ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, N° 4, 1995 Механика

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Акопян А.С., Киракосян Р.М.

Ա.Ա.Հակոբյան, Ռ.Մ.Կիրակոսյան

Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի կայունության մասին՝ ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ:

Բերվում են փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի կայունության հավասարումները [1] ճշգրտված տեսության շրջանակներում: Որպես կիրառություն լուծվում է գծայնորեն փոխվող հաստության օրթոտրոպ շերտի կայունության խնդիրը: Կատարվում է լուծման եղանակի և ստացված արդյունքների վերլուծություն:

A.S.Hakobian, R.M.Kirakosian

On Stability of Variable Thickness Orthotropic Plats with Calculation of Transverse Displacement.

Приводятся уравнения устойчивости ортотропных пластин переменной толщины в рамках уточненной теории [1]. В качестве приложения решается задача устойчивости ортотропной полосы линейно-переменной толщины. Приводится анализ метода решения и полученных результатов.

1. В статье [1] получены разрешающие уравнения задачи ортотропных пластин переменной толщины, учитывающие влияние деформаций поперечных сдвигов. Поступая как обычно, можно из этих уравнений получить аналогичные уравнения задачи устойчивости пластин. Полагая, что начальное состояние пластинки является безмоментным, приходим к понятию фиктивной поперечной нагрузки [2]

$$Z_2 = T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{1.1}$$

Здесь w- прогиб, T_x^0, T_y^0, S^0- внутренние силы начального состояния пластинки. Влиянием остальных (тангенциальных) компонент фиктивной нагрузки пренебрегаем.

Пусть прямоугольная пластинка со сторонами l, b и переменной толщиной $h(x,y)$ сжимается вдоль осей x и y силами

$$T_x^0\Big|_{\substack{x=0\\x=l}} = -p, \qquad T_y^0\Big|_{\substack{y=0\\y=b}} = -\lambda p, \qquad S^0\Big|_{\substack{x=0,l\\y=0,b}} = 0 \tag{1.2}$$

где λ- некоторая постоянная.

Из-за переменности толщины внутри пластинки возникнут как сжимающие усилия T_x^0, T_y^0, так и сдвигающее усилие S^0. Ради простоты будем считать, что плоская задача решена и выражения внутренних усилий пластинки известны. С учетом (1.1) в рамках уточненной теории [1] для равновесия выпученной пластинки получим

$$
\begin{gathered}
h^2\left[\left(B_{11}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(B_{22}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+4B_{66}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]- \\
-h\left\{\left[8+a_{55}h\left(B_{11}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\left[8+a_{44}h\left(B_{22}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)\right]\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right\}- \\
-2B_{66}h^2\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\left(a_{55}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+a_{44}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)-16\left(\frac{\partial h}{\partial x}\varphi_1+\frac{\partial h}{\partial y}\psi_1\right)- \qquad (1.3) \\
-12\left(T_x^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+T_y^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2S^0\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)=0
\end{gathered}
$$

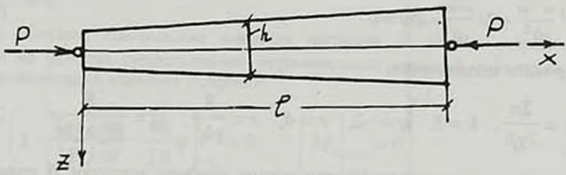
$$
\begin{gathered}
h^2\left[B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]+2h\left[\left(B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial h}{\partial x}+2B_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right]- \\
-h^2\left[a_{55}\left(B_{11}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+B_{66}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}\right)+a_{44}\left(B_{12}+B_{66}\right)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial y}\right]-2h\left[a_{55}\left(B_{11}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\right.\right. \\
\left.\left.+B_{66}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right)+a_{44}\left(B_{12}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}+B_{66}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right]+8\varphi_1=0 \qquad (1.4)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
h^2\left[B_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]+2h\left[\left(B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial h}{\partial y}+2B_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right]- \\
-h^2\left[a_{44}\left(B_{22}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}+B_{66}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}\right)+a_{55}\left(B_{12}+B_{66}\right)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y}\right]-2h\left[a_{44}\left(B_{22}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}+\right.\right. \\
\left.\left.+B_{66}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+a_{55}\left(B_{12}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}+B_{66}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right)\right]+8\psi_1=0 \qquad (1.5)
\end{gathered}
$$

Здесь φ_1, ψ_1 - функции координат x, y, учитывающие влияние деформаций поперечных сдвигов, a_{ij} - упругие постоянные материала, B_{ij} выражаются через них по известным формулам [2].

Критические значения параметра p должны определяться из условия существования нетривиальных решений уравнений устойчивости пластинки (1.3) ÷(1.5) при выполнении соответствующих краевых условий.

2. В качестве примера рассмотрим задачу устойчивости ортотропной полосы линейно-переменной толщины h, которая шарнирно оперта по краям и сжимается вдоль пролета силами равномерной интенсивности p (фиг. 1)



Фиг. 1

Положим

$$h = h_0 + h_1 x, \qquad 0 \le x \le l \tag{2.1}$$

где l -длина пролета, h_0 и h_1 - заданные параметры полосы.

Плоская задача в данном случае имеет очевидное решение

$$T_x^0 = -p, \qquad T_y^0 = \frac{a_{22}}{a_{12}} p, \qquad S^0 = 0 \tag{2.2}$$

Переходим к безразмерным величинам:

$$\begin{gathered} h = h_0 t, \ \ w = h_0 \overline{w}, \ \ p = \sigma_0 h_0 \overline{p}, \ \ \varphi_1 = \sigma_0 \varphi, \ \ \psi_1 = \sigma_0 \psi \\ M_x = \sigma_0 h_0^2 \overline{M}_x, \ \ M_y = \sigma_0 h_0^2 \overline{M}_y, \ \ H = \sigma_0 h_0^2 \overline{H}, \\ \frac{B_{11}}{\sigma_0} = n, \ \ \frac{B_{11}}{B_{55}} = \chi, \ \ \frac{l}{h_0} = \varepsilon \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь σ_0- характерное напряжение материала, а безразмерные внутренние моменты полосы определяются формулами [1]

$$\overline{M}_x = \frac{h_1}{12} t^3 \left(-n h_1 \frac{d^2 \overline{w}}{dt^2} + \chi \frac{d\varphi}{dt} \right), \quad \overline{M}_y = \frac{B_{12}}{B_{11}} \overline{M}_x$$

$$\overline{H} = \frac{1}{12} B_{66} a_{44} h_1 t^3 \frac{d\psi}{dt} \tag{2.4}$$

С учетом (2.1) ÷ (2.4) из (1.3) ÷ (1.5) при потере устойчивости полосы по цилиндрической поверхности получим

$$\frac{d^2\overline{w}}{dt^2}-\frac{2}{3\overline{p}h_1}\left(t\frac{d\varphi}{dt}+2\varphi\right)=0 \tag{2.5}$$

$$t^2(at-1)\frac{d^2\varphi}{dt^2}+t(akt+q)\frac{d\varphi}{dt}+(art+s)\varphi=0 \tag{2.6}$$

$$t^2\frac{d^2\psi}{dt^2}+2t\frac{d\psi}{dt}-d\psi=0 \tag{2.7}$$

Здесь приняты обозначения:

$$a=\frac{2n}{3\chi\overline{p}},\quad k=5,\quad q=-2,\quad r=4,\quad s=\frac{8}{\chi h_1^2},\quad d=\frac{8}{B_{66}a_{44}h_1^2} \tag{2.8}$$

Таким образом, определение критических значений нагрузки $\overline{p}$ сводится к нахождению собственных чисел однородных уравнений (2.5) $\div$ (2.7) при условиях шарнирного опирания полосы. Эти условия имеют вид:

$$\text{при}\quad t=t_1=1\quad \overline{w}=0,\quad \overline{M}_x=0,\quad \overline{H}=0 \tag{2.9}$$

$$\text{при}\quad t=t_2=1+h_1\varepsilon\quad \overline{w}=0,\quad \overline{M}_x=0,\quad \overline{H}=0 \tag{2.10}$$

Заметим, что (2.5) и (2.6) составляют систему уравнений, а (2.7) является отдельным уравнением. Его решение представим в виде:

$$\psi=C_1t^{k_1}+C_2t^{k_2} \tag{2.11}$$

где

$$k_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{1+4d}\right) \tag{2.12}$$

C_1 и C_2-постоянные интегрирования.

Удовлетворив последним условиям (2.9) и (2.10), получим:

$$C_1k_1+C_2k_2=0,\quad C_1k_1t_2^{k_1-1}+C_2k_2t_2^{k_2-1}=0 \tag{2.13}$$

Определитель этой системы отличен от нуля, в силу чего имеем

$$C_1=C_2=0\quad\text{и}\quad \psi\equiv0 \tag{2.14}$$

Это означает, что уравнение (2.7) при шарнирном оперании полосы допускает только тривиальное решение.

Рассмотрим теперь уравнения (2.5) и (2.6). Очевидно, что нетривиальным решениям (2.6) соответствуют нетривиальные решения (2.5). Легко показать, что уравнение (2.5) при шарнирном опирании полосы других нетривиальных решений не допускает. На самом деле, при $\varphi\equiv0$ решение (2.5) имеет вид

$$\overline{w}=C_3t+C_4 \tag{2.15}$$

Тогда первые условия (2.9) и (2.10) запишутся в виде

$$C_3 + C_4 = 0, \quad C_3 t_2 + C_4 = 0 \tag{2.16}$$

откуда для постоянных интегрирования C_3 и C_4 получим

$$C_3 = C_4 = 0 \tag{2.17}$$

и следовательно,

$$\overline{w} \equiv 0 \tag{2.18}$$

Таким образом, критические значения нагрузки $\overline{p}$ должны определяться только из условия существования нетривиальных решений уравнения (2.6), удовлетворяющих краевым условиям

$$\left[\left(\chi - \frac{2nt}{3\overline{p}}\right)\frac{d\varphi}{dt} - \frac{4n}{3\overline{p}}\varphi\right]_{\substack{t=t_1 \\ t=t_2}} = 0, \qquad \left(M_x\Big|_{\substack{x=0 \\ x=l}} = 0\right) \tag{2.19}$$

С этой целью применим метод коллокаций, представив решение (2.6) в виде усеченного тригонометрического ряда Фурье

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos\omega kt + b_k \sin\omega kt \tag{2.20}$$

где

$$\omega = \frac{\pi}{\varepsilon h_1} \tag{2.21}$$

Удовлетворив уравнению (2.6) в точках коллокаций

$$\tau_i = \frac{t_2 - t_1}{m-1}(i-1) + t_1, \qquad i = 2,\ldots,m-1 \tag{2.22}$$

с использованием краевых условий (2.19) получим систему m однородных линейных алгебраических уравнений относительно $2N+1$ неизвестных коэффициентов a_0, a_k, b_k $(k = 1,2,\ldots,N)$. Подбирая $m = 2N+1$, приходим к задаче определения собственных чисел системы однородных алгебраических уравнений. С помощью численных методов можно найти приближенные значения безразмерной сжимающей силы $\overline{p}$, соответствующие первым m формам потери устойчивости полосы.

С целью выяснения характера сходимости численного решения в зависимости от числа членов N, удерживаемых в ряде (2.20), рассмотрен известный классический случай $\chi = 0$. В табл. 1 иллюстрирована динамика улучшения первых трех критических значений $\overline{p}$ при $\chi = 0$; $h_1 = 0{,}1$; $\varepsilon = 10$, когда N изменяется от 5 до 15. Для сравнения, в последней строке таблицы представлены соответствующие результаты точного решения задачи [3]. Как видно из таблицы, критические значения сжимающей силы при $N = 14$ с точностью пятизначащих цифр совпадают с соответствующими значениями точного решения, что свидетельствует о хорошей сходимости примененного метода численного решения.

$\left(\chi = 0; \quad h_1 = 0{,}1; \quad \varepsilon = 10\right)$ Таблица 1.

N	$\overline{P}_1$	$\overline{P}_2$	$\overline{P}_3$
5	26,044	86,273	253,85
6	24,943	92,644	223,29
7	24,473	95,243	212,11
8	24,289	95,963	213,08
9	24,221	96,100	214,75
10	24,197	96,109	215,56
11	24,189	96,102	215,84
12	24,186	96,097	215,92
13	24,186	96,095	215,93
14	24,185	96,094	215,94
15	24,185	96,094	215,94
точ. реш.	24,185	96,094	215,94

В табл. 2 приведены критические значения сжимающей силы при относительной длине $\varepsilon = 10$, соответствующие первым двум формам потери устойчивости, которые вычислены в классической постановке задачи $(\chi = 0)$ и с учетом влияния деформаций поперечного сдвига $(\chi > 0)$. При этом рассмотрены три разных значения параметра изменяемости толщины полосы h_1. Определены величины поправки в процентах по отношению к классическим значениям

$$\Delta_i = \frac{\overline{P}_i^{\,кл} - \overline{P}_i}{\overline{P}^{\,кл}} 100\% \tag{2.23}$$

$(\varepsilon = 10)$ таблица 2

	$h_1=0{,}05$				$h_1=0{,}1$				$h_1=0{,}2$			
χ	0	3	5	10	0	3	5	10	0	3	5	10
$\overline{P}_1$	15,31	14,49	13,98	12,87	24,18	22,40	21,35	19,09	46,92	41,51	38,45	32,39
Δ_1	-	5,36	8,69	15,94	-	7,36	11,70	21,05	-	11,53	18,05	30,97
$\overline{P}_2$	61,11	49,76	44,27	34,65	96,09	72,78	62,52	45,99	185,82	119,77	95,67	58,07
Δ_2	-	18,57	27,56	43,30	-	24,26	34,94	52,14	-	35,54	48,51	68,75

Из этой таблицы заключаем:

1. Критические значения сжимающей силы, определенные по уточненной теории, ниже соответствующих классических значений.

2. Поправка, вносимая уточненной теорией, увеличивается с уменьшением сопротивляемости материала поперечному сдвигу (с ростом χ) и с увеличе-

нием скорости утолщения по длине пролета полосы h_1.

3. Поправка для второй формы потери устойчивости более ощутима, чем для первой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киракосян Р.М.* Об одной уточненной теории анизотропных пластин переменной толщины. - Изв. АН Армении, Механика, 1991, т.44, №3, с.26-33.
2. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. - М.:-Наука, 1987.
3. *Акопян А.С., Киракосян Р.М.* О нижних оценках критических сил сжатых полос линейно переменной толщины.-Изв. НАН РА, Механика, 1995, т.48, №3.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
16.11.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 4, 1995 Механика

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛОСЫ С УПРУГИМИ ПРЯМОУГОЛЬНИКАМИ

Арутюнян Л. А., Мкртчян А. М.

Լ.Ա.Հարությունյան , Ա.Մ.Մկրտչյան

Շերտի եւ ուղղանկյուն ների պարբերական կոնտակտային խնդիրը

Դիտարկվում է առաձգական շերտի եւ այլ նյութից պատրաստված ուղղանկյունիների հարթ պարբերական խնդիրը, երբ կոնտակտի տիրույթը փոքր է ուղղանկյան երկարությունից: Ստացված են կոնտակտային լարումների բանաձեւերը եւ կոնտակտի չափը որոշող առնչությունը:

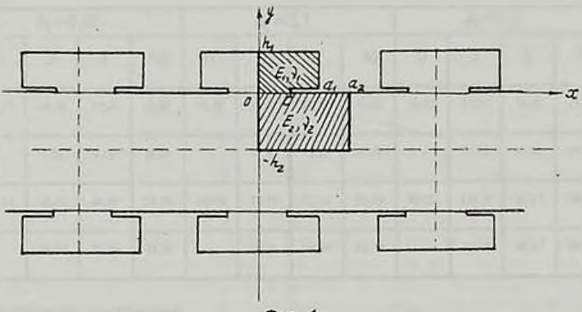
Aruthunian L.A., Mkrtchian A.M.

A Contact Problem for Strein with Rectengles

Рассмотрена периодическая контактная задача для полосы с прямоугольниками из другого материала, когда размер зоны контакта меньше длины прямоугольника. Получены формулы для контактного напряжения и выражение, определяющее размер зоны контакта.

В работах [1, 3, 4] и др. рассмотрены контактные задачи для упругой полосы и прямоугольника с жесткими телами. В работе [5] рассмотрен контакт между двумя прямоугольниками, имеющие одинаковые длины.

Здесь делается попытка рассмотреть контакт упругих периодически расположенных прямоугольников с упругой полосой (фиг. 1).



Фиг. 1

Из-за симметрии решаем задачу для заштрихованной части тела (фиг. 1).

Граница полосы вне контакта свободна от напряжений, а на границе прямоугольника, также вне контакта, заданы напряжения.

Рассматривается случай контакта без трения, причем предполагается, что область контакта меньше, чем длина прямоугольника. Задачу решаем при помощи бигармонической функции Эри, удовлетворяя при этом условиям симметрии

$$
\begin{aligned}
&\tau_{xy}(0,y) = u(0,y) = 0, && (-h_2 \le y \le h_1)\\
&\tau^{(2)}_{xy}(x,-h_2) = v_2(x,-h_2) = 0, && (0 < x < a_2)\\
&\tau^{(2)}_{xy}(a_2,y) = u_2(a_2,y) = 0, && (-h_2 \le y \le 0)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

граничным условиям

$$
\begin{aligned}
&\tau^{(1)}_{xy}(x,h_1) = 0, \quad \sigma^{(1)}_{y}(x,h_1) = f(x) && (0 < x < a_1)\\
&\tau^{(1)}_{xy}(a_1,y) = 0, \quad \sigma^{(1)}_{x}(a_1,y) = 0 && (0 < y < h_1)\\
&\sigma^{(k)}_{y}(x,0) = \tau^{(k)}_{xy}(x,0) = 0, && (x > c,\ k = 1;2)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

а также условиям гладкого контакта

$$
\begin{aligned}
&\sigma^{(1)}_{y}(x,0) = \sigma^{(2)}_{y}(x,0),\\
&v_1(x,0) = v_2(x,0) && (0 \le x \le c)\\
&\tau^{(1)}_{xy}(x,0) = \tau^{(2)}_{xy}(x,0) = 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Для начала предположим, что нам известны нормальные напряжения вдоль линии контакта

$$
\sigma^{(k)}_{y}(x,0) = P_k(x) \qquad (0 \le x \le a_k,\ k = 1;2)
$$

где

$$
P_k(x) = \begin{cases} q(x) & (0 \le x < c)\\ 0 & (c < x \le a_k) \end{cases}
\tag{4}
$$

и построим функции напряжений для областей "1" и "2" отдельно

$$
\Phi_1(x,y) = d^{(1)}_1 x^2 + d^{(1)}_2 y^2 + \frac{2}{a_1}\sum_{k=1}^{\infty}\left[-X_k D_k(y) - Y_k C_k(y)\right]^{(-1)^k}\frac{\cos\alpha_{k1}x}{\alpha_{k1}^2} -
$$

$$
-\frac{2}{h_1}\sum_{p=1}^{\infty} A_p(x)\frac{z_p\cos\beta_{p1}y}{\beta_{p1}^2}, \qquad (0 \le x < a_1 < a_2,\ 0 \le y \le h_1) \tag{5}
$$

$$
\Phi_2(x,y) = d^{(2)}_1 x^2 + d^{(2)}_2 y^2 + \frac{2}{a_2}\sum_{k=1}^{\infty} P_{k2} B_k(y)\frac{\cos\alpha_{k2}x}{\alpha_{k2}^2};\ (0 \le x \le a_2,\ -h_2 \le y \le 0)
$$

Здесь введены обозначения

$$2D_k(y)=\left(1+\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\operatorname{th}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\right)\frac{\operatorname{sh}\alpha_{k1}\left(\frac{h_1}{2}-y\right)}{\operatorname{ch}\frac{\sigma_{k1}h_1}{2}}-\alpha_{k1}\left(\frac{h_1}{2}-y\right)\frac{\operatorname{ch}\alpha_{k1}\left(\frac{h_1}{2}-y\right)}{\operatorname{ch}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}}$$

$$2C_k(y)=\left(1+\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\operatorname{cth}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\right)\frac{\operatorname{ch}\alpha_{k1}\left(\frac{h_1}{2}-y\right)}{\operatorname{sh}\frac{\sigma_{k1}h_1}{2}}-\alpha_{k1}\left(\frac{h_1}{2}-y\right)\frac{\operatorname{sh}\alpha_{k1}\left(\frac{h_1}{2}-y\right)}{\operatorname{sh}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}}$$

$$B_k(y)=\frac{2\operatorname{sh}\alpha_{k2}h_2}{\operatorname{sh}\alpha_{k2}h_2+2\alpha_{k2}h_2}\left[\alpha_{k2}(y+h_2)\operatorname{sh}\alpha_{k2}(y+h_2)-\right.\tag{6}$$

$$\left.-\left(1+\alpha_{k2}h_2\operatorname{ctg}\alpha_{k2}h_2\right)\operatorname{ch}\alpha_{k2}(y+h_2)\right]$$

$$A_p(x)=\left(1+\beta_{p1}a_1\operatorname{cth}\beta_{p1}a_1\right)\frac{\operatorname{ch}\beta_{p1}x}{\operatorname{sh}\beta_{p1}a_1}-\beta_{p1}x\frac{\operatorname{sh}\beta_{p1}x}{\operatorname{sh}\beta_{p1}a_1}$$

$$\alpha_{ki}=\frac{k\pi}{a_i},\quad \beta_{ki}=\frac{k\pi}{h_i},\qquad (i=1;2)$$

При выборе функций напряжений в виде (5) и (6) большинство из условий (1)-(3) удовлетворяются тождественно. Удовлетворяя остальным условиям, кроме равенства нормальных перемещений на линии контакта, для определения неизвестных постоянных получим следующую совокупность бесконечных систем:

$$Y_k\operatorname{cth}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\left(1+\frac{\alpha_{k1}h_1}{\operatorname{sh}\alpha_{k1}h_1}\right)+\sum_{p=2,4,6}^{\infty}\frac{8}{h_1}\frac{\beta_{p1}\alpha_{k1}^2z_p}{\left(\beta_{p1}^2+\alpha_{k1}^2\right)^2}=(f_k+p_{1k})(-1)^k$$

$$X_k\operatorname{th}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\left(1+\frac{\alpha_{k1}h_1}{\operatorname{sh}\alpha_{k1}h_1}\right)+\sum_{p=1,3,5}^{\infty}\frac{8}{h_1}\frac{\beta_{p1}\alpha_{k1}^2z_p}{\left(\beta_{p1}^2+\alpha_{k1}^2\right)^2}=(-f_k+p_{1k})(-1)^k\tag{7}$$

$$Z_p\operatorname{cth}\beta_{p1}a_1\left(1+\frac{2\beta_{p1}a_1}{\operatorname{sh}2\beta_{p1}a_1}\right)+\frac{4}{a_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_{p1}^2\alpha_{k1}}{\left(\beta_{p1}^2+\alpha_{k1}^2\right)^2}=0$$

$$d_1^{(1)}=\frac{f_0}{2a_1},\qquad d_2^{(1)}=0,$$

$$_{kp}=\begin{cases}X_k & (p=1,3,5,\ldots)\\ Y_k & (p=2,4,6,\ldots)\end{cases}$$

$$d_2^{(1)}=\frac{1}{2a_2}\int_0^{a_2}P_2(x)\,dx=\frac{f_0}{2a_2}$$

При получении бесконечных систем были использованы формулы (5) и (6) и значения

$$2D_k(0) = -2D_k(h_1) = \operatorname{th}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\left(1-\frac{\alpha_{k1}h_1}{\operatorname{sh}\alpha_{k1}h_1}\right)$$

$$A_k(a_1) = \operatorname{cth}\beta_{k1}a_1\left(1+\frac{\beta_{k1}a_1}{\operatorname{sh}2\beta_{k1}a_1}\right) \qquad (8)$$

$$2C_k(0) = 2C_k(h_1) = \operatorname{cth}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\left(1+\frac{\alpha_{k1}h_1}{\operatorname{sh}\alpha_{k1}h_1}\right)$$

Пользуясь значением интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\beta\, d\beta}{\left(\beta^2+\alpha^2\right)^2} = \frac{1}{2\alpha^2} \qquad (9)$$

нетрудно убедиться, что сумма модулей коэффициентов при неизвестных не превосходит числа $2/\pi$. Свободные члены бесконечных систем (7) стремятся к нулю как $O\left(p^{-3/2}\right)$ или $O\left(p^{-1/2}\right)$ в зависимости от того, будет ли нормальное контактное напряжение в точке $(x=c,\ y=0)$ ограниченным или неограниченным. Отсюда следует, что совокупность бесконечных систем (7) вполне регулярна и при заданных правых частях их можно решить методом последовательных приближений.

В (7) были использованы обозначения

$$P_{1k} = \int_0^{a_1} P_1(x)\cos\alpha_{k1}x\, dx$$

$$f_0 = \int_0^{a_1} f(x)\,dx = \int_0^{a_1} P_1(x)\,dx = \int_0^{a_2} P_2(x)\,dx \qquad (10)$$

$$P_{2k} = \int_0^{a_2} P_2(x)\cos\alpha_{k2}\, dx \qquad f_k = \int_0^{a_1} f(x)\cos\alpha_{k1}x\, dx \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

На основе формул, связывающих нормальные перемещения с функциями напряжений

$$E_k\left[u_k(x,y)-u_{0k}\right] = \int\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial y^2}dx - \nu\frac{\partial\Phi_k}{\partial x} - e_{0k}x$$

$$E_k\left[v_k(x,y)-v_{0k}\right] = \int\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x^2}dy - \nu\frac{\partial\Phi_k}{\partial y} - e_{0k}y$$

для перемещений на линии контакта двух материалов получим

$$v_1(x,0) = v_{01} + \frac{2d_1^{(1)}}{E_1} - \frac{2}{E_1 a_1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(X_k + Y_k\right)\frac{\cos\alpha_{k1}x}{\alpha_{k1}}$$

$$v_2(x,0) = v_{02} + \frac{2d_1^{(2)}}{E_1} - \frac{2}{E_2 a_2}\sum_{k=1}^{\infty}P_{2k}\Psi_k\frac{\cos\alpha_{k2}x}{\alpha_{k2}} \qquad (11)$$

Для свободных членов имеем

$$u_{01} = u_{02} = 0, \qquad E_2 h_2 v_{02} - 2d_1^{(2)}h_2 - e_{02}h_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}Q = \int_{-h_2}^{0}\sigma_x^{(2)}(a_2, y)dy = 2d_2^{(2)}h_2 \qquad (12)$$

$$\left(2d_2^{(2)} - e_{02}\right)a_2 = u_0 = E_2 u_2(a_2, y)$$

Удовлетворим теперь условию равенства нормальных перемещений на линии контакта. На основе (11) и бесконечных систем (7) получим соотношение

$$\frac{2}{E_1 a_1}\sum_{k=1}^{\infty}P_{k1}\frac{\cos\alpha_{k1}x}{\alpha_{k1}} + \frac{2}{E_2 a_2}\sum_{k=1}^{\infty}P_{k2}\frac{\cos\alpha_{k2}x}{\alpha_{k2}} = v_{01} - v_{02} + \frac{2d_1^{(1)}}{E_1} - \frac{2d_1^{(2)}}{E_2} -$$

$$-\frac{2}{E_1 a_1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[X_k M_k - Y_k N_k + \frac{8}{h_1}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_{p1}\alpha_{k1}^2 z_p}{\left(\beta_{p1}^2 + \alpha_{k1}^2\right)^2}\right]\frac{\cos\alpha_{k1}x}{\alpha_{k1}} + \qquad (13)$$

$$+\frac{2}{E_2 a_2}\sum_{k=1}^{\infty}P_{k2}\left(1 - \Psi_k\right)\frac{\cos\alpha_{k2}x}{\alpha_{k2}}, \qquad (0 \le x < c)$$

где

$$M_k = 1 - \operatorname{th}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\left(1 - \frac{\alpha_{k1}h_1}{\operatorname{sh}\alpha_{k1}h_1}\right), \quad N_k = \operatorname{cth}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\left(1 + \frac{\alpha_{k1}h_1}{\operatorname{sh}\alpha_{k1}h_1}\right) - 1 \qquad (14)$$

Подставляя из (10) в (13) значения коэффициентов P_{ki} $(i = 1,2)$

$$P_{ki} = \int_0^a P_i(x)\cos\alpha_{ki}x\,dx = \int_0^a q(x)\cos\alpha_{ki}x\,dx \qquad (15)$$

Учитывая четность функции $q(x)$, пользуясь методом [7], после ряда элементарных преобразований, для определения неизвестного контактного давления $q(x)$ получим следующее сингулярное интегральное уравнение

$$\int_{-a}^{a}\varphi(v)\operatorname{ctg}\frac{v - u}{2}dv = c(u) \qquad (-a < u < a) \qquad (16)$$

где

$$\alpha = \frac{\pi c}{a_1}, \quad \varphi(\mathrm{v}) = q\left(\frac{a_1 \mathrm{v}}{\pi}\right), \qquad (0 < a \le a_2)$$

$$c(u) = \int_{-a}^{a} \varphi(\mathrm{v}) K(u, \mathrm{v}) d\,\mathrm{v} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \mathrm{v}_k \sin ku \tag{17}$$

$$K(u, \mathrm{v}) = \frac{a_1 E_1}{a_2 (E_1 + E_2)} \left[S(u, \mathrm{v}) + \frac{a_2}{a_1} \operatorname{ctg} \frac{\mathrm{v} - u}{2} - \operatorname{ctg} \frac{a_1 (\mathrm{v} - u)}{2a_2} \right]$$

$$S(u, \mathrm{v}) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \Psi_k) \cos \frac{k a_1 \mathrm{v}}{a_2} \sin \frac{k a_1 u}{a_2}$$

$$V_k = X_k M_k - Y_k N_k + \frac{8}{h_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_{p1} \alpha_{k1}^2 z_p}{(\beta_{p1}^2 + \alpha_{k1}^2)^2} \tag{18}$$

Функция $K(u, \mathrm{v})$ непрерывна в квадрате $(-\alpha \le u, \mathrm{v} \le \alpha)$, поэтому уравнение (16) является сингулярным уравнением первого рода с регулярной частью.

Введем оператор

$$L[f(u)] = \frac{\sin \frac{u}{2}}{\omega(u)} f(u) - \frac{1}{2\pi\omega(u)} \int_{-a}^{a} \frac{[f(\nu) - f(u)]\omega(\mathrm{v})}{\sin \frac{\mathrm{v} - u}{2}} d\nu \tag{19}$$

где

$$\omega(u) = \left(\sin \frac{\alpha + u}{2} \sin \frac{\alpha - u}{2} \right)^{1/2}$$

Обращая сингулярную часть уравнения (16), получим

$$\varphi(u) = L[c(u)] + \frac{A_0 \cos \frac{u}{2}}{\omega(u)}, \qquad (-\alpha < u < \alpha_2) \tag{20}$$

где

$$2\pi A_1 = \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(u) du, \qquad \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\omega(\mathrm{v}) d\nu}{\sin \frac{\mathrm{v} - u}{2}} = -2\pi \sin \frac{u}{2} \tag{21}$$

Для определения неизвестных постоянных P_{k1}, P_{k2} умножим соотношение (20) на $\cos kx$ и $\cos\frac{ka_2u}{a_2}$, соответственно, и проинтегрируем в пределах $(-\alpha,\alpha)$

$$\pi P_{p1} = \int_{-\alpha}^{\alpha} L[c(u)]\cos pu\,du + A_0\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\cos\frac{u}{2}\cos pu}{\omega(u)}du$$

$$\pi P_{p2} = \frac{a_1}{a_2}\int_{-\alpha}^{\alpha} L[c(u)]\cos\frac{pa_1u}{a_2}du + A_0\frac{a_1}{a_2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\cos\frac{u}{2}\cos\frac{pa_1u}{a_2}du}{\omega(u)} \tag{22}$$

После введения обозначений

$$C_{pk}^{(1)} = \int_{-\alpha}^{\alpha} L[\sin ku]\cos pu\,du, \qquad S_{pk}^{(1)} = \int_{-\alpha}^{\alpha} L[\sin ku]\cos\frac{pa_1u}{a_2}du \tag{23}$$

$$C_{pk}^{(2)} = \int_{-\alpha}^{\alpha} L\left[\sin\frac{ka_1u}{a_2}\right]\cos pu\,du, \qquad S_{pk}^{(2)} = \int_{-\alpha}^{\alpha} L\left[\sin\frac{ka_1u}{a_2}\right]\cos\frac{pa_1u}{a_2}du$$

Получим системы

$$\pi P_{k1} = \frac{E_2}{E_1+E_2}\sum_{p=1}^{\infty}W_p^{(1)}C_{kp}^{(1)} - \frac{E_2}{E_1+E_2}\sum_{p=1}^{\infty}T_p^{(2)}C_{kp}^{(2)} + f_k^{(1)} + \gamma_k^{(1)}$$

$$\pi P_{k2} = -\frac{E_2}{E_1+E_2}\sum_{p=1}^{\infty}W_p^{(1)}C_{kp}^{(1)} - \frac{E_2}{E_1+E_2}\sum_{p=1}^{\infty}T_p^{(2)}C_{kp}^{(2)} + f_k^{(1)} + \gamma_k^{(1)} \tag{24}$$

Как видно из (20), контактные напряжения имеют интегрируемую особенность порядка 1/2 на концах области контакта. Следовательно, свободные члены бесконечных систем (7) стремятся к нулю как $k^{-1/2}$. Бесконечные системы (24) квазивполне регулярны.

Доказательство квазиполной регулярности аналогичной задачи приведено в работе [4], где рассматривается контактная задача для прямоугольника, когда часть одной грани прямоугольника жестко заделена.

Контактные напряжения (20) имеют порядок $\frac{1}{2}$ и их можно представить в виде

$$\varphi(u) = \frac{k(u)}{\omega(u)}, \text{ где } k(u) = c(u)\sin\frac{u}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{[c(v)-c(u)]\omega(v)}{\sin\frac{v-u}{2}}dv + A_0\cos\frac{u}{2}$$

Это выражение дает возможность определить область контакта, то есть значение c из уравнения

$$k(c) = 0$$

Если давление, приложенное на прямоугольник, представить в виде $f(x) = P_0 f_0(x)$, где P_0 - интенсивность приложенной нагрузки, то нетрудно убедиться, что длина зоны контакта не будет зависеть от P_0, а будет зависеть от формы $f_0(x)$ и от участка ее приложения.

Авторам не удалось получить решение задачи (регулярные бесконечные системы) в случае, когда $c = a_1$, то есть когда прямоугольник по всей длине своей стороны входит в контакт с полосой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л., Манукян М. М.* Решение плоской задачи теории упругости для прямоугольника в перемещениях.- Докл. АН Арм. ССР, 1957, т. 25, №4.
2. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника.- ПММ, 1957, №21, вып. 1.
3. *Баблоян А. А., Мкртчян А. М.* Решение смешанной задачи для прямоугольника- Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1970, т. 23, №6.
4. *Баблоян А. А., Енгибарян А. А.* Контактная задача для прямоугольника при наличии сцепления.- Изв. АН Арм. ССР,Механика, 1977, т.30, №3.
5. *Мкртчян А. М., Мелконян М. Г.* Об одной контактной задаче для двух прямоугольников. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т.28, №3,
6. *Чибрикова Л. И.* О решении некоторых новых сингулярных уравнений.- Уч. записки Казанского гос. университета. 1966, т. 122, кн. 3.
7. *Баблоян А. А., Мкртчян А. М.* Кручение стержней с поперечным сечением в виде соединений прямоугольников и кольцевых секторов.- Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. 32, №6.

Институт Механики НАН РА

Поступила в редакцию 14.02.1994

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 4, 1995 Механика

РАВНОВЕСИЕ ЦИЛИНДРА ИМЕЮЩЕГО СОБСТВЕННЫЙ ВЕС

Макарян В. С.

Մակարյան Վ. Ս.

Սեփական կշիռ ունեցող գլանի հավասարակշռությունը

Աշխատանքում լուծված է եզրերում ամրակցված կլոր գլանի ոչ առանցքասիմետրիկ խնդիրը սեփական կշռի հաշվառմամբ:

Անհայտ ֆունկցիաները ներկայացնելով Բեսելի առաջին սեռի ֆունկցիաների շարքի փեսքով. համապատասխան ձևով ընտրելով սեփական արժեքները. հնարավոր է լինում խնդիրը բերել լիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգերի:

MAKARIAN V.S.

Equilibrium of Cylinder Having Dead Weight

В работе решена задача для круглого цилиндра защемленного по торцам, с учетом собственного веса. Осңрвываясь на разложении искомых функций по функциям Бесселя первого рода, надлежащим выбором собственных чисел удается свести задачу к вполне регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений.

Задачи для цилиндра рассматривались в работах [1-7].

Цилиндр имеющий собственный вес, действующий вертикально, расположен так, что ось цилиндра направлена горизонтально, защемлен по торцам. Задача является неосесимметричной, поэтому необходимо построить решение основываясь на общих уравнениях теории упругости в цилиндрических координатах.

1. Построение общего решения. В цилиндрических координатах перемещения представляются в виде

$$u_r(r,z,\varphi)=u(r,z)\cos\varphi,\ u_z(r,z,\varphi)=w(r,z)\cos\varphi,\ u_\varphi(r,z,\varphi)=v(r,z)\sin\varphi$$

то есть из общего решения пространственной задачи берем только первую гармонику.

Функции u, v, w удовлетворяют неоднородным уравнениям с учетом массовых сил

$$\Delta u+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\theta}{\partial r}-\frac{u+2v}{r^2}+\frac{\rho g}{G}=0$$

$$\Delta v-\frac{1}{1-2\nu}\frac{\theta}{r}-\frac{2v+v}{r}-\frac{\rho g}{G}=0 \tag{1}$$

$$\Delta w+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\theta}{\partial r}=0$$

где

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u+v}{r}+\frac{\partial w}{\partial z},\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2} \tag{2}$$

Учитывая, что напряжения содержат координату φ только в виде множителя через тригонометрические функции, введем новые неизестные безразмерные функции не зависящие от координаты φ

$$\frac{\sigma_r(r,z,\varphi)}{2G\cos\varphi}\equiv\sigma_r(r,z)=\frac{\partial u}{\partial r}+m\theta;\qquad \frac{\tau_{rz}(r,z,\varphi)}{2G\cos\varphi}\equiv\tau_{rz}(r,z)=\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z};$$

$$\frac{\sigma_z(r,z,\varphi)}{2G\cos\varphi}\equiv\sigma_z(r,z)=\frac{\partial w}{\partial z}+m\theta;\qquad \frac{\tau_{\varphi z}(r,z,\varphi)}{2G\sin\varphi}\equiv\tau_{\varphi z}(r,z)=\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{w}{r};$$

$$\frac{\sigma_\varphi(r,z,\varphi)}{2G\cos\varphi}\equiv\sigma_\varphi(r,z)=\frac{u+v}{r}+m\theta;\quad \frac{\tau_{r\varphi}(r,z,\varphi)}{2G\sin\varphi}\equiv\tau_{r\varphi}(r,z)=\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{u+v}{r}. \tag{3}$$

В (1)-(3) ν-коэффициент Пуассона, G- модуль сдвига, а параметр m зависит от ν

$$m=\frac{\nu}{1-2\nu} \tag{4}$$

Общее решение неоднородных уравнений (1) представим в виде:

$$u(r,z)=u_0(r,z)+\sum_{k=1}^{\infty}R_{1k}(r)\sin\lambda_k z+\sum_{p=1}^{\infty}\left[f_{1p}(z)J_1'(\alpha_p r)+f_{3p}(z)\frac{J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p r}\right]$$

$$v(r,z)=v_0(r,z)+\sum_{k=1}^{\infty}R_{2k}(r)\sin\lambda_k z-\sum_{p=1}^{\infty}\left[f_{3p}(z)J_1'(\alpha_p r)+f_{3p}(z)\frac{J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p r}\right] \tag{5}$$

$$w(r,z)=w_0(r,z)+\sum_{k=1}^{\infty}R_{3k}(r)\cos\lambda_k z+\sum_{p=1}^{\infty}f_{2p}(z)J_1(\alpha_p r)$$

Для краткости записи обозначим $\xi=\lambda_k r;\ \eta=\alpha_p z$

Тогда

$$R_{1k}(r)=Q_k\left[(5-4\nu)I_2(\xi)-\xi I_1(\xi)\right]+M_kI_0(\xi)+N_kI_2(\xi)$$

$$R_{2k}(r)=Q_k(5-4\nu)I_2(\xi)-M_kI_0(\xi)+N_kI_2(\xi)$$

$$R_{3k}(r) = -Q_k\xi I_2(\xi) + (M_k + N_k) I_1(\xi), \quad f_{3p}(z) = E_p \operatorname{sh}\eta + F_p \operatorname{ch}\eta$$

$$f_{1p}(z) = \left(A_p + \eta B_p\right)\operatorname{ch}\eta + \left(C_p + \eta D_p\right)\operatorname{sh}\eta \tag{6}$$

$$f_{2p}(z) = \left[A_p + \eta B_p - (3-4\nu)D_p\right]\operatorname{sh}\eta + \left[C_p + \eta D_p - (3-4\nu)B_p\right]\operatorname{ch}\eta$$

Частное решение u_0, v_0, w_0 представляется в виде

$$u_0(r,z) = A_{10}r^2 + B_0 z^2 + D_0(1-4\nu)r^2 z + E_0 z + G_0$$

$$v_0(r,z) = A_{20}r^2 - B_0 z^2 + D_0(5-4\nu)r^2 z - E_0 z - G_0 \tag{7}$$

$$w_0(r,z) = C_0 rz - D_0 r^3 + F_0 r$$

$$3A_{10} + A_{20} + 2(1-2\nu)\left(A_{10} - A_{20} + B_0 + \frac{\rho g}{2G}\right) = 0$$

Напряжения представляются формулами

$$\tau_{r\varphi}(r,z) = r\left(A_{20} - A_{10}\right) + 4D_0 rz + \sum_{k=1}^{\infty}\left[R_{2k}'(r) - \frac{R_{1k}(r) + R_{2k}(r)}{r}\right]\sin\lambda_k z +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty}\left\{2\left[f_{1p}(z) - f_{3p}(z)\right]\frac{J_2(\alpha_p r)}{r} + \alpha_p f_{3p}(z) J_1(\alpha_p r)\right\}$$

$$\tau_{\varphi z}(r,z) = 2(3-2\nu)D_0 r^2 - \left(2B_0 + C_0\right)z - E_0 - F_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left[\lambda_k R_{2k}(r) - \frac{R_{3k}(r)}{r}\right]\cos\lambda_k z -$$

$$- \sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[f_{1p}'(z) + \alpha_p f_{2p}(z) + f_{3p}'(z)\right]\frac{J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p r} - f_{3p}'(z) J_2(\alpha_p r)\right\}$$

$$\tau_{rz}(r,z) = z\left(2B_0 + C_0\right) - 2(1+2\nu)D_0 r^2 + E_0 + F_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left[R_{3k}'(r) - \lambda_k R_{1k}(r)\right]\cos\lambda_k z +$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[f_{1p}'(z)+\alpha_p f_{2p}(z)+f_{3p}'(z)\right]J_1'\left(\alpha_p r\right)+f_{3p}'(z)J_2\left(\alpha_p r\right)\right\}$$

$$\sigma_r(r,z)=2rA_{10}+2D_0rz-2r\nu\left[A_{10}-A_{20}+B_0+\frac{\rho g}{2G}\right]+ \tag{8}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[R_{1k}'(r)+2\nu\lambda_k Q_k I_1\left(\lambda_k r\right)\right]\sin\lambda_k z+$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[f_{1p}(z)-f_{3p}(z)\right]\frac{J_2\left(\alpha_p r\right)}{r}-\left[f_{1p}(z)+2\nu\alpha_p\left(B_p sh\alpha_p z+D_p ch\alpha_p z\right)J_1\left(\alpha_p r\right)\right]\right\},$$

$$\sigma_z(r,z)=rC_0+8\nu D_0rz-2r\nu\left[A_{10}-A_{20}+B_0+\frac{\rho g}{2G}\right]-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[R_{3k}(r)-2\nu Q_k I_1\left(\lambda_k r\right)\right]\lambda_k\sin\lambda_k z+$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\left[f_{2p}'(z)-2\nu\alpha_p\left(B_p\,\mathrm{sh}\,\alpha_p z+D_p\,\mathrm{ch}\,\alpha_p z\right)\right]J_1\left(\alpha_p r\right),$$

$$\sigma_\varphi(r,z)=r\left(A_{10}+A_{20}\right)+2(3+2\nu)D_0rz-2r\nu\left[A_{10}-A_{20}+B_0+\frac{\rho g}{2G}\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{R_{1k}(r)+R_{2k}(r)}{\lambda_k r}+2\nu Q_k I_1\left(\lambda_k r\right)\right]\lambda_k\sin\lambda_k z-$$

$$-\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[f_{1p}(z)-f_{3p}(z)\right]\frac{J_2\left(\alpha_p r\right)}{r}+2\nu\alpha_p\left(B_p\,\mathrm{sh}\,\alpha_p z+D_p\,\mathrm{ch}\,\alpha_p z\right)J_1\left(\alpha_p r\right)\right\}$$

2. Сведение задачи к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений

Граничные условия для рассматриваемого случая следующие:

$$u(r,0)=-v(r,0)=\delta_1,\ u(r,l)=-v(r,l)=\delta_2$$

$$w(r,0)=\chi_1 r,\ w(r,l)=\chi_2 r, \tag{9}$$

$$\sigma_r(R,z)=\sigma(z),\ \ \tau_{r\varphi}(R,z)=-\tau(z),\ \tau_{rz}(R,z)=0$$

Решение задачи, то есть выражения для перемещений, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям, следующие:

$$u(r,z)=u_0(r,z)+\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left[V_k g_{1k}-G_{1k}(r)\right]\frac{\sin\lambda_k z}{\lambda_k}-$$

$$-\frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\left[X_p h_{1p}(z)+Y_p h_{2p}(z)\right]\frac{J_1'(\alpha_p r)}{\alpha_p J_1(\alpha_p R)}+\frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_{0p}(z)J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p^2 r J_1(\alpha_p R)}$$

$$\mathrm{v}(r,z)=\mathrm{v}_0(r,z)+\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left[V_k g_{2k}+G_{2k}(r)\right]\frac{\sin\lambda_k z}{\lambda_k}+$$

$$+\frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\left[X_p h_{1p}(z)+Y_p h_{2p}(z)\right]\frac{J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p^2 r J_1(\alpha_p R)}-\frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_{0p}(z)J_1'(\alpha_p r)}{\alpha_p J_1(\alpha_p R)} \qquad (10)$$

$$w(r,z)=w_0(r,z)+\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left[V_k g_{3k}-G_{3k}(r)\right]\frac{\cos\lambda_k z}{\lambda_k}+$$

$$+\frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\left[X_p h_{3p}(z)+Y_p h_{4p}(z)\right]\frac{J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p J_1(\alpha_p R)},\qquad \lambda_k=\frac{k\pi}{l},\qquad l=2a$$

Здесь введены обозначения

$$g_{1k}(r)=\left[5-2\nu+\frac{xI_3}{I_2(x)}\right]\frac{I_2(\lambda_k r)}{I_2(x)}-\frac{\lambda_k r I_1(\lambda_k r)}{I_2(x)}+$$

$$+\left[4-2\nu-\frac{4(1-\nu)I_2}{xI_2'(x)}+\frac{xI_3}{I_2(x)}\right]\frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2(x)}$$

$$g_{2k}(r)=\left[\frac{2-4\nu}{x}+\frac{I_1}{I_2}\right]\frac{I_2(\lambda_k r)}{I_2'}-\left[4-2\nu-\frac{4(1-\nu)I_2}{xI_2'(x)}+\frac{xI_3}{I_2(x)}\right]\frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2(x)}=$$

$$=\frac{8\nu r}{\lambda_k R^2}+\frac{4\lambda_k}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\nu\lambda_k^2-(1-\nu)\alpha_p^2}{\left(\alpha_p^2+\lambda_k^2\right)^2}\cdot\frac{J_1(\alpha_p r)}{J_1(\alpha_p R)},$$

$$g_{3k}(r)=\frac{xI_3 I_1(\lambda_k r)}{I_2^2}-\lambda_k r\frac{I_2(\lambda_k r)}{I_2}+\frac{I_1(\lambda_k r)}{I_2}=$$

$$g_{4k}(r)=\frac{2I_1(\lambda_k r)}{I_2 I_2'}\left[I_1-\frac{2\nu}{\lambda_k}I_2\right]-\frac{2I_2(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2}\left[\frac{2(1-\nu)}{I_2'}I_1+\frac{x}{I_2}I_1\right]$$

$$g_{5k}(r)=\frac{2I_1'(\lambda_k r)}{I_2}\left[3+\frac{x}{I_2}I_3\right]-\frac{2\lambda_k r I_1(\lambda_k r)}{I_2}-\frac{2I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2}\left[1+\frac{2(1-\nu)}{xI_2'}I_2\right]$$

$$g_{6k}(r)=\frac{I_1(\lambda_k r)}{I_2}\left[5+\frac{x}{I_2}I_3\right]-\frac{\lambda_k r I_0(\lambda_k r)}{I_2}-\frac{I_2(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2}\left[6-2\nu+\frac{xI_3}{I_2}+\frac{4(1-\nu)}{xI_2'}I_2\right]$$

$$h_{0p}(z)=\frac{E_p\operatorname{sh}\alpha_p(l-z)+F_p\operatorname{sh}\alpha_p z}{\operatorname{sh}\alpha_p l}$$

$$h_{1p}(z)=\frac{4\alpha_p^2}{l}\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\frac{\lambda_k\sin\lambda_k z}{\left(\lambda_k^2+\alpha_p^2\right)^2}=\frac{\alpha_p a\operatorname{ch}\alpha_p(a-z)\operatorname{th}\alpha_p a-\alpha_p(a-z)\operatorname{sh}\alpha_p(a-z)}{2\operatorname{ch}\alpha_p a}$$

$$h_{2p}(z)=\frac{4\alpha_p^2}{l}\sum_{k=2,4,6}^{\infty}\frac{\lambda_k\sin\lambda_k z}{\left(\lambda_k^2+\alpha_p^2\right)^2}=\frac{\alpha_p a\operatorname{sh}\alpha_p(a-z)\operatorname{cth}\alpha_p a-\alpha_p(a-z)\operatorname{ch}\alpha_p(a-z)}{2\operatorname{sh}\alpha_p a}$$

$$h_{3p}(z)=\frac{4\alpha_p}{l}\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\frac{2(1-\nu)\alpha_p^2+(1-2\nu)\lambda_k^2}{\left(\lambda_k^2+\alpha_p^2\right)^2}\cos\lambda_k z=$$

$$=\left[3-4\nu+\alpha_p a\operatorname{th}\alpha_p a\right]\frac{\operatorname{sh}\alpha_p(a-z)}{2\operatorname{ch}\alpha_p a}-\frac{\alpha_p(a-z)\operatorname{ch}\alpha_p(a-z)}{2\operatorname{ch}\alpha_p a}$$

$$h_{4p}(z)=\frac{4\alpha_p}{l}\left[\sum_{k=2,4,6}^{\infty}\frac{2(1-\nu)\alpha_p^2+(1-2\nu)\lambda_k^2}{\left(\lambda_k^2+\alpha_p^2\right)^2}\cos\lambda_k z+\frac{1-\nu}{\alpha_p^2}\right]=$$

$$=\left[3-4\nu+\alpha_p a\operatorname{cth}\alpha_p a\right]\frac{\operatorname{ch}\alpha_p(a-z)}{2\operatorname{sh}\alpha_p a}-\frac{\alpha_p(a-z)\operatorname{sh}\alpha_p(a-z)}{2\operatorname{sh}\alpha_p a}$$

$$h_{5p}(z)=h_{1p}(z)-\nu\frac{\operatorname{ch}\alpha_p(a-z)}{\operatorname{ch}\alpha_p a}=\frac{4}{l}\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\frac{\left[(1-\nu)\alpha_p^2-\nu\lambda_k^2\right]}{\left(\lambda_k^2+\alpha_p^2\right)^2}\lambda_k\sin\lambda_k z=$$

$$=\frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,\alpha_p a}\left[\left(\alpha_p a\,\mathrm{th}\,\alpha_p a-2\nu\right)\mathrm{ch}\,\alpha_p(a-z)-\alpha_p(a-z)\,\mathrm{sh}\,\alpha_p(a-z)\right]$$

$$h_{6p}(z)=h_{2p}(z)-\nu\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_p(a-z)}{\mathrm{sh}\,\alpha_p a}=\frac{4}{l}\sum_{k=2,4,6}^{\infty}\frac{\left[(1-\nu)\alpha_p^2-\nu\lambda_k^2\right]}{\left(\lambda_k^2+\alpha_p^2\right)^2}\lambda_k\sin\lambda_k z=$$

$$=\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,\alpha_p a}\left[\left(\alpha_p a\,\mathrm{cth}\,\alpha_p a-2\nu\right)\mathrm{sh}\,\alpha_p(a-z)-\alpha_p(a-z)\,\mathrm{ch}\,\alpha_p(a-z)\right]\quad(11)$$

$$-h_{7p}(z)=\frac{h_{1p}'(z)}{\alpha_p}-h_{3p}(z)=-\frac{8\alpha_p 4}{l}\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\frac{\left[(1-\nu)\alpha_p^2-\nu\lambda_k^2\right]}{\left(\lambda_k^2+\alpha_p^2\right)^2}\cos\lambda_k z=$$

$$=-\frac{1}{ch\alpha_p a}\left[\left(\alpha_p a\,\mathrm{th}\,\alpha_p a+1-2\nu\right)\mathrm{sh}\,\alpha_p(a-z)-\alpha_p(a-z)\,\mathrm{ch}\,\alpha_p(a-z)\right]$$

$$-h_{8p}(z)=\frac{h_{2p}'(z)}{\alpha_p}-h_{4p}(z)=-\frac{8\alpha_p}{l}\left[\sum_{k=2,4,6}^{\infty}\frac{\left[(1-\nu)\alpha_p^2-\nu\lambda_k^2\right]}{\left(\lambda_k^2+\alpha_p^2\right)^2}\cos\lambda_k z+\frac{1-\nu}{2\alpha_p^2}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\mathrm{sh}\,\alpha_p a}\left[\left(1-\alpha_p\,a\mathrm{cth}\,\alpha_p a-2\nu\right)\mathrm{ch}\,\alpha_p(a-z)-\alpha_p(a-z)\,\mathrm{sh}\,\alpha_p(a-z)\right]$$

$$G_{1k}(r)=P_k\left[\frac{I_1'(\lambda_k r)}{I_2(x)}-\frac{2I_1(\lambda_k r)}{x\lambda_k r I_2'(x)}\right]-Q_k\frac{I_1(\lambda_k r)}{I_2'\lambda_k r}$$

$$G_{2k}(r)=P_k\left[\frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2}-\frac{2I_1'(\lambda_k r)}{xI_2'(x)}\right]-Q_k\frac{I_1'(\lambda_k r)}{I_2'}$$

$$G_{3k}(r)=P_k\frac{I_1(\lambda_k r)}{I_2(x)}=P_k\left[\frac{2\lambda_k}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha_p r)}{\left(\alpha_p^2+\lambda_k^2\right)J_1(\alpha_p R)}+\frac{4r}{\lambda_k R^2}\right]$$

$$G_{4k}(r)=2P_k\left[\frac{I_2(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2}-\frac{I_1'(\lambda_k r)}{xI_2'(x)}\right]-Q_k\frac{I_2'(\lambda_k r)}{I_2'}$$

$$G_{5k}(r)=2P_k\left[\frac{I_1'(\lambda_k r)}{I_2}-\frac{I_1(\lambda_k r)}{x\lambda_k r I_2'(x)}\right]-Q_k\frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2'}, \qquad x=\lambda_k R$$

Частное решение в данном случае удобно представить в виде

$$u_0(r,z)=\frac{\delta_1(l-z)}{l}+\frac{\delta_2 z}{l}+A_{10}r^2-B_0 z(l-z)+D_0(1-4\nu)r^2 z+E_0 z+G_0$$

$$\mathrm{v}_0(r,z)=-\frac{\delta_1(l-z)}{l}-\frac{\delta_2 z}{l}+A_{20}r^2+B_0 z(l-z)+D_0(5-4\nu)r^2 z-E_0 z-G_0 \quad (12)$$

$$w_0(r,z)=C_0 rz-D_0 r^3+F_0 r$$

$$3A_{10}+A_{20}+C_0+2(1-2\nu)\left(A_{10}-A_{20}+B_0+\frac{\rho g}{2G}\right)=0$$

Для объемного расширения из (3) получим

$$-\frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\left[X_p\frac{\operatorname{ch}\alpha_p(a-z)}{\operatorname{ch}\alpha_p a}+Y_p\frac{\operatorname{sh}\alpha_p(a-z)}{\operatorname{sh}\alpha_p a}\right]\frac{J_1(\alpha_p r)}{J_1(\alpha_p R)} \qquad (13)$$

$$\theta_0=A_{10}-A_{20}+B_0+\frac{\rho g}{2G}=-\frac{3A_{10}+A_{20}+C_0}{2(1-2\nu)}$$

где α_p корни уравнения $J_2(\alpha_p R)=0$.

Такой выбор α_p обеспечивает удовлетворение граничных условий с минимальным числом бесконечных уравнений. При этом ортогональными являются не только $J_2(x)$, но и $J_1(x)$. Причем [8]

$$f(r)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k J_2(\alpha_k r)=b_0 r+\sum_{k=1}^{\infty}b_k J_1(\alpha_k r)$$

$$a_k\Omega_k=\int_0^R rf(r)J_2(\alpha_k r)dr, \quad \Omega_k=\frac{R^2}{2}J_1^2(\alpha_k R) \qquad (14)$$

$$b_k\Omega_k=\int_0^R rf(r)J_1(\alpha_k r)dr, \quad b_0=\frac{4}{R^4}\int_0^R r^2 f(r)dr$$

Удовлетворяя граничным условиям, для определения неизвестных постоянных получим следующие соотношения:

1) Из условий на нормальные перемещения

$$X_p\left(3-4\nu-\frac{\alpha_p l}{sh\alpha_p l}\right)th\alpha_p a+\frac{4\alpha_p}{l}\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\left[2V_k\frac{\nu\lambda_k^2-(1-\nu)\alpha_p^2}{\left(\alpha_p^2+\lambda_k^2\right)^2}-\frac{P_k}{\alpha_p^2+\lambda_k^2}\right]=0 \quad (15)$$

$$Y_p\left(3-4\nu+\frac{\alpha_p l}{\mathrm{sh}\alpha_p l}\right)\mathrm{cth}\alpha_p a+\frac{4\alpha_p}{l}\sum_{k=2,4,6}^{\infty}\left[2V_k\frac{\nu\lambda_k^2-(1-\nu)\alpha_p^2}{\left(\alpha_p^2+\lambda_k^2\right)^2}-\frac{P_k}{\alpha_p^2+\lambda_k^2}\right]=\frac{4D_0R^2}{\alpha_p}$$

$$\frac{8}{lR^2}\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\frac{2\nu V_k-P_k}{\lambda_k^2}=\frac{\chi_1-\chi_2}{2}+\frac{1}{2}C_0 l$$

$$\frac{8}{lR^2}\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\frac{2\nu V_k-P_k}{\lambda_k^2}=\frac{\chi_1+\chi_2}{2}-F_0-\frac{1}{2}C_0 l+\frac{2D_0R^2}{3}$$

2) Из условий на радиальные и тангенциальные перемещения (при $z=0$ и $z=l$) получим

$$r^2\left[A_{10}+A_{20}+2D_0z(3-4\nu)\right]+\frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_{0p}(z)J_2\left(\alpha_p r\right)}{\alpha_p J_1\left(\alpha_p R\right)}=0$$

$$r^2\left[A_{10}+D_0z(1-4\nu)\right]+E_0z+G_0+\frac{2}{R^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_{0p}(z)J_1\left(\alpha_p r\right)}{\alpha_p^2 J_1\left(\alpha_p R\right)}=0 \quad (16)$$

На основе ортогональности функций $J_2(x)$ и $J_1(x)$ получим

$$h_{0p}(z)=R^2\left[A_{10}+A_{20}+2D_0z(3-4\nu)\right] \qquad (z=0;l)$$

$$h_{0p}(z)=-\frac{R^2}{2}\left[A_{10}-A_{20}-4D_0z\right],$$

$$\left(A_{10}-A_{20}-4D_0z\right)\frac{R^2}{3}+2E_0z+2G_0=0 \quad (17)$$

$$\left[A_{10}+D_0z(1-4\nu)\right]\frac{2R^2}{3}+E_0z+G_0=0 \quad (18)$$

Из этих всех соотношений следует окончательно, что

$3A_{10}+A_{20}=0,\ D_0=0,\ E_0=0,$

$$G_0 = -\frac{2R^2}{3}A_{10},\ h_{0p}(0) = h_{0p}(0) = -2R^2 A_{10} \tag{19}$$

Отсюда для функции $h_{0p}(z)$ получим

$$h_{op}(z) = -2R^2 A_{10}\frac{\operatorname{sh}\alpha_p(l-z) + \operatorname{sh}\alpha_p z}{\operatorname{sh}\alpha_p l} =$$

$$= -2R^2 A_{10}\frac{\operatorname{ch}\alpha_p(a-z)}{\operatorname{ch}\alpha_p a} = -\frac{4R^2 A_{10}}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^k\lambda_k \sin\lambda_k z\right]}{\lambda_k^2 + \alpha_p^2} \tag{20}$$

3) Из условия на $\tau_{r\varphi}(R,z) = -2\tau(z)$

$$-4RA_{10} - \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}Q_k \sin\lambda_k z + \frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}h_{0p}(z) = -2\tau(z) \tag{21}$$

после интегрирования и суммирования полученного ряда, для Q_k получим

$$Q_k = 2\tau_k A_{10} - 2R^2 A_{10}\left[1-(-1)^k\right]\frac{I_2'(\lambda_k R)}{I_2(\lambda_k R)} \tag{22}$$

где

$$\tau_k = \int_0^l \tau(z)\sin(\lambda_k z)dz, \quad \sigma_k = \int_0^l \sigma(z)\sin(\lambda_k z)dz, \tag{23}$$

4) Из условия для нормального напряжения имеем

$${}_k g_{6k}(R) + \frac{4\lambda_k}{R}\sum_{p=1}^{\infty}Z_{pk}\frac{(1-\nu)\alpha_p^2 - \nu\lambda_k^2}{\left(\alpha_p^2 + \lambda_k^2\right)^2} =$$

$$= \sigma_k + \frac{1}{\lambda_k}G_{1k}(R) - \frac{2R}{\lambda_k}\left(A_{10} - \nu\Theta_0\right)\left[1-(-1)^k\right] \tag{24}$$

$$Z_{pk} = \begin{cases} X_p & (p = 1,3,5\ldots) \\ Y_p & (p = 2,4,6\ldots) \end{cases} \quad k = 1,2,3\ldots$$

5) Из условия $\tau_{rz}(R,z) = \tau_1$ получим

$${}_k g_{5k}(R) + \frac{8}{R^2}\sum_{p=1}^{\infty}Z_{pk}\frac{(1-\nu)\alpha_p^2 - \nu\lambda_k^2}{\left(\alpha_p^2 + \lambda_k^2\right)^2} = \tag{25}$$

$$= G_{5k}(R) + \frac{\left[1-(-1)^k\right]}{\lambda_k^2}\left(C_0 + 2B_0\right)$$

$$F_0 + \frac{1}{2}C_0 l + \frac{8(1-\nu)}{R^2 l}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{Y_p}{\alpha_p^2} = \frac{\delta_1 - \delta_2}{l} + \tau_0$$

Из бесконечных систем (24) ,(25), учитывая соотношение

$$g_{6k}(R) = \frac{\lambda_k R}{2} g_{6k}(R) = \frac{x\left(I_1^2 - I_0 I_2\right)}{} - \frac{2(1-\nu)I_1}{x I_2'} \tag{26}$$

для определения коэффициентов P_k получим уравнение

$$\sigma_k + \frac{1}{\lambda_k}G_{1k}'(R) - \frac{2R}{\lambda_k}\left(A_{10} - \nu\Theta_0\right)\left[1-(-1)^k\right] =$$

$$= \frac{\lambda_k R}{2}\left[G_{5k}(R) + \frac{\left[1-(-1)^k\right]}{\lambda_k^2}\left(C_0 + 2B_0\right)\right] \tag{27}$$

Откуда

$$\lambda_k R P_k = \sigma_k + \tau_k - \left[1-(-1)^k\right]R^2 A_{10}\frac{I_2'\left(\lambda_k r\right)}{I_2\left(\lambda_k R\right)} -$$

$$- \frac{R\left[1-(-1)^k\right]}{2\lambda_k}\left(C_0 + 2B_0 + 4A_{10} - 4\nu\Theta_0\right) \tag{28}$$

Пользуясь формулой

$$\frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\alpha_p(a-z)}{\alpha_p^2\operatorname{ch}\alpha_p a}\frac{J_1\left(\alpha_p r\right)}{J_1\left(\alpha_p R\right)} + \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{\lambda_k^2}\frac{I_1\left(\lambda_k r\right)}{I_1\left(\lambda_k R\right)}\sin\lambda_k z =$$

$$= \frac{r}{R^2}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right) + \frac{2rz(l-z)}{R^2} \tag{29}$$

нетрудно убедиться, что во всех формулах нужно подставить $A_{10} = 0$. Отсюда следует, что

$$\begin{gathered} A_{10} = A_{20} = E_0 = E_0 = D_0 = 0 \\ 2(1-2\nu)\left(B_0 + \frac{\rho g}{2G}\right) + C_0 = 0 \end{gathered} \tag{30}$$

Таким образом, задача свелась к решению уравнений (15), (24) и (25).

Заметим, что первое уравнение (16) можно было заменить уравнением

$$r^2\left[A_{10}-A_{20}-4D_0z\right]+2E_0z+2G_0+\frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_{0p}(z)J_0(\alpha_p r)}{\alpha_p J_1(\alpha_p R)}=0$$

Тогда, при учете свойств функций $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$, $(k=1,2\cdots, J_2(\lambda_k r)=0)$, приведенных в приложении, мы опять пришли бы к совокупности бесконечных систем уравнений (15.)

Для доказательства регулярности бесконечных систем (15), (24) и (25) оценим сумму

$$K=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\left|\nu\lambda_1^2-(1-\nu)\alpha_p^2\right|}{\left(\alpha_p^2+\lambda_1^2\right)\left(\alpha_p^2+\lambda_2^2\right)}<\frac{R^2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\left|\nu x_1^2-(1-\nu)\xi^2\right|}{\left(\xi^2+x_1^2\right)\left(\xi^2+x_2^2\right)}d\xi$$

$$\frac{\pi}{R^2}K\le\frac{x_2-\nu(x_1+x_2)}{x_2(x_1+x_2)}\left(\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}\right)+ \qquad (31)$$

$$+\frac{2\left[x_2^2-\nu(x_2^2-x_1^2)\right]\sqrt{\nu(1-\nu)}}{x_2^2(x_1+x_2)}\left[1+\frac{\nu(x_2-x_1)}{x_2}+\frac{\nu(4\nu-1)(x_2-x_1)^2}{3x_2^2}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{x_2-\nu(x_1+x_2)}{x_2(x_1+x_2)}\left(\frac{\pi}{2}-2arctg\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}\right)+$$

$$+\frac{2\left[x_2^2-\nu(x_2^2-x_1^2)\right]\sqrt{\nu(1-\nu)}}{x_2(x_1+x_2)\left[x_2-\nu(x_2-x_1)\right]}\left[1-\frac{z^2}{3}+\frac{z^4}{5}-\frac{z^6}{7}+\ldots\right]$$

где

$$z=\frac{(x_2-x_1)\sqrt{\nu(1-\nu)}}{x_2-\nu(x_2-x_1)}; \qquad (32)$$

В нашем случае $\lambda_1=\lambda_2$, $x_1=x_2=x=\lambda_k R$, следовательно

$$K\le\frac{R}{\pi\lambda_k}d(\nu),\ d(\nu)=(1-2\nu)\left(\frac{\pi}{4}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}\right)+\sqrt{\nu(1-\nu)} \qquad (33)$$

$$d(\nu)=d(1-\nu);\quad \left.\frac{1}{2}\le d(\nu)\le\frac{\pi}{4}\right\},\ \left(0\le\nu\le\frac{1}{2}\right)$$

Пользуясь этими оценками, нетрудно убедится, что если совокупность уравнений (15), (24) и (25) привести к одной бесконечной системе относительно Z_k или $(X_k),(Y_k)$ то сумма модулей коэффициентов полученной системы при от $(0 < \nu < 0.5)$ имеет оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\bar{a}_{pk}\right| \leq \frac{\pi^2}{16} \tag{34}$$

Следовательно бесконечные системы вполне регулярны, т.е можно их решить методом последовательных приближений.

Для изгибающего момента и перерезывающей силы имеем

$$M_y(z) = 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \sigma_z(r,z,\varphi)\cos\varphi dr,$$

$$F_x(z) = 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r\tau_z(r,z,\varphi) dr$$

Используя решение задачи после некоторых несложных преобразований получим

$$\frac{M_y(z)}{2\pi R^2 G} = \frac{R^2}{4}\left(C_0 - \nu\Theta_0\right) + \frac{\rho g z(l-z)}{4G} + \tag{35}$$

$$+\frac{1}{2Rl}\int_0^l [\sigma(x)+\tau(x)][l(z+x) - l|z-x| - 2zx]dx$$

$$\frac{F_x(z)}{2\pi R^2 G} = \tau_0 + \frac{\rho g(l-2z)}{4G} + \frac{1}{2Rl}\int_0^l [\sigma(x)+\tau(x)][l - l\,\mathrm{sgn}(z-x) - 2x]dx \tag{36}$$

где

$$\Theta_0 = B_0 + \frac{\rho g}{2G} = -\frac{C_0}{2(1-2\nu)} \tag{37}$$

Этими формулами определяются также и реакции опор.

Такой подход допускает рассмотрение некоторых других неосесимметричных статических и динамических задач теории упругости для цилиндра конечных размеров. Отметим, что рассмотренную задачу можно было решать, если за считать, что $\alpha_p -$ корни уравнения $J_1'(\alpha_p R) = 0$. При этом число бесконечных систем получается на одну больше, а число свободных членов на две меньше. Возникшая новая система отличается от других, тем, что сумма модулей ее коэффициентов при неизвестных стремится к нулю как $O(k^{-2})$. Сумма модулей коэффициентов при неизвестных совокупности всех систем определяется также формулой (33) и имеет оценку (35). Это связано с тем,что корни функций $J_2(x)$ и $J_1'(x)$ асимптотически совпадают.

Приложение

О свойствах функций $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$. $\quad (k = 1, 2 \cdots, J_2(\lambda_k r) = 0)$

Функции $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$ линейно независимы. Это следует из $\dfrac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$ и линейной независимости $J_1(\lambda_k r)$. Кроме того для $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$ имеют место равенства

$$\int_0^R r J_0(\lambda_n r)\left[J_0(\lambda_k r) - J_0(\lambda_k R)\right] dr = 0, \quad k \neq n$$

$$\int_0^R r\left[J_0(\lambda_k r) - J_0(\lambda_k R)\right] dr = 0, \tag{1}$$

Действительно, проведя интегрирование по частям получим

$$\int_0^R r J_0(\lambda_k r)\left[J_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n R)\right] dr = \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\int_0^R r J_1(\lambda_k r) J_1(\lambda_n r) dr \tag{2}$$

$$\int_0^R r\left[J_0(\lambda_k r) - J_0(\lambda_k R)\right] dr = \frac{\lambda_k}{2}\int_0^R r^2 J_1(\lambda_k r) dr = 0$$

откуда следует (1), поскольку функции $\{r, J_1(\lambda_k r)\}$ ортогональны с весом r

В частности из (2) следует ,что

$$\int_0^R r J_0(\lambda_k r)\left[J_0(\lambda_k r) - J_0(\lambda_k R)\right] dr = \int_0^R r J_1^2(\lambda_k r) dr$$

Система функций $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$ полна в $(k = 1, 2, \cdots)$ $L_2[0, R]$ т.е из

$$\int_0^R r\varphi(r) dr = 0, \quad \int_0^R r\varphi(r) J_0(\lambda_k r) dr = 0, \text{ где } \quad \varphi(r) \in L_2(0, R) \tag{3}$$

должно следовать, что $\varphi(r) = 0$ почти всюду.

Для этого сначала рассмотрим множество функций непрерывно дифференцируемых и обладающих свойством $\varphi(0) = \varphi(R) = 0$. Известно, что указанное множество функций плотно в $L_2[0, R]$.

Пусть в (3) $\varphi(r)$ принадлежит указанному множеству. Тогда интегрированием по частям из (3) получим

$$\int_0^R r^2 \varphi'(r) dr = 0, \quad \int_0^R r\varphi'(r) J_0(\lambda_k r) dr = 0$$

Из полноты системы функций $\{r, J_1(\lambda_k r)\}$ следует, что $\varphi'(r) = 0$, т.е. $\varphi(r) = 0$.

Это означает, что линейная оболочка, построенная на системе функций $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$ плотна в $L_2[0, R]$, т.е. при любом $\varepsilon \succ 0$

$$\int_0^R r\left(\varphi(r) - \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k J_0(\lambda_k r)\right)\right)^2 dr < \varepsilon,$$

где

$$\varphi(r) \in L_2[0, R]$$

Теперь пусть $\varphi(r)$ функция из $L_2[0, R]$ и пусть для нее имеет место (3). Тогда будем иметь

$$\int_0^R r\varphi^2(r)dr = \int_0^R r\varphi(r)\left(\varphi(r) - \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k J_0(\lambda_k r)\right)\right)dr < \varepsilon\sqrt{\int_0^R r\varphi^2(r)dr},$$

Отсюда следует , что

$$\int_0^R r\varphi^2(r)dr < \varepsilon^2$$

Поскольку ε может быть сколь угодно малым положительным числом, то отсюда следует, что $\varphi(r) = 0$ почти всюду.

Итак, полнота системы $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$, $(k = 1, 2 \cdots)$ доказана.

Литература

1. *Абрамян Б.Л.* Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. - Докл. АН АрмССР, 1958, т.26, №2.
2. *Улитко А.Ф.* Метод собственных вектор функций в пространственных задачах теории упругости. - Киев: Наукова думка, 1979.
3. *Гринченко В.Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. - Киев: Наукова думка, 1978.
4. *Баблоян А.А.,Мкртчян А.М.,Терзян С.А.* Осесимметричные контактные задачи для конечного цилиндра. Вторая Всесоюзная конференция по теории упругости. Тезисы докладов.Тбилиси, 1984.
5. *Макарян В.С.,Папоян С.О.* Об одной контактной задаче для упругого полупространства с полубесконечной цилиндрической выемкой. - Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1980, т.33, №1, с. 3-11.
6. *Рвачев В.Л., Проценко В.С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. - Киев: Наукова Думка, 1977.
7. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости.-М.: Гостехиздат, 1955.
8. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. ИЛ, ч.1, М., 1949.

Институт Механики НАН Армении

Поступила в редакцию
7.07.1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, N° 4, 1995 Механика

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С МАГНИТОГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Азатян Л.Д.

Ազատյան Լ. Դ.

Մագնիսագազադինամիկական հարվածային ալիքի հետ փոխազդող սալի օպտիմալ նախագծումը

Աշխատանքում դիտարկվում է սալի փոխազդեցությունը մագնիսագազադինամիկական հարվածային ալիքի հետ: Վերլուծվում է անփոփոխ քաշ ունեցող սալի կառուցվածքային եղանակի ազդեցությունը նրա մաքսիմալ ճզվածքների վրա:

Կատարված են թվային հաշվարկներ տարբեր դեպքերի համար, որից հետևում է, որ ամենալավ տարբերակը ոչսիմետրիկ երկշերտանոց սալն է:

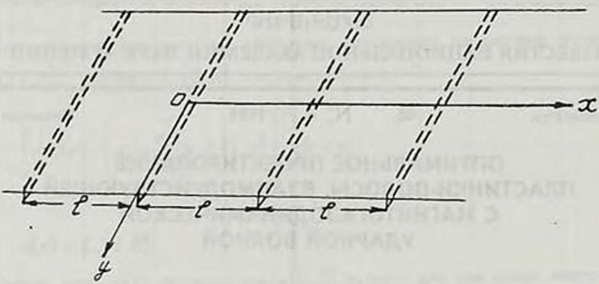
Թվային հաշվարկներից հետևում է նաև, որ մագնիսական դաշտը բնութագրող պարամետրի աճման դեպքում սալի ճզվածքները փոքրանում են: Այն է՝ մագնիսական դաշտը թուլանում է հարվածային ալիքի ազդեցությունը սալի վրա:

Azatian L.D.

Optimal design of stripe-plate, interacted with magnetogasodinamic snock wave

В работе решается задача о взаимодействии пластинки-полосы с магнитогазодинамической ударной волной. Анализируется организация пакета платинки-полосы неизменного веса на ее максимальные прогибы. Проведены численные исследования для различных случаев, из которых следует, что вариант несимметричной двухслойной пластинки является наилучшим. Из числеых расчетов следует, что с ростомпараметра, характеризующего магнитное поле, прогибы пластинки уменьшаются, т,е. магнитное поле ослабляет воздействие ударной волны на пластинку-полосу.

Пусть упругая слоистая пластинка-полоса толщины h и шириной l находится в постоянном магнитном поле с вектором индукции $\overline{B}_0(0, B_0, 0)$, параллельным оси Oy. Предполагается, что пластинка-полоса является одной из составляющих бесконечного перекрытия. Считается, что все пластинки-полосы, входящие в состав перекрытия, одинаковы по своим геометрическим и физико-механическим характеристикам и независимо друг от друга шарнирно закреплены на продольные жесткие ребра,расположенные с интервалом l в направленни оси Oy (фиг. 1). Впервые решение задачи для бесконечного перекрытия с опорами одного направления в обычной газодинамике было получено Димажио [1].



Фиг. 1

Плазма, в которой распространяется магнитногазодинамическая ударная волна, предполагается невязкой, нетеплопроводной и обладающей бесконечной электропроводностью.

Пусть магнитногазодинамическая ударная волна движется со скоростью v_0 и в момент $t = 0$ сталкивается с поверхностью пластинки. Направление движения ударной волны совпадает с отрицательным направлением оси Oz. Индексом 0 обозначим параметры покоящегося газа впереди ударной волны, индекс 1 будем приписывать давлению P, плотности ρ, скорости частиц газа v, магнитному полю $\overline{B}$ и скорости звука c за фронтом падающей волны. Определим течение за падающей магнитногазодинамической ударной волной. Параметры потока за падающим скачком определяются из соотношений для прямого скачка уплотнения [2]

$$\begin{gathered}
\rho_0(v_0-U_0)=\rho_1(v_1-U_0),\\
P_0+\rho_0(v_0-U_0)^2+\frac{B_0^2}{8\pi}=P_1+\rho_1(v_1-U_0)^2+\frac{B_1^2}{8\pi}\\
\frac{(v_0-U_0)^2}{2}+\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{P_0}{\rho_0}+\frac{B_0^2}{4\pi\rho_0}=\frac{(v_1-U_0)^2}{2}+\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{P_1}{\rho_1}+\frac{B_1^2}{4\pi\rho_1}\\
(v_0-U_0)B_0=(v_1-U_0)B_1,
\end{gathered}\tag{1}$$

где γ-показатель адиабаты, равный c_p/c_v; c_p, c_v- удельные теплоемкости газа при постоянном давлении и об'еме; $c_p = c_v + R$; R- газовая постоянная. При наличии n степеней свободы

$$c_v=\frac{2n+1}{2}R$$

Тогда для одноатомных газов $n=1, \gamma=5/3$, для двухатомных газов

$n = 2$, $\gamma = 7/$.

Исключая из (1) P_1, ρ_1, B_1, получим следующее кубичное уравнение для определения скорости v_1 частиц плазмы за падающим скачком

$$\mathrm{v}_1^3 + \frac{2\gamma P_0 + \gamma a_0^2 \rho_0 - (\gamma+3)\rho_0 U_0^2}{(\gamma+1)\rho_0 U_0} - \frac{2\left(\gamma P_0 + a_0^2\rho_0 - \rho_0 U_0^2\right)}{(\gamma+1)\rho_0}\mathrm{v}_1 -$$
$$- \frac{2(\gamma-1)a_0^2 U_0}{(\gamma+1)} = 0 \qquad (2)$$

где $a_0^2 = B_0^2 / 4\pi\rho_0$.

Уравнение (2) имеет три вещественных корня, из которых физически осуществимо одно значение корня, равное при $a_0 = 0$ скорости частиц газа за падающим скачком в обычной газодинамике

$$\mathrm{v}_1' = \frac{2\left(M^2-1\right)}{(\gamma+1)M^2}U_0.$$

Здесь $M = U_0 / c_0$ - число Маха падающего скачка. Два других корня отбрасываются, так как значению корня, большего значения ${}_0$, соответствует за падающим скачком течение со скоростью, превышающей скорость падающей ударной волны, что нереально; корню же, близкому к нулю, соответствует бесконечно слабая, вырожденная ударная волна, мы же рассматриваем ударную волну конечной интенсивности. После определения v_1, из соотношений (1) можно найти значения остальных параметров за падающим скачком

$$\rho_1 = -\frac{\rho_0 U_0}{\left(\mathrm{v}_1 - U_0\right)}, \qquad B_1 = -\frac{U_0 B_0}{\left(\mathrm{v}_1 - U_0\right)}$$
$$P_1 = P_0 + \rho_0 U_0 \mathrm{v}_1 + \frac{B_0^2 \mathrm{v}_1\left(\nu_1 - 2U_0\right)}{8\pi\left(\nu_1 - U_0\right)^2}, \qquad c_1 = \left(\frac{\gamma P_1}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

Теперь мы должны определить параметры течения плазмы за магнитогазо-динамической ударной волной после ее отражения от упругой пластинки-полосы. Им припишем индекс 2.

Как известно, распространение слабых ударных волн описывается линеаризированными уравнениями магнитной газодинамики. Для описания же более интенсивных ударных волн следует привлечь нелинейные уравнения магнитной газодинамики, которые должны решаться совместно с уравнением магнитоупругости для пластинки-полосы. Решение задачи при этом сильно усложняется. Поэтому для ее упрощения параметры плазмы за отраженной магнитогазодинамической ударной волной представляем в виде

$$P_2 = P_2' + P, \quad \rho_2 = \rho_2' + \rho, \quad \overline{B}_2 = \overline{B}_2' + b, \quad c_2 = c_2' + c$$
$$\overline{v}_2 = \overline{v}(v_x, v_y) \tag{4}$$

где $P_2', \rho_2', \overline{B}_2', c_2'$ - давление, плотность, магнитная индукция, скорость звука за отраженной магнитогазодинамической ударной волной в случае ее взаимодействия с жесткой пластинкой. Эти параметры также определяются из соотношений для прямого скачка уплотнения (1), записанных для параметров с индексами 1 и 2'.

$$\rho_2' = \frac{(v_1 + V_0)}{V_0}\rho_1, \quad \overline{B}_2' = \frac{(v_1 + V_0)}{V_0}\overline{B}_1,$$
$$P_2' = P_1 + \rho_1 v_1 (v_1 + V_0) - \frac{B_1^2 v_1 (v_1 + 2V_0)}{8\pi V_0^2}, \quad c_2' = (\gamma P_2 / \rho_2)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

Здесь V_0 - скорость отраженной от жесткой пластинки ударной волны,определяемая из кубичного уравнения

$${}_0^3 - \frac{(\gamma - 3) v_1}{2} V_0^2 - \left[\frac{(\gamma - 1)}{2} v_1^2 + \frac{\gamma P_1}{\rho_1} + a_1^2\right] V_0 - \frac{(2 - \gamma)}{2} a_1^2 v_1 = 0 \tag{6}$$

где $a_1^2 = B_1^2 / 4\pi\rho_1$

По тем же соображениям, что и выше, берется тот корень уравнения (6), который близок к значению

$${}_0' = \frac{2(\gamma - 1) M^2 - (\gamma - 3)}{(\gamma + 1) M^2} U_0$$

дающему скорость отраженного скачка в обычной газодинамике.

После подстановки (4) в оснавную систему уравнений магнитной газодинамики [3]

$$\frac{\partial \overline{B}_2}{\partial t} = (\overline{B}_2 \nabla)\overline{v} - (\overline{v}\nabla)\overline{B}_2 - \overline{B}_2(\nabla \overline{v}), \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{v}\nabla\right)\rho_2 + \rho_2 \nabla \overline{v} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t} + \overline{v}\nabla\Big)\rho_2 + \rho_2 \nabla \overline{v} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t} + \overline{v}\nabla\Big)\overline{v} + \frac{1}{\rho_2}\nabla P_2 - \frac{1}{4\pi\rho_2\mu}(\nabla \times \overline{B}_2) \times \overline{B} = 0 \tag{7}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} + \overline{v}\nabla\Big)P_2 = c_1^2\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{v}\nabla\right)\rho_2$$

и линеаризации, получим·

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial b_y}{\partial t} = -B_2'\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \\
&\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2'}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{B_2'}{4\pi\rho_2'\mu}\frac{\partial b_y}{\partial x} \\
&\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2'}\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{B_2'}{4\pi\rho_2'\mu}\frac{\partial b_y}{\partial z} \\
&\frac{\partial P}{\partial t} + \rho_2'\left(c_2'\right)^2\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

В дальнейшем магнитная проницаемость газа принимается равной единице. Рассматриваемая задача сводится к совместному решению системы уравнений (8) и уравнения движения несимметрично собранной по толщине пластинки-полосы,проводимость которой принимается равной нулю $(\sigma = 0)$.

$$
\left(D_{11} - \frac{K_{11}^{\ 2}}{C_{11}}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z \qquad (9)
$$

Здесь w - прогиб, $m_0 = \sum_{s=1}^{n}\rho_s h_s$ - масса пластинки, приходящаяся на единицу площади срединной поверхности; ρ_s, h_s - плотность материала и толщина s-ого слоя; D_{11}, K_{11}, C_{11} - жесткости, определяющиеся по известным формулам [4]

$$
\begin{aligned}
&C_{ik} = \sum_s B_{ik}^s\left(\delta_s - \delta_{s-1}\right) \\
&K_{ik} = \frac{1}{2}\sum_s B_{ik}^s\left[\left(\delta_s - \Delta\right)^2 - \left(\delta_{s-1} - \Delta\right)^2\right] \\
&D_{ik} = \frac{1}{3}\sum_s B_{ik}^s\left[\left(\delta_s - \Delta\right)^3 - \left(\delta_{s-1} - \Delta\right)^3\right]
\end{aligned}
$$

Z - нормальная составляющая внешней поверхностной нагрузки, которая имеет вид

$$
Z = P_2' + P + T_{zz} \qquad (10)
$$

В формуле (10) P - возмущенное давление в газе, T_{zz} - напряжения Максвелла в газе. Влиянием напряжений Максвелла в вакууме пренебргается. Линеаризованные уравнения электродинамики для вакуума (внутри пластинки) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\bar{b} = 0, \quad \operatorname{rot}\bar{e} = -\frac{\partial\bar{b}}{\partial t} \\
&\operatorname{div}\bar{b} = 0, \quad \operatorname{div}\bar{e} = 0
\end{aligned}
$$

Уравнения (8) и (9) дополняются условием совместного движения пластинки-полосы и прилегающих к ней частиц газа и условием затухания возмущений на бесконечности.

Введем функцию

$$\bar{v} = \operatorname{grad} \varphi(t, x, z) \tag{11}$$

Исключая из (8) P, b_y и используя (11), для функции φ получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{(c_2')^2 + \tilde{a}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{12}$$

где $\tilde{a}^2 = (B_2')^2 / 4\pi\rho_2'$.

Из второго и третьего уравнений системы (8) можно получить

$$P + \rho_2' \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{B_2'}{4\pi} b_y = 0 \tag{13}$$

а из первого и четвертого уравнений системы (8) можно получить связь между P и b_y

$$P = \frac{\rho_2' (c_2')^2}{B_2'} b_y \tag{14}$$

Из соотношений (13) и (14) получается

$$P = -\frac{\rho_2'}{(1 + a^2)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{15}$$

где $a^2 = (B_2')^2 / 4\pi\rho_2'(c_2')^2 = \tilde{a}^2 / (c_2')^2$, то есть в результате решения уравнения (12) и определения функции φ, можно по формуле (15) определить избыточное давление, действующее на пластинку. Уравнение (12) решается при следующих начальных и граничных условиях

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0$$

$$\varphi = 0 \qquad \text{при} \quad z \to \infty \tag{16}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{при} \quad z = 0$$

Так как предполагается, что пластинка шарнирно закреплена по сторонам $x = 0, l$, то решение уравнений (9) и (12) будем искать в виде

$$w(t,x)=\sum_n w_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$
$$\varphi(t,x,z)=\sum_n \varphi_n(t,z)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{17}$$

Здесь функции $w_n(t)$ и $\varphi_n(t,z)$ являются неизвестными и подлежат определению. После подстановки решения в виде (17) уравнение (12) принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial z^2}-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\varphi_n=\frac{1}{(c_2')^2+\bar{a}^2}\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial t^2} \tag{18}$$

Применяя к (18) интегральное преобразование Лапласа по времени [5], с учетом первого условия из (16), в области изображений получим

$$\frac{\partial^2\overline{\varphi}_n}{\partial z^2}-\left(k^2+\frac{s^2}{(c_2')^2+\tilde{a}^2}\right)\overline{\varphi}_n=0 \tag{19}$$

где $k^2=n^2\pi^2/l^2$, s - комплексная переменная. Последнее условие из (16) с учетом (17), после преобразования Лапласа принимает вид

$$\frac{\partial\overline{\varphi}_n}{\partial z}=-s\overline{w}_n \tag{20}$$

В (19) и (20) чертой обозначены преобразованные по Лапласу функции. Решение уравнения (19), удовлетворяющее условиям (20) и (16), записывается следующим образом:

$$\overline{\varphi}_n=\frac{e^{-\sqrt{k^2+\frac{s^2}{(c_2')^2+\tilde{a}^2}}\,z}}{\sqrt{k^2+\frac{s^2}{(c_2')^2+\tilde{a}^2}}}s\overline{w}_n \tag{21}$$

Переходя к оригиналам с помощью теоремы о свертке функций [4], для возмущенного давления P, сЪгласно (15), получим

$$P=-\frac{c_2'\rho_2'}{\sqrt{1+a^2}}\sum_n\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\partial w_n}{\partial t}J_0\left[k_1(t-\tau_1)\right]d\tau_1\right\}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{22}$$

где $k_1^2=k^2\left[\tilde{a}^2+(c_2')^2\right]$, J_0 - функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Для нахождения величины T_{zz}, входящей в правую часть уравнения движения пластинки-полосы, надо найти компоненту b_y индуцированного в газе магнитного поля в направлении оси Oy. Определяя b_y по формуле (14) с учетом (22), подставляя в (10), окончательно для нагрузки Z, действующей на пластинку, получим

$$Z=\sum_n\left\{P'_{2n}-c'_2\rho'_2\sqrt{1+a^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\partial w_n}{\partial t}J_0\left[k_1\left(t-\tau_1\right)\right]d\tau_1\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}\qquad(23)$$

Здесь использовано разложение

$$P'_2=\sum_n P'_{2n}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

После определения поверхностной нагрузки переходим к решению уравнения (9). Подставляя (17) в (9), с учетом (23), получаем следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\left(D_{11}-\frac{K_{11}^2}{C_{11}}\right)\frac{n^4\pi^4}{l^4}w_n+m_0\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2}=P'_{2n}-c'_2\rho'_2\sqrt{1+a^2}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\partial w_n}{\partial t}J_0\left[k_1\left(t-\tau_1\right)\right]d\tau_1\qquad(24)$$

Если формулу для давления, получаемого на основании гипотезы плоского отражения в гидроупругости, обобщить на случай магнитоупругости [6], то формула (23) упростится и примет вид

$$Z=\sum_n\left\{P'_{2n}-c'_2\rho'_2\sqrt{1+a^2}\,\frac{\partial w_n}{\partial t}\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}\qquad(25)$$

С использованием (25) уравнение (24) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для w_n

$$m_0\frac{d^2w_n}{dt^2}+c'_2\rho'_2\sqrt{1+a^2}\,\frac{dw_n}{dt}+\left(D_{11}-\frac{K_{11}^2}{C_{11}}\right)\frac{n^4\pi^4}{l^4}w_n=P'_{2n}$$

решение которого записывается в аналитической форме [7]

$$w(t,x)=\frac{4P'_2}{\pi m_0}e^{-\beta t}\sum_n(-1)^{\left(\frac{n+1}{2}-1\right)}\times$$
$$\times\frac{\omega_1 e^{\beta t}-\omega_1\cos\omega_1 t-\beta\sin\omega_1 t}{n\omega_1\left(\omega_1^2+\beta^2\right)}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

при $\omega_0^2-\beta^2>0$ (26)

$$w(t,x)=\frac{4P'_2}{\pi m_0}e^{-\beta t}\sum_n(-1)^{\left(\frac{n+1}{2}-1\right)}\times$$
$$\times\frac{\omega_2\operatorname{ch}\omega_2 t-\omega_2 e^{\beta t}+\beta\operatorname{sh}\omega_2 t}{n\omega_2\left(\omega_2^2-\beta^2\right)}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

при $\omega_0^2 - \beta^2 < 0$

Здесь $\beta = \rho_2' c_2' \sqrt{1+a^2} / m_0$, $\omega_0^2 = \left(D_{11} - \frac{K_{11}^2}{C_{11}} \right) \frac{n^4 \pi^4}{l^4 m_0}$, $\omega_1 = \left(\omega_0^2 - \beta^2 \right)^{\frac{1}{2}}$,

$\omega_2 = i\omega_1$

Далее ставится оптимизационная задача: найти

$$\min_{\bar{h}_s} \max_{t,x} w\left(t, x, \bar{h}_1\right)$$

при ограничениях

$$0 \le \bar{h}_s = h_s / h \le 1, \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0,$$

то есть анализируется влияние способа организации пакета пластинки-полосы неизменного веса на ее максимальные прогибы. Проведены численные исследования для трех случаев: 1) двухслойная полоса состоит из слоев композиционного материала типа боропластика и пластмассы; 2) полоса состоит из трех слоев, симметрично расположенных относительно срединной плоскости. Средний слой изготовлен из пластмассы, два наружных слоя - из композиционного материала; 3) средний слой полосы изготовлен из композиционного материала, а два наружных слоя - из пластмассы.

В качестве внешней среды выбран воздух $\left(\rho_0 = 1{,}225 кг/м^3,\ c_0 = 334 м/сек \right)$.

Численные расчеты проведены при следующих значениях параметров: $\lambda = h/l = 0{,}05$; $M = 1{,}5$; $a = 0$; $0{,}01$; $0{,}05$; $0{,}1$; $0{,}5$; 1. Оптимальные значения пригибов w и соответствующие им величины безразмерных толщин слоев для различных значений параметра a приведены в таблице

Таблица

I вариант						
a	0	0.01	0.05	0.1	0.5	1
$\bar{h}_1$	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
$\bar{w}$	0.34798	0.34754	0.34592	0.33961	0.21064	0.08213
2 вариант						
a	0	0.01	0.05	0.1	0.5	1
$\bar{h}_1$	1	1	1	1	1	1
$\bar{w}$	0.51904	0.51871	0.51594	0.50652	0.31451	0.12273
a	0	0.01	0.05	0.1	0.5	1
$\bar{h}_1$	1	1	1	1	1	1
$\bar{w}$	0.51904	0.51871	0.50594	0.51652	0.31451	0.12273

Здесь $\bar{h}_1 = h_1 / h$, $\bar{w} = w / h$; h_1 - толщина слоя из композиционного материала.

Из таблицы следует, что вариант несимметричной двухслойной пластинки является наилучшим. Как показывают численные расчеты, прогибы $\overline{w}$ получаются минимальными в случае, когда толщина h слоя из композиционного материала равна $0{,}7h$. Как показывают результаты численного анализа, для случая рассмотренных конкретных материалов оптимальные проекты для второго и третьего вариантов организации пакета пластинки-полосы по толщине совпадают и вырождаются в однослойный, целиком изготовленный из композиционного материала.

При ограничении количества композиционного материала оптимальными могут быть варианты пластинок слоистой структуры.

Как следует из таблицы, прогибы пластинки-полосы уменьшаются с ростом параметра a, характеризующего магнитное поле, то есть магнитное поле уменьшает прогибы пластинки. Этот эффект может быть использован практически для ослабления воздействия ударной волны на об'екты, находящиеся в электропроводящей жидкости (газе) при наличии магнитного поля.

Расчеты проведены на основе точной модели (уравнение (24)) и приближенной (формулы (26)). Результаты, полученные для обоих случаев, практически совпадают.

Автор выражает признательность М.В. Белубекяну за внимание к работе.

Литература

1. *Dimuggio F.L.* Effect of an Acoustic Medium on the Dynamic Buckling of Plates, New-York, Journal of Applied Mechanics, 1956, vol. 23, No.2
2. *Калихман. Л.Е.* Элементы магнитной газодинамики.- М.: Атомиздат,1964.
3. *Jeffrey A., Tanyiti T.,* Non-Linear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics. New-York, London, 1964.
4. *С.А.Амбарцумян.* Общая теория анизотропных оболочек. - М.: Наука, 1974.
5. Дер Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. - М.: Наука, 1965.
6. *Амбарцумян С.А., Багдасарян Р.Е., Белубекян М.В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.- М.: Наука, 1977.
7. *Азатян Л.Д., Аветисян Дж.К.* Оптимизация прочности слоистой ортотропной пластинки при воздействии акустической волны давления - Изв. АН Арм.ССР; Механика, 1984, Т.37, №3, 42-49.

Институт механики НАН Армении.

Поступила в редакцию
18.01.1994

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, N° 4, 1995 Механика

ПРОНИКАНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ИНДЕНТОРА (ФОРМЫ КРИВОЛИНЕЙНОГО ТЕЛА, ПЕРЕХОДЯЩЕГО В ЦИЛИНДР) В УПРУГУЮ ИЗОТРОПНУЮ СРЕДУ

Ванцян А.А

Վանցյան Ա.Ա.

Գլանի վերածվող կամայական կորագիծ մարմնի ներթափանցումը իզոտրոպ միջավայր

Բերված են թվային հետազոտությունների արդյունքները:Ցույց է տրված, որ ի տարբերություն միաչափ խնդրի , արագությունների եւ տեղափոխությունների առանցքային կոմպոնենտի հաշվի առնելը բերում է նշանափոխ լարումների ինչպես պլաստիկության տիրույթում, այնպես էլ մարմնի վրա:

Vantcyan A.A.

The Penetration Arbitrary Indentors (in the Form Curveline Body Passing to the Cylinder) in Elastic Isotropic Media

Приведены результаты численного исследования. Показано, что в отличие от одномерной задачи, учет осевых компонент скоростей и перемещений приводит к знакопеременным напряжениям как в пластической области, так и на инденторе.

Одномерная теория проникания, как было показано в [1-4] ,пригодна для тонких инденторов. Однако, для нетонких инденторов общепринято предполагать, что частицы среды, прилегающие к индентору, двигаются не по радиальному направлению, как было принято по гипотезе плоских сечений, а по нормали образующей индентора. Во многих работах [3,5,6] это доказано экспериментально.

Несмотря на то, что для нетонких инденторов, гипотеза нормальных сечений дает относительно хорошие результаты по совпаданию с экспериментальными результатами, эта гипотеза также содержит приближение в решении задачи проникания. В частности, здесь также не учитывается влияние свободной поверхности, предполагается, что между индентором и средой имеет место ньютоновское трение.

В настоящй работе рассматривается проникание цилиндра, переходящего в криволинейное тело с уравнением образующей

$$r_k = r_0 - \beta(\zeta-\eta)^{\nu}, \qquad \eta = f - x \tag{1}$$

где r_0 - радиус цилиндрической части индентора, β -- угол при вершине конуса и является не малым, $\nu > 1$ определяет кривизну образующей.

Предполагается также, чго вблизи индентора, позади фронта S имеет место пластическое течение, описываемое уравнениями Мизеса, впереди S среда считается упругой. Согласно гипотезе нормальных сечений на инденторе для компонент скоростей имеет место

$$v_r = v_n \sin\alpha, \quad v_x = v_n \cos\alpha, \quad \mathrm{tg}\alpha = -\left(\frac{\partial r_k}{\partial x}\right)^{-1} \tag{2}$$

На фронте S предполагается непрерывность всех компонент скоростей и напряжений.

Учитыыя (1) и (2), можно записать

$$v_r = v_x \frac{(\zeta - f + x)^{1-\nu}}{\beta\nu} \tag{3}$$

С учетом (3) уравнение несжимаемости

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

можно написать в виде

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \beta\nu(\zeta - f + x)^{\nu-1}\frac{\partial v_r}{\partial x} + \beta\nu(\nu-1)(\zeta - f + x)^{\nu-2} v_r = 0 \tag{4}$$

используя метод характеристик и записав уравнение (4) в форме

$$\frac{dr}{1} = \frac{dx}{\beta\nu(\zeta - f + x)^{\nu-1}} = -\frac{d v_r}{v_r\left[\frac{1}{r} + \beta\nu(\nu-1)(\zeta - f + x)^{\nu-2}\right]} \tag{5}$$

из первого уравнения можно определить

$$r = \frac{(\zeta - f + x)^{2-\nu}}{\beta\nu(2-\nu)} + c_1 \tag{6}$$

Из второго уравнения

$$\frac{d v_r}{v_r} = -\frac{dx}{r\beta\nu(\zeta - f + x)^{\nu-1}} + \frac{1-\nu}{(\zeta - f + x)}dx \tag{7}$$

Подставляя (6) в (7), для v_r можно получить

$$v_r = \frac{(\zeta - f + x)^{1-\nu}}{\dfrac{(\zeta - f + x)^{2-\nu}}{\beta\nu(2-\nu)} + c_1} c_2(c_1) \tag{8}$$

С учетом граничного условия при $r = r_k$

$$v_r = -v\frac{\partial r_k}{\partial x} \quad \text{или} \quad v_r = v\beta\nu(\zeta - f + x)^{\nu-1}$$

где v-осевая скорость индентора.

Приравняв (8) и (9)

$$\frac{(\zeta - f + x')^{1-\nu}}{\dfrac{(\zeta - f + x')^{2-\nu}}{\beta\nu(2-\nu)} + c_1} c_2(c_1) = \frac{v\beta\nu}{\left(\dfrac{\partial r_k}{\partial x}\right)^2 + 1}(\zeta - f + x')^{\nu-1} \tag{9}$$

и учитывая,что при $r = r_k$ из (6) можно получить

$$c_1 = r_0 - \beta(\zeta - f + x')^{\nu} - \frac{(\zeta - f + x')^{2-\nu}}{\beta\nu(2-\nu)} \tag{10}$$

или

$$c_1 = r_0 - \beta z^{\nu} - \frac{z^{2-\nu}}{\beta\nu(2-\nu)} \tag{11}$$

для c_2 можно получить выражение

$$c_2 = v\beta\nu z^{2\nu-2}(r_0 - \beta z^{\nu})$$

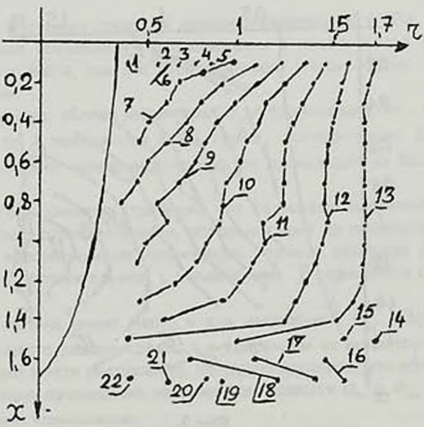
где введено обозначение $z = \zeta - f + x'$; x'- абсцисса на конусе.

Подставляя c_2 в (8), а (11) в (6), для определения v_r можно получить систему уравнений

$$v_r = \frac{(\zeta - f + x)^{1-\nu}}{r} v\beta\nu z^{2\nu-2}(r_0 - \beta z^{\nu}) \tag{12}$$

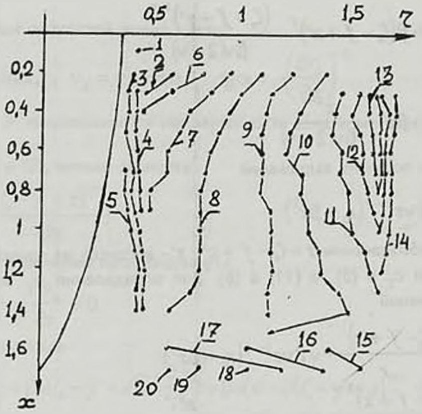
$$r = \frac{(\zeta - f + x)^{2-\nu}}{\beta\nu(2-\nu)} = r_0 - \beta z^{\nu} - \frac{z^{2-\nu}}{\beta\nu(2-\nu)}$$

Записав соотношения Мизеса и уравнения равновесия и после численного интегрирования, с учетом (12), можно получить численные значения $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$, как в пластической области,так и на инденторе.

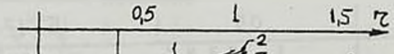


Фиг. 1.

Изобары 1 ÷ 22 для σ_{rr} при $\beta = 0{,}2$
(-1,4; –1,2; –1,–1,2; -1,4; -1,4; -1,2; -1; -0,8; -0,6; -0,4; -0,2; -0,1; 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1; 1,2; 1,4;)



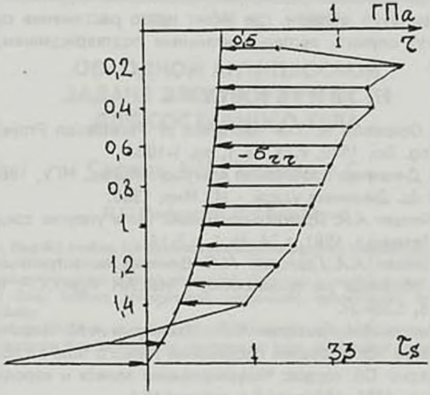
Фиг.2.
Изобары 1÷20 для σ_{xx} при $\beta = 0{,}2$
(-0,6; -1,2; -0,2; -0,8; 0,2; -1; -0,8; -0,6; -0,4;
-0,2; 0; 0,1; 0,2; 0; 2; 4; 6; 8; 10; 12).



Фиг.3.
Изобары 1÷20 для $\sigma_{\theta\theta}$ при $\beta = 0{,}5$
(-0,2; -0,4; -1; -1; -0,8; -0,6; -0,4; -0,2; 0; 0,2;
0,2; 0,4; 0,6; 0,4; 0,2; 4; 6; 8;-1,2; -1,2).

На фиг. 1–3 приведены результаты численного решения задачи. Построены графики поверхностей одинаковых напряжений для $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{xx}$ в ГПа для разных β.

На фиг. 4 приведены результаты расчетов для σ_{rr} на индентора. Здесь приведены результаты только для случая $\beta = 0{,}2$.



Фиг.4.

Радиальные напряжение на инденторе при $\beta = 0{,}2$.

В скобках под фигурами показаны значения напряжений в ГПа .

Анализ графиков показывает,что напряжения в пластической области не всюду одинакового знака, как это было получено аналитически, в [2,4] для одномерной задачи.

Как видно из фигур, вблизи индентора σ_{rr} – сжимающее, но с удалением как по r, так и по x появляются зоны, где σ_{rr} положительно. Для острых инденторов в отличие от тупых инденторов, это происходит на большом расстотоянии.

На первый взгляд кажется странным, что кольцевые напряжения вблизи индентора оказались отрицательными, которые также на некотором расстоянии переходят в положительные напряжения. Граница перехода отрицательных напряжений в положительние, с увеличением β, удаляется от индентора.

Аналогичная картина имеет место и для напряжений σ_{xx}. Здесь вблизи индентора имеет место сжатие среды, а с удалением от индентора в некоторых областях имеет место растяжение. Нетрудно заметить, что вблизи индентора препятствующие прониканию напряжения являются σ_{rr} и σ_{xx}, а $\sigma_{\theta\theta}$ как--будто способствует прониканию.

С удалением от индентора, наоборот, σ_{rr} и σ_{xx}, меняя знак, способствуют, а $\sigma_{\theta\theta}$, принимающее уже положительный знак, препятствует движению как индентора, так и самой среды вблизи индентора.

Изучение графиков напряжений на инденторе также показывает, что и здесь напряжения меняют знак. Вблизи вершины индентора как σ_{rr}, так и σ_{xx}, имеют положительный знак, то есть среда растягивается как в направлении r, так и по x. Этими напряжениями вполне можно объяснить появление трещин в среде вблизи вершины индентора.

В [7], где экспериментально рассмотрено проникание индентора в грунты, показано, что существуют области, где имеет место растяжение среды. Результаты [7] могут служить экспериментальным подтверждением выводов настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Backman M.E., Goldsmith W.* The Mechanics of Penetration Projectiles into Targets.-Int. J.Eng. Sci. 1978, v.16, № 1, pp. 1-100.
2. *Сагомонян А.Я.* Динамика пробивания преград-. М.:Изд. МГУ, 1988. 220 с.
3. *Зукас Дж. А. и др.* Динамика удара. - М.: Мир, 1985.
4. *Багдоев А.Г., Ванцян А.А.* Проникание тонких тел в упругие среды.-- Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1981, т.34, № 1, с.3-14.
5. *Багдоев А.Г.,Ванцян А.А.,Григорян М.С.* Влияние анизотропных свойств металлических образцов на проникание. - Изв.АН Арм.ССР, Механика, 1988, т. 41, № 6, с.28--34.
6. *Багдоев А.Г.,Ванцян А.А.,Григорян М.С., Мхитарян А.М.* Теоретические и экспериментальные исследования проникания тонкого тела в слоистые металлические среды.- Сб. трудов: Моделирование полета и аэродинамические исследования, 1988, 156 с.
7. *Byers R.K., Yarrington P.Y.* and Chabai Dynamic Penetration of Soil Media by Slender Projectiles. - Int.J. Eng. Sci. Pergamon press, 1978, v.16, N 11, pp. 835--844.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
26.05.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 4, 1995 Механика

ОБ ОДНОЙ АНТИПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОГО ТЕЛА

Саргсян А.М., Хачикян А.С.

Ա.Մ.Սարգսյան, Ա.Ս.Խաչիկյան

Բաղադրյալ մարմնի համար էլեկտրաառաձգականության մի հակահարթ խնդրի մասին

Էլեկտրաառաձգականության գծային տեսության դրվածքով ուսումնասիրված է կտոր առ կտոր համասեռ սեպի տեսք ունեցող ընդլայնական կտրվածքով պրիզմայաձև մարմնի լարվածային դեֆորմացիոն վիճակը:

Ցույց է տրված, որ էլեկտրական և մեխանիկական դաշտերի կապակցվածությունը ունի որակական ազդեցություն բաղադրյալ մարմնի միացման մակերևույթի եզրի շրջակայքում առաձգական լարումների վարքի վրա:

A.M.Sargsian, A.S.Khachikian

On the One Antiplane Problem of Electroelastirity for Compound Body

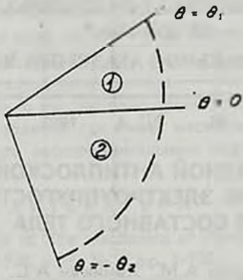
В постановке линейной теории электроупругости изучено напряженно-деформированное состояние призматического тела с поперечным сечением в виде кусочно-однородного клина. На гранях призматического тела заданы перемещения и электростатические потенциалы.

Показано, что связанность механических и электрических полей оказывает качественное влияние на поведение упругих напряжений в окрестности края поверхности контакта составного тела.

Поведение несвязанных стационарных физических полей (тепловых, электрических и магнитных, полей упругих напряжений при кручении и продольном сдвиге и т.д.) в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела изучено в работах [1,3].

В работе [4] определена особенность упругих напряжений вблизи угловой точки контура поперечного сечения, находящегося в условиях продольного сдвига однородного призматического тела из пьезокристалла класса 6 mm. Показано, что в этой электроупругой задаче напряжения вблизи угловой точки имеют тот же порядок особенности, что и в соответствующей упругой задаче.

С целью выяснения влияния эффекта связанности механических и электрических полей на поведение упругих напряжений в данной работе рассмотрена антиплоская задача электроупругости для составного призматического тела с поперечным сечением в виде кусочно-однородного клина, изготовленного из пьезокристаллов класса 6 mm гексагональной системы с различными электроупругими свойствами (фиг.1). Главная ось симметрии пьезокристалла (ось z) перпендикулярна к плоскости поперечного сечения призматического тела и проходит через вершину составного клина.



(Фиг.1)

В цилиндрической системе координат при отсутствии массовых сил решение антиплоской задачи электроупругости для составного призматического тела приводится к интегрированию дифференциальных уравнений [5,6]

$$\Delta u_j(r,\theta)=0, \quad \Delta\phi_j(r,\theta)=0 \tag{1}$$

со следующими граничными:

$$u_1(r,\theta_1)=f_1(r), \qquad u_2(r,-\theta_2)=f_2(r) \tag{2}$$

$$\phi_1(r,\theta_1)=\psi_1(r), \qquad \phi_2(r,-\theta_2)=\psi_2(r) \tag{3}$$

и идеальными электроупругими контактными условиями

$$u_1(r,0)=u_2(r,0), \qquad \phi_1(r,0)=\phi_2(r,0) \tag{4}$$

$$\frac{c_{44}^{(1)}}{r}\frac{\partial u_1(r,0)}{\partial\theta}+\frac{e_{15}^{(1)}}{r}\frac{\partial\phi_1(r,0)}{\partial\theta}=\frac{c_{44}^{(2)}}{r}\frac{\partial u_2(r,0)}{\partial\theta}+\frac{e_{15}^{(2)}}{r}\frac{\partial\phi_2(r,0)}{\partial\theta} \tag{5}$$

$$\frac{e_{15}^{(1)}}{r}\frac{\partial u_1(r,0)}{\partial\theta}-\frac{\varepsilon_1}{r}\frac{\partial\phi_1(r,0)}{\partial\theta}=\frac{e_{15}^{(2)}}{r}\frac{\partial u_2(r,0)}{\partial\theta}-\frac{\varepsilon_2}{r}\frac{\partial\phi_2(r,0)}{\partial\theta} \tag{6}$$

В уравнениях (1) и условиях (2)-(6) u_j - упругие перемещения, Φ_j - электростатические потенциалы, Δ - двумерный оператор Лапласа, $c_{44}^{(j)}, e_{15}^{(j)}, \varepsilon_j$ - модули упругости, пьезомодули и диэлектрические проницаемости, соответственно, $f_j(r)$ и $\psi_j(r)$ - заданные функции.

Контактные условия (5) и (6) получаются из уравнений состояния [5]

$$\tau_{\theta z}^{(j)}=c_{44}^{(j)}\gamma_{\theta z}^{(j)}-e_{15}^{(j)}E_{\theta j}, \qquad \tau_{rz}^{(j)}=c_{44}^{(j)}\gamma_{rz}-e_{15}^{(j)}E_{rj}$$

$$D_{\theta j}=e_{15}^{(j)}\gamma_{\theta z}^{(j)}+\varepsilon_j E_{\theta j}, \qquad D_{rj}=e_{15}^{(j)}\gamma_{rz}^{(j)}+\varepsilon_j E_{rj} \tag{7}$$

$$\gamma_{\theta z}^{(j)} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_j}{\partial \theta}, \quad \gamma_{rz}^{(j)} = \frac{\partial u_j}{\partial r}\, r \to \infty$$

$$E_{\theta j} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_j}{\partial \theta}, \quad E_{rj} = -\frac{\partial \Phi_j}{\partial r}$$

с учетом непрерывности $\tau_{\theta z}$ и D_θ на линии $\theta = 0$. Здесь $\tau_{\theta z}$ и τ_{rz} - компоненты упругих напряжений, $\gamma_{\theta z}$ и γ_{rz}- компоненты деформаций, E_θ и E_r - компоненты вектора напряженности электрического поля, D_θ и D_r - компоненты вектора электрической индукции.

К краевой задаче (1)-(6) применяется интегральное преобразование Мелина [7]

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(r) r^{p-1} dr, \qquad f(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \bar{f}(p) r^{-p} dp \tag{8}$$

Если на бесконечности ($r \to \infty$) функция $f(r)$ исчезает как $r^{-\delta}$ $(\delta > 0)$, а при $r \to 0$ остается ограниченной, то первый интеграл в (8) сходится при $0 < \operatorname{Re} p < \delta$, что и заключает в себе путь интегрирования L во второй формуле (8).

В результате применения преобразования Мелина к уравнениям (1) приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка, решения которых имеют вид

$$\bar{u}_j(p,\theta) = A_j \cos p\theta + B_j \sin p\theta \tag{9}$$

$$\Phi_j(p,\theta) = K_j \cos p\theta + D_j \sin p\theta \tag{10}$$

Удовлетворяя преобразованным гранично-контактным условиям, полученным из (2)-(6), после применения преобразования Мелина для неизвестных коэффициентов получим

$$A_1 = A_2, \qquad K_1 = K_2 \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\Delta(p) A_2 = \bar{f}_1(p)\left[(1+b_1)C_1 S_2 + (\varepsilon + e b_1) S_1 C_2\right] S_2 + \\ + \bar{f}_2(p)\left[(c + e b_1) C_1 S_2 + (c\varepsilon + e^2 b_1) S_1 C_2\right] S_1 - \\ - b_1 \varepsilon_1 \left(e_{15}^{(1)}\right)^{-1} (e - \varepsilon)\left[\bar{\psi}_1(p) C_2 - \bar{\psi}_2(p) C_1\right] S_1 S_2\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\Delta(p) K_2 = \left[\bar{f}_2(p) C_1 - \bar{f}_1(p) C_2\right](c - e)\varepsilon_1^{-1} S_1 S_2 + \\ + \bar{\psi}_1(p)\left[(1+b_1) C_1 S_2 + (c + e b_1) S_1 C_2\right] S_2 +\end{gathered}$$

$$+\overline{\psi}_2(p)\left[(\varepsilon+eb_1)C_1S_2+(c\varepsilon+e^2b_1)S_1C_2\right]S_1 \tag{13}$$

$$\Delta(p)B_j=\left[\bar{f}_1(p)C_2-\bar{f}_2(p)C_1\right]\left[(c_j+e_jb_1)C_1S_2+(c_j\varepsilon+ee_jb_1)S_1C_2\right]+$$

$$+(-1)^j(e-\varepsilon)\varepsilon_1\left(e_{15}^{(1)}\right)^{-1}\left[\overline{\psi}_2(p)C_1-\overline{\psi}_1(p)C_2\right]S_{3-j}C_j \tag{14}$$

$$\Delta(p)D_j=(c-e)e_{15}^{(1)}\varepsilon_1^{-1}\left[\bar{f}_1(p)C_2-\bar{f}_2(p)C_1\right]C_jS_{3-j}-$$

$$-\left[\overline{\psi}_2(p)C_1-\overline{\psi}_1(p)C_2\right]\left[(d_j+b_1e_j)C_1S_2+(cd_j+ee_jb_1)S_1C_2\right] \tag{15}$$

где

$$S_j=\sin p\theta_j,\quad C_j=\cos p\theta_j,\quad \varepsilon=\varepsilon_2/\varepsilon_1,\quad c=c_{44}^{(2)}/c_{44}^{(1)},\quad \theta_\pm=\theta_1\pm\theta_2$$

$$b_1=\frac{e_{15}^{(1)}e_{15}^{(1)}}{c_{44}^{(j)}\varepsilon_1},\quad e=\frac{e_{15}^{(2)}}{e_{15}^{(1)}},\quad d_j=\begin{cases}\varepsilon, & j=1\\ 1, & j=2\end{cases},\quad e_j=\begin{cases}e, & j=1\\ 1, & j=2\end{cases},\quad c_j=\begin{cases}c, & j=1\\ 1, & j=2\end{cases}$$

$$4\Delta(p)=\left[(c+1)\sin p\theta_+ +(c-1)\sin p\theta_-\right]\left[(\varepsilon+1)\sin p\theta_+ +(\varepsilon-1)\sin p\theta_-\right]+$$

$$+b_1\left[(e+1)\sin p\theta_+ +(e-1)\sin p\theta_-\right]^2 \tag{16}$$

С помощью уравнений состояния (7) и (8)-(16) для упругих напряжений $\tau_{\theta z}$ и τ_{rz} получим:

$$\tau_{\theta z}^{(j)}=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{F_{1j}(p,\theta)}{\Delta(p)}pr^{-p-1}dp$$

$$\tau_{rz}^{(j)}=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{F_{2j}(p,\theta)}{\Delta(p)}pr^{-p-1}dp \tag{17}$$

где

$$F_{1j}(p,\theta)=\left[c_{44}^{(j)}B_j'+e_{15}^{(j)}D_j'\right]\cos p\theta-\left[c_{44}^{(j)}A_j'+e_{15}^{(j)}K_j'\right]\sin p\theta$$

$$F_{2j}(p,\theta)=\left[c_{44}^{(j)}A_j'+e_{15}^{(j)}K_j'\right]\cos p\theta+\left[c_{44}^{(j)}B_j'+e_{15}^{(j)}D_j'\right]\sin p\theta$$

$$(A_j',B_j',K_j',D_j')=(A_j,B_j,K_j,D_j)\Delta(p)$$

Для исследования поведения напряжений $\tau_{\theta z}$ и τ_{rz} в окрестности угловой точки контура поперечного сечения составного призматического тела (при $r\to 0$) дополним прямую L влево некоторым полукругом и применим теорему о вычетах. Принимая, что полюсами подынтегральных функций в (17) являются только корни уравнения

$$\Delta(p) = 0 \tag{18}$$

(то есть окрестность угловой точки свободна от внешних воздействий) и что все они просты (в рассмотренных ниже примерах они, действительно, просты), будем иметь

$$\tau_{\theta z}^{(j)} = -\sum_{n=1}^{\infty} r^{p_n - 1} \frac{F_{1j}(-p_n, \theta)}{\Delta_1(p_n)} p_n \tag{19}$$

$$\tau_{rz}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{p_n - 1} \frac{F_{2j}(-p_n, \theta)}{\Delta_1(p_n)} p_n \tag{20}$$

Здесь $\Delta_1(p) = d\Delta(p)/dp$, $p_n(\operatorname{Re} p_n > 0)$ - корни уравнения (18). Уравнение (18) при конкретных значениях параметров $c, \varepsilon, e, b_1, \theta_1$ и θ_2 имеет бесконечное множество корней, которые могут быть пронумерованы по порядку возрастания их действительных частей.

На основании формул (19) и (20) заключаем, что около угловой точки контура поперечного сечения характер напряженного состояния определяется величиной действительной части $p_1 = \xi_1 + i\eta_1$. Если $\xi_1 > 1$, в малой окрестности угловой точки имеет место нулевое напряженное состояние. Если $\xi_1 < 1$, то при приближении к угловой точке напряжения неограниченно возрастают, при этом порядок особенности равен $|\xi_1 - 1|$. При $\xi_1 =$ напряжения около угловой точки конечны и вообще отличны от нуля (предельный случай).

Таким образом, в исследуемой электроупругой задаче определение характера напряженного состояния около угловой точки контура поперечного сечения составного призматического тела, находящегося в условиях продольного сдвига, приводится к нахождению имеющего наименьшую положительную действительную часть корня $p_1 = \xi_1 + i\eta_1$ трансцендентного уравнения (18).

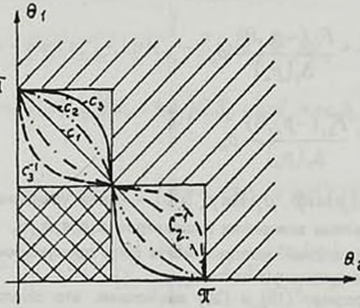
Не накладывая ограничения на электроупругие характеристики материалов, составляющих призматическое тело, рассмотрим один частный случай $\theta_1 = \theta_2$. Из уравнений (16) и (18) следует, что $p_1 = \pi / 2\theta_1$. Следовательно, независимо от электроупругих свойств материалов составного тела напряжения при приближении к угловой точке контура поперечного сечения убывают до нуля, если $2\theta_1 < \pi$. При $2\theta_1 > \pi$ в окрестности угловой точки имеет место явление сильной концентрации напряжений. $2\theta_1 = \pi$ соответствует предельному случаю.

Рассмотрим некоторые другие частные случаи:

1. $c = \varepsilon = e$. Из (16)-(18)) для определения p_n получим

$$\sin p(\theta_1 + \theta_2) + \frac{c-1}{c+1} \sin p(\theta_1 + \theta_2) = 0 \tag{21}$$

В работах [1-3] показано, что корни этого уравнения действительны и просты и что соответствующие различным значениям $c(c_3 > c_2 > c_1 = 1)$ предельные кривые ($p = 1$), разделяющие области в плоскости (θ_1, θ_2), где напряжения в окрестности угловой точки стремятся к нулю или бесконечности, имеют вид, приведенный на фиг. 2.



Фиг.2

Если точка, с координатами θ_1 и θ_2 и начало координат при данном значении c лежат на одной стороне предельной кривой, напряженное состояние в окрестности угловой точки будет нулевым. В противном случае имеет место сильная концентрация напряжений. Когда точка лежит на предельной кривой, в угловой точке напряжения будут конечными и отличными от нуля.

В области, заштрихованной на фиг.2 двойной штриховкой, в окрестности угловой точки имеет место нулевое напряженное состояние независимо от электроупругих свойств материалов, а в области, заштрихованной простой штриховкой - сильная концентрация напряжений.

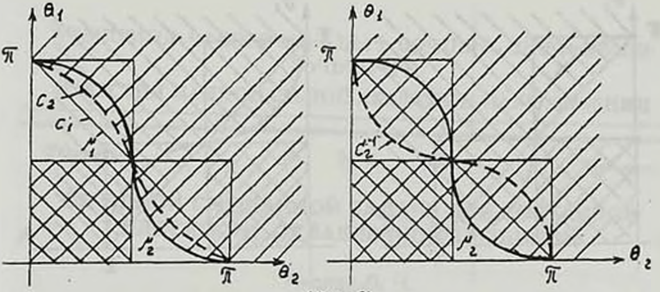
В случае $c =$ приходим к результатам, полученным в работе [4].

2. $c = e \neq \varepsilon$. В этом случае из (18) получим

$$\left(\sin p\theta_{+} + \frac{c-1}{c+1}\sin p\theta_{-}\right)\left(\sin p\theta_{+} + \frac{\mu-1}{\mu+1}\sin p\theta_{-}\right) = 0 \qquad (22)$$

где $\mu = (\varepsilon + cb_1)/(1+b_1)$.

Равенство нулю первого множителя левой части (22) приводит к уравнению (21), предельные кривые которого имеются на фиг. 2. Аналогичные кривые получаются также из условия равенства нулю второго множителя. Соответствующая предельная кривая является границей области, заштрихованной простой штриховкой на фиг.3а,3б. Если углы θ_1 и θ_2 лежат в области, заштрихованной на фиг.3а и 3б простой штриховкой, около угловой точки распределение напряжений имеет особенность. Аналогичная картина имеет место и в случае $\varepsilon = e \neq c$.



(Фиг. 3)

После несложных преобразований уравнение (18) можно привести к виду

$$Q_1 \sin^2 p\theta_+ + Q_2 \sin^2 p\theta_- + Q_3 \sin p\theta_+ \sin p\theta_- = 0$$

$$Q_1 = (c+1)(\varepsilon+1) + b_1(e+1)^2, \quad Q_2 = (c-1)(\varepsilon-1) + b_1(e-1)^2$$

$$Q_3 = (c+1)(\varepsilon-1) + (c-1)(\varepsilon+1) + 2b_1(e^2-1); \quad Q_1 > 0, \quad \begin{cases} (Q_2, Q_3) < 0 \\ (Q_2, Q_3) > 0 \end{cases} \tag{23}$$

Из представления (23) можно получить другие частные случаи.

3. $Q_3 = \pm 2\sqrt{Q_1 Q_2}$, $Q_2 > 0$. Из (17) и (23) следует

$$\sin p\theta_+ \pm \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} \sin p\theta_- = 0 \tag{24}$$

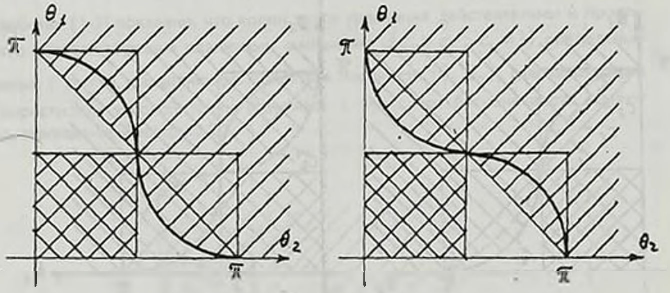
Легко показать, что корни уравнения (24) действительны и просты, если $Q_2 < Q_1$. Предельные кривые имеют вид, аналогичный кривым, представленным на фиг.2.

4. $Q_2 = 0$. Из уравнения (23) вытекает, что

$$\left(\sin p\theta_+ + \frac{Q_3}{Q_1} \sin p\theta_-\right) \sin p\theta_+ = 0 \tag{25}$$

Предельная кривая для $\sin p\theta_+ = 0$ представляет отрезок прямой $\theta_1 + \theta_2 = \pi$. Приравнивая нулю второй множитель, получаем уравнение, аналогичное (21), корни которого действительны и просты, если $|Q_3| < Q_1$. Таким образом, предельная кривая в случае $Q_2 = 0$, $|Q_3| < Q_1$ представляет собой границу области, заштрихованной простой штриховкой на фиг. 4а, 4б.

5. $Q_3 = 0$. В случае $Q_2 < 0$ из (23) будем иметь



фиг. 4

$$\left(\sin p\theta_{+} + \lambda \sin p\theta_{-}\right)\left(\sin p\theta_{+} - \lambda \sin p\theta_{-}\right) = 0 \qquad (26)$$

где $\lambda = \sqrt{|Q_2| / Q_1}$. Уравнение (26) аналогично уравнению (22). При условии $|Q_2| < Q_1$ предельные кривые и соответствующие области имеют приведенный на фиг. 3а и 3б вид. Для случая $|Q_2| < Q_1$ уравнения может иметь и комплексные корни.

Таким образом, эффект связанности электрических и механичеких полей оказывает качественное влияние на поведение характеристик обо- их полей в окрестности угловой точки контура. В рассмотренных частных случаях имеет место увеличение зоны концентрации характеристик полей.

Литература

1. *Чобонян К. С.* Напряжения в составных упругих телах.- Ереван: Изд-во АН Арм ССР, 1987. с.338.
2. *Саргсян А. М., Хачикян А. С.* Поведение некоторых физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела.- Докл. АН Арм ССР, 1988, № 4, с.161- 165.
3. *Аксентян О. К., Лущик О. Н.* Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина .- Изв. АН СССР, МТТ, 1978, №5, с.102-108.
4. *Галпчян П.В.* Определение связанных электромеханических полей в цилиндрическом секторе из пьезокристалла.- Изв.АН Арм.ССР, Механика, 1990, т.43, №5, с.21-25.
5. *Партон В.З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел.- М.: Наука, 1988. 472 с.
6. *Аветисян А. С.* К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде.- Изв. АН АрмССР, Механика, 1985, т. 38, №1, с. 12-19.
7. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости.- М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 367 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
14.07.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, N° 4, 1995 Механика

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ТРЕЩИНОЙ

Акопян В. Н.

Վ.Ն.Հակոբյան

Ճաքով թուլացված բաղադրյալ հարթության համար մի խառը խնդրի մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է երկու տարբեր կիսահարթություններից կազմված և նրանց միացման գծի վրա ճաք պարունակող բաղադրյալ հարթության համար մի խառը եզրային խնդիր, երբ ճաքի մի ափին տրված են լարումները, իսկ մյուս ափին՝ տեղափոխությունները:

Ստացված են խնդրի որոշիչ հավասարումները, երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների տեսքով, և կառուցված են նրանց փակ լուծումները:

V.N.Hakopian

On One Mixed Problem for Composite Plate, Weakened by a Krack

Рассматривается задача о напряженном состоянии составной упругой плоскости, ослабленной трещиной, на одном берегу которой заданы компоненты напряжения, а на другом - компоненты перемещения.

Выведена разрешающая система уравнений, описывающая поставленную задачу, в виде системы двух сингулярных интегральных уравнений второго рода и построено ее замкнутое решение.

Много работ посвящено исследованию напряженно-деформированного состояния упругого тола, когда на него одновременно действуют концентраторы напряжения различного рода. Из этих работ наиболее тесно связаны с нижеизложенной задачей [1-6]. Особо отметим работу Д.И.Шермана [1], в которой построено замкнутое решение задачи для однородной плоскости с трещинами, один берег которых жестко защемлен, а также работу Г.П.Черепанова [2], где построено замкнутое решение той же задачи, когда на произвольных участках обоих берегов трещины заданы перемещения или напряжения.

1. Пусть упругая составная плоскость, состоящая из двух полуплоскостей с различными модулями сдвигов μ_1, μ_2 и коэффициентами Пуассона ν_1, ν_2 на линии стыка полуплоскостей ослаблена трещиной (щелью) длины $2a$, на верхнем берегу которой заданы компоненты напряжения $\sigma_1(x)-i\tau_1(x)$, а на нижнем берегу заданы компоненты перемещения $u_2(x)+i\,v_2(x)$ и главный вектор действующих там напряжений $\sigma_2-i\tau_2$.

Если все величины, описывающие напряженное состояние верхней и нижней полуплоскостей, снабдить верхними индексами 1 и 2, то поставленную задачу математически можно сформулировать л виде следующей граничной задачи:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_y^{(1)}(x,0)-i\tau_{xy}^{(1)}(x,0)=\sigma_y^{(2)}(x,0)-i\tau_{xy}^{(2)}(x,0) \\
&u^{(1)}(x,0)+i\,\mathrm{v}^{(1)}(x,0)=u^{(2)}(x,0)+i\,\mathrm{v}^{(2)}(x,0) \qquad |x|>a \\
&\sigma_y^{(1)}(x,0)-i\tau_{xy}^{(1)}(x,0)=\sigma_1(x)-i\tau_1(x) \\
&u^{(2)}(x,0)+i\,\mathrm{v}^{(2)}(x,0)=u_2(x)+i\,\mathrm{v}_2(x) \qquad\qquad |x|<a
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

для компонентов перемещений $u^{(j)}$, $\mathrm{v}^{(j)}(j=1,2)$, удовлетворяющих уравнениям Ламэ в соответствующих полуплоскостях, и компонентов напряжений $\sigma_y^{(j)}$, $\tau_{xy}^{(j)}(j=1,2)$, связанных с перемещениями, известными соотношениями [7].

Чтобы построить решение этой, смешанной граничной задачи, решения уравнений Ламэ для верхней и нижней полуплоскостей представим в виде:

$$
u^{(j)}(x,y)+i\,\mathrm{v}^{(j)}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[B_j(\lambda)+\frac{\alpha_j y\left((-1)^j|\lambda|-1\right)}{2+\alpha_j}\overline{B}_j(\lambda)\right]\times
$$
$$
\times e^{-i\lambda x+(-1)^j|\lambda|y}d\lambda \qquad (j=1,2) \tag{1.2}
$$

где $B_j(\lambda)$ - неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, а $\alpha_j=1/(1-2\nu_j)$ $(j=1,2)$.

Введем функции $\chi(x)$ и (x) по формулам

$$
\begin{aligned}
&\left[\sigma_y^{(1)}(x,0)-i\tau_{xy}^{(1)}(x,0)\right]-\left[\sigma_y^{(2)}(x,0)-i\tau_{xy}^{(2)}(x,0)\right]=\chi(x) \\
&\left[u^{(1)}(x,0)+i\,\mathrm{v}^{(1)}(x,0)\right]-\left[u^{(2)}(x,0)+i\,\mathrm{v}^{(2)}(x,0)\right]=W(x)/\vartheta_2^2 \qquad |x|<a
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Тогда, используя связь между компонентами перемещений и напряжений и удовлетворяя условиям (1.1), после несложных преобразований для определения функций $\mathrm{X}(x)$ и (x) получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$
\begin{aligned}
&W'(x)+\frac{ia_1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{W'(s)}{s-x}ds+\frac{ia_2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\chi(s)}{s-x}ds=F_1(x) \\
&\mathrm{X}(x)-\frac{ib_1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{W'(s)}{s-x}ds+\frac{ib_2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\chi(s)}{s-x}ds=F_2(x) \qquad |x|<a
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

При этом решения этой системы должна удовлетворять условиям равновесия и ограниченности скачка перемещений в точках $\pm a$, т.е. условиям

$$\int_{-a}^{a}\chi(x)dx = T_0; \qquad W(\pm a) = 0$$

$$\sigma(x) - i\tau(x) = \frac{iT_0}{\pi\Delta(\lambda_1-\lambda_2)(a-x)}\left[A\left|\frac{a+x}{a-x}\right|^{-\gamma_1} - D\left|\frac{a+x}{a-x}\right|^{-\gamma_2}\right] \qquad (|x|>a) \quad (1.5)$$

Здесь введены обозначения

$$F_1(x) = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta}\left[(\vartheta_1^1-\vartheta_1^2)(\sigma_1(x)-i\tau_1(x)) - (\vartheta_2^1(\vartheta_2^1+\vartheta_2^2)-\vartheta_1^1(\vartheta_1^1-\vartheta_1^2))(u_2(x)+i\,v_2(x))\right]$$

$$F_2(x) = \frac{2}{\vartheta}\left[(\vartheta_2^1(\vartheta_2^1+\vartheta_2^2)-\vartheta_1^1(\vartheta_1^1-\vartheta_1^2))\frac{\sigma_1(x)-i\tau_1(x)}{2} + \left(\vartheta_1^2((\vartheta_2^1)^2-(\vartheta_1^1)^2)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\vartheta_1^1((\vartheta_2^2)^2-(\vartheta_1^2)^2)\right)\cdot(u_2(x)+i\,v_2(x))\right]$$

$$a_1 = \frac{\vartheta_2^1\cdot\vartheta_1^2}{\vartheta}; \quad a_2 = \frac{\vartheta_2^1\cdot\vartheta_2^2}{2\vartheta}; \quad b_1 = \frac{2\left[(\vartheta_2^1)^2-(\vartheta_1^1)^2\right]}{\vartheta}; \quad b_2 = \frac{\vartheta_2^2\cdot\vartheta_1^1}{\vartheta}$$

$$\vartheta = (\vartheta_2^1)^2 - (\vartheta_1^1)^2 + \vartheta_1^1\vartheta_1^2; \quad T_0 = \int_{-a}^{a}[\sigma_1(x)-i\tau_1(x)]dx - (\sigma_2 - i\tau_2)$$

$$\vartheta_1^j = \frac{\mu_j}{2+\alpha_j}; \quad \vartheta_2^j = \frac{(1+\alpha_j)\mu_j}{2+\alpha_j} \qquad (j=1,2)$$

После решения системы (1.4) контактные напряжения вне трещины можно определить по формуле

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \frac{i}{\pi\Delta}\left\{c_1\int_{-a}^{a}\frac{W'(s)ds}{s-x} + c_2\int_{-a}^{a}\frac{\chi(s)ds}{s-x}\right\} \qquad (|x|>a) \qquad (1.6)$$

где

$$c_1 = -\left\{\vartheta_2^2\left[(\vartheta_2^1)^2-(\vartheta_1^1)^2\right] + \vartheta_2^1\left[(\vartheta_2^2)^2-(\vartheta_1^2)^2\right]\right\}$$

$$c_2 = \vartheta_1^1(\vartheta_2^1+\vartheta_2^2) - \vartheta_2^1(\vartheta_1^1-\vartheta_1^2); \quad \Delta = (\vartheta_2^1+\vartheta_2^2)^2 - (\vartheta_1^1-\vartheta_1^2)^2$$

2. Приступим к решению системы сингулярных интегральных уравнений (1.4) при условиях (1.5). С этой целью, следуя работам [8,9], умножим первое уравнение (1.4) на $\lambda \neq 0$ и просуммируем со вторым. Получим

$$\chi(x) + \lambda W'(x) + \frac{\lambda a_2 + b_2}{\pi} i\int_{-a}^{a}\frac{\left[\chi(s) + \dfrac{\lambda a_1 - b_1}{\lambda a_2 + b_2}W'(s)\right]}{s-x}ds = \lambda\cdot F_1(x) + F_2(x) \quad (2.1)$$

Далее, потребуем, чтобы имело место равенство

$$\frac{\lambda a_1 - b_1}{\lambda a_2 + b_2} = \lambda$$

то есть чтобы λ был корнем квадратного уравнения

$$a_2\lambda^2 - (a_1 - b_2)\lambda + b_1 = 0 \qquad (2.2)$$

дискриминант которого можно представить в виде:

$$D = \frac{4\mu\left[\mu(\nu_1 - \nu_2)^2 - 4(1-\nu_1)(1-\nu_2)(3-4\nu_2)\right]}{\left[\mu(1-2\nu_1)(1-2\nu_2) + 2(1-2\nu_2)\right]^2}, \quad (\mu = \mu_2 / \mu_1)$$

Отсюда ясно, что при $\mu = 4(1-\nu_1)(1-\nu_2)(3-4\nu_2)/(\nu_1 - \nu_2)^2$ уравнение (2.2) имеет действительный двухкратный корень, в остальных же случаях оно имеет или два различных действительных или комплексно-сопряженные корни. В табл. 1, для различных значений коэффициентов Пуассона, приведены некоторые численные значения параметра μ, при котором $D = 0$.

Таблица 1

ν_1 \ ν_2	0,1	0,2	0,3	0,4
0,1		633,6	113,4	33,6
0,2	748,8		403,2	67,2
0,3	163,8	492,8		233,2
0,4	62,4	105,6	302,4	

Рассмотрим эти два возможных случая:

а) Пусть уравнение (2.2) имеет два различных корня

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_1 - b_2 \pm \sqrt{(a_1 - b_2)^2 - 4a_2 b_1}}{2a_2}$$

Тогда, приняв в (2.1) поочередно $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$, придем к следующим двум независимым друг от друга сингулярным интегральным уравнениям второго рода

$$\varphi_j(x) + \frac{iq_j}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi_j(s)}{s-x}ds = Q_j(x) \qquad (2.3)$$

$$\left(-a < x < a; \quad j = 1,2\right)$$

где

$$\varphi_j(x) = \chi(x) + \lambda_j W'(x); \quad Q_j(x) = F_2(x) + \lambda_j F_1(x)$$

$$q_j = \frac{a_1 + b_2 - (-1)^j \sqrt{(a_1 - b_2)^2 - 4b_1 a_2}}{2}; \quad (j = 1,2)$$

Решения уравнений (2.3) даются формулами [7]

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{1 - q_j^2}\left\{Q_j(x) + \frac{q_j \omega_j(x)}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{Q_j(s)ds}{\omega_j(s)(s - x)} + d_j \omega_j(x)\right\} \tag{2.4}$$

$$\left(-a < x < a; \quad j = 1,2\right)$$

Здесь

$$\omega_j(x) = (x + a)^{-\gamma_j}(a - x)^{\gamma_j - 1}; \quad \gamma_j = \frac{1}{2\pi i}\ln\left|g_j\right| + \frac{\vartheta_j}{2\pi}$$

$$g_j = \frac{1 + q_j}{1 - q_j}; \quad 0 < \vartheta_j = \arg\left(g_j\right) < 2\pi,$$

а d_j $(j = 1,2)$ - постоянные, подлежащие определению. Отметим, что при действительных корнях уравнения (2.2) легко доказать отрицательность g_j $(j = 1,2)$, вследствие чего $\vartheta_j = \pi$ $(j = 1,2)$ и $\gamma_j = \frac{1}{2} - i\beta_j$ $\left(\beta_j = \frac{1}{2\pi}\ln\left|g_j\right|\right)$.

При комплексных же корнях уравнения (2.2) $\vartheta_1 = \overline{\vartheta}_2$, $\vartheta_2 = 2\pi - \vartheta_1$, откуда $\gamma_1 = \alpha - i\beta$, $\gamma_2 = 1 - \alpha - i\beta\left(\alpha = \vartheta_1 / 2\pi, \ \beta = \frac{1}{2\pi}\ln\left|g_1\right|\right)$. Тогда искомые функции - скачок напряжений, действующих на берегах трещины, $\chi(x)$ и производная раскрытия трещины $W'(x)$, определятся через функции $\varphi_j(x)$ $(j = 1,2)$ по формулам

$$\chi(x) = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{\lambda_1 - \lambda_2}; \qquad W'(x) = \frac{\lambda_2\varphi_1(x) - \lambda_1\varphi_2(x)}{\lambda_2 - \lambda_1} \tag{2.5}$$

а входящие в выражения $\varphi_1(x)$ постоянные d_j $(j = 1,2)$ определятся из условий (1.5). После чего, используя формулу (1.6), можно найти и контактные напряжения, действующие вне трещины.

Для иллюстрации рассмотрим случай, когда верхний берег трещины свободен от напряжений, т.е. $\sigma_1(x) - i\tau_1(x) = 0$, а на нижний берег действует штамп с прямолинейным основанием $\left(u_2 = 0, \ v_2 = \text{const}\right)$. Легко заметить, что в этом случае $Q_j(x) \equiv 0$ и функции $\varphi_j(x)$ $(j = 1{,}2)$ даются формулами:

$$\varphi_j(x) = A_j\omega_j(x) \quad \left(A_j = \frac{d_j}{1 - q_j^2},\ j = 1{,}2\right) \tag{2.6}$$

Из (2.5) найдем

$$\chi(x) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[A_1\omega_1(x) - A_2\omega_2(x)\right]$$

$$'(x) = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[\lambda_2 A_1\omega_1(x) - \lambda_1 A_2\omega_2(x)\right] \quad (|x| < a) \tag{2.7}$$

$$(x) = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_{-a}^{x}\left[\lambda_2 A_1\omega_1(x) - \lambda_1 A_2\omega_2(x)\right]dx + c_0$$

Учитывая, что [10]

$$\int_{-a}^{a}(x+a)^{-\gamma}(a-x)^{\gamma-1}dx = \frac{\pi}{\sin\pi\gamma}$$

и удовлетворяя условиям (1.5), получим $c_0 \equiv 0$,

$$A_j = \frac{\lambda_j \sin\pi\gamma_j}{\pi}T_0 \qquad (j = 1{,}2) \tag{2.8}$$

Следовательно,

$$\chi(x) = \frac{T_0}{\pi(\lambda_1 - \lambda_2)}\left[\lambda_1 \sin(\pi\gamma_1)\omega_1(x) - \lambda_2 \sin(\pi\gamma_2)\omega_2(x)\right] \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered}(x) = \frac{\lambda_1\lambda_2 T_0}{\pi(\lambda_2 - \lambda_1)}\left[\sin(\pi\gamma_1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+\gamma_1}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{k+\gamma_1} - \right.\\ \left. -\sin(\pi\gamma_2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+\gamma_2}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{k+\gamma_2}\right] \quad (-a < x < a)\end{gathered} \tag{2.10}$$

При выводе формулы (2.10) была использована формула

$$\int_{-a}^{x}(x+a)^{-\gamma}(a-x)^{\gamma-1}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+\gamma}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{k+\gamma} \qquad (|x| < a)$$

Подставляя полученные выражения для функций $\chi(x)$ и $W'(x)$ в (1.6) и учитывая, что [10]

$$\int_{-a}^{a}\frac{(s+a)^{-\gamma}(a-s)^{\gamma-1}}{s-x}dx=\frac{\pi}{(a-x)\sin\pi(1-\gamma)}\left|\frac{a+x}{a-x}\right|^{-\gamma}\qquad(|x|>a)$$

для контактных напряжений вне трещины получим формулу

$$\sigma(x)-i\tau(x)=\frac{iT_0}{\pi\Delta(\lambda_1-\lambda_2)(a-x)}\left[A\left|\frac{a+x}{a-x}\right|^{-\gamma_1}-D\left|\frac{a+x}{a-x}\right|^{-\gamma_2}\right]\ (|x|>a)\quad(2.11)$$

где

$$A=\lambda_1(c_2-\lambda_2\cdot c_1);\quad D=\lambda_2(c_2-\lambda_1c_1)$$

б) Теперь рассмотрим случай, когда уравнение (2.2) имеет два одинаковых корня

$$\lambda_1=\lambda_2=\frac{a_1-b_2}{2a_2}$$

Тогда, приняв в (2.1) $\lambda=\lambda_1$, получим только одно сингулярное интегральное урааение для определения функции $\varphi_1(x)=\chi(x)+\lambda_1W'(x)$, аналогичное первому уравнению (2.3), где на этот раз $q_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}>1$. Решение последнего имеет вид (2.4). При этом

$$\gamma_1=\frac{1}{2}-i\beta,\quad\beta=\frac{1}{2\pi}\ln|g_1|;\quad g_1=(1+q_1)/(1-q_1).$$

Далее, определив функцию $\chi(x)$ через функции $\varphi_1(x)$ и $W'(x)$, подставляя ее значение в первое из уравнений (1.4) и учитывая, что

$$\frac{i}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi_1(s)ds}{s-x}=\frac{1}{q_1}\left[Q_1(x)-\varphi_1(x)\right]$$

для определения функции $W'(x)$ получаю точно такое же сингулярное интегральное уравнение, что и для $\varphi_1(x)$, с той лишь разницей, что правая часть этого уравнения будет следующей:

$$Q_0(x)=F_1(x)+\frac{a_2}{q_1}\left[\varphi_1(x)-Q_1(x)\right]$$

Построив аналогичным образом решение этого уравнения, найдем функцию $W'(x)$, после чего и функцию $\chi(x)$ по формуле $\chi(x)=\varphi_1(x)-\lambda_1W'(x)$.

Входящие в найденные функции неизвестные константы и контактные напряжения вне трещины можно найти, удовлетворяя условиям(1.5) и используя формулу (1.6).

Для иллюстрации опять-таки рассмотрим случай плоского штампа, когда верхний берег трещины свободен от нагрузок, то есть когда $F_1(x) = F_2(x) = Q_1(x) \equiv 0$. В этом случае, используя значение интеграла [8]

$$\int_{-a}^{a} \ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right)(a+x)^{-\frac{1}{2}+i\beta}(a-x)^{-\frac{1}{2}-i\beta}dx = -i\pi^2 \frac{sh(\pi\beta)}{ch^2(\pi\beta)}$$

и интегральное соотношение

$$\int_{-a}^{a} \ln\left(\frac{a-s}{a+s}\right)\frac{(a+s)^{-\frac{1}{2}+i\beta}(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\beta}}{s-x}ds =$$

$$= \frac{\pi}{(a-x)}\left[\frac{\pi}{\mathrm{ch}^2(\pi\beta)} - i\,\mathrm{th}(\pi\beta)\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right|\right]\left|\frac{a+x}{a-x}\right|^{-\frac{1}{2}+i\beta} \qquad (|x| > a)$$

которое можно вычислить, приведя их к табулированным интегралам при помощи подстановки

$$u = \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$$

по указанной процедуре найдем

$$\varphi_1(x) = e_0\omega(x);\ \ \omega(x) = (x+a)^{-\frac{1}{2}+i\beta}(a-x)^{-\frac{1}{2}-i\beta};\quad Q_0(x) = \frac{a_2}{q_1}\varphi_1(x)$$

$$\chi(x) = -\left[\frac{a_2\lambda_1 e_0}{\pi\cdot i(1-q_1^2)}\ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right) + \lambda_1 e_1 - e_0\right]\omega(x)$$

$$'(x) = \left[\frac{a_2 e_0}{\pi i(1-q_1^2)}\ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right) + e_1\right]\omega(x);\quad (|x| < a)$$

$$\sigma(x) - i\tau(x) = \frac{\mathrm{sgn}\,x\left|\frac{x+a}{x-a}\right|^{i\beta}}{\Delta\,\mathrm{ch}(\pi\beta)\sqrt{x^2-a^2}}\left[K_1\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + iK_2\right] \quad (|x| > a)$$

где

$$K_1 = \frac{a_2 e_0(c_1 - \lambda_1 c_2)}{\pi(1-q_1^2)},\quad K_2 = e_0 c_2 + (c_1 - \lambda_1 c_2)\cdot\left[e_1 + \frac{a_2 e_0\,\mathrm{th}(\pi\beta)}{(1-q_1^2)}\right]$$

$$e_0 = \frac{\mathrm{ch}(\pi\beta)}{\pi}T_0, \qquad e_1 = \frac{a_2\,\mathrm{sh}(\pi\beta)}{\pi(1-q_1^2)}T_0$$

Таким образом, из полученных результатов видно, что если не учитывать осциллирующую часть, то при $\begin{cases} D(\mu) < 0 \\ D(\mu) > 0 \end{cases}$ контактные напряжения в концевых точках трещины имеют особенность степенного типа $x^{-\nu}\left(\frac{1}{2} \le \nu < 1\right)$, а при

$D(\mu) = 0$ - особенность типа $x^{-\frac{1}{2}} \ln x$.

Отметим также, что из полученных результатов, в частном случае, легко можмо получить решение задачи Шермана для одной трещины, если принять в них

$\nu_1 = \nu_2 = \nu, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu$ и $u_2(x) = 0, \quad v_2(x) = const$

$\nu_1 = \nu_2 = \nu, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu$ и $u_2(x) = 0, \quad v_2(x) = const$

Литература

1. *Штаерман Д. И.* Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов.- ДАН СССР, 1940, т.27, №4, с.330-334.
2. *Черепанов Г. П.* Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости. - ПММ, 1962, т.26, вып.5, с.907-912.
3. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.- М.: Наука, 1983. 488 с.
4. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.- М.: Наука, 1982. 344 с.
5. *Мхитарян С. М.* Об одном классе смешанных задач теории упругости. Abstracts of Symposium "Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis" Dedicated to the Centenary of Academician N. Muskhelishvili:- Tbilisi, 1991, p. 35.
6. *Нуллер Б.М.* Краевые задачи теории упругости, сводящиеся к задачам Гильберта-Римана на римановых поверхностях. Abstracts of Symposium "Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis Dedicated to the Centenary of Academician N. Muskhelishivili:- Tbilisi, 1991, p. 42.
7. *Мусхелишвили Н. М.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.- М.: Наука, 1966. с. 707.
8. *Саркисян В. С.* Еше раз о решении одной системы сингулярных интегродифференциальных уравнений. - Изв. НАН Армении, Механика, 1992, т.45, 1992, №1-2, с. 3-9.
9. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупгругости.- М.: Наука, 1980. 304 с.
10. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды.- М.: Наука, 1981. 738 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
18.03.1994

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, N° 4, 1995 Механика

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕЩИНЫ УСТАЛОСТИ В УСЛОВИЯХ ВОЗДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Асанян Д.Д., Летунов В.И.

Հասանյան Դ.Ջ.,Լետունով Վ.Ի.

Հոգնածական ճաքի բաշխումը էլեկտրամագնիսական դաշտի ազդեցության պայմաններում

Հասանյան Դ.Ջ.Լետունով Վ.Ի.

Փորձնական ճանապարհով հետազոտված է էլեկտրական հոսանքի ազդեցությունը ճաքի տարածման արագության վրա, երբ մարմինը ենթարկված է ցիկլիկ ծռման: Որպես փորձարկվող նյութ վերցվում է մագնիսապես պինդ պողպատը, որի մակերևույթին կա կիսաէլիպտիկ ճաք: Փորձերը ցույց են տալիս, որ ճաքի տարածման արագությունը, ցիկլիկ ծռվող մարմնում, էապես կախված է մարմնով անցնող հոսանքի խտությունից: Դիտարկված է փոփոխական և հաստատուն հոսանքների դեպքերը:

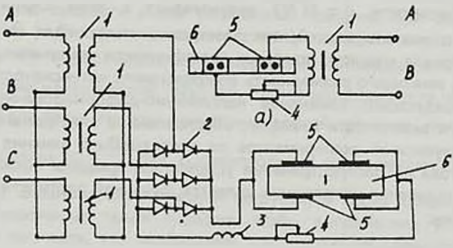
Hasanian D. J., Letunov V. I.

Distribution of Fatique Craked under Electromagnetic Field.

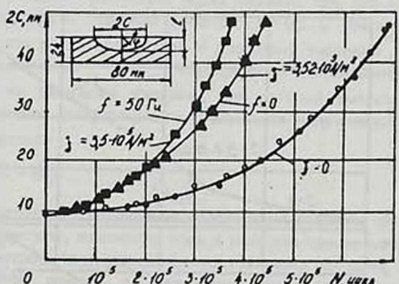
Экспериментально исследовано влияние прямого пропускания электрического тока на скорость роста трещины в циклически изгибаемом образце. В качестве материала были выбраны конструкционные низколегированные магнитожесткие стали, на поверхности которых имеется полуэллиптическая трещина. Эксперименты показывают, что скорость роста трещины, в циклически изгибаемом образце, существенно зависит от плотности тока, которое пропускается через образец. Рассматривались случаи постоянного и переменного тока. Различные теоретические вопросы поведения ферромагнитных тел, в электромагнитных полях рассмотрены в работах [1-4]. В частности,[3-4] посвящены исследованию напряженно-деформированному состоянию ферромагнитных тел с трещиной, при наличии однородного магнитного поля.

В работе рассматриваются вопросы влияния прямого пропускания тока на скорость роста трещины в циклически изгибаемом образце. В качестве материала были выбраны конструкционные низколегированные магнитожесткие стали 0912 и 12ГН2МФАЮ.Объектом исследования являлась поверхностная полуэллиптическая трещина фиг.2. Испытания проводились в режиме заданного прогиба образца с частотой нагружения 20 гц. Через циклически изгибаемый образец пропускали постоянный и переменный ток, при этом вектор плотности тока был параллелен плоскости трещины. Частота переменного тока составляла 50 гц. В качестве источника тока использовался понижающий трансформатор ОСУ-20. Принципиальная схема подвода тока к образцу представлена на фиг.1;1а-схема подвода переменного тока; на фиг.1б - постоянного тока. От понижающего трансформатора 1 (фиг.1-а), ток через балластное сопротивление 4 и подводящие клема 5 подавался на образец 6.

Трещина находилась между симметрично расположенными клемами. Величина переменного тока в процессе испытаний варьировалась от 250А до 1500А. Для получения постоянного тока использовалась схема двух полупериодного выпрямления фиг.1б. Пульсации тока устранялись с помощью дросселя 3. Применение данной схемы позволило пропускать через образец постоянный ток, пульсации которого не превышали 3%. Величина постоянного тока в процессе испытания варьировалась от 500А до 1500А.



фиг. 1

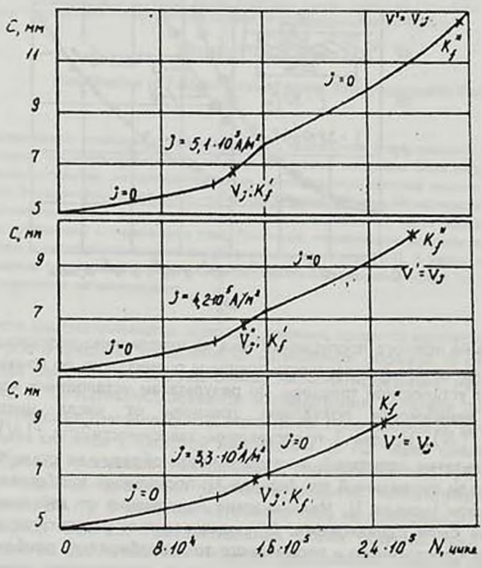


фиг. 2

Влияние прямого пропускания тока на напряженно-деформированное состояние материала в окрестности трещины оценивалось по изменению скорости роста усталостной трещины. По результатам усталостных испытаний строились зависимости полудлины трещины от числа циклов нагружения $c = f(N)$. На фиг.2 представлены зависимости $2c = f(N)$, полученные по результатам испытаний, в которых через образцы из стали 12ГН2МАФАЮ пропускали переменный ток (кривая 1); постоянный ток (кривая 2), и ток не пропускали (кривая 3). Механические напряжения от действия циклической нагрузки были одинаковыми. В представленных результатах экспериментов плотности постоянного и переменного тока подбирались приблизительно равными. Влиянием сжимающего напряжения, вызываемого термическим расши- рением материала вблизи вершины трещины, вследствие выделения джоулевого тепла, пренебрегали [5].

Сравнительный анализ зависимостей $2c = f(N)$, приведенных на фиг.2, показывает, что прямое пропускание как постоянного, так и переменного тока приводит к существенному увеличению скорости усталостной трещины, Аналогичное влияние прямого пропускания переменного тока наблюдалось для стали 0912. На фиг.3 представлены результаты усталостного развития трещины в условиях, когда первоначально трещина развивалась в отсутствии тока, а по достижении трещиной определенных размеров через образец пропускался ток, который оказывал влияние на ее дальнейшее развитие, Как видно, зависимость $c = f(N)$ претерпевает в этом случае излом, Количественно оценить воздействие электромагнитного поля на трещиностойкость материала можно с помощью коэффициента увеличения напряжений - параметра, имеющего размерность коэффициента интенсивности напряжений и характеризующего изменение напряженно-деформированного состояния материала в окрестности трещины, обусловленное электромагнитным полем. Анализ результатов экспериментов по исследованию влияния прямого пропускания тока на распространение усталостной трещины показал, что коэффициент увеличения напряжения является функцией плотности тока и размеров трещины:

$$K_{э.м} = F(j,c) \tag{1}$$



фиг. 3

Зависимость коэффициента увеличения напряжений от параметров плотности тока j и полудлины поверхностной полуэллиптической трещины c определилась экспериментально, при этом исходили из того, что если поля напряжений у трещины одинаковы, то есть если одинаковы коэффициенты интенсивности напряжений, то механическое поведение трещин будет одинаковым, а скорости распространения трещины равными. Процедуру определения коэффициента увеличения напряжений можно проиллюстрировать с помощью зависимостей, приведенных на фиг.3. Через циклически изгибаемый образец с развивающейся трещиной (участок $j = 0$ зависимости $c = f(N)$ пропускали ток, скорость роста усталостной трещины при этом возросла (участок $j \neq 0$). Для фиксированного размера трещины определялась скорость роста V_j и рассчитывался коэффициент интенсивности напряжений K'_f от действия механической нагрузки. Расчет коэффициента интенсивности напряжений для точки контура полуэллиптической трещины, лежащей на поверхности образца ($\varphi = \frac{\pi}{2}$, фиг.2) производился по формулам, приведенным в работе [6]. Величина механической нагрузки, а также трещины подбирались в экспериментах таким образом, чтобы выполнялись условия маломасштабной текучести, что необходимо для получения однозначной зависимости скорости роста трещины от коэффициента интенсивности напряжений [6]. Затем прекращали пропускать через образец ток, что приводило к снижению скорости роста трещины (участок $j = 0$). С увеличением размеров трещины скорость роста возрастала и достигала значения $'$ при котором выполнялось равенство $' = V_j$. Коэффициент интенсивности напряжений рассчитывался по размерам трещины, для которой выполнялось равенство скоростей. Значение коэффициента увеличения напряжений $K_{э.м}$ определялось в виде разности

$$K_{э.м} = K''_f - K'_f \tag{2}$$

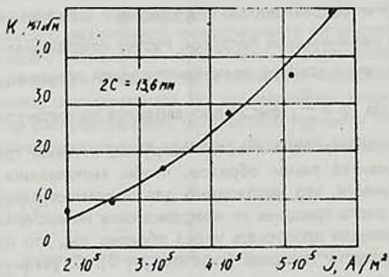
Поскольку коэффициент увеличения напряжений является функцией двух независимых параметров, плотности тока и размера трещины, в экспериментах один из параметров поддерживался постоянным. На фиг. 3 представлены экспериментальные данные, по результатам которых определялась зависимость $K_{э.м}$ от величины плотности тока.

Для фиксированной полудлины трещины определялась скорость роста V_j, величина которой возрастала с увеличением плотности тока. Соответственно возрастало и значение $K_{э.м}$. На фиг. 4 представлена экспериментально полученная зависимость $K_{э.м}$ от плотности тока, являющаяся квадратичной зависимостью

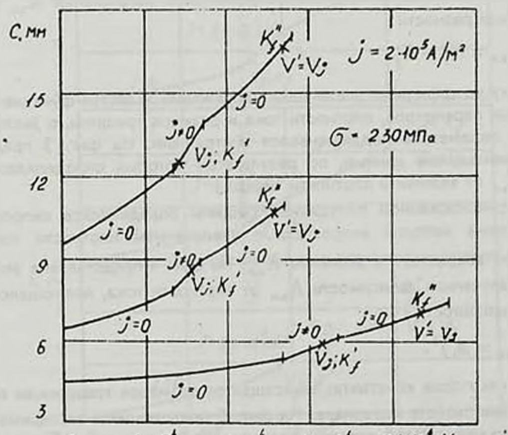
$$K_{э.м} = A_1 j^2 \tag{3}$$

где A_1 - некоторая константа, зависящая от размеров трещины,ее геометрии и магнитных свойств материала. На фиг. 5 представлены экспериментальные данные, по результатам которых определялась зависимость $K_{э.м}$ от полудлины трещины. Плотность тока в процессе эксперимента поддерживалась постоянной. Для различных размеров трещин в условиях пропускания тока определяли скорости роста трещины $_j$ (участок $j \neq 0$) и соответствующие значения коэффициентов интенсивности напряжений от действия механической нагрузки K_f. Действительное истинное значение коэффициента интенсивности напряжений, которое соответствовало скорости $_j$ представляет собой сумму

$$K_f = K_f' + K_{э.м} \tag{4}$$



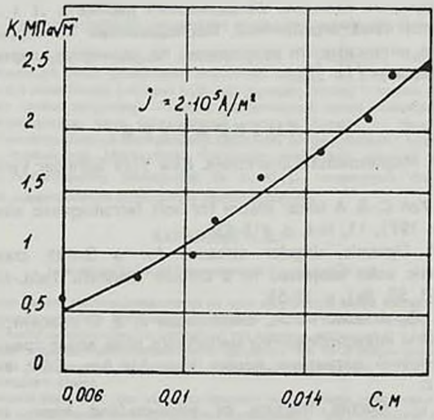
фиг. 4



фиг. 5

где $K_{э.м}$ - коэффициент увеличения напряжений. После прекращения пропускания через образец тока скорость роста трещины уменьшалась (участок $j = 0$) и достигала прежней величины $_j$ при значительно больших размерах трещины. Коэффициент интенсивности напряжений $K_{э.м}$ рассчитывался по размерам трещины, для которой выполнялось равенство $' = V_j$. Коэффициент увеличения напряжений определялся в виде разности (2). С увеличением размеров трещины увеличивался $K_{э.м}$. На фиг.6 представлена экспериментально полученная зависимость $K_{э.м}$ от полудлины трещины, являющаяся степенной зависимостью с показателем степени 3/2

$$K_{э.м}^{j=const} = A_2 c^{\frac{3}{2}} \tag{5}$$



фиг. 6

где A_2 - некоторая константа, зависящая от плотности тока, геометрии трещины и магнитных свойств материала.

В общем виде выражение для коэффициента увеличения напряжения может быть представлено

$$K_{э.м} = A_3 j^2 c^{\frac{3}{2}} \tag{6}$$

Из соображения размерности константа A_3 должна содержать магнитную постоянную μ_0 и параметр, характеризующий линейный размер проводника ΔL. Это следует из того, что коэффициент увеличения напряжений является параметром, характеризующим изменение напряженно-деформированного состояния материала в окрестности трещины под воздействием электромагнитных сил, в основе которых лежит взаимодействие магнитного поля и электрического тока. Источником магнитного поля является ток, текущий по проводнику. Магнитная индукция B, характеризующая поле в проводнике, связана с током посредством магнитной постоянной $\mu_0 / 4\pi$ в магнитное давление, имеющее размерность механического напряжения, зависит от линейных размеров проводника

$$\vec{P}_m = \left(\vec{j} \times \vec{B}\right)\Delta L \tag{7}$$

Окончательно выражение для $K_{э.м}$ может быть представлено в виде

$$K_{э.м} = A\frac{\mu_0}{4\pi}\mu_r \Delta L j^2 c^{\frac{3}{2}} \tag{8}$$

где A - безразмерный параметр, зависящий от геометрии полуэллиптической трещины; μ_r - магнитная проницаемость материала; ΔL- длина образца между подводящими клемами. Безразмерный параметр A в экспериментах не определялся из-за ограничений, накладываемых на корректную оценку коэффициента интенсивности напряжений по параметру, характеризующему геометрию трещины l/c [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brown W.F.* Magnetoelastic interctions. New York Springer Verlag, 1966, p. 272.
2. *Pao Y.-H, Yeh C.-S.* A linear theory for soft ferromagnetic elastic solid.- Int. J. Eng. Sci. 1973, 11, №4, p. 415-436.
3. *Shindo Y.* Dynamic singular stresses for a Grifith craek in a soft ferromagnetic solid subjected to a uniform magnetic field.-ASME, J. Appl. Mech., 1983, 50, №1, p. 50-56.
4. *Асанян Д. Д., Асланян А. А., Багдасарян Г. Е.* О концентрациях упругих напряжений и индуцированного магнитного поля возле трещины, обусловленных внешним магнитным полем- Изв. АН Арм. ССР, Механика,1988, т.41, №2, с.
5. *Yagawa G.,* Ductile fracture of edge-cracked beam under dynamic electromagnetic bending force.-Eng. Fraet. Mech., 1984, 19, №1, p. 23-34.
6. *Летунов В. М.* Закономерности развития поверхностных трещин в низколегированной стали при асимметричном циклическом изгибе. Сообщение 1- Пробл. прочности. 1985, №11, с. 41-46.
7. *Летунов В. И.* Определение КИН для полуэллиптических поверхностных трещин.- Пробл. прочности.- 1984, №4, с. 17-21.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
4.11.1992

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 4, 1995 Механика

МАЛОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛОСКО-НАПРЯЖЕННОГО СОСТАВНОГО КЛИНА

Сафарян Н.Б.

Սաֆարյան Ն.Բ.

Հարթ-լարվածային բաղադրյալ սեպի թերլարվածային վիճակը

Հարթ-լարվածային վիճակի դեպքում ուսումնասիրված է բաղադրյալ սեպի կոնտակտային մակերևույթի անկյունային կետի շրջակայքում լարումների դաշտը, երբ բաղադրյալ սեպի արտաքին եզրերից մեկը ազատ է լարումներից, իսկ մյուս եզրի վրա շոշափող լարումը և նորմալ տեղափոխությունը հավասար են զրոյի (սահող կոնտակտ)։ Սեպերից յուրաքանչյուրի նյութը ընդունվում է անսեղմելի և աստիճանային ամրապնդվող, նույն ամրապնդման ցուցիչով։ Տարբեր են միայն դեֆորմացիայի գործակիցները։ Ընդհանուր դեպքում յուրաքանչյուր տիրույթում խնդիրը բերվում է 4-րդ-կարգի ոչ գծային հավասարումների համակարգի ինտեգրման։ Վերջավոր լարումների դեպքում թվային մեթոդով հավասարումների համակարգերը ինտեգրված են և α,β հարթության մեջ կառուցված են թերլարվածային և գերլարվածային տիրույթները բաժանող կորերը։

SAFARIAN N.B.

Low-stress Level of Plane-stressed Compound Wedge

Рассматривается задача малонапряженности на крае контактной линии составного клиновидного тела из степенно-упрочняющихся материалов в условиях плоского напряженного состояния. Явление малонапряженности линейно-упругих составных тел впервые исследовано в работе [1]. В монографии [2] изучаются вопросы малонапряженности составных тел из степенно-упрочняющихся материалов при плоской деформации. Аналогичные исследования проведены в [3.4] для однородного или кусочно-однородного клина.

В теории линейной упругости, как известно, плоское напряженное состояние и плоская деформация описываются одинаковыми математическими уравнениями. При нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями исследования плоского напряженного состояния и плоской деформации существенно отличаются. Разрешающие уравнения, описывающие плоское напряженное состояние, относительно сложнее, чем уравнение при плоской деформации.

В настоящей работе, в случае плоского напряженного состояния, при помощи местного решения изучается поведение поля напряжений в окрестности клиновидного выступающего или входящего края контактной поверхности составного тела, когда одна грань свободна от нагрузок, а на другой грани касательное напряжение и нормальное перемещение равны нулю.

В полярной системе координат угловая точка выбрана за начало системы координат; ось $\theta = 0$ направлена по контактной поверхности, а ось z - перпендикулярна к плоскости составного клина.

В каждой области составного клина имели уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}=0$$

Закон упрочнения

$$\sigma_0 = k\varepsilon_0^m \tag{2}$$

где

$$\sigma_0=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sigma_r^2-\sigma_r\sigma_\theta+\sigma_\theta^2+3\tau_{r\theta}^2}$$

$$\varepsilon_0=2\sqrt{\varepsilon_r^2+\varepsilon_r\varepsilon_\theta+\varepsilon_\theta^2+\gamma_{r\theta}^2}$$

- соответственно, интенсивности касательных напряжений и деформации сдвига, m– показатель упрочнения. Принимается, что степени упрочнения m обоих материалов одинаковы, а модули деформации k различны.

Соотношения между компонентами деформаций и перемещений

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r},\quad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad 2\gamma_{r\theta}=\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

зависимости между компонентами напряжений и деформаций

$$\sigma_r-\sigma=2k\varepsilon_0^{m-1}\varepsilon_r,\qquad \sigma_\theta-\sigma=2k\varepsilon_0^{m-1}\varepsilon_\theta$$

$$\sigma_z=0,\qquad\qquad \tau_{r\theta}=2k\varepsilon_0^{m-1}\gamma_{r\theta} \tag{3}$$

Здесь $\sigma=\frac{1}{3}(\sigma_r+\sigma_\theta)$ - среднее напряжение, и, кроме того, принято условие несжимаемости

$$\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z=0$$

В каждой из клиновидных областей $-\beta\le\theta\le 0$ и $0\le\theta\le\alpha$, поле перемещений ищем в виде

$$u_i(r,\theta)=r^{1-\lambda}f_i(\theta,\lambda),\qquad v_i(r,\theta)=r^{1-\lambda}\psi_i(\theta,\lambda) \tag{4}$$

где $f_i(\theta,\lambda),\psi_i(\theta,\lambda)$–произвольные функции, λ- физический параметр. Величины в этих областях обозначены, соответственно, индексами $i=1,2$.

Используя (3)-(4), компоненты напряжений через неизвестные функции $f_i(\theta,\lambda)$ и $\psi_i(\theta,\lambda)$ представятся в виде

$$\sigma_{ri}=2k_ir^{-\lambda m}\left(\psi_i'+(3-2\lambda)f_i\right)\chi_i$$

$$\sigma_{\theta i}=2k_ir^{-\lambda m}\left(2\psi_i'+(3-\lambda)f_i\right)\chi_i \tag{5}$$

$$\tau_{r\theta i}=k_ir^{-\lambda m}\left(f_i'-\lambda\psi_i\right)\chi_i$$

$$\chi_i = \left(4(1-\lambda)^2 f_i^2 + 4(1-\lambda) f_i\left(f_i + \psi_i'\right) + 4\left(f_i + \psi_i'\right)^2 + \left(f_i' - \psi_i\right)^2\right)^{\frac{m-1}{2}}$$

Функции $f_i(\theta,\lambda)$ и $\psi_i(\theta,\lambda)$ в каждой клиновидной области удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\left(\left(f_i' - \lambda\psi_i\right)\chi_i\right)' - 2\left((1+\lambda m)\psi_i' + \lambda\left(1+m(3-2\lambda)\right)f_i\right)\chi_i = 0$$

$$\left(\left(2\psi_i'' + (3-\lambda)f_i\right)\chi_i\right)' + \left(1 - \frac{1}{2}\lambda m\right)\left(f_i' - \lambda\psi_i\right)\chi_i = 0 \qquad (6)$$

Граничные условия для функций $f_i(\theta,\lambda)$ и $\psi_i(\theta,\lambda)$ будут

$$\psi_i = 0, \quad 2\psi_i' + (3-\lambda) f_2 = 0$$

$$f_1' - \lambda\psi_1 = 0 \ \text{ при } \theta = \alpha \quad f_2' - \lambda\psi_2 = 0 \ \text{ при } \theta = -\beta \qquad (7)$$

На контактной поверхности $\theta = 0$ должны удовлетворяться условия равенства напряжений $\sigma_{\theta i}$ и $\tau_{r\theta i}$, а также непрерывности перемещений u_i и v_i. Тогда будем иметь еще следующие условия:

$$\left(2\psi_2' + (3-\lambda) f_2\right)\chi_2 = \gamma\left(2\psi_1' + (3-\lambda) f_1\right)\chi_1$$

$$\left(f_2' - \lambda\psi_2\right)\chi_2 = \gamma\left(f_1' - \lambda\psi_1\right)\chi_1 \qquad (8)$$

$$f_2 = f_1, \quad \psi_2 = \psi_1, \quad \gamma = k_1 / k_2 \qquad \text{при } \theta = 0$$

Приведенная система дифференциальных уравнений (6) при краевых условиях (7),(8), в принципе определяет функции $f_i(\theta,\lambda)$, $\psi_i(\theta,\lambda)$ с точностью до постоянного неопределенного множителя, соответственно, в областях $0 \le \theta \le \alpha$ и $-\beta \le \theta \le 0$ и значение параметра λ в зависимости от параметров α, β, γ, m. Придавая различные числовые значения λ, из (6)-(8) численным способом определяем соотношения между параметрами α, β, γ, m. Условие $\lambda < 0$ в пространстве этих параметров определяет зону малонапряженности, а при $\lambda > 0$ - зону сильной концентрации напряжений. Полагая $\lambda = \lambda_* > 0$, из (6)-(8) численными методами можо определить семейство кривых одинаковых степеней концентрации напряжений. Эти кривые $\beta = \beta(\alpha, \gamma, m)$ - следы гиперповерхности $\lambda(\alpha, \beta, \gamma, m) = \lambda_*$ на координатной плоскости α, β в зависимости от γ и m.

При конечных напряжениях, то есть в случае $\lambda = 0$ требуется специальное исследование уравнений (1) -(3). В этом случае, компоненты перемещений, удовлетворяющие условию несжимаемости материалов, ищем в следующем виде:

$$u_i(r,\theta) = r f_i(\theta), \qquad v_i(r,\theta) = r\psi_i(\theta) \qquad (9)$$

Здесь $f_i(\theta)$ и $\psi_i(\theta)$ - произвольные функции.

Исходя из закона степенного упрочнения (2),(3), компоненты напряжений представятся в следующей форме:

$$\sigma_{ri} = 2k_i\left(\psi_i'(\theta) + 3f_i(\theta)\right)\chi_i(\theta)$$

$$\sigma_{\theta i} = 2k_i\left(2\psi_i'(\theta) + 3f_i(\theta)\right)\chi_i(\theta) \qquad (10)$$

$$\tau_{r\theta i} = k_i f_i'(\theta)\chi_i(\theta)$$

где

$$\chi_i(\theta) = \left(f_i'^2(\theta) + 4\left(3f_i^2(\theta) + 3f_i(\theta)\psi_i'(\theta) + \psi_i'^2(\theta)\right)\right)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Подставляя выражения напряжений (10) в уравнения равновесия (1), получим систему уравнений для определения неизвестных функций $f_i(\theta)$ и $\psi_i(\theta)$.

$$\left(f_i(\theta)\chi_i(\theta)\right)' - 2\psi_i'(\theta)\chi_i(\theta) = 0$$

$$\left(\left(2\psi_i'(\theta) + 3f_i(\theta)\right)\chi_i(\theta)\right)' + f_i'(\theta)\chi_i(\theta) = 0 \qquad (11)$$

Граничные условия (7) для системы (11) принимают вид

$$\psi_1(\theta) = 0, \quad 2\psi_2'(\theta) + 3f_2(\theta) = 0$$

$$f_1'(\theta) = 0 \quad \text{при } \theta = \alpha, \qquad f_2'(\theta) = 0 \quad \text{при } \theta = -\beta \qquad (12)$$

Условия на контактной поверхности будут

$$\left(2\psi_2'(\theta) + 3f_2(\theta)\right)\chi_2(\theta) = \gamma\left(2\psi_1'(\theta) + 3f_1(\theta)\right)\chi_1(\theta) \quad \text{при } \theta = 0 \qquad (13)$$

$$f_2'(\theta)\chi_2(\theta) = \gamma f_1'(\theta)\chi_1(\theta), \quad f_2(\theta) = f_1(\theta), \quad \psi_2(\theta) = \psi_1(\theta) \quad \gamma = k_1 / k_2$$

Система дифференциальных уравнений (11) с граничными и контактными условиями (12), (13), в принципе определяет гиперповерхность $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, m) = 0$ конечных напряжений, отделяющую зону малонапряженности от зоны сильной концентрации.

Для построения этой поверхности, удобно свести систему дифференциальных уравнений (11) к системе из восьми дифференциальных уравнений первого порядка, которая более удобна для численного интегрирования

$$\psi_i' = \frac{1}{2}\left(F_i - 3f_i\right), \quad f_i' = \tau_i, \quad F_i' = \Phi_i$$

$$\tau_i' = \frac{I_i\left(F_i - 3f_i\right) + (1-m)\tau_i\left(F_i\Phi_i + 3f_i\tau_i\right)}{I_i + (m-1)\tau_i^2}, \quad i = 1,2 \tag{14}$$

Здесь введены следующие обозначения :

$$I_i = \tau_i^2 + F_i^2 + 3f_i^2$$

$$\Phi_i = \Big\{(1-m)\tau_i F_i\left(3(m-1)f_i\tau_i^2 - I_i\left(F_i - 3f_i\right)\right) +$$

$$+\left(I_i\tau_i + 3(m-1)f_i\tau_i F_i\right)\left(I_i + (m-1)\tau_i^2\right)\Big\} / \Big\{(1-m)^2\tau_i^2 F_i^2 -$$

$$-\left(I_i + (m-1)F_i^2\right)\left(I_i + (m-1)\tau_i^2\right)\Big\}, \quad i = 1,2$$

Граничные условия для системы (14) будут

$$\psi_1(\theta) = 0, \quad \tau_1(\theta) = 0 \qquad \text{при } \theta = \alpha$$

$$F_2(\theta) = 0, \quad \tau_2(\theta) = 0 \qquad \text{при } \theta = -\beta \tag{15}$$

контактные условия (13) принимают вид

$$F_2(\theta)\chi_2(\theta) = \gamma F_1(\theta)\chi_1(\theta), \quad \tau_2(\theta)\chi_2(\theta) = \gamma\tau_1(\theta)\chi_1(\theta)$$

$$f_2(\theta) = f_1(\theta), \quad \psi_2(\theta) = \psi_1(\theta), \quad \gamma = k_1 / k_2 \text{ при } \theta = 0 \tag{16}$$

Компоненты напряжений (10) представятся в следующей форме:

$$\sigma_{ri} = k_i\left(F_i + 3f_i\right)\chi_i, \quad \sigma_{\theta i} = 2k_i F_i\chi_i$$

$$\tau_{r\theta i} = k_i\tau_i\chi_i, \quad \chi_i = \left(\tau_i^2 + F_i^2 + 3f_i^2\right)^{\frac{m-1}{2}} \tag{17}$$

Когда клин изготовлен из одного нелинейного однородного материала, то есть при $\gamma = 1$, систему уравнений (14) будем иметь только для области $0 \le \theta \le \alpha$, а граничные условия (15) запишутся в виде

$$\psi(\theta) = 0, \quad \tau(\theta) = 0 \qquad \text{при} \qquad \theta = \alpha$$

$$F(\theta) = 0, \quad \tau(\theta) = 0 \qquad \text{при} \qquad \theta = 0 \tag{18}$$

Система уравнений (14), записанная для одной области, вместе с условиями (18) устанавливает связь между параметрами α и m .

Если составной клин изготовлен из линейно-упругих материалов, принимая в (11) $m =$, будем иметь уравнение $f_i''' + 4f_i' = 0$, общее решение которого есть

$$f_i(\theta) = C_{1i} + C_{2i}\sin 2\theta + C_{3i}\cos 2\theta \tag{19}$$

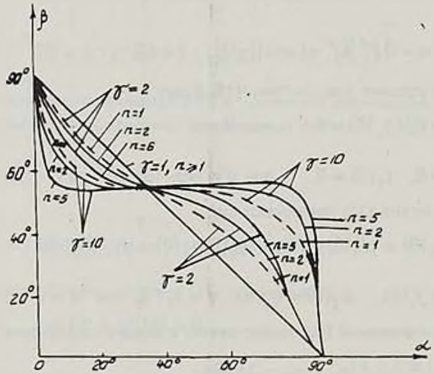
где C_{1i}, C_{2i} и C_{3i} – произвольные постоянные.

Используя граничные и контактные условия (15),(16) при $m =$ и выражение $f_1(\theta)$ (19), приходим к уравнению

$$\cos 2\beta \sin 2\alpha - \sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha \sin 2\beta +$$

$$+\gamma \sin 2\alpha (1 + 3\cos 2\beta) = 0 \qquad (20)$$

Уравнение (20) на плоскости α, β определяет семейство предельных кривых, отделяющих зону малонапряженности от зоны сильной концентрации напряжений для линейных несжимаемых материалов при случае плоского напряженного состояния.



фиг. 1

На фиг.1 показано семейство предельных кривых $\beta = \beta(\alpha, \gamma, m)$, построенных при помощи численных решений системы уравнений (14) при граничых условиях (15), (16), отделяющих зону малонапряженности (ниже кривых) от зоны сильной концентрации напряжений (выше кривых). Штриховыми линиями указаны эти кривые для линейно-упругого несжимаемого материала. На графиках указан параметр $n = 1/m$.

Из характера изменения этих кривых следует, что при увеличении степени упрочнения n зона малонапряженности уменьшается, если угол у сильного материала меньше, чем у слабого,и, наоборот, эта зона увеличивается, если угол у сильного материала больше, чем у слабого.

Численное интегрирование системы (14) с условиями (15), (16) осуществляется следующим методом. Так как функции ψ_i не участвуют в остальных уравнениях (участвуют производные), то, исключая их, мы получаем системы дифференциальных уравнений шестого порядка с шестью однородными граничными условиями. Для каждого фиксированного β, изменяя α дискретным шагом, начиная с $\alpha = 0$, находим первое α, , для которого система (14) с условиями (15),(16) имеет ненулевое решение, которое определяется методом пристрелки [5] , суть которого заключается в следующем. Полагая

$f_2(-\beta) = p$, систему можно решить при помощи метода решения задачи Коши (в нашей задаче используется метод Рунге-Кутта четвертого порядка). Система (14) будет решена, если будет найдено значение p , при котором $\tau_1(\alpha) = 0$. Получается функциональная зависимость между случайно выбранным p и $\tau_1(\alpha), G: p \to \tau_1(\alpha)$.Функция $G(p)$ в явном виде неизвестна, однако ее значение для любого значения p можно вычислить численным интегрированием системы (14) с условиями (15),(16). Фиксированному β соответствует такое α^{-}, при котором $G(p) = 0$ имеет ненулевое решение, то есть существует $p \neq 0$ таков, что, полагая $f_2(-\beta) = p$ и решая систему (14) с условиями (15)-(16), получим $\tau_1(\alpha) = 0$.

Литература

1. *Чобанян К.С.* Напряжения в составных упругих телах. - Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987, 380 с.
2. *Задоян М.А.* Пространственные задачи теории пластичности.- - М.: Наука, 1992, 712 с.
3. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. - М.: Наука, 1974. 640 с.
4. *Александров В.М., Гришин С.А.* Напряженно-деформированное соотояние малой окрестности вершины клина при физической нелинейности и различных граничных условиях. ПММ, 1987, т. 51, вып.4, с.653—661.
5. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Под ред. Дж.Холла и Дж.Уатта.-М.: Мир, 1979.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
7.03.1994