ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 1, 1995 Механика

ИЗМЕНЕНИЕ ДАЛЬНОСТИ ПОЛЕТА ПРИ МАЛЫХ ОТКЛОНЕНИЯХ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

БАРСЕГЯН В. Р.

Վ. Ռ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

ԹՌԻՉՔԻ ՀԵՌԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ ՍԿԶԲՆԱԿԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՓՈՔՐ ՇԵՂՈՒՄՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Աշխատանքում դիտարկվում է նյուտոնյան ձգողական դաշտում շարժման էլիպտական հետագծեր, երբ սկզբնական ուղեծիրը էլիպտական է և հաշվի է առնվում ուղեծրային արագությունը։ Հետազոտված է պասիվ տեղամասի թռիչքի հեռավորության փոփոխությունը շարժման սկզբնական պարամետրերի փոքր շեղումների դեպքում, երբ մթնոլորտային ազդեցությունը բացակայում է։

V. R. BARSEGIAN

DISTANCE CHANGE OF FLIGHT IN THE CASE OF SMALL PERTURBATIONS OF INITIAL PARAMETERS

Во многих задачах баллистики возникает необходимость оценки отклонений конечных параметров движения при небольших отклонениях начальных параметров движения. Класс таких задач исследован в работах [1—3] и др.

В работе рассматриваются эллиптические траектории движения в ньютоновском гравитационном поле, когда исходная орбита является эллиптическим и учитывается орбитальная скорость. В предположении отсутствия влияния атмосферы исследовано изменение дальности полета пассивного участка при малых отклонениях начальных параметров движения.

1. Описание объекта исследования и постановка задачи

Пусть управляемый объект находится на эллиптической орбите в ньютоновском гравитационном поле. Движение объекта будем рассматривать в полярной системе координат, полюс которой находится в центре притягивающего тела, а полярная ось совпадает с линией апсид рассматриваемой орбиты. В начальный момент времени параметры, характеризующие положение объекта, связаны соотношением

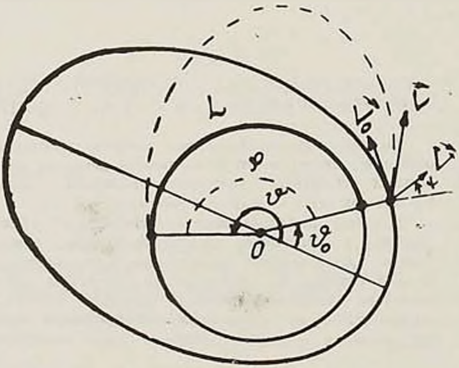
$$r_0 = \frac{p_0}{1+e_0\cos\vartheta_0} \tag{1.1}$$

где r_0—величина радиус-вектора объекта, ϑ_0—полярный угол, e_0—эксцентриситет, p_0—параметр орбиты. Радиальная и трансверсальная составляющие орбитальной скорости в точке (r_0, ϑ_0) выражаются соответственно следующими формулами [1, 2]:

$$v_{0r} = \sqrt{\frac{\mu}{p_0}}\, e_0 \sin\vartheta_0 \qquad v_{0\varphi} = \sqrt{\frac{\mu}{p_0}}\,(1 + e_0\cos\vartheta_0) \tag{1.2}$$

где μ—гравитационный параметр.

Предполагается, что объект, находясь на орбите, может реализовать характеристическую скорость некоторой величины $V \in [0, V_{max}]$ соответствующим запасом топлива. Расходуя имеющийся запас топлива частично или полностью, рассматриваемый объект в состоянии изменить первоначальную орбиту в определенных пределах. Из каждой точки исходной орбиты выходит пучок управляемых траекторий, которые получаются приложением импульса V под разным углом. Обозначим через ψ угол наклона характеристической скорости к радиусу-вектору объекта, измеряемый от радиус-вектора в сторону скорости объекта (фиг. 1).



Фиг. 1

Уравнения, описывающие семейство орбит, выходящих из заданной точки, при заданной величине характеристической скорости в плоском случае в предположении, что исходная орбита эллиптическая, имеют вид [4]

$$\frac{r_0}{r} = \frac{\mu(1-\cos\varphi)}{r_0(v_{0\varphi} - V\sin\psi)^2} + \cos\varphi - \frac{v_{0r} + V\cos\psi}{v_{0\varphi} + V\sin\psi}\sin\varphi \tag{1.3}$$

где $\varphi = \vartheta - \vartheta_0$, а (r, ϑ)—полярные координаты текущей точки орбиты. (V и ψ —управляющие параметры).

Пусть в гравитационном поле в плоскости рассматриваемой исходной орбиты имеем круговую орбиту с радиусом R (т. е. окружность), где $R \in [r_{min}, r_{max}]$ (r_{min} и r_{max} такие, что траектории выходящих из данной точки (r_0, ϑ_0) исходной орбиты будут пересекаться с данной круговой орбитой). Исходя из замкнутости орбит, нас будут интересовать точки (R, ϑ) первых пересечений

Под дальностью полета L пассивного участка будем понимать длину дуги круговой орбиты с радиусом R, которая заключена между точкой первого пересечения новой орбиты с данной круговой орбитой и радиус-вектором начального положения объекта

Из такого определения в частности следует дальность пассивного участка, измеряемого по поверхности притягивающего тела [1—3].

Требуется определить изменение дальности полета L в зависимости от малых изменений начальных параметров движения.

2. Решение задачи

В точке (r_0, ϑ_0), прикладывая характеристическую скорость V под определенным углом ψ, траектория выходящей из точки (r_0, ϑ_0) будет удовлетворять уравнению (1.3) Уравнению (1.3) будут также удовлетворять координаты точки пересечения (R, ϑ) с круговой орбитой, следовательно

$$\frac{r_0}{R} = \frac{\mu(1-\cos\varphi)}{r_0(v_{0\varphi} + V\sin\psi)^2} + \cos\varphi - \frac{v_{0r} + V\cos\psi}{v_{0\varphi} + V\sin\psi}\sin\varphi \tag{2.1}$$

Дальность полета задается формулой

$$L = R\varphi \tag{2.2}$$

При наличии малых отклонений начальных параметров от расчетных получим отклонения от расчетной дальности

$$\delta L = L^* - L \tag{2.3}$$

Но так как $R=\text{const}$, то из (2.2) и (2.3) видно, что задача сводится к определению изменений угла φ в зависимости от малых изменений величины радиус-вектора начального положения r_0 (или от полярного угла начального положения на исходной орбите, т. е. ϑ_0), характеристической скорости V и угла ψ.

В линейном приближении для изменений угла φ будем иметь

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_0}\delta\vartheta_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial V}\delta V + \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\delta\psi \tag{2.4}$$

Очевидно, что нужно найти производные

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_0}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial V}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}$$

Воспользуемся уравнением (2.1), которое в общем виде может быть записано таким образом:

$$F(\mu, R, \varphi, r_0, v_{0\varphi}, v_{0r}, V, \psi) = 0. \tag{2.5}$$

Варьируя (2.5), будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}\delta\varphi+\frac{\partial F}{\partial r_0}\delta r_0+\frac{\partial F}{\partial v_{0\varphi}}\delta v_{0\varphi}+\frac{\partial F}{\partial v_{0r}}\delta v_{0r}+\frac{\partial F}{\partial V}\delta V+\frac{\partial F}{\partial \psi}\delta\psi=0 \tag{2.6}$$

Поскольку $r_0=f_1(\vartheta_0)$, $v_{0r}=f_2(\vartheta_0)$, $v_{0\varphi}=f_3(\vartheta_0)$, где

$$f_1=\frac{p_0}{1+e_0\cos\vartheta_0},\quad f_2=e_0\sqrt{\frac{\mu}{p_0}}\sin\vartheta_0,\quad f_3=\sqrt{\frac{\mu}{p_0}}(1+e_0\cos\vartheta_0) \tag{2.7}$$

то

$$\delta r_0=\frac{\partial f_1}{\partial\vartheta_0}\delta\vartheta_0,\quad \delta v_{0r}=\frac{\partial f_2}{\partial\vartheta_0}\delta\vartheta_0,\quad \delta v_{0\varphi}=\frac{\partial f_3}{\partial\vartheta_0}\delta\vartheta_0 \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в (2.6), получаем

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi}\delta\varphi+\left(\frac{\partial F}{\partial r_0}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial\vartheta_0}+\frac{\partial F}{\partial v_{0\varphi}}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial\vartheta_0}+\frac{\partial F}{\partial v_{0r}}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial\vartheta_0}\right)\delta\vartheta_0+\frac{\partial F}{\partial V}\delta V+\frac{\partial F}{\partial\psi}\delta\psi=0$$

откуда

$$\delta\varphi=-\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial r_0}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial\vartheta_0}+\frac{\partial F}{\partial v_{0\varphi}}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial\vartheta_0}+\frac{\partial F}{\partial v_{0r}}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial\vartheta_0}\right)\delta\vartheta_0-$$

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}\delta v-\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial F}{\partial\psi}\delta\psi \tag{2.9}$$

Сравнивая правые части выражений (2.4) и (2.9), получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_0}=-\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial r_0}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial\vartheta_0}+\frac{\partial F}{\partial v_{0\varphi}}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial\vartheta_0}+\frac{\partial F}{\partial v_{0r}}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial\vartheta_0}\right) \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial V}=-\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial F}{\partial V},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}=-\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial F}{\partial\psi} \tag{2.11}$$

Из формулы (2.1) находим

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi}=\frac{\mu\sin\varphi}{r_0(v_{0\varphi}+V\sin\psi)^2}-\sin\varphi-\frac{v_{0r}+V\cos\psi}{v_{0\varphi}+V\sin\psi}\cos\varphi$$

$$\frac{\partial F}{\partial V}=-\frac{2\mu(1-\cos\varphi)\sin\psi}{r_0(v_{0\varphi}+V\sin\psi)^3}-\frac{v_{0\varphi}\cos\psi-v_{0r}\sin\psi}{(v_{0\varphi}+V\sin\psi)^2}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial F}{\partial\psi}=-\frac{2\mu V(1-\cos\varphi)\cos\psi}{r_0(v_{0\varphi}+V\sin\psi)^3}+\frac{V(V+v_{0\varphi}\sin\psi+v_{0r}\cos\psi)}{(v_{0\varphi}+V\sin\psi)^2}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial F}{\partial r_0}=-\frac{\mu(1-\cos\varphi)}{r_0^2(v_{0\varphi}+V\sin\psi)^2}-\frac{1}{R} \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_{0\varphi}}=-\frac{2\mu(1-\cos\varphi)}{r_0(v_{0\varphi}+V\sin\psi)^3}+\frac{v_{0r}+V\cos\psi}{(v_{0\varphi}+V\sin\psi)^2}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_{0r}}=-\frac{\sin\varphi}{v_{0\varphi}+V\sin\psi}$$

Из формулы (2.7) будем иметь

$$\frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_0} = \frac{e_0 p_0 \sin\vartheta_0}{(1+e_0\cos\vartheta_0)^2} = \frac{r_0^2}{\sqrt{\mu p_0}} v_{0r}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_0} = e_0 \sqrt{\frac{\mu}{p_0}} \cos\vartheta_0 = v_{0\varphi} - \sqrt{\frac{\mu}{p_0}} \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \vartheta_0} = -e_0 \sqrt{\frac{\mu}{p_0}} \sin\vartheta_0 = -v_{0r}$$

Подставляя в (2.10) из формул (2.12) выражения для частных производных функций F по r_0, $v_{0\varphi}$ и v_{0r}, а также формулы (2.13), получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_0} = \left\{ \left[v_{0r} \sqrt{\frac{\mu}{p_0}} + \frac{2\mu\left(v_{0\varphi} - \sqrt{\frac{\mu}{p_0}}\right)}{r_0(v_{0\varphi} + V\sin\psi)} \right] (1-\cos\varphi) - \left[v_{0r}(v_{0\varphi} + V\sin\psi) - (v_{0r} + V\cos\psi)\left(v_{0\varphi} - \sqrt{\frac{\mu}{p_0}}\right) \right] \sin\varphi + \frac{r_0^2 v_{0r}}{R\sqrt{\mu p_0}} (v_{0\varphi} + V\sin\psi)^2 \right\} \times$$

$$\times \left\{ \left[\frac{\mu}{r_0} - (v_{0r} + V\sin\psi)^2 \right] \sin\varphi - (v_{0r} + V\cos\psi)(v_{0\varphi} + V\sin\psi)\cos\varphi \right\}^{-1} \tag{2.14}$$

Из (2.11) и (2.12) имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial V} = \frac{\dfrac{2\mu(1-\cos\varphi)}{r_0(v_{0\varphi} + V\sin\psi)} \sin\psi + (v_{0\varphi}\cos\psi - v_{0r}\sin\psi)\sin\varphi}{\left[\dfrac{\mu}{r_0} - (v_{0\varphi} + V\sin\psi)^2 \right] \sin\varphi - (v_{0r} + V\cos\psi)(v_{0\varphi} + V\sin\psi)\cos\varphi} \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = \frac{V \left[\dfrac{2\mu(1-\cos\varphi)}{r_0(v_{0\varphi} + V\sin\psi)} \cos\psi - (V + v_{0\varphi}\sin\psi - v_{0r}\cos\psi)\sin\varphi \right]}{\left[\dfrac{\mu}{r_0} - (v_{0r} + V\sin\psi)^2 \right] \sin\varphi - (v_{0r} + V\cos\psi)(v_{0\varphi} + V\sin\psi)\cos\varphi} \tag{2.16}$$

Таким образом, согласно формуле (2.2), производные дальности по начальным параметрам легко вычисляются через найденные выше производные угловой дальности, для этого необходимо полученные выражения для $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_0}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial V}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \psi}$ из формул (2.14), (2.15) и (2.16) подставить соответственно в следующие формулы:

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta_0} = R \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_0}, \quad \frac{\partial L}{\partial V} = R \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial V}, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = R \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi}$$

Полученные выражения показывают структуру зависимости отклонений дальности от малых изменений начальных параметров движения

ЛИТЕРАТУРА

1. *Охоцимский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г.* Основы механики космического полета.—М.: Наука, 1990.
2. *Аппазов Р. Ф., Сытин О. Г.* Методы проектирования траектории носителей и спутников Земли.—М.: Наука, 1987.
3. *Погорелов Д. А.* Теория кеплеровых движений летательных аппаратов.—М.: Физматгиз, 1961.
4. *Барсегян В. Р.* Область достижимости управляемого движения в гравитационном поле. Л., 1988. (Рукопись Деп. в ВИНИТИ. 18 февраля 1988 г. № 1325—В88.)

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
26.10.1992

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 1, 1995 Механика

К ЗАДАЧЕ О ПОВЕРХНОСТНЫХ УПРУГИХ ВОЛНАХ В ТОЛСТОЙ ПЛИТЕ

БЕЛУБЕКЯН В. М.

Վ. Մ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

ՀԱՍՏ ՍԱԼԻ ԵԶՐՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ուսումնասիրված են հաստ սալի եզրով տարածվող մակերևույթային ալիքները, սալի եզրին և դիմային մակերևույթներին մի քանի հնարավոր եզրային պայմանների դեպքում։ Ցույց է տրված այդ ալիքների համար տարածման անվերջ թվով մոդերի գոյությունը, որոշված են փուլային արագությունները ալիքի երկարությունից և սալի հաստությունից կախված։

V. M. BELUBEKJAH

ON THE ELASTIC SURFACE WAVES IN A THICK PLATE

Изучены поверхностные волны, бегущие вдоль кромки толстой плиты (упругого слоя), для нескольких возможных случаев граничных условий на кромке и на лицевых поверхностях плиты. Показано существование бесконечного числа мод для волн, локализованных вдоль кромки плиты. Определены фазовые скорости указанных волн в зависимости от длины волны и толщины плиты.

Рассматривается упругая плита, которая в прямоугольной декартовой системе координат занимает область: $-\infty<x<\infty$, $0\leqslant y<\infty$, $-h\leqslant z\leqslant h$. В дальнейшем для краткости поверхность $y=0$ будем называть кромкой, а поверхности $z=\pm h$—лицевыми поверхностями плиты. На лицевых поверхностях плиты заданы условия Навье или условия скользящего контакта, а на кромке плиты заданы условия частично антискользящего контакта (то есть нормальные напряжения, касательные напряжения в одном из направлений и перемещения в поперечном направлении равны нулю). Ставится задача выяснить, возможно ли распространение в плите упругих волн, затухающих при удалении от кромки. Используется метод гармонических волн, так как рассматриваемая задача, хотя и является существенно трехмерной, тем не менее близка к классической задаче Рэлея, которая исследует распространение поверхностной волны вдоль границы полупространства в рамках плоской деформации. Аналогично изучается задача распространения волны Рэлея вдоль кромки полубесконечной тонкой пластинки на основе задачи обобщенного плоского напряженного состояния [1]. Трехмерную задачу о распространении поверхностной волны вдоль кромки плиты впервые рассмотрел Зильберглейт А. С. [2] В [2] подробно изучены случаи, когда кромка плиты свободна, а на лицевых поверхностях заданы условия Навье или условия скользящего контакта. Причем во втором из этих случаев наряду с существенно трехмерной волной существует и волна Рэлея (волна плоской деформации).

В дальнейшем мы используем следующие обозначения:
λ, μ — постоянные Ламе, ρ — плотность материала, h — толщина плиты
$c_t^2=\mu/\rho$, c_t — скорость распространения объемной поперечной волны

$c_L^2=(\lambda+2\mu)/\rho$, c_L — скорость распространения объемной продольной волны
$\vec{u}$ — вектор упругих перемещений
ω — частота, k — волновое число, n — номер волны

$$\lambda_n=n\pi/h,\quad \theta=c_t^2/c_L^2,\quad a_n=\lambda_n/k,\quad \eta=\omega^2/k^2c_t^2,\quad \gamma_{1n}^2=1+a_n^2-\theta\eta,\quad \gamma_{2n}^2=1+a_n^2-\eta$$

1. Уравнения, описывающие распространение упругих волн в плите, берутся в виде

$$c_t^2\Delta\vec{u}+(c_L^2-c_t^2)\ \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \vec{u}=\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial^2 t} \qquad (1)$$

Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям на лицевых поверхностях плиты, граничным условиям на кромке плиты $y=0$ и условию затухания:

$$\lim_{y\to\infty}\vec{u}=0 \qquad (2)$$

Используя представление

$$\vec{u}=\mathrm{grad}\varphi+\mathrm{rot}\vec{\psi} \qquad (3)$$

решение уравнения (1) сводится к решению следующих уравнений [1, 2]:

$$c_L^2\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 t},\qquad c_t^2\Delta\vec{\psi}=\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial^2 t},\quad \mathrm{div}\vec{\psi}=0 \qquad (4)$$

В случае, когда на лицевых поверхностях плиты принимаются условия скользящего контакта

$$u_3=0,\quad \sigma_{13}=0,\quad \sigma_{23}=0 \quad \text{при } z=\pm h \qquad (5)$$

решения уравнений (4) в виде симметричных по z гармонических волн представляются следующим образом:

$$\varphi=\exp i(\omega t-kx)\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(y)\cos\lambda_n z$$

$$\psi_1=\exp i(\omega t-kx)\sum_{n=0}^{\infty}\psi_{1n}(y)\sin\lambda_n z$$
$$\psi_2=\exp i(\omega t-kx)\sum_{n=0}^{\infty}\psi_{2n}(y)\sin\lambda_n z \qquad (6)$$
$$\psi_3=\exp i(\omega t-kx)\sum_{n=0}^{\infty}\psi_{3n}(y)\cos\lambda_n z$$

Случай антисимметричных волн исследуется аналогично и приводится к тому же самому дисперсионному соотношению.

В случае, когда на лицевых поверхностях заданы условия Навье:

$$u_1=0,\quad u_2=0,\quad \sigma_{33}=0,\qquad \text{при } z=\pm h \qquad (7)$$

решения уравнений (4) в виде антисимметричных по z гармонических волн представляются следующим образом:

$$\varphi=\exp i(\omega t-kx)\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(y)\sin\lambda_n z$$
$$\psi_1=\exp i(\omega t-kx)\sum_{n=0}^{\infty}\psi_{1n}(y)\cos\lambda_n z$$
$$\psi_2=\exp i(\omega t-kx)\sum_{n=0}^{\infty}\psi_{2n}(y)\cos\lambda_n z \qquad (8)$$
$$\psi_3=\exp i(\omega t-kx)\sum_{n=0}^{\infty}\psi_{3n}(y)\sin\lambda_n z$$

Случай симметричных волн исследуется аналогично и приводится к тому же самому дисперсионному соотношению.

Во всех рассмотренных случаях для искомых функций φ_n, ψ_{in} из (4) получаем следующие уравнения:

$$\varphi_n''-k^2\nu_{1n}^2\varphi_n=0,\qquad \psi_{in}''-k^2\nu_{2n}^2\psi_{in}=0 \qquad (9)$$

и дополнительное условие:

$$-ik\psi_{1n}+\psi_{2n}'\pm\lambda_n\psi_{3n}=0 \qquad (10)$$

Здесь и в (4) знак «+» соответствует случаю (6), а знак «—»—случаю (8). Функции φ_n, ψ_{in} должны удовлетворять также некоторым условиям на кромке плиты и условию затухания

$$\lim_{y\to\infty}\varphi_n=0,\quad \lim_{y\to\infty}\psi_{in}=0 \qquad (11)$$

Из (9) следует, что условие затухания имеет вид:

$$0<\eta<1+a_n^2 \qquad (12)$$

и решения, удовлетворяющие условию затухания, запишутся следующим образом:

$$\varphi_n = A_n \exp(-k\nu_{1n} y), \quad \psi_{in} = B_{in} \exp(-k\nu_{2n} y) \quad (k>0) \tag{13}$$

Согласно (10) постоянные B_{in} должны удовлетворять уравнению

$$iB_{1n} + \nu_{2n} B_{2n} \pm a_n B_{3n} = 0 \tag{14}$$

Граничные условия на кромке плиты. Случай, когда кромка плиты свободна, подробно исследован в [2]. Представляет интерес исследование вопроса о существовании поверхностных волн при других случаях задания граничных условий на кромке плиты. Можно показать, что аналогично классической задаче Рэлея, при условиях закрепления ($u_1 = u_2 = u_3 = 0$), скользящего контакта ($u_2 = \sigma_{21} = \sigma_{23} = 0$) и условиях Навье ($u_1 = u_3 = \sigma_{22} = 0$) поверхностной волны не существует. Следует отметить, что в случае граничных условий Навье существует предельная волна [3], то есть объемная волна, распространяющаяся вдоль оси x и не зависящая от координаты y. Известно, что такая волна может при малых изменениях в условиях превратиться в поверхностную волну (неустойчивость предельной волны). Однако рассматриваемая пространственная задача кроме указанных, часто используемых граничных условий, допускает постановку и других корректных в математическом смысле условий. Например, можно решать задачу в случае, когда $u_2 = u_3 = \sigma_{21} = 0$ при $y = 0$ («частично скользящий контакт»). Очевидно, что если условия скользящего контакта не допускают поверхностной волны, то ее не будет и при частично скользящем контакте.

Граничные условия

$$u_3 = 0, \quad \sigma_{21} = 0, \quad \sigma_{22} = 0 \qquad \text{при } y = 0 \tag{15}$$

являются промежуточными между условиями свободной кромки и условиями Навье. В этом случае результат задачи не очевиден. С учетом (3), граничные условия (15) приводятся к виду:

$$\lambda \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right] + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2\mu \left[\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z}\right] = 0$$

$$2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0 \tag{16}$$

Рассмотрим сначала случай скользящего контакта на лицевых поверхностях. Подставляя решения (6) и (13) в (16) и учитывая соотношение (4), получим следующую систему однородных уравнений относительно произвольных постоянных A_n и B_{in}:

$$\begin{gathered}(2 + 2a_n^2 - \eta)A_n - 2\nu_{2n}(iB_{3n} + a_n B_{1n}) = 0 \\ 2i\nu_{1n} A_n + (2 + a_n^2 - \eta)B_{3n} - a_n(iB_{1n} - \nu_{2n} B_{2n}) = 0 \\ -a_n A_n - iB_{2n} + \nu_{2n} B_{1n} = 0\end{gathered} \tag{17}$$

$$iB_{1n} + \nu_{2n} B_{2n} + a_n B_{3n} = 0$$

Можно показать, что и для всех оставшихся случаев (антисимметричные волны при условиях скользящего контакта на лицевых поверхностях; симметричные и антисимметричные волны при условиях Навье на лицевых поверхностях) уравнения для A_n, B_{in} также сводятся к уравнениям (17). Таким образом, во всех этих случаях поверхностная волна существует, если детерминант системы (17) равен нулю. Это условие приводит к следующему дисперсионному соотношению:

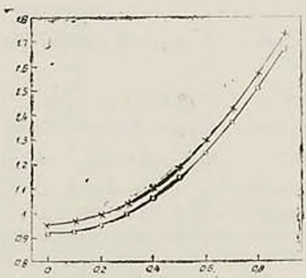
$$R_n(\eta) = (2-\eta)^2 + a_n^2(4-\eta) - 4\nu_{1n}\nu_{2n} = 0 \tag{18}$$

В отличие от дисперсионного уравнения задачи со свободной кромкой [2], уравнение (18) не приводится к уравнению Рэлея. Замечая, что $\eta=0$ является корнем уравнения (18) и исключая указанный корень [4], получим новую форму записи уравнения (18):

$$R_{1n}(\eta) = \eta - a_n^2 - 4(1-\theta)\nu_{2n}(\nu_{1n}+\nu_{2n})^{-1} = 0 \tag{19}$$

Не трудно проверить, что функция $R_{1n}(\eta)$ обладает следующими свойствами:

$$R_{1n}(0)<0, \quad R_{1n}(1+a_n^2)>0, \quad R'_{1n}(\eta)>0 \tag{20}$$



η; □ соответствует случаю $\theta=0$, × - случ...

Фиг. 1.

что и доказывает, что при $0<\eta<1+a_n^2$ для каждого a_n уравнение (20) имеет единственный корень. На фиг. 1 приведены графики зависимости η от a_n для двух предельных значений θ. Таким образом, граничные условия (15) допускают существование волны, локализованной вдоль кромки полубесконечной плиты. Рассмотрим волну с номером $n=0$. В случае скользящего контакта на лицевых поверхностях получим в точности волну Рэлея ($w=0$ всюду). В случае условий Навье на лицевых поверхностях получим тривиальное решение

$$u=v=w=0 \text{ при } n=0.$$

Рассмотрим граничные условия вида

$$u_1=0,\quad \sigma_{23}=0,\quad \sigma_{12}=0 \qquad \text{при } y=0 \tag{21}$$

Следует отметить, что для задачи плоской деформации $\sigma_{23}=0$ всюду и условия (21) соответствуют условиям Навье, для которых поверхностная волна не существует. Система уравнений, определяющих постоянные A_n, B_{in}, соответствующие условиям (21) для обоих случаев граничных условий на лицевых поверхностях плиты, записывается следующим образом:

$$\begin{gathered}
(2+2a_n^2-\eta)A_n-2\nu_{2n}(iB_{3n}+a_nB_{1n})=0\\
2a_n\nu_{1n}A_n-(1+2a_n^2-\eta)B_{1n}+i(\nu_{2n}B_{2n}-a_nB_{3n})=0\\
iA_n+\nu_{2n}B_{3n}+a_nB_{2n}=0\\
iB_{1n}+\nu_{2n}B_{2n}+a_nB_{3n}=0
\end{gathered} \tag{22}$$

Можно показать, что и для всех оставшихся случаев симметричные волны при условиях скользящего контакта на лицевых поверхностях, симметричные и антисимметричные волны при условиях Навье на лицевых поверхностях уравнения для A_n, B_{1n} также сводятся к уравнениям (22). Дисперсионное уравнение типа Рэлея, соответствующее системе (22), после некоторых преобразований приводится к виду:

$$R_n(\eta)\equiv\eta(\eta-1)-4a_n^2\nu_{2n}(\nu_{2n}-\nu_{1n})=0 \tag{23}$$

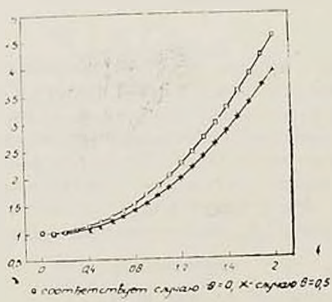
Исключая в (23) корень $\eta=0$, получим другую форму дисперсионного уравнения:

$$R_{1n}(\eta)\equiv\eta-1-4a_n^2(1-\theta)\nu_{2n}(\nu_{1n}+\nu_{2n})^{-1}=0 \tag{24}$$

Функция $R_{1n}(\eta)$ обладает следующими свойствами:

$$R_{1n}(0)<0,\qquad R_{1n}(1+a_n^2)>0,\qquad R'_{1n}(\eta)>0 \tag{25}$$

откуда следует существование для каждого a_n, единственного корня уравнения (24), следовательно, и уравнения (23) в интервале $0<\eta<1+a_n^2$. На фиг. 2 приведены графики зависимости η от a_n для двух предельных значений θ. При $n=0$ уравнение не имеет корня в этом интервале. Корень $\eta=1$ при $a_n=0$ соответствует предельной волне.



Фиг. 2.

В [2] показано, что в случае свободной кромки плиты возникает два типа поверхностных волн: волны, являющиеся обобщением волн Рэлея, и волны, порожденные неустойчивостью предельной объемной сдвиговой волны. Очевидно, что в случае, когда на кромке плиты заданы условия (15), поверхностная волна является обобщением волны Рэлея. В пределе при $h\to\infty$ она переходит в волну Рэлея. В случае (21), напротив, существует только волна, порожденная неустойчивостью предельной объемной сдвиговой волны. В отличие от [2] эта волна дисперсионная.

ЛИТЕРАТУРА

1. Achenbach J. D. Wave Propagation in Elastic Solids. — Amsterdam: North Holl. Publ. Co., 1976.
2. Зильберглейт А. С. О поверхностных упругих волнах в толстой плите. — Акустический журнал, 1980, т. 26, вып. 3, с. 416—421.
3. Балакирев М. К., Гилинский И. А. Волны в пьезокристаллах. — Новосибирск: Наука, 1982. 239 с.
4. Белубекян М. В. Об условии существования волны Стоунли при скользящем контакте. — Изв. АН АрмССР, Механика, 1990, т. 43, № 4, с. 52—56.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
17.08.1990

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 1, 1995 Механика

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АКТИВНОЙ ОБЛАСТИ ПОДГОТОВКИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

МКРТЧЯН М. С.*, ХАЧИКЯН А. С.

Մ. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, Ա. Ս. ԽԱՉԻԿՅԱՆ

ԵՐԿՐԱՇԱՐԺԻ ՆԱԽԱՊԱՏՐԱՍՏՈՒԹՅԱՆ ԱԿՏԻՎ ՏԻՐՈՒՅԹԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

Դիտարկված են երկրաշարժի նախապատրաստության պրոցեսները տարբեր ֆիզիկական բնույթի կանխանշանների և ընթացող պրոցեսների ուժգնության միջև քանակական կապ հաստատելու նպատակով։ Առաջարկվում է մտցնել որոշակի լոկալ կապ ընթացող պրոցեսների ուժգնության և երկրակեղևի դեֆորմացիաների միջև, որ ստեղծում է հոծ միջավայրի մեխանիկայի ապարատի օգտագործման հնարավորություն։

Առաջարկված ֆունկցիոնալ կապի հիման վրա ստացված են կանխանշանների մեծության գնահատականներ և նախապատրաստության ընթացող պրոցեսների ինտեգրալ բնութագրիչների որոշման համար կառուցված է տրանսցենդենտ հավասարումների համակարգ։ Միալափ դեպքի համար ուսումնասիրված է երկրաշարժի օջախի զարգացման ընթացքի վրա նախապատրաստության պրոցեսի ազդեցությունը։

M. S. MKRTCHIAN, A. S. KHACHIKIAN

THE LOCATION OF ACTIVE REGION PREPARATION OF EARTHGUAKES

Процессы подготовки (ПП) землетрясении обсуждены многими исследователями и их связи с прогнозом землетрясений. Из-за невозможности непосредственного наблюдения за реальными ПП истинность предложенных гипотез проверяется по косвенным критериям—возможности качественного и количественного объяснения появления наблюдаемых предвестников и подобию завершающей картины процесса сейсмологическим данным о зарегистрированных землетрясениях. Однако, в большинстве случаев эти обсуждения носят качественный характер и только небольшое число публикаций содержит количественный расчет в достаточно строгой постановке. Установление количественной связи между величинами наблюдаемых предвестников и характеристиками предполагаемых ПП связано с преодолением определенных трудностей, что и служит темой данной статьи.

1. Высказаны разные идеи о сущности физических процессов, происходящих при подготовке землетрясений. В одних из них, в той или

* совместно с М. С. Мкртчяном выполнен п. 4 статьи

иной мере близких к теории упругой отдачи Рейда, преобладает понимание ПП как механических актов движения и взаимодействия иерархической системы блоков земной коры с привлечением идей механики разрушения [1—4]. В других идеях придается преобладающее значение участию в ПП различных физических и химических процессов: потоку вещества и энергии из мантии, диффузии и фильтрации флюидов, изменению физико-механических свойств и состояний пород под влиянием флюидов и других факторов [5—6]. В качестве предвестников воспринимаются отличные от фоновых значений наблюдаемые величины деформаций земной коры, характеристик распространения упругих волн, напряженности поля земных токов, электросопротивления горных пород, характеристик состава и состояния подземных вод и других проявлений ПП.

Так или нет в действительности, но мы вынуждены признать возможность существования разных типов ПП и принять к обсуждению разные идеи. Также мы в настоящее время не в состоянии уверенно разобраться, какие из наблюдаемых предвестниковых явлений являются просто случайными, сопуствующими в рассматриваемом регионе, и какие качественно и количественно однозначно связаны с интенсивностью протекающих ПП.

Подходя с конца проблемы, сформулируем, что же мы хотели бы иметь.

С одной стороны, мы имеем некоторые наблюдаемые физические величины, отклонение которых от обычных, фоновых значений $\Pi(x,t)$ воспринимаются нами как предвестниковые величины. В то же время мы предполагаем, что в очаговой области будущего землетрясения происходят некоторые физические процессы, характеризующиеся своей интенсивностью $f(x,t)$, развитие которых приводит к землетрясению, а процесс их развития отражается в поведении предвестников. Очевидно, что нам желательно иметь функциональную связь

$$\Pi_{ij}(x,t)=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{t} f_j(\xi,\tau)K_{ij}(x,t,\xi,\tau)\,d\omega\, d\tau \tag{1}$$

Здесь $\Pi_{ij}(x,t)$ —значение i-ого предвестника согласно j-ой гипотезе о ПП в точке наблюдения с координатами x в момент времени t. $f_j(x,t)$—интенсивность ПП согласно j-ой гипотезе в соответствующей точке. Ядро функционала $K_{ij}(x,t,\xi,\tau)$ должно быть определено применительно к каждому предвестнику и гипотезе о ПП. Интеграл распространяется на всю активную область Ω подготовки землетрясения. В дальнейшем индексы опускаем.

Рассматривая интенсивность $f(x,t)$ как внешнее воздействие на состояние физического поля, значение которого на поверхности земной коры представляет собой наблюдаемые предвестники $\lim\limits_{z\to z_0} U(x,t)=$ $=\Pi(x_0,t)$, можем написать

$$L(U(x,t),\ f(x,t))=0 \qquad (2)$$

Здесь L—дифференциальный оператор, характеризующий физическое поле определенного предвестника.

Очевидно, что функционал (1) есть результат интегрирования уравнения (2).

При построении, в конкретном случае, функционала (1), оценивая $f(x, t)$ на основании физических соображений и имеющегося опыта, можно провести сравнение поведений вычисленных предвестников и их реально наблюдаемых значений. Такое сопоставление поможет реально оценить предложенную идею о ПП не только качественно, но и количественно и может использоваться также в практических вопросах прогноза землетрясений.

Во многих случаях ПП можно рассматривать как квазистатические, медленные процессы. Тогда вместо (1) будем иметь

$$\Pi(x,t) = \int\limits_{\omega} f(\xi,t)K(x,\xi)d\omega \qquad (3)$$

В принципе, такой подход реализован в работах [1, 7—9]. В [1, 7] за внешнее воздействие (интенсивность ПП) принято изменение модуля упругости пород в активной области. Тогда (2)—уравнения теории упругости, $\Pi(x, t)$—деформации земной коры. Оценивая изменения упругих постоянных, авторы обсуждают возможности предложенной консолидационной гипотезы. В [8, 9] в качестве внешнего воздействия приняты объемные деформации теплового типа, построен в этом частном случае функционал (3) и проводятся сходные обсуждения.

2. Описанный в п. 1 подход для количественного анализа ПП имеет один существенный недостаток: количество подлежащих построению функционалов (3) достигает нескольких сотен, так как количество наблюдаемых предвестников, а также выдвинутых гипотез о ПП достигает нескольких десятков. При этом, если даже все эти функционалы будут построены, получение равноценных сравнимых оценок для различных физических процессов при известных точностях исходных данных весьма проблематично.

Задача может быть намного упрощена, если мы примем, что интенсивность происходящих процессов ПП локально эквивалентна некоторым деформациям

$$f(x,t)\sim\varepsilon(x,t) \qquad (4)$$

Это тождественно для гипотез, рассматривающих ПП как механические процессы взаимодействия блоков земной коры. Такая эквивалентность имеет место и при воздействии несвязанных физических полей, например, при распространении тепла. Тогда, роль соответствующих дифференциальных уравнений (2) выполняют уравнения механики сплошной среды, в частности, теории упругости и можно пользоваться развитыми мощными методами. При таком подходе разные физические процессы рассматриваются независимо и в общие уравнения входят на основании локального физического соотношения (4). Общая краевая задача ставится и решается методом механики сплошной среды, чем обеспечивается одинаковая, сравнимая точность при обсуждении разных физических идей.

3. Рассмотрим практически важный случай ПП, выражающийся в изменении объема (дилатансии) в активной области. С учетом соотношения (4) имеем

$$\Pi(x,t)=\int_{\Omega}\varepsilon(x,t)K(x,\xi)d\omega \tag{5}$$

где $\varepsilon(x,t)$ — объемные деформации.

Для предвестников — деформаций поверхности Земли — явное выражение (5) приведено в [8, 9]. Для составляющего горизонтального перемещения, например, имеем

$$K(x,\xi)=A(x_1-\xi_1)\left[R_1^{-3}+(3-4\nu)R_2^{-3}-6x_3(x_3+\xi_3)R_2^{-5}\right]$$

$$\text{где}\quad R_{1,2}=\left[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3\mp\xi_3)^2\right]^{1/2}$$

Из (5) могут быть получены некоторые оценки для величин ожидаемых предвестников.

3.1. Применив к (5) неравенство Коши-Буняковского, получим

$$|\Pi(x,t)|\leqslant E(t)\cdot k(x,\Omega) \tag{6}$$

где

$$E=\left|\int_{\Omega}\varepsilon^2(\xi,t)d\omega\right|^{1/2};\qquad k(x,\Omega)=\left|\int_{\Omega}K^2(x,\xi)d\omega\right|^{1/2}$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае E пропорциональна запасенной упругой энергии $E=(mE_0)^{1/2}$.

Используем известные эмпирические связи [10, 11]

$$\begin{gathered}\lg E=aM+b\\ E=eV=eL^3\end{gathered} \tag{7}$$

где M — магнитуда; a, b, e — постоянные; V — объем; L — характерный размер очага, получим

$$\begin{gathered}|\Pi(x,t)|\leqslant m^{1/2}E_0^{1/2}k(x,\Omega)\\ |\Pi(x,t)|\leqslant m^{1/2}\cdot 10^{0.5(aM+b)}\,k(x,\Omega)\\ |\Pi(x,t)|\leqslant m^{1/2}e^{1/2}V^{1/2}k(x,\Omega)=m^{1/2}e^{1/2}L^{3/2}k(x,\Omega)\end{gathered} \tag{8}$$

Таким образом, величины ожидаемых значений предвестников могут быть оценены в зависимости от энергии, магнитуды и характерных размеров очага готовящегося землетрясения. Отметим, что мы пока не делаем различий между всей запасенной в ходе подготовки упругой энергией и ее долей, выделяемой при землетрясении.

3.2. Полагая интенсивность объемных деформаций постоянной по активной области и равной некоторому ее среднему значению и опуская коэффициент пропорциональности, имеем

$$\varepsilon(x,t)=\varepsilon_0(t)\sim\sqrt{\frac{E_0}{V}}=\sqrt{e} \qquad (9)$$

$$\Pi(x,t)=\varepsilon_0(t)\cdot k'(x,\Omega)$$

$$k'(x,\Omega)=\int\limits_{\Omega}k(x,\xi)d\omega \qquad (10)$$

Вводя здесь эмпирические связи (7), получим другие оценки для ожидаемых величин предвестников.

$$\Pi(x,t)=e^{1/2}k'(x,\Omega)\sim\left(\frac{E_0}{V}\right)^{1/2}k(x,\Omega)$$

$$\Pi(x,t)\sim k(x,\Omega)V^{-1/2}\cdot 10^{0.5(aM+b)} \qquad (11)$$

$$\Pi(x,t)=E_0^{1/2}L^{-3/2}k'(x,\Omega)$$

Основным препятствием на пути применений соотношений (5), (8), (11) является неизвестность формы и расположения активной области Ω и поэтому может быть применен полуобратный метод (задаваясь Ω) анализа, а также анализ ситуаций прошлых землетрясений.

3.3 Предположим применимость принципа Сен-Венана в том смысле, что для величин наблюдаемых предвестников на удаленных станциях влияние формы активной области пренебрежимо мало. Тогда, принимая эту форму определенной (сфера, эллипсоид, призматическое тело), можно в (6, 8, 10, 11) вместо $k(x,\Omega)$, $k'(x,\Omega)$ написать $k(x,d)$, $k'(x,d)$, где d—вектор, размерность которого определяется количеством координат, определяющих положение и форму активной области при принятом предположении.

Тогда оценки (11) принимают вид

$$\Pi(x,t)\sim E_0^{1/2}V^{-1/2}k'(x,d)$$

$$\Pi(x,t)\sim k'(x,d)V^{-1/2}\cdot 10^{0.5(aM+b)} \qquad (12)$$

$$\Pi(x,t)\sim E_0^{1/2}L^{-3/2}k'(x,d)$$

Подставив в левую часть (12) реально наблюдаемые значения предвестников поочередно для всех участвующих в наблюдениях станций, получим систему уравнений.

Таким образом, при наличии достаточного количества наблюдательных станций становится возможным определение положения и и размеров активной области, а также текущего значения средней энергетической насыщенности и других интегральных характеристик активной области. Сравнение $e\leqslant e^*$, где e^*—критическое значение энергетической насыщенности, может использоваться, при некоторых дополнительных предположениях [10, 11], для оценки времени готовящегося землетрясения.

4. Развитие процессов в активной области подготовки землетрясения приводит к разрушению в толще коры Земли и образованию очага землетрясения. Механика очага землетрясения изучена многими авторами [12]. Однако, многие аспекты сложного перехода квазистатических ПП в динамические процессы очага, в частности, влияние вида протекающих процессов на дальнейший ход событий, все еще не ясны. Рассмотрим с этой точки зрения один относительно простой, одномерный вариант.

Пусть активная область ПП представляет собой бесконечное призматическое тело, поперечные сечения которого остаются всегда плоскими. Для простоты примем, что по периметру эта область взаимодействует с окружающей средой, которая оказывает сопротивление ее движению, пропорциональное перемещениям. Это предположение не противоестественно, пока перемещения и скорости имеют одинаковый знак.

В принятых условиях дифференциальное уравнение движения среды будет

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \alpha^2 u = \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} \qquad (13)$$

Здесь $\tau = at$, $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ — скорость упругой волны, $\alpha = \frac{c}{a}$, $c^2 = \frac{kl}{\rho s}$, ρ — плотность, s — площадь поперечного сечения, l — периметр призматического тела, k — коэффициент сопротивления движению со стороны окружающей среды, ε_0 — внешнее воздействие в виде деформаций растяжения.

Предположим, что первоначальное полное сцепление с окружающей средой может нарушиться в следующем смысле. По достижению напряжений $\sigma = E\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_0\right)$ на элементарном участке Δl_1 значения $\sigma \geqslant [\sigma]$, на Δl_1 коэффициент, содержащий сопротивление среды α, меняется на $\alpha' < \alpha$ и в дальнейшем остается постоянным. Таким образом, участки с меньшим значением коэффициента сцепления могут только расширяться. Это условие в некоторой степени моделирует условия возникновения (зарождения) и развития трещины.

При таких предположениях рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения (13) с начальными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \qquad (14)$$

Задача Коши решается численно. Принято $\Delta l_1 = 3\Delta x$, $\Delta x = 3\Delta\tau$.

Некоторые результаты расчета показаны на фиг. 1. Как видно из фиг. 1а, в обе стороны от возмущенного участка $(0, b)$ распространя-

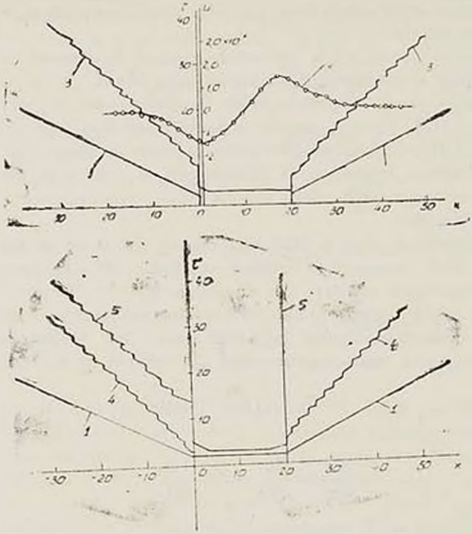


Рис. 1. 1 — фронт волны сжатия. 2 — перемещения:

$$\varepsilon_0 = 10^{-2}(1-\exp(-mt))\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\frac{2x-b-vt}{b+vt}\right);\ b=20,\ v=0.05;\ \sigma=10^{-2};\ \sigma'=10^{-3},\ a-m=0.02;\ b-m=0.2;$$

3, 4 — развитие „трещины" при $|\sigma| = 4\cdot 10^{-4}$, 5 — то же при $|\sigma| = 4{,}6\cdot 10^{-3}$.

ются волны сжатия со скоростью звука для среды. При больших [σ] «трещина» не возникает. При меньшем [σ], симметричном ε_0, и $v \ll a$ возникает и распространяется «трещина» в обе стороны от возмущенного участка (кривые 3, 4). При несимметричном ε_0 и сдвиге возмущенной области со скоростью $v < a$ есть случаи, когда «трещина» развивается только в одну сторону от возмущенной области (кривая 5). Причем «трещина» или не распространяется, или развивается с постоянной, меньшей чем скорость упругой волны $\left(\approx \frac{a}{2}\right)$, скоростью.

Распространение «трещины» в одну сторону показывает, что внутренние неоднородности и несимметричность формы и положения возмущенной области могут привести к наблюдению несимметричной общей картины развития магистральной трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добровольский И. П., Зубков С. И., Мячкин В. И. Об оценке размеров зоны проявления предвестников землетрясений. — Сб.: Моделирование предвестников землетрясений. М.: Наука, 1980, с. 7—44.

2. Гзовский М. В. Основы тектонофизики.—М.: Наука, 1975. 536 с.
3. Григорян С. С. О предсказании землетрясений.—ДАН СССР, 1989, т. 306, №5, с. 1083—1087.
4. Быковцев А. С., Черепанов Г. П. Об одной модели очага тектонического землетрясения.—ДАН СССР, 1980, т. 251, № 6.
5. Пономарев А. С. Теплогазодинамическая модель коровых землетрясений.—Изв. АН СССР, физика Земли, 1990, № 10, с. 100—112.
6. Физические основания поисков методов прогноза землетрясений.—М.: Наука, 1970, 151 с.
7. Добровольский И. П. Механика подготовки тектонического землетрясения.—М.: Институт Физики Земли АН СССР, 1984. 188 с.
8. Хачикян А. С. О проблеме прогноза тектонических землетрясений.—ДАН АрмССР, 1991, т. 92, № 5, с. 201—205.
9. Хачикян А. С., Тоноян В. С., Мкртчян М. С. О предвестниках тектонических коровых землетрясений.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1991, т. 44, № 5.
10. Рикитаке. Предсказание землетрясений.—М.: Мир, 1979. 388 с.
11. Григорян С. С. О механизме возникновения землетрясений и содержании эмпирических закономерностей сейсмологии.—ДАН СССР, 1988, т. 299, №5, с. 1094—1101.
12. Костров Б. В. Механика очага тектонического землетрясения.—М.: Наука, 1975. 176 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
14.07.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48. № 1, 1995 Механика

КВАЗИАДИАБАТИЧЕСКИЙ РЕЖИМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

ОГАНЯН Г. Г.

Գ. Գ. ՕՀԱՆՅԱՆ

ԳԱԶԱՀԵՂՈՒԿ ԽԱՌՆՈՒՐԴՈՒՄ ԱԼԻՔԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ՔՎԱԶԻԱԴԻԱԲԱՏ ՌԵԺԻՄԸ

Դուրս է բերված Բուսինեսկի տիպի գծային հավասարումը, որի ֆակտորիզացիայից հետո ստացված է էվոլյուցիոն հավասարում։ Ստացված են դիսիպատիվ գործակիցների ջերմային բաղադրիչների ակնհայտ կախվածությունը խառնուրդի ջերմաֆիզիկական հատկություններից։

G. G. OHANIAN

THE QUASIADIABATICALL REGIME OF WAVE PROPAGATION IN GAS-BUBBLES MIXTURE

Исследуется влияние межфазного теплообмена на режим распространения волны при термодинамическом поведении газа в пузырьке, отличающемся, хотя и не намного, от адиабатического. Выведено линейное уравнение типа Буссинеска, факторизация которого приводит к полному его совпадению с линейной частью нелинейного эволюционного уравнения, полученного ранее автором. Тем самым, обосновывается корректность применения метода коротких волн к исследованию волновых процессов в газожидкостной смеси. Получены явные виды зависимостей тепловых составляющих коэффициента диссипации от теплофизических параметров смеси.

В рамках механики сплошной среды модель газожидкостной смеси, наиболее полно описывающей различного рода межфазные взаимодействия и механизмы диссипации, предложена в [1, 2]. Затухание колебаний газового пузырька за счет эффектов вязкости и теплопроводности исследовано в [3], а за счет межфазного теплообмена—в [4, 5]. Результаты экспериментов и численных исследований, приведенные соответственно в [6, 7] и [8, 9], впервые свидетельствовали, что в ряде случаев главным механизмом диссипации может явиться межфазный теплообмен между пузырьками и жидкостью. В [10] различаются промежуточные квазиизотермический и квазиадиабатический режимы распространения слабых волн, описываемыми нелинейными эволюционными уравнениями, полученными методом [11] коротких волн. В настоящей работе числовые данные, следуемые из выведенных формул, хорошо согласуются с результатами известных [12] экспериментов по выявлению зависимости фазовой скорости волны от ее частоты.

1. Исходные уравнения. Рассмотрим бесстолкновительную монодисперсную газожидкостную смесь, в которой отсутствуют процессы дробления, слипания и образования новых пузырьков. Систему одномерных уравнений, описывающую односкоростное течение рассматриваемой смеси с учетом эффекта вязкости, сжимаемости жидкости и межфазного теплообмена, возьмем в виде [1]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x} \tag{1.1}$$

$$\rho\frac{du}{dt}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{4}{3}\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1\beta\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right] \tag{1.2}$$

$$P_2-P=(1-\varphi_1)\rho_1 R\frac{d^2R}{dt^2}+(1-\varphi_2)\frac{3}{2}\rho_1\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\frac{4}{R}\mu\frac{dR}{dt} \tag{1.3}$$

$$\frac{\rho_2\beta}{\rho_1(1-\beta)}=\mathrm{const},\ \rho_2R^3=\mathrm{const},\ P_2=c_{v2}(\gamma-1)\rho_2T_2 \tag{1.4}$$

$$\rho=\rho_1(1-\beta)+\rho_2\beta, \quad P=P_1(1-\beta)+P_2\beta \tag{1.5}$$

$$\frac{dP_2}{dt}+\frac{3\gamma P_2}{R}\frac{dR}{dt}+\frac{3(\gamma-1)k_2\mathrm{Nu}}{2R^2}(T_2-T_0)=0 \tag{1.6}$$

$$\rho_1T_0\frac{ds_1}{dt}=\frac{4}{3}\frac{1}{1-\beta}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{12\beta}{R^2}\mu\left(\frac{dR}{dt}\right)^2, \quad T_1=T_0 \tag{1.7}$$

$$\varphi_1=(1{,}1\beta^{1/3}-\beta)(1-\beta), \quad \varphi_2=(1{,}5\beta^{1/3}-1{,}3\beta)/(1-\beta)$$

Здесь индексы 1 и 2 отнесены соответственно к параметрам жидкой и газовой фаз; параметры, отнесенные ко всей смеси в целом, индексов не имеют: ρ—плотность, P—давление, R—радиус пузырька, T—температура, β—объемное газосодержание, γ—показатель адиабаты газа, c_{v2}—удельная теплоемкость при постоянном объеме, k_2 и μ—коэффициенты теплопроводности и вязкости, Nu—число Нуссельта, поправочные коэффициенты φ_1 и φ_2 учитывают неодиночность пузырька в смеси. В принимаемой модели смеси полагается, что отсутствуют внешние источники тепла и, поскольку масса жидкой фазы и величины ее теплоемкостей подавляюще превосходят те же характеристики газовой фазы, температура несущей жидкости принимается постоянной ($T_1=T_0=\mathrm{const}$).

Предположим, что при возмущении смеси величины избыточных параметров течения малы ($i=1,2$).

$$u=\varepsilon a_0u', \ P=P_0(1+\varepsilon P'), \ P_i=P_0(1+\varepsilon P_i'), \ \rho=\rho_0(1+\varepsilon\rho')$$

$$\rho_i=\rho_{i0}(1+\varepsilon\rho_i'), \ \beta=\beta_0(1+\varepsilon\beta'), \ R=R_0(1+\varepsilon R') \tag{1.8}$$

$$T_2=T_0(1+\varepsilon T'), \quad s_1=s_{10}(1+\varepsilon s_1')$$

Здесь индекс 0 отнесен к невозмущенному состоянию смеси, являющемуся состоянием покоя, ε—безразмерный малый параметр, a—скорость звука в смеси. Линеаризация уравнения (1.7) показывает, что в рассматриваемом приближении $s_1'=0$. Поэтому, разлагая функцию состояния $P_1=P_1(\rho_1, s_1)$ в ряд Тейлора в окрестности состояния локального термодинамического равновесия жидкой фазы и ограничиваясь линейными членами, будем иметь

$$P_1'=\frac{\rho_{10}a_{10}^2}{P_0}\rho_1', \quad a_{10}^2=\left(\frac{\partial P_1}{\partial \rho_1}\right)_0$$

Комбинируя последнюю формулу с линейными соотношениями, получаемыми, согласно (1.8), из алгебраических соотношений (1.4) и (1.5), получим

$$P'=(1-\beta_0)P_1'+\beta_0 P_2', \quad \rho'=(1-\beta_0)\rho_1'+\beta_0\rho_2', \quad \rho_2'=-3R'$$

$$P_2'=T'-3R', \quad \rho'=\frac{P_0}{\rho_{10}a_{10}^2}(P'-\beta_0 T')-3\beta_0\left(1-\frac{P_0}{\rho_{10}a_{10}^2}\right)R' \tag{1.9}$$

Линеаризуя уравнения (1.1) и (1.2), придем к системе, из которой путем последовательного исключения возмущения скорости u', а затем и избыточной плотности ρ' посредством последнего соотношения из (1.9) выводится уравнение

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2}-\frac{\rho_{10}a_{10}^2}{\rho_0}\frac{\partial^2 P'}{\partial x^2}+3\beta_0\left(1-\frac{\rho_{10}a_{10}^2}{P_0}\right)\left(\frac{\partial^2 R'}{\partial t^2}-\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0}\frac{\partial^3 R'}{\partial t\partial x^2}\right)-$$

$$-\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0}\frac{\partial^3 P'}{\partial t\partial x^2}=\beta_0\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2}-\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0}\frac{\partial^3 T'}{\partial t\partial x^2}\right) \tag{1.10}$$

Линеаризация уравнения Рэлея-Лэмба (1.3) и его последующее комбинирование с третьим соотношением из (1.9) дает

$$R'=\frac{1}{3}(T'-P')-\frac{(1-\varphi_{10})\rho_{10}R_0^2}{3P_0}\frac{\partial^2 R'}{\partial t^2}-\frac{4}{3}\frac{\mu}{P_0}\frac{\partial R'}{\partial t} \tag{1.11}$$

Если же линеаризовать уравнение (1.6) и затем использовать четвертое соотношение из (1.9), то будем иметь

$$\frac{\partial T'}{\partial t}+3(\gamma-1)\frac{\partial R'}{\partial t}+\frac{3\gamma\lambda_2\mathrm{Nu}}{2R_0^2}T'=0, \quad \lambda_2=\frac{k_2}{c_{p2}\rho_{20}} \tag{1.12}$$

Здесь λ_2—коэффициент температуропроводности, c_{p2}—удельная теплоемкость газа при постоянном давлении.

2 *Квазиадиабатический режим.* Далее будет исследоваться волновой режим, в котором термодинамическое поведение газа в пузырьках, хотя и ненамного, но отличается от адиабатического. В работах [1, 4, 5, 9] для удобства исследований введены в рассмотрение безразмерное число Пекле и показано, что в исследуемом режиме числа Пекле и Нуссельта велики, при этом имеет место важная оценка

$$\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\sim\varepsilon, \quad \mathrm{Nu}=\mathrm{Pe}\,\frac{\sqrt{\mathrm{Pe}}-2}{\mathrm{Pe}-6\sqrt{\mathrm{Pe}}+12} \tag{2.1}$$

Приведенная оценка характеризует именно квазиадиабатический режим, Pe—число Пекле, определяемое формулой

$$\mathrm{Pe}=\frac{2R_0^2}{\lambda_g}\omega_{ar},\quad \omega_{ar}=\frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_{10}}}$$

Здесь ω_{ar}—адиабатическая резонансная частота Миннаерта. Система уравнений (1.10)—(1.12) является замкнутой и полностью описывает различные режимы распространений волн малых, но конечных амплитуд. Она отличается от системы, исследованной ранее другими авторами, наличием в уравнениях слагаемых, ответственных за описание эффекта межфазного теплообмена. Решение системы будем искать в виде бегущих волн, характеризуемыми волновым числом k и частотой ω

$$P=P_*\exp[i(kx-\omega t)],\quad R=R_*\exp[i(kx-\omega t)],\quad T=T_*\exp[i(kx-\omega t)]$$

Здесь и далее штрихи над возмущениями параметров течения опускаются.

Условие существования ненулевых решений для системы однородных уравнений относительно амплитуд P_*, R_*, T_* и использование характерной оценки (2.1) позволяет получить дисперсионное уравнение

$$\begin{gathered}-\frac{3\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\omega_{ar}\frac{a_{fo}^2}{a_{eo}^2}(\omega^2-a_{eo}^2k^2)+i\omega(\omega^2-a_{fo}^2k^2)-\\ -\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0}\omega^2k^2+\left[\left(\frac{4}{3}\frac{\mu}{\gamma P_0}\frac{\rho_0a_{fo}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}+\frac{3\gamma\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\frac{\omega_{ar}}{\omega_{ar}^{*2}}\frac{\rho_0a_{fo}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\right)\omega^2-\right.\\ \left.-\frac{1-\varphi_{10}}{\omega_{ar}^2}\frac{\rho_0a_{fo}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}i\omega^3\right]\left(\omega^2-\frac{\rho_{10}a_{10}^2}{\rho_0}k^2\right)=0\end{gathered}\qquad(2.2)$$

Здесь a_{eo} и a_{fo}—значения адиабатической и изотермической скоростей звука в смеси в состоянии покоя, определяемые формулами [2, 7]

$$\frac{1}{a_{fo}^2}=\frac{(1-\beta_0)\rho_0}{\rho_{10}a_{10}^2}+\frac{\beta_0\rho_0}{\gamma P_0},\quad \frac{1}{a_{eo}^2}=\frac{(1-\beta_0)\rho_0}{\rho_{10}a_{10}^2}+\frac{\beta_0\rho_0}{P_0}$$

При выводе уравнения (2.2) пренебрежено, как обычно, взаимным воздействием друг на друга эффектов вязкости, дисперсии и межфазного теплообмена. В отсутствие теплообмена ($\mathrm{Pe}\to\infty$) и вязкости дисперсионному уравнению (2.2) соответствует дифференциальное уравнение, называемое двухволновым [7], которое описывает чисто адиабатический волновой режим. Поскольку величине ω соответствует оператор $(i\partial/\partial t)$, а k—оператор $(-i\partial/\partial x)$, постольку из (2.2) можно восстановить линейное уравнение, описывающее поведение избыточного давления

$$\varkappa^*\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-a_{e0}^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-a_{f0}^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)+\alpha_f\frac{\partial^4 P}{\partial t^4}-$$

$$-\delta_f\frac{\partial^4 P}{\partial t^2\partial x^2}+\frac{1}{\omega_{ar}^{\prime 2}}\frac{\rho_0 a_{f0}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-\frac{\rho_{10}a_{10}^2}{\rho_0}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)=0 \qquad (2.3)$$

$$\alpha_f=\alpha_\mu+\alpha_T,\quad \alpha_\mu=\frac{4}{3}\frac{\mu}{\gamma P_0}\frac{\rho_0 a_{f0}^2}{\rho_{10}a_{10}^2},\quad \alpha_T=\frac{3\gamma \mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\frac{\omega_{ar}}{\omega_{ar}^{\prime 2}}\frac{\rho_0 a_{f0}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}$$

$$\delta_f=\delta_\mu+\delta_T,\quad \delta_\mu=\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0}\left(1+\frac{\rho_0 a_{f0}^2}{\gamma P_0}\right),\quad \delta_T=\frac{3\gamma \mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\frac{a_{f0}^2}{\omega_{ar}^{\prime 2}}\omega_{ar}$$

$$\varkappa^*=\frac{3\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\omega_{ar}\frac{a_{f0}^2}{a_{e0}^2}=\frac{3\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\omega_{ar}\left[1-(\gamma-1)\frac{\beta_0\rho_0 a_{e0}^2}{\gamma P_0}\right]$$

$$\frac{1}{\omega_{ar}^{\prime 2}}=\frac{1-\varphi_{10}}{\omega_{ar}^2}$$

Если пренебречь эффектами дисперсии, диссипации и сжимаемости, то (2.3) переходит в волновое уравнение с характеристической скоростью a_{f0}, описывающей перемещение волнового профиля, в котором производные по t и x связаны равенствами

$$\frac{\partial}{\partial t}=\pm a_{f0}\frac{\partial}{\partial x} \qquad (2.4)$$

Здесь верхний и нижний знаки соответствуют волнам, распространяющимся, соответственно, вдоль положительной и отрицательной оси x. Примем, что в исследуемом волновом режиме равенства (2.4) выполняются приближенно. Использование взятой с нижним знаком связи (2.4) в диссипативных слагаемых, ответственных за описание эффектов теплообмена и вязкости, позволяет провести однократное интегрирование уравнения (2.3) и записать его в виде

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-a_{f0}^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{1}{\omega_{ar}^{\prime 2}}\frac{\rho_0 a_{f0}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-\frac{\rho_{10}a_{10}^2}{\rho_0}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)-$$

$$-(\delta_f-\alpha_f a_{f0}^2)\frac{\partial^3 P}{\partial t\,\partial x^2}+\varkappa_f\frac{\partial P}{\partial t}=0 \qquad (2.5)$$

$$\varkappa_f=\varkappa^*\left(1-\frac{a_{e0}^2}{a_{f0}^2}\right)=\frac{3(\gamma-1)\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\omega_{ar}\left[1-\frac{(1-\beta_0)\rho_0 a_{f0}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\right]$$

Если теперь факторизовать посредством связи (2.4) уравнение (2.5), то есть выделить из него уравнение, описывающее распространение волны вдоль, например, отрицательного направления оси x, то получим

$$\frac{\partial P}{\partial t}-a_{f0}\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{1}{2}(\delta_\mu+\delta_T-\alpha_\mu a_{f0}^2-\alpha_T a_{f0}^2)\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+ \qquad (2.5a)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{a_{fo}^3}{\omega_{ar}^{*2}}\left(1-\frac{\rho_0 a_{fo}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}\right)\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}=0$$

Необходимо подчеркнуть, что пренебрежение в уравнении (2.2) тепловой составляющей третьего слагаемого в сравнении с составляющими первого слагаемого приводит к ограничению

$$\omega < \varphi_{10}^{-1/2}\omega_{ar}^{*} = \omega_{ir}^{*} = \omega_{ir}(1-\varphi_{10})^{-1/2}$$

на величину частот волн, реализуемых в смеси. Здесь ω_{ir} — изотермическая резонансная частота Миннаерта. В этом случае такому дисперсионному уравнению будет соответствовать дифференциальное уравнение (2.5*а*) с $\delta_T=\alpha_T=0$, которое полностью совпадает с линейной частью нелинейного эволюционного уравнения, выведенного в [10] методом коротких волн [11] и записанного в размерных переменных. Тем самым, доказана обоснованность применения указанного метода к исследованию задач волновой динамики газожидкостной смеси. Таким образом, приходим к выводу, что уравнение коротких волн пригодно для описания длинноволнового движения с частотами, меньшими приведенной изотермической резонансной частоты Миннаерта ω_{ir}^{*}.

При частотах $\omega > \omega_{ir}^{*}$ в уравнении (2.2) первое слагаемое пренебрежимо мало в сравнении с тепловыми составляющими третьего слагаемого. Тогда в уравнении (2.5а) формально можно полагать $\varkappa_1 = 0$ и тем самым, получить линейный вариант уравнения Бюргерса-Кортевега—де Вриза.

Наконец, если $\omega \sim \omega_{ir}^{*}$, то необходимо пользоваться полным уравнением (2.3) и эволюционным уравнением (2.5а).

Отметим, что при адиабатическом режиме вследствие отсутствия теплообмена ($\mathrm{Pe}\to\infty$, $\varkappa^*=0$) вышеприведенных ограничений на частоту нет.

Подчеркнем также, что использование равенства (2.4) для упрощения диссипативных слагаемых уравнения (2.3) правомерно лишь в случае, когда влияние диссипации на эволюцию волны мало, означающее, что на расстояниях порядка длины волны и в течении времени порядка ее периода профиль волны должен деформироваться мало и ее амплитуда должна затухать слабо.

Перейдем к исследованию зависимости фазовой скорости волны от задаваемой частоты. С этой целью перепишем дисперсионное уравнение (2.2) в виде

$$a_{fo}^2\frac{k^2}{\omega^2}=\frac{\varkappa_2-\alpha z^2-iz(1-bz^2)}{\varkappa_1-\delta z^2-iz(1-z^4)}=(f+ig)^2 \tag{2.6}$$

$$\varkappa_1=\frac{\varkappa^*}{\omega_{ar}^*}\frac{a_{eo}^2}{a_{fo}^2}=\frac{3\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\sqrt{1-\varphi_{10}},\quad \varkappa_2=\varkappa_1\frac{a_{fo}^2}{a_{eo}^2},\qquad b=\frac{\rho_0 a_{fo}^2}{\rho_{10}a_{10}^2}$$

$$\alpha=\alpha_f\omega_{ar}^*,\quad \delta=\frac{1}{a_{fo}^2}\delta_f\omega_{ar}^*,\quad z=\frac{\omega}{\omega_{ar}^*}$$

Чтобы иметь количественные представления о порядках величин коэффициентов диссипации δ, α, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, в табл. 1 приведены некоторые числовые данные по этим коэффициентам, вычисленные для смеси вода-воздух. Видно, что с увеличением радиуса пузырька происходит убывание величины $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, характеризующих теплообмен. Этот факт объясняется тем, что для достаточно крупных пузырьков (в водо-воздушной смеси $R_0 > 3 \cdot 10^{-4}$ м) время тепловой релаксации начинает намного превосходить период пульсации пузырька и от того тепло начинает передаваться в пузырек или отдаваться им в течении бесконечно большого промежутка времени в сравнении с периодом пульсации. Именно потому влияние межфазного теплообмена в общем механизме диссипации начинает убывать и режим колебания пузырька становится практически адиабатическим.

Таблица 1

$P_0 = 0{,}1$ МПа; $\varphi_0 = 2 \cdot 10^{-4}$; $a_{e0} = 640$ м/с; $a_{f0} = 731$ м/с

R_0, м	δ	α	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$
$5{,}5 \cdot 10^{-5}$	0,7555	0,2340	0,5369	0,7001
$1{,}1 \cdot 10^{-4}$	0,4894	0,1516	0,3477	0,4537
$3 \cdot 10^{-4}$	0,2599	0,0806	0,1914	0,2498
$5 \cdot 10^{-4}$	0,2048	0,0614	0,1542	0,2012
$7 \cdot 10^{-4}$	0,1822	0,0529	0,1216	0,1587

Дисперсионное соотношение (2.6) является комплексным и потому отношение k/ω также будет комплексным. Будем считать частоту ω действительной величиной, а волновое число k—комплексной: $k = k_1 + ik_2$. Тогда искомое решение принимает вид

$$P = P_* \exp(-k_2 x) \exp[i(k_1 x - \omega t)], \quad k_2 > 0$$

и фазовая скорость c_{ph}, являющаяся скоростью перемещения фазы волны, определится как

$$c_{ph} = \frac{\mathrm{Re}(\omega)}{\mathrm{Re}(k)} = \frac{\omega}{k_1}, \quad \frac{a_{f0}}{c_{ph}} = f$$

Здесь функция f должна определиться из уравнения (2.6), откуда после отделения действительной и мнимой частей получим

$$\frac{a_{f0}^2}{c_{ph}^2} = \frac{1}{2} \frac{(\varkappa_1 - \delta z^2)(\varkappa_2 - \alpha z^2) + z^2(1 - z^2)(1 - bz^2)}{(\varkappa_1 - \delta z^2)^2 + z^2(1 - z^2)^2} \left\{ 1 \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{1 + \left| \frac{z(1 - z^2)(\varkappa_2 - \alpha z^2) - z(1 - bz^2)(\varkappa_1 - \delta z^2)}{(\varkappa_1 - \delta z^2)(\varkappa_2 - \alpha z^2) + z^2(1 - z^2)(1 - bz^2)} \right|^2} \right\} \tag{2.7}$$

Варьируя эффектами диссипации, будем иметь различные выражения для фазовой скорости. В отсутствие всех видов диссипации

($\varkappa_1=\varkappa_2=\alpha=\delta=0$) имеем

$$c_{ph}^2=a_{f0}^2\,\frac{1-z^2}{1-bz^2} \tag{2.8}$$

Отсюда видно, что при $z\to 1$ ($\omega\to\omega_{ar}^*$) происходит вырождение бегущей волны в стоячую, поскольку $c_{ph}\to 0$. При $z\to\infty$ ($\omega\to\infty$) будем иметь $c_{ph}\to a_{10}\sqrt{\frac{\rho_{10}}{\rho_0}}$. Если же $\omega\to\omega_{cr}$, где критическое значение частоты равно

$$\omega_{cr}=\frac{a_{10}}{a_{f0}}\sqrt{\frac{\rho_{10}}{\rho_0}}\,\omega_{ar}^*$$

то получим $c_{ph}\to\infty$. Последний факт свидетельствует, что значение $z_c=(a_{10}/a_{f0})\sqrt{\rho_{10}/\rho_0}$ является особым для формулы (2.8). Интервал частот $\omega_{ar}^*<\omega<\omega_{cr}$ является диапазоном непрозрачности для волны.

В отсутствие эффектов вязкости ($\alpha=\delta=0$) формула (2.7) упрощается и принимает вид

$$\frac{a_{f0}^2}{c_{ph}^2}=\frac{1}{2}\,\frac{\varkappa_1\varkappa_2+z^2(1-z^2)(1-bz^2)}{\varkappa_1^2+z^2(1-z^2)^2}\left\{1\pm\sqrt{1+\left[\frac{\varkappa_2 z(1-z^2)-\varkappa_1 z(1-bz^2)}{\varkappa_1\varkappa_2+z^2(1-z^2)(1-bz^2)}\right]^2}\right\}$$

Полученная формула подчеркивает важность учета межфазного теплообмена, приводящего к устранению особенности и позволяющего получить непрерывную зависимость фазовой скорости c_{ph} от частоты ω. Видно также, что указанный эффект не позволяет выродиться бегущей волне в стоячую, так как $c_{ph}\neq 0$. Происходит также устранение диапазона непрозрачности, поскольку c_{ph} во всем диапазоне реализуемых частот является уже действительной величиной.

Аналогичные выводы можно сделать и в случае отсутствия теплообмена ($\varkappa_1=0$) при анализе варианта формулы (2.7), соответствующего чисто адиабатическому режиму. Нетрудно убедиться, что тогда при $z\to 0$ будем иметь значение $c_{ph}\to a_{f0}$, которое следует также из формулы (2.8). Таким образом, при низкочастотных звуковых сигналах эффект вязкости не оказывает сколь-нибудь существенного влияния на величину фазовой скорости волны.

С другой стороны, необходимо отметить тот важный факт, что при $z\to 0$ из формул (2.7) и (2.9) следует $c_{ph}\to a_{e0}$, то есть именно изотермическая скорость звука в смеси представляет собой скорость распространения предельно низкочастотного звукового сигнала. Таким образом, межфазный теплообмен оказывает существенное влияние на величину фазовой скорости волны.

Наконец, выясним вопрос о мере погрешности, вносимым равенством (2.4) при его использовании в диссипативных слагаемых точного уравнения (2.3). Приближенному дифференциальному уравнению (2.5) соответствует дисперсионное уравнение

$$a_{f0}^2 \frac{k^2}{\omega^2} = \frac{z(1-bz^2)+i(x_2-x_1)}{z(1-z^2)-iz^2(b-a)} \tag{2.9}$$

Полученное уравнение, в отличие от (2.6), является приближенным и потому следует ожидать, что оно не охватывает весь спектр реализуемых частот. Действительно, анализ выделенной из (2.9) формулы частотной зависимости фазовой скорости показывает, что при $z \to 0$ будем иметь $c_{ph} \to 0$, в то время, как в отсутствие эффектов диссипации $c_{ph} \to a_{f0}$. Таким образом, при распространении сигнала приближение (2.9) непригодно в расчете фазовой скорости при очень малых значениях частот, а уравнение (2.5) не может описать поведение сверхдлинных волн давления.

В заключение проведем сравнение результатов излагаемой теории с известными [12] экспериментальными данными по частотной зависимости фазовой скорости. Эксперименты проводились в водо-воздушной смеси с пузырьками, измеренные размеры большинства которых имели диаметры 0,011 см и для которых резонансная частота $f_{0r} = \omega_{0r}/2\pi$ равна приблизительно 60 кгц. Значения газосодержаний β_0 равнялись $(20 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-4}$. Согласно работе автора [5], режим распространения звуковых сигналов в такой смеси является типично квазиадиабатическим и потому использование изложенной теории в объединении результатов экспериментов вполне обосновано и корректно. В табл. 2 приведены некоторые числовые данные по величине фазовой скорости, рассчитанные по формуле (2.7) и снятые с экспериментальной кривой, приведенной в [2, 12]. Согласование теоретических (c_{ph}) и экспериментальных (c^*_{ph}) значений является хорошим.

Таблица 2

$P_0 = 0{,}1$ МПа; $b = 0{,}755$; $a = 0{,}234$; $x_1 = 0{,}537$; $x_2 = 0{,}700$
$R_0 = 5{,}5 \cdot 10^{-5}$; $\beta_0 = 2 \cdot 10^{-4}$; $a_{e0} = 640$ м/с; $a_{f0} = 731$ м/с

z	$f = \frac{\omega}{2\pi}$, кгц	c_{ph}, $\frac{м}{с}$	c^*_{ph}, $\frac{м}{с}$	z	$f = \frac{\omega}{2\pi}$	c_{ph}	c^*_{ph}
0	0	640	--	2,051	126	2501	2350
0,244	15	636	600	2,238	138	2325	2300
0,488	30	605	650	2,438	150	2035	2100
0,731	45	494	750	2,682	165	1894	1950
1	61	740	850	2,926	180	1934	1800
1,222	75	2585	1450	3,169	195	1749	1750
1,467	90	3377	1750	3,901	240	1641	1650
1,711	105	3236	2200	4,889	300	1560	—
1,955	120	2694	2250	5,607	345	1550	—

Автор благодарит Гумерова Н. А. за дискуссию о корректности использования метода коротких волн в исследованиях по волновой динамике газожидкостных сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. Ч. 1.—М.: Наука, 1987. 464 с.
2. **Wijngaarden L. Van** One dimensional flow of liguids containing small gas bubbles// Ann. Rev. Fluid Mech. 1972. V. 4. P. 369—396. Русс. пер. // Реология суспензий. М.: Мир, 1975, с. 68—103.
3. **Devin Ch.** Survey of thermal, radiation and viscous damphing of pulsation air bubbles in Water // J. Acoust. Soc. Amer. 1959, V. 31, № 12, P. 1654—1667.
4. **Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С.** Теплообмен газового пузырька с жидкостью // ИЗВ. АН СССР. МЖГ. 1974, № 5, с. 94—100.
5. **Оганян Г. Г.** О свободных малых колебаниях газового пузырька в несжимаемой жидкости // Изв. АН Армении, Механика, 1991, т. 44, № 1, с. 41—47.
6. **Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.** Экспериментальное исследование распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа // Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1977, с. 32—44.
7. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.** Распространение волн в газо- и парожидкостных средах.—Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1983. 238 с.
8. **Нигматулин Р. И., Ивандаев А. И., Нигматулин Б. И., Милашенко В. И.** Нестационарные волновые процессы в газо- и парожидкостных смесях // Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1977, с. 80—90.
9. **Губайдулин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И.** Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры // ПМТФ. 1978, № 2, с. 78—86.
10. **Оганян Г. Г.** Об уравнениях нелинейной акустики газожидкостных сред // Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1988, т. 41, № 3, с. 25—36.
11. **Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А.** Теория коротких волн//ПМТФ, 1960, № 1, с. 63—74.
12. **Fox F. E., Curley S. R., Larson G. B.** Phase velocity and absorbtion measurements in Water containing air bubbles //J. Acoust. Soc. Amer., 1955, V. 27, № 7, P. 534—539.
13. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Гидродинамика.—М.: Наука, 1986. 736 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
25.01.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 1, 1995 Механика

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ (ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ) НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ

АВЕТИСЯН А. С.

Ա. Ս. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ՆԱԽՆԱԿԱՆ ԷԼԵԿՏՐԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ՓՈՔՐ ԼԱՅՆՈՒՅԹՈՎ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ՎՐԱ (ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՈՉ ԳԾԱՅՆՈՒԹՅՈՒՆ)

Ստացված են գծայնացված նյութական հավասարումները կամայական համաչափության պիեզոէլեկտրիկ և արտաքին ոչ նյութական միջավայրերի համար, ըստ նախնական էլեկտրաառաձգական վիճակի։ Քննարկված են հնարավոր նախնական վիճակները կախված եզրային պայմաններից։ Դիտարկվում է փոքր լայնույթով ալիքների տարածումը արտաքին զուգահեռ էլեկտրական դաշտում գտնվող 6mm դասի պիեզոէլեկտրիկ շերտում։ Կարճ ալիքների դեպքում ստացված է նախնական վիճակի ազդեցության նկարագիրը սահքի ալիքի վրա։

A. S. AVETISYAN

INTLUENCE OF INITIAL ELECTROELASTIC STATE (GEOMETRICAL NONLINEARITY) ON SMALL AMPLITUDE WAVES PROPAGATION

Одним из важнейших проблем волновой физики является задача распространения волн малой амплитуды при наличии в теле постоянных (или переменных) электромагнитомеханического состояния. Ранее разными авторами [1—2] и др. была развита линеаризованная теория электромагнитоупругости, где нечетко разделяются нелинейные эффекты по их происхождению, а также есть некоторые неточности в общих соотношениях нелинейной теории электромагнитоупругости.

На основе полученных в [3] основных уравнений нелинейной электроупругости пьезоэлектрического диэлектрика ($\rho_e=0$) рассматривается распространение электроупругих поверхностных волн малой амплитуды в пьезодиэлектрике при наличии начального электроупругого состояния. При этом учитывается только геометрическая нелинейность.

Пьезодиэлектрическая среда занимает область $|x_1|<\infty$, $|x_2|<h$, $|x_3|<\infty$, где решаются уравнения движения упругой среды

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial x_i}=\rho_0\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2};\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3; \tag{1.1}$$

и уравнения электромагнетостатики

$$\frac{\partial D_n}{\partial x_n}=0, \quad \frac{\partial B_p}{\partial x_p}=0, \quad n, p=1, 2, 3 \tag{1.2}$$

в лагранжевой форме описания. Здесь $\hat{L}_{ij}=\hat{\sigma}_{ij}+\hat{t}_{ij}$ — тензор термодинамических напряжений Лагранжа, компоненты которого с учетом только геометрической нелинейности имеют вид [3,4]

$$L_{ij}=c_{ijmn}\frac{\partial u_m}{\partial x_n}+e_{mij}\frac{\partial \Phi}{\partial x_m}+\delta_{ki}e_{mjn}\frac{\partial \Phi}{\partial x_m}\frac{\partial u_k}{\partial x_n}+$$

$$+\left(\delta_{jm}c_{nkil}+\frac{1}{2}\delta_{km}c_{ijnl}\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial u_m}{\partial x_n} \tag{1.3}$$

Лагранжевые индукции электрического и магнитного полей с учетом конечных деформаций соответственно равны:

$$D_n=e_{mij}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}-\varepsilon_{nn}\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}+\frac{1}{2}\delta_{ki}e_{mnj}\frac{\partial u_k}{\partial x_n}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-$$

$$-\varepsilon_{mn}l_{nmij}\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{1.4}$$

$$B_p=-\left(\mu_{kp}\frac{\partial u_n}{\partial x_n}-\mu_{kn}\frac{\partial u_p}{\partial x_n}-\mu_{pl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x_k}-\mu_{kp}\frac{\partial \psi}{\partial x_k} \tag{1.5}$$

В материальных соотношениях (1.3)—(1.5), а также в дальнейших в материальных соотношениях внешней среды мы пользуемся выражениями лагранжевых напряженностей электрического $E_k(x_j,t)$ магнитного $H_k(x_j,t)$ полей, которые с учетом конечных деформаций описываются через градиент деформаций $\xi_{i,j}=\delta_{ij}+u_{i,j}$ и потенциалы соответствующих полей $\Phi(x_j,t)$ и $\psi(x_j,t)$

$$E_m=-\frac{\partial \Phi}{\partial x_m}-l_{mkij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}$$

$$H_m=-\frac{\partial \psi}{\partial x_m}-l_{mkij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_k} \tag{1.6}$$

В соотношениях (1.3), (1.6) тензор «геометрической стрикции» l_{mkij} имеет вид

$$l_{mkij}=\delta_{im}\delta_{jk}+\delta_{ik}\delta_{jm}-\delta_{ij}\delta_{km}$$

Во внешней вакуумной области $|x_1|<\infty$, $|x_2|>h$, $|x_3|<\infty$ решаются уравнения электромагнетостатики для вакуума

$$\frac{\partial D_k^{(\pm)}}{\partial x_k}=0, \quad \frac{\partial B_k^{(\pm)}}{\partial x_k}=0, \quad n, p=1, 2, 3 \tag{1.7}$$

где индукции электрического $D_k^{(\pm)}(x_i,t)$ и магнитного полей в лагранжевой форме описания выражаются через потенциалы этих внешних полей $\Phi^{(\pm)}(x_i,t)$ и $\psi^{(\pm)}(x_i,t)$ соответственно, а также через деформации точек поверхности раздела сред $u_k^{(\pm)}(x_i,t)=u_k(x_1,\mp h,x_3,t)$ [3]:

$$D_p^{(\pm)}=-\varepsilon_0\left[\frac{\partial\Phi^{(\pm)}}{\partial x_p}-\left(\frac{\partial u_m^{(\pm)}}{\partial x_p}+\frac{\partial u_p^{(\pm)}}{\partial x_m}\right)\frac{\partial\Phi^{(\pm)}}{\partial x_m}+\frac{\partial u_k^{(\pm)}}{\partial x_k}\frac{\partial\Phi^{(\pm)}}{\partial x_p}\right]$$

$$B_p^{(\pm)}=-\mu_0\left[\frac{\partial\psi^{(\pm)}}{\partial x_p}-\left(\frac{\partial u_m^{(\pm)}}{\partial x_p}+\frac{\partial u_p^{(\pm)}}{\partial x_m}\right)\frac{\partial\psi^{(\pm)}}{\partial x_m}+\frac{\partial u_k^{(\pm)}}{\partial x_k}\frac{\partial\psi^{(\pm)}}{\partial x_p}\right] \qquad (1.8)$$

Естественно, что конечность деформаций поверхности электроупругой среды искажает («деформирует») нематериальную внешнюю среду, чем продиктованы выражения материальных уравнений (1.8). Учет «деформаций» внешней вакуумной области особенно важно в задачах о распространении поверхностных электроупругих волн.

На границах раздела сред $x_2=\mp h$ удовлетворяется непрерывность тангенциальных компонент векторов напряженностей электрического и магнитного полей

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_m}-\frac{\partial\Phi^{(\pm)}}{\partial x_m}+l_{mkij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}-\frac{\partial\Phi^{(\pm)}}{\partial x_m}\right]=0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_m}-\frac{\partial\psi^{(\pm)}}{\partial x_m}+l_{mkij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x_k}-\frac{\partial\psi^{(\pm)}}{\partial x_m}\right]=0 \qquad (1.9)$$

и нормальных компонент векторов индукций этих полей

$$D_2=D_2^{(\pm)},\quad B_2=B_2^{(\pm)} \qquad (1.10)$$

На недеформированной границе раздела $x_2=\mp h$ термодинамические напряжения L_{ij} должны равняться нулю:

$$L_{ij}=0 \qquad (1.11)$$

Очевидно, что учет «деформирования» внешней нематериальной области усложняет запись материальных соотношений внешней среды (1.8) и граничных условий (1.9), (1.10). Кроме этого, из приведенных соотношений следует, что посредством градиента деформаций $\xi_{ij}=\delta_{ij}+u_{i,j}$ квазистатистические электрическое и магнитное поля взаимосвязаны. Это значит, что если в пьезодиэлектрическую среду излучать электроупругую волну конечной амплитуды, то в среде индуцируется также магнитное поле.

Наряду с граничными условиями (1.9)—(1.11) для локализованных у поверхности раздела волн должны удовлетворяться также условия затухания по глубине полупространств всех волновых характеристик.

2. Переход тела из начального электромагнитоупругого состояния в состояние в данный момент времени, осуществляется путем сообщения системе дополнительных возмущений. Тогда все величины можно представить в виде суммы $f^{\circ}+f$. В общем случае порядок возмущений f по отношению к величинам, характеризующим начальное состояние f°, может быть произвольным. Однако, при возбуждении волн малой

амплитуды возмущения по величине намного меньше величины основного начального состояния $|f| \ll |f|$, что позволяет разложить все величины, характеризующие текущее электромагнитоупругое состояние в окрестности начального состояния в ряд Тейлора и ограничиться в этом ряду членами первой степени относительно возмущений f. Учитывая, что начальное электромагнитоупругое состояние определяется по вышеизложенной нелинейной краевой задаче электромагнитоупругости (1.1)—(1.11), а также пренебрегая нелинейные по возмущениям слагаемые (малые высшего порядка) получим линеаризованные соотношения электромагнитоупругости для ограниченных пьезодиэлектрических сред в виде соотношений классического пьезоэффекта:

$$t_{ij}=\bar{c}_{ijmk}u_{m,k}+\bar{e}_{mij}\Phi_{,m} \tag{2.1}$$

$$D_m=\bar{e}_{mij}u_{i,j}+\bar{\varepsilon}_{mk}\Phi_{,k}$$

$$E_m=-\bar{g}_{mk}\Phi_{,k}-\bar{d}_{mij}u_{i,j} \tag{2.2}$$

$$D_m^{(\pm)}=\bar{e}_{mij}^{(\pm)}u_{i,j}^{(\pm)}-\bar{\varepsilon}_{mk}^{(\pm)}\Phi_{,k}^{(\pm)}$$

$$E_m^{(\pm)}=-\bar{g}_{mk}^{(\pm)}\Phi_{,k}^{(\pm)}-\bar{d}_{mij}^{(\pm)}u_{i,j}^{(\pm)} \tag{2.3}$$

$$B_m=\bar{b}_{mij}u_{i,j}-\bar{\mu}_{mk}\psi_{,k}$$

$$H_m=-\bar{g}_{mk}\psi_{,k}+\bar{b}_{mij}u_{i,j} \tag{2.4}$$

$$B_m^{(\pm)}=\bar{b}_{mij}^{(\pm)}u_{i,j}^{(\pm)}+\bar{\mu}_{mk}^{(\pm)}\psi_{,k}^{(\pm)}$$

$$H_m^{(\pm)}=-\bar{g}_{mk}^{(\pm)}\psi_{,k}^{(\pm)}+\bar{b}_{mij}^{(\pm)}u_{i,j}^{(\pm)} \tag{2.5}$$

где приведенные коэффициенты определяются по начальному электроупругому состоянию:

$$\bar{c}_{ijmk}=c_{ijmk}+c_{ikmn}u^0_{j,n}+c_{ijkl}u^0_{m,l}+\delta_{jm}c_{inkl}u^0_{n,l}$$

$$+\delta_{jm}e_{kin}\Phi_{0,k}, \qquad \bar{d}_{mij}=l_{mkij}\Phi_{0,k}$$

$$\bar{e}_{mij}=e_{mij}-l_{ikmn}\delta_{jm}\Phi_{0,n}+e_{mil}u^0_{j,l}$$

$$\bar{\varepsilon}_{mk}=\varepsilon_{mk}+\varepsilon_{ik}l_{mnij}u^0_{j,n}, \quad \bar{g}_{mk}=\delta_{mk}+l_{mnik}u^0_{i,n}$$

$$\bar{\varepsilon}_{mk}^{(\pm)}=\varepsilon_0[\delta_{mk}(1-u^{0(\pm)}_{n,n})+(u^{0(\pm)}_{m,k}+u^{0(\pm)}_{k,m})]$$

$$\bar{b}_{mij}^{(\pm)}=\mu_0[2\delta_{ij}\psi^{(\pm)}_{0,m}-\delta_{im}\psi^{(\pm)}_{0,j}-\delta_{jm}\psi^{(\pm)}_{0,i}]$$

$$\bar{\mu}_{mk}^{(\pm)}=\mu_0[\delta_{mk}(1-u^{0(\pm)}_{k,k})+(u^{0(\pm)}_{m,k}+u^{0(\pm)}_{k,m})]$$

$$\bar{\mu}_{mk}=\mu_{mk}+\mu_{jn}l_{mkij}u^0_{i,n}, \quad \bar{b}_{mij}=-l_{mkij}\psi_{0,k}$$

$$\bar{d}_{mij}^{(\pm)}=l_{mkij}\Phi^{(\pm)}_{0,k}, \quad \bar{E}_{mk}^{(\pm)}=\delta_{mk}+l_{mkin}u^{0(\pm)}_{i,n} \tag{2.6}$$

В линеаризованных материальных уравнениях (2.1)—(2.5) очевидна братимость вводимого начальным состоянием пьезоэффекта. Кроме того, сохраняется симметрия тензоров приведенных физических постоянных (2.6). Из материальных соотношений (2.4) и (2.5) также следует, что при наличии начального электромагнитоупругого состояния возбужденное электроупругое поле в пьезодиэлектрике сопровождается магнитными колебаниями. При исследовании распространения волн малой амплитуды в предварительно напряженном пьезодиэлектрике нужно пользоваться уравнениями электромагнитоупругости (1.1), (1.2), (1.7), (1.9)-(1.11) и линеаризированными материальными соотношениями (2.1)-(2.5) с учетом приведенных физических постоянных (2.6).

3. Рассмотрим распространение высокочастотных электроупругих волн в пьезодиэлектрическом слое из пьезокристалла класса $6mm$, главная ось симметрии которого параллельна оси ox_3. С учетом структур тензоров электроупругих постоянных пьезокристалла класса $6mm$

$$
\left|\begin{array}{cccccc|ccc}
c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\
c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\
c_{13} & e_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33} \\
0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\
e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}
\end{array}\right| \qquad (3.1)
$$

из (2.6) получается, что естественная анизотропия пьезокристалла не изменяется, если начальное электроупругое состояние образуется только из начальных удлинений $u^0_{1,1}$, $u^0_{2,2}$, $u^0_{3,3}$ и поперечного электрического поля $\Phi_{0,3}$. В этом случае компоненты тензоров электромеханических постоянных изменяются количественно, а нулевые компоненты остаются нулями. Такого рода начальное электроупругое состояние можно создавать как посредством внешнего поперечного электрического поля $(0, 0, E_0)$, так и посредством внешнего всестороннего давления $(\sigma^0_{11}, \sigma^0_{22}, \sigma^0_{33}, 0, 0, 0)$. В этом случае естественная анизотропия претерпевает количественное изменение и влияние такого рода изменения будет рассматриваться ниже.

В случае же начального электрического поля $(E_{10}, E_{20}, 0)$ или начальных сдвигов $(0, 0, 0, \sigma^0_{23}, \sigma^0_{13}, \sigma^0_{12})$ возникают ранее несуществующие электромеханические постоянные. Это приводит к связке плоского и антиплоского деформационных полей, хотя и приведенные электромеханические постоянные по порядку намного малы от естественных постоянных. Исследование проблемы распространения волн малой амплитуды совпадает со случаем пьезодиэлектрика с общей анизотропией, когда плоское и антиплоское поля связаны.

Рассмотрим равновесное начальное электроупругое состояние пьезодиэлектрического слоя, находящегося под действием внешнего параллельного к серединной плоскости слоя $x_1 0 x_3$ электрического поля $(0,\ 0,\ E_0)$. Из граничных условий на свободных от механических нагрузок поверхностях $x_2=\pm h$ имеем

$$\sigma^0_{22}=0,\quad \sigma^0_{12}=0,\quad \sigma^0_{32}=0 \tag{3.2}$$

Начальное электроупругое состояние существенно зависит также от краевых условий на боковых поверхностях $x_1=\pm\infty$ и $x_3=\pm\infty$ слоя. В зависимости от краевых условий на боковых поверхностях, слой будет находиться в разных однородных напряженно-деформированных состояниях:

а) боковые поверхности $x_1=\pm\infty$ и $x_3=\pm\infty$ механически свободны. Тогда $\sigma^0_{11}=0$, $\sigma^0_{33}=0$, $\sigma^0_{31}=0$, а остальные компоненты электромеханического поля равны

$$u^0_{1,1}=\frac{\Delta_1(c_{ij},e_{15},\varepsilon_{11},E_0)}{\Delta(c_{ij},e_{15},\varepsilon_{11},E_0)}$$

$$u^0_{2,2}=\frac{\Delta_2(c_{ij},e_{15},e_{11},E_0)}{\Delta(c_{ij},e_{15},\varepsilon_{11},E_0)},\quad u^0_{1,1}=0$$

$$D^0_1=D^0_2=0,\quad D^0_3=e_{15}(u^0_{1,1}+u^0_{2,2})-\varepsilon_{33}E_0 \tag{3.3}$$

б) боковые края $x_1=\pm\infty$ свободны, а края $x_3=\pm\infty$ закреплены. Тогда $u^0_{3,3}=0$, $\sigma^0_{11}=0$ и начальное электроупругое поле описывается ненулевыми компонентами

$$u^0_{1,1}=-\frac{e_{31}E_0}{c_{11}+c_{12}},\quad u^0_{2,2}=u^0_{1,1}$$

$$u^0_{i,k}=u^0_{k,i}=0\quad (i\neq k),\quad \sigma^0_{33}=2c_{13}u^0_{1,1} \tag{3.4}$$

$$D^0_1=D^0_2=0,\quad D^0_3=2e_{31}u^0_{1,1}-\varepsilon_{33}E_0$$

в) боковые края $x_3=\pm\infty$ свободны, а края $x_1=\pm\infty$ закреплены. Тогда $u^0_{1,1}=0$, $\sigma^0_{33}=0$ и начальное электроупругое поле описывается ненулевыми компонентами

$$u^0_{2,2}=-\frac{e_{33}c_{13}-e_{31}c_{33}}{c_{11}c_{33}+c^2_{13}}E_0$$

$$u^0_{3,3}=\frac{e_{31}c_{13}-e_{33}c_{11}}{c_{11}c_{33}+c^2_{13}}E_0 \tag{3.5}$$

$$\sigma^0_{11}=c_{12}u^0_{2,2}-c_{13}u^0_{3,3}+e_{31}E_0$$

$$D^0_3=e_{31}u^0_{2,2}+e_{33}u^0_{3,3}-\varepsilon_{33}E_0$$

Приведенные начальные состояния отличаются тем, что существуют только начальные удлинения и параллельное к серединной поверхности слоя электрическое поле. Очевидно, что аналогичное начальное электроупругое состояние можно получить посредством гидростатического ($\sigma^0_{11}=\sigma^0_{22}=\sigma^0_{33}=p$) или частичного давления, (когда хотя бы одна боковая поверхность свободна от механической нагрузки). Необходимо отметить и то, что здесь приведены только случаи однородного начального электроупругого состояния.

Будем рассматривать распространение высокочастотных (коротких) электроупругих волн малой амплитуды в случае 6). Тогда приведенные коэффициенты по (2.6) с учетом (3.4) равны

$$\tilde{c}_{1k}=c_{1k}(1+2u^0_{1,1}), \quad k=1,\ 2,\ 3;$$

$$\tilde{c}_{55}=\tilde{c}_{44}=c_{44}(1+u^0_{1,1}), \quad \tilde{c}_{66}=\frac{(\tilde{c}_{11}-\tilde{c}_{12})}{2}$$

$$\tilde{e}_{24}=\tilde{e}_{15}=e_{15}(1+u^0_{1,1})+\varepsilon_{11}E_0$$

$$\tilde{\varepsilon}_{22}=\tilde{\varepsilon}_{11}=\varepsilon_{11}, \quad \tilde{\varepsilon}_{33}=\varepsilon_{33}(1-2u^0_{1,1})$$

$$\tilde{\varepsilon}^{(\pm)}_{22}=\tilde{\varepsilon}^{(\pm)}_{11}=\varepsilon_0, \quad \tilde{\varepsilon}^{(\pm)}_{33}=\varepsilon_0(1-2u^{0(\pm)}_{1,1})$$

$$\tilde{e}^{(\pm)}_{15}=\tilde{e}^{(\pm)}_{24}=\tilde{e}^{(\pm)}_{33}=-\tilde{e}^{(\pm)}_{31}=\tilde{e}^{(\pm)}_{32}=\varepsilon_0E_0 \qquad (3.6)$$

Следовательно, уравнения плоской деформации не изменяются и волны Рэлея описываются постоянными $\tilde{c}_{1k}$ вместо коэффициентов c_{1k}. В задаче сдвиговых поверхностных волн имеем

$$\tilde{c}_{44}\Delta W+\tilde{e}_{15}\Delta\Phi=\rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

$$\tilde{e}_{15}\Delta W-\tilde{\varepsilon}_{11}\Delta\Phi=0 \qquad (3.7)$$

в пьезодиэлектрике $|x_2|<h$ и

$$\varepsilon_0\Delta\Phi^{(\pm)}=\varepsilon_0E_0\frac{\partial^2 W^{(\pm)}}{\partial x^2} \qquad (3.8)$$

во внешней вакуумной области $|x_2|>h$.

На поверхностях раздела сред $x_2=\pm h$ удовлетворяются условия

$$\tilde{c}_{44}\frac{\partial W}{\partial x_2}-\tilde{e}_{15}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=0, \quad \Phi=\Phi^{(\pm)}$$

$$\tilde{e}_{15}\frac{\partial W}{\partial x_2}-\tilde{\varepsilon}_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=\tilde{e}^{(\pm)}_{15}\frac{\partial W^{(\pm)}}{\partial x_2}-\varepsilon_0\frac{\partial\Phi^{(\pm)}}{\partial x_2} \qquad (3.9)$$

Получается, что в этом случае поверхностная сдвиговая электроупругая волна распространяется медленнее, чем волна Гуляева-Блюстейна. Глубина проникновения волны уменьшается. Во внешнюю область проникает воздействие распространяющейся внутри пьезодиэлектрической среды упругой сдвиговой волны.

Изменение скорости зависит от начального электрического поля через параметр

$$\eta = u^0_{1,1} = -\frac{e_{31}E_0}{c_{11}+c_{12}}.$$

При значении начального электрического поля $E_0 = 10^{16}$ $В/м$ имеем $\eta = 10^{-4}$, что допустимо в теории конечных деформаций.

Аналогичное количественное изменение претерпевает также скорость распространения волн Рэлея.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гузь А. Н., Махорт Ф. Г.** Механика связанных полей в элементах конструкций т. 3. Акустоэлектромагнитоупругость.—К.: Наук. Думка. 1988.
2. **Лямов В. Е.** Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах.—М.: Изд. МГУ, 1983.
3. **Аветисян А. С.** Об основных уравнениях нелинейной электроупругости пьезоэлектрического диэлектрика. Изв. АН АрмССР, Механика, 1990, т. 43, № 4, с. 41—51.
4. **Maugin G. A.** Nonlinear electromechanical effects and application.—World Sci. Publ., Singapore, 1985.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
17.12.1992

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 1, 1995 Механика

УДК 539.3

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГИХ БЕСКОНЕЧНЫХ ТЕЛ, ГРАНИЦЫ КОТОРЫХ УСИЛЕНЫ СКЛЕЕННЫМИ С НИМИ УПРУГОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ НАКЛАДКОЙ

САРКИСЯН В. С., КЕРОПЯН А. В.

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Ա. Վ. ՔԵՐՈՓՅԱՆ

ԱՆՎԵՐՋ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ, ՈՐՈՆՑ ԵԶՐԵՐԸ ՍՈՍՆՁՄԱՆ ՄԻՋՈՑՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ԵՆ ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ՀԱՄԱՍԵՌ ԱՆՎԵՐՋ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՎԵՐԱԴԻՐՈՎ

Դիտարկված են կոնտակտային խնդիրներ իզոտրոպ կիսահարթության, անիզոտրոպ կիսահարթության և շերտի համար, երբ նրանց եզրերը ուժեղացված են միևնույն, տարբեր համասեռությամբ մեկ վերջավոր և երկու միատեսակ կիսաանվերջ կտորներից կազմված անվերջ առաձգական վերադիրով։ Վերադիրի և հիմքերի միջև կոնտակտային փոխազդեցությունը իրականացված է սոսնձման միջոցով, ընդ որում հաշվի առնված սոսնձանյութի ֆիզիկամեխանիկական բնութագրերը։

Դիտարկվող բոլոր խնդիրները բերված են իրական առանցքի վրա ֆունկցիոնալ հավասարումների լուծման, որոնք իրենց հերթին հանգեցված են վերջավոր տիրույթում գործող անհայտ շոշափող լարումների նկատմամբ Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծման։

V. S. SARKISIAN, A. V. KEROPIAN

ON THE SOLUTION OF THE PROBLEMS OF ELASTIC INFINITE BODIES, WHICH BOUNDARY IS REINFORCED WITH A GLUED STEP-HOMOGENEOUS INFINITE STRINGER

Рассматриваются задачи для анизотропной полуплоскости, изотропной полуплоскости и полосы, грани которых усилены через слой клея (с другими физико-механическими характеристиками) кусочно-однородной бесконечной накладкой, состоящей из двух полубесконечных кусков и одного конечного куска с различными модулями упругости.

Контактные задачи для анизотропной полуплоскости с упругими накладками впервые рассмотрены в [1]. Эта и остальные работы по этой тематике с теми же авторами подробно изложены в книгах [2, 3].

В работе [4] рассмотрена задача для изотропной полубесконечной пластины, усиленной через слой клея полубесконечным стрингером.

С учетом физико-механических характеристик материала клея, в работах [5, 6] рассматривались задачи для изотропной полуплоскости и полосы с бесконечной кусочно-однородной накладкой, состоящей из двух полубесконечных кусков с различными модулями упругости, а в [7]—двумя полубесконечными накладками.

В настоящей работе рассматриваются задачи о контактном взаимодействии кусочно-однородной бесконечной накладки с бесконечными телами, в виде упругой анизотропной полуплоскости, изотропной полуплоскости и полосы, когда контакт между ними осуществляется через тонкий слой клея с другими упругими и геометрическими характеристиками. Рассматривается случай, когда кусочно-однородная накладка состоит из двух полубесконечных кусков и одного конечного куска с различными модулями упругости. Полуплоскости и полоса деформируются при помощи сил, приложенных к накладке. Полагая, что накладка находится в одноосном напряженном состоянии, а слой клея—в условиях чистого сдвига, задачи при помощи обобщенного интегрального преобразования Фурье сведены к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода, решаемого методом последовательных приближений.

В §§ 1, 2 приводится решение задачи для анизотропной полуплоскости (для изотропной полуплоскости результаты приводятся параллельно), а в § 3 кратко изложено решение для изотропной бесконечной полосы.

§ 1. *Постановка задачи и вывод основного разрешающего уравнения.* Пусть анизотропная полуплоскость, имеющая одну плоскость упругой симметрии, усилена на своей границе $y=0$ кусочно-однородной накладкой малой толщины h, модуль упругости которой при $|x|>a$ равен E_1, а при $|x|<a$ — E_2. Здесь, контакт между полуплоскостью и накладкой осуществляется через тонкий слой клея (модуль упругости E_k, коэффициент Пуассона ν_k и толщина h_k). Предполагая, что накладка под действием горизонтальных сил находится в одноосном напряженном состоянии, а слой клея—в условиях чистого сдвига [4, 8], задача заключается в определении тангенциальных контактных напряжений, когда в точке накладки $x=0$ приложена горизонтальная сила P.

Согласно вышепринятому, уравнение равновесия накладки в обобщенных функциях будет иметь вид [9, 10]:

$$\frac{dU^{(1)}}{dx}=\frac{\tau_1(x)}{E_1 h}+\frac{\tau_0(x)}{E_2 h}+\frac{P\delta(x)}{E_2 h}-u_a[\delta(x-a)+\delta(x+a)] \qquad (1.1)$$

$$-\infty<x<\infty$$

где

$$U^{(1)}(x)=\theta(-x-a)\frac{du^{(1)}}{dx}+[\theta(x+a)-\theta(x-a)]\frac{du^{(1)}}{dx}+\theta(x-a)\frac{du^{(1)}}{dx}$$

$$\tau_0(x)=[\theta(x+a)-\theta(x-a)]\tau(x), \quad \tau_1(x)=[\theta(x-a)+\theta(-x-a)]\tau(x)$$

$$\tau(x)=\tau_1(x)+\tau_0(x), \quad u_a=\left.\frac{du^{(1)}}{dx}\right|_{x=a-0}-\left.\frac{du^{(1)}}{dx}\right|_{x=a+0}$$

$u'(x)$—горизонтальные перемещения точек накладки, $\tau(x)$—интенсивность тангенциальных контактных напряжений, $\delta(x)$—функция Дирака, $\Theta(x)$—функция Хевисайда, u_0—пока неизвестная постоянная.

Применив к (1.1) обобщенное преобразование Фурье, получим:

$$-i\sigma\bar{U}^{(1)}(\sigma)=\frac{\bar{\tau}_1(\sigma)}{E_1 h}+\frac{\bar{\tau}_0(\sigma)}{E_2 h}-\frac{P}{E_1 h}-2u_0\cos a\sigma, \quad -\infty<\sigma<\infty \tag{1.2}$$

где

$$\bar{U}^{(1)}(\sigma)=F[U^{(1)}(x)], \quad \bar{\tau}_i(\sigma)=F[\tau_i(x)] \quad (i=0,\ 1)$$

F—оператор преобразования Фурье.

Теперь, полагая, что каждый дифференциальный элемент слоя клея находится в условиях чистого сдвига [4], будем иметь:

$$u^{(1)}(x)-u^{(2)}(x,\ 0)=k\tau(x), \quad -\infty<x<\infty \tag{1.3}$$

где

$$k=h_k/G_k, \quad G_k=E_k/2(1+\nu_k)$$

$u^{(2)}(x,0)$—горизонтальные перемещения граничных точек деформируемого основания.

С другой стороны, известно [2, 3, 11], что деформация упругой анизотропной полуплоскости, когда на ее границе действуют тангенциальные напряжения интенсивности, $\tau(x)$ определяется формулой:

$$\varepsilon_x^{(2)}\Big|_{y=0}=\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx}=\frac{A_2^{(2)}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau(s)}{s-x}\,ds, \quad -\infty<x<\infty \tag{1.4}$$

где

$$A_2^{(2)}=A_2=-\frac{1}{2i}\beta_{11}[\mu_1+\mu_2-\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2] \tag{1.5}$$

μ_1, μ_2 и их сопряженные $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ являются корнями уравнения

$$\beta_{11}\xi^4-2\beta_{16}\xi^3+(2\beta_{12}+\beta_{66})\xi^2-2\beta_{26}\xi+\beta_{22}=0 \tag{1.6}$$

а β_{ij}—упругие коэффициенты материала анизотропной полуплоскости.

В (1.4) интеграл понимается в смысле главного значения по Коши

В случае, когда анизотропное тело является ортотропным, коэффициенты $\beta_{16}=\beta_{26}=0$ и уравнение (1.6) станет биквадратным.

Для изотропной полуплоскости в (1.4) вместо $A_2^{(2)}$ следует подставить

$$A_2^{(2)}=2(1-\nu^2)/E$$

где E—модуль упругости полуплоскости, ν—коэффициент Пуассона.

Теперь, применив к (1.4) интегральное преобразование Фурье, в силу (1.2), (1.3) после несложных выкладок получим следующее функциональное уравнение на действительной оси:

$$(\sigma^2+2\alpha|\sigma|+\lambda_1^2)\bar{\tau}_1(\sigma)+(\sigma^2+2\alpha|\sigma|+\lambda_2^2)\bar{\tau}_0(\sigma)=P\lambda_2^2+\frac{2u_a'}{k}\cos a\sigma, \quad -\infty<\sigma<\infty \quad (1.7)$$

где

$$\alpha=-\frac{\beta_{11}}{4ik}[\mu_1+\mu_2-\bar{\mu}_1-\bar{\mu}_2], \quad \lambda_j^2=\frac{1}{E_jkh} \quad (j=1,\ 2) \qquad (1.8)$$

Для изотропной полуплоскости в (1.7) α принимает значение $\alpha=(1-\nu^2)/Ek$. Таким образом, задача сведена к решению функционального уравнения (1.7).

§2. *Решения уравнения (1.7).* Для этой цели уравнение (1.7) приведем к интегральному уравнению. Представим его в следующем виде:

$$\bar{\tau}_1(\sigma)=-\bar{\tau}_0(\sigma)+\frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\bar{\tau}_0(\sigma)}{\sigma^2+2\alpha|\sigma|+\lambda_1^2}+\frac{P\lambda_2^2+\frac{2u_a}{k}\cos a\sigma}{\sigma^2+2\alpha|\sigma|+\lambda_1^2}$$

которое, после обратного преобразования Фурье будет иметь вид:

$$\tau(x)=(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\int_{-a}^{a}K(|x-s|)\tau_1(s)ds+g(x), \quad -\infty<x<\infty \qquad (2.1)$$

где

$$K(|x|)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{K}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma, \quad g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{g}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

$$\bar{K}(\sigma)=\frac{1}{\sigma^2+2\alpha|\sigma|+\lambda_1^2}, \qquad \bar{g}(\sigma)=\frac{P\lambda_1^2+\frac{2u_a'}{k}\cos a\sigma}{\sigma^2+2\alpha|\sigma|+\lambda_1^2}$$

Заметим, что $\bar{K}(\sigma)$ можно представить и таким образом:

$$\bar{K}(\sigma)=\frac{1}{(b_2-b_1)}\left(\frac{1}{|\sigma|+b_1}-\frac{1}{|\sigma|+b_2}\right) \qquad (2.2)$$

$$b_1=\frac{\lambda_1^2}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\lambda_1^2}}, \qquad b_2=\frac{\lambda_1^2}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\lambda_1^2}}$$

С другой стороны, поскольку при $|x|<a$ $\tau(x)=\tau_0(x)$, из (2.1) получим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\tau_0(x)+(\lambda_2^2-\lambda_1^2)\int_{-a}^{a}K(|x-s|)\tau_0(s)ds=g(x) \quad |x|<a \qquad (2.3)$$

Отметим, что $g(x)$ можно представить и так:

$$g(x)=P\lambda_1^2K(|x|)+\frac{u_a}{k}[K(|x-a|)+K(|x+a|)] \qquad (2.4)$$

На основании (2.2) заметим, что $K(|x|)$ можно представить и в таком виде:

$$K(|x|)=\frac{1}{\pi(b_2-b_1)}\ln\left|\frac{b_2}{b_1}\right|+R(x) \tag{2.5}$$

$$R(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(b_1x)^{2n}}{\pi(2n)!}\left(\ln\frac{1}{|b_1x|}+1+\ldots+\frac{1}{2n}-C\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{|b_1x|^{2n-1}}{2(2n-1)!}\right]-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(b_2x)^{2n}}{\pi(2n)!}\left(\ln\frac{1}{|b_2x|}+1+\ldots+\frac{1}{2n}-C\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{|b_2x|^{2n-1}}{2(2n-1)!}\right]$$

C — постоянная Эйлера.

Из (2.5) следует, что $K(|x|)$ — непрерывная функция, а ее значение в точке $x=0$ конечно. Следовательно, имея в виду (2.4), легко заметить, что $\tau(x)$ в точках $x=0$, $x=\pm a$ принимает конечные значения. Заметим, что при отсутствии слоя клея $\tau(x)$ в точках $x=0$, $x=\pm a$ имеет логарифмическую особенность [9, 10].

На основании

$$\sup_{|s|<a}\int_{-a}^{a}|K(|x-s|)|dx=M<\infty$$

интегральное уравнение (2.3) при $|\nu_1^2-\nu_2^2|<M^{-1}$ в пространстве суммируемых функций $L_1(-a,a)$ можно решать методом последовательных приближений. Заметим, что решение уравнения (2.3) можно получить и сведением его к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений [12—15].

Таким образом, определяя вышеуказанным способом $\tau(x)$ на участке $|x|<a$, ее значения при $|x|>a$ будут определяться из (2.1), причем значение $\tau(x)$ в точке $x=a$ будет иметь вид:

$$\tau(a)=(\nu_1^2-\nu_2^2)\int_{-a}^{a}K(|a-s|)\tau_0(s)ds+P\nu_1^2K(a)+\frac{u_a}{k}[K(0)+K(2a)]$$

а постоянная u_a будет определяться из условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tau(s)ds=P \tag{2.6}$$

Далее, поскольку для $\bar{\tau}(\sigma)$ при $\sigma\to 0$ имеет место разложение

$$\bar{\tau}(\sigma)=a_0+a_1\sigma+a_2\sigma^2+a_3|\sigma|+0(\sigma|\sigma|)$$

где a_0, a_1, a_2, ... — некоторые постоянные, то отсюда на основе метода Лайтхилла [16], можно заключить, что $\tau(x)=F^{-1}[\bar{\tau}(\sigma)]$ при $|x|\to\infty$ имеет порядок $0\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

§ 3. *Решение задачи для упругой изотропной полосы.* Рассмотрим теперь аналогичную задачу для бесконечной полосы жестко защемленной нижней грани $y=-H$ (плоская деформация, модуль упругости E, коэффициент Пуассона ν, толщина H). При изложении будем придерживаться обозначений, принятых в § 1.

Известно [3, 6, 14], что деформация граничных точек изотропной бесконечной полосы, когда на ее свободной границе действуют тангенциальные напряжения интенсивности $\tau(x)$ определяются формулой

$$\varepsilon_x^{(2)}\Big|_{y=0} = \frac{du^{(2)}(x,0)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} K_n(|x-s|)\tau(s)ds, \qquad (3.1)$$

$$-\infty<x<\infty$$

где

$$K_n(x)=\frac{dK_n(x)}{dx}, \quad K_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{K}_n(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

$$\varkappa=(\lambda+\mu)\,2\mu$$

$$\bar{K}_n(\sigma)=\frac{(2\varkappa+1)[(\varkappa+1)\mathrm{sh}2H|\sigma|+2\varkappa H|\sigma|]}{2\mu|\sigma|[2\varkappa(\varkappa+1)\mathrm{ch}2H|\sigma|+\varkappa^2(4H^2\sigma^2+1)+(\varkappa+1)^2]}$$

λ, μ—упругие постоянные Ламе материала полосы

Здесь, не останавливаясь на подробностях, лишь отметим, что в силу (1.2), (1.3) с учетом (3.1), как и в §2, решение задачи также сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$\tau_0(x)+(\lambda_2^2-\lambda_1^2)\int_{-a}^{a}K_{\lambda_1}(|x-s|)\tau_0(s)ds=f(x), \quad |x|<a \qquad (3.2)$$

где

$$K_{\lambda_1}(|x|)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{K}_{\lambda_1}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma, \quad \bar{K}_{\lambda_1}(\sigma)=\frac{1}{\sigma^2+2|\sigma|\Pi(\sigma)+\lambda_1^2} \qquad (3.3)$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma, \quad \bar{f}(\sigma)=\frac{1}{\sigma^2+2|\sigma|\Pi(\sigma)+\lambda_1^2}$$

$$\Pi(\sigma)=\frac{(2\varkappa+1)[(\varkappa+1)\mathrm{sh}2H|\sigma|+2\varkappa H|\sigma|]}{4\mu K[2\varkappa(\varkappa+1)\mathrm{ch}2H|\sigma|+\varkappa^2(4H^2\sigma^2+1)+(\varkappa+1)^2]}$$

В (3.3) $f(x)$ можно представить и в такой форме

$$f(x)=P\lambda_2^2K_{\lambda_1}(|x|)+\frac{u_a}{k}[K_{\lambda_1}(|x-a|)+K_{\lambda_1}(|x+a|)] \qquad (3.4)$$

С другой стороны, поскольку имеет место

$\bar{K}_{\lambda_1}(\sigma)=\sigma^{-2}+0(\sigma^{-2}|\sigma|^{-1})$ при $|\sigma|\to\infty$, то отсюда следует, что $K_{\lambda_1}(|x|)=F^{-1}[\bar{K}_{\lambda_1}(\sigma)]$—непрерывная функция и имеет такое поведение, как и $K(|x|)$ в §2. Следовательно, имея ввиду (3.4), не трудно видеть, что $\tau(x)$ в точках $x=0$, $x=\pm a$ принимает конечные значения.

Далее, как и в §2, установим, что интегральное уравнение (3.2) при $N|\gamma_1-\gamma_2|<1$, где

$$N=\sup_{|s|<a}\int_{-a}^{a}|K_{,1}(x-s)|dx$$

в пространстве суммируемых функций $L_1(-a,a)$ можно решать методом последовательных приближений.

В заключение отметим, что остальные неизвестные определяются таким же образом, как и в §2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Саркисян В. С., Оксесян Л. О.** Контактная задача для анизотропной полуплоскости с упругими креплениями.—ДАН Арм. ССР, 1971, т. 52, № 5, с. 273—280.
2. **Саркисян В. С.** Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела.—Ереван: изд. ЕГУ, 1976. 534 с.
3. **Саркисян В. С.** Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками.—Ереван: изд. ЕГУ, 1983. 259 с.
4. **Benthem J. P.** On the diffusion of a load from a semi—infinit stringer bonded to a sheet.—Contr. Th. Airer. Struct. 1972, p. 117—134.
5. **Григорян Э. Х.** Контактная задача для упругой полуплоскости, на границе которой приклеена бесконечная кусочно-однородная накладка.—Изв. АН РА. Механика 1990, т. 43, № 4, с. 24—34.
6. **Кероnян А. В.** Контактная задача для упругой полосы, граница которой усилена склеенной с ней упругой разнородной бесконечной накладкой.—Материалы Всесоюзного научного семинара. «Актуальные проблемы неоднородной механики». Ереван, 1991, с. 343—348.
7. **Григорян Э. Х., Кероnян А. В., Саркисян В. С.** Контактная задача для упругой полуплоскости, граница которой усилена склеенными с ней полубесконечными накладками.—Изв. АН СССР. МТТ. 1992, № 3, с. 180—184.
8. **Melan E.** Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen.—Ingr. Archiv, 1932, Bd., 3, Heft 2, s. 123—129.
9. **Григорян Э. Х.** Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости.—«Ученые записки» ЕГУ, естеств. науки, 1979, №3, с. 29—34.
10. **Кероnян А. В., Саркисян В. С.** Передача нагрузки от кусочно-однородного бесконечного включения к упругой полосе.—«Ученые записки ЕГУ, естеств. науки, 1980, № 3, с. 50—55.
11. **Галин Л. А.** Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.—М.: Наука, 1980, 304 с.
12. **Коваленко Е. В.** Об эффективном методе решения контактных задач для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающим покрытием.—Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1979, т. 32, № 2, с. 76—82.
13. **Александров В. М., Мхитарян С. М.** Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.—М.: Наука, 1983. 487 с.
14. **Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.** Неклассические смешанные задачи теории упругости.—М.: Наука, 1974. 457 с.
15. **Григолюк Э. И., Толкачев В. М.** Контактные задачи теории пластин и оболочек.—М.: Машиностроение, 1980. 416 с.
16. **Lightill M. J.** An introduction to Fourier analysis and generalized functions.—Cambridge Univ. Press, 1959.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
9.08.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 1, 1995 Механика

О ВЛИЯНИИ НАЧАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ НА СТАТИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТОКОНЕСУЩЕЙ ПЛАСТИНКИ

ВАРДАНЯН Л. В.

Լ. Վ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

ՀՈՍԱՆՔԱԿԻՐ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ՍՏԱՏԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ ՍԿԶԲՆԱԿԱՆ ԼԱՐՎԱԾՈՒԹՅԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ուսումնասիրվում է հոսանքակիր ուղղանկյուն սալի ստատիկ կայունության վրա սկզբնական լարվածային վիճակի ազդեցությունը։

Տարբեր եզրային պայմաններում ստացված են էլեկտրական հոսանքի խտության կրիտիկական արժեքները։

Ցույց է տրված, որ սկզբնական լարվածային վիճակի հաշվի առնելը բերում է էլեկտրական հոսանքի խտության մինիմալ կրիտիկական արժեքի աննշան փոքրացման։

L. V. VARDANIAN

ABOUT THE INITIAL STRESSES INFLUENCE ON STATIC STABILITY OF THE RECTANGULAR CURRENT-CARRING PLATE

В настоящей работе рассматривается влияние начального напряженного состояния на статическую устойчивость прямоугольной токонесущей пластинки. При различных условиях найдены критические значения плотности тока.

Показано, что учет начального напряженного состояния приводит к незначительному снижению минимальной критической плотности тока, при которой пластинка теряет устойчивость.

1. Пусть упругая электропроводящая прямоугольная пластинка толщиной $2h$, шириной a и длиной b расположена в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) так, что срединная плоскость пластинки совпадает с координатной плоскостью $(x_1 0 x_2)$.

В пластинке по направлению $0x_1$ — распределенный электрический ток плотностью J_0.

Для начального напряженного состояния пластинки, обусловленного сторонним током, принимается следующий модельный вариант:

$$u_1^0 \to 0 \text{ при } x_1 \to \pm\infty$$

$$\sigma_{22}^0 \to 0 \text{ при } x_2 \to \pm\infty$$

Тогда получим

$$\sigma^0_{11}=\nu_3\sigma^0_{33}$$

$$\sigma^0_{22}=0$$

$$\sigma^0_{ik}=0 \tag{1.1}$$

$$\sigma^0_{33}=-\frac{2\pi}{c^2}J_0(x_3^2-h^2)$$

где ν_3—поперечный коэффициент Пуассона.

Полагая, что вследствие возмущения пластинки возмущение магнитного поля является малым, получаем следующее уравнение магнитостатики [1]:

$$\frac{\partial^2\bar{h}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\bar{h}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\bar{h}}{\partial x_3^2}=0 \tag{1.2}$$

Задача рассматривается в рамках гипотезы Кирхгофа.

При малых упругих деформациях [3] условие непротекания тока приводит к следующим граничным условиям:

$$h_3=\mp\frac{4\pi}{c}J_0w \quad \text{при} \quad x_3=\pm h \tag{1.3}$$

Согласно (1.1) для рассмотрения задачи устойчивости токонесущей пластинки приходим к следующему исходному уравнению возмущенного состояния пластинки [2]:

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\Delta^2w+\frac{2J_0}{c}\int_{-h}^{h}x_3\frac{\partial h_3}{\partial x_1}dx_3-$$

$$-\frac{8\pi h}{c^2}J_0^2\left[w+\frac{h^2}{3}\left(\frac{h^2\nu_3}{5}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Delta w-\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\nu_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)\right]=0 \tag{1.4}$$

2. Рассмотрим задачу, когда прямоугольная пластинка шарнирно закреплена по всему контуру

$$w=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=0 \quad \text{при} \quad x_1=0,\quad x_1=b$$

$$w=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}=0 \quad \text{при} \quad x_2=0,\quad x_2=a \tag{2.1}$$

Тогда, решения уравнений (1.2) и (1.4), удовлетворяющие граничным условиям (1.3), (2.1), представляются следующим образом:

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{mn}\sin\alpha_m x_1\sin\beta_n x_2,\qquad \alpha_m=\frac{m\pi}{b}$$

$$h_3=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}g_{mn}(x_3)\sin\alpha_m x_1\sin\beta_n x_2,\qquad \beta_n=\frac{n\pi}{a} \tag{2.2}$$

Подставляя h_3 из (2.2) в (1.2) и (1.3), приходим к следующим уравнениям и граничным условиям для определения функции $g_{mn}(x_3)$:

$$\frac{d^2 g_{mn}}{dx_3^2}(x_3)-k_{mn}^2 g_{mn}(x_3)=0, \qquad g_{mn}(\pm h)=\frac{4\pi}{c}J_0 w_{mn} \tag{23.}$$

где $k_{mn}^2=\alpha_m^2+\beta_n^2$.

Решая (2.3), найдем

$$g_{mn}(x_3)=\frac{4\pi}{c}J_0 w_{mn}\frac{\mathrm{ch}(k_{mn}x_3)}{\mathrm{ch}(k_{mn}h)} \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.2), найдем h_2, и затем определим компоненты h_1, h_3 возмущенного магнитного поля.

Предполагая $k_{mn}^4 h^4 \ll 1$, получим следующее приближенное представление для интеграла, входящего в (1.4):

$$\int_{-h}^{h} x_3\frac{\partial h_3}{\partial x_2}dx_3 \approx -\frac{8\pi h^3}{3c}J_0\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{2h^2}{5}\Delta^2 w\right) \tag{2.5}$$

Подставляя w из (2.2) в уравнение (1.4), с учетом (2.5) получим уравнение, с помощью которого может быть определено значение критической плотности тока.

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}k_{mn}^4-p_{mn}\left[1-\frac{h^2\beta_n^2}{3}+\frac{4h^4k_{mn}^4}{15}+\frac{h^2\alpha_m^2\nu_2}{3}\left(1+\frac{h^2k_{mn}^2}{5}\right)\right]=0 \tag{2.6}$$

где $p_{mn}=\dfrac{4\pi h}{c^2}J_{0mn}^2$

Если пренебречь членами порядка $h^4k_{mn}^4$, то для определения минимальной критической плотности электрического тока, при которой пластинка теряет устойчивость, получим

$$p_{11}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}k_{11}^4\left(1-\frac{h^2\beta_1^2}{3}+\frac{h^2\alpha_1^2\nu_2}{3}\right)^{-1} \tag{2.7}$$

Формула (2.7) показывает, что учет начального напряженного состояния (третий член в скобке) приводит к незначительному снижению минимальной критической плотности тока.

3. Допустим, что пластинка шарнирно закреплена по длине и подвижно защемлена по ширине

$$w=0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=0 \quad \text{при} \quad x_1=0, \quad x_1=b$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_2}=0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3}=0 \quad \text{при} \quad x_2=0, \quad x_2=a \tag{3.1}$$

Тогда, решения уравнений (1.2) и (1.4), удовлетворяющие граничным условиям (1.3), (3,1), представляются следующим образом:

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}\sin\alpha_m x_1\cos\beta_n x_2, \qquad \alpha_m=\frac{m\pi}{b}$$

$$h_2=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} g_{mn}(x_3)\sin\alpha_m x_1\cos\beta_n x_2, \qquad \beta_n=\frac{n\pi}{a} \tag{3.2}$$

Здесь, как и во втором пункте, находим ту критическую плотность электрического тока, при которой пластинка теряет устойчивость. Эта плотность также определяется формулой (2.7).

4. Если пренебречь членами порядка $h^4k_{mn}^4$, то из (2.6) с учетом (2.2) получим следующее модельное уравнение для рассмотрения задачи устойчивости токонесущей пластинки:

$$D\Delta^2 w-p\left[w+\frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\nu_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)\right]=0 \tag{4.1}$$

$$\text{где}\quad D=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \qquad p=\frac{4\pi h}{c^2}J_0^2$$

Рассмотрим случай, когда пластинка шарнирно закреплена по длине края, а по ширине жестко защемлена:

$$w=0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=0 \quad \text{при} \quad x_1=0, \quad x_1=b$$

$$w=0, \qquad \frac{dw}{dx_2}=0 \quad \text{при} \quad x_2=0, \quad x_2=a \tag{4.2}$$

Представим решения уравнения (4.1), удовлетворяющие граничным условиям (4.2), в виде

$$w=w_m(x_2)\sin\alpha_m x_1 \tag{4.3}$$

Подставляя (4.3) в (4.1), получим следующие уравнения и граничные условия для определения $w_m(x_2)$:

$$\frac{d^4 w_m}{dx_2^4}-\left(2\alpha_m^2+\frac{ph^2}{3D}\right)\frac{d^2 w_m}{dx_2^2}+\left[\alpha_m^4-\frac{p}{D}\left(1+\frac{h^2\alpha_m^2\nu_3}{3}\right)\right]w_m=0 \tag{4.4}$$

$$w_m=0, \qquad \frac{dw_m}{dx_2}=0, \quad \text{при} \quad x_2=0, \quad x_2=b \tag{4.5}$$

При закреплении пластинки по ширине, два корня, выведенного из (4.4) характеристического уравнения, являются мнимыми [4]. Следовательно, получим общие решения уравнения (4.4) в виде:

$$w_m(x_2)=C_1\operatorname{ch}\lambda_1 x_2+C_2\operatorname{sh}\lambda_1 x_2+C_3\cos\lambda_2 x_2+C_4\sin\lambda_2 x_2 \tag{4.6}$$

$$\text{где}\quad \lambda_1=\sqrt{\alpha_m^2+\frac{ph^2}{6D}+\sqrt{\frac{p}{D}\left(1+\frac{\alpha_m^2h^2}{3}(1+\nu_3)+\frac{ph^4}{36D}\right)}} \tag{4.7}$$

$$\lambda_2=\sqrt{\sqrt{\frac{p}{D}\left(1+\frac{\alpha_m^2 h^2}{3}(1+\nu_3)+\frac{ph^4}{36D}\right)}-\alpha_m^2-\frac{ph^2}{6D}}$$

Пользуясь граничными условиями (4.5) из (4.6), находим

$$(y\,\mathrm{th}\,x-x\,\mathrm{tg}\,y)(y\,\mathrm{tg}\,y+x\,\mathrm{th}\,x)=0 \qquad (4.8)$$

$$\text{где} \quad x=\frac{\lambda_1 a}{2}, \quad y=\frac{\lambda_2 a}{2}$$

Из (4.7) имеем

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=\frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{p}{D}\left(1+\frac{\alpha_m^2 h^2}{3}(1+\nu_3)+\frac{ph^4}{36D}\right)} \\ x^2-y^2&=\frac{a^2}{2}\left(\alpha_m^2+\frac{ph^2}{6D}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (4.9)$$

Пользуясь уравнениями (4.8) и (4.9), определим критическую плотность электрического тока.

5. Предположим что,

$$p\ll\frac{6D\pi^2}{h^2a^2}\left(\frac{ma}{b}\right)^2 \qquad (5.1)$$

Тогда, из (4.8) и (4.9) получим

$$p=k\frac{\pi^4 D}{a^4}\left(\frac{ma}{b}\right)^4$$

$$y\,\mathrm{tg}\,y+x\,\mathrm{th}\,x=0, \quad x^2-y^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi ma}{b}\right)^2 \qquad (5.2)$$

В (5.2)

$$k=\frac{4}{\pi^4}\left(\frac{b}{ma}\right)^4(x^2+y^2)^2 \qquad (5.3)$$

Согласно [4], при $b/ma=0{,}662$ получаем $K=6{,}97$. Тогда, для минимального критического тока, при котором пластинка теряет устойчивость, получим

$$p_{\text{кр}}=15{,}89\frac{D\pi^4}{a^4} \qquad (5.4)$$

При принятом допущении (5.1) имеем

$$\frac{h}{a}<0{,}296 \qquad (5.5)$$

Условие (5.5) приемлемо в теории пластин и поэтому условие (5.1) вполне оправдано.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.** Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. - М.: Наука, 1977. 272 с.
2. **Амбарцумян С. А., Белубекян М. В.** Колебания и устойчивость токонесущих упругих пластин. - Ереван: АН Армении, 1992. 123 с.
3. **Белубекян М. В.** О статической устойчивости токонесущей пластинки. - Докл. АН АрмССР, 1982, т. 74, №5, с. 208—212.
4. **Вольмир А. С.** Устойчивость упругих систем. - М.: Физматгиз, 1963. 879 с.

Армгоспединститут им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию
8.06.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 1, 1995 Механика

ОБ УПРАВЛЯЕМОМ ДВИЖЕНИИ УПРУГОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

ГУКАСЯН А. А

Ա. Ա. ՂՈՒԿԱՍՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՏԻԵԶԵՐԱԿԱՆ ՍԱՐՔԻ ՂԵԿԱՎԱՐՎՈՂ ՇԱՐԺՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Հետազոտված է ճկուն վահանակներով արեգակնային մարտկոցներով տիեզերական սարքի պտտական շարժումը:

Ճկուն վահանակները մոդելավորված են որպես առաձգական սալեր: Որոշված են սալերի առաձգական տատանումների կասեցման օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը:

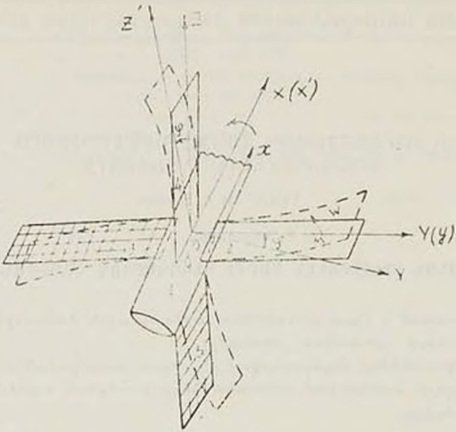
ON CONTROLLED MOTION OF AN ELASTIC COSMIC APPARATUS

A. A. GOOKASIAN

В работе исследуется вращательное движение ЛКА с гибкими панелями солнечных батарей, которые моделируются как упругие пластины. Определены упругие колебания пластин и исследована задача оптимального управления с гашением колебаний в конце процесса.

1. *Описание механической системы.* Рассматривается управляемые движения летательного космического аппарата (ЛКА), представляющего собой основное твердое тело 1 (фиг. 1) с двумя парами гибких панелей солнечных батарей 2—5. Предполагается, что солнечные батареи есть изотропные прямоугольные пластины одинаковых размеров $(a, в)$. Они жестко скреплены с основным телом. Пластины имеют постоянную толщину h и характеризуются цилиндрической жесткостью на изгиб D и плотностью ρ, для которых имеет место гипотеза недеформируемых нормалей [1]. Колебательные движения происходят в вертикальной плоскости YOZ. Считается, что управление осуществляется моментом сил $M(t)$, приложенным к основному телу и создаваемым ракетными двигателями. Поскольку рассматриваются движения тела вокруг продольной оси, то солнечные батареи в каждой паре при определенных начальных условиях будут совершать антисимметричные колебания, и можно ограничиться рассмотрением динамики только одной батареи 2, а эффект воздействия ее на основное тело умножить на четыре [2].

Радиус-вектор точек пластины 2 относительно точки O' обозначим через



Фиг. 1

$$\bar{R}(t,x,y)=\bar{R}_0(t,x,y)+\bar{w}(t,x,y) \qquad (1.1)$$

где $\bar{R}_0(t,x,y)$—вектор состояния недеформированной пластины относительно точки O'; $\bar{w}(t,x,y)$—вектор упругих поперечных смещений точек срединной плоскости пластины в момент времени t.

Векторы $\bar{R}_0$ и $\bar{w}$ в инерциальной системе координат $OXYZ$ имеют следующие координатные представления:

$$\bar{R}_0(t,x,y)=\begin{Vmatrix} x \\ (y+r)\cos\varphi \\ (y+r)\sin\varphi \end{Vmatrix} \quad \bar{w}(t,x,y)=\begin{Vmatrix} 0 \\ -w(t,x,y)\sin\varphi \\ w(t,x,y)\cos\varphi \end{Vmatrix} \qquad (1.2)$$

где φ—угол между плоскостью XOY и плоскостью $X'O'Y'$ (ось $O'Y'$ является касательной к срединной поверхности деформируемой пластины), r—расстояние от продольной оси OX до линии прикрепления пластины.

Кинетическая энергия ЛКА состоит из кинетической энергии вращательного движения основного жесткого тела и кинетической энергии колебательных движений прямоугольных пластин

$$K=\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2+2\rho h\iint\limits_{\Omega}|\dot{\bar{R}}(t,x,y)|^2 d\Omega \qquad (1.3)$$

где J—момент инерции основного тела относительно оси OX, $d\Omega$—элемент площади срединной плоскости пластины.

Потенциальная энергия упругой деформации пластин имеет вид [1]:

$$\Pi=2D\iint\limits_{\Omega}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}d\Omega \quad (1.4)$$

Здесь $D=Eh^3/12(1-\nu)^2$, E—модуль упругости материала, ν—коэффициент Пуассона.

Исследования проводятся в рамках линейной теории упругости, где имеют место следующие предположения: упругое поперечное смещение пластин мало по сравнению с линейными размерами ($\max|w(t,x,y)|:\min(a,b)\sim\varepsilon$), а цилиндрическая жесткость на изгиб велика ($D\sim\varepsilon^{-1}$, $\varepsilon\ll 1$). Предполагается также, что повороты пластины как целого вокруг оси OX конечные ($\varphi\sim 1$), а отношение времени движения (поворота) к максимальному периоду собственных упругих колебаний пластин имеет порядок $T/T_0\sim\varepsilon^{1/2}$. Из этих предположений следует также, что $\dot\varphi\sim\varepsilon^{1/2}$ и $\ddot\varphi\sim\varepsilon$ [3, 4].

2. *Уравнения колебательных движений пластин ЛКА*. Из вариационного принципа механики получим линейное интегро-дифференциальное уравнение движения

$$J\ddot\varphi+4\rho h\iint\limits_{\Omega}(y+r)[\ddot\varphi(y+r)+\ddot w(t,x,y)]d\Omega=M \quad (2.1)$$

и уравнения упругих колебаний пластин ЛКА

$$\ddot w(t,x,y)+\frac{D}{\rho h}\Delta^2 w(t,x,y)=-(y+r)\ddot\varphi \quad (2.2)$$

с граничными условиями

$$w(t,x,0)=0,\quad \left.\frac{\partial w(t,x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}=0$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=a}=0,\quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]_{y=a}=0 \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0,b}=0,\quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]_{x=0,b}=0$$

где $\Delta=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$

Согласованные с краевыми условиями (2.3), начальные условия задачи представим в виде

$$\varphi(t_0)=\varphi^0,\quad \dot\varphi(t_0)=\omega^0$$

$$w(t_0,x,y)=F_1(x,y),\quad \dot w(t_0,x,y)=F_2(x,y) \quad (2.4)$$

3. *Решение краевой задачи (2.2)—(2.4).* Решение уравнения (2.2) с заданной правой частью представим в виде ряда по собственным формам однородной краевой задачи [1]

$$w(t,x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\theta_{mn}(t)X_m(x)Y_n(y) \tag{3.1}$$

Функции $X_m(x)$ и $Y_n(y)$ представляют собой собственные формы колебаний однородных балок. $X_m(x)$ удовлетворяет краевым условиям балки со свободными краями, а $Y_n(y)$—краевым условиям для балки, жестко заделанной на конце $y=0$ и со свободным краевым концом $y=a$.

Подставляя (3.1) в уравнение (2.2) и учитывая условие ортогональности

$$\int_0^b X_m(x)X_k(x)dx=\begin{cases}0 & \text{при } m\neq k\\ \beta_m^2 & \text{при } m=k\end{cases}$$

$$\int_0^a Y_n(y)Y_k(y)dy=\begin{cases}0 & \text{при } n\neq k\\ \alpha_n^2 & \text{при } n=k\end{cases}$$

получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений [5]:

$$\ddot{\theta}_{mn}(t)+k_{mn}^4\theta_{mn}(t)=\Phi_{mn}[t] \tag{3.2}$$

где

$$k_{mn}^4=D[(\lambda_m^4+\lambda_n^4)\alpha_n^2\beta_m^2+2c_{mn}]/\rho h\beta_m^2\alpha_n^2$$

$$c_{mn}=\iint_{\Omega}X_m''(x)Y_n''(y)X_m(x)Y_n(y)d\Omega$$

$$\Phi_{mn}[t]=-\frac{\varphi(t)}{\alpha_n^2\beta_m^2}\iint_{\Omega}(y+r)X_m(x)Y_n(y)d\Omega$$

λ_m и λ_n определяются из следующих трансцендентных уравнений:

$$\operatorname{ch}\lambda_m b\cos\lambda_m b-1=0$$

$$\operatorname{sh}\lambda_n a\sin\lambda_n a+1=0$$

Общее решение уравнения (3.2) имеет вид

$$\theta_{mn}(t)=c_{mn}^1\sin k_{mn}^2t+c_{mn}^2\cos k_{mn}^2t+\frac{1}{k_{mn}^2}\int_{t_0}^{t}\Phi_{mn}[\tau]\sin k_{mn}^2(t-\tau)d\tau \tag{3.3}$$

Постоянные c_{mn}^1 и c_{mn}^2 определяются из начальных условий (2.4) для w, $\dot{w}$.

Следовательно, упругие колебания пластин ЛКА во время движения определяются выражением

$$w(t,x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\Bigg[c^1_{mn}\sin k^2_{mn}t+c^2_{mn}\cos k^2_{mn}t+ \tag{3.4}$$

$$+\frac{1}{k^2_{mn}}\int_{t_0}^{t}\Phi_{mn}[\tau]\sin k^2_{mn}(t-\tau)d\tau\Bigg]X_m(x)Y_n(y)$$

В задаче кинематического управления ЛКА, когда задан закон изменения угла поворота ($\varphi=\varphi(t)$) основного тела как функции времени, после определения упругих смещений пластин, можно, подставляя (3.4) в (2.1) с помощью квадратур по x и y, определить тот управляющий момент сил $M(t)$, который необходим для реализации заданного (не колебательного) движения для упругой модели ЛКА [3, 4] Это—прямая задача динамики. При таком подходе управлением является угловое ускорение основного тела ЛКА $\ddot{\varphi}=u(t)$, которое дает решение задачи. Ниже для определенности приближенно исследуется задача оптимального кинематического управления поворотом ЛКА на заданный угол с гашением упругих колебаний пластин в конце процесса управления.

4. *Задача оптимального управления ЛКА.* Требуется за заданное время T привести ЛКА из начального состояния (2.4) в заданное конечное состояние с гашением упругих колебаний в конце процесса управления:

$$\varphi(T)=\varphi^T,\quad \dot{\varphi}(T)=\omega^T,\quad w(T,x,y)=\dot{w}(T,x,y)=0 \tag{4.1}$$

и минимизировать функционал $\Phi[u]$, характеризующий качество управления. Для определенности в качестве критерия оптимальности возьмем квадратический функционал

$$\Phi[u]=\int_{t_0}^{T}[u(t)]^2dt\to\min_{u\in U},\quad u(t)=\ddot{\varphi}(t) \tag{4.2}$$

После решения краевой задачи (2.2)—(2.4) задачу оптимального управления (4.1), (4.2) можно записать в виде

$$\ddot{\theta}_{mn}(t)+k^4_{mn}\theta_{mn}(t)=-a_{mn}u(t)$$

$$\varphi(t)=\varphi^0+\omega^0t+\int_{t_0}^{t}u(t-\tau)d\tau,\quad \omega(t)=\omega^0+\int_{t_0}^{t}u(\tau)d\tau$$

$$\varphi(t_0)=\varphi^0,\quad \dot{\varphi}(t_0)=\omega^0,\quad \varphi(T)=\varphi^T,\quad \dot{\varphi}(t)=\omega^T \tag{4.3}$$

$$\theta_{mn}(T)=\dot{\theta}_{mn}(T)=0,\quad \Phi[u]\to\min$$

$$a_{mn}=\frac{1}{\alpha^2_n\beta^2_m}\iint_{\Omega}(y+r)X_m(x)Y_n(y)d\Omega$$

Решение задачи оптимального управления движением в конечно-модовом приближении: $n=1, 2, \ldots, N$, $m=1, 2, \ldots, M$ ЛКА с гашением упругих колебаний пластин существует, если среди k_i нет двух одинаковых, что далее и предполагается [6].

Задачи оптимального управления (4.1)—(4.3) приводятся к решению следующей проблемы моментов [7]:

$$\int_0^T u(t)dt=c^1, \quad \int_0^T u(t)(T-t)dt=c^2$$

$$\int_0^T u(t)\sin k_{mn}^2(T-t)dt=c_{mn}^3, \quad \int_0^T u(t)\cos k_{mn}^2(T-t)dt=c_{mn}^4 \tag{4.4}$$

$$\Phi[u]\to\min \quad (t_0=0)$$

где

$$c^1=\omega^T-\omega^0, \quad c^2=\varphi^T-\varphi^0-\omega^0T$$

$$c_{mn}^3=(-c_{mn}^1\sin k_{mn}^2T-c_{mn}^2\cos k_{mn}^2T)/D_{mn}$$

$$c_{mn}^4=(-c_{mn}^1\cos k_{mn}^2T+c_{mn}^2\sin k_{mn}^2T)/D_{mn}k_{mn}^2$$

$$D_{mn}=-k_{mn}^2a_{mn}$$

$$m=1, 2, \ldots, M; \quad n=1, 2, \ldots, N.$$

Применяя принцип максимума к счетной системе (4.4), решение ищем в виде [4]

$$u(t)=A_*\frac{t}{T}+B_*+\sum_{m,n=1}^{\infty}(A_{mn}\sin k_{mn}^2t+B_{mn}\cos k_{mn}^2t) \tag{4.5}$$

$u(t)$ строится разложениями (или последовательными приближениями) по степеням малого параметра $1/T=\sqrt{\varepsilon}\,(T_0\sim 1)$. Нулевое приближение $u^0(t)$ с абсолютной погрешностью $O(\varepsilon^{3/2})$ определяет оптимальный поворот абсолютной жесткой модели ЛКА и имеет вид

$$u^0(t)=A_*^{(0)}\frac{t}{T}+B_*^{(0)}, \quad A_{mn}^{(0)}=B_{mn}^{(0)}=0 \tag{4.6}$$

где

$$A_*^{(0)}=-\frac{12}{T^2}\left(c^2-\frac{1}{2}c^1T\right), \quad B_*^{(0)}=\frac{6}{T^2}\left(c^2-\frac{1}{3}c^1T\right)$$

$$(u^0(t)\sim\varepsilon, \quad u(t)-u^0(t)\sim\varepsilon^{3/2})$$

В следующем приближении A_* и B_* с абсолютной погрешностью $O(\varepsilon^2)$ определяются согласно (4.4), после подстановки (4.6):

$$A_*^{(1)}=A_*^{(0)}+\frac{12}{T^2}\sum_{m,n=1}^{\infty}\left\{A_{mn}^{(1)}\left[c_{mn}^1-\frac{1}{2k_{mn}^2}(1-\cos k_{mn}^2T)\right]+\right.$$

$$\left.+B_{mn}^{(1)}\left(c_{mn}^2-\frac{1}{2k_{mn}^2}\sin k_{mn}^2T\right)\right\}$$

$$B^{(1)}_{*}=B^{(0)}_{*}+\frac{6}{T^{2}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\left\{A^{(1)}_{mn}\left[\frac{(1-\cos k^{2}_{mn}T)}{3k^{2}_{mn}}T+c^{s}_{mn}\right]+\right.$$

$$\left.+B^{(1)}_{mn}\left(\frac{T\sin k^{2}_{mn}T}{3k^{2}_{mn}}-c^{c}_{mn}\right)\right\} \qquad (4.7)$$

где

$$c^{s,c}_{mn}=\int_{0}^{T}(T-t)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(k^{2}_{mn}t)dt$$

$$A^{(1)}_{mn}=\frac{2}{T}\left(\frac{c^{3}_{mn}}{D_{mn}}-\int_{0}^{T}u^{0}(t)\sin k^{2}_{mn}tdt\right)$$

$$B^{(1)}_{mn}=-\frac{2}{T}\left(\frac{c^{4}_{mn}}{D_{mn}}-\int_{0}^{T}u^{0}(t)\cos k^{2}_{mn}tdt\right)$$

Аналогично строятся последующие приближения A_{*}, B_{*} и A_{mn}, B_{mn}. Доказательство сходимости рядов и справедливости оценок можно получить стандартным образом [8]. Более точные вычисления неоправданы, так как система (2.1) — (2.3) является приближенной: в ней отброшены члены $O(\varepsilon^{2})$.

Физический смысл полученного результата заключается в том, что малые и плавные управляющие, воздействуя, вызывают малые упругие колебания, влияние которых на управление относительно мало $\sqrt{\varepsilon}$. Нужно отметить также, что в связи с техническими требованиями к задаче управления и к физико-механическим характеристкам пластин, можно упростить исходную задачу, то есть ограничиться гашением главной или нескольких мод упругих колебаний пластин в конце процесса управления.

Требуемое значение управляющего момента сил $M(t)$ вычисляется квадратурой при помощи выражений (2.1):

$$M(t)=Ju^{(0)}(t)+4D\int_{0}^{b}\left[r\frac{\partial^{3}w(t,x,0)}{\partial y^{3}}-\frac{\partial^{2}w(t,x,0)}{\partial y^{2}}\right]dx$$

5. *Колебательное движение ЛКА с учетом сопротивления среды.* Пусть во время движения ЛКА на систему действует сила сопротивления среды пропорционально скорости движения

$$\vec{F}(t,x,y)=-\beta\vec{v}(t,x,y)$$

где β—коэффициент пропорциональности, $\vec{v}(t,x,y)$—скорость движения точек срединной плоскости пластин.

Диссипативная функция Рэлея и обобщенные силы сопротивления имеют следующий вид:

$$R=\frac{\beta}{2}[(y+r)^2\dot{\varphi}^2w^2-2(y+r)\dot{\varphi}\dot{w}]$$

$$Q_1=-\beta[(y+r)^2\dot{\varphi}+(y+r)\dot{w}]$$

$$Q_2=-\beta[\dot{w}+(y+r)\dot{\varphi}]$$

В рассматриваемом случае интегро-дифференциальное уравнение движения ЛКА и уравнение упругих колебаний пластин являются

$$J\ddot{\varphi}+4\rho h\int\int_{\Omega}\{(y+r)[(y+r)\ddot{\varphi}+\ddot{w}(t,x,y)+\beta[(y+r)\dot{\varphi}+\dot{w}(t,x,y)]\}d\Omega=M(t) \quad (5.1)$$

$$\ddot{w}(t,x,y)+\beta\dot{w}(t,x,y)+\frac{D}{\rho h}\Delta^2w(t,x,y)=-(y+r)(\ddot{\varphi}+\beta\dot{\varphi}) \quad (5.2)$$

с граничными и начальными условиями (2.3), (2.4).

Краевая задача (5.2), (2.3) решаются по методике, изложенной в п. 3.

Для коэффициентов $\theta_{mn}(t)$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\theta}_{mn}(t)+2N_{mn}\dot{\theta}_{mn}(t)+k^1_{mn}\theta_{mn}(t)=\Phi^1_{mn}[t] \quad (5.3)$$

где

$$\Phi^1_{mn}[t]=-\frac{\ddot{\varphi}+\beta\dot{\varphi}}{\alpha^2_n\beta^2_m}\int\int_{\Omega}(y+r)X_m(x)Y_n(y)d\Omega, \text{ а } 2N_{mn}=\beta/\alpha^2_n\beta^2_m$$

Решение уравнения (5.3) при заданных $\Phi^1_{mn}[t]$ и при $N_{mn}<k_{mn}$ (малое сопротивление) имеет вид

$$\theta_{mn}(t)=\exp(-N_{mn}t)\left[\theta_{mn}(t_0)\cos\bar{k}^2_{mn}t+\frac{N_{mn}\theta_{mn}(t_0)+\dot{\theta}_{mn}(t_0)}{\bar{k}^2_{mn}}\times\right.$$

$$\left.\times\sin\bar{k}^2_{mn}t\right]+\frac{1}{\bar{k}^2_{mn}}\int_{t_0}^{t}\Phi^1_{mn}[\tau]\exp[-N_{mn}(t-\tau)]\sin\bar{k}^2_{mn}(t-\tau)d\tau \quad (5.4)$$

где $\bar{k}_{mn}=(k^2_{mn}-N^2_{mn})^{1/2}$ — круговая частота колебаний. $T^*=\max2\pi/(k^2_{mn}-N^2_{mn})^{1/2}$ — максимальный период затухающих колебаний (максимум берется по m и n).

При больших силах сопротивления, то есть при $N_{mn}\geqslant k_{mn}$ решение уравнения (5.3) имеет вид

$$\theta^*_{mn}(t)=\exp(-N_{mn}t)(c^1_{mn}\operatorname{ch}t\sqrt{N^2_{mn}-k^2_{mn}})+c^2_{mn}\operatorname{sh}t\sqrt{N^2_{mn}-k^2_{mn}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{N^2_{mn}-k^2_{mn}}}\int_{t_0}^{t}\Phi^1_{mn}[\tau]\exp(-N_{mn}(t-\tau))\operatorname{sh}\sqrt{N^2_{mn}-k^2_{mn}}(t-\tau)d\tau$$

$$(N_{mn}>k_{mn}) \quad (5.5)$$

$$\theta_{mn}^{**}(t)=\exp(-N_{mn}t)(c_{mn}^1+tc_{mn}^2)+\int_{t_0}^{t}\Phi_{mn}^1[\tau]\exp(-N_{mn}(t-\tau))(t-\tau)d\tau$$

$$(N_{mn}=k_{mn}) \qquad (5.6)$$

где c_{mn}^1 и c_{mn}^2 определяются из начальных условий.

После определения поведения пластин во время вращения ЛКА в сопротивляющейся среде при заданном законе изменения угла поворота $\varphi(t)$ и коэффициенте сопротивления β можно, подставляя (3.1), (5.4)—(5.6) в (5.1), с помощью квадратур по x и y, определить тот управляющий момент $M(t)$, который необходим для реализации заданного движения для упругой модели ЛКА. Однако задача об оптимальном управлении ЛКА в сопротивляющейся среде подлежит дальнейшему исследованию.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабаков И. М.** Теория колебаний.—М.: Наука, 1968. 559 с.
2. **Дегтярев Г. Л., Сиразетдинов Т. К.** Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами.—М.: Машиностроение, 1986. 204 с.
3. **Черноусько Ф. Л.** Динамика систем с упругими элементами большой жесткости.—Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 101—113.
4. **Акуленко Л. Д., Гукасян А. А.** Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора.—МТТ, 1983, № 5, с. 33—47.
5. **Гукасян А. А., Саркисян С. В.** О колебательном движении прямоугольной пластинки.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1990, № 4, с. 13—23.
6. **Черноусько Ф. Л., Акуренко Л. Д., Соколев Б. Н.** Управление колебаниями.—М.: Наука, 1980. 382 с.
7. **Бутковский А. Г.** Методы управления системами с распределенными параметрами.—М.: Наука, 1975. 568 с.
8. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ.—М.: Наука, 1977. 742 с.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
16.03.1992

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 1, 1995 Механика

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ В УПРУГОМ, ВЯЗКОМ, ДИСПЕРСИОННОМ И ТЕПЛОПРОВОДЯЩЕМ ПЬЕЗОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ

БАГДОЕВ А. Г., ШЕКОЯН А. В.

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Վ. ՇԵԿՈՅԱՆ

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԱՅԻՆ ՓՆՋԵՐԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ, ՄԱԾՈՒՑԻԿ, ԴԻՍՊԵՐՍԻՈՆ ԵՎ ՋԵՐՄԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ՊՅԵԶՈԴԻԷԼԵԿՏՐԻԿ ՇԵՐՏՈՒՄ

Ուսումնասիրված է ոչ գծային ալիքային փնջերի տարածումը և անդրադարձումը ազատ մակերևույթից մածուցիկ, դիսպերսիոն, ջերմահաղորդիչ պյեզոդիէլեկտրիկ շերտում։

Նեղ փնջերի համար ստացված են անալիտիկ լուծումներ, ռեզոնանսի պայմանը։

A. G. BAGDOEV, A. V. SHEKOYAN

NONLINEAR WAVE BEAMS IN THE VISCOELASTIC DISPERSIVE AND THERMOCONDUCTING PIEZODIELECTRIC LAYER

Изучено распространение и отражение от свободной поверхности нелинейного гауссовского пучка в вязком дисперсном и теплопроводящем пьезодиэлектрическом слое, который находится в постоянном электрическом поле и предварительно деформирован.

Для узких пучков найдены аналитические решения. Показано, что падающие и отраженные пучки распространяются симметрично. Найдено резонансное условие, ограничивающее толщину слоя.

В настоящее время опубликованы несколько статей, изучающих распространение квазимонохроматической волны в диссипативных дисперсионных пьезодиэлектриках [1, 2]. В этих работах изучено распространение нелинейного пучка упругой волны в бесконечной пьезодиэлектрической среде. Такая постановка дает возможность изучать некоторые особенности самой волны с учетом свойств среды и внешних факторов. Однако бесконечная среда на практике редко осуществляется.

В различных акустических приборах, резонаторах, интерферометрах упругая волна распространяется в слое пьезодиэлектрической среды. В таком слое волна генерируется в одной плоскости, распространяется до другой границы, которая обычно бывает свободной поверхностью, отгуда часть волны отражается, распространяясь в обратном направлении, а другая часть преломляется, переходя в другую среду.

В линейном приближении достаточно изучены законы отражения и преломления упругих волн от свободной границы [3, 4]. Особенности отражения нелинейных волновых пучков изучены очень мало из-за математических трудностей. В этом плане нам известны только две работы [5, 14]. Часто в указанных приборах используют ультразвуковую волну большой интенсивности, которая распространяется в виде пучка. Поэтому представляет практический интерес рассмотреть такую задачу, которая описывается ниже.

1. *Постановка задачи.* Предполагается, что пьезодиэлектрик находится между двумя плоскостями, то есть имеется слой. Координатная система x_1, x_2, x_3 выбрана таким образом, чтобы плоскость $x_3=0$ совпадала с одной из плоскостей, ограничивающих пьезодиэлектрик. Пьезодиэлектрик принадлежит гексагональным или тетрагональным сингониям с симметрией $6mm$ или $4mm$. Ось шестой или четвертой степени симметрии направлена по оси ox_3. Предполагается, что другая плоскость, ограничивающая пьезодиэлектрик, есть $x_3=l$, где заданы продольные перемещения в виде гауссового пучка. Они создают пучок нелинейной квазимонохроматической, квазипродольной волны, который распространяется вдоль оси x_3 в направлении к плоскости $x_3=0$. Ось x_3 направлена в обратную сторону распространения волны. Предполагается, что плоскость $x_3=0$ свободная, так что напряжения на ней равны нулю.

Предполагается, что пьезодиэлектрик находится во внешнем постоянном электрическом поле E_3^0, направленном по оси симметрии, которое создает в среде постоянные напряжения или постоянные деформации.

Уравнения движения в проекции на оси x_1, x_2 берутся линейными, поэтому указанные постоянные деформации в уравнения возмущений не войдут. Что касается уравнения в проекции на ось x_3, то в него войдут нелинейные члены, наибольшие по порядку слагаемые, содержащие $\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ [12, 13].

Предполагается, что среда однородная, но в ней есть маленькие неоднородности типа шариков. Концентрация шариков p мала. Размеры неоднородностей меньше характерной длины волны. В ультразвуковом диапазоне это приводит к очень малым размерам шариков, соизмеримым с размерами примесей, которые всегда существуют в не очень чистых кристаллах. Размеры шариков гораздо меньше длины волны, тогда шарики под действием упругой волны, как внешней силы, колеблются вокруг точек, в которых они находились до распространения упругой волны. В результате, упругая волна распространяется с малой дисперсией и дополнительной малой диссипацией.

Аналогичная модель для композитной среды описана в книге [7]. В нашем случае эта модель обобщается для среды с пьезосвойствами.

Нелинейная интенсивная упругая волна сильно поглощается, поэтому, в объеме занимаемой волны среда нагревается. Следовательно, следует учитывать тепловые эффекты. Они малы и нелинейные термические эффекты пренебрегаются.

Уравнения, описывающие поведение нелинейной волны в пьезодиэлектриках с вышеуказанными условиями, состоят из системы уравнений Максвелла, уравнений теории упругости, колебания шариков и уравнения теплопроводности. Уравнения этой системы предварительно упрощаются методом, описанным в статьях [1, 6, 12, 13]. В итоге они принимают следующий вид:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_n \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + c_{44} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - e_{15} \frac{\partial E_3}{\partial x_1} - e_{31} \frac{\partial E_1}{\partial x_1} - \gamma_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \qquad (1.1)$$

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c_n \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + c_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} - e_{15} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - e_{31} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \gamma_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x_2}, \qquad (1.2)$$

$$\rho_1 p \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} + (1-p)\rho_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = c_n \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + c_{44}\Delta_\perp u_3 + c'_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} -$$

$$- e_{15}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2}\right) + b\frac{\partial E_3}{\partial x_3} - a_{33} E_3 \frac{\partial E_3}{\partial x_3} + (3c_{33} + C_{333})\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} +$$

$$+ \eta_{33} \frac{\partial^3 u_3}{\partial t \partial x_3^2} - \gamma_{33} \frac{\partial \theta}{\partial x_3}, \qquad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} + 2q \frac{\partial}{\partial t}(u_n - u_3) + \Omega^2 (u_n - u_3) = 0, \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_3} = 0 \qquad (1.5)$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} = 0 \qquad (1.6)$$

$$\varepsilon_{11}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{2}(e_{15} - e_{31})\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{2} e_{15}\Delta_\perp u_3 + \varepsilon'_{33} \frac{\partial E_3}{\partial x_3} +$$

$$+ b\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + (a_{33} - \varepsilon_{33})\frac{\partial E_3}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + a_{33} E_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = 0 \qquad (1.7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \gamma_{33} T c^{-1} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t \partial x_3} = \chi \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \qquad (1.8)$$

где $c'_{33} = c_{33} + (3c_{33} + C_{333})\dfrac{\partial \varphi_3^0}{\partial x_3}$, $\varepsilon'_{33} = \varepsilon_{33} + a_{33}\dfrac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$, $c_n = c_{13} + c_{44}$, ρ_1 и ρ_2 — плотности среды и шарика, c_{ij}, C_{ijk}, e_{ik}, a_{ik}, η_{ik}, γ_{ik} — соответственно модули линейной и нелинейной упругости, пьезомодуль, тензоры диэлектрической проницаемости, электрострикции коэфициентов вязкости и термичности, c — теплоемкость единицы объема среды, χ — коэффициент температуропроводности, $\theta = T_0 - T$, T — начальная однородная а T_0 — текущая температура среды. $b = e_{33} - a_{33}E_3^0$, $q = \dfrac{9}{2}\rho_1\rho_2^{-1}(2\varkappa^3 \ldots$

$+1)(2w^2+1)^{-2}$, $\Omega^2=9\gamma_1\rho_2^{-1}v^2 l_0^{-2}(2w^2+1)^{-1}$, $w=vv_1^{-1}$; v, v_1—соответственно, линейные скорости продольной и поперечной упругой волны, l_0—радиус шарика, u_i—компоненты вектора смещения, E_i—компоненты вектора электрического напряжения, u_n—смещение шарика, $\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

В уравнениях (1.3) и (1.7) учтены упругая, геометрическая, электроупругая и электрическая нелинейности. В уравнениях (1.3) и (1.7) множители $1-\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$ заменены единицей в силу малости $\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$. При выводе уравнений (1.1)–(1.7) используется система лагранжевых переменн. Основной по порядку величины является компонента скорости $\frac{\partial u_3}{\partial t}$ и электрического поля E_3, вдоль оси x_3. Из $\sigma_{3i}^0=0$ $i=1, 2, 3$, полагая $\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}=0$, i, $j\neq 3$, получится $E_3^0=c_{33}e_{33}^{-1}\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$.

3. *Вывод уравнений коротких волн.* Волна, которая генерируется в плоскости $x_3=l$, распространяется до свободной поверхности $x_3=0$ и отражается. Таким образом, в пьезодиэлектрике существуют два волновых поля—падающее и отраженное.

Все функции в системе уравнений (1.1)—(1.7) будут представлены в виде сумм двух величин, из которых однократно штрихованная соответствует падающей волне, а другая—двукратно штрихованная—отраженной. Легко выдеть, что все линейные уравнения будут расщеплены на два новых независимых уравнения для падающей и отраженной волны. Согласно работам [8, 9, 10, 11] нелинейные уравнения в первом приближении также можно расщепить на 2 новых нелинейных независимых уравнения. Таким образом, получаются две новые независимые системы уравнений типа (1.1)—(1.8) для падающей и отраженной волны. Это означает, что в среде образованы два независимых нелинейных волновых пучка, распространяющихся друг против друга. По закону суперпозиции они налагаются, создавая нелинейные стоячие волны. Пучки падающих и отраженных волн влияют друг на друга через граничные условия.

В систему уравнений с однократно штрихованными функциями введем новую координату $\tau_1=\tau-t+\frac{l}{v}$, где $\tau=-x_3v^{-1}$, v—линейная скорость волны, имеющая следующий вид:

$$v^2=\rho_1^{-1}(c_{33}+\gamma^2Te^{-1}+b^2\epsilon_{33}^{-1})$$

Упрощая эту систему дифференциальных уравнений обычной процедурой, как в статьях [1, 2, 6], и исключая последовательно функции для величины $\varepsilon_1=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$, получится следующее уравнение коротких волн:

ние уравнения (3.2) можно искать в виде квазимонохроматической волны, имеющей следующий вид:

$$\psi_{1,2}=\frac{1}{2}\Big[A_{1,2}(\tau_{1,2},t)\exp[i\alpha\tau_{1,2}-(i\omega+\nu)t]+$$

$$+B_{1,2}(\tau_{1,2},t)\exp[2i\alpha\tau_{1,2}-2(i\omega+\nu)t]+\text{к.с.}\Big] \tag{4.1}$$

где α—основная частота; ω—прекращение частоты за счет малых дисперсий; $A_{1,2}$, $B_{1,2}$—медленно меняющиеся амплитуды первой и второй гармоник; ν—коэффициент поглощения.

Вычисляя производные от (4.1), подставляя в (3.2), приравнивая к нулю коэффициенты у экспонент первой и второй гармоник, можно получить уравнения для $A_{1,2}$, $B_{1,2}$.

Считается, что основной по порядку в (4.1) являются $A_{1,2}$, а $B_{1,2}$—малые более высокого порядка, которые появляются за счет нелинейностей. Приравнивая к нулю наибольшие по порядку недифференцируемые члены в уравнении для первой гармоники, получится уравнение линейной дисперсии и затухания:

$$\omega=-N\alpha^3 v^{-1},\quad \nu=H\alpha^4 v^{-1}-D\alpha^2 v^{-1} \tag{4.2}$$

При выполнении неравенств $\omega\tau\ll 1$ и $\omega\ll\alpha$, в уравнении для $B_{1,2}$ можно пренебречь производным, в результате получится алгебраическое уравнение. Для изучения падающей и отраженной волны следует использовать координаты τ_1 или τ_2, соответственно. Ясно, что выражения (4.2) справедливы для обеих волн.

Уравнение модуляции будет изучено в стационарном случае. В этом случае от координат t и $\tau_{1,2}$ переходим к медленной координате τ, тогда для падающей волны будет $\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\tau_1}=\frac{\partial}{\partial\tau}$, а для отраженной волны $\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\tau_2}=-\frac{\partial}{\partial\tau}$. Однако после ввода координат $\tau'=-\tau$ для отраженной волны будет $\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\tau_2}=\frac{\partial}{\partial\tau'}$ и уравнения модуляции для отраженных и падающих волн совпадут. Исключая функцию $B_{1,2}$ и после некоторых преобразований коэффициентов с учетом (4.2), уравнение модуляции примет следующий вид:

$$\left(i\alpha+3i\omega+2\nu+\frac{2H\alpha^2}{v}\right)\frac{\partial A_{1,2}}{\partial\tau}-\frac{1}{2}L(A_{1,2})=\Gamma^2\alpha^4\Big[2v^2\Big(4i\alpha\nu-12\alpha\omega+$$

$$+\frac{24iH\alpha^5}{v}\Big)\Big]^{-1}|A_{1,2}|^2A_{1,2}\exp(-2\nu t) \tag{4.3}$$

В уравнении (4.3) для отраженной волны τ надо заменить на τ'.

Записывая $A_{1,2}=a_{1,2}\exp(i\varphi_{1,2})$, где $\varphi_{1,2}$—эйконал, а $a_{1,2}$—действительная амплитуда, подставляя в уравнение (4.3), отделяя мнимые и действительные части и переходя к цилиндрическим координатам, получим два уравнения для эйконала и амплитуды ние уравнения (3.2) можно искать в виде квазимонохроматической волны, имеющей следующий вид:

$$\varphi_{1,2}=\frac{1}{2}\{A_{1,2}(\tau_{1,2},t)\exp[i\alpha\tau_{1,2}-(i\omega+\nu)t]+$$

$$+B_{1,2}(\tau_{1,2},t)\exp[2i\alpha\tau_{1,2}-2(i\omega+\nu)t]+\text{к.с.}\} \tag{4.1}$$

где α—основная частота; ω—прекращение частоты за счет малых дисперсий; $A_{1,2}$, $B_{1,2}$—медленно меняющиеся амплитуды первой и второй гармоник; ν—коэффициент поглощения.

Вычисляя производные от (4.1), подставляя в (3.2), приравнивая к нулю коэффициенты у экспонент первой и второй гармоник, можно получить уравнения для $A_{1,2}$, $B_{1,2}$.

Считается, что основной по порядку в (4.1) являются $A_{1,2}$, а $B_{1,2}$—малые более высокого порядка, которые появляются за счет нелинейностей. Приравнивая к нулю наибольшие по порядку недифференцируемые члены в уравнении для первой гармоники, получится уравнение линейной дисперсии и затухания:

$$\omega=-V\alpha^3v^{-1},\quad \nu=H\alpha^4v^{-1}-D\alpha^2v^{-1} \tag{4.2}$$

При выполнении неравенств $\omega\tau\gg 1$ и $\omega\ll\nu$, в уравнении для $B_{1,2}$ можно пренебречь производным, в результате получится алгебраическое уравнение. Для изучения падающей и отраженной волны следует использовать координаты τ_1 или τ_2, соответственно. Ясно, что выражения (4.2) справедливы для обеих волн.

Уравнение модуляции будет изучено в стационарном случае. В этом случае от координат t и $\tau_{1,2}$ переходим к медленной координате τ, тогда для падающей волны будет $\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\tau_1}=\frac{\partial}{\partial\tau}$, а для отраженной волны $\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\tau_2}=-\frac{\partial}{\partial\tau}$. Однако после ввода координат $\tau'=-\tau$ для отраженной волны будет $\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\tau_2}=\frac{\partial}{\partial\tau'}$ и уравнения модуляции для отраженных и падающих волн совпадут. Исключая функцию $B_{1,2}$ и после некоторых преобразований коэффициентов с учетом (4.2), уравнение модуляции примет следующий вид:

$$\left(i\alpha+3i\omega+2\nu+\frac{2H\alpha^2}{v}\right)\frac{\partial A_{1,2}}{\partial\tau}-\frac{1}{2}L(A_{1,2})=\Gamma^2\alpha^3\left[2v^2(4H\alpha^3-12\alpha\omega+\right.$$

$$\left.+\frac{24iH\alpha^3}{v}\right)\Big]^{-1}|A_{1,2}|^2A_{1,2}\exp(-2\nu t) \tag{4.3}$$

В уравнении (4.3) для отраженной волны τ надо заменить на τ'.

Записывая $A_{1,2}=a_{1,2}\exp(i\varphi_{1,2})$, где $\varphi_{1,2}$—эйконал, а $a_{1,2}$—действительная амплитуда, подставляя в уравнение (4.3), отделяя мнимые и действительные части и переходя к цилиндрическим координатам, получим два уравнения для эйконала и амплитуды.

Уравнения для эйконала и амплитуды преобразовываются следующими выражениями:

$$a_{1,2}=b_{1,2}f_{1,2}^{-1}\exp\left[-\frac{1}{2}r^2(r_{1,2}f_{1,2})^{-2}\right],\quad \varphi_{1,2}=\varphi_{1,2}(\tau)+\frac{1}{2}r^2R_{1,2}^{-1}(\tau) \tag{4.4}$$

где $f_{1,2}$—безразмерная ширина пучка, $\varphi_{1,2}$—набег фазы на оси пучка и $R_{1,2}$—переменный радиус кривизны $b_{1,2}$ и $r_{1,2}$ амплитуды и радиус пучка на границах. Здесь индекс один соответствует падающей волне, а индекс 2—отраженной. Подставляя (4.4) в систему уравнений для $\varphi_{1,2}$ и $a_{1,2}$ обычным образом [4, 2, 6], получим уравнения для $f_{1,2}$, $\varphi_{1,2}$, $R_{1,2}$. Они имеют следующий вид:

$$\frac{d\varphi_{1,2}}{d\tau}=Gf_{1,2}^{-2} \tag{4.5}$$

$$R_{1,2}^{-1}=\frac{1}{2}\alpha(1-3\xi)L_1^{-1}f_{1,2}^{-1}\frac{df_{1,2}}{d\tau}+\frac{1}{2}\varkappa_2 b_{1,2}^2\alpha^{-1}f_{1,2}^{-2} \tag{4.6}$$

$$\frac{d^2f_{1,2}}{d\tau^2}=Mf_{1,2}^{-3} \tag{4.7}$$

где $\varkappa_1=3\zeta\alpha^4\xi$, $\varkappa_2=-\zeta(\nu+6H\alpha^4v^{-1})$, $G=[-2L\alpha^{-1}r_{1,2}^{-2}-\varkappa_1 b_{1,2}\alpha^{-1}](1-3\xi)^{-1}$

$$M=4L_1\alpha^{-1}(1-3\xi)^{-2}\left[\frac{\varkappa_2^2}{4}b_{1,2}^2\frac{\alpha^{-1}}{L_1}+\varkappa_1 b_{1,2}^2\alpha^{-1}r_{1,2}^{-2}+L_1\alpha^{-1}r_{1,2}^{-4}\right]$$

$$\zeta=\frac{1}{8}\Gamma^2v^{-2}\left[9\xi^2+\left(\frac{\nu}{\alpha}+6H\alpha^3v^{-1}\right)^2\right]\exp(2\nu t)$$

$\xi=-\dfrac{\omega}{\alpha}$, L_1—коэффициент в операторе L, стоящем перед лапласианом $\Delta_\perp$.

5. *Граничные условия.* Из постановки задачи ясно, что должно быть два граничных условия. Первое из них задается в плоскости $x_3=l$ и относится к падающей волне. Предполагается, что в этой плоскости задается пучок с гауссовским профилем и выполняются следующие условия:

$$f_1(l)=1,\quad \frac{df_1(l)}{d\tau}=F,\quad \varphi_1(l)=0\quad F=\frac{2L_1}{\alpha(1-3\xi)}\left[\frac{\varkappa_2}{2}b_1^2-R_1^{-1}(l)\right] \tag{5.1}$$

Итак, уравнения (4.5)—(4.7) с индексами один у искомых функций следует решить с граничными условиями (5.1).

Второе граничное условие задается в плоскости $x_3=0$. Эта плоскость предполагается свободной, то есть напряжения $\sigma_{13}=\sigma_{23}=\sigma_{33}=0$. Будем ограничиваться наивысшими порядками в этих уравнениях, так как ограничиваемся изучением пучка квазипродольных волн. В наибольших порядках уравнения $\sigma_{13}=\sigma_{23}=\sigma_{33}=0$ расщепляются, то есть отделяются условия, которые относятся к поперечным и продольным волнам. Напряжения σ_{13}, σ_{23}, σ_{33} состоят из двух слагаемых: постоянных, обусловленных электрическим напряжением E_3^0, и переменных, обусловленных волной. Когда переменные слагаемые напряжений — нули (волновой процесс еще не начался), то постоянные слагаемые тоже будут нулями, так как требуется, чтобы в плоскости $x_3=0$ напряжения были нулями. Тогда в наивысшем порядке уравнение $\sigma_{33}=0$ дает

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0 \tag{5.2}$$

В наивысшем порядке $\sigma_{13}=\sigma_{23}=0$ выполняются автоматически.

Подставляя в (5.2) $u_3=u_3'+u_3''$, переходя в выражениях $\varphi_1=\frac{\partial u_3'}{\partial \tau_1}$ и $\varphi_2=-\frac{\partial u_3''}{\partial \tau_2}$ от координат τ_1, τ_2 к x_3, учитывая $\frac{\partial}{\partial x_3}=\pm v^{-1}\frac{\partial}{\partial \tau_{1,2}}$, получится следующее граничное условие:

$$\varphi_1=-\varphi_2 \text{ при } x_3=0 \tag{5.3}$$

Подставив в уравнениях (5.3) решение (4.1) при $\tau=0$, ограничиваясь первой гармоникой, получим $A_1=-A_2$ при $\tau=0$. Подставим в последнем равенстве эйкональное решение, а потом соотношения (4.4), получим, что $\alpha_1(0)=\alpha_2(0)$, $f_1(0)=f_2(0)$, $R_1(0)=R_2(0)$.

Из последних двух равенств при учете выражения (4.6) для $R_{1,2}$ нетрудно видеть, что выполняется также $\frac{df_{1,2}(0)}{d\tau}=0$. Окончательно, для граничных условий в плоскости $x_3=0$ получатся следующие соотношения:

$$h_1=-h_2,\ f_1(0)=f_2(0),\ R_1(0)=R_2(0),\ \alpha_1(0)=\alpha_2(0),\ \frac{df_{1,2}(0)}{d\tau}=0 \tag{5.4}$$

Уравнения (4.5)—(4.7) с индексами два следует решать с граничными условиями (5.4).

6. *Решения уравнения (4.5)—(4.7).* Сперва решим уравнения (4.7) и (4.5) с граничными условиями (5.1). Легко проверить, что решения имеют следующий вид:

$$f_1=\left[\tau-\frac{l}{v}+F(F^2+M)^{-1}\right](F^2+M)+M(F^2+M)^{-1} \tag{6.1}$$

$$\alpha_1=M^{-1/2}G\left\{\operatorname{arctg}\left\{(F^2+M)M^{-1/2}\left[\tau-\frac{l}{v}+(F^2+M)^{-1}F\right]\right\}-\operatorname{arctg}(FM^{-1/2})\right\} \tag{6.2}$$

Условие $\frac{df_1(0)}{d\tau}=0$ ограничивает значение l.

Легко найти, что она имеет вид:

$$l=vF(F^2+M)^{-1} \tag{6.3}$$

Условие (6.3) есть условие резонанса.

Решения уравнений (4.5) и (4.7) с граничными условиями (5.4) имеют следующий вид:

$$f_2=f_1(0)+Mf_1^2(0)(\tau')^2 \tag{6.4}$$

$$\varphi_2=GM^{-1/2}\mathrm{arctg}[M^{1/2}f_1^{-2}(0)]\tau'+\varphi_1(0),\quad \tau'=-\tau \tag{6.5}$$

Легко проверить, что при выполнении условия (6.3) существуют равенства $f_1(\tau)=f_2(\tau')$, $\varphi_1(\tau)=\varphi_2(\tau')$. Эти равенства указывают на существование симметрии для падающих и отраженных пучков.

Полученные решения (6.1)—(6.5) верны для постоянных коэффициентов, что верно в случаях $\nu l\ll 1$ и $\nu l\gg 1$, причем в последнем случае $\varkappa_1=\varkappa_2\approx 0$ и решение линейное.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шекоян А. В. Трехмерные нелинейные квазимонохроматические волны в пьезодиэлектриках с учетом вязкости и теплопроводности.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1982, т. 35, № 5, с. 27—37.
2. Багдоев А. Г., Шекоян А. В. Нелинейные стационарные волны в пьезодиэлектриках с шариковыми включениями.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1987, т.40, №5, с. 14—23.
3. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.—М.: Наука, 1973. 426 с.
4. Исакович М. А. Общая акустика.—М.: Наука, 1973. 494 с.
5. Багдоев А. Г., Шекоян А. В. Отражение квазимонохроматической нелинейной волны от свободной поверхности среды.—Изв. АН РА. Механика, 1991, т. 44, № 1, с. 28—35.
6. Bagdoev A. G. and Shekoyan A. V. Focusing of nonlinear ultrasonic waves in visous thermoelastic materials with spherical inclusians.—Phys. stat. sol. (a), 1985, v. 89, P. 449—507.
7. Кристенсен Р. Введение в механику композитов.—М.: Мир, 1982. 332 с.
8. Hunter J. K., Keller J. B. Weakly nonlinear high freguency waves.—Communicatious on pure and applied mathem. 1983, v. 36, no. 5, p. 547—558.
9. Garbonaro P. High freguency waves in guasilinear invisid gasodinamices.—ZAMP, 1986, v. 37, no. 1, p. 43—52.
10. Багдоев А. Г., Шекоян А. В. Трехмерные нелинейные волны в пьезодиэлектриках и в пьезополупроводниках.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1981, т. 34, №4, с. 3—15.
11. Канер В. В., Руденко О. В. О распространении волн конечной амплитуды в акустических волноводах.—Вестник МГУ. Сер. физич., астрономия, 1978, т. 19, с. 78.
12. Багдоев А. Г., Шекоян А. В. Трехмерные нелинейные волны в пьезодиэлектриках и пьезополупроводниках.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1981, т. 31, № 34, с. 3—15.
13. Багдоев А. Г., Шекоян А. В. Распространение нелинейных квазимонохроматических волн в термоупругой линейно-вязкой среде.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1982, т. 35, № 4, с. 3—13.
14. Шекоян А. В. Отражение гауссовского пучка от свободной поверхности в нелинейной вязкоупругой среде с внутренними осцилляциями.—В сб.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред.—Ереван, Изд. АН Арм. ССР, 1990, с. 283—287.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
14.05.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 1, 1995 Механика

УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НАБУХАНИЯ ГЛИНИСТЫХ ГРУНТОВ

МЕСЧЯН С. Р., АЙРОЯН С. Г.

Ս. Ռ. ՄԵՍՉՅԱՆ, Ս. Հ. ՀԱՅՐՈՅԱՆ

ԿԱՎԱՅԻՆ ԳԵՏՆԱՀՈՂԵՐԻ ՈՒՌՉԵԼՈՒ ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՊԱՐԶԵՑՎԱԾ ԵՂԱՆԱԿ

Հոդվածում շարադրված է մեկ նմուշի փորձարկումով կավային գետնահողերի ուռչելու բնութագրիչների որոշման պարզեցված եղանակ, որը հիմնված է դրանց ձևափոխումների երկու առանձնահատկություններով՝ խտացման լրիվ վերականգնումով և միևնույն արդյունավետ ճնշումների տակ բնական խոնավության ու դադարիչի տակ նախապես թրջված փորձանմուշների խտացումների հավասարությամբ։

S. R. MESCHYAN, S. H. HAIROYAN

SIMPLIFIED METHOD OF DETERMINATION OF CHARACTERISTICS OF SWELLING OF CLAY SOILS

В статье изложен упрощенный метод определения характеристик набухания глинистых грунтов испытанием одного образца, основанного на их двух деформационных особенностях -на полной обратимости деформации уплотнения и равенства деформации уплотнения образцов природной влажности и предварительно замоченного под арретир при равных значениях эффективного давления

Набухание (увеличение объема) при дополнительном увлажнении—замачивании является одним из особенностей нормально уплотненных и переуплотненных маловлажных глинистых грунтов. Учет указанного свойства является обязательным при возведении на набухающих грунтах зданий или строительства из них грунтовых сооружений. Неучет этого явления может привести к большим деформациям и авариям сооружений, требующих больших затрат и средств для их ликвидации. Известно [1], например, что в США стоимость поврежденных дорог, фундаментов, каналов и водохранилищ за счет набухания глинистых грунтов достигает ежегодно 2,3 млрд долларов

Основными характеристиками набухания глинистых грунтов, определяемых без приложения внешнего уплотняющего давления p, являются [2, 3]:

1. Наибольшая величина относительной компрессионной дефор-

мации *свободного* набухания ($\varepsilon_{sw,0}$), равной наибольшей относительной деформации объема грунта ($\theta_{sw,0}$);

2. Наибольшая влажность свободного набухания $w_{sw,0}$;

3. Наименьшая плотность свободно набухшего грунта $\rho_{sw,0}$; и

4. Давление свободного набухания $\sigma_{sw,0}$.

Основными характеристиками набухания глинистых грунтов, определяемых под действием уплотняющих давлений (нормальных напряжений) p по ГОСТу 24143—80 являются: давление набухания под нагрузкой $\sigma_{sw,p}$, относительная деформация набухания $\varepsilon_{sw,p}$ и ее зависимость от p.

Отметим, что все указанные выше характеристики набухания грунтов определяются в компрессионных приборах—в условиях отсутствия бокового расширения образца.

Суть метода ГОСТа 24143—80 (в основу которого положен метод одной кривой [2, 3]) является то, что образцы-близнецы грунта в количестве до пяти-семи штук, вырезанные из одного монолита (керна), обладающие практически одинаковыми физико-механическими свойствами, параллельно обжимаются в компрессионных приборах под действием различных по величине нормальных напряжений: $p=0$, p_1, p_2 ... p_n, замачивают после условной стабилизации деформации уплотнения с фиксацией их деформации набухания. По данным испытания образцов строят кривую зависимости деформации уплотнения напряжения $\varepsilon_c=f(p)$ грунта природной влажности (1) и аналогичную кривую (2) зависимости $\varepsilon_{sw}=f_1(p)$, замоченных и набухших образцов. По разности координат определяют деформацию набухания под нагрузками $\varepsilon_{sw,p}$ а по пересечению кривой (2) с осью напряжений p—стандартное давление набухания под нагрузкой $\sigma_{sw,p}$.

Основным недостатком метода ГОСТа является большая трудоемкость и недостаточная точность определения характеристик набухания, обусловленные практической невозможностью вырезки из одного монолита (керна) пяти-семи образцов-близнецов, вообще, из монолита неоднородного грунта в особенности, невозможность определения весьма важного показателя—давления свободного набухания $\sigma_{sw,0}$, возможность высыхания образцов природной влажности в процессе уплотнения перед замачиванием.

Чтобы исключить указанные недостатки ГОСТа возникла необходимость разработки нового упрощенного метода определения характеристик набухаемости испытанием одного образца)* на основании двух деформационных особенностей набухающих грунтов—обратимостью деформации уплотнения образцов природной влажности и практически равенство, при равных эффективных напряжениях, деформаций уплотнения образцов природной влажности и образцов, замоченных под арретир [2].

---

* Метод разработан С. Р. Месчяном (Патент Республики Армения от 27.12.1993г. за № 00013), опыты под его руководством выполнены С. Г. Айрояном.

Для подтверждения второй особенности деформирования набухающих грунтов, установленной одним из авторов этой статьи [4], осуществлено испытание бентонитового грунта №2 ($\rho=1,75$ г/см^3; $w_0=0,291$; $\rho_d=1,36$ г/см^3; $e_0=0,78$; $w_l=0,622$; $w_p=0,302$; $I_p=0,32$). Испытаны шесть пар образцов-близнецов нарушенного сложения при двух режимах уплотнения без замачивания и после замачивания под арретир и определения $\sigma_{sw,0}=0,225$ МПа. Образцы уплотнены под действием трех различных значений эффективного давления $\sigma=p-\sigma_{sw,0}$. Данные испытания образцов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Деформации образцов грунта №2, уплотненных без замачивания и после замачивания под арретир

Эффективное давление σ, МПа	Уплотнение без замачивания $w=w_0$, $\sigma_{sw,0}=0$		Уплотнение после замачивания под арретир $w=w_{al}$, $\sigma_{sw,0}=0,225$ МПа	
	$+\Delta h$, мм	$+\varepsilon$	$+\Delta h$, мм	$+\varepsilon$
0,15	0,150	0,0075	0,128	0,0054
0,30	0,250	0,0125	0,220	0,0110
0,45	0,412	0,02[illegible]	0,362	0,0181

Полученные из опыта данные свидетельствуют о том, что при равных значениях эффективного давления деформации уплотнения, полученные испытанием образцов без замачивания и после замачивания под арретир, практически равны.

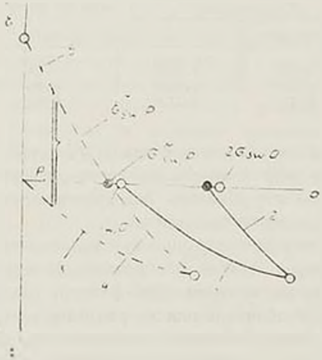
Совершенно очевидно, что процесс уплотнения водонасыщенного под арретир образцов зависит от процесса фильтрационной консолидации. Для устранения влияния этого фактора следует увеличить длительность испытания образцов или же уменьшить толщину их до 10 мм. Неучет влияния скорости отжатия поровой воды может привести к некоторому уменьшению деформации образцов, водонасыщенных под арретир.

Следует также отметить, что сказанное выше относится к набухающим грунтам, начальная влажность которых примерно равна и больше их влажности на пределе раскатывания $w_0 \geqslant w_p$. Когда влажность грунта значительно меньше w_p, при замачивании он разупрочняется в силу адсорбционного понижения прочности (эффект Ребиндера). В этом случае деформации уплотнения замоченного под арретир образцов могут быть до 30% выше их значений, полученных при уплотнении без замачивания.

Для решения поставленной задачи с учетом изложенных выше особенностей деформирования набухающих грунтов предложен упрощенный метод определения характеристик набухания, основанный на испытании *одного образца*. Этото метод, как будет показан ниже, не только в несколько раз уменьшает объем экспериментальных работ по сравнению с методом ГОСТ-24143 практически без снижения точности определения характеристик набухания, но и установить величину давления свободного набухания грунта.

Предложенный метод определения деформации набухания под нагрузкой $\varepsilon^M_{sw,p}$, стандартного давления набухания под нагрузкой $\sigma^M_{sw,p}$ и давления свободного набухания грунта осуществляется следующей последовательностью.

1. Вырезанный из монолита (керна) рабочим кольцом образец грунта закладывают в компрессионный прибор, последний помещают под рычажный пресс или винтовой привод рамного загрузочного приспособления [5], снабженного динамометром, замачивают восходящим потоком воды под арретир, методом компенсации деформаций набухания определяют давление свободного набухания $\sigma_{sw,0}$ (фиг. 1) по массе гирь на подвеске рычажного пресса или по показанию динамометра загрузочного приспособления.



Фиг. 1. Схема определения давления свободного набухания $\sigma_{sw,0}$ образца грунта методом свободного набухания, его уплотнение 1, разуплотнение (разгрузка) до $\sigma=\sigma_{sw,0}$ ($p=2\sigma_{sw,0}$) 2, их сдвижка влево до совпадения $\sigma_{sw,0}$ с началом координат 3,4, кривая разгрузки при $p<\sigma_{sw,0}$ 5, определение давления набухания под нагрузкой $\sigma^M_{sw,p}$ и деформации набухания $\varepsilon^M_{sw,p}$ под нагрузкой по предложенному методу.

2. Учитывая некоторое отличие $\sigma_{sw,0}$ от $\sigma_{sw,p}$, определяемого по методу ГОСТ 24143—80, обусловленного различными исходными значениями плотности образцов, при непрерывном замачивании осуществляют уплотнение водонасыщенного под арретир образца под действием возрастающего ступенями эффективного нормального напряжения σ, например, $\sigma=p-\sigma_{sw,0}=0{,}025$; 0,05; 0,1; 0,2; 0,4 МПа, а также $\sigma=\sigma_{sw,0}$ до заданной по проекту величины напряжения под фундаментом сооружения, но не меньше $p=2{,}5\,\sigma_{sw,0}$ ($\sigma\geqslant 1{,}5\sigma_{sw,0}$).

На фиг. 1 кривая уплотнения образца водонасыщенного под арретир с определением $\sigma_{sw,0}$ отмечена цифрой (1).

3. После стабилизации деформации уплотнения замоченного под арретир образца выполняют, при непрерывном замачивании, его разгрузку. Деформации набухания определяют под нагрузками, примененные при уплотнении образца в интервалах $\sigma=(p-$ [illegible] $2\sigma_{наб,0})$ и [illegible] (при $\sigma_{наб,0}=0$).

Строят кривую разгрузки образца 2 (фиг. 1) для интервала [illegible] $\geq\sigma_{наб,0}(p=2\sigma_{наб,0})$.

4. Кривые уплотнения 1 и разгрузки 2 (до [illegible]) водонасыщенного под арретир образца сдвигают влево на величину [illegible] (кривые 3 и 4 на фиг. 1)—до совпадения $p=$ [illegible] $(\varepsilon=0)$ с началом координат, а [illegible] $(p-2\sigma_{наб,0})$ с $p=$ [illegible]

Строят кривую разгрузки образца 5 для интервала [illegible]

5. По точке пересечения кривой разгрузки образца с осью напряжений p определяют давление набухания грунта под нагрузкой [illegible] по предложенному методу

6. Вычисляют деформации набухания грунта под различными напряжениями по выражению

$$\varepsilon^{н}_{наб,p}=\pm\varepsilon^{н}_{наб,p}-(+\varepsilon^{н}_{упл,p}) \qquad (1)$$

где $\pm\varepsilon$ [illegible] — деформация образца при разгрузке до давления [illegible] —деформация уплотнения замоченного под арретир образца под действием $\sigma=p$.

В (1) знак (+) означает уплотнение, а знак (−)—набухание образца по отношению к начальному состоянию нулевой деформации

Отметим, что согласно второй особенности деформирования набухающих грунтов кривая 3 (фиг. 1) является кривой уплотнения грунта природной (начальной) влажности, а согласно первой особенности кривая 4—5 - кривой его набухания под нагрузками p

Применимость предлагаемого метода определения характеристик набухания глинистых грунтов, взамен метода ГОСТ 24143—80, подтверждается следующими исследованиями

1 Осуществлено испытание пяти пар образцов-близнецов грунта №2 (см выше) нарушенного сложения. Установлено, что наибольшее расхождение между значениями их плотности не превышает 1%. Следовательно, они действительно являются образцами-близнецами, а полученные от их испытания данные могут быть рассмотрены как достоверные.

В целях проверки применимости предложенного метода для определения характеристик набухания грунта выполнено сопоставительное испытание образцов-близнецов при двукратной повторности опытов как по этому, так и по методу ГОСТ 24143—80

По методу ГОСТ испытаны четыре пары образцов-близнецов под действием $\sigma=p=0$; 0,15, 0,30 и 0,45 МПа, а после условной стабилизации деформаций уплотнения замочены восходящим потоком воды. Результаты испытания образцов-близнецов приведены в табл 2, кривые уплотнения и набухания на фиг. 2 обозначены цифрами, соответ

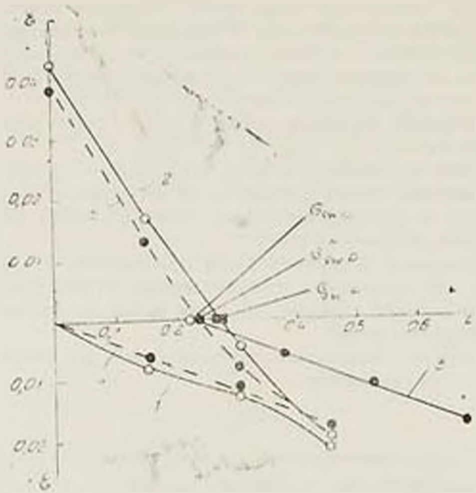


Рис. 2. Кривые уплотнения 1 и набухания 2 грунта №2, определение $\varepsilon_{sw,p}$ по ГОСТ 21143–80, кривые уплотнения 3,4 грунта после замачивания под арретир и разгрузки 5, определение давления набухания под нагрузкой $\varepsilon^{M}_{sw,p}$ по предложенному методу

ственно, (1) и (2). Определено стандартное давление набухания $\sigma_{sw,p}$=0,265 МПа и деформации набухания $\varepsilon_{sw,p}$ для различных значений уплотняющего давления $p=\sigma$ (табл. 2), вычисленные по выражению (1). Например, для $p=\sigma$=0,15 МПа установлено:

$$\varepsilon_{sw,p}^{M}=\varepsilon_{sw,p}-\varepsilon_{sw,p}=-0{,}0169-(+0{,}0075)=-0{,}0244,$$

а для $p=\sigma$=0,45 МПа:

$$\varepsilon_{sw,p}=0{,}0194-0{,}0206=-0{,}0012.$$

По предложенному методу испытана пара образцов-близнецов. Без предварительного загружения они замочены под арретир восходящим потоком воды, по методу компенсации деформации набухания определено давление свободного набухания $\sigma_{sw,o}$=0,225 МПа (фиг. 2), затем уплотнены под действием возрастающих ступенями напряжения $\sigma=p-\sigma_{sw,o}$=0,15; 0,30 и 0,45 МПа. После условной стабилизации деформации осуществлена разгрузка образцов ступенями до σ=0,3; $\sigma_{sw,p}$=0,225; 0,15 и 0 МПа.

Результаты определения деформации образца при загружении и разгрузке приведены в табл. 2. В этой таблице приведены также значения деформации набухания образца под различными давлениями $\varepsilon^{M}_{sw,p}$, вычисленные по выражению (1).

Таблица 2

Данные по определению набухания грунтов под нагрузками по ГОСТу 24143—80 и по новому методу

Грунт №2

По методу ГОСТ 24143—80				По новому методу испытания одного образца					
$\sigma=p$, МПа	Уплотнение $(w-w_0)$	Набухание $(w-w_{sat})$	$\varepsilon_{sw,p}$	Уплотнение после замачивания под арретир		Разгрузка			$\varepsilon^{M}_{sw,p}$
	$+\varepsilon_p$	$-\varepsilon_{sw,p}$		$\sigma=p-\sigma_{sw,0}$ МПа	$+\varepsilon^{M}_{sat,p}$	$\sigma>\sigma_{sw,p}$ МПа	$p<\sigma_{sw,p}$ МПа	$\bar{\varepsilon}^{M}_{sw,p}$	
0.00	0.00	−0.0425	0.0425	0.00	0.00	—	0.00	−0.0387	0.0387
0.15	0.0075	−0.0169	0.0221	0.15	0.0064	—	0.15	−0.0131	0.0195
0.225	—	—	—	0.225	—	0.225	—	−0.0015	0.0015
0.30	0.0125	+0.0041	0.0081	0.30	0.0110	0.30	—	+0.0075	0.0035
0.45	0.0206	+0.0194	0.001	0.45	0.0181	0.45	—	+0.0181	—

Грунт №4 (глина), I серия испытаний

По методу ГОСТ 24143—80				По новому методу испытания одного образца					
$\sigma=p$, МПа	Уплотнение $(w-w_0)$	Набухание $(w-w_{sat})$	$\varepsilon_{sw,p}$	Уплотнение после замачивания под арретир		Разгрузка			$\varepsilon^{M}_{sw,p}$
	$+\varepsilon_p$	$-\varepsilon_{sw,p}$		$\sigma=p-\sigma_{sw,0}$ МПа	$+\varepsilon^{M}_{sat,p}$	$\sigma>\sigma_{sw,p}$ МПа	$p<\sigma_{sw,p}$ МПа	$\bar{\varepsilon}^{M}_{sw,p}$	
0.05	0.0054	−0.024	0.03	0.05	0.045	—	0.05	−0.0288	0.0333
0.10	0.0118	−0.0082	0.02	0.10	0.0114	—	0.10	−0.013	0.0244
0.176	—	—	—	0.176	0.0151	0.176	—	+0.019	0.0039
0.20	0.0209	+0.019	0.0019	0.20	0.0177	0.20	—	+0.0213	0.0036
0.30	0.0248	+0.0233	0.0015	0.30	0.0237	0.30	—	+0.0237	—

Грунт №4 (глина), II серия испытаний

По методу ГОСТ 24143—80				По новому методу испытания одного образца					
$\sigma=p$, МПа	Уплотнение $(w-w_0)$	Набухание $(w-w_{sat})$	$\varepsilon_{sw,p}$	Уплотнение после замачивания под арретир		Разгрузка			$\varepsilon^{M}_{sw,p}$
	$+\varepsilon_p$	$-\varepsilon_{sw,p}$		$\sigma=p-\sigma_{sw,0}$ МПа	$+\varepsilon^{M}_{sat,p}$	$\sigma>\sigma_{sw,p}$ МПа	$p<\sigma_{sw,p}$ МПа	$\bar{\varepsilon}^{M}_{sw,p}$	
0.05	0.00925	−0.0213	0.031	0.05	0.0067	—	0.05	−0.0183	0.025
0.10	0.0167	−0.0013	0.018	0.10	0.0125	—	0.10	−0.0040	0.0165
0.139	—	—	—	0.139	0.0142	0.139	—	+0.0152	0.0010
0.20	0.0277	+0.0263	0.0014	0.20	0.0229	0.20	—	−0.0246	0.0017
0.30	0.0315	+0.0304	0.0011	0.30	0.0272	0.30	—	+0.0272	—

На фиг. 2 цифрой 3 отмечена кривая уплотнения, определенная после замачивания образцов под арретир. Она сдвинута влево на величину $\varepsilon_{sw,0}$ и отмечена цифрой 4. Как видно на фиг. 2 кривая 4 практически совпадает с кривой 1 уплотнения образцов без замачивания, что еще раз подтверждает справедливость полученных ранее результатов [4]

Построена кривая разгрузки 5 по данным, приведенным в табл. 2. По точке пересечения этой кривой с осью напряжения p определено давление набухания под нагрузкой $\sigma^{H}_{sw,p}$ = 0,235 МПа. Его расхождение с $\sigma_{sw,p}$, определенного по методу ГОСТ ($\sigma_{sw,p}$=0,265 МПа) значительно меньше разброса опытных данных, получаемых при испытании образцов-близнецов.

2. Осуществлено испытание двух серий образцов-близнецов глины № 4 (табл. 3) нарушенного сложения, при соблюдении условия $w_0 < w_p$ как по методу ГОСТ 24143—80, так и по методу испытания одного образца в целях определения деформации набухания под нагрузками $\sigma_{sw,p}$, стандартного давления набухания $\sigma_{sw,p}$ и давления набухания $\sigma^{H}_{sw,p}$.

В каждой из указанной серии испытаны по десять образцов-близнецов. Как и в вышерассмотренном примере, в каждой серии по четыре пары образцов-близнецов испытаны по методу ГОСТ, а одна пара—по предложенному методу. Результаты определения характеристик набухания грунта приведены в табл. 2 и 3.

Таблица 3

Показатели физических свойств и давлений набухания двух серий образцов близнецов

№ серии	ρ_s, г/см³	ρ, г/см³	w_0	w_L	w_p	J_p	$\sigma_{sw,0}$, МПа	$\sigma_{sw,p}$, МПа	$\sigma^{H}_{sw,p}$, МПа
I	2.72	1.82	0.249	0.675	0.273	0.402	1.76	1.30	1.30
II	2.72	1.80	0.289	0.675	0.273	0.402	1.39	1.05	0.95

Сопоставление данных о деформациях набухания грунта (табл. 2), полученных по обоим методам, показывает, что их наибольшее расхождение (до 18%) не выходит за пределы обычного разброса деформаций образцов. Из сопоставления данных стандартного давления набухания $\sigma_{sw,p}$ с данными набухания $\sigma^{H}_{sw,p}$ под нагрузкой, определенного по предложенному методу, следует их практически полное совпадение.

Аналогичные разультаты получены также при испытании других разновидностей глинистых набухающих грунтов

Изложенное выше позволяет заключить, что предложенный метод испытания одного образца вполне применим для определения характеристик набухания глинистых грунтов, предусмотренных ГОСТом 24143—80 и определения весьма важного показателя—давления свободного набухания $\sigma_{sw,0}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Осипов В. И.** Природа прочностных и деформационных свойств глинистых грунтов.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. 235 с.
2. **Месчян С. Р.** Реологические процессы в глинистых грунтах.— Ереван: Айастан,— 1992. 395 с.
3. **Сорочан Е. А.** Строительство сооружений на набухающих грунтах.— М.: Стройиздат, 1989. 312 с.
4. **Месчян С. Р.** Методика определения ползучести одномерного уплотнения набухающих глинистых грунтов при начальной природной влажности // Докл. АН Арм ССР. 1983. т. 76. № 2. с. 65—70.
5. **Месчян С. Р.** Экспериментальная реология глинистых грунтов.— М.: Недра, 1985. 342 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
2.08.1993