

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱՎԱՆԵՐԱԴԱՐԱՆԻ ՏԵԼԵԿՈԼԵԿԻԻ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1995

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ В НАКЛОННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Багдасарян Г.Е.

Գ.Ե. Բաղդասարյան

Իղեալական հաղորդիչ սալի ոչ գծային տատանումները
թեք մագնիսական դաշտում

Աշխատանքում արվածված են իղեալական հաղորդիչ սալ-շերտի ոչ գծային մագնիսաառաձգական տատանումների հավասարումները եւ եզրային պայմանները թեք մագնիսական դաշտում: Միացված հավասարումների մեջ, բացի դասական երրորդ կարգի ոչ գծային անդամից, մասնակցում մագնիսաառաձգական ծագում ունեցող քառակուսային ոչգծայնությամբ անդամ: Ստացված է բանաձև ոչ գծային տատանումների առաջին հարախության որոշման համար: Ցույց է տրված, որ կախված արտաքին մագնիսական դաշտի կողմնորոշումից, դիտարկվող մագնիսաառաձգական համակարգ կարող է ներկայացնել որպես փափուկ տատանողական համակարգ:

G.E. Bagdasarian

Nonlinear Vibrations of an Ideally Conductive Plate in Inclined Magnetic Field

Получено уравнение и граничные условия нелинейных колебаний магнитоупругих идеально проводящей пластинки в наклонном магнитном поле. Это уравнение кроме обычного нелинейного члена третьего порядка (характерного для классических задач упругих колебаний гибких пластинок) участвует новый член квадратной нелинейности магнитоупругого происхождения. Появление указанного нелинейного члена обусловлено возникновением продольного усилия в срединной плоскости пластинки, как результат взаимодействия продольного составляющего индуцированного тока проводимости с поперечной составляющей внешнего магнитного поля. А это значит, что характер магнитоупругих нелинейных колебаний пластинки качественно идентичен характеру нелинейных колебаний гибких оболочек. Получена формула для определения первой частоты нелинейных магнитоупругих колебаний в зависимости от амплитуды колебания и от величины напряженности внешнего магнитного поля. Показано, что в зависимости от ориентации внешнего магнитного поля, характер нелинейных магнитоупругих колебаний пластинок, в отличие от классического случая, может быть мягким.

1. Пусть упругая изотропная идеально проводящая пластинка-полоса постоянной толщины $2h$ отнесена к декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью x_1, x_2 . Пластинка занимает область $(0 \leq x_1 \leq a, -\infty < x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h)$, колеблется в вакууме при наличии внешнего постоянного магнитного поля с заданным вектором напряженности $H(H_{01}, 0, H_{03})$. Граничные условия на краях пластинки $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ таковы, что пластинка колеблется по форме цилиндрической поверхности образующими параллельными координатной линии Ox_2 (все величины зависят от координаты x_2). Магнитная проницаемость материала пластинки считается равной единице.

Будем пользоваться основными предположениями нелинейной теории ма

нитоупругости гибких пластин [1], считая справедливой гипотезу недеформируемых нормалей. Будем считать также, что влиянием тангенциальных составляющих сил инерции и токов смещения на характеристики магнитоупругих колебаний пластинки можно пренебречь.

На основе принятых предположений и гипотезы магнитоупругости тонких тел [2] в работе [1] получены основные уравнения и соотношения, описывающие нелинейные колебания проводящей пластинки в магнитном поле. Нелинейные члены, входящие в эти уравнения, по своему происхождению бывают двух типов: члены, характеризующие геометрическую нелинейность гибкой пластинки [3], и члены характеризующие электродинамическую нелинейность. В работе [4], на основе решения одномерной задачи нелинейных колебаний проводящей пластинки в продольном магнитном поле, показано, что в случае идеально проводящей пластинки, если имеет место условие $\left[(1 - \nu^2) H_{01}^2 / 2\pi E (kh) \right] \ll 1$ (здесь ν - коэффициент Пуассона, E - модуль упругости материала пластинки, k - волновое число) и если источником возмущений являются большие прогибы пластинки, то преобладающей является геометрическая нелинейность. Иными словами, если пластинка не слишком тонкая ($kh \geq 10^{-3}$), а интенсивность внешнего магнитного поля не слишком велика ($H_0 \leq 5 \cdot 10^4$ эрстед), то члены, учитывающие электродинамическую нелинейность, пренебрежимо малы по сравнению с соответствующими членами геометрической нелинейности.

Учитывая сказанное и используя результаты работ [1,4,5], уравнения нелинейных колебаний идеально проводящей пластинки - полосы в наклонном магнитном поле представляется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{(1 - \nu^2) H_{03}}{4\pi E} \left[H_{03} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - H_{01} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{h_1^* - h_1^-}{2h} \right] = 0 \\ D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2Eh}{(1 - \nu^2)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x_1} \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right] \right\} - \\ - \frac{h}{2\pi} \left[(H_{01}^2 + H_{03}^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - H_{01} H_{03} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - H_{01} \frac{h_1^* - h_1^-}{2h} + H_{03} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_1^* - h_1^-}{2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $u(x_1, t)$, $w(x_1, t)$ - искомые перемещения точек срединной плоскости пластинки, $D = 2Eh^3 / 3(1 - \nu^2)$ - цилиндрическая жесткость, ρ - плотность материала пластинки, h_1^* - неизвестные граничные значения тангенциальной компоненты $h_1(x_1, x_3, t)$ индуцированного в вакууме магнитного поля h на поверхностях $x_3 = \pm h$ пластинки соответственно.

Величины h_1^* , входящие в (1.1), определяются из решения уравнений Максвелла для окружающей среды

$$\text{rot} h = 0, \quad \text{div} h = 0 \quad (1.2)$$

с условиями

$$h_3 = H_{01} \frac{\partial w}{\partial x_1} - H_{03} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \quad \text{при} \quad x_3 = \pm h, \quad |x_1| \leq a \quad (1.3)$$

$$h_1 = -H_{01} \frac{\partial w}{\partial x_1} \quad \text{при} \quad x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_1 = a, \quad |x_3| \leq h$$

на поверхности пластинки и условиями затухания магнитных возмущений на бесконечности

$$h_i \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x_1^2 + x_3^2 \rightarrow \infty, \quad i = 1, 3 \quad (1.4)$$

Приближенное решение задачи (1.2) - (1.4) приведено в работе [6] и для определения $h_i^{\pm}$ получены следующие приближенные выражения:

$$h_i^{\pm} = h_i|_{x_3=\pm h} = \mp \frac{1}{R} \left(H_{01} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - H_{03} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \pm h H_{03} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} \right) \quad (1.5)$$

В (1.5) k - волновое число, значения которого, в зависимости от граничных условий на контуре пластинки и от напряженности внешнего магнитного поля, приведены в [6,7]. Указанные значения волнового числа k найдены путем асимптотического решения [8] соответствующей линейной задачи магнитоупругих колебаний рассматриваемой пластинки. Причем, как показано в работах [6,7], ошибка, вносимая применением асимптотического метода и использованием формул (1.5), находится в пределах точности тонких пластин.

Подставляя (1.5) в (1.1) и используя уже принятое допущение $+H_{01}^2 / 2\pi Ekh \approx 1$ ($i = 1, 3$), получим следующую исходную систему дифференциальных уравнений, описывающую одномерные нелинейные колебания идеально проводящей пластинки в наклонном магнитном поле:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{(1-\nu^2)H_{01}H_{03}}{4\pi Ekh} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} &= 0 \\ D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left[\frac{h}{2\pi} \left(H_{03}^2 + \frac{H_{01}^2}{kh} \right) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \\ - \frac{2Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x_1} \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right] \right\} - \frac{H_{01}H_{03}}{2k\pi} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

При решении конкретных задач к уравнениям (1.6) должны быть присоединены обычные условия закрепления краев пластинки.

2. На основе уравнений (1.6) исследуем нелинейные магнитоупругие колебания пластинки с одним заделанным ($x_1 = a$) и другим шарнирно опертым ($x_1 = 0$) краем. Что касается граничных условий для перемещения и усилия в срединной плоскости, то будем считать, что кромка пластинки $x_1 = 0$ неподвижна, а кромка $x_1 = a$ связана с упругой идеально проводящей диафрагмой, препятствующей сближению кромок пластинки. Тогда

граничным условиями задачи будут:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0 \\ w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = a \\ u = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} u_1 = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = a + l \\ u = u_1 \quad \text{при} \quad x_1 = a \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{2Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right] + \int_{-h}^h T_{11} dx_3 = \frac{2E_1 h_1}{1-\nu^2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \int_{-h}^h T_{11}^{(1)} dx_3 \quad \text{при} \quad x_1 = a$$

Здесь $E_1, \nu_1, 2h_1$ и l - модуль упругости, коэффициент Пуассона, толщина и ширина диафрагмы, T_{11} и $T_{11}^{(1)}$ - компоненты тензора напряжений Максвелла в пластинке и в диафрагме соответственно.

$$T_{11} = \frac{1}{4\pi} \left[H_{03}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) - 2H_{01}H_{03} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right], \quad T_{11}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} H_{03}^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

u_1 - продольные перемещения точек упругой диафрагмы, являющейся решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = 0 \quad (2.3)$$

Из (2.3) и первого уравнения системы (1.6) находим

$$\begin{aligned} u_1 = c_1(t)x_1 + c_2(t) \\ u = -\frac{1}{2} \int_0^{x_1} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + \frac{(1-\nu^2)H_{01}H_{03}}{4\pi Ekh} w + c_3(t)x_1 + c_4(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.2) и учитывая (2.1), определяем неизвестные функции интегрирования $c_i(t)$:

$$\begin{aligned} c_1 = \frac{E(1-\nu_1^2)h}{E_1(1-\nu^2)h_1} c_3, \quad c_2 = -(a+l)c_1, \quad c_4 = 0 \\ c_3 = \frac{r}{2a} \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 dx_1, \quad r = \left[1 + \frac{l}{a} \frac{E(1-\nu_1^2)h}{E_1(1-\nu^2)h_1} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Используя (2.5) из (2.4) найдем выражение

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 = \frac{(1-\nu^2)H_{01}H_{03}}{4\pi Ekh} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{r}{2a} \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 dx_1$$

которое позволяет исключить функцию $u(x_1, t)$, из системы (1.6). В результате, рассматриваемая задача нелинейных магнитоупругих колебаний сводится к решению уравнения

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{h}{2\pi} \left(H_{03}^2 + \frac{H_{01}^2}{kh} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{3H_{01}H_{03}}{2\pi k} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{Ehr}{a(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 = 0 \quad (2.6)$$

при условии (2.1) на краях пластинки.

Характерной особенностью уравнения (2.6) является то, что в нем, кроме обычного нелинейного члена третьего порядка (последний член в (2.6)), появился новый член квадратичной нелинейности магнитоупругого происхождения (предпоследний член в (2.6)). Появление указанного нелинейного члена обусловлено возникновением продольного усилия в срединной плоскости пластинки (результат взаимодействия индуцированного в направлении оси Ox_2 токи проводимости с поперечной составляющей H_{03} внешнего магнитного поля). А это значит, что магнитоупругие нелинейные колебания рассматриваемой пластинки качественно могут иметь характер упругих нелинейных колебаний цилиндрической панели [3]. В частности, как будет показано ниже, зависимость между амплитудой и частотой колебания рассматриваемой магнитоупругой системы может иметь мягкий характер, то есть с увеличением амплитуды частота колебаний может уменьшаться. Отметим [3], что в отсутствии магнитного поля характер нелинейных колебаний пластин, в отличие от случаев оболочек, исключительно жесткого характера, то есть с увеличением амплитуды частота колебаний возрастает.

Представляя решение уравнения (2.6) в виде

$$w = f(t) \left[\left(\frac{x_1}{a} \right)^4 - \frac{3}{2} \left(\frac{x_1}{a} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{a} \right) \right]$$

удовлетворим условиям (2.1), а для определения неизвестной функции $f(t)$ из (2.6) методом Галеркина, получим следующее нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \Omega^2 (\xi + \beta \xi^2 + \gamma \xi^3) = 0 \quad (2.7)$$

где

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 \alpha, \quad \alpha = 1 + \frac{1-\nu^2}{28E\pi} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(H_{03}^2 + \frac{1}{kh} H_{01}^2 \right)$$

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{D}{2\rho h}} \frac{15,45}{a^2}, \quad \beta = \frac{3(1-\nu^2)}{14\pi kh} \left(\frac{a}{2h} \right) \frac{H_{01}H_{03}}{\alpha E}$$

$$\gamma = \frac{384}{245} \frac{r}{a}, \quad \xi = \frac{1}{2h} w\left(\frac{a}{2}, t\right) \quad (2.8)$$

Ω_0 - частота собственных малых колебаний пластинки при отсутствии магнитного поля, Ω - собственная частота при малых магнитоупругих колебаниях.

Из (2.7) видно, что если $\beta < 2\sqrt{\gamma}$, то пластинка имеет единственное (основное) положение равновесия ($\xi = 0$), около которого происходят колебания. При $\beta > 2\sqrt{\gamma}$ пластинка имеет три положения равновесия. А это значит, что если магнитное поле наклонное ($\beta = 0$), и его компоненты удовлетворяют условию, вытекающему из условия $\beta > 2\sqrt{\gamma}$,

$$\left[1 + \overline{H}_{03}^2 + \frac{1}{kh} \overline{H}_{01}^2\right]^{-1} \overline{H}_{01}^2 \overline{H}_{03}^2 > \frac{512r}{735} \quad (2.8)$$

где

$$\overline{H}_{0i}^2 = \frac{1 - \nu^2}{7\pi E} \left(\frac{a}{2h}\right)^2 H_{0i}^2, \quad (i = 1, 3)$$

то пластинка может совершить нелинейные колебания как около основного положения равновесия, так и около изогнутых положений. Отметим, что при $\beta = 0$ (либо магнитное поле отсутствует, либо не является наклонным) колебания пластинки происходят исключительно около основного положения равновесия.

Для отыскания амплитудно - частотной зависимости нелинейных магнитоупругих колебаний найдем решение уравнения (2.7), отвечающее начальным условиям

$$\xi = \frac{A_0}{2h}, \quad \frac{d\xi}{dt} = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (2.9)$$

методом возмущений [3]. Введем безразмерные параметры прогиба, времени и малый параметр ε следующим образом:

$$x(t) = \frac{1}{A_0} w\left(\frac{a}{2}, t\right), \quad \tau = \omega t, \quad \varepsilon = \frac{A_0}{a} \quad (2.10)$$

где ω - отыскиваемая частота нелинейных магнитоупругих колебаний. Учитывая (2.10), уравнение (2.7) и начальные условия (2.9) представим в виде

$$\omega^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \Omega^2 (x + \delta \varepsilon x^2 + \eta \varepsilon^2 x^3) = 0$$

$$x = 1, \quad \frac{dx}{d\tau} = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \quad (2.11)$$

где

$$\delta = \frac{3(1-\nu^2)}{14\pi kh} \left(\frac{a}{2h}\right)^2 \frac{H_{01}H_{03}}{\alpha E}, \quad \eta = \frac{384}{245} \left(\frac{a}{2h}\right)^2 \frac{r}{\alpha} \quad (2.12)$$

Решение задачи Коши (2.11) и величину ω представим в виде разложения по степеням малого параметра ε :

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (2.13)$$

Подставляя (2.13) в (2.11) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим следующую цепь последовательных задач Коши относительно линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 x_0 &= 0 \\ x_0 &= 1, \quad \frac{dx_0}{d\tau} = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 x_1 &= \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{2\omega_1}{\omega_0} x_0 - \delta x_0^2\right) \\ x_1 &= 0, \quad \frac{dx_1}{d\tau} = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 x_2 &= \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 \left[\left(\frac{2\omega_2}{\omega_0} - \frac{3\omega_1^2}{\omega_0^2}\right) x_0 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\omega_1}{\omega_0} x_1 + 2\delta \frac{\omega_1}{\omega_0} x_0^2 - 2\delta x_0 x_1 - \eta x_0^3 \right] \\ x_2 &= 0, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Кроме того, должно быть выполнено условие периодичности

$$x_i(\tau + 2\pi) = x_i(\tau), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

Решая задачу (2.14) при условии (2.17) найдем

$$x_0(\tau) = \text{const}, \quad \omega_0 = \Omega \quad (2.18)$$

Из (2.15), в силу (2.17) и (2.18), получаем

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\delta}{6} (\cos 2\tau + 2 \cos \tau - 3) \\ \omega_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Подставляя (2.18) и (2.19) в (2.16), относительно $x_2(\tau)$ получается

следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + x_2 = -\frac{\delta^2}{3}(1 + \cos 2\tau) - \frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{2} + \frac{8^2}{3}\right)\cos 3\tau + \left(\frac{2\omega_2}{\omega_0} + \frac{5}{6}\delta^2 - \frac{3}{4}\eta\right)\cos \tau \quad (2.20)$$

Из (2.20) видно, что решение уравнения (2.20) удовлетворяет условию периодичности (2.17), если коэффициент при $\cos \tau$ равен нулю, то есть если

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{3}{8}\eta - \frac{5}{12}\delta^2 \quad (2.21)$$

Учитывая (2.10), (2.18), (2.19), и (2.21) из (2.13) для определения первой частоты нелинейных магнитоупругих колебаний получается следующая приближенная формула:

$$\frac{\omega^2}{\Omega_0^2} = 1 + \overline{H}_{03}^2 + \frac{1}{kh} \overline{H}_{01}^2 + \left(\gamma_1 - \gamma_2 \frac{\overline{H}_{01}^2 \overline{H}_{03}^2}{1 + \overline{H}_{03}^2 + \frac{1}{kh} \overline{H}_{01}^2} \right) A^2 \quad (2.22)$$

где

$$A = \frac{A_0}{2h}, \quad \gamma = \frac{288}{245}r, \quad \gamma_2 = \frac{15}{2(\alpha k)^2} \quad (2.23)$$

Рассматривая формулу (2.22), легко заметить, что:

а) частота $\overline{\omega}$ линейных магнитоупругих колебаний ($A = 0$) определяется формулой

$$\frac{\overline{\omega}^2}{\Omega_0^2} = 1 + \overline{H}_{03}^2 + \frac{1}{kh} \overline{H}_{01}^2 \quad (2.24)$$

и существенно увеличивается с увеличением величины напряженности внешнего магнитного поля [2];

б) характер нелинейных колебаний зависит от знака коэффициента при A^2 . Если напряженность магнитного поля достаточно мала, то коэффициент при A^2 положителен и с увеличением амплитуды частота колебаний возрастает (жесткая колебательная система). Если же указанный коэффициент отрицательный (такая возможность обеспечивается тем, что $0 \leq r \leq 1$ и вторая величина в скобках в формуле (2.22) - монотонно возрастающая функция напряженности и магнитного поля), то учет нелинейности приводит к уменьшению частоты колебаний (мягкая колебательная система). Причем, как будет показано ниже, частота нелинейных магнитоупругих колебаний при достаточно большой амплитуде возмущений и высокой напряженности поля может быть меньше частоты свободных линейных колебаний ($\omega^2 < \Omega_0^2$). Отметим еще раз, что последние утверждения имеют место только в случае наклонного магнитного поля ($H_{01}H_{03} \neq 0$).

Для выяснения зависимости частоты нелинейных колебаний от напряженности магнитного поля рассмотрим случай, когда кромки пластинки свободно смещаются ($r = 0$) и $H_{01}^2 = khH_{03}^2$. В этом случае формула (2.22) принимает вид

$$\frac{\bar{\omega}^2}{\Omega_0^2} = 1 + 2\bar{H}_{03}^2 - \gamma_2 kh \frac{\bar{H}_{03}^4}{1 + 2\bar{H}_{03}^2} A^2 \quad (2.25)$$

Из (2.25) следует, что если $A^2 \leq \bar{A}^2 = 4/\gamma_2 kh$, то с увеличением $\bar{H}_{03}$ частота нелинейных колебаний возрастает (оставаясь меньшей от частоты линейных магнитоупругих колебаний). Если же $A^2 > \bar{A}^2$, то с увеличением напряженности магнитного поля частота нелинейных колебаний в начале увеличивается, достигая максимума для определенного значения $\bar{H}_{03}$, после чего уменьшается и при

$$\bar{H}_{03} > \bar{H}_{03}^*, \quad \text{где} \quad (\bar{H}_{03}^*)^2 = \frac{A^2}{2(A^2 - \bar{A}^2)} \quad (2.26)$$

становится меньше, чем Ω_0 (выясним, что Ω_0 - частота линейных упругих колебаний при отсутствии магнитного поля).

Для определенности отметим, что при $\bar{H}_{03} = \bar{H}_{03}^*$ и $A = l\bar{A}$, где $l > 1$, имеем $\delta\varepsilon = \sqrt{1,2}l^{-1}$, следовательно, если $l > \sqrt{1,2}$, то выполняется необходимое условие $\delta\varepsilon < 1$ применения метода возмущений.

В заключении отметим, что уравнение (2.7) можно решить, применяя различные приближенные методы нелинейных колебаний (его можно решить и точно при помощи эллиптических функций), таких как метод Бубнова - Галеркина, метод гармонического баланса, метод малого параметра и т.д. В разложении амплитудно - частотной зависимости, полученной на основе любого из указанных методов (в том числе и на основе точного решения), амплитуда колебаний входит, начиная со второй степени (см. формулу (2.22)). В работе [9] методом Бубнова - Галеркина получена указанная зависимость, в которой входит линейный член от амплитуды колебания. Причиной этого сомнительного результата (использованного в [3]) является то, что ортогонализация произведена не по полному периоду колебаний, а по четверти периода. О правильном качественном характере амплитудно - частотной зависимости и о неприменимости ортогонализации по четверти периода обратил мое внимание мой друг М.М.Минасян, которому за это и за полезные обсуждения приношу глубокую благодарность.

Л и т е р а т у р а

1. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Основные уравнения и соотношения нелинейных магнитоупругих колебаний тонких электропроводящих пластинок. - Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1985, т.38, № 2.
2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. - М.:Наука, 1977.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. - М.:Наука, 1972.
4. Багдасарян Г.Е., Хачатрян Г.М. Нелинейные колебания проводящей пластинки в продольном магнитном поле. - Изв. НАН РА, Механика, 1991.
5. Багдасарян Г.Е. Уравнения магнитоупругих колебаний тонких идеально проводящих пластин. - Прикл. мех., 1983, т.19, № 12.
6. Багдасарян Г.Е. Применение асимптотического метода В.В.Болотина для исследования магнитоупругих колебаний идеально проводящих прямоугольных пластин. - Проблемы машиностроения, 1986, вып.25.
7. Акопян П.З., Багдасарян Г.Е. Колебания прямоугольной проводящей пластинки в продольном магнитном поле. - Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1987, т.40, № 3.
8. Болотин В.В. Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинок. - Инж. сб., 1960, 31.
9. Григолюк Э.И. Нелинейные колебания и устойчивость пологих оболочек и стержней. - Изв. АН СССР, отдел техн.наук, 1955, № 3.

Институт Механики НАН Армении

Поступила в редакцию
29.12.1993

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ
ТЕРМОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ

Мовсисян Л. А., Габриелян М. С.

Լ.Ա. Մովսիսյան, Մ.Ս. Գաբրիելյան

Զերմառառձգական սալի շարժման դեկավարման մի խնդրի մացիև

Դիտարկվում է ջերմառառձգական (կապակցված խնդիր) սալի ծոման շարժման օպտիմալ դեկավարման խնդիրը: Տրված եախևակաև պայմաևների դեպքում պահանջվում է բեռի եւ ջերմության միջոցով սալը ժամանակի որոշակի երկու պահերի համար բերել տրված վիճակների: Որպես օպտիմալություն սկզբունք միևնույնացվում է ջերմությունից եւ բեռից քառակուսային ֆունկցիոնալը:

L. A. Movsisian, M. S. Gabrielian

On one problem of controlling the thermoclastic plate-layer's motion

Изучается задача оптимального управления одномерного изгибного колебания термоупругой пластинки (связанная задача). При заданных начальных условиях относительно прогиба, его скорости и температуры требуется при помощи нагрузки и температуры объект привести в фиксированные моменты времени к заданным положениям (для простоты изложения таких положения берутся два).

В качестве критерия оптимальности минимизируется квадратичный функционал от действующей нагрузки и температуры.

1. Уравнения поперечного движения пластинки и связанной задачи теплопроводности в классической постановке на основании [1-3] берутся в виде

$$D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \alpha(1+\nu) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, t) \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left(\frac{12\chi}{h^2} + \frac{6k^*}{\rho h^2 c_p} \right) T - \chi \eta \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} = \\ = \frac{12\dot{Q}z_0}{\rho h^3 c_p} + \frac{6k^*(T_s - T_s)}{\rho h^2 c_p} = \Phi(x, t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Обозначения общепринятые или сохранены [1-3], поэтому здесь не разъясняются.

Пусть имеются следующие граничные:

$$w = M = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \alpha(1+\nu) T \right] = 0, \quad T = \Phi_1(t) \quad \text{при } x = 0 \quad (1.3)$$

$$w = M = 0, \quad T = \Phi_2(t) \quad \text{при } x = l$$

и начальные условия

$$w = F_1(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = F_2(x), \quad T = T_0(x) \quad \text{при } t = 0 \quad (1.4)$$

Представляя решения (1.1) и (1.2)

$$w_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l w(x, t) \sin \lambda_k x dx, \quad T_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l T(x, t) \sin \lambda_k x dx, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{l} \quad (1.5)$$

с учетом граничных условий (1.3) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_k}{dt^2} + \omega_k^2 w_k - a_k T_k &= f_k(t) \\ \frac{dT_k}{dt} + \chi_k T_k + b_k \frac{dw_k}{dt} &= \psi_k(t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_k^2 &= \frac{D}{\rho h} \lambda_k^4, \quad a_k = \frac{\alpha(1+\nu)}{\rho h} \lambda_k^2, \quad b_k = \chi \eta \lambda_k^2 \\ \chi_k &= \frac{12\chi}{h^2} + \frac{6k}{\rho h c_p} + \chi \lambda_k^2, \quad f_k = \frac{2}{\rho h l} \int_0^l F \sin \lambda_k x dx \\ \psi_k &= \chi \lambda_k [\Phi_1(t) - (-1)^k \Phi_2(t)] + \varphi_k, \quad \varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \Phi \sin \lambda_k x dx \end{aligned}$$

Начальные условия для системы (1.6) будут

$$w_k(0) = c_k, \quad \frac{dw_k(0)}{dt} = d_k, \quad T_k(0) = e_k \quad (1.7)$$

где постоянные c_k , d_k и e_k - соответствующие коэффициенты Фурье разложения функций (1.4).

2. Задача ставится следующим образом: в момент $t = 0$ пластинке сообщается начальное отклонение, скорость и температура по (1.4). Требуется в моменты $t = t_1$ и $t = t_2$ пластинку привести в определенные положения $w_1(x, t_1)$ и $w_2(x, t_2)$ при этом минимизируя следующий функционал:

$$I = \int_0^{t_2} \int_0^l (\beta F^2 + 2\gamma F\Psi + \varepsilon \Psi^2) dx dt \quad (2.1)$$

Выбор постоянных $\beta, \gamma, \varepsilon$ ($\beta > 0, \beta\varepsilon > \gamma^2$) в некотором смысле произволен и для конкретной конструкции их следует связать с тем, какое воздействие (силовое или температурное) легче осуществить. Интеграл (2.1) не есть полная внутренняя энергия пластинки, но характеризует ее, в частных случаях может быть и внутренняя энергия.

Учитывая разложения F и Ψ , из (2.1) получим

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t_2} (\beta f_k^2 + 2\gamma f_k \psi_k + \varepsilon \psi_k^2) dt \quad (2.2)$$

Имея в виду, что в последнем функционале слагаемые независимые, минимизация (2.2) для каждого k осуществляется в отдельности.

Таким образом, для каждого k с учетом (1.6) получим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x}_1 = \omega x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega x_1 + \alpha x_1 + u, \quad \dot{x}_3 = -\chi x_3 - \xi x_2 + v \quad (2.3)$$

при минимизации функционал

$$I_k = \frac{1}{2} \int_0^t (\beta u^2 + 2\gamma u v + \varepsilon v^2) dt; \quad \beta > 0; \quad \beta \varepsilon > \gamma^2 \quad (2.4)$$

Чтобы не загромождать формулы, индекс k опущен и использованы обозначения

$$x_{1k} = \omega_k w_k, \quad x_{2k} = \dot{w}_k, \quad x_{3k} = T_k \\ \xi_k = b_k \omega_k \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, \quad u_k = f_k, \quad v_k = \psi_k \quad (2.5)$$

Решение системы (2.3) запишется

$$\bar{x}(t) = X(t, 0) \bar{X}(0) + \int_0^t X(t, \tau) \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ v \end{pmatrix} d\tau \quad (2.6)$$

где $X(t, \tau)$ - нормированная фундаментальная матрица, соответствующая однородной системе (2.3), выражение которой из-за громоздкости не приводится. Приведем выражение только двух элементов, которые нам и в дальнейшем понадобятся.

$$x_{12}(t, \tau) = -\frac{\omega(\mu_3 + \mu_2)e^{\mu_1(t-\tau)}}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_1)} + \frac{\omega(\mu_3 + \mu_1)e^{\mu_2(t-\tau)}}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)} - \\ - \frac{\omega(\mu_1 + \mu_2)e^{\mu_3(t-\tau)}}{(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)}$$

$$x_{13}(t, \tau) = \frac{\alpha \omega e^{\mu_1(t-\tau)}}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_1)} - \frac{\alpha \omega e^{\mu_2(t-\tau)}}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)} + \\ + \frac{\alpha \omega e^{\mu_3(t-\tau)}}{(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)}$$



где μ_i - корни характеристического уравнения

$$\mu^3 + \chi \mu^2 + (\omega^2 + a\xi) \mu + \omega^2 \chi = 0 \quad (2.7)$$

Рассматривается случай, когда корни уравнения (2.7) различные (физически, наверное, только этот случай возможен). Случай кратных корней не приводится, так как класс таких задач узкий, к тому же исследование можно провести совершенно аналогичным образом.

Через $\bar{X}(0)$ обозначен вектор

$$\bar{X}(0) = \begin{pmatrix} c = \omega_k c_k \\ d = d_k \\ e = e_k \end{pmatrix}$$

Пусть требуется, чтобы пластинка в момент $t = t_1 > 0$ принимала форму $w_1(x, t_1)$, а в $t = t_2 > t_1$ - $w_2(x, t_2)$.

Представляя w_1 и w_2 в виде рядов

$$w_1 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(1)} \sin \lambda_k x, \quad w_2 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(2)} \sin \lambda_k x \quad (2.8)$$

из (2.6) получим следующие интегральные условия:

$$\int_0^{t_1} x_{12}(t, \tau) u d\tau + \int_0^{t_1} x_{13}(t, \tau) v d\tau = L_1, \quad i = 1, 2 \quad (2.9)$$

$$L_i = A^{(i)} - x_{11}(t_i) c - x_{12}(t_i) d - x_{13}(t_i) e$$

Обозначим [4]

$$h_{11}(\tau) = \begin{cases} x_{12}(t, \tau) & \text{при } 0 \leq \tau \leq t_1 \\ 0 & \text{при } t_1 < \tau \leq t_2 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$h_{12}(\tau) = \begin{cases} x_{13}(t, \tau) & \text{при } 0 \leq \tau \leq t_1 \\ 0 & \text{при } t_1 < \tau \leq t_2 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$h_{21}(\tau) = x_{12}(t_2, \tau), \quad h_{22}(\tau) = x_{13}(t_2, \tau), \quad 0 \leq \tau \leq t_2$$

тогда интегральные условия (2.9) примут следующий вид:

$$\int_0^{t_1} h_{11}(\tau) u d\tau + \int_0^{t_1} h_{12}(\tau) v d\tau = L_1$$

$$\int_0^{t_2} h_{21}(\tau) u d\tau + \int_0^{t_2} h_{22}(\tau) v d\tau = L_2 \quad (2.12)$$

Таким образом, проблема сводится к минимизации функционала (2.5) при наличии интегральных условий (2.12).

Так как функции $h_i(\tau)$ имеют разрывы первого рода, то целесообразно полученную вариационную задачу решить с помощью проблемы моментов [5]. Исходя из вида функционала (2.5), норма основного пространства будет

$$\begin{aligned} \rho_0^2 &= \min_{L_1 h_1 + L_2 h_2 = 1} \rho^2(h_1(\cdot), h_2(\cdot)) = \\ &= \frac{1}{\beta \varepsilon - \gamma^2} \int_0^t \min_{L_1 h_1 + L_2 h_2 = 1} [\varepsilon h_{1t}^2 - 2\gamma h_{1t} h_{2t} + \beta h_{2t}^2] dt > 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Норма сопряженного пространства выбирается в виде (2.4).

Так как система (2.3) вполне управляема [6], то $\rho_0^2 > 0$. После несложных вычислений получим

$$\rho_0^2 = \frac{1}{G} \frac{PR - Q^2}{\beta \varepsilon - \gamma^2}, \quad l_1^0 = \frac{L_1 R - L_2 Q}{G}, \quad l_2^0 = \frac{PL_2 - QL_1}{G} \quad (2.14)$$

где

$$G_1 = PL_2^2 = 2QL_1 L_2 + RL_1^2$$

$$P = \int_0^{t_1} (\varepsilon h_{1t}^2 + \beta h_{2t}^2 - 2\gamma h_{1t} h_{2t}) dt$$

$$Q = \int_0^{t_2} (\varepsilon h_{1t} h_{2t} + \beta h_{1t} h_{2t} - 2\gamma (h_{1t} h_{2t} - h_{1t} h_{2t})) dt$$

$$R = \int_0^{t_1} (\varepsilon h_{2t}^2 + \beta h_{2t}^2 - 2\gamma h_{2t} h_{2t}) dt$$

Вектор $h^0(t)$ будет

$$\begin{pmatrix} h_1^0 \\ h_2^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{G} \begin{pmatrix} (L_1 R - L_2 Q) h_{1t}(t) + (L_2 P - L_1 Q) h_{2t}(t) \\ (L_1 R - L_2 Q) h_{1t}(t) + (L_2 P - L_1 Q) h_{2t}(t) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Если искать оптимальные значения управляющих воздействий $u_0(t)$ и $v_0(t)$ следующим образом:

$$u_0(t) = \sigma(\varepsilon h_1^0 - \gamma h_2^0); \quad v_0(t) = \sigma(\beta h_2^0 - \gamma h_1^0) \quad (2.16)$$

в постоянное определить из условия

$$\int_0^{t_2} (h_1^0 u^0 + h_2^0 v^0) dt = 1 \quad (2.17)$$

то получим

$$u^0 = \frac{Q}{PR - Q^2} (\varepsilon h_1^0 - \gamma h_2^0), \quad v^0 = \frac{Q}{PR - Q^2} (\beta h_2^0 - \gamma h_1^0) \quad (2.18)$$

Нетрудно проверить, что

$$\rho_*^2(u^0(\cdot), v^0(\cdot)) = \rho_0^{-2} \quad (2.19)$$

Таким образом, управляющие оптимальные функции будут

$$F^0(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0(t) \sin \lambda_k x, \quad \Phi^0(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^0(t) \sin \lambda_k x \quad (2.20)$$

Так как $w_k \sim O(k^{-1})$, $x_i, c, d, e, \sim (k^{-2})$, элементы фундаментальной матрицы имеют нулевой порядок, $A_k^{(1)} \sim (k^{-2})$, а F и Φ по (1.1), (1.2) принадлежат классу L_2 по x , то f_k и φ_k имеют порядок не больше, чем k^{-1} , а из условия ограниченности "энергии" (2.2) коэффициенты $\beta, \gamma, \varepsilon$ имеют порядок не больше, чем k^{-1} .

Величины P, Q и R из (2.15) имеют порядок не больше, чем k^{-2} , следовательно, u_k^0 и v_k^0 имеют порядок не больше, чем k^{-6} , где $\delta > 1$, т.е. функции F^0 и Φ^0 принадлежат к классу $L_2[0, t_2]$.

3. Для иллюстрации вышеприведенных результатов рассмотрим конкретный пример для пластинки из меди. Она теплоизолирована ($k^* = 0$), отсутствуют тепловые источники и не подается тепло через края ($\Phi = \Phi_1 = \Phi_2 = 0$). Температура возникает только из-за деформации, а управление движением осуществляется только через нагрузку.

Предполагается, что пластинке сообщено начальное отклонение по одной полуволне, по такой же форме прилагается нагрузка. Тогда, вместо системы (1.6) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \varphi - 1.33 \cdot 10^5 \theta &= 10^8 f(\tau) \\ \frac{d\theta}{d\tau} + 1.196 \cdot 10^{-3} \theta + 0.85 \cdot 10^{-7} \frac{d\varphi}{d\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

с начальными условиями

$$\varphi(0) = 1, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad \theta(0) = 0 \quad (3.2)$$

Здесь введены обозначения и принято

$$\tau = \omega_1 t, \quad \omega_1^2 = \frac{Eh^2 \pi^4}{12(1-\nu^2)\rho l^4}, \quad \varphi = \frac{w_1(t)}{w_1(0)}$$

$$\theta = \alpha h T_1, \quad \frac{\pi h}{l} = 10^{-1}, \quad \frac{w_1(0)}{h} = 10^{-3}$$

Корнями характеристического уравнения (2.7) является

$$\mu_1 = -1.17 \cdot 10^{-3}; \quad \mu_{2,3} = \eta \pm i\delta; \quad \delta = 1.0113; \quad \eta = -1.35 \cdot 10^{-5} \quad (3.3)$$

Вопрос ставится следующим образом: нагрузку $f(\tau)$ подобрать таким образом, чтобы в моменты $\tau_1 = \frac{\pi}{2\delta}$ и $\tau_2 = \frac{\pi}{\delta}$ амплитуда прогиба достигла

$$\varphi(\tau_1) = 3 \text{ и } \varphi(\tau_2) = 2.$$

Вычисление дает

$$\rho_0^2 = 0.02747 \quad (3.4)$$

Управляющая функция определяется как

$$f^0(\tau) = 10^{-8} h^0(\tau) \rho_0^{-2} \quad (3.5)$$

где

$$h_0(\tau) = l_1^0 h_1(\tau) + l_2^0 h_2(\tau)$$

$$h_1(\tau) = \begin{cases} (A \sin \delta \tau + B \cos \delta \tau) \exp(\eta(\tau_1 - \tau)) - A \exp(\mu_1(\tau_1 - \tau)), & 0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ 0, & \tau_1 < \tau \leq \tau_2 \end{cases}$$

$$h_2(\tau) = (B \sin \delta \tau - A \cos \delta \tau) \exp(\eta(\tau_2 - \tau)) - A \exp(\mu_1(\tau_2 - \tau)), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_2$$

$$l_1^0 = 0.1679; \quad l_2^0 = 0.1692; \quad A = -2.64 \cdot 10^{-5}; \quad B = 0.9889$$

В частности, если температурный эффект отсутствует, то управляющая функция есть

$$0^8 f(\tau) = \begin{cases} 1.13 \cos \tau + 0.31 \sin \tau, & 0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2} \\ 0.31 \sin \tau, & \frac{\pi}{2} < \tau \leq \pi \end{cases} \quad (3.6)$$

Аналогичным же образом можно осуществить управление движением и при совместном воздействии нагрузки и температуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. К устойчивости модуляционных волн в термоупругой пластине. - Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1993, т. 46, № 3-4, с.31-35.

2. *Новоцкий В.* Динамические задачи термоупругости.- М.: Мир, 1970, 256с.
3. *Болотин В. В.* Уравнение нестационарных температур полей в тонких оболочках при наличии источников тепла.- ПММ, 1960, т. 24, вып. 2, с. 361-363.
4. *Габриелян М. С.* Об управлении линейной системы, описываемой одним уравнением высокого порядка.- Сб. трудов ЦНИЛСУ, 1970, вып. 1, Ереван, с.188-193.
5. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968, 475 с.
6. *Калман Р.* Об общей теории систем управления.- Тр. 1 конгресса ИФАК, т.2, М., Изд-во АН СССР, 1961, с.521-547.

Институт механики НАН Армении
Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
1.12.1994

ИЗГИБНЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Баблоян А. А., Баблоян К. Б.

Ա.Տ.Բաբլոյան, Կ.Բ.Բաբլոյան

Վերջավոր երկարության գլանի լայնակի և ծոման տատանումները

Դիտարկվում է վերջավոր չափերով առաձգական գլանի կայունացված տատանումները երբ գլանը դեֆորմացվում է հիմնադրակի տատանումների տապալառով:

Խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի եղանակով և բերվում է զծային հանրահաշվական անվերջ համակարգերի լուծմանը: Ոչ-ոսկոնանսային դեպքերի համար ցույց է տրվում, որ այդ համակարգերը քվադր-լինյան ռեզոնանս են: Անհայտ գործակիցների համար սրացված են ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնց օգնությամբ անջատվել են լարումների եզակիությունները:

A.A.Babloyan, K.B.Babloyan

Bending and Transverse Vibrations of a Cylinder of Finite Length

Рассматривается динамическая задача упругости об установившихся вынужденных колебаниях сплошного цилиндра конечной длины. Цилиндр деформируется из-за изгибных и поперечных колебаний основания. Целью работы является получение точных формул для описания динамических полей напряжений и перемещений, а также разработка способа вычисления частотных характеристик сплошного упругого цилиндра конечной длины под действием сейсмических сил. Решения и подробный анализ аналогичных задач при других граничных условиях приведены в книге [1].

1. Построение решения краевой задачи. Построению общих решений уравнений движения уделяется очень большое внимание. Однако, как справедливо отмечается в [1], роль таких общих представлений при фактическом решении граничных задач теории упругости для тел конечных размеров весьма мала. Поэтому при построении решения задачи будем пользоваться только результатами работ [2,5].

Ограничиваясь только первой гармоникой по окружному координату (нулевая гармоника соответствует осесимметричной задаче), решение рассматриваемой задачи представим в виде

$$\begin{aligned} u_r(r, z, \varphi, t) &= \bar{u}_r(r, z) \exp(i\omega t) \cos \varphi \\ u_\varphi(r, z, \varphi, t) &= \bar{u}_\varphi(r, z) \exp(i\omega t) \sin \varphi \\ u_z(r, z, \varphi, t) &= \bar{u}_z(r, z) \exp(i\omega t) \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_r(r, z) &= u_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} R_{1k}(r) \sin \beta_k z + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p u_p(z) J_1'(\alpha_p r) \\
\bar{u}_\varphi(r, z) &= -u_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} R_{2k}(r) \sin \beta_k z + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{u_p(z)}{r} J_1(\alpha_p r) \\
\bar{u}_z(r, z) &= r \omega_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} R_{3k}(r) \cos \beta_k z + \sum_{p=1}^{\infty} w_p(z) J_1(\alpha_p r)
\end{aligned} \quad (1.2)$$

Функции, входящие в (1.2), определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
R_{1k} + R_{2k} &= 2\lambda_{2k} Q_k I_2(\lambda_{2k} r) + 2\beta_k M_k I_2(\lambda_{1k} r) \\
R_{1k} - R_{2k} &= 2\lambda_{2k} Q_k I_0(\lambda_{2k} r) + 2\beta_k N_k I_0(\lambda_{1k} r) \\
R_{3k}(r) &= 2\beta_k Q_k I_1(\lambda_{2k} r) + \lambda_{1k} (M_k + N_k) I_1(\lambda_{1k} r)
\end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}
u_0(z) &= \delta_0 \frac{\cos c_1(h-z)}{\cos c_1 h} + \frac{\chi}{c_2} \left(\sin c_2 z - \frac{2c_2 \sin c_1 z \cdot \cos c_2 h}{c_1 \cos c_1 h} \right) \\
w_0(z) &= \chi \cos c_2 z, \quad \Omega_p = \frac{\alpha_p^2 R^2}{\alpha_p^2 R^2 - 1}
\end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}
u_p(z) &= \frac{2\Omega_p}{R c_1^2 J_1(\alpha_p R)} \left\{ X_p \left[\frac{\operatorname{sh} \gamma_{2p} z}{\operatorname{ch} \gamma_{2p} h} - \frac{\gamma_{1p} \gamma_{2p} \operatorname{sh} \gamma_{1p} z}{\gamma_p^2 \operatorname{ch} \gamma_{1p} h} \right] + \right. \\
&\quad \left. + Y_p \left[\frac{\operatorname{ch} \gamma_{2p}(h-z)}{\operatorname{ch} \gamma_{2p} h} - \frac{\operatorname{ch} \gamma_{1p}(h-z)}{\operatorname{ch} \gamma_{1p} h} \right] \right\} \\
w_p(z) &= \frac{2\gamma_{2p} \Omega_p}{R c_1^2 J_1(\alpha_p R)} \left\{ X_p \left[\frac{\operatorname{ch} \gamma_{2p} z}{\operatorname{ch} \gamma_{2p} h} - \frac{\alpha_p^2 \operatorname{ch} \gamma_{1p} z}{\gamma_p^2 \operatorname{ch} \gamma_{1p} h} \right] - \right. \\
&\quad \left. - Y_p \left[\frac{\operatorname{sh} \gamma_{2p}(h-z)}{\operatorname{ch} \gamma_{2p} h} - \frac{\alpha_p^2 \operatorname{sh} \gamma_{1p}(h-z)}{\gamma_{1p} \gamma_{2p} \operatorname{ch} \gamma_{1p} h} \right] \right\}
\end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\gamma_{1p}^2 &= \alpha_p^2 - c_1^2, \quad \gamma_{2p}^2 = \alpha_p^2 - c_2^2, \quad \gamma_p^2 = \alpha_p^2 - 0,5c_1^2 \\
\lambda_{1k}^2 &= \beta_k^2 - c_1^2, \quad \lambda_{2k}^2 = \beta_k^2 - c_2^2, \quad \lambda_k^2 = \beta_k^2 - 0,5c_1^2, \quad m = \frac{\nu}{1-2\nu} \\
c_1^2 &= \frac{\rho \omega^2}{G}, \quad c_2^2 = \frac{1-2\nu}{2-2\nu} c_1^2, \quad \beta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2h}, \quad J_1'(\alpha_p R) = 0
\end{aligned} \quad (1.6)$$

где h - высота цилиндра, R - его радиус, ρ - плотность, а G - модуль сдвига материала. ω - вынужденная частота. Компоненты тензора напряжений вычисляются при помощи закона Гука с использованием (1.1)-(1.5).

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} u_x &= \delta_0 \exp(i\omega t), \quad u_y = 0, \quad u_z = \chi x \exp(i\omega t) \quad \text{при } z = 0 \\ \sigma_z &= \tau_{rz} = \tau_{\varphi z} = 0 \quad \text{при } z = h \\ \sigma_r &= \tau_{rr} = \tau_{r\varphi} = 0 \quad \text{при } r = R \end{aligned} \quad (1.7)$$

Первую строку условий (1.7) можно представить также в виде (1.7)

$$u_r = \delta_0, \quad u_\varphi = -\delta_0, \quad u_z = \chi r \quad \text{при } z = 0$$

Если вместо старых неизвестных (Q_k, M_k, N_k) ввести новые (V_k, Z_k)

$$\begin{aligned} Q_k \lambda_{2k} I_1'(x_2) &= -\frac{2(1-\nu)Z_k \beta_k}{hc_1^2}, \quad x_1 = \lambda_{1k} R, \quad x_2 = \lambda_{2k} R \\ (M_k + N_k) \lambda_{1k}^2 I_1'(x_1) &= \frac{4(1-\nu)Z_k \beta_k^2}{hc_1^2} + \frac{2V_k}{h} \\ (M_k - N_k) \frac{\lambda_{1k}^2 I_1'(x_1)}{2x_1} &= \frac{2(1-\nu)Z_k}{h} + \frac{2\lambda_{2k}^2 V_k}{h\beta_k^2} - \frac{\lambda_{1k}^2 P_k}{h\beta_k^2} \\ P_k &= \frac{c_1^2 \delta_0}{\lambda_{1k}^2} - \frac{(-1)^{k-1} c_1^2 \chi \beta_k \cos c_1 h}{(1-\nu) \lambda_{1k}^2 \lambda_{2k}^2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

то функции (1.2) будут удовлетворять как уравнениям движения Навье, так и всем условиям (1.7), кроме условий на функции $\bar{u}_z(r, 0)$, $\bar{\sigma}_z(r, h)$, $\bar{\sigma}_z(R, z)$ и $\bar{\tau}_{r\varphi}(R, z)$.

Удовлетворяя этим последним условиям, для определения неизвестных постоянных X_p , Y_p , Z_k и V_k получим следующие бесконечные системы:

$$\begin{aligned} h_{1k} V_k + b_{2k} Z_k + \frac{(-1)^{k-1} \nu R c_1^2 \chi \cos c_1 h}{2(1-\nu) \lambda_{2k}^2} - \frac{x_1^2 P_k}{2\beta_k R} &= \\ = \sum_{p=1}^{\infty} \Omega_p \frac{\gamma_p^2 \beta_k Y_p [(1-\nu) \alpha_p^2 - \nu \lambda_{1k}^2] + (-1)^k \gamma_{2p} X_p [\alpha_p^2 \beta_k^2 - 0,5 \nu c_1^2 (\alpha_p^2 + \lambda_{1k}^2)]}{(1-\nu) R \gamma_p^2 (\alpha_p^2 + \lambda_{1k}^2) (\alpha_p^2 + \lambda_{2k}^2)} & \quad (1.9) \\ b_{3k} V_k + b_{4k} Z_k \frac{x_1^2 P_k}{2\beta_k R} \frac{I_2'(x_1)}{I_1(x_1)} &= \\ = \sum_{p=1}^{\infty} \Omega_p \frac{(-1)^{k-1} \gamma_{2p} X_p [\nu \gamma_{1p}^2 - (1-\nu) \beta_k^2] + \beta_k \gamma_p^2 Y_p}{(1-\nu) R^3 (\alpha_p^2 + \lambda_{1k}^2) (\alpha_p^2 + \lambda_{2k}^2)} & \quad (1.10) \end{aligned}$$

$$a_{1p}X_p + a_{2p}Y_p + \frac{\chi c_1^2 \sin c_2 h}{2\alpha_p^2 c_2} =$$

$$= \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \beta_k \left\{ \frac{V_k}{\beta_k^2 + \gamma_{1p}^2} + \frac{Z_k \left[(1-\nu)\beta_k^2 - \nu\gamma_{1p}^2 \right]}{(\beta_k^2 + \gamma_{1p}^2)(\beta_k^2 + \gamma_{2p}^2)} \right\} \quad (1.11)$$

$$a_{3p}X_p - a_{4p}Y_p = \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{V_k}{\beta_k^2 + \gamma_{1p}^2} + \frac{\beta_k^2 Z_k}{(\beta_k^2 + \gamma_{1p}^2)(\beta_k^2 + \gamma_{2p}^2)} \right\} \quad (1.12)$$

Здесь введены обозначения:

$$a_{1p} = \frac{\alpha_p^2 \gamma_{1p} \gamma_{2p}}{c_1^2 \gamma_p^2} \operatorname{th} \gamma_{1p} h - \frac{\gamma_p^2}{c_1^2} \operatorname{th} \gamma_{2p} h \rightarrow \frac{1}{4(1-\nu)}$$

$$a_{4p} = \frac{\alpha_p^2}{c_1^2 \gamma_{1p}} \operatorname{th} \gamma_{1p} h - \frac{\gamma_{2p}}{c_1^2} \operatorname{th} \gamma_{2p} h \rightarrow \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)\alpha_p}$$

$$c_1^2 a_{2p} = \frac{\gamma_p^2 c_1^2}{\gamma_{2p}} a_{3p} = \frac{\alpha_p^2}{\operatorname{ch} \gamma_{1p} h} - \frac{\gamma_p^2}{\operatorname{ch} \gamma_{2p} h}$$

$$b_{1k} = \frac{R\lambda_{1k}^2}{\beta_k} - \frac{\beta_k I_1(x_1)}{\lambda_{1k} I_1'(x_1)} \rightarrow x_1 - 1 \quad (1.13)$$

$$b_{2k} = \frac{2(1-\nu)\beta_k}{c_1^2} \left[\frac{Rc_1^2}{2} + \frac{\lambda_k^2 I_1(x_2)}{\lambda_{2k} I_1'(x_2)} - \frac{\beta_k^2 I_1(x_1)}{\lambda_{1k} I_1'(x_1)} \right] \rightarrow (1-\nu)x_1 - \frac{3-2\nu}{2}$$

$$b_{3k} = \frac{R}{\beta_k} \left[\lambda_k^2 \frac{I_2'(x_1)}{I_1'(x_1)} - \frac{\beta_k^2}{x_1^2} \frac{I_2(x_1)}{I_1'(x_1)} \right] \rightarrow x_1 - 2$$

$$b_{4k} = \frac{2(1-\nu)\beta_k}{Rc_1^2} \left[\frac{c_1^2 R^2}{2} \frac{I_2'(x_1)}{I_1'(x_1)} + \frac{I_2(x_2)}{I_1'(x_2)} - \frac{\beta_k^2}{\lambda_{1k}^2} \frac{I_2(x_1)}{I_1'(x_1)} \right] \rightarrow (1-\nu)(x_1 - 2)$$

$$\Delta_k = b_{1k} b_{4k} - b_{2k} b_{3k} \rightarrow x_1 - (3-2\nu) - (1-\nu)R^2 c_1^2$$

В (1.13) приведены также первые члены асимптотики при больших значениях индексов.

Таким образом, задача свелась к решению совокупности бесконечных систем алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов Фурье Z_k и Фурье-Дини X_p, Y_p .

2. Исследование бесконечных систем. Исследование бесконечных систем (1.9)-(1.12) как на регулярность, так и на выяснения асимптотических по-

ведений неизвестных коэффициентов, будем проводить по методу, разработанному в работах [1-3].

Ясно, что бесконечные системы динамических краевых задач для произвольного значения вынужденной частоты ω не могут быть регулярными. Кроме того, отдельно взятая система (1.11) не регулярна, так как в ней коэффициенты при неизвестных по переменной " k " имеют порядок убывания $O(k^{-1})$. Воспользуемся тем фактом, что коэффициенты этой системы - знакопеременяющиеся. Разрешая (1.9) и (1.10) относительно неизвестных X_p , Z_p и подставляя найденные значения в (1.11) и (1.12), получим две бесконечные системы относительно неизвестных X_p , Y_p . Из-за громоздкости формул эти системы здесь не приводятся. Основными неизвестными первой системы (получаемой из (1.11)) являются X_p , так как в ней коэффициенты при X_p убывают степенным законом, а коэффициенты при Y_p - экспоненциальным. Во второй системе (полученной из (1.12)) основными неизвестными являются Y_p .

Считая, что вынужденная частота ω отлична от собственных и имеет конечное значение, оценим суммы модулей коэффициентов при неизвестных для этих систем. С точностью до бесконечно малых величин при $p \gg 1$ будем иметь

$$\begin{aligned} \rho_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\Omega_m \gamma_p^2}{(1-v)Rha_{ip}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \beta_k Q_{mkp} \right| \\ \rho_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\Omega_m}{(1-v)Rha_{ip}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} [(1-v)\gamma_p^2 - v\beta_k^2] Q_{mkp} \right| \\ Q_{mkp} &= \frac{\beta_k \gamma_m^2 [(1-v)\alpha_m^2 - v\lambda_{1k}^2] + (-1)^k \gamma_{2m} \alpha_m^2 \beta_k^2}{\gamma_m^2 (\alpha_m^2 + \lambda_{1k}^2) (\alpha_m^2 + \lambda_{2k}^2) (\beta_k^2 + \gamma_{1p}^2) (\beta_k^2 + \lambda_{2p}^2)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Считая, что порядок убывания суммы знакопеременных рядов в (2.1) хотя бы на единицу больше порядка суммы соответствующих положительных рядов и пользуясь формулами

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\alpha_p}{(\alpha_p^2 + \lambda_{1k}^2)(\alpha_p^2 + \lambda_{2k}^2)} &= [1 + O(k^{-1})] \frac{R^3}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 + x_1^2)(\xi^2 + x_2^2)} = \\ &= \frac{R^3}{2\pi x_1 x_2} [1 + O(k^{-1})], \quad (k \gg 1) \\ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|(1-v)\alpha_p^2 - v\lambda_{1k}^2|}{(\alpha_p^2 + \lambda_{1k}^2)(\alpha_p^2 + \lambda_{2k}^2)} &= [1 + O(k^{-1})] \frac{R^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|(1-v)\xi^2 - vx_1^2|}{(\xi^2 + x_1^2)(\xi^2 + x_2^2)} d\xi = \\ &= \frac{2R^2}{2\pi(x_1 + x_2)} \left[(1-2v) \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \sqrt{\frac{v}{1-v}} + \sqrt{v(1-v)} \right) \right] [1 + O(k^{-1})], \end{aligned} \quad (2.2)$$

на основании (1.13) для норм ρ_x и ρ_y получим следующие асимптотические оценки:

$$\rho_x = \frac{4}{\pi^2} + O(p^{-1}), \quad (p \gg 1)$$

$$\rho_y = \frac{16}{(3-4\nu)\pi^2} \left[(1-2\nu) \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} \right) + \sqrt{\nu(1-\nu)} \right]^2 + O(p^{-1}) \quad (2.3)$$

Отсюда следует

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \rho_x = \frac{4}{\pi^2}, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \rho_y \leq \frac{4}{\pi^2} \quad (2.4)$$

Свободные члены имеют порядок убывания $O(p^{-2} \ln p)$ для первой системы и $O(p^{-1} \ln p)$ - для второй. Из (2.4) следует, что начиная с некоторого номера p_0 , бесконечные системы будут вполне регулярными.

Интересно отметить, что оценки (2.4) остаются в силе, если при решении рассматриваемой задачи приняты $J_2(\alpha_p R) = 0$. По-видимому, это связано с тем, что корни функций $J_1'(\xi)$ и $J_2(\xi)$ асимптотически совпадают, то есть

$$\xi_{1,p}' \approx \xi_{2,p} \approx \pi(p + 0.75) [1 - O(p^{-2})] \quad (2.5)$$

При дальнейшем исследовании, а также при численных расчетах удобно пользоваться уравнениями (1.9)-(1.12) с учетом (2.4).

В общем случае, когда граничные функции в (1.7) ненулевые (но ограниченные), в окрестности угловой точки $A(R, h)$ напряжения могут иметь логарифмическую особенность, а в окрестности точки $B(R, 0)$ - степенную. Поэтому неизвестные коэффициенты X_p и Y_p при $p \gg 1$ должны иметь вид

$$X_p \approx \frac{x_0}{\alpha_p R}, \quad Y_p \approx y_0 (\alpha_p R)^{\delta-1} \quad (0 < \delta < 1) \quad (2.6)$$

На этой основе из бесконечных систем (1.9) и (1.10) получим следующие асимптотические формулы:

$$k + (1-\nu)Z_k - \frac{1}{2}P_k = O(k^{-3}), \quad (k \gg 1)$$

$$Z_k \approx \frac{(-1)^{k-1} z_0}{x_1} + v_0 x_1^{\delta-1}, \quad x_1 = \lambda_{1k} R \quad (2.7)$$

где

$$z_0 = \frac{x_0}{2(1-\nu)}, \quad v_0 = \frac{y_0(2\nu-\delta)}{2(1-\nu) \sin \frac{\pi\delta}{2}} \quad (2.8)$$

а из (2.7) (без учета (2.8)) и бесконечных систем (1.11) и (1.12) при $p \gg 1$ следует

$$X_p \approx \frac{2(1-\nu)z_0}{\alpha_p R}, \quad Y_p \approx y_1 (\alpha_p R)^{\delta-1}$$

$$y_1 = \frac{2(1-\nu)(2-2\nu-\delta)v_0}{(3-4\nu)\sin\frac{\pi\delta}{2}} \quad (2.9)$$

Сравнение (2.9) и (2.6) приводит к выводу, что действительно имеет место асимптотические формулы (2.6) и (2.7) при условии (2.8). Из условия $y_0 = y_1$ получается уравнение для определения числа δ

$$(3-4\nu)\sin^2\frac{\pi\delta}{2} = (\delta-2\nu)(\delta+2\nu-2) \quad (2.10)$$

Нетрудно проверить, что коэффициенты при особенностях напряжений около точки $B(R,0)$ пропорциональны y_0 . Формулы (2.6) и (2.7) позволяют свести бесконечные системы к решению конечных систем с учетом всех неизвестных, а также контролировать точность приближенных решений и определить значения постоянных x_0, y_0 .

Количество разрешаемых уравнений (M, N) в конечных системах будем определять из эмпирических соотношений [1,2]

$$\alpha_M^2 \approx \beta_N^2 \approx 10c_1^2 \quad (2.11)$$

3. Расчетные формулы. Из-за наличия двух особых точек $A(R, h)$ и $B(R, 0)$ ряды, входящие в выражения компонент напряжений и перемещений, в окрестностях особых точек, сходятся медленно. Асимптотические формулы (2.6) и (2.7) позволяют улучшить сходимость функциональных рядов на два порядка. При этом выделяются характерные особенности напряжений в особых точках. При улучшении сходимости рядов в окрестности точки $A(B)$ в формулах (2.6) и (2.7) надо положить $y_0 = 0 (x_0 = 0)$, так как учет этих слагаемых привел бы к повышению погрешности при вычислениях. Это связано с тем, что суммы отброшенных рядов имеют больший порядок убывания, чем каждый их член.

Из (2.6) и (2.7) следует, что компоненты напряжений σ_φ и $\tau_{r\varphi}$ не имеют особенностей. После улучшения сходимости рядов для напряжения σ_z получим следующие расчетные формулы:

а) для окрестности точки $A(R, h)$

$$\begin{aligned}
(2Ge^{i\omega t} \cos \varphi)^{-1} \sigma_z = & -\frac{\chi c_1^2 r}{2c_2} \sin c_2 z - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\beta_k R_{3k}(r) - m R_{0k}(r) + \right. \\
& + \left(\frac{r}{R} - \beta_k (R-r) \right) \frac{(-1)^{k-1} z_0 \exp(-\beta_k (R-r))}{\beta_k h \sqrt{Rr}} \Big] \sin \beta_k z + \\
& + \sum_{p=1}^{\infty} \left[w'_p(z) + m w_{0p}(z) + z_0 \frac{1 + \alpha_p (h-z)}{\alpha_p R^2 \exp(\alpha_p (h-z))} \right] J_0(\alpha_p r) + \\
& + \frac{z_0}{\pi \sqrt{Rr}} \left[\ln \frac{h}{2R} - 1 - \frac{R-r}{r} \ln \frac{4h}{\pi \rho} \right]
\end{aligned} \quad (3.1)$$

б) для окрестности точки $B(R, 0)$

$$\begin{aligned}
(2G \exp(i\omega t) \cos \varphi)^{-1} \sigma_z = & -\frac{\chi c_1^2 r}{2c_2} \sin c_2 z - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \beta_k R_{3k}(r) - m R_{0k}(r) + \right. \\
& + \sqrt{\frac{R}{r}} \left[\frac{r}{R} - \beta_k (R-r) \right] \frac{v_0 x_1^{\delta-1}}{h \exp(\beta_k (R-r))} \Big\} \sin \beta_k z + \\
& + \sum_{p=1}^{\infty} \left[w'_p(z) + m w_{0p}(z) + y_0 \frac{2(1-\nu) + \alpha_p z}{2(1-\nu) R (\alpha_p R)^{1-\delta} \exp(\alpha_p z)} \right] J_1(\alpha_p r) + \\
& + \frac{v_0 \Gamma(\delta) R^\delta}{\pi \sqrt{Rr} \rho_0^\delta} \left\{ \left[\frac{2(1-\nu)}{\delta-2\nu} \sin \delta \theta_1 + \frac{\delta}{\delta-2\nu} \cos \theta_1 \cos(\delta+1) \theta_1 \right] \sin \frac{\pi \delta}{2} + \right. \\
& + \left. \frac{r}{R} \sin \delta \theta_0 - \delta \cos \theta_0 \sin(\delta+1) \theta_0 \right\}
\end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\Gamma(\delta)$ - гамма - функция Эйлера,

$$\begin{aligned}
w_{0p}(z) = & -\frac{2c_2^2 \Omega_p}{R c_1^2 J_1(\alpha_p R)} \left[X_p \frac{\text{sh } \gamma_{2p} z}{\text{ch } \gamma_{2p} h} + Y_p \frac{\text{ch } \gamma_{2p} (h-z)}{\text{ch } \gamma_{2p} h} \right] \\
R_{0k}(r) = & \frac{4(1-\nu) Z_k \beta_k c_2^2 I_1(\lambda_{2k} r)}{h \lambda_{2k} c_1^2 I_1'(x_2)}
\end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\rho = \sqrt{(R-r)^2 + (h-z)^2}, \quad \rho_0 = \sqrt{(R-r)^2 + z^2}, \quad \theta_1 + \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\rho_0 \cos \theta_0 = R-r, \quad \rho_0 \sin \theta_0 = z, \quad (\rho, \rho_0) \ll \min(R, h)$$

При получении (3.2) была использована формула [6]

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-\xi_p x}}{\xi_p^\gamma} = \frac{x^{\gamma-1}}{\pi} \Gamma(1-\gamma, \xi_1 x) + \theta \xi_1^{-\gamma} e^{-\gamma x} \quad (3.4)$$

где $\Gamma(\alpha, x)$ - неполная гамма-функция, γ - произвольное число, $\xi_p = \pi(p+c)$, $c > -$, $\operatorname{Re} x > 0$, $0 < \theta < 1$.

Аналогичным образом можно улучшить сходимость рядов для других компонент напряжений и перемещений.

В конце работы приведем формулы для определения изгибающего момента и перерезывающей силы, действующие на высоте z от основания цилиндра

$$M_y(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sigma_z \cos \varphi dr d\varphi$$

$$P_x(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \tau_{xz} dr d\varphi \quad (3.5)$$

Для краткости приведем значения этих величин для сечения $z = 0$

$$M_y(0) = -4G \exp(i\omega t) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Omega_p Y_p}{\alpha_p^2}$$

$$P_x(0) = \pi R^2 G \exp(i\omega t) \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\Omega_p}{R^2} \left[\frac{\gamma_{2p} X_p}{\gamma_p^2 \operatorname{ch} \gamma_{1p} h} - \frac{Y_p}{\gamma_{1p}} \operatorname{th} \gamma_{1p} h \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(1-\nu) \beta_k^2 Z_k I_2(x_1)}{\lambda_{1k}^2 I_1'(x_1)} + V_k + \frac{V_k c_1^2 I_2(x_1)}{2\lambda_{1k}^2 I_1'(x_1)} \right] \right\} \quad (3.6)$$

При помощи асимптотических формул (2.6) и (2.7) и обобщенной дзета-функции Римана

$$\zeta(s, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\nu)^{-s} \quad (3.7)$$

легко можно улучшить сходимость всех рядов в формулах (3.6).

Собственно, частоты данной задачи будем определять, исходя из следующего факта: известно [1], что когда вынужденная частота находится в малой окрестности собственной, то точность удовлетворения граничных условий резко падает. Поэтому, после каждого конкретного расчета необходимо проверить точность удовлетворения граничных условий.

Такой проверкой определяется приближенное значение собственной частоты. Для уточнения этого приближения надо увеличить количество разрешаемых уравнений бесконечных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. - Киев: Наукова Думка, 1981. 283с.

2. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости.- Киев: Наукова Думка, 1979. 261с.
3. Коялович Б. М. Исследование о бесконечных системах линейных уравнений.- Изв. физ-мат. ин-та В. А. Стеклова, 1930, № 3, с.41-167.
4. Абрамян Б. Л. Об одной задаче распространения упругих волн в полупространстве.- Докл. АН Арм. ССР, 1985, т.81, № 3, с.118-122.
5. Баблоян А. А. К изгибу толстых круглых плит произвольной нагрузкой.- ИЖ, 1964, т.4, вып. 4, с.750-758.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.- М.: Физматгиз, 1962. 1100с.

Государственный инженерный университет Армении Поступила в редакцию
Ереванский архитектурно-строительный институт 17.08.1993

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ МАНИПУЛЯТОРА ПО ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЕ

Гукасян А.А., Шагинян С.Г.

Ա.Ա.Դուկասյան, Ս.Գ.Շահինյան

Ըստ ազդող ուժի մանիպուլյատորի շարժման կայունության մասին

Ուսումնասիրվում է եռոդակ էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի շարժման կայունությունը, երբ համակարգի վրա վերջավոր ժամանակահատվածում ազդում են գումարային փոքր զրգոող ուժեր: Ցույց է տրված, որ դեկավարող ֆունկցիան կարելի է ընտրել այնպես, որ մանիպուլյատորի շարժումը լինի կայուն ըստ ազդող ուժի:

A.A.Gukassian, S.G.Shahinian

On Motion Stability of Manipulator According to the Acting Force

Исследуется устойчивость движения трехзвенного электромеханического манипулятора, когда на систему на конечном промежутке времени действуют интегрально малые возмущающие силы. Показано, что коэффициенты управляющей функции можно выбрать так, чтобы движение манипулятора было бы устойчивым по действующей силе.

1. Описание механической системы и уравнения движения манипулятора. Рассматривается трехзвенный манипулятор на подвижном основании (фиг.1). Звенья манипулятора являются абсолютно твердыми телами, соединенными идеальными цилиндрическими шарнирами O_2, O_3 . Линейные размеры и массы звеньев обозначим через l_i, m_i ($i = 1, 2, 3$). Груз на схвате моделируется как материальная точка с массой m'_3 . Массу платформы обозначим через m_0 . Для описания движения манипулятора вводится инерциальная $OXYZ$ и неинерциальные $O_i X_i Y_i Z_i$ ($i = 1, 2, 3$) системы координат. Основание манипулятора может двигаться на плоскости XOY и поворачиваться вокруг оси $O_1 Z_1$. Управление транспортными движениями осуществляется при помощи электромеханических приводов D_x, D_y, D_φ ($i = 1, 2, 3$), каждый из которых содержит линейный электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением и редуктор [1].

Уравнения движения электромеханического манипулятора приводится в виде системы дифференциальных уравнений третьего порядка относительно α_i [2,3]:

$$\begin{aligned} L_i \ddot{\alpha}_i + R_i \dot{\alpha}_i + k_i \alpha_i = u_i - L_i \frac{d}{dt} \Phi_i(\alpha, \alpha, \alpha) - \\ - R_i \Phi_i(\alpha, \alpha, \alpha), \quad |u_i| \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\Phi_i(\alpha, \alpha, \alpha)$ - нелинейные члены соответствующих уравнений, которые описывают взаимное влияние различных звеньев манипулятора; $\alpha = (x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$; L_i - коэффициенты индуктивности, R_i - электрические сопротивления обмоток роторов электродвигателей приводов; k_i - коэффициенты пропорциональности между электрическим током и усилиями; u_i - электрические напряжения.

Начальные условия уравнений (1.1) имеют вид

$$\alpha_i(t_0) = \alpha_i^0, \quad \dot{\alpha}_i(t_0) = \dot{\alpha}_i^0, \quad \ddot{\alpha}_i(t_0) = \ddot{\alpha}_i^0 \quad (1.2)$$

В (1.2) входят также угловые ускорения. Это связано с тем, что рассматриваемая система не является чисто механической, она содержит также электромеханические компоненты: электродвигатели, обмотки которых имеют ненулевую индуктивность.

Пусть при (1.2), $x_p = x_p(t)$ ($x_p = (\alpha_p, \dot{\alpha}_p, \ddot{\alpha}_p)$) - заданное программное движение манипулятора, а $u_p = u_p[t]$ - программный закон управляющей функции. Однако в большинстве случаев манипулятор, работающий в экстремальных условиях, в силу действия различных внешних сил, программное движение совершать не будет, а будет осуществлять некоторые движения $\bar{x} = \bar{x}(t)$ ($\bar{x} = (\bar{\alpha}, \dot{\bar{\alpha}}, \ddot{\bar{\alpha}})$), которые в общем случае не совпадают с заданным программным движением, то есть $\bar{x}(t) - x_p(t) = \Delta x \neq 0$ ($\Delta x = (\beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta})$). Следовательно, возникает необходимость иметь регулятор, подключенный к входу привода, который вырабатывал бы дополнительно к $u_p[t]$ управляющие силы (напряжения) не только как функцию времени, но и как функцию от возмущений (Δx), обеспечивающий устойчивость программного движения.

Регулятор представим в виде

$$u_i = a_i \beta_i + b_i \dot{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (1.3)$$

С технической точки зрения (1.3) можно реализовать в системе при помощи обратной связи, оснащенными датчиками скоростей и ускорений, которые в каждый момент времени измеряют обобщенные скорости и ускорения звеньев манипулятора.

2. Задача устойчивости движения манипулятора. Составим уравнения динамической ошибки движения манипулятора (уравнения возмущенного движения)

$$L_i \ddot{\beta}_i + R_i \dot{\beta}_i + k_i \beta_i = u_i - L_i \frac{d}{dt} \Phi_i(\beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}) - k_i \Phi_i(\beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}), |u_i| \leq 1, (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (2.1)$$

Здесь $\Delta x = 0$ при $u_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, 6$), то есть при осуществлении программного управления $u_p[t]$ реализуется программное движение $x_p(t)$.

Начальные условия для (2.1) примут вид

$$\begin{aligned}\beta_i(t_*) &= \tilde{\alpha}_i(t_*) - \alpha_i(t_*), \quad \dot{\beta}_i(t_*) = \dot{\tilde{\alpha}}_i(t_*) - \dot{\alpha}_i(t_*) \\ \bar{\beta}_i(t_*) &= \tilde{\alpha}_i(t_*) - \ddot{\alpha}_i(t_*), \quad (i = 1, 2, \dots, 6)\end{aligned}\quad (2.2)$$

где t_* - тот момент времени, когда движение манипулятора выходит из заданного программного движения. Не нарушая общности, можно принимать $t_* = t_0$.

Пусть во время движения манипулятора на механическую систему могут действовать внешние возмущающие интегрально малые силы $\varphi_i(t)$

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) dt \right\| < c < \infty, \quad \varphi_i(t) \equiv 0 \quad \text{при } t > t_2 \quad (2.3)$$

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_6(t)), \quad t \in [t_1, t_2] \subset [t_0, T]$$

(T - момент окончания процесса управления).

В этом случае возникает необходимость исследовать движение манипулятора с точки зрения устойчивости по действующей силе [4], то есть требуется найти усилия (1.3), при которых программное движение манипулятора устойчиво по действующей силе (2.3).

Предполагаем, что возмущенное движение манипулятора удовлетворяет также фазовым ограничениям

$$a_{i1}\beta_i + a_{i2}\dot{\beta}_i + a_{i3}\ddot{\beta}_i = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (2.4)$$

то есть движение происходит в параллельных фазовых плоскостях. С математической точки зрения условия (2.4) означают существование шести независимых первых интегралов для системы (2.1).

Пусть взаимное влияние различных звеньев манипулятора мало и в нулевом приближении можно пренебречь [3].

Уравнение (2.1) в нулевом приближении с учетом (1.3) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1^{(i)} &= x_2^{(i)}, \quad \dot{x}_2^{(i)} = x_3^{(i)} \\ x_3^{(i)} &= \frac{a_i - k_i}{L_i} x_2^{(i)} + \frac{b_i - R_i}{L_i} x_3^{(i)}\end{aligned}\quad (2.5)$$

где $x_1^{(i)} = \beta_i$, $x_2^{(i)} = \dot{\beta}_i$, $x_3^{(i)} = \ddot{\beta}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 6$)

Корни характеристического уравнения соответствующей системы (2.5) являются

$$\lambda_1^{(i)} = 0, \quad \lambda_{2,3}^{(i)} = \left[b_i - R_i \pm \sqrt{(b_i - R_i)^2 - L_i(k_i - a_i)} \right] / 2L_i \quad (2.6)$$

Если $b_i < R_i$, $a_i \leq k_i$, то корни (2.6) удовлетворяют следующим условиям:

$$\lambda_1^{(i)} = 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_{2,3}^{(i)} < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение:

если управляющие функции (напряжения) манипулятора имеют вид

$$u_i = a_i \ddot{\beta}_i + b_i \ddot{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

где $a_i \leq k_i$, $b_i < R_i$, то движение манипулятора в линейном приближении устойчиво по действующей силе.

В общем случае уравнения (2.1) и условия (2.4) представим в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1^{(i)} - \ddot{x}_2^{(i)}, \quad \ddot{x}_2^{(i)} - \ddot{x}_3^{(i)} \\ \ddot{x}_3^{(i)} = -\frac{k_i}{L_i} x_2^{(i)} - \frac{R_i}{L_i} x_3^{(i)} + u_i - \frac{d}{dt} F(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}) - \frac{R}{L} F(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Известно, что если нелинейная система допускает независимые первые интегралы вида (2.4), то существует невырожденная матрица A , такая, что с помощью линейного преобразования $y = Ax$ нелинейную систему можно привести к более простому виду [5]:

$$\dot{y}_1^{(i)} = 0, \quad \dot{y}_2^{(i)} = y_3^{(i)} \quad (2.8)$$

$$\dot{y}_3^{(i)} = -\frac{a_{1i}}{a_{3i}} y_2^{(i)} - \frac{a_{2i}}{a_{3i}} y_3^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (2.9)$$

Здесь в качестве матрицы преобразования A можно взять следующую матрицу:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & A_6 \end{bmatrix}, \quad \text{где } A_i = \begin{bmatrix} a_{1i} & a_{2i} & a_{3i} \\ 0 & a_{3i} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3i} \end{bmatrix}$$

$$\det A = \prod_{i=1}^6 a_{1i} a_{3i}^2 \neq 0, \quad \text{при } a_{1i} a_{3i} \neq 0$$

Корни характеристического уравнения системы (2.8), (2.9) являются

$$\lambda_1^{(i)} = 0, \quad \lambda_{2,3}^{(i)} = \left[-a_{2i} \pm \sqrt{a_{2i}^2 - 4a_{1i}a_{3i}} \right] / 2a_{3i} \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (2.10)$$

Если постоянные a_{1i} , a_{2i} , a_{3i} удовлетворяют условиям

$$a_{1i} / a_{3i} > 0, \quad a_{2i} / a_{3i} > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (2.11)$$

то корни системы (2.8), (2.9) будут удовлетворять условиям теоремы об устойчивости по действующей силе [4], то есть

$$\lambda_1^{(i)} = 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_{2,3}^{(i)} < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (2.12)$$

и корням $\lambda_1^{(i)} = 0$ отвечают простые элементарные делители, так как первые интегралы (2.4) независимы между собой.

Устойчивость по действующей силе движения манипулятора при фазовых ограничениях (2.4) и при условиях (2.11) можно показать также при помощи функции Ляпунова. В качестве функции Ляпунова возьмем функцию

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \left(\frac{a_{1i}^2 + a_{1i}a_{3i} + a_{3i}^2}{a_{1i}a_{2i}} y_2^{2(i)} + 2 \frac{a_{3i}}{a_{1i}} y_2^{(i)} y_3^{(i)} + \frac{(a_{3i} + a_{1i})a_{3i}}{a_{1i}a_{2i}} y_3^{2(i)} \right) \quad (2.13)$$

Функция при условии (2.12) является определенно положительная по переменным $y_2^{(i)}, y_3^{(i)}$, равномерно по c_i , $\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} V = \infty$, производная которой по времени в силу системы (2.9) имеет вид:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(2.9)} = - \sum_{i=1}^6 (y_2^{2(i)} + y_3^{2(i)})$$

$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(2.9)}$ - определенно отрицательная функция по переменным $y_2^{(i)}, y_3^{(i)}$ равномерно по c_i , то есть тривиальное решение системы (2.9) асимптотически устойчиво в целом [6] равномерно по c_i . Для тривиального решения системы (2.8), (2.9) выполняются все условия теоремы об устойчивости по действующей силе [5]. Следовательно, программное движение манипулятора устойчиво по действующей силе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чиликин М.Г., Ключев В.Н., Сандлер А.С. Теория автоматизированного электропривода. - М.: Энергия, 1979. 616 с.
2. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Синтез оптимального управления транспортными движениями манипуляционных роботов.- Изв. АН СССР, МТТ, 1986, № 4, с.21-29.
3. Гукасян А.А. О задаче оптимального управления движением трехзвенного манипулятора на подвижном основании.-ЕГУ, МСНТ "Механика" 1991, вып.8, с.295-305.
4. Шагинян С.Г. Об одной задаче теории устойчивости.- Уч. записки ЕГУ, 1986, № 2, с.39-46.
5. Габриелян М.С., Шагинян С.Г. О построении функции Ляпунова.- Уч. записки ЕГУ, 1987, № 1, с.39-45.
6. Барбашин Е.А., Красовский Н.Н. О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом.-ПММ, 1954, т.18, вып.3.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
10.08.1992

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ РЕБРИСТОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА, ЗАГРУЖЕННОЙ СЖИМАЮЩИМИ СИЛАМИ, ПРИ ЗАДАННОМ ЗНАЧЕНИИ НИЗШЕЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ

Белубекян Э. В., Погосян А. Г.

Է. Վ. Բելուբեկյան, Ա. Գ. Պոգոսյան

Կամպագիցիոն նյութից պարրաստված ուղղանկյուն կողավոր սալի օպտիմալ նախաձեռն փրված տարանջուսների փորրառույն հաճախականության արժեքի գնալրույն

Աշխարհանքում դիտարկվում է կոմպագիցիոն նյութից պարրաստված ուղղանկյուն սալի տարանջուս խնդիրը, երբ սալը երկու կողմերով ուժեղացված է կոշտության կողերով, իսկ մյուս երկու ազատ ինկված եզրերով բեռնավորված է սեղմող ուժերով: Տրված սեղմող ուժի եւ տարանջուսների փորրազույն հաճախականության արժեքների դեպքում որոշվում են կառուցվածքի երկրաչափական եւ ֆիզիկական օպտիմալ պարամետրերը, որոնք ապահովում են նրա ամենափոքր կշիռը:

E. V. Belubekian, A. G. Pogosyan

Optimal Design of a Compressed Composite Rectangular Plate with Ribs When Its First Natural Frequency is Fixed.

Рассматривается прямоугольная пластинка, шарнирно опертая по двум краям и усиленная ребрами жесткости по свободным кромкам, нагруженная сжимающими силами вдоль направления ребер. Пластинка изготовлена из монослоев композиционного материала, уложенных поочередно симметрично одной из геометрических осей пластинки.

Ставится задача определения оптимальных геометрических и физических параметров конструкции, обеспечивающих ее минимальный вес при заданных значениях сжимающей силы и низшей частоты нагруженных колебаний.

Рассматривается прямоугольная пластинка размерами $a \times b \times h_2$, шарнирно опертая по краям $y=0$ и $y=b$, усиленная по свободным кромкам $x=\pm a/2$ ребрами жесткости размерами $\alpha h_1 \times h_1 \times b$ и нагруженная вдоль оси x сжимающими силами F , равномерно распределенными по сечениям $y=0$ и $y=b$.

Предполагается, что пластинка изготовлена из монослоев волокнистого композиционного материала (ВКМ), уложенных поочередно под углами $\pm\varphi$ к оси X , а в ребрах монослои ВКМ ориентированы вдоль оси y .

Ставится задача определения оптимальных параметров $\alpha, h_1, h_2, \varphi$, обеспечивающих минимальный вес (объем) конструкции при заданных значениях силы F и низшей частоты нагруженных колебаний Ω .

Аналогичные задачи устойчивости и прочности рассмотрены в работах [1,2].

Принятая структура пакета пластинки позволяет считать ее ортотропной, для которой уравнение нагруженных колебаний имеет вид:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{F}{A} h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \rho h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Здесь $D_{ik} = B_{ik} h_2^3 / 12$ - жесткости пластинки, B_{ik} - упругие характеристики монослоев ВКМ в главных геометрических направлениях пластинки, определяемые через характеристики ВКМ в его главных физических направлениях по известным формулам поворота [3], $A = 2\alpha h_1^2 + \alpha h_2$ - площадь поперечного ($y = \text{const}$) сечения конструкции.

Граничные условия имеют вид:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = b \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (3)$$

- в случае симметричной формы колебаний и

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (4)$$

- в случае антисимметричной формы колебаний

$$\begin{aligned} E_1 J \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{F}{A} A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \rho A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \\ = D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad \text{при} \quad x = a/2 \quad (5) \\ C \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Условия (5) соответствуют упругому опиранию пластинки на ребро жесткости.

Здесь $A_1 = \alpha h_1^2$ - площадь поперечного сечения ребра, C - жесткость ребра на кручение, определяемая формулой [4]

$$C = G_{23} \alpha h_1^4 \beta \quad (6)$$

где

$$\beta = d^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} d \sum_n \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{\pi n}{2d} \right], \quad d = \alpha \sqrt{G_{23} / G_{13}}$$

G_{13} , G_{23} - модули сдвига материала ребра в плоскостях xOz , yOz .

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (3), в случае симметричной формы колебаний получается в виде

$$w = (C_1 \operatorname{ch} \mu_1 \lambda_m x + C_2 \cos \mu_2 \lambda_m x) \sin \lambda_m y \sin \Omega t \quad (7)$$

а в случае антисимметричной формы, с удовлетворением условий (2) и (4)

$$w = (C_1 \operatorname{sh} \mu_1 \lambda_m x + C_2 \sin \mu_2 \lambda_m x) \sin \lambda_m y \sin \Omega t \quad (8)$$

где

$$\mu_{1,2} = \sqrt{\frac{\sqrt{D_3^2 + D_{11} D_{22} (k_m^2 - 1)} \pm D_3}{D_{11}}} \quad (9)$$

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{b}, \quad D_3 = D_{12} + 2D_{66}, \quad k_m^2 = \frac{F h_2}{A D_{22} \lambda_m^2} + \Omega^2 \frac{\rho h_2}{D_{22} \lambda_m^4} \quad (10)$$

Здесь принято $k_m > 1$, так как в случае наличия ребер вес конструкции будет меньше соответствующего веса гладкой пластинки со свободными кромками, где принимается $k_m = 1$.

Удовлетворение граничных условий (5) приводит к следующему уравнению для симметричной формы колебаний:

$$\begin{aligned} H(\bar{x}) = \frac{B_{11}}{B_{22}} f_1 (\mu_1^2 + \mu_2^2) \operatorname{ch} \mu_1 \lambda_m x \cos \mu_2 \lambda_m x + \mu_2 (f_2 - f_3) \operatorname{ch} \mu_1 \lambda_m x \sin \mu_2 \lambda_m x + \\ + \mu_1 (f_1 f_2 - f_4) \operatorname{sh} \mu_1 \lambda_m x \cos \mu_2 \lambda_m x - \frac{B_{11}}{B_{22}} f_2 (\mu_1^2 + \mu_2^2) \operatorname{sh} \mu_1 \lambda_m x \sin \mu_2 \lambda_m x = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{x} = \{\alpha, h_1, h_2, \varphi\} \\ f_1 = \frac{\alpha h_1^2}{h_2} \frac{\pi m}{b} \left(\frac{E_1}{B_{22}} \frac{h_1^2}{h_2^4} - k_m^2 \right), \quad f_2 = 12 \frac{\pi m}{b} \frac{G_{22}}{B_{22}} \frac{\alpha h_1^4 \beta}{h_2^3} \\ f_3 = \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} \mu_1^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}} \right)^2, \quad f_4 = \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} \mu_2^2 + \frac{B_{12}}{B_{22}} \right)^2 \end{aligned}$$

Для антисимметричной формы колебаний соответствующее уравнение получается из (11) заменой $\operatorname{sh} \mu_1 \lambda_m x$ на $\operatorname{ch} \mu_1 \lambda_m x$; $\sin \mu_2 \lambda_m x$ на $-\cos \mu_2 \lambda_m x$; $\operatorname{ch} \mu_1 \lambda_m x$ на $\operatorname{sh} \mu_1 \lambda_m x$; $\cos \mu_2 \lambda_m x$ на $\sin \mu_2 \lambda_m x$.

Определение оптимальных параметров $\alpha, h_1, h_2, \varphi$, удовлетворяющих уравнению (11) и обеспечивающих минимальный вес (площадь сечения A) конструкции при заданных значениях сжимающей силы F , низкой частоты колебаний Ω и габаритных размеров пластинки $\xi = (a + 2\alpha h_1)/b$ сводится к следующей задаче нелинейного программирования:
Найти

$$\min_x \max_m A(\bar{x}) \quad (12)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} H(\bar{x}) &= 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 90^\circ, \quad h_0 \leq h_1 \leq 0,2b \\ \delta \leq h_2 \leq h_0, \quad 0,2 \leq \alpha \leq 5,0 \end{aligned} \quad (13)$$

Таблица 1

$\bar{\Omega}$	$\bar{F} \cdot 10^4$	α	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	φ	$\bar{A}$	$\bar{A}_0$
0,25	0	2,51	0,0260	0,0041	0°	0,0070	0,0088
	0,25	2,03	0,0612	0,0154	30°	0,0268	0,0321
	0,50	2,00	0,0708	0,0184	30°	0,0333	0,0401
	0,75	2,01	0,0759	0,0215	30°	0,0381	0,0457
	1,0	2,00	0,0809	0,0225	30°	0,0414	0,0501
0,05	0	2,56	0,0402	0,0061	0°	0,0131	0,0176
	0,25	1,99	0,0644	0,0154	30°	0,0279	0,0345
	0,50	2,01	0,0725	0,0184	30°	0,0342	0,0420
	0,75	2,03	0,0779	0,0205	30°	0,0386	0,0474
	1,0	2,01	0,0835	0,0215	30°	0,0423	0,0517
0,075	0	2,49	0,0493	0,0092	0°	0,0191	0,0264
	0,25	2,06	0,0694	0,0143	30°	0,0301	0,0386
	0,5	2,00	0,0761	0,0184	30°	0,0359	0,0453
	0,75	2,01	0,0821	0,0204	30°	0,0404	0,0502
	1,0	1,90	0,0871	0,0215	30°	0,0433	0,0543
0,10	0	2,50	0,0607	0,0092	0°	0,0248	0,0351
	0,25	2,03	0,0751	0,0154	30°	0,0335	0,0439
	0,50	2,01	0,0812	0,0174	30°	0,0382	0,0497
	0,75	1,99	0,0855	0,0195	30°	0,0419	0,0542
	1,0	2,00	0,0890	0,0205	30°	0,0450	0,0579

Последние три ограничения (13) обусловлены пределами применимости классической теории балок и пластин. Для δ принимается: $\delta = 0,01b$ при $a \geq b$, $\delta = 0,01a$ при $a \leq b$.

Задача (12), (13) решается методом деформируемого многогранника [5]. Численная реализация проведена при $\xi =$ для различных приведенных значений $\bar{F} = F / B_{11}^0 b^2$, $\bar{\Omega} = \Omega \sqrt{\rho b^2} / B_{11}^0$. В качестве материала принят ВКМ со следующими приведенными характеристиками:

$$\begin{aligned} B_{22}^0 / B_{11}^0 &= 0,082, \quad B_{12}^0 / B_{11}^0 = 0,02, \quad B_{66}^0 / B_{11}^0 = 0,043, \\ G_{23} / G_{13} &= 1, \quad E_1 / B_{11}^0 = 0,99, \quad G_{23} / B_{11}^0 = 0,059. \end{aligned}$$

Полученные значения оптимальных параметров α , $\bar{h}_1 = h_1 / b$, $\bar{h}_2 = h_2 / b$, φ и соответствующих минимальных площадей сечения конструкции

$\bar{A} = A/b^2$ приведены в табл. 1. Там же приведены наименьшие значения площади сечения $\bar{A}_0$ гладкой пластинки, получаемые при $\varphi = 90^\circ$. Для всех рассмотренных случаев оптимальные параметры получаются при симметричной форме колебаний ($m = 1$).

Как следует из табл. 1, оптимальное оребрение пластинки при заданных $\bar{\Omega}$ и $\bar{F}$ приводит к уменьшению веса конструкции в среднем на 20%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян Э. В., Погосян А. Г. Оптимальное проектирование по устойчивости прямоугольной пластинки из композиционного материала, усиленной по двум краям ребрами жесткости.- Изв. АН Арм ССР, Механика, 1988, т.41, N 6, с.14-18.
2. Белубекян Э. В., Дарбинян А. З. Оптимальное проектирование ребристой прямоугольной пластинки из композиционного материала при ограничении на прочность. Механика (Межвуз. сб. научн. тр.), ЕГУ, 1989, вып.7, с.91-97.
3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин.- М.: Наука, 1967. 534с.
4. Лезницкий С. Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней.- М.: Наука, 1971. 241с.
5. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование.- М.: Мир, 1975, 532с.

Институт Механики НАН РА
Государственный инженерный
университет Армении

Поступила в редакцию
17.01.1994

О ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛНАХ ЛЯВА
В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОДЛОЖКАХ С
МЕТАЛЛИЗИРОВАННЫМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СЛОЕМ

Даноян З.Н., Манукян Г.А.

Դանոյան Զ.Ն., Մանուկյան Գ.Ա.

Մերադաջված դիէլեկտրիկ շերտով պնդեղեկալարիկ շերտերով Լյավի
էլեկտրո-առաձգական մակերեսութային ալիքների մասին

[2] աշխարհի արդյունքների հիման վրա ուսումնասիրված են էլեկտրառաձգական Լյավի մակերեսութային ալիքների պնդեղեկալարիկ շերտավոր սիստեմում, որի հիմքի վրա անցկացված է մերադաջված շերտ: Քննարկված է նաև Լյավի էլեկտրառաձգական ալիքների կապը սովորական Լյավի եւ Գուլյան-Բլոստերի ալիքների հետ:

Z.N.Danoyan, G.A.Manookian

On Surface Electroelastic Waves of Love in Piezoelectric
Substructures with Metalized Dielectric layer

Исходя из результатов работы [2] (уточняющей и дополняющей результаты работы [1], изучены поверхностные электроупругие волны Лява в пьезоэлектрических слоистых системах с металлизированным слоем. Обсужден также вопрос связи электроупругих волн Лява с обычными волнами Лява и волнами Гуляева - Блюстейна.

1. Как известно из [3-5], в полубесконечной изотропной подложке, на которую нанесен изотропный слой из другого материала, могут распространяться поверхностные сдвиговые упругие волны горизонтальной поляризации, называемые волнами Лява (УПВЛ). Волны Лява существуют только в слоистых системах с мягким слоем, то есть когда скорость сдвиговых объемных волн в слое S_{02} меньше, чем скорость сдвиговых объемных волн в подложке S_{01} , причем скорость волн Лява удовлетворяет условию

$$S_{02} < V < S_{01} \quad (1.1)$$

Волны Лява многомодные, число мод и их скорости зависят от значения приведенной толщины слоя k ($k = ph = 2\pi h / \lambda$, p - волновое число, λ - длина волны, h - толщина слоя). Моды волны Лява являются трансформациями сдвиговых объемных волн, существующих в слоистой системе при определенных критических значениях параметра k . В частности, первая мода волны Лява возникает из сдвиговой объемной волны, существующей в подложке при отсутствии слоя и распространяющейся параллельно границе подложки. Известно также [4-7], что вышеуказанная сдвиговая объемная волна в подложке со свободной границей может трансформироваться в поверхностную волну горизонтальной поляризации при наличии у среды пьезоэлектрического свойства. Эти поверхностные электроупругие сдвиговые вол-

ны горизонтальной поляризации, существующие в пьезоэлектрических полубесконечных средах определенной симметрии, называются волнами Гуляева - Блюстейна (ПВГБ). Скорость волны Гуляева - Блюстейна v_{Γ} меньше скорости объемной электроупругой сдвиговой волны S_1 в рассматриваемой среде.

Представляет интерес исследование поверхностных электроупругих сдвиговых волн горизонтальной поляризации в слоистых системах, когда или подложка, или слой, или обе вместе являются пьезоэлектриками [1, 2, 7-10]. Эти волны связаны как с волнами Лява, так и с волнами Гуляева - Блюстейна (если последние существуют при отсутствии слоя). В настоящей работе исследуются поверхностные электроупругие сдвиговые волны горизонтальной поляризации в слоистой системе из пьезоэлектрической подложки классов *6mm, 4mm*, 622, 422, 6, 4 и изотропного металлизированного диэлектрического слоя. В дальнейшем, аналогично определению упругих волн Лява, поверхностные электроупругие сдвиговые волны горизонтальной поляризации, существующие в вышеуказанных слоистых системах с пьезоэлектрическими свойствами, будем называть поверхностными электроупругими волнами Лява (ЭУПВЛ).

Пусть слоистая система отнесена к прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ так, что граничная плоскость подложки и слоя совпадает с плоскостью Ox_2x_3 , ось Ox_3 параллельна главной оси симметрии пьезоэлектрической подложки, ось Ox_1 направлена в глубь подложки. Слой и подложка находятся в жестком контакте, граница $x_1 = 0$ электрически свободна, граница слоя $x_1 = -h$ металлизирована и механически свободна.

Решение электроупругой задачи Лява ищется в виде плоской гармонической волны, распространяющейся в направлении оси Ox_2 , с вектором упругого перемещения $\vec{u}(0; 0; u(x_1) \exp(i(px_2 - \omega t)))$, электрическим потенциалом $\varphi = \Phi(x_1) \exp(i(px_2 - \omega t))$, частотой $\omega > 0$, волновым числом $p > 0$, фазовой скоростью $v = \omega / p$, амплитудами u и Φ , зависящими от глубинной координаты x_1 и удовлетворяющими условию затухания:

$$u(x_1) \rightarrow 0, \quad \Phi(x_1) \rightarrow 0 \text{ при } x_1 \rightarrow +\infty \quad (1.2)$$

Здесь и далее индексами 1-2 отмечаются величины подложки и слоя соответственно. Удовлетворяя соответствующим уравнениям и условию затухания (1.2), получаем решение вида:

в области $x_1 > 0$

$$u_1 = U_1 \exp(-p\beta_1 x_1) \exp(i(px_2 - \omega t))$$

$$\varphi_1 = (\epsilon_1 \epsilon^{-1} U_1 \exp(-p\beta_1 x_1) + \Phi_1 \exp(-px_1)) \exp(i(px_2 - \omega t))$$

в области $-h < x_1 < 0$

$$u_2 = (U_1^* \exp(ip\beta_2 x_1) + U_2^* \exp(-ip\beta_2 x_1)) \exp(i(px_2 - \omega t))$$

$$\varphi_2 = (\Phi_2^+ \exp(px_1) + \Phi_2^- \exp(px_1)) \exp(i(px_2 - \omega t))$$

где $\Phi_1, \Phi_1^+, U_1^+, U_2^+, \Phi_2^+, \Phi_2^-$ - произвольные постоянные, β_1 и β_2 - коэффициенты затухания, определяемые по формулам:

$$\beta_1 = \sqrt{1 - V^2 / S_1^2}, \quad \beta_2 = \sqrt{(V^2 / S_2^2) - 1} \quad (1.4)$$

$$S_1 = \sqrt{\bar{c}_1 / \rho_1}, \quad S_{02} = S_2 = \sqrt{c_2 / \rho_2}, \quad \bar{c}_1 = c_1(1 + \chi_1^2)$$

$$\chi_1^2 = e^2 / \varepsilon_1 \varepsilon_0 c_1, \quad c_1 = c_{44}^{(1)}, \quad c_2 = c_{44}^{(2)} \quad (1.5)$$

$$e_1 = e_{15}^{(1)}, \quad d_1 = e_{14}^{(1)}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{11}^{(1)}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{11}^{(2)}$$

ρ_1, ρ_2 - материалы плотности, c_1, c_2 - упругие постоянные, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - относительные диэлектрические проницаемости, e_1, d_1 - пьезоэлектрические постоянные, ε_0 - диэлектрическая постоянная, χ_1^2 - коэффициент электромеханической связи, S_1, S_2 - фазовые скорости объемных сдвиговых волн, V - фазовая скорость искомой поверхностной волны.

Из условия затухания поверхностной волны в глубине подложки следует, что β_1 всегда положительна, что дает следующее условие для скорости бегущей поверхностной волны:

$$0 < V < S_1 \quad (1.6)$$

Отсюда вытекает, что парциальная электроупругая волна в подложке всегда неоднородна. В отличие от β_1 , величина β_2 может быть как действительной, так и мнимой, в частности, может обращаться в нуль. В случае действительной β_2 , $V > S_2$ и в слое распространяются объемные (однородные) парциальные волны (как в случае обычной волны Лява). При мнимом β_2 , $V < S_2$ и в слое распространяются неоднородные парциальные волны (обычные волны Лява, как видно из (1.1), с такими скоростями не распространяются).

Подставляя решение (1.3) в граничные условия задачи, из условия совместности полученных уравнений относительно амплитуд $\Phi_1, \dots, \Phi_2$, приходим к дисперсионному уравнению, которое определяет фазовую скорость поверхностной волны от относительной толщины слоя к [1,2]

$$\beta_1(V) = c\beta_2(V) \operatorname{tg}[k\beta_2(V)] + R(k) \quad (1.7)$$

$$R(k) = \frac{R_1^2 \varepsilon_2 - K_1^2 \varepsilon_1 \operatorname{th} k}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \operatorname{th} k} \quad (1.8)$$

$$c = \frac{c_2}{\bar{c}_1}, \quad R_1^2 = \frac{c_1^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \bar{c}_1}, \quad K_1^2 = \frac{d_1^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \bar{c}_1^2} \quad (1.9)$$

$R(k)$ - коэффициент электромеханической связи для поверхностной волны,

R_1^2 и K_1^2 - коэффициенты электромеханической связи для объемных волн.

Таким образом, электроупругие волны Лява соответствуют решениям $=V(k)$ дисперсионного уравнения (1.7), удовлетворяющих условию (1.6). Структура поверхностной волны определяется по характеру решений $=V(k)$ в зависимости от относительной толщины слоя k и физико - механических характеристик слоистой системы.

Для решений $=V(k)$, удовлетворяющих условию $< S_2$, уравнение (1.7) преобразуется к виду

$$\beta_1(V) = -c\gamma_2(V)ih[k\gamma_2(V)] + R(k) \quad (1.10)$$

$$\gamma_2(V) = \sqrt{1 - V^2 / S_2^2} \quad (1.11)$$

2. Для анализа дисперсионных уравнений (1.7) и (1.10) следует выяснить поведение функции $R(k)$ при $k \geq 0$ в зависимости от физико - механических характеристик среды. Так как производная функции $R(k)$

$$R'(k) = -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_1 k_1^2 + R_1^2)}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 i h k} < 0 \quad \text{при } k \geq 0 \quad (2.1)$$

то функция $R(k)$ всегда монотонно убывает. Знак этой функции определяется ее значениями в концах промежутка $0 \leq k \leq \infty$:

$$R_0 \equiv R(0) = R_1^2, \quad R_\infty \equiv R_\infty = \frac{R_1^2 \varepsilon_2 - K_1^2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \quad (2.2)$$

Согласно [11] можно показать, что численные величины R_0 и R_∞ для большинства пьезоэлектриков невелики, поэтому в дальнейшем принимается, как и в [1,2], что

$$|R(k)| \ll 1 \quad (2.3)$$

Отсюда получается поведение функции $R(k)$ и с точки зрения этого поведения рассматриваемые слоистые системы разделяются на следующие группы:

а) при $e_1 > 0$, $d_1 > 0$ (классы 6mm, 4mm)

$$\text{при } e_1 > 0, \quad d_1 > 0 \quad (e_1 / d_1)^2 > (\varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1}) \quad (\text{классы 6,4}) \quad (2.4)$$

$$R_0 > 0, \quad R_\infty > 0, \quad R(k) > 0, \quad k \in [0, +\infty]$$

$$\text{б) при } e_1 > 0, \quad d_1 > 0 \quad (e_1 d_1^{-1})^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1} \quad (\text{классы 6,4}) \quad (2.5)$$

$$R_0 > 0, \quad R_\infty > 0, \quad R(k) \geq 0, \quad k \in [0, +\infty]$$

$$\text{в) при } e_1 > 0, \quad d_1 > 0, \quad (e_1 d_1^{-1})^2 < \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1} \quad (\text{классы 6.4}) \quad (2.6)$$

$$R_0 > 0, \quad R_\infty < 0, \quad R(k) \geq 0, \quad k \in [0, k_*], \quad R(k) < 0, \quad k \in [k_*, +\infty]$$

$$r) \text{ при } e_1 = 0, \quad d_1 > 0 \quad (\text{классы 622, 422}) \quad (2.7)$$

$$R_0 = 0, \quad R_\infty < 0, \quad R(k) \leq 0, \quad k \in [0, +\infty]$$

где k_* определяется из условия $R(k_*) = 0$.

Дисперсионное уравнение анализируется в следующих трех случаях: $S_2 < S_1$ (мягкий слой), $S_2 > S_1$ (жесткий слой), $S_2 = S_1$ (промежуточный слой). При $k = 0$ (при отсутствии слоя), уравнения (1.7) и (1.10) совпадают и принимают вид $\beta_1(V) = R_0$, которое в силу (2.3), при $R_0 > 0$, всегда имеет решение [4,7]

$$= V_{\text{гб}} = S_1 \sqrt{1 - R_0^2} < S_1 \quad (2.8)$$

Это - скорость сдвиговой поверхностной волны Гуляева-Блюштейна, которая при выполнении условия $R_0 > 0$ всегда существует и распространяется медленно, чем объемные сдвиговые электроупругие волны в той же среде. Очевидно, что в случае мягкого слоя ($S_2 < S_1$), в зависимости от значений параметров слоистой системы, отношение скоростей $V_{\text{гб}}$ и S_2 может быть произвольным,

$$\text{при } \beta_1(S_2) > R_0 \quad V_{\text{гб}} > S_2$$

$$\text{при } \beta_1(S_2) = R_0 \quad V_{\text{гб}} = S_2$$

$$\text{при } \beta_1(S_2) < R_0 \quad V_{\text{гб}} < S_2 \quad (2.9)$$

где $\beta_1(S_2) = \sqrt{1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}}$, и волновая картина будет зависеть от указанного отношения.

Исследуя дисперсионное уравнение задачи, приходим к следующему заключению:

1. В слоистой системе из пьезоэлектрической подложки классов 6, 4, 6mm, 4mm, 622, 422 и изотропного диэлектрического металлизированного слоя поверхностная электроупругая волна может существовать как при мягком, так и при жестком и промежуточном слоях.

2. В случае мягкого слоя $S_2 < S_1$ ЭУПВЛ почти всегда существуют и возможны решения двух типов: электроупругие поверхностные волны обычного типа Лява, когда их составляющие парциальные упругие волны в слое однородны (скорость поверхностной волны больше скорости сдвиговых объемных волн S_2 в слое), и электроупругие поверхностные волны щелевого типа, когда их составляющие упругие волны в слое неоднородны (скорость поверхностной волны меньше скорости объемных волн S_2 в слое). В случае жесткого и промежуточного слоя $S_2 \geq S_1$ ЭУПВЛ не всегда существует, могут существовать лишь решения второго типа, то есть электроупругие по-

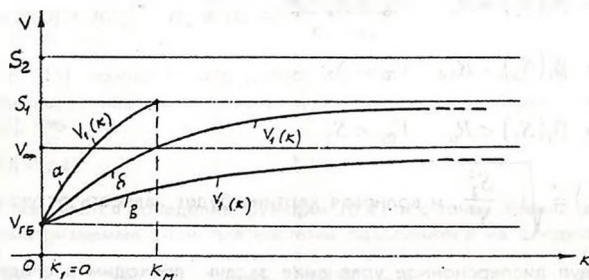
верхностные волны щелевого типа.

3. В случае мягкого слоя поверхностные электроупругие волны Лява многомодные (как и обычные волны Лява), а в случае жесткого и промежуточной - одномодные.

4. В случае мягкого слоя, независимо от поведения коэффициента электроупругости $R(k)$, высшие моды поверхностной волны, начиная со второй моды (как и обычных волн Лява), возникают из сдвиговых электроупругих объемных волн, существующих в слоистой системе при определенных критических значениях $k = k_n (n=2,3,...)$ параметра k и распространяющихся с одинаковой скоростью, равной скорости S_1 объемных сдвиговых волн в подложке:

$${}_n(k_n) = S_1 (n=2,3,...)$$

При переходе через каждое критическое значение $k = k_n$ соответствующая объемная волна трансформируется в n -ую моду поверхностной волны, скорость ${}_n(k)$ которой с ростом k монотонно убывает и в пределе, когда $k \rightarrow \infty$ стремится асимптотически к значению ${}_n = S_2$ - скорости объемной сдвиговой волны в слое, причем для каждого фиксированного значения $k > k_n$ скорости ${}_n(k)$ мод удовлетворяют условию: ${}_2(k) < V_3(k) < \dots < V_n(k)$. Число мод зависит от значения k скачкообразно и при $k \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности.



Фиг. 1

В пределе $k = +\infty$, то есть в случае двух полупространств все эти моды, сливаясь между собой, образуют единственную так называемую объемно - поверхностную волну, которая и распространяется со скоростью $= S_2$.

Как следует из сказанного, все высшие моды ЭУПВЛ волны обычного типа Лява.

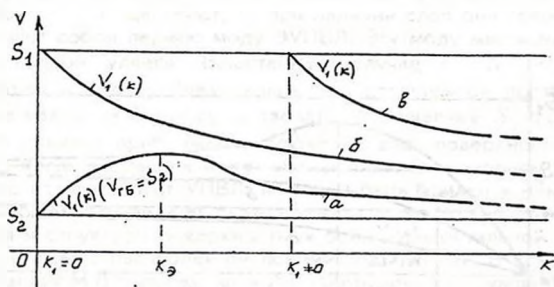
5. В случае мягкого слоя поведение первой моды ЭУПВЛ может быть различным, а именно:

а) для слоистых систем с $R_0 > 0$, то есть для слоистых систем, характеристики которых удовлетворяют условиям (2.4), (2.5) и (2.6), первая мода возникает от поверхностной волны Гуляева - Блюстейна, существующей при критическом значении $k = k_1 = 0$ (то есть при отсутствии слоя), имеющей

скорость $v_B \equiv V_1(0) = S_1 \sqrt{1 - R_0^2} < S_1$, и является трансформацией этой волны. Поэтому в этом случае, то есть когда первая мода ЭУПВЛ возникает от поверхностной волны ГБ, первая мода ЭУПВЛ представляет собой модифицированной волной Гуляева - Блюстейна. Поведение первой моды зависит от соотношения скоростей v_B и S_2 .

1) В случае $v_B > S_2$ в слоистых системах с условиями (2.4), (2.5) и (2.6) поведение первой моды описывается дисперсионной кривой, показанной на фиг.1,а. Эта мода при любых значениях обычного типа, она, в отличие от первой моды ПВЛ, которая возникает от объемной волны, возникает от поверхностной волны Гуляева - Блюстейна, но в пределе при $k \rightarrow \infty$, как и первая мода ПВЛ, со всеми остальными модами стремится к объемно - поверхностной волне, существующей в слоистой системе из двух полупространств.

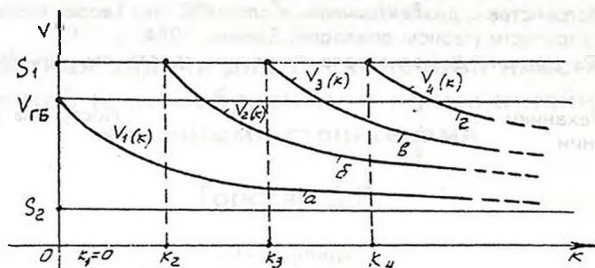
2) В случае $v_B = S_2$ в вышеуказанных трех системах поведение первой моды описывается дисперсионной кривой, показанной на фиг.3,а. В этом случае скорость первой моды, в зависимости от k , меняется иначе, чем в предыдущем, имеется критическое значение $k = k_3$, когда $v_1(k)$ достигает экстремального значения. Волна - обычного типа.



Фиг.2

3) В случае $v_B < S_2$ в слоистых системах (2.4), при выполнении условия $\beta_1(S_2) < R_\infty$, поведение первой моды описывается дисперсионной кривой, показанной на фиг.2,а, где $\omega < S_2$, $V_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} V_1(k)$. Здесь первая мода при любых значениях щелевого типа, при увеличении k , скорость волны монотонно возрастает, в пределе при $k \rightarrow \infty$ первая мода стремится к поверхностной волне, имеющей скорость $\omega < S_2$, так что в случае двух полупространств существуют как объемные поверхностные волны, так и поверхностные волны. В слоистых системах (2.4) при дополнительном условии $\beta_1(S_2) = R_\infty$ первая мода описывается дисперсионной кривой, показанной на фиг.2,б. Этот случай отличается от предыдущего тем, что в предельном случае $k = \infty$ первая мода, сливаясь со всеми модами, образует единственную объемно - поверхностную волну. Если же при $v_B < S_2$ рассматривать слоистые системы (2.5), (2.6) или системы (2.4) с дополнительным условием

$\mu_{\infty} = 1$ дисперсионная кривая имеет вид, показанный на фиг.4,б, а с дополнительным условием $\mu_{\infty} > 1$ - на фиг.4,в. В последнем случае для двух полупространств существует поверхностная волна, скорость которой $\infty < S_1 \leq S_2$.



Фиг. 4

Связь ЭУПВЛ с волнами Гуляева - Блюстейна уже отметили: если при отсутствии слоя ПВГБ существуют, то при наличии слоя они трансформируются и представляют собой первую моду ЭУПВЛ. Эту моду мы называли модифицированной волной Гуляева - Блюстейна. В случае $S_2 \geq S_1$, если пренебречь пьезоэффектом и задачу Лява решать в чисто упругой постановке, то поверхностные волны не будут существовать. В случае же $S_2 < S_1$ есть случаи, когда чисто упругое приближение также не дает поверхностную волну, но есть случаи, когда в пределе имеет волны Лява. В последнем случае ЭУПВЛ могут сильно отличаться от УПВЛ, не могут быть близки к ним. Отсюда следует, что в общем случае учет пьезоэффекта очень важен для выяснения существования и структуры поверхностных волн горизонтальной поляризации в слоистых системах с пьезоэлектрическими подложками. В конце отметим полезность участия М.В.Белубекяна и А.С.Аветисяна в обсуждении результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кессених Г.Г., Любимов В.Н., Шувалов Я.А. О поверхностных волнах Лява в пьезоэлектриках. - Кристаллография, 1982, в. 3, т.27.
2. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А. Поведение мод поверхностных сдвиговых электроупругих волн Лява в пьезоэлектрических подложках с диэлектрическим изотропным слоем. В кн.: Актуальные проблемы неоднородной механики (материалы ВН семинара), Ереван, 1991, с.49-54.
3. Новацкий В. Теория упругости. - М., Мир, 1975.
4. Оливер А. Поверхностные акустические волны. - М.: Мир, 1981.
5. Э.Райе, Д.Дьелесан. Упругие волны в твердых телах. - М.: Наука, 1982.
6. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. - М.: Наука, 1988.
7. Балакирев М.К., Гилинский И.В. Волны в пьезокристаллах. - Новосибирск: Наука, 1982.
8. Curtis R.G., Redwood M. Transverse Surface Waves on a Piezoelectric Material Carrying a Metal Layer on Finite Thickness. - J.Appl. Phys., 1973, v. 44, № 5,

р. 2002-2007.

9. *Кессених Г.Г., Любимов В.Н., Филиппов В.В.* Поперечные поверхностные акустические волны для изотропной подложки с пьезоэлектрическим слоем. - Акуст.журн., 1985, т.31, № 4, с. 492-495.
10. *Аветисян А.С.* Поверхностные сдвиговые волны в пьезоэлектрическом полупространстве с диэлектрическим слоем. В кн.: Теоретические вопросы магнитоупругости (тезисы докладов), Ереван, 1984, с. 7-10.
11. *Иона Ф., Ширане Д.* Сегнетоэлектрические кристаллы. - М.:Мир, 1965.

Институт Механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
6.05.199

Контактная задача для бесконечной пластины, усиленной крестообразным и прямолинейными конечными стрингерами

Торосян Д.Р.

Դ.Ռ.Թորոսյան

Խաչաձե Եւ ուղղաճիծ վերջավոր սփրինգերներով ուժեղացված անվերջ սալի համար կոնֆակտային խնդիր

Ֆակտորիզացիայի եւ Չերիշիի օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդների օգնությամբ խնդիրը բերված է հանրաշաղկապ հավասարումների բվազիլիովին ռեգուլյար անվերջ համակարգի:

D.R.Torossian

The Hertzian Problem of the infinite plate, strengthened by cross-wise und stringhtline finite stringers

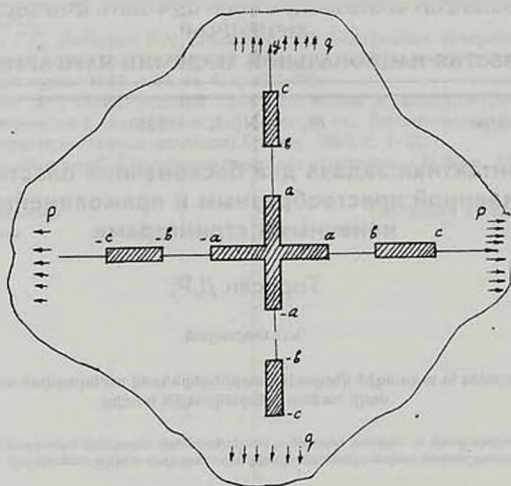
В работе рассматривается контактная задача для бесконечной упругой пластины, усиленной конечным крестообразным стрингером, а также с конечными стрингерами, расположенными в горизонтальном и вертикальном направлении симметрично относительно крестообразного стрингера. Задача с помощью метода факторизации и метода ортогональных многочленов Чебышева сводится к решению квазивполне регулярной совокупности бесконечных систем алгебраических уравнений.

Пусть упругая бесконечная пластина толщины h усилена крестообразным конечным стрингером, а также с конечными стрингерами модулем упругости E_s и с площадью поперечного сечения F_s . Пластина деформируется под действием сил p и q , приложенных на бесконечности (фиг.1). Относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, т.е. предполагается, что касательные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка [1]. Тогда, уравнения равновесия стрингеров в силу выше-сказанного, запишутся в виде

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx} = \frac{1}{E_s F_s} \int_a^x \tau^{(1)}(t) dt \quad (-a < x < a)$$

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx} = \frac{1}{E_s F_s} \int_x^b \tau^{(1)}(t) dt \quad (b < x < c)$$

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx} = \frac{1}{E_s F_s} \int_x^{-b} \tau^{(1)}(t) dt \quad (-c < x < -b)$$



фиг. 1

$$\frac{dv^{(1)}(y)}{dy} = \frac{1}{E_s F_s} \int_{-a}^a \tau^{(2)}(\eta) d\eta \quad (-a < y < a)$$

$$\frac{dv^{(1)}(y)}{dy} = \frac{1}{E_s F_s} \int_{-a}^a \tau^{(2)}(\eta) d\eta \quad (b < y < c)$$

$$\frac{dv^{(1)}(y)}{dy} = \frac{1}{E_s F_s} \int_{-a}^a \tau^{(2)}(\eta) d\eta \quad (-c < y < -b)$$

при условиях

$$\int_{-a}^a \tau^{(1)}(t) dt = 0, \quad \int_b^c \tau^{(1)}(t) dt = 0, \quad \int_{-c}^{-b} \tau^{(1)}(t) dt = 0 \quad (a) \quad (i = 1, 2),$$

где $u^{(1)}(x)$, $v^{(1)}(y)$ - горизонтальные и вертикальные перемещения точек стрингеров, соответственно, а $\tau^{(1)}(x)$, $\tau^{(2)}(y)$ - касательные контактные усилия.

С другой стороны, для пластины, учитывая нечетность функций $\tau^{(1)}(x)$, $\tau^{(2)}(y)$, имеем

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial u^{(2)}(x, y)}{\partial x} \right|_{y=0} &= -\frac{(3-\nu)(1+\nu)}{4\pi Eh} \int_0^a \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) \tau^{(1)}(t) dt + \\
&+ \frac{(1+\nu)^2}{2\pi Eh} \int_0^a \frac{\eta(\eta^2 - x^2)}{(\eta^2 + x^2)^2} \tau^{(2)}(\eta) d\eta - \frac{(3-\nu)(1+\nu)}{4\pi Eh} \int_b^c \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) \tau^{(1)}(t) dt + \\
&+ \frac{(1+\nu)^2}{2\pi Eh} \int_b^c \frac{\eta(\eta^2 - x^2)}{(\eta^2 + x^2)^2} \tau^{(2)}(\eta) d\eta + \frac{P}{E} - \frac{\nu q}{E} \\
\left. \frac{\partial v^{(2)}(x, y)}{\partial y} \right|_{x=0} &= -\frac{(3-\nu)(1+\nu)}{4\pi Eh} \int_0^a \left(\frac{1}{\eta-y} + \frac{1}{\eta+y} \right) \tau^{(2)}(\eta) d\eta + \\
&+ \frac{(1+\nu)^2}{2\pi Eh} \int_0^a \frac{t(t^2 - y^2)}{(t^2 + y^2)^2} \tau^{(1)}(t) dt - \frac{(3-\nu)(1+\nu)}{4\pi Eh} \int_b^c \left(\frac{1}{\eta-y} + \frac{1}{\eta+y} \right) \tau^{(2)}(\eta) d\eta + \\
&+ \frac{(1+\nu)^2}{2\pi Eh} \int_b^c \frac{t(t^2 - y^2)}{(t^2 + y^2)^2} \tau^{(1)}(t) dt + \frac{q}{E} - \frac{\nu P}{E} \quad (0 < x, y < \infty)
\end{aligned}$$

где $u^{(2)}(x, y)$, $v^{(2)}(x, y)$ - горизонтальные и вертикальные перемещения точек пластины, соответственно, ν - коэффициент Пуассона, E - модуль упругости пластины. Далее, имея в виду условия контакта

$$\begin{aligned}
\frac{du^{(1)}(x)}{dx} &= \frac{du^{(2)}(x, 0)}{dx} \quad (0 < x < a), \quad \frac{du^{(1)}(x)}{dx} = \frac{du^{(2)}(x, 0)}{dx} \quad (b < x < c) \\
\frac{dv^{(1)}(y)}{dy} &= \frac{dv^{(2)}(0, y)}{dy} \quad (0 < y < a), \quad \frac{dv^{(1)}(y)}{dy} = \frac{dv^{(2)}(0, y)}{dy} \quad (b < y < c)
\end{aligned}$$

и после некоторых преобразований получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью в нуле:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) \tau^{(1)}(at) dt - \frac{2A}{\pi} \int_0^1 \frac{\eta(\eta^2 - x^2)}{(\eta^2 + x^2)^2} \tau^{(2)}(a\eta) d\eta + \\
&+ \lambda_1 \int_0^1 \theta(t-x) \tau^{(1)}(at) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{11}(x, t) \psi^{(1)}(t) dt - \\
&- \frac{2A}{\pi} \int_{-1}^1 K_{12}(x, \eta) \psi^{(2)}(\eta) d\eta = -R_1 \quad (0 < x < 1)
\end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi^{(1)}(t)}{t-x} dt + \lambda_*^{(1)} \int_x^1 \psi^{(1)}(t) dt - \frac{2A}{\pi} \int_{-1}^1 K_{13}(x, \eta) \psi^{(2)}(\eta) d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^1 K_{14}(x, t) \tau^{(1)}(at) dt - \frac{2A}{\pi} \int_0^1 K_{15}(x, \eta) \tau^{(2)}(a\eta) d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{16}(x, t) \psi^{(1)}(t) dt = -R_1 \quad (-1 < x < 1) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{\eta-y} + \frac{1}{\eta+y} \right) \tau^{(2)}(a\eta) d\eta - \frac{2A}{\pi} \int_0^1 \frac{t(t^2-y^2)}{(\eta^2+y^2)^{3/2}} \tau^{(1)}(at) dt - \\ & - \lambda_1 \int_0^1 \theta(\eta-y) \tau^{(2)}(a\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{11}(y, \eta) \psi^{(2)}(\eta) d\eta - \\ & - \frac{2A}{\pi} \int_{-1}^1 K_{12}(y, t) \psi^{(1)}(t) dt = -R_2 \quad (0 < y < 1) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi^{(2)}(\eta)}{\eta-y} d\eta + \lambda_*^{(2)} \int_y^1 \psi^{(2)}(\eta) d\eta - \frac{2A}{\pi} \int_{-1}^1 K_{13}(y, t) \psi^{(1)}(t) dt + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^1 K_{14}(y, \eta) \tau^{(2)}(a\eta) d\eta - \frac{2A}{\pi} \int_{-1}^1 K_{15}(y, t) \tau^{(1)}(at) dt + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{16}(y, \eta) \psi^{(2)}(\eta) d\eta = -R_2 \quad (-1 < y < 1) \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$A = \frac{1+\nu}{3-\nu}, \quad \lambda_1 = \frac{4Eha}{E_s F_s (3-\nu)(1+\nu)}, \quad \lambda_*^{(1)} = \frac{2Eh(c-b)}{E_s F_s (3-\nu)(1+\nu)}$$

$$R_1 = \frac{4h}{(3-\nu)(1+\nu)} (\nu q - p), \quad R_2 = \frac{4h}{(3-\nu)(1+\nu)} (\nu p - q),$$

$$\psi^{(1)}(t) = \tau^{(1)}\left(\frac{c-b}{2}t + \frac{c+b}{2}\right), \quad \psi^{(2)}(t) = \tau^{(2)}\left(\frac{c-b}{2}t + \frac{c+b}{2}\right)$$

$$K_{11}(x, t) = \frac{1}{t - j_1 x + j_0} + \frac{1}{t + j_1 x + j_0}, \quad K_{16}(t, x) = \frac{1}{t + 2j_0 + x}$$

$$K_{12}(x, \eta) = \frac{(\eta + j_0)((\eta + j_0)^2 - j_1^2 x^2)}{((\eta + j_0)^2 + j_1^2 x^2)^2}, \quad K_{13}(x, \eta) = \frac{(\eta + j_0)((\eta + j_0)^2 - (x + j_0)^2)}{((\eta + j_0)^2 + (x + j_0)^2)^2}$$

$$K_{14}(x, t) = \frac{1}{t - j_1^{-1}x - j_2} + \frac{1}{t + j_1^{-1}x + j_2}, \quad K_{15}(x, \eta) = \frac{\eta(\eta^2 - (j_1^{-1}x + j_2)^2)}{(\eta^2 + (j_1^{-1}x + j_2)^2)^2}$$

$$j_0 = \frac{c+b}{c-b}, \quad j_1 = \frac{2a}{c-b}, \quad j_2 = \frac{c+b}{2a}$$

Таким образом, задача свелась к решению системы сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью в нуле (1)-(4).

Плоская задача о крутильных колебаниях жесткого крестообразного включения рассмотрена в работе [2].

Решение системы уравнений (1)-(4) построим с помощью метода, изложенной в работах [3], [4]. Для этого запишем (1) и (3) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) \tau_-^{(1)}(at) dt - \frac{2A}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta(\eta^2 - x^2)}{(\eta^2 + x^2)^2} \tau_-^{(2)}(a\eta) d\eta + \\ & + \theta(1-x) \lambda_1 \int_0^\infty \theta(t-x) \tau_-^{(1)}(at) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{11}^-(x, t) \psi^{(1)}(t) dt - \\ & - \frac{2A}{\pi} \int_{-1}^1 K_{12}^-(x, \eta) \psi^{(2)}(\eta) d\eta = -R_1 \theta(1-x) + g_-^{(1)}(ax) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\eta-y} + \frac{1}{\eta+y} \right) \tau_-^{(2)}(a\eta) d\eta - \frac{2A}{\pi} \int_0^\infty \frac{t(t^2 - y^2)}{(t^2 + y^2)^2} \tau_-^{(1)}(at) dt + \\ & + \theta(1-y) \lambda_2 \int_0^\infty \theta(\eta-y) \tau_-^{(2)}(a\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{11}^-(y, \eta) \psi^{(2)}(\eta) d\eta - \\ & - \frac{2A}{\pi} \int_{-1}^1 K_{12}^-(y, t) \psi^{(1)}(t) dt = -R_2 \theta(1-y) + g_-^{(2)}(ay) \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$K_{11}^-(x, t) = \theta(1-x) K_{11}(x, t), \quad K_{12}^-(x, t) = \theta(1-x) K_{12}(x, t)$$

$$\tau_-^{(1)}(ax) = \theta(1-x) \tau^{(1)}(ax), \quad \tau_-^{(2)}(ay) = \theta(1-y) \tau^{(2)}(ay)$$

$$g_+^{(2)}(ay) = \left[\frac{4Eh}{(3-\nu)(1+\nu)} \left(\frac{q}{E} - \frac{\nu p}{E} - \frac{\partial v^{(2)}(0, y)}{\partial y} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{11}(y, \eta) \psi^{(2)}(\eta) d\eta + \frac{2A}{\pi} \int_{-1}^1 K_{12}(y, t) \psi^{(1)}(t) dt \right] \Theta(y-1)$$

$$g_+^{(1)}(ax) = \left[\frac{4Eh}{(3-\nu)(1+\nu)} \left(\frac{p}{E} - \frac{\nu q}{E} - \frac{\partial u^{(2)}(x, 0)}{\partial x} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{11}(x, t) \psi^{(1)}(t) dt + \frac{2A}{\pi} \int_{-1}^1 K_{12}(x, t) \psi^{(2)}(t) dt \right] \Theta(x-1)$$

Далее, попарно слагая и вычитая уравнения (5) и (6), (2) и (4), получим

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{t-z} + \frac{1}{t+z} \right) \varphi_-^{(1)}(at) dt - \frac{2A}{\pi} \int_0^\infty \frac{t(t^2-z^2)}{(t^2+z^2)^2} \varphi_-^{(1)}(at) dt + \\ + \Theta(1-z) \lambda_1 \int_0^\infty \Theta(t-z) \varphi_-^{(1)}(at) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{22}^-(z, t) \psi_-(t) dt = \\ = Q_1 \Theta(1-z) + g_-^{(1)}(az) + g_-^{(2)}(az), \quad (0 < z < \infty) \quad (7)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_-(t)}{t-z} dt + \lambda_1^{(1)} \int_z^1 \psi_-(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{34}(z, t) \psi_-(t) dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^1 K_{33}(z, t) \varphi_-^{(1)}(at) dt = Q_1, \quad (-1 < z < 1) \quad (8)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{t-z} + \frac{1}{t+z} \right) \varphi_-^{(2)}(at) dt - \frac{2A}{\pi} \int_0^\infty \frac{t(t^2-z^2)}{(t^2+z^2)^2} \varphi_-^{(2)}(at) dt + \\ + \Theta(1-z) \lambda_1 \int_0^\infty \Theta(t-z) \varphi_-^{(2)}(at) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{22}^-(z, t) \psi_-(t) dt = \\ = Q_2 \Theta(1-z) + g_-^{(1)}(az) + g_-^{(2)}(az), \quad (0 < z < \infty) \quad (9)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_+(t)}{t-z} dt + \lambda_1^{(1)} \int_z^1 \psi_+(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{44}(z, t) \psi_+(t) dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^1 K_{33}(z, t) \varphi_-^{(2)}(t) dt = Q_2, \quad (-1 < z < 1) \quad (10)$$

где

$$\varphi_{-}^{(1)}(at) = \tau_{-}^{(1)}(at) + \tau_{-}^{(2)}(at), \quad \varphi_{-}^{(2)}(at) = \tau_{-}^{(1)}(at) - \tau_{-}^{(2)}(at)$$

$$\psi(t) = \psi^{(1)}(t) + \psi^{(2)}(t), \quad \psi_{+}(t) = \psi^{(1)}(t) - \psi^{(2)}(t)$$

$$K_{22}^{-}(z, t) = K_{11}^{-}(z, t) - 2AK_{12}^{-}(z, t), \quad Q_1 = -R_1 - R_2$$

$$K_{33}(z, t) = K_{14}(z, t) - 2AK_{15}(z, t), \quad Q_2 = R_2 - R_1$$

$$K_{44}(z, t) = K_{16}(z, t) - 2AK_{13}(z, t), \quad x = y = z$$

Сначала рассмотрим уравнение (7) и (8). Произведя в (7) замену переменных $t = e^u$, $z = e^v$ и после чего применив преобразование Фурье, получим

$$K^{(1)}(\alpha) \bar{\varphi}_{-}^{(1)}(\alpha) + \frac{\lambda_1}{\alpha} \bar{\varphi}_{-}^{(1)}(\alpha - i) + \bar{f}_{-}^{(1)}(\alpha) = \frac{Q_1}{\alpha} + \bar{G}_{+}^{(1)}(\alpha) \quad (-1 < \operatorname{Im} \alpha < 0) \quad (11)$$

где

$$\bar{G}_{+}^{(1)}(\alpha) = i(\bar{g}_{+}^{(1)}(\alpha) + \bar{g}_{+}^{(2)}(\alpha)), \quad K^{(1)}(\alpha) = \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi \alpha}{2} + i(\alpha + i)A}{\operatorname{sh} \frac{\pi \alpha}{2}}$$

$$\bar{\varphi}_{-}^{(1)}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{-}^{(1)}(ae^u) \exp(i\alpha u) du, \quad \bar{G}_{+}^{(1)}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{+}^{(1)}(ae^u) \exp(i\alpha u) du$$

$$\bar{f}_{-}^{(1)}(\alpha) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \bar{K}_{22}^{-}(\alpha, t) \psi(t) dt$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{22}^{-}(\alpha, t) &= \int_0^1 K_{22}(z, t) z^{\alpha-1} dz = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\partial^m K_{22}(z, t)}{\partial z^m} \bigg|_{z=1} \frac{\Gamma(i\alpha)}{\Gamma(i\alpha + m + 1)} - \\ &- \frac{(-1)^n \Gamma(i\alpha)}{\Gamma(i\alpha + n + 1)} \int_0^1 \frac{\partial^{n+1} K_{22}(z, t)}{\partial z^{n+1}} z^{i\alpha+n} dz \quad (\operatorname{Im} \alpha < 0) \end{aligned} \quad (12)$$

Поступая аналогичным образом, как в работе [5], для $\bar{\varphi}^{(1)}(\alpha)$ получим:

$$\bar{\varphi}_{-}^{(1)}(\alpha) + \frac{\lambda_1 \bar{\Phi}_{-}^{(1)}(\alpha)}{\alpha K_{-}^{(1)}(\alpha)} + \frac{\bar{F}_{-}^{(1)}(\alpha)}{\alpha K_{-}^{(1)}(\alpha)} = \frac{Q_1}{\alpha K_{+}^{(1)}(0) K_{-}^{(1)}(\alpha)} - \frac{\lambda_1 \bar{\Phi}_{+}^{(1)}(0) + \bar{F}_{+}^{(1)}(0)}{\alpha K_{-}^{(1)}(\alpha)} \quad (13)$$

где

$$\overline{\Phi}^{(1)}(\alpha) = \int_{-\infty}^0 \Phi^{(1)}(u) e^{i\alpha u} du, \quad \overline{\Phi}_+^{(1)}(\alpha) = \int_0^{\infty} \Phi^{(1)}(u) e^{i\alpha u} du$$

$$\Phi^{(1)}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\tau-\infty}^{2\tau+\infty} \overline{\Phi}^{(1)}(\alpha) e^{-i\alpha u} d\alpha \quad (-1 < \tau < 0),$$

$$\overline{\Phi}^{(1)}(\alpha) = \frac{\overline{\Phi}_-^{(1)}(\alpha - i)}{K_+^{(1)}(\alpha)} = \overline{\Phi}_+^{(1)}(\alpha) + \overline{\Phi}_-^{(1)}(\alpha)$$

$$\overline{F}^{(1)}(\alpha) = \frac{\alpha \overline{f}_-^{(1)}(\alpha)}{K_+^{(1)}(\alpha)} = \overline{F}_+^{(1)}(\alpha) - \overline{F}_-^{(1)}(\alpha), \quad \overline{F}_+^{(1)}(\alpha) = \int_0^{\infty} F^{(1)}(u) e^{i\alpha u} du$$

$$\overline{F}_-^{(1)}(\alpha) = \int_{-\infty}^0 F^{(1)}(u) e^{i\alpha u} du, \quad F^{(1)}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\tau-\infty}^{\tau+\infty} \overline{F}^{(1)}(\alpha) e^{-i\alpha u} d\alpha$$

$$K_+^{(1)}(\alpha) = \overline{M}_-(\alpha) \overline{L}_+(\alpha), \quad K_-^{(1)}(\alpha) = \overline{M}_-(\alpha) \overline{L}_-(\alpha)$$

$$\overline{L}_+(\alpha) = \int_0^{+\infty} L(u) e^{i\alpha u} du, \quad \overline{L}_-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 L(u) e^{i\alpha u} du$$

$$L(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\tau-\infty}^{\tau+\infty} \ln \left(1 + \frac{i(\alpha+i)A}{\operatorname{ch} \frac{\pi\alpha}{2}} \right) e^{-i\alpha u} d\alpha \quad (-1 < \tau < 0)$$

$$\overline{M}_+(\alpha) = \sqrt{2} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{i\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\alpha}{2}\right)}, \quad \overline{M}_-(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{i\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{i\alpha}{2}\right)}$$

Аналитическое продолжение функции $\overline{F}_-^{(1)}(\alpha)$, как следует из (12), может иметь полюса, только в точках $\alpha = in$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), притом простые. Причем

$$\operatorname{Res}_{\alpha=in} \overline{K}_{22}^-(\alpha, t) = - \frac{t}{n!} \frac{\partial^n K_{22}(z, t)}{\partial z^n} \Big|_{z=0}$$

Как показывает вычисление $\operatorname{Res}_{\alpha=i(2n-1)} \overline{K}_{22}^-(\alpha, t) = 0$, ($n = 1, 2, \dots$). Это говорит о том, что полюсами функции $\overline{F}_-^{(1)}(\alpha)$ являются точки $\alpha = i2n$ ($n = 1, 2, \dots$). Имея в виду вышесказанное относительно $\overline{F}_-^{(1)}(\alpha)$, нетрудно ви-

доть из (11), что полюсами функции $\overline{\Phi}^{(1)}(\alpha)$ будут точки $\alpha = \alpha_k + in$, $\alpha = -\overline{\alpha}_k + in$ ($n = 0, 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$), притом простые. Здесь α_k и $-\overline{\alpha}_k$ - нули функции $K^{(1)}(\alpha)$, где $\overline{\alpha}_k$ - число, сопряженное с α_k . Причем $0 < \text{Im} \alpha_k < \text{Im} \alpha_{k+1}$, $\text{Re} \alpha_k > 0$. Отметим, что α_1 положительно мнима [6]. Из вышесказанного следует, что функции $\tau^{(1)}(az) + \tau^{(2)}(az)$, $\overline{F}^{(1)}(\alpha)$ и $\overline{\Phi}^{(1)}(\alpha)$ имеют следующие представления:

$$\begin{aligned} \tau^{(1)}(az) + \tau^{(2)}(az) = & i \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_1)^n b_{nk} z^n \right) k^{-\varepsilon} B_k z^{-i\alpha_k} + \\ & + i \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_1)^n b_{nk}^* z^n \right) k^{-\varepsilon} C_k z^{i\overline{\alpha}_k} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}^{(1)}(\alpha) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_1)^n \left[K^{(1)}(\alpha_k + in + i) \right]^{-1} b_{nk}}{\alpha - \alpha_k - in - i} \right] k^{-\varepsilon} B_k + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_1)^n \left[K^{(1)}(-\overline{\alpha}_k + in + i) \right]^{-1} b_{nk}^*}{\alpha + \overline{\alpha}_k - in - i} \right] k^{-\varepsilon} C_k \end{aligned} \quad (15)$$

$$\overline{F}^{(1)}(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{\alpha k} \int_{-1}^1 \frac{1}{j_0 + t} \left(\frac{j_1}{j_0 + t} \right)^{2k} \psi(t) dt \quad (16)$$

где

$$\frac{j_1}{j_0 + t} < 1, \quad I_{\alpha k} = \frac{4ik \left[1 - (-1)^k (2k+1)A \right]}{\pi K^{(1)}(2ik)(\alpha - 2ik)}$$

$$k^{-\varepsilon} B_k = \text{Res}_{\alpha=\alpha_k} \overline{\Phi}^{(1)}(\alpha), \quad k^{-\varepsilon} C_k = \text{Res}_{\alpha=-\overline{\alpha}_k} \overline{\Phi}^{(1)}(\alpha), \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

$$\text{Res}_{\alpha=\alpha_k+in} \overline{\Phi}^{(1)}(\alpha) = (-\lambda_1)^n b_{nk} k^{-\varepsilon} B_k, \quad \text{Res}_{\alpha=-\overline{\alpha}_k+in} \overline{\Phi}^{(1)}(\alpha) = (-\lambda_1)^n b_{nk}^* k^{-\varepsilon} C_k k^{-\varepsilon}$$

$$b_{nk} = \prod_{l=1}^n \left[K^{(1)}(\alpha_k + il)(\alpha_k + il) \right]^{-1}$$

$$b_{nk}^* = \prod_{l=1}^n \left[K^{(1)}(-\overline{\alpha}_k + il)(-\overline{\alpha}_k + il) \right]^{-1}, \quad b_{\alpha k} = b_{\alpha k}^* =$$

Так как α_1 положительно мнима, то из (14) можно заключить, что $\tau^{(1)}(0) = \tau^{(2)}(0) = 0$. В (14) допускается, что все α_k комплексные. В случае мнимых α_k в (14) вместо C_k надо положить нуль. Тогда, имея в виду (15), (16), из (13) легко получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} B_m + \frac{\lambda_1 m^\epsilon K_*^{(1)}(\alpha_m) \operatorname{sh} \frac{\pi \alpha_m}{2}}{\alpha_m \beta(\alpha_m)} \sum_{k=1}^{\infty} (H_{mk}^{(1)} B_k + H_{mk}^{(2)} C_k) + \\ + \frac{m^\epsilon \bar{F}_-^{(1)}(\alpha_m) \operatorname{sh} \frac{\pi \alpha_m}{2} K_*^{(1)}(\alpha_m)}{\alpha_m \beta(\alpha_m)} = f_m^{(1)} \\ C_m + \frac{\lambda_1 m^\epsilon K_*^{(1)}(-\bar{\alpha}_m) \operatorname{sh} \frac{\pi \bar{\alpha}_m}{2}}{\bar{\alpha}_m \beta(-\bar{\alpha}_m)} \sum_{k=1}^{\infty} (H_{mk}^{(3)} B_k + H_{mk}^{(4)} C_k) + \\ + \frac{m^\epsilon \bar{F}_-^{(1)}(-\bar{\alpha}_m) \operatorname{sh} \frac{\pi \bar{\alpha}_m}{2} K_*^{(1)}(-\bar{\alpha}_m)}{\bar{\alpha}_m \beta(-\bar{\alpha}_m)} = f_m^{(2)} \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} f_m^{(1)} &= \frac{Q_1 m^\epsilon K_*^{(1)}(\alpha_m) \operatorname{sh} \frac{\pi \alpha_m}{2}}{\alpha_m \beta(\alpha_m) K_*^{(1)}(0)} - \frac{m^\epsilon K_*^{(1)}(\alpha_m) \operatorname{sh} \frac{\pi \alpha_m}{2}}{\alpha_m \beta(\alpha_m)} (\lambda_1 \bar{\Phi}_*^{(1)}(0) + \bar{F}_*^{(1)}(0)) \\ f_m^{(2)} &= \frac{Q_1 m^\epsilon K_*^{(1)}(-\bar{\alpha}_m) \operatorname{sh} \frac{\pi \bar{\alpha}_m}{2}}{\bar{\alpha}_m \beta(-\bar{\alpha}_m) K_*^{(1)}(0)} - \frac{m^\epsilon K_*^{(1)}(-\bar{\alpha}_m) \operatorname{sh} \frac{\pi \bar{\alpha}_m}{2}}{\bar{\alpha}_m \beta(-\bar{\alpha}_m)} (\lambda_1 \bar{\Phi}_*^{(1)}(0) + \bar{F}_*^{(1)}(0)) \\ H_{mk}^{(1)} &= k^{-\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_1)^n [K_*^{(1)}(\alpha_k + in + i)]^{-1} b_{nk}}{\alpha_m - \alpha_k - in - i} \\ H_{mk}^{(2)} &= k^{-\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_1)^n [K_*^{(1)}(-\bar{\alpha}_k + in + i)]^{-1} b_{nk}^*}{\alpha_m + \bar{\alpha}_k - in - i} \\ H_{mk}^{(3)} &= -k^{-\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_1)^n [K_*^{(1)}(\alpha_k + in + i)]^{-1} b_{nk}}{\bar{\alpha}_m + \bar{\alpha}_k + in + i} \end{aligned}$$

$$H_{mk}^{(4)} = -k^{-\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_1)^n [K_*^{(1)}(-\bar{\alpha}_k + in + i)]^{-1} b_{nk}^*}{\bar{\alpha}_m - \bar{\alpha}_k + in + i}$$

$$\beta(\alpha) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi \alpha}{2} + iA \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Имея в виду условие (а), функцию $\psi(t)$ ищем в виде [4], [7]

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(z)$$

где $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$ - многочлены Чебышева первого рода.

Подставив эту функцию в выражения $\bar{F}_-^{(11)}(\alpha_m)$, $\bar{F}_-^{(11)}(-\bar{\alpha}_m)$ и в (8) и поступая обычным образом, получим

$$A_m + \sum_{n=1}^{\infty} A_n E_{mn} + \sum_{n=1}^{\infty} (E_{mn}^{(1)} B_n + E_{mn}^{(2)} C_n) = Q_1 \delta_{1m} \quad (18)$$

$$B_m + \frac{\lambda_1 m^{\epsilon} K_*^{(1)}(\alpha_m) \operatorname{sh} \frac{\pi \alpha_m}{2}}{\alpha_m \beta(\alpha_m)} \sum_{k=1}^{\infty} (H_{mk}^{(1)} B_k + H_{mk}^{(2)} C_k) +$$

$$+ \frac{m^{\epsilon} K_*^{(1)}(\alpha_m) \operatorname{sh} \frac{\pi \alpha_m}{2}}{\alpha_m \beta(\alpha_m)} \sum_{n=1}^{\infty} L_{mn} A_n = f_m^{(1)} \quad (19)$$

$$C_m + \frac{\lambda_1 m^{\epsilon} K_*^{(1)}(-\bar{\alpha}_m) \operatorname{sh} \frac{\pi \bar{\alpha}_m}{2}}{\bar{\alpha}_m \beta(-\bar{\alpha}_m)} \sum_{k=1}^{\infty} (H_{mk}^{(3)} B_k + H_{mk}^{(4)} C_k) +$$

$$+ \frac{m^{\epsilon} K_*^{(1)}(-\bar{\alpha}_m) \operatorname{sh} \frac{\pi \bar{\alpha}_m}{2}}{\bar{\alpha}_m \beta(-\bar{\alpha}_m)} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{L}_{mn} A_n = f_m^{(2)} \quad (20)$$

где

$$L_{mn} = -\frac{1}{2n(n-1)} \sum_{k=1}^{\infty} I_{\alpha_{n-k}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{1}{j_0+t} \left(\frac{j_1}{j_0+t} \right)^{2k} \right] \sqrt{1-t^2} U_{n-1}(t) dt -$$

$$-\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{\infty} I_{\alpha_{n+k}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{1}{j_0+t} \left(\frac{j_1}{j_0+t} \right)^{2k} \right] \sqrt{1-t^2} U_{n+1}(t) dt$$

$$E_{mn} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{K_{33}(z, t) T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \int_{-1}^1 \frac{\lambda_n^{(1)} T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right] \sqrt{1-z^2} U_{m-1}(z) dz$$

$$E_{mn}^{(1)} = \frac{\xi_m}{n^\epsilon (1 - i\alpha_n)} - E_{mn0}^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} E_{mnk}^{(1)}, \quad E_{mn}^{(2)} = \frac{\xi_m}{n^\epsilon (1 + i\bar{\alpha}_n)} - E_{mn0}^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} E_{mnk}^{(2)}$$

δ_{ek} - символ Кронекера

$$\delta_{ek} = \begin{cases} 0, & e \neq k \\ 1, & e = k \end{cases}, \quad \xi_m = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 K_{33}(1, z) \sqrt{1-z^2} U_{m-1}(z) dz$$

$$E_{mnk}^{(1)} = \frac{(-\lambda_1)^k b_{nk}}{\pi n^\epsilon} \left[\frac{1}{m-1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial K_{33}(z, t)}{\partial z} t^{k-i\alpha_n} dt \sqrt{1-z^2} U_{m-2}(z) dz - \right. \\ \left. - \frac{1}{m+1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial K_{33}(z, t)}{\partial z} t^{k-i\alpha_n} dt \sqrt{1-z^2} U_{m+1}(z) dz \right]$$

$$E_{mn0}^{(1)} = \frac{i}{\pi n^\epsilon (1 - i\alpha_n)} \left[\frac{1}{m-1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 K_{33}(z, t)}{\partial z \partial t} t^{1-i\alpha_n} dt \sqrt{1-z^2} U_{m-2}(z) dz - \right. \\ \left. - \frac{1}{m+1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 K_{33}(z, t)}{\partial z \partial t} t^{1-i\alpha_n} dt \sqrt{1-z^2} U_{m+1}(z) dz \right]$$

а выражение для $E_{mn0}^{(2)}$ и $\bar{L}_{mn}$ получится из $E_{mn0}^{(1)}$ и L_{mn} , если в них вместо α_n и $I_{\alpha_n k}$ положить $-\bar{\alpha}_n$ и $I_{\bar{\alpha}_n k}$, а $E_{mnk}^{(2)}$, если в $E_{mnk}^{(1)}$ вместо α_n положить $-\bar{\alpha}_n$, а вместо b_{nk} - b_{nk}^* . В случае мнимого корня α_j надо положить в (18), (19) $c_n = 0$ и не рассматривать (20) при $m = j$.

Квазиполная регулярность совокупности бесконечных систем следует из оценок:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |E_{mn0}^{(1)}| < \frac{C_1}{m}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |E_{mnk}^{(1)}| < \frac{C_2}{m} \quad \text{при } m \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |E_{mn}| < \frac{C_3}{\sqrt{m}}, \quad \left| \frac{K_*^{(1)}(\alpha_m) \operatorname{sh} \frac{\pi \alpha_m}{2}}{\alpha_m \beta(\alpha_m)} \right| < \frac{C_4}{\sqrt{m}} \quad \text{при } m \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |L_{mn}| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |H_{mnk}^{(1)}| < \infty, \quad \xi_m \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty$$

Постоянные $\bar{\Phi}_*^{(1)}(0)$, $\bar{F}_*^{(1)}(0)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_*^{(1)}(-i) + \frac{\lambda_1 i \bar{\Phi}_*^{(1)}(-i)}{K_*^{(1)}(-i)} + \frac{i \bar{F}_*^{(1)}(-i)}{K_*^{(1)}(-i)} = \\ = \frac{Q_1 i}{K_*^{(1)}(0) K_*^{(1)}(-i)} - \frac{i}{K_*^{(1)}(-i)} (\lambda_1 \bar{\Phi}_*^{(1)}(0) + \bar{F}_*^{(1)}(0)) \end{aligned}$$

$$\bar{F}_*^{(1)}(0) = -\frac{2(1-A)}{\pi K_*^{(1)}(0)} \int_{-1}^1 \frac{\psi(t)}{t + j_0} dt - \bar{F}_*^{(1)}(0)$$

Аналогичным образом можно получить решение уравнения (9) и (10). Тогда, определение $\tau^{(1)}(az)$, $\tau^{(2)}(az)$, $\psi^{(1)}(z)$, $\psi^{(2)}(z)$ очевидно. В частном случае при отсутствии вертикально расположенных стрингеров, задача сводится к решению функционального уравнения

$$\operatorname{cth} \frac{\pi \alpha}{2} \bar{\tau}_-(\alpha) + \frac{\lambda_1}{\alpha} \bar{\tau}_-(\alpha - i) + \bar{f}_-(\alpha) = -\frac{R_1}{\alpha} + i \bar{g}_+(\alpha) \quad (21)$$

и сингулярного интегрального уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(t)}{t-x} dt + \lambda_1^{(1)} \int_x^1 \psi(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^1 K_{14}(x, t) \tau(\alpha t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{16}(x, t) \psi(t) dt - R_1 \quad (22)$$

где

$$\bar{\tau}_-(\alpha) = \bar{\tau}_*^{(1)}(\alpha), \quad \bar{g}_+(\alpha) = \bar{g}_*^{(1)}(\alpha), \quad \psi(t) = \psi^{(1)}(t), \quad \bar{f}_-(\alpha) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \bar{K}_{11}(\alpha, t) \psi(t) dt$$

Сначала рассмотрим уравнение (21). Поступая аналогичным образом, как выше, для $\bar{\tau}_-(\alpha)$ получим представления

$$\bar{\tau}_-(\alpha) + \frac{\lambda_1 \bar{\Phi}_*(\alpha)}{\alpha \bar{M}_-(\alpha)} + \frac{\bar{F}_-(\alpha)}{\alpha \bar{M}_-(\alpha)} = -\frac{R_1}{\alpha \bar{M}_-(\alpha)} - \frac{\bar{F}_*(0)}{\alpha \bar{M}_-(\alpha)} \quad (23)$$

Исходя из аналитических свойств функции $\bar{\tau}_-(\alpha)$, убедимся, что функция $\bar{\tau}_-(\alpha)$ имеет полюса только в точках $\alpha = i(2n-1)$ ($n=1, 2, \dots$) и притом простые, а полюсами функции $\bar{F}_-(\alpha)$ являются точки $\alpha = 2in$ ($n=1, 2, \dots$). Из вышесказанного следует, что функция $\tau(ax)$, $\bar{F}_-(\alpha)$ и $\bar{\Phi}_-(\alpha)$ имеют следующие представления:

$$\tau(ax) = i \sum_{n=1}^{\infty} A_{-1}^{(2n-1)} x^{2n-1}$$

$$\overline{\Phi}_-(\alpha) = \frac{\overline{\tau}_-(-i)}{\alpha \overline{M}_-(0)} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{-1}^{(2n-1)}}{\overline{M}_-(2ni)(\alpha - 2ni)2n} \quad (24)$$

$$\overline{F}_-(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{\alpha k} \int_{-1}^1 \frac{1}{j_0 + i} \left(\frac{j_1}{j_0 + i} \right)^{2k} \psi(r) dt$$

$$I_{\alpha k} = \frac{4ik}{\pi \overline{M}_-(2ik)(\alpha - 2ik)}$$

Тогда, имея в виду (24) из (23), получим

$$\begin{aligned} & A_{-1}^{(2m-1)} + \frac{\lambda_1}{2\pi} \overline{M}_-(i(2m-1)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{-1}^{(2n-1)}}{\overline{M}_-(2ni) n \left(n + \frac{1}{2} - m \right)} + \\ & + \frac{2}{\pi} \frac{\overline{F}_-(i(2m-1)) \overline{M}_-(i(2m-1))}{2m-1} = i \frac{2}{\pi} \frac{(R_1 + \lambda_1 \overline{\tau}_-(-i)) \overline{M}_-(i(2m-1))}{(2m-1) \overline{M}_-(0)} + \quad (25) \\ & + i \frac{2}{\pi} \frac{\overline{F}_-(0) \overline{M}_-(i(2m-1))}{2m-1} \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

где

$$A_{-1}^{(2m-1)} = \operatorname{Res}_{\alpha=i(2m-1)} \overline{\tau}_-(\alpha)$$

после замены

$$\frac{A_{-1}^{(2m-1)}}{\overline{M}_-(2mi)} = X_m$$

система (25) запишется в виде

$$X_m + \frac{\lambda_1}{2\pi} \beta_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n \left(n + \frac{1}{2} - m \right)} + \frac{2}{\pi} \frac{\overline{F}_-(i(2m-1))}{2m-1} \beta_m =$$

$$= i \frac{2}{\pi} \frac{R_1 + \lambda_1 \overline{\tau}_-(-i)}{\overline{M}_-(0)(2m-1)} \beta_m + i \frac{2}{\pi} \frac{\overline{F}_-(0)}{2m-1} \beta_m$$

где $\beta_m = \frac{\Gamma^2\left(m + \frac{1}{2}\right)}{m \Gamma^2(m)}$ и $\beta_m \sim O(1)$ при $m \rightarrow \infty$, $\Gamma(z)$ - известная гамма-функция.

Далее, поступая аналогичным образом, как выше, окончательно получим искомую совокупность бесконечных систем линейных уравнений следующего вида:

$$y_n + \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m + \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} x_m = -R y_n$$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\lambda_n}{2\pi} \beta_n \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{x_m}{n + \frac{1}{2} - m} \right) + \frac{2\beta_n}{\pi(2m-1)} \sum_{m=1}^{\infty} L_m \beta_m = \\ &= i \frac{2}{\pi} \frac{R_n + \lambda_n \varepsilon(-i)}{(2m-1)A_n(0)} \beta_n + i \frac{2}{\pi} \frac{F_n(0)}{2m-1} \beta_n \quad (m=1,2,\dots) \end{aligned}$$

тогда

$$L_m = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{K_{\alpha}(x,t) T_{\alpha}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \int_0^1 \frac{X_{\alpha}^*(t) T_{\alpha}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) \sqrt{1-t^2} U_{m,\alpha}(x) dx \right.$$

$$\begin{aligned} E_m^* &= \frac{D_{\alpha}(2m)}{\pi} \left[\frac{1}{m-1} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial K_{\alpha}(x,t)}{\partial t} t^{m-2} dt \sqrt{1-t^2} U_{m,\alpha}(x) dx + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{m+1} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial K_{\alpha}(x,t)}{\partial t} t^{m-2} dt \sqrt{1-t^2} U_{m,\alpha}(x) dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_m &= -\frac{1}{2m(m+1)} \sum_{k=1}^{\infty} L_{k+m-1} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{1}{J_k+t} \left(\frac{J_k}{J_k+t} \right)^{2\alpha} \right] \sqrt{1-t^2} U_{m,\alpha}(t) dt = \\ &= -\frac{1}{m(m+1)} \sum_{k=1}^{\infty} L_{k+m-1} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{1}{J_k+t} \left(\frac{J_k}{J_k+t} \right)^{2\alpha} \right] \sqrt{1-t^2} U_{m,\alpha}(t) dt \end{aligned}$$

Положив $F_n(0)$ выражением из (23), если положить $\alpha = -1$, то из условия регулярности системы следует из условия

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\left| n + \frac{1}{2} - m \right|} = \frac{2}{2m-1} \left(\psi \left(m - \frac{1}{2} \right) + 2\psi(m) - 2\psi \left(\frac{1}{2} \right) + \gamma \right) \quad (m=2,3,\dots)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |K_{nm}| < \frac{C}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} |L_{nm}| < \frac{C}{\sqrt{n}} \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad \sum_{m=1}^{\infty} |E_{nm}| < \infty$$

тогда $\psi(z)$ — функция Римана, γ — постоянная Эйлера. Применив $\psi(z) = \ln z$ при $|z| \rightarrow \infty$, получим $\arg z < \pi$.

Автор благодарит В.М. Гусева за помощь в подготовке рукописи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Муки Р., Стернберг Э.* Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. - Тр. Амер. общ. инж.-механиков, 1968, сер. Е, № 4.
2. *Попов В.Г.* Динамические и статические задачи о концентрации упругих напряжений возле пересекающихся включений. - В кн.: Смешанные задачи механики деформируемого тела. II Всесоюзн. конф. Тезисы докл. Днепропетровск, с. 78-79.
3. *Григорян Э.Х.* Об одном подходе к решению задачи для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение, выходящее на границу полуплоскости. - Межвуз. сб. науч. тр. Механика, Ереван, вып. 6, 1987.
4. *Агабекян П.В., Григорян Э.Х.* Контактная задача для полубесконечной пластины, усиленной двумя конечными стрингерами. - Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1989, т. 42, № 5.
5. *Нобл Б.* Метод Винера-Хопфа. - М.: Изд. иностр. лит., 1962.
6. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. - М.: Наука, 1981.
7. *Саркисян В.С.* Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. - Ереван: изд. Госуниверситета, 1983.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
6.12.1993

О НИЖНИХ ОЦЕНКАХ КРИТИЧЕСКИХ СИЛ СЖАТЫХ ПОЛОС ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Акопян А. С., Киракосян Р. М.

Ա.Ս. Հակոբյան, Ռ.Մ. Կիրակոսյան

Գծայնորեն փոփոխական հաստության սեղմված շերտերի
կրիտիկական ուժերի ստորին գնահատականների մասին:

Ցույց է տրվում, որ եթե գծայնորեն փոփոխվող հաստության շերտի լայնությունը անսահմանափակ աճում է, ապա սեղմող ուժի կրիտիկական արժեքները ձգվում են ոչ թե զրոյի, ինչպես դա տրեղի ունի հաստաբարձր շերտի դեպքում, այլ որոշակի վերջավոր մեծությունների:

A. S. Hakobian, R. M. Kirakosian

On the Lower Appraisal of Critical Force of Compressing Strips with Linear Variable Thickness

Показано, что если ширина полосы линейно-переменной толщины неограниченно возрастает, то критические значения сжимающей силы стремятся не к нулю, как это имеет место в случае полосы постоянной толщины, а к определенным конечным величинам.

Вопросам устойчивости балок, полос и пластин переменной толщины посвящено сравнительно мало работ. В них (в [1]-[4] и др.), как правило, разными способами определяются критические значения параметров нагрузок тонкостенных элементов конкретных размеров. В настоящей статье преследуется иная цель: исследуется поведение изменения критических сил полос линейно-переменной толщины, когда ширина, вдоль которой происходит сжатие, неограниченно увеличивается. Показывается, что при возрастании ширины критические силы полос линейно-переменной толщины стремятся не к нулю, как это имеет место в случае полос постоянной толщины, а к определенным конечным величинам. Иными словами, установлено наличие нижних границ критических сил, отличных от нуля. Это утверждение доказывается для четырех вариантов краевых условий. Приводятся таблицы разрешающих трансцендентных уравнений, а также значений критических сил, соответствующих первым формам потери устойчивости полосы.

1. Рассмотрим бесконечно длинную полосу ширины l и переменной толщины h , изготовленную из однородного изотропного материала. Полосу отнесем к системе прямоугольных декартовых координат x, y, z , совместив плоскость xy со срединной плоскостью, а ось z направив вертикально вниз. Пусть толщина полосы меняется по линейному закону

$$h = h_0 + h_1 x \quad (1.1)$$

где h_0 и h_1 - заданные параметры, причем $h_1 > 0$. Полоса сжимается вдоль своей ширины силами равномерной интенсивности p , приложенными на краях $x = 0$ и $x = l$.

Попытаемся выяснить поведение изменения критических значений p при возрастании ширины полосы. Этот вопрос имеет смысл, поскольку возрастание ширины полосы имеет два противоположных влияния. С одной стороны, оно приводит к увеличению гибкости, а с другой стороны, в силу параллельного возрастания толщины, - к увеличению жесткости полосы. Забегая вперед, отметим, что при неограниченном возрастании ширины эти два влияния компенсируют друг друга, в результате чего критические значения сжимающей силы стремятся к конечным величинам.

Изгибающий момент полосы M_x , выпущенной по цилиндрической поверхности, имеет вид -

$$M_x = -\frac{B_{11}}{12} h^3 \frac{d^2 w}{dx^2} = pw + c_1 x + c_2 \quad (1.2)$$

где B_{11} - параметр материала [5], w - прогиб полосы, а c_1 , c_2 - произвольные постоянные.

Переходим к обозначениям:

$$p = \sigma_0 h_0 \bar{p}, \quad B_{11} = n \sigma_0, \quad \varepsilon = \frac{l}{h_0}, \quad b = \frac{12 \bar{p}}{n h_1^2} \quad (1.3)$$

$$t = 2 \sqrt{\frac{b h_0}{h_0 + h_1 x}}, \quad w = 2 h_0 \sqrt{b} \frac{y}{t}$$

Здесь σ_0 - характерное напряжение материала; $\bar{p}$, ε , y и l - безразмерные величины.

Учитывая (1.3), можно из выражения изгибающего момента (1.2) получить дифференциальное уравнение Бесселя с неоднородной правой частью -

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + (t^2 - 1)y = At + Bt^3 \quad (1.4)$$

где

$$A = -\frac{24c_1}{n\sigma_0 h_0 h_1^3 \sqrt{b}}, \quad B = \frac{6}{n\sigma_0 h_0 h_1^2 b \sqrt{b}} \left(\frac{c_1}{h_1} - \frac{c_2}{h_0} \right) \quad (1.5)$$

Общее решение уравнения (1.4) имеет вид [6]

$$y = \frac{A}{t} + Bt + CJ_1(t) + DY_1(t) \quad (1.6)$$

Здесь J_1 и Y_1 - функции Бесселя первого и второго родов с индексом "1". Постоянные A , B , C и D подлежат определению из краевых условий полосы.

Имея в виду (1.2), (1.6) и выражений

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dx} &= -\frac{h_1 t}{4\sqrt{b}} \left(t \frac{dy}{dt} - y \right) \\
\frac{d^2 w}{dx^2} &= \frac{h_1^2 t^3}{32 h_0 b \sqrt{b}} \left(t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} - y \right) \\
\frac{dy}{dt} &= -\frac{A}{t^2} + B + C \left[J_0(t) - \frac{J_1(t)}{t} \right] + D \left[Y_0(t) - \frac{Y_1(t)}{t} \right] \\
\frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{2A}{t^3} + C \left[J_1(t) \left(\frac{2}{t^2} - 1 \right) - \frac{J_0(t)}{t} \right] + D \left[Y_1(t) \left(\frac{2}{t^2} - 1 \right) - \frac{Y_0(t)}{t} \right]
\end{aligned} \quad (1.7)$$

можно краевые условия полосы представить в виде:

ш) условия шарнирного опирания -

$$\begin{aligned}
A + t^2 B + J_1(t) C + t Y_1(t) D &= 0 \quad (w = 0) \\
J_1(t) C + Y_1(t) D &= 0 \quad (M_x = 0)
\end{aligned} \quad (1.8)$$

з) условия защемления -

$$\begin{aligned}
A + t^2 B + J_1(t) C + t Y_1(t) D &= 0 \quad (w = 0) \\
2B + J_0(t) C + Y_0(t) D &= 0 \quad \left(\frac{dw}{dx} = 0 \right)
\end{aligned} \quad (1.9)$$

2. Рассмотрим четыре варианта краевых условий. Ради простоты эти варианты отметим буквами "ш" и "з", подразумевая под буквой "ш" шарнирное опирание, а под буквой "з" - защемление. При этом левую букву отнесем к тонкому, а правую - к толстому концу полосы. Согласно этому, например, обозначение "ш", "ш" указывает тот случай, когда тонкий конец полосы $l = l_1$ зашпелен, а толстый конец $l = l_2$ - шарнирно оперт.

Записав в каждом случае краевые условия, получим систему четырех однородных уравнений. Приравняв нулю определитель этой системы (условие существования нетривиальных решений), получим соответствующее трансцендентное уравнение, корнями которого и определяются критические значения сжимающей силы P . Пользуясь свойствами бесселевых функций, можно получить асимптотические выражения трансцендентных уравнений, соответствующих неограниченно большой ширине полос.

В табл. 1 приведены трансцендентные уравнения и их асимптотические выражения для четырех вариантов краевых условий. При этом безразмерное значение критической силы P входит в аргументы бесселевых функций следующим образом:

$$t_1 = \frac{4}{h_1} \sqrt{\frac{3P}{n}}, \quad t_2 = \frac{t_1}{\sqrt{1+h_1 \epsilon}} \quad (2.1)$$

В табл. 2 приведены значения первых критических сил $\bar{P}_1$ для двух значений параметра изменчивости толщины полос h_1 , когда $n = 1000$. С целью

сравнения приведены также значения критических сил полосы постоянной толщины ($h_1 = 0$).

Из табл. 1* и 2 замечаем, что при неограниченном возрастании ширины полосы значения критических сил стремятся не к нулю, как это имеет место в случае полосы постоянной толщины, а к определенным конечным величинам. Эти величины зависят только от условия крепления тонкого конца полосы и совершенно безразличны по отношению к условиям крепления толстого конца. Это и естественно, поскольку при возрастании ширины полосы толщина толстого конца неограниченно возрастает и этот конец при любом условии крепления играет роль заземленного конца.

Таблица 1

Варианты	Трансцендентное уравнение при конечной ширине полосы	Трансцендентное уравнение при стремлении ширины к бесконечности
ш, ш	$J_1(t_1)Y_1(t_2) - J_1(t_2)Y_1(t_1) = 0$	$J_1(t_1) = 0$
ш, з	$J_1(t_1)[t_2^2 Y_0(t_2) - t_1^2 Y_0(t_2) - 2t_2 Y_1(t_2)] - Y_1(t_1) \cdot$ $[t_2^2 J_0(t_2) - t_1^2 J_0(t_2) - 2t_2 J_1(t_2)] = 0$	$J_1(t_1) = 0$
з, ш	$J_1(t_2)[t_1^2 Y_0(t_1) - t_2^2 Y_0(t_1) - 2t_1 Y_1(t_1)] - Y_1(t_2) \cdot$ $[t_1^2 J_0(t_1) - t_2^2 J_0(t_1) - 2t_1 J_1(t_1)] = 0$	$t_1 J_0(t_1) - 2J_1(t_1) = 0$
з, з	$J_0(t_1)[2[t_1 Y_2(t_1) - t_1 Y_1(t_1)] - (t_2^2 - t_1^2) Y_0(t_2)] -$ $- Y_0(t_1)[2[t_2 J_1(t_2) - t_2 J_1(t_1)] - (t_1^2 - t_2^2) J_0(t_2)] -$ $+ 2[J_0(t_2)[t_1 Y_1(t_1) - t_2 Y_1(t_2)] - Y_0(t_2)[t_1 J_1(t_1) - t_2 J_1(t_2)]] = 0$	$t_1 J_0(t_1) - 2J_1(t_1) = 0$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бирюлев В. В., Новиньков А. Г. Инженерный метод расчета устойчивости сжато-изгибаемых двутавров переменной высоты.- Изв. ВУЗов. Стр-во и архит.- 1991. № 7.
2. Агаев Н. Г., Гасымов З. М. О решении задачи устойчивости плоской формы изгиба балок переменного сечения.- Матер. 10 Респ. конф. мол. ученых по мат. и мех., Баку, 28-30 мая, 1990, Баку, 1991.
3. Eisenberger Moshe. Buckling Loads for Variable Cross-section Members with Variable Axial Forces.-Int. J. Solids and Struct. 1991, 27, № 2.
4. Ахмедьянов И. С. Применение метода квадратур к расчету на устойчивость стержней переменного сечения.- Вопр. проч. и долговечн. элементов

Таблица 2

ε	ш, ш			ш, з			з, ш			з, з		
	$h_i=0$	$h_i=0.1$	$h_i=0.2$	$h_i=0$	$h_i=0.1$	$h_i=0.2$	$h_i=0$	$h_i=0.1$	$h_i=0.2$	$h_i=0$	$h_i=0.1$	$h_i=0.2$
5	32.89	61.25	96.74	67.32	124.9	196.3	67.32	125.0	196.5	131.6	244.1	382.6
10	8.224	24.19	47.08	16.83	49.08	94.35	16.83	49.13	94.73	32.90	95.66	183.1
25	1.316	9.765	24.84	2.693	19.45	48.14	2.693	19.57	48.92	5.264	37.68	92.58
100	0.082	4.630	15.46	0.1683	8.621	27.39	0.1683	8.930	29.21	0.329	16.43	51.75
1000	0.001	3.234	12.59	0.0017	5.046	18.70	0.0017	5.908	22.84	0.0033	9.367	34.52
∞	0	3.059	12.23	0	3.059	12.23	0	5.495	21.98	0	5.495	21.98

авиационных конструкций. Куйбышев, авиац. ин-т, 1990.

5. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин.- М.: Наука, 1987.

6. *Колме Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1976.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
13.

**ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ДВИЖЕНИЯ РЕАЛЬНОЙ
ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ
С ПОДВИЖНЫМИ СТЕНКАМИ.**

Бабаджанян Г. А., Даниелян Л. Е.

Բաբաջանյան Գ.Ա., Դանիելյան Լ.Ե.

Իրական հեղուկի շարժման զարգացման ուսումնասիրությունը
շարժական պարզեցված հարթ խողովակում

Հնդկագործությունը բերվում է հաղորդ ձեռք գծայնացված Նավե-Ստոկսի հավասարումների լուծմանը: Որոշված է հեղուկի հոսքի արագության, ճնշման և չիման ուժի (չիման գործակիցը) փոփոխման օրենքների խողովակի երկայնական և լայնական կարվածքներում, որոնք լապս կախված են հոսքի հիմնական և պարբերի արագությունների հարաբերություններից Որոշվում է խողովակի նախնական կտրվածքի երկարությունը:

G. H. Babadjanian, L. E. Danielian

The Investigation of Development of Real Fluid Motion in a Plane Canal with Mobile Walls

Задача сводится к решению частично линеаризованной системы Навье - Стокса. С помощью интегрального преобразования Лалласа получены функциональные решения в конечном виде. Определены закономерности изменения скоростей, давления и коэффициента гидродинамического сопротивления. Определена и длина начального участка канала.

1. Изучение закономерностей движения вязкой жидкости в каналах с неподвижными и подвижными стенками имеет как теоретический так и практический интерес. Движение жидкости в каналах с подвижными стенками относится к классу малоизученных течений. Вместе с тем, такие исследования и определение законов изменений параметров таких течений имеют много технических приложений: при определении утечек жидкости через щели между неподвижными направляющими и подвижными штоками различных машин и механизмов, при изучении проблем трубопроводного транспорта грузов в контейнерах, при непрерывной обработке листовых материалов в металлургии и т. д.

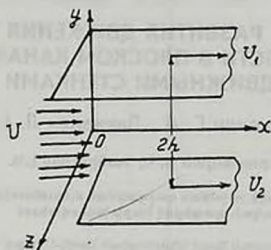
Теоретические исследования вышеуказанных задач, в основном, проводились в приближении Стокса, при котором не учитывались все инерционные члены в левых частях дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости. Поэтому, полученные результаты описывали закономерности движения в так называемом стабилизированном участке канала, то есть на достаточном удалении от его входа.

Таким образом, невозможно было определить изменение значения параметров движения в начальном участке канала, где, естественно, имеют место специфические особенности. Последние имеют не только теоретическое, но и очень важное практическое значение. Таким образом, полученные результаты по методу Стокса не дают представления о развитии движения жидкости, что особенно важно для коротких труб.

В предлагаемой работе рассматривается задача о развитии течения жид-

кости между параллельными движущимися плоскостями, простирающимися в направлении осей X и Z до бесконечности.

Движение стенок происходит в своих плоскостях в направлении оси Ox с заданными постоянными скоростями U_1 и U_2 . Кроме того, имеет место и напорное течение жидкости, при котором на входе в канал формируется плоский однородный профиль скорости (фиг. 1).



Фиг. 1

За основу исходных уравнений движения принимаются приближенные уравнения, полученные из системы уравнений Навье-Стокса путем частичного учета слагаемых от ускорения и вязкости. Если предположить вязкую жидкость несжимаемой, а движение ее ламинарным, стационарным, изотермическим и плоско-параллельным, то при отсутствии массовых сил уравнения движения будут иметь вид [1].

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

где U — средняя расходная скорость основного потока по сечению в начале трубы; v_x и v_y — составляющие скорости по осям Ox и Oy ; p — давление; ρ — плотность; ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Расстояние между плоскостями пусть будет $2h$. Если начало координат выбрать на средней плоскости канала, то граничные условия для задачи по развитию течения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \text{ и } |y| < h \quad v_x &= U = \text{const}, \quad p = p_H = \text{const} \\ \text{при } y=h \text{ и } x > 0 \quad v_x &= U_1, \quad v_y = 0 \\ \text{при } y=-h \text{ и } x > 0 \quad v_x &= U_2, \quad v_y = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь p_H — значение давления в начале трубы.

2. Применяя функциональное преобразование Лапласа и решая уравнения

(1.1), при граничных условиях (1.2) получим

$$v_x = \frac{3U}{2} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) + \frac{U_1 + U_2}{4} \left(\frac{3y^2}{h^2} - 1 \right) + \frac{U_1 - U_2}{2} \frac{y}{h} +$$

$$+ (U_1 + U_2 - 2U) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \left(1 - \frac{\cos(\mu_n y / h)}{\cos \mu_n} \right) \exp \left(-\frac{\mu_n^2 x}{\text{Re} h} \right) +$$

$$+ \frac{U_1 - U_2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(\pi n / h)}{n} \exp \left(-\frac{\pi^2 n^2 x}{\text{Re} h} \right) \quad (2.1)$$

$$v_y = \frac{U_1 + U_2 - 2U}{\text{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y}{h} - \frac{\sin(\mu_n y / h)}{\sin \mu_n} \right) \exp \left(-\frac{\mu_n^2 x}{\text{Re} h} \right) +$$

$$+ \frac{U_2 - U_1}{\text{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \cos \frac{\pi n y}{h} - 1 \right] \exp \left(-\frac{\pi^2 n^2 x}{\text{Re} h} \right) \quad (2.2)$$

$$p = p_H + \rho U^2 \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right) \left[-\frac{3x}{\text{Re} h} - \frac{1}{5} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \exp \left(-\frac{\mu_n^2 x}{\text{Re} h} \right) \right] \quad (2.3)$$

где $\text{Re} = \frac{Uh}{\nu}$ - число Рейнольдса, а μ_n простые корни уравнения $\text{tg} \mu = \mu$

Известно, что при течении вязкой жидкости в напорных трубах градиент давления зависит от средней скорости течения, параметров жидкости и трубы по следующей формуле:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\xi \frac{1}{2h} \frac{\rho U_{\text{cp}}^2}{2} \quad (2.4)$$

где U_{cp} - средняя скорость течения жидкости в канале, ξ - обычный коэффициент гидравлического сопротивления. В случае неподвижных стенок коэффициент ξ обусловлен только диссипацией механической энергии жидкости за счет работы сил внутреннего трения.

Если стенки канала подвижные, то ξ зависит и от внешних по отношению к жидкости сил трения на подвижных стенках. Этот коэффициент в последнем случае может принимать любые значения (обращаться в нуль или быть даже отрицательным).

Для определения значения ξ в случае подвижных стенок при развитом течении жидкости из (2.3) найдем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho U^2 \left[-\frac{3}{\text{Re} h} - \frac{2}{\text{Re} h} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(-\mu_n^2 \frac{x}{\text{Re} h} \right) \right] \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right) \quad (2.5)$$

Из уравнений (2.4) и (2.5) получим:

$$\xi = \frac{4}{\text{Re}} \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right) \left(3 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(-\mu_n^2 \frac{x}{\text{Re}h} \right) \right) \quad (2.6)$$

Формулы (2.1), (2.2), (2.3) и (2.6) описывают изменения значений параметров движения жидкости (скоростей, давления и коэффициент сопротивления) вдоль канала.

При исследовании развития движения жидкости в каналах важное практическое значение имеет длина начального участка потока. Для ее определения сначала найдем максимальное значение осевой скорости по высоте. Как видно, в формуле (2.1) последние два слагаемых (бесконечные суммы) быстро стремятся к нулю при удалении от входа в канал, по этой причине ради простоты вычисления их можно не учитывать. С точностью до вышеуказанного приближения из (2.1) легко определить величину y_0 при котором v_x принимает экстремальное значение.

$$y_0 = \frac{(U_2 - U_1)h}{3(U_1 + U_2 - 2U)} \quad (2.7)$$

Дальнейшие вычисления показывают, что при $|U_1 + U_2| < 2U$ (2.7) дает значение y , при котором осевая скорость v_x максимальна, а при $|U_1 + U_2| > 2U$ минимальна. Экстремальное значение скорости v_x будет

$$v_{x \text{ экстр}} = \frac{3U}{2} - \frac{(U_2 - U_1)^2}{12(U_1 + U_2 - 2U)} - \frac{U_1 + U_2}{4} \quad (2.8)$$

Составляя отношение разности экстремальной скорости частиц жидкости на бесконечном удалении от вход и скорости частиц на конечном расстоянии L от входа к экстремальной скорости, найдем

$$\frac{v_{\infty \text{ экстр}} - v_{L \text{ экстр}}}{v_{\infty \text{ экстр}}} = \frac{12(U_1 + U_2 - 2U)}{(U_2 - U_1)^2 + 3(U_1 + U_2)(U_1 + U_2 - 2U) - 18U(U_1 + U_2 - 2U)} \times$$

$$\times \left\{ (U_1 + U_2 - 2U) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \left(1 - \frac{\cos(\mu_n y_0 / h)}{\cos \mu_n} \right) \exp \left(-\mu_n^2 \frac{L}{\text{Re}h} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{U_1 - U_2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(y_0 n \pi / h)}{n} \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2 L}{\text{Re}h} \right) \right\} \quad (2.9)$$

Задавая значение левой части уравнения (2.9) и решая ее, можно получить приближенное значение длины начального участка L плоской трубы, на протяжении которого экстремальное (максимальное) значение скорости частиц будет отличаться от своего экстремального значения на заданную малую величину.

Для простоты вычисления в правой части уравнения (2.9) из первой суммы оставлено лишь первое слагаемое, а вторая сумма отброшена по вышеу-

казанным причинами. Полагая, например, значение левой части (2.9) равным 0^{-2} , получим:

$$\frac{U_1 + U_2 - 2U}{\mu_1^2} \left(\frac{\cos(\mu_1 y_0 / h)}{\cos \mu_1} - 1 \right) \exp \left(-\mu_1^2 \frac{L}{\text{Re} h} \right) = \quad (2.10)$$

$$= 10^{-2} \frac{18U(U_1 + U_2 - 2U) - (U_2 - U_1)^2 - 3(U_1 + U_2)(U_1 + U_2 - 2U)}{12(U_1 + U_2 - 2U)}$$

Здесь μ_1 - наименьший отличный от нуля корень уравнения $\text{tg} \mu = \mu$. Решая (2.10) относительно L , получим приближенное значение длины начального участка

$$L = \frac{\text{Re} h}{\mu_1^2} \left\{ \ln \frac{66,7(2U - U_1 - U_2)(\cos \mu_1 - \cos \mu_1 y_0)}{U \mu_1^2 \cos \mu_1} - \right.$$

$$\left. - \ln \left[1 - \frac{(U_2 - U_1)^2}{18(U_1 + U_2 - 2U)} - \frac{U_1 + U_2}{6U} \right] \right\} \quad (2.11)$$

Из (2.11) видно, что для действительного и положительных значений длины начального участка величины U_1 и U_2 должны подчиняться заранее заданным условиям. Поэтому, в рассмотренном общем случае понятие начального участка условно и имеет ограниченное практическое приложение. На практике часто встречаются случаи, при которых движется лишь одна стенка.

Если в формулах (2.1), (2.2), (2.3) и (2.6) $x \rightarrow \infty$, получим значения параметров движения для стабилизированного участка канала [2].

$$v_{\infty} = \frac{3U}{2} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) - \frac{U_1 + U_2}{4} \left(1 - \frac{3y^2}{h^2} \right) + \frac{U_2 - U_1}{2} \frac{y}{h} \quad (2.12)$$

$$v_{y=0} = 0 \quad (2.13)$$

$$p_{\infty} = p_H - \rho U^2 \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right) \left(\frac{3x}{\text{Re} h} - \frac{1}{5} \right) \quad (2.14)$$

$$\xi = \frac{12}{\text{Re}} \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right) \quad (2.15)$$

Принимая в формулах (2.12) - (2.15) $U_1 = U_2 = 0$, будем иметь значение величин в стабилизированном участке канала в случае неподвижных стенок.

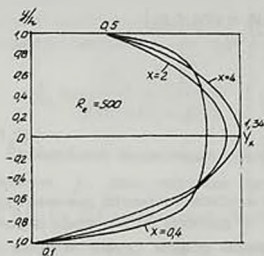
Если в полученных формулах принять $y = 0$ и одновременно $x \rightarrow \infty$, получим обобщенный случай движения Куэтта [3].

Рассмотрим численный пример по следующим данным:

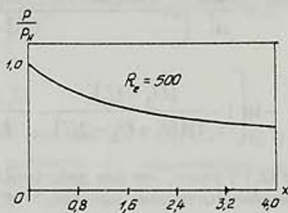
$$= 1 \text{ м/се} \quad , \quad U_1 = 0,5 \text{ м/се} \quad , \quad U_2 = 0,1 \text{ м/се} \quad , \quad h = 0,05 \text{ м}$$

$$\nu = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}, \quad p_H = 100 \text{ кг}/\text{м}^2, \quad \rho = 102 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \text{ с}^{-2}$$

На фиг. 2 представлен закон изменения осевой скорости V_x в начальном участке по высоте и вдоль канала. Видно, что в области, близкой к начальному сечению, изменение скорости V_x по высоте происходит медленнее. Вдоль канала по течению скорость V_x увеличивается и начиная от сечения $x = 2.4$, принимает почти постоянные значения. Ее максимальное значение находится на высоте $y = 0.11h$. На фиг. 3 представлен закон изменения давления, из которого видно, что давление вдоль канала уменьшается: при этом в начальном участке уменьшение происходит быстрее, чем вблизи стабилизированного участка.

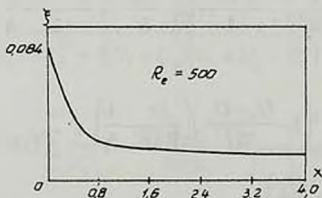


фиг. 2.



фиг.3.

На фиг. 4 представлен закон изменения коэффициента сопротивления трения по длине канала. Видно, что его значение уменьшается вдоль канала по течению.



фиг.4.

Для приведенного численного примера по формуле (2.11) вычислена длина начального участка, которая оказалась равной, приблизительно 4 м. Полученные формулы и приведенные графики позволяют исследовать различные случаи движения реальной жидкости в плоском канале с подвижными стенками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабиджанян Г. А., Мнацаканян Р. Ж. О развитии течения вязкой жидкости между параллельными движущимися плоскостями- Изв. АН Арм. ССР,

Механика, 1987, т. 40, № 3, с. 49-53.

2. *Слезкин Н. Н.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости- М.: Гостехтеориздат, 1955.
3. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя- М.: Изд. иностр. литер., 1956.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию

8. 06. 1994