_{kv}^2) R_{vm} + (1-\sigma^2) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 K_{vm} \quad (2.10)$$

В частности, если выполняются условия (2.6), то все приближенные собственные числа задачи (2.9), (1.6) определяются формулами

$$\lambda_{kv} = \mu^4 t_{kv}^2 + \frac{1-\sigma^2}{t_{kv}^2} \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 \frac{K_{vv}}{R_{vv}}, \quad v = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Для цилиндрической оболочки с изломами по образующей частоты изгибных колебаний рассмотрены в работе [7].

*Замечание 1.* Интересно заметить, что формула (2.11) и аналогичная полуэмпирическая формула для замкнутой круговой цилиндрической оболочки с заземленными торцами по структуре сходственны [8] с. 433.

*Замечание 2.* Обозначим через  $n(k, \lambda)$  число собственных значений меньших  $\lambda$  задачи (2.9), (1.6)

$$n(k, \lambda) = \sum_{\lambda_{kv} < \lambda} 1 \quad (2.12)$$

Функция (2.12) называется функцией распределения собственных значений краевой задачи (2.9), (1.6).

Так как по формуле (2.11) каждому целому  $V$  соответствует только одно собственное число, то число собственных значений, удовлетворяющие неравенству  $\lambda_{kv} < \lambda$ , равно числу всех целых  $V$ , которые удовлетворяют неравенству

$$\mu^4 t_{kv}^2 + \frac{1-\sigma^2}{t_{kv}^2} \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 \frac{K_{vv}}{R_{vv}} < \lambda \quad (2.13)$$

или неравенству

$$\mu^4 t_{kv}^4 - \lambda t_{kv}^2 + (1-\sigma^2) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 \frac{K_{vv}}{R_{vv}} < 0 \quad (2.14)$$

Неравенство (2.14) при положительных  $t_{kv}$  возможно лишь при условии, когда корни  $t_{kv}^{(1)}$ ,  $t_{kv}^{(2)}$  трехчлена левой части неравенства (2.14) вещественны и  $t_{kv}^{(1)} < t_{kv} < t_{kv}^{(2)}$ . Поскольку  $t_{kv} = \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 + \left( \frac{2v\pi}{s} \right)^2$ , то для  $n(k, \lambda)$  справедлива оценка

$$n(k, \lambda) = \frac{s}{\pi} \left[ \left( t_{kv}^{(2)} - \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \right)^{1/2} - \left( t_{kv}^{(1)} - \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \right)^{1/2} \right] \pm 1 \quad (2.15)$$

где

$$t_{kv}^{(1)} = \frac{1}{\mu^2} \sqrt{\frac{\lambda}{2} - \sqrt{\left( \frac{\lambda}{2} \right)^2 - (1-\sigma^2) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 \mu^4 \frac{K_{vv}}{R_{vv}}}} \quad (2.16)$$

$$t_{kv}^{(2)} = \frac{1}{\mu^2} \sqrt{\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\left( \frac{\lambda}{2} \right)^2 - (1-\sigma^2) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 \mu^4 \frac{K_{vv}}{R_{vv}}}}$$

Интересно сопоставить формулы (2.15) и (25.3) из [1]. Формальное отличие этих формул исходит из разных методов их получения.

3. Преимущественно тангенциальные колебания. Подставим в третье уравнение системы (0.9)  $\lambda = 0$ , которое соответствует случаю пренебрежения нормальной силой инерции. Из полученной системы исключим  $u$  и  $v$ .

$$\mu^4 \left( \bar{\Delta} \bar{\Delta} R \bar{\Delta} \bar{\Delta} w + \frac{3-\sigma}{1-\sigma} \lambda \bar{\Delta} R \bar{\Delta} \bar{\Delta} w + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} R \bar{\Delta} \bar{\Delta} w \right) + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} \times$$

$$\times \frac{w}{R} + (1-\sigma^2) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 \frac{w}{R} + \lambda \frac{d^2}{d\beta^2} \left( \frac{w}{R} \right) - (3+2\sigma) \lambda \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \frac{w}{R} = 0 \quad (2.17)$$

Использование метода Бубнова-Галёркина приводит к уравнению вида (2.5), для определения приближенных собственных чисел задачи (2.17), (1.6), где

$$a_{vm} = \mu^4 \left( t_{kv}^2 - \frac{3-\sigma}{1-\sigma} \lambda t_{kv} + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} \right) t_{km}^2 R_{vm} + \left[ \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} + \right. \\ \left. + (1-\sigma^2) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 - \lambda t_{kv} - 2(1+\sigma) \lambda \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] K_{vm} \quad (2.18)$$

В частности, если выполняются условия (2.6), то все приближенные собственные числа задачи (2.17), (1.6) определяются из совокупности уравнений

$$R_{vv}^{-1} a_{vv} = \frac{2}{1-\sigma} \left( \mu^4 t_{kv}^2 + \frac{K_{vv}}{R_{vv}} \right) \lambda^2 - \left[ \frac{3-\sigma}{1-\sigma} \mu^4 t_{kv}^3 + \right. \\ \left. + t_{kv} \frac{K_{vv}}{R_{vv}} + 2(1+\sigma) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \frac{K_{vv}}{R_{vv}} \right] \lambda + \mu^4 t_{kv}^4 + \\ + (1-\sigma^2) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 \frac{K_{vv}}{R_{vv}} = 0, \quad v=1,2,\dots \quad (2.19)$$

### 3. Определение приближенных собственных чисел безмоментной задачи

1. *Общий случай.* Исключаем из системы (0.6)  $u$  и  $v$

$$\lambda \bar{\Delta} \bar{\Delta} R w - \frac{3-\sigma}{1-\sigma} \lambda^2 \bar{\Delta} R w + (3+2\sigma) \lambda \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \frac{w}{R} - \\ - (1-\sigma^2) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 \frac{w}{R} - \lambda \frac{d^2}{d\beta^2} \left( \frac{w}{R} \right) - \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} (R^{-1} - \lambda R) w = 0 \quad (3.1)$$

а граничные условия (0.14) заменим условиями вида

$$w^{(r)}(0) = w^{(r)}(s), \quad r=0,1,2,3 \quad (3.2)$$

Определение приближенных собственных чисел задачи (3.1), (3.2) при  $\lambda > \varepsilon > 0$  приводит к уравнению вида (2.5), где

$$a_{vm} = \left( \frac{2\lambda^3}{1-\sigma} - \frac{3-\sigma}{1-\sigma} t_{kv} \lambda^2 + t_{kv}^2 \lambda \right) R_{vm} + \left[ - \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} + \right. \\ \left. + t_{kv} \lambda + 2(1+\sigma) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \lambda - (1-\sigma^2) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 \right] K_{vm} \quad (3.3)$$

В частности, если оболочка удовлетворяет условию (2.6), то все приближенные собственные числа задачи (3.1), (3.2) определяются из совокупности уравнений

$$\frac{2}{1-\sigma}\lambda^3 - \left( \frac{3-\sigma}{1-\sigma}t_{kv} + \frac{2}{1-\sigma}\frac{K_{vv}}{R_{vv}} \right)\lambda^2 + \left( t_{kv}^2 + t_{kv}\frac{K_{vv}}{R_{vv}} + \right. \\ \left. + 2(1+\sigma)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\frac{K_{vv}}{R_{vv}} \right)\lambda - (1-\sigma^2)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4\frac{K_{vv}}{R_{vv}} = 0, \quad v=1,2,\dots \quad (3.4)$$

2. *Преимущественно изгибные колебания.* Подставим в первые два уравнения системы (0.13) значение  $\lambda = 0$ , которое соответствует случаю пренебрежения тангенциальными силами инерции. Из полученной системы исключим  $u$  и  $V$

$$\lambda \bar{\Delta} \bar{\Delta} R w - (1-\sigma^2)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \frac{w}{R} = 0 \quad (3.5)$$

Определение приближенных собственных чисел задачи (3.5), (3.2) при  $\lambda > \varepsilon > 0$  приводит к уравнению вида (2.5), где

$$a_{vm} = \lambda t_{kv}^2 R_{vm} - (1-\sigma^2)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 K_{vm} \quad (3.6)$$

При условии (2.6) все приближенные собственные числа задачи (3.5), (3.2) определяются формулами

$$\lambda_{kv} = (1-\sigma^2)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \frac{K_{vv}}{R_{vv}} / t_{kv}^2, \quad v=1,2,\dots \quad (3.7)$$

3. *Преимущественно тангенциальные колебания.* Подставим в третье уравнение (0.13)  $\lambda = 0$ , которое соответствует случаю пренебрежения нормальной силой инерции. Из полученной системы исключим  $u$  и  $V$

$$\lambda \frac{d^2}{d\beta^2} \left( \frac{w}{R} \right) + \left[ (1-\sigma^2)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - (3+2\sigma)\lambda \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} \right] \frac{w}{R} = 0 \quad (3.8)$$

Легко проверить, что собственные числа задачи (3.8), (3.2) (здесь в (3.2) достаточно сохранить  $r = 0,1$ ) определяются из совокупности уравнений

$$\frac{2\lambda^2}{1-\sigma} - \left[ \left( \frac{2v\pi}{s} \right)^2 + (3+2\sigma)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \right] \lambda + (1-\sigma^2)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 = 0, \quad v=1,2,\dots \quad (3.9)$$

Из (3.9) следует, что при преимущественно тангенциальных колебаниях, собственные частоты безмоментной задачи не зависят от геометрии оболочек.

*Пример.* Пусть направляющей кривой цилиндрической оболочки служит улитка

$$\rho = R_0 \left( 1 + \varepsilon \cos \frac{2\pi}{s} \beta \right), \quad 0 \leq \beta \leq s \quad (3.10)$$

где  $\varepsilon > 0$  и достаточно мало. С точностью до  $O(\varepsilon^3)$  имеем

$$R = AR_0 \left( 1 + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \cos^2 \frac{2\pi}{s} \beta \right), \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{AR_0} \left( 1 - \frac{3}{2} \varepsilon^2 \cos^2 \frac{2\pi}{s} \beta \right)$$

$$R_{vm} = K_{vm} = 0(\varepsilon^2) \quad \text{при } v \neq m; \quad \frac{K_{11}}{R_{11}} = \frac{1}{R_0^2} \left( 1 + \frac{5}{8} \varepsilon^2 \right)$$

$$\frac{K_{vv}}{R_{vv}^2} = \frac{1}{R_0^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right), \quad v = 2, 3, \dots; \quad A = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2$$

Значит, для таких оболочек применимы все выведенные частотные уравнения и аналитические выражения для приближенных собственных чисел.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Асланян А. Г., Лидский В. Б. Распределение собственных частот тонких упругих оболочек.-М.: Наука, 1974, 156 с.
2. Бергман Р. М. Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек.-ПММ, 1973, т. 37, вып. 6, с.1125-1134.
3. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек.- М.: Наука, 1979, 383 с.
4. Красносельский М. А. и др. Приближенное решение операторных уравнений.- М.: Наука, 1969.455 с.
5. Слепов Б. Н. Устойчивость оболочек, имеющих форму эллиптического цилиндра.-Л.: Центральный научно-исследовательский институт им. акад. А.И. Крылова, 1948. 39 с.
6. Слабкий Л. И. Собственные колебания замкнутой круговой цилиндрической оболочки со свободными краями.-МТТ, 1994, №2, с. 82-86.
7. Мовсисян Л. А. Колебание цилиндрической оболочки произвольного сечения.- Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1968, т. 21, №5-6. с. 51-56.
8. Справочник. "Прочность. Устойчивость. Колебания", т. 3. Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Паненко. - М.: Изд-во "Машиностроение", 1968. 568 с.

Армпединститут им. Х.Абовяна  
Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
28. 09. 1994

# О ВЛИЯНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Ананян А.К.

Ա.Կ. Անանյան

Եզրային պայմանների ազդեցությունը ուղղանկյուն սալի ծռման  
խնդրում ընդլայնական սաերների հաշվառմամբ

Աշխատանքում քննարկվում է ուղղանկյուն կորվածքով իզոպրոպ սալի ծռման խնդիրը, որը լուծվում է Ս.Ա.Համբարձումյանի սալերի ճշգրտված տեսությամբ: Տրվում է խնդրի ընդհանուր լուծումը սալի փնտ- սոխային բևեռավորման ժամանակ, երկու տարբեր եզրային պայմանների դեպքում:

Ստացվում են առավելագույն ճկվածքների արտահայտությունները այդ դեպքերի համար: Կարար- վում է բվային վերլուծություն, որի արդյունքները ցույց են տալիս, որ եզրային պայմանների ճշգրտման նկատմամբ ստացված առավելագույն ճկվածքի արժեքը Լուսիս տարբերվում է այն արժեքից, որը ստացվել է միայն ճշգրտումը: Իսկ սալերի դասական տեսությամբ առավելագույն ճկվածքների արժեք- ները այդ երկու դեպքերի համար համընկնում են:

A.K. Ananian

On the Influence of Boundary Conditions in the Problem of Rectangular Plate Bending with the Account of Shear Strains

Уточненная теория С.А.Амбарцумяна широко применяется в задачах по изгибу анизотропных пластин при различных граничных условиях [1]. Эта теория использована А.П.Мелконяном и А.А.Хачатрянном при решении задачи изгиба прямоугольной, трансверсально-изотропной пластинки, равномерно распределенной нагрузкой  $q = \text{const}$  при следующих граничных условиях: 1) пластинка свободно опирается по всем краям; 2) пластинка свободно опирается по двум противоположным краям, а по двум другим - защемлена [2].

В настоящей работе рассматривается задача по изгибу изотропной пластинки прямоугольного сечения с применением уточненной теории [1]. Приводится общее решение задачи при синусоидальной нагрузке с двумя вариантами граничных условий. Целью настоящей работы является вычисление значений максимальных прогибов в задачах изгиба пластинки с уточненными граничными условиями при помощи уточненной теории пластин С.А.Амбарцумяна [1].

1. Рассмотрим шарнирно опертую по всему контуру изотропную прямо- угольную пластинку ( $a \times b$ ), которая изгибается нормально приложенной на- грузкой  $Z = Z(x, y)$ . Не нарушая общности задачи, можно представить  $Z$  в

$$\text{виде } Z = q_0 \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Для изотропной пластинки задача изгиба по уточненной теории приводит- ся к решению следующих уравнений:

$$D \Delta \Delta W + \frac{2I_1}{(1-\nu)I_0} \Delta Z = Z \quad (1.1)$$

$$\text{где } I_1 = \int_{-h}^h z I(z) dz; \quad I_0 = \int_{-h}^h f(z) dz; \quad I(z) = \int_0^z f(z) dz$$

$f(z)$  - функция, характеризующая закон изменения касательных напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  по толщине пластинки, причем  $f(-h) = f(h) = 0$  [1,3]

$$\Delta F = -\frac{1+\nu}{EI_0} Z \quad (1.2)$$

$$\text{где } \varphi(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \text{ и } \psi(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}.$$

- искомые функции, входящие в выражения касательных напряжений  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ :

$$\tau_{xz} = f(z)\varphi(x, y), \quad \tau_{yz} = f(z)\psi(x, y)$$

Граничные условия рассматриваемой задачи представляют условия Навье и запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} x = \text{const}: \quad \sigma_{11} = 0; \quad u_2 = 0; \quad u_3 = 0 \\ y = \text{const}: \quad \sigma_{22} = 0; \quad u_1 = 0; \quad u_3 = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

После интегрирования условий Навье по  $z$ , в пределах  $-h$  до  $h$ , получают следующие осредненные граничные условия:

$$\begin{aligned} x = 0; \quad a. \quad W = 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{3I_1}{h^3} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0; \quad F = 0 \\ y = 0; \quad b. \quad W = 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{3I_1}{h^3} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0; \quad F = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Полагая функцию прогиба } W(x, y) = J(y) \sin \frac{\pi x}{a} \quad (1.4)$$

$$\text{и функцию } F(x, y) = \Phi(y) \sin \frac{\pi x}{a} \quad (1.5)$$

удовлетворяются поставленные условия шарнирной опоры.

Подставляя значение прогиба  $W(x, y)$  из (1.4) в уравнение (1.1), получим

$$J(y) = A_1 \operatorname{sh} \alpha y + A_2 \operatorname{ch} \alpha y + A_3 y \operatorname{sh} \alpha y + A_4 y \operatorname{ch} \alpha y + \frac{q_0 R_0}{D \alpha^4} \quad (1.6)$$

$$\text{где } R_0 = 1 + \frac{2I_1 \alpha^2}{(1-\nu)I_0}; \quad \alpha = \frac{\pi}{a}$$

Принимая во внимание выражение (1.6), для функции прогиба  $W(x, y)$  нетрудно получить:

$$W(x, y) = \left\{ A_1 \operatorname{sh} \alpha y + A_2 \operatorname{ch} \alpha y + A_3 y \operatorname{sh} \alpha y + A_4 y \operatorname{ch} \alpha y + \frac{q_0 R_0}{D \alpha^4} \right\} \sin \alpha x \quad (1.7)$$

На основании выражения (1.5), из уравнения (1.2) получим:

$$\Phi(y) = C_1 \operatorname{sh} \alpha y + C_2 \operatorname{ch} \alpha y + \frac{1+\nu}{\alpha^2 E I_0} q_0 \quad (1.8)$$

$$F(x, y) = \left\{ C_1 \operatorname{sh} \alpha y + C_2 \operatorname{ch} \alpha y + \frac{1+\nu}{\alpha^2 E I_0} q_0 \right\} \sin \alpha x \quad (1.9)$$

С помощью функций  $J(y)$  и  $\Phi(y)$  граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} y=0: J(0) &= 0; J'(0) - \frac{3I_1}{h^3} \Phi'(0) = 0; \Phi(0) = 0 \\ y=b: J(b) &= 0; J'(b) - \frac{3I_1}{h^3} \Phi'(b) = 0; \Phi(b) = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Удовлетворяя граничным условиям, получаем систему из шести алгебраических уравнений с шестью неизвестными. Определяя эти неизвестные, получаются выражения для функций прогиба  $W(x, y)$  и  $F(x, y)$ . Имея функцию  $F(x, y)$ , можно получить значения неизвестных функций  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$ , которые входят в выражения касательных напряжений, и следовательно, можно получить значения этих касательных напряжений.

Для функций прогиба  $W(x, y)$  и функций  $F(x, y)$  получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} W(x, y) = \frac{q_0}{D \alpha^4} \left\{ -2 \left( 1 + \frac{2I_1 \alpha^2}{(1-\nu)I_0} \right) \frac{\operatorname{sh} \alpha(y-b)/2 \operatorname{sh} \alpha y/2}{\operatorname{ch} \alpha b/2} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{\operatorname{sh} \alpha(y-b/2)}{\operatorname{ch} \alpha b/2} y - \frac{\operatorname{sh} \alpha y}{\operatorname{sh} \alpha b} b \operatorname{th} \alpha b/2 \right] \right\} \sin \alpha x \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$F(x, y) = -\frac{2(1+\nu)}{\alpha^2 E I_0} q_0 \frac{\operatorname{sh} \alpha(y-b)/2 \operatorname{sh} \alpha y/2}{\operatorname{ch} \alpha b/2} \sin \alpha x \quad (1.12)$$

Теперь подсчитаем максимальный прогиб, который находится в точке  $(a/2; b/2)$

$$W_{\max} = W^{(1)} = \frac{q_0 a^4}{D \pi^4} \left\{ 1 - \frac{2+\beta \operatorname{th} \beta}{2 \operatorname{ch} \beta} + \frac{4I_1 \pi^2}{(1-\nu)I_0 a^2} \frac{\operatorname{sh}^2 \beta/2}{\operatorname{ch} \beta} \right\} \quad (1.13)$$

где  $\beta = \frac{\pi b}{2a} = \frac{\alpha b}{2}$  - безразмерная величина.

2. Решим предыдущую задачу при других граничных условиях на краях  $y = \text{const}$ .

Пусть на краях  $x = \text{const}$  даны граничные условия Навье, а на краях  $y = \text{const}$  следующие условия:

$$\begin{aligned} x = \text{const}: \quad \sigma_{11} &= 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0 \\ y = \text{const}: \quad \sigma_{22} &= 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad u_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Интегрируя (2.1) по  $z$  в пределах от  $-h$  до  $h$ , получают следующие осредненные граничные условия:

$$\begin{aligned} x = 0; \quad a. \quad W &= 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{3I_1}{h^3} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0; \quad F = 0 \\ y = -\frac{b}{2}; \quad \frac{b}{2}: \quad W &= 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{3I_1}{h^3} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) = 0 \\ &\quad \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{3I_1}{h^3} \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Граничные условия, написанные с помощью функций  $J(y)$  и  $\Phi(y)$ , будут

$$\begin{aligned} y = -\frac{b}{2}: \quad J(-b/2) &= 0; \quad J'(-b/2) - \frac{3I_1}{h^3} (\Phi'(-b/2) - \alpha^2 \nu \Phi(-b/2)) = 0 \\ &\quad J'(-b/2) - \frac{3I_1}{h^3} \Phi(-b/2) = 0 \\ y = \frac{b}{2}: \quad J(b/2) &= 0; \quad J'(b/2) - \frac{3I_1}{h^3} (\Phi'(b/2) - \alpha^2 \nu \Phi(b/2)) = 0 \\ &\quad J'(b/2) - \frac{3I_1}{h^3} \Phi(b/2) = 0 \end{aligned}$$

Удовлетворяя граничным условиям, получается система из шести алгебраических уравнений с шестью неизвестными. Определяя эти неизвестные, получают выражения для функции прогиба  $W(x, y)$  и  $F(x, y)$

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \frac{q_0}{D\alpha^4} \left\{ \frac{\alpha b \nu \text{sh}^2 \alpha b / 2 \text{ch} \alpha y}{\alpha b - \text{sh} \alpha b - \nu(\alpha b + \text{sh} \alpha b) \text{ch} \alpha b / 2} \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{2I_1 \alpha^2}{(1-\nu)I_0} \right) \left( \frac{\text{ch} \alpha y}{\text{ch} \alpha b / 2} - 1 \right) - \frac{2\alpha \nu \text{sh} \alpha b / 2}{\alpha b - \text{sh} \alpha b - \nu(\alpha b + \text{sh} \alpha b)} \times \right. \\ &\quad \left. \times y \text{sh} \alpha y \right\} \sin \alpha x \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$F(x, y) = \left\{ \frac{q_0 h^3}{3 D \alpha^4 I_1} \left( 1 + \frac{2 I_1 \alpha^2}{(1-\nu) I_0} - \frac{\nu(\alpha b + \operatorname{sh} \alpha b)}{\alpha b - \operatorname{sh} \alpha b - \nu(\alpha b + \operatorname{sh} \alpha b)} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{\operatorname{ch} \alpha y}{\operatorname{ch} \alpha b / 2} - \frac{1+\nu}{\alpha^2 E I_0} q_0 \right\} \sin \alpha x \quad (2.3)$$

Имея (2.3), можно легко найти функции  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$ . Теперь подсчитаем максимальный прогиб, который находится в точке  $(a/2; 0)$ .

$$W_{\max} = W^{(2)} = \frac{q_0 a^4}{D \pi^4} \left\{ 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \beta} + \frac{2 \nu \beta \operatorname{sh}^2 \beta}{2 \beta - \operatorname{sh} 2 \beta - \nu(2 \beta + \operatorname{sh} 2 \beta) \operatorname{ch} \beta} + \right. \\ \left. + \frac{4 I_1 \pi^2}{(1-\nu) I_0 a^2} \frac{\operatorname{sh}^2 \beta / 2}{\operatorname{ch} \beta} \right\} \quad (2.4)$$

где  $\beta = \frac{\pi b}{2a} = \frac{\alpha b}{2}$  - безразмерная величина.

Для сравнения значений максимальных прогибов, при  $\beta = 1$  и  $\beta = 1/2$  приведена следующая таблица, где  $\nu = 1/3$  и при  $f(z) = 1 - z^2/h^2$  имеем  $I_1/I_0 = \frac{2}{5} h^2$ .

Таблица

|              | $\beta = 1$   |              | $\beta = 1/2$ |              |
|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|
|              | $2h/a = 1/10$ | $2h/a = 1/3$ | $2h/a = 1/10$ | $2h/a = 1/3$ |
| $\Psi$       | 0,1053        | -            | 0,0108        | -            |
| $\Psi^{(1)}$ | 0,1158        | 0,2225       | 0,0142        | 0,0485       |
| $\Psi^{(2)}$ | 0,1589        | 0,2656       | 0,0254        | 0,0597       |

где  $\Psi = W \frac{D \pi^4}{q_0 a^4}$  - максимальный прогиб вычислений по классической теории,

$$\Psi^{(1)} = W^{(1)} \frac{D \pi^4}{q_0 a^4}, \quad \Psi^{(2)} = W^{(2)} \frac{D \pi^4}{q_0 a^4}$$

Из таблицы видно, что при уточнении граничных условий максимальный прогиб в задаче с граничными условиями Навье существенно отличается от максимального прогиба в задаче с граничными условиями (2.1).

По классической теории же Кирхгофа эти результаты одинаковы, так как при осреднении граничных условий (1.3) и (2.1), получаются уравнения шарнирно-опертого края.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин.-М.: Физматгиз, 1987.
2. *Мелконян А.П., Хачатрян А.А.* Об изгибе прямоугольных трансверсально-изотропных пластинок. - Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, 1965, т. 18, № 1.
3. *Белубекян В.М.* Канд.дисс. "Определение коэффициентов особенностей в некоторых задачах теории упругости для секториальных тел". ЕГУ, 1991.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
22.06.1994

| № п/п | Наименование           | Единица измерения | Значение | Значение |
|-------|------------------------|-------------------|----------|----------|
| 1     | Модуль Юнга            | МПа               | 110000   | 110000   |
| 2     | Коэффициент Пуассона   | -                 | 0,3      | 0,3      |
| 3     | Модуль сдвига          | МПа               | 44000    | 44000    |
| 4     | Коэффициент асимметрии | -                 | 0,1      | 0,1      |
| 5     | Коэффициент симметрии  | -                 | 0,1      | 0,1      |

# УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА

Бабаян А. В.

Ա. Վ. Բաբայան

Հրչանային զանալի թաղանթի կայունության խնդիրը ծող  
մոմենտի ազդեցության դեպքում

Դիտարկվում է կիսանսկզբի շրջանաձև զանալի թաղանթ, որը ծողում է եզրում հավասարաչափ բաշխված ծող մոմենտի ազդեցության տակ: Այդպիսի թաղանթի կայունությունը ուսումնասիրվում է հեղինակի մեթոդով: Բացարձակ մոմենտային վիճակի հնչրիս թոմման վրա: Որոշվում է կայուն էմեկրի քարածման զոնայի կոնարությունը: Թաղանթի կայունության հավասարումը լոմվում է Բուբնով-Գալերկինի մեթոդով եղված զոնայի սանմաններում: Որոշվում է ծող մոմենտի կրիտիկական արմերը կախված թաղանթի եղադմում քնդավորված ալիքների քիլից:

Կոմվում հարաբերական հաստությունից, թաղանթի երրթի առնձգական և ամրության բնութագրիչներից արոցվում են պայմաններ, ըսոր որի կայունության կրիտիկ քնդի է ունեում ամրության պահպանման դեպքում:

A. V. Babayan

## Stability of a Circular Cylindrical Shell under the Influence of Bending Moment

Рассматривается полубесконечная круговая цилиндрическая оболочка, которая изгибается равномерно распределенными по торцу моментами. Устойчивость такой оболочки в отличие от [1,2], исследуется на основе точного решения начального моментного состояния. Определяется длина зоны распространения краевого эффекта. Уравнение устойчивости оболочки решается методом Бубнова-Галеркина в пределах указанной зоны. Находится минимальное критическое значение изгибающего момента в зависимости от числа волн по окружности оболочки.

В зависимости от относительной толщины, упругих и прочностных характеристик материала оболочки, устанавливаются условия, при которых потеря устойчивости происходит при обеспечении прочности.

Рассмотрим задачу устойчивости полубесконечной круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины  $h$ , когда один край шарнирно закреплен и на краю действует равномерно распределенный изгибающий момент.

Цилиндрическая оболочка отнесена к смешанной системе координат  $OXYZ$  так, что поверхность  $XOY$  совпадает со срединной поверхностью оболочки.

Лицевые поверхности оболочки свободны.

Граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} x=0: \quad W=0, \quad M_x=M_0, \quad N_x=0, \quad \tau=0 \\ x \rightarrow \infty: \quad W \rightarrow 0, \quad M_x \rightarrow 0, \quad N_x \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Так как задача осесимметрична, то уравнения равновесия [1] упрощаются.

Учитывая граничные условия и выражения для моментов, уравнение изгиба примет следующий вид:

$$D \frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} W = 0 \quad (2)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  - жёсткость оболочки.

Решение уравнения (2) представим в виде

$$W = Ae^{px} \quad (3)$$

где  $A, P$  - искомые постоянные.

Подставляя (3) в (2) и решая полученное уравнение, определим искомое решение уравнения (2). Удовлетворяя граничным условиям (1), окончательно получим [4]

$$W_0 = \frac{M_0}{2\beta^2 D} \exp(-\beta x) \sin \beta x \quad (4)$$

$$\sigma_y^0 = -\frac{EM_0}{2\beta^2 DR} \exp(-\beta x) \sin(\beta x) \quad (5)$$

$$M_x^0 = M_0 \exp(-\beta x) \cos \beta x \quad (6)$$

$$Q_x^0 = -\beta M_0 \exp(-\beta x) (\cos \beta x + \sin \beta x) \quad (7)$$

где  $\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}}$

Для  $W_0, \sigma_y^0, M_x^0, Q_x^0$  определим длину зоны распространения краевого эффекта соответственно  $l_1, l_2, l_3, l_4$  по формуле  $l = \int_0^{\infty} f(x) dx$ ,

тогда  $l_1 = l_2 = l_3 = \frac{1}{2\beta}, l_4 = \frac{1}{\beta}$

Приравнявая нулю производную от  $\sigma_y^0$  по  $\beta$ , получим экстремальное значение  $\sigma_y^0$

$$\sigma_{y \max}^0(x_0) = -\frac{\sqrt{6(1-\nu^2)}}{h^2} \exp\left(-\frac{\pi}{4}\right) M_0, \quad \text{где } x_0 = \frac{\pi}{4\beta}$$

при помощи которого получим условие прочности оболочки

$$|\sigma_x| < \sigma_s \Rightarrow M_0 < \frac{h^2}{\sqrt{6(1-\nu^2)}} \sigma_s \exp(\pi/4) \quad (8)$$

Теперь вернемся к задаче устойчивости оболочки. Уравнения устойчивости цилиндрической оболочки берем в виде [1]

$$\frac{D}{h} \nabla^4 W = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \sigma_y^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad (9)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (10)$$

Исключая из (9), (10) функцию усилий  $\Phi$ , получим:

$$\frac{D}{h} \nabla^8 W + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \nabla^4 \left( \sigma_y^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (11)$$

Для того, чтобы использовать метод Бубнова-Галеркина, надо взять конечную цилиндрическую оболочку, длина которой равна длине зоны распространения краевого эффекта.

Граничные условия для шарнирного опирания будут

$$\begin{aligned} x=0: \quad W=0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= 0 \\ x=l^*: \quad W=0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Решение уравнения (11) представим в следующем виде, чтобы на торцах оболочки удовлетворялись граничные условия:

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \cos \frac{ny}{R} \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получим дифференциальное уравнение восьмого порядка относительно  $f_n(x)$

$$L_8 f_n(x) = 0 \quad (14)$$

решение которого с учетом условий (12) представим в виде

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \alpha_k x, \quad \alpha_k = \frac{\pi k}{l^*} \quad (15)$$

где  $A_k$  - искомые постоянные.

Применяя к уравнению (14) метод Бубнова-Галеркина, после нескольких преобразований, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно  $A_k$

$$\begin{aligned} & A_m \frac{l^*}{2} \left[ \frac{D}{h} \left( \alpha_m^2 + \frac{n^2}{R^2} \right)^4 + \frac{E}{R^2} \alpha_m^4 \right] - \frac{n^2}{R^2} \frac{E M_0 \alpha_m}{\beta D R} \times \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} A_k \alpha_k \left[ \exp(-\beta l^*) (-1)^{k+m} (\cos \beta l^* - \sin \beta l^*) - 1 \right] - \left( \alpha_m^2 + \frac{n^2}{R^2} \right)^2 \times (16) \\ & \times \frac{n^2}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^{l^*} \sin \alpha_k x \sin \alpha_m x dx = 0 \quad m=1, 2, \dots \end{aligned}$$

где

$$\int_0^{\beta^*} \sigma_y^0 \sin \alpha_k x \sin \alpha_m x dx = -\frac{EM_0 \alpha_m \alpha_k}{\beta D R \Omega} \{4\beta^2 (\alpha_m^2 + \alpha_k^2) \times \\ \times [1 - (-1)^{k+m} \exp(-\beta l^*) (\cos \beta l^* + \sin \beta l^*)] + [4\beta^4 - (\alpha_k^2 - \alpha_m^2)^2] \times \\ \times [1 - (-1)^{k+m} \exp(-\beta l^*) (\cos \beta l^* - \sin \beta l^*)]\} \\ \Omega = [4\beta^4 + (\alpha_m - \alpha_k)^4] [4\beta^4 + (\alpha_m + \alpha_k)^4]$$

Теперь попробуем определить критическое значение  $M_0$ . Для этого приравняем нулю коэффициент  $A_1$  в уравнении (16) при  $m=1$  и получаем критическое значение  $M_0$  в первом приближении. Чтобы определить следующее приближение, приравняем нулю детерминант коэффициентов  $A_1, A_2$  в уравнениях (16) при  $m=1, m=2$  и т. д.

В первом приближении получается

$$M_0^{(1)} = -\frac{\pi E h^2}{8\sqrt{3(1-\nu^2)}[1+e^{-\pi}]} f(n) \quad (17)$$

$$\text{где } f(n) = \frac{\frac{1}{4} \left( 1 + \frac{h}{R} \frac{n^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \right)^4 + 1}{n^2 \left[ 1 + \frac{3}{20} \left( 1 + \frac{h}{R} \frac{n^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \right)^2 \right]}$$

Очевидно, что определение  $\min M_0^{(1)}$  от  $n$  приводится к определению  $\min$  функции  $f(n)$  от  $n$ . В табл. 1 приведены минимальные значения  $f(n)$  при  $\nu^2 = 0,1$ . Как видно, при уменьшении толщины оболочки уменьшаются минимальные значения функции  $f(n)$ , а значение  $n$ , при котором достигаются эти минимумы, возрастают.

Сравнивая (17) с условием прочности (8), получим

$$\frac{\sigma_y}{E} > \frac{\sqrt{2} \pi}{8e^{\pi/4} [1+e^{-\pi}]} f(n) \quad (18)$$

что является условием, при котором задача устойчивости имеет смысл. При невыполнении условия (18) оболочка теряет прочность до потери устойчивости.

В табл. 1 приведены значения правой части условия (18).

Таблица 1

| $n$                    | 4       | 5      | 6      | 8      | 9      | 11     | 13      | 14      | 15      | 16      |
|------------------------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| $h/R$                  | 0.067   | 0.05   | 0.035  | 0.02   | 0.015  | 0.01   | 0.008   | 0.0067  | 0.0057  | 0.005   |
| $f(n)$                 | 0.12647 | 0.0929 | 0.065  | 0.0371 | 0.0279 | 0.0186 | 0.01485 | 0.01237 | 0.01061 | 0.00928 |
| $\frac{\sigma_s}{E} >$ | 0.0307  | 0.0225 | 0.0158 | 0.009  | 0.0068 | 0.0045 | 0.0036  | 0.003   | 0.00259 | 0.00226 |

К примеру, для оболочки, изготовленной из стали 30 (закаленной),  $\frac{\sigma_s}{E} = 0,0055$  и, следовательно, согласно табл. 1, постановка вопроса устойчивости возможна при  $\frac{h}{R} \leq 0.01$ . В частности, при  $\frac{h}{R} = 0.01$  минимальный критический момент достигается при  $n = 11$ . Аналогично, для оболочки из латуни  $\frac{\sigma_s}{E} = 0,00375$  и вопрос устойчивости возможен при  $\frac{h}{R} \leq 0,008$ , соответственно, минимальный критический момент достигается при  $n = 13$ . А для оболочек из алюминия, бронзы и меди (прутковой) задача устойчивости имеет смысл для более тонких оболочек.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гнуни В. Ц., Мовсисян Л. А. Об устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки. - Прикл. механика. 1969, т. 5, вып. 6, с. 112-116.
2. Гнуни В. Ц., Мовсисян Л. А. К устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки. - Докл. АН. Арм. ССР, 1968, т. 56, No 1, с. 156-159.
3. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. - М. Физматгиз, 1963. 879 с.
4. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. - М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. 460 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
27. 09. 1994