ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1995

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 2, 1995 Механика

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Амбарцумян С.А., Белубекян М.В., Минасян М.М.

Համբարձումյան Ս. Ա., Բելուբեկյան Մ. Վ., Մինասյան Մ. Մ.

Ոչ գծային առաձգական թաղանթի առանցքա-սիմետրիկ տատանումները երկայնական մագնիսական դաշտում

Դիտարկվում է շրջանային գլանային էլեկտրահաղորդիչ թաղանթի մագնիսաառաձգական տատանումները: Ուսումնասիրության հիմքում դրված են բարակ մարմինների մագնիսաառաձգականության վարկածը և լարումների ու դեֆորմացիաների ինվարիանտների միջև ոչ գծային կապի առկայությունը: Կիրառվել է Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդը ըստ տարածական փոփոխականների և ինտեգրման ասիմպտոտական մեթոդները ըստ ժամանակի: Ցույց է տրված, որ մագնիսական դաշտի ուժեղացումը ունի փոփոխական ազդեցության բնույթ տատանումների հաճախության վրա: Բացահայտված է, որ ուժեղ մագնիսական դաշտերում առաջանում են բարձր հաճախության տատանումներ, որոնք ունեն զուտ մագնիսական բնույթ:

S.A. Ambartsumian, M.V. Belubekian, M.M. Minassian

The axially-symmetrical vibrations of non-linear elastic shells in longitudinal magnetic field

Применяется метод Бубнова-Галеркина по пространственным координатам и асимптотические методы интегрирования по времени. Исследовано линейное приближение для определения значений параметров (интенсивность магнитного поля и параметр электропроводности), при которых эффект нелинейности будет значительным. Показано, что непрерывное увеличение интенсивности магнитного поля имеет изменяющийся характер влияния на частоту колебаний. Выявлено, что для сильных полей возникают чисто магнитные, не зависящие от упругих свойств материала, высокочастотные колебания.

Получены пороговые значения параметров, установлены оценки для учета нелинейности и выведены упрощенные уравнения для колебательных мод. Определены амплитудно-частотные характеристики нелинейных свободных колебаний.

1. Исходные предположения и уравнения. Рассматривается нелинейно-упругая электропроводящая (с конечной электропроводностью σ) круговая цилиндрическая оболочка (с радиусом кривизны R и толщины h) в продольном магнитном поле напряженности B_0.

Предполагается, что средняя поверхность оболочки отнесена к ортогональной системе координат α, β, совпадающими с линиями кривизны поверхности, т.е. с прямолинейными образующими $\beta = \text{const}$ и с направляющими дугами $\alpha = \text{const}$. Прямолинейная координата γ направлена по нормали к срединной поверхности. В осесимметричной задаче все функции зависят. лишь от координаты α и времени t.

В основе исследования лежат следующие предположения и упрощения:

а) принимается гипотеза магнитоупругости тонких тел [1], согласно которой для отличной от нуля тангенциальной компоненты возбужденного в оболочке электрического поля и нормальной компоненты магнитного поля имеет место соответственно

$$e_2 = \Psi(\alpha, t), \quad h_3 = f(\alpha, t) \tag{1}$$

б) если λ - длина полуволны изгибных упругих колебаний, то отношение λ / R считается малым в той степени, что становится приемлемым способ приведения общей трехмерной задачи путем магнитоупругости тонких тел к двумерной задаче введения пограничного слоя [1,2]. В силу такого предположения для внешней задачи получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} &\Diamond\left(h_1^+ - h_1^-\right) = \frac{2}{\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right) \\ &\Diamond\left(h_1^+ + h_1^-\right) = 0, \quad \left(\Diamond = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

где $h_1^{\pm}$ - значения тангенциальных компонент возбужденного магнитного поля на внешних поверхностях оболочки, c - электродинамическая постоянная ($c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек);

в) принимается гипотеза недеформируемых нормалей [3], в силу чего для компонент тензора деформаций имеем:

$$\begin{aligned} &e_\alpha = \varepsilon_1 + \gamma\chi_1, \quad e_\beta = \varepsilon_2, \\ &e_{\alpha\beta} = 0, \quad e_{\alpha\gamma} = 0, \quad e_{\beta\gamma} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

где, при отсутствии осевой силы ($T_\alpha = 0$) [4,5]

$$\varepsilon_1 = -\frac{w}{2R}, \quad \varepsilon_2 = \frac{w}{R}, \quad \chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \tag{4}$$

а w - нормальное перемещение оболочки;

г) материал оболочки считается несжимаемым, т.е.

$$e_\gamma = -e_\alpha - e_\beta \tag{5}$$

д) направляющие тензоров напряжений и деформаций совпадают.

Это допущение с учетом (3) и (5) позволяет получить следующие приближенные представления для напряжений [4]:

$$\sigma_\alpha = \frac{4}{3}\frac{T_i}{E_i}\left(e_\alpha + \frac{1}{2}e_\beta\right) \quad \tau_{\alpha\beta} = 0, \quad \tau_{\alpha\gamma} = 0$$
$$\sigma_\beta = \frac{4}{3}\frac{T_i}{E_i}\left(e_\beta + \frac{1}{2}e_\alpha\right) \quad \tau_{\beta\gamma} = 0, \quad \sigma_\gamma = 0 \tag{6}$$

е) между интенсивностью напряжений T_i и интенсивностью деформаций E_i существует нелинейная связь в виде [5-7]

$$T_i = aE_i + bE_i^m \tag{7}$$

где m, a и b - постоянные, характеризующие материал оболочки, которые определяются из опыта при испытании материала на простое растяжение.

В рассматриваемом случае для интенсивности деформаций имеем [4,5]

$$E_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_\alpha^2 + e_\alpha e_\beta + e_\beta^2} \tag{8}$$

Согласно (3)-(8) для отличных от нуля напряжений получаем [5-7]

$$\sigma_\alpha = \frac{4}{3}\gamma\chi_1\left[a + b\left(\varepsilon_2^2 + \frac{4}{3}\gamma^2\chi_1^2\right)^{\frac{m-1}{2}}\right],$$
$$\sigma_\beta = \left(\varepsilon_2 + \frac{2}{3}\gamma\chi_1\right)\left[a + b\left(\varepsilon_2^2 + \frac{4}{3}\gamma^2\chi_1^2\right)^{\frac{m-1}{2}}\right] \tag{9}$$

Уравнения движения оболочки представим в виде [3,4,5]

$$-\frac{T_\beta}{R} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho\left(1 + \frac{\gamma}{R}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}d\gamma - \int_{-h/2}^{h/2} \rho\left(1 + \frac{\gamma}{R}\right)K_3\, d\gamma$$
$$\frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} - N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho\gamma\left(1 + \frac{\gamma}{R}\right)\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}d\gamma \tag{10}$$

где для внутреннего усилия T_β и изгибающего момента M_α имеем обычные представления:

$$T_\beta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta\, d\gamma, \qquad M_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \gamma\sigma_\alpha\, d\gamma \tag{11}$$

В (10) ρK_3 - компонента объемной силы электромагнитного происхождения, отнесенная к единице объема тела, ρ- плотность материала оболочки, N_α- поперечное усилие, u_α- компонента тангенциального перемещения оболочки. Производными по времени от u_α пренебрегаем.

Объемная сила электромагнитного происхождения, вызванная движением оболочки в магнитном поле определяется формулой [1,2]

$$\rho K_3 = -\frac{\sigma B_0}{c} e_2 - \frac{\sigma B_0^2}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{B_0}{c}\sigma\left(\psi + \frac{B_0}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) \tag{12}$$

Уравнение внутренней задачи магнитоупругости имеет вид [1,2]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{h_1^+ - h_1^-}{h} - \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi + \frac{B_0}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\\
&\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Из совместного рассмотрения уравнений движения оболочки (10) систем уравнений для внешней (2) и внутренней (13) задач, после серий преобразований с учетом вышеприведенных формул и соотношений приходим к следующей системе исходных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial \alpha^2} - \frac{T_\beta}{R} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{B_0^2 \sigma h}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{B_0 \sigma h}{c}\psi\\
&\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{2}{\lambda h}\psi = \frac{4\pi\sigma B_0}{c^3}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{14}$$

Исключая из системы (14) функцию ψ и введя безразмерные переменные

$$x = \frac{\alpha}{l}, \qquad \xi = \frac{a_0 t}{h}, \qquad W = \frac{w}{h} \tag{15}$$

получим уравнение для $W(x,\xi)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \mu_0 L_1\right)\left\{\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} L_2[W] + L_3[W] + L_4[W]\right\} + \nu_0^2 \frac{\partial}{\partial \xi} L_1[W] = 0 \tag{16}$$

где линейные операторы L_1, L_2 и L_3 имеют виды

$$L_1 = \frac{2h}{\lambda} - \left(\frac{h}{l}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2},\ L_2 = 1 - \frac{1}{12}\left(\frac{h}{l}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2},\ L_3 = \left(\frac{h}{R}\right)^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{h}{l}\right)^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \tag{17}$$

а L_4 - нелинейный оператор

$$L_4[W] = \frac{1}{2}\frac{b}{a}\int_{-1}^{1}\left[\frac{z^2}{3}\left(\frac{h}{l}\right)^4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{h}{R}\right)^2\right]\left[W^2\left(\frac{h}{R}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{l}\right)^4 z^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2\right]^{\frac{m-1}{2}} dz$$

Безразмерные параметры μ_0 и ν_0^2 определены в виде

$$\mu_0 = \frac{c^2}{4\pi\sigma a_0 h}, \qquad \nu_0^2 = \frac{b_0^2}{a_0^2} \tag{18}$$

где $a_0 = \sqrt{a/\rho}$ - характерная упругая скорость "звука", а $b_0 = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho}}$ - скорость Альфвена.

2. Свободные колебания оболочки. Рассмотрим свободные колебания оболочки при шарнирном опирании ее краев:

$$W(0,\xi) = W_1(1,\xi) = 0$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\Big|_{x=1} = 0 \tag{19}$$

Для функции ψ принимаем следующие граничные условия:

$$\psi(0,\xi) = \psi(1,\xi) = 0 \tag{20}$$

Вследствие получим еще два дополнительных условия для

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}\Big|_{x=0} = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4}\Big|_{x=1} = 0 \tag{21}$$

Представляя решение задачи (16), (19), и (21) в виде

$$W(x,\xi) = F(\xi)\sin\pi nx \tag{22}$$

и применяя обычную процедуру метода Галеркина для функции $F(\xi)$, получим уравнение

$$\left(\frac{d}{d\tau} + \mu\right)\left(\frac{d^2 F}{d\tau^2} + F + k|F|^{m-1}F\right) + \gamma^2\frac{dF}{d\tau} = 0 \tag{23}$$

где

$$\mu = \mu_0\alpha_1\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}},\ \gamma^2 = \gamma_0^2\frac{\alpha_1}{\alpha_3},\ \tau = \omega_0 t = \frac{\omega_0 h}{a_0}\xi,\ \omega_0^2 = \frac{a_0^2}{h^2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

$$\alpha_1 = \frac{2h}{\lambda} + \left(\frac{\pi nh}{l}\right)^2,\ \alpha_2 = 1 + \frac{1}{12}\left(\frac{\pi nh}{2l}\right)^2,\ \alpha_3 = \left(\frac{h}{R}\right)^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{\pi nh}{l}\right)^4$$

$$k = \frac{9}{\pi}\left(\frac{b}{a}\right)\frac{2^{m+1}\Gamma^2\left(\frac{m}{2}+1\right)}{\alpha_3\Gamma(m+2)}\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{h}{R}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi nh}{l}\right)^4 z^2\right]^{\frac{m+1}{2}} dz$$

Заметим, что ω_0 является частотой свободных колебаний оболочки без магнитного поля и для линейного материала.

Очевидно, что эффект влияния нелинейности существенно зависит от степени затухания колебаний. При слабом затухании нелинейность сказывается намного ярче, чем при сильном затухании.

Для выяснения этого вопроса сначала исследуем линейное приближение. Приняв в уравнении (23) $k=0$, имеем

$$\left(\frac{d}{d\tau}+\mu\right)\left(\frac{d^2F}{d\tau^2}+F\right)+\nu^2\frac{dF}{d\tau}=0 \tag{24}$$

Для идеального проводника $\mu=0$. Тогда из (24) получим незатухающие колебания с частотой ω

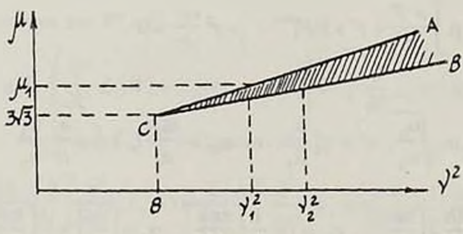
$$\omega=\sqrt{\omega_0^2+\omega_m^2}, \qquad \omega_m^2=\frac{b_0^2}{h^2}\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \tag{25}$$

Для непроводящего материала $(\mu\to\infty)$ имеются незатухающие колебания с частотой ω_0. Исключая эти два крайних случая и представляя решение (25) в виде $F\sim\exp(s\tau)$, получим характеристическое уравнение

$$(s+\mu)(s^2+1)+\nu^2 s=0 \tag{26}$$

Корни уравнения зависят от знака $\Delta(\mu,\nu^2)$, где

$$\Delta(\mu,\nu^2)=\mu^4+\frac{\mu^2}{4}(8-20\nu^2-\nu^4)+(1+\nu^2)^3 \tag{27}$$



Фиг. 1

На фиг. 1 показаны области знакопостоянства Δ.

На линиях CA и CB $\Delta=0$ и уравнение (26) имеет три вещественные корни $(s_1<0,\ s_2=s_3<0)$.

В точке $C(8,\ 3\sqrt{3})$ $s_1=s_2=s_3=-\sqrt{3}$

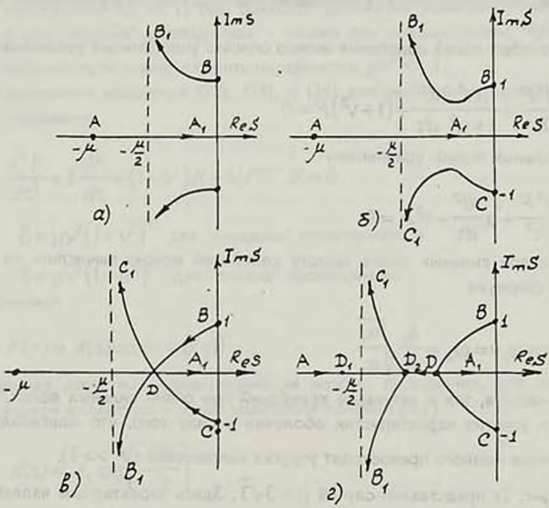
Уравнения линий CA и CB с большой точностью можно представить следующим образом:

$$CA: \quad \mu = 0{,}5\nu^2 + 1{,}2$$

$$CB: \quad \mu = \sqrt{4\nu^2 - 5}$$

В заштрихованной области $(\Delta < 0)$ все корни вещественны, отрицательны и разные. Вне этой области $(\Delta > 0)$ один корень вещественный отрицательный, а два других- комплексно сопряженные с отрицательными действительными частями.

Таким образом, существование колебаний зависит от степени проводимости и величины магнитного поля.



Фиг. 2

На фиг. 2 представлены движения корней в комплексной плоскости S по мере возрастания ν^2 (магнитного поля) от 0 до ∞. Точками B, C и A соответствует значение $\nu^2 = 0$ (отсутствие магнитного поля), а точкам B_1, C_1 и A_1 - $\nu^2 \to \infty$ (большие магнитные поля). Ветви BB_1 и CC_1 представляют колебательные движения, а отрезки AA_1 - безколебательные экспоненциальные затухания.

Как видно из фиг. 2, магнитное поле по-разному влияет на характеристики колебаний и это существенно зависит от степени проводимости μ.

Фиг. 1а представляет случай малых значений μ ("хороший проводник").

Здесь возрастание ν^2 увеличивает частоту колебаний и одновременно усиливает затухание. При $\nu^2 \to \infty$ $\operatorname{Re} s \to \mu/2$. При $\mu << 1$ для всего диапазона изменения ν^2 вместо уравнения (24) для колебательных мод можно пользоваться более простым уравнением

$$\frac{d^2F}{d\tau^2}+\frac{\mu\nu^2}{1+\nu^2}\frac{dF}{d\tau}+\left(1+\nu^2\right)F=0 \tag{28}$$

Фиг. 2б представляет случай конечных $\mu < 3\sqrt{3}$. Как видно, здесь магнитное поле, возрастая, вначале уменьшает частоту, а затем резко начинает увеличивать ее.

Для слабых полей колебания можно описать упрощенным уравнением

$$\frac{d^2F}{d\tau^2}+\frac{\mu\nu^2}{1+\mu^2}\frac{dF}{d\tau}+\left(1+\nu^2\right)F=0 \tag{29}$$

а для сильных полей- уравнением

$$\frac{d^2F}{d\tau^2}+\mu\frac{dF}{d\tau}+\nu^2F=0 \tag{30}$$

Тогда при сильных полях частоту колебаний можно вычислить по упрощенной формуле

$$\omega=\omega_0\nu=\omega_*=\frac{h_*}{h}\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \tag{31}$$

Как частота, так и затухание колебаний при очень сильных полях, не зависят от упругих характеристик оболочки в силу того, что максвелловские напряжения намного превосходят упругих напряжений ($\nu^2 >> 1$).

На фиг. 2в представлен случай $\mu = 3\sqrt{3}$. Здесь характерным является появление точки D, где встречаются все три корня при $\nu^2 = 8$ (точка C на фиг. 1). В окрестности этой точки имеются низкочастотные колебания с сильным затуханием. Для слабых полей можно также пользоваться уравнением (29), а для сильных полей - уравнением (30).

Фиг. 1д представляет случай больших значений μ ("плохой" проводник). При некотором значении $\nu^2 = \nu_1^2$, определяемого из уравнения CA (фиг. 1) колебания в системе исчезают, однако при значении $\nu^2 = \nu_2^2$, определяемого из уравнения CB при том же значении $\mu = \mu_1$, колебания снова возникают.

Таким образом, выяснено, что увеличение интенсивности магнитного поля в рамках принятой здесь модели взаимодействия упругого и электромагнитного полей, постоянно усиливая затухание, по-разному влияет на частоту колебаний. Критическое значение магнитного поля, превышение которого приводит к подавлению колебаний, определяется из условия $v^2 = 8$, откуда

$$B_0^2 = 32\pi a\sqrt{\left[\left(\frac{h}{R}\right)^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{\pi h}{l}\right)^4\right]\left[\frac{2h}{\lambda} + \left(\frac{\pi h}{l}\right)^2\right]^{-1}} \tag{32}$$

Для реальных упругих материалов такая оценка точки неосуществима и поэтому ограничимся случаем только колебаний при $v^2 < 8$.

Из вышеизложенного анализа линейного приближения следует, что эффект нелинейности материала оболочки может быть ощутимым для "хороших" проводников ($\mu << 1$) при большом диапазоне изменения магнитного поля, а для "плохих" проводников - только при слабых полях. Критерием учета нелинейности может служить неравенство $\mu v^2 << 1$.

На основании уравнений (23), (28), и (29) для нелинейных колебаний получим уравнения

$$\frac{d^2 F}{d\tau^2} + \delta\frac{dF}{d\tau} + \left(1 + v^2\right)F + k|F|^{m-1}F = 0 \tag{33}$$

где $\delta = \mu v^2\left(1 + v^2\right)^{-1}$ для "хороших" проводников и

$\delta = \mu v^2\left(1 + \mu^2\right)^{-1}$ для "плохих" проводников.

Принимая

$$F(\tau) = A(\tau)\cos(\tau + \varphi(\tau)) \tag{34}$$

и применяя известные асимптотические методы осреднения, для медленно меняющихся амплитуды и фазы колебаний получим [6,7]

$$A(\tau) = A_0 \exp\left(-\frac{\delta\tau}{2}\right)$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\beta A^{m-1}}{\sqrt{1 + v^2}} \tag{35}$$

где

$$\beta = \frac{k}{\pi}\frac{2^{m+1}\Gamma^2\left(1 + \frac{m}{2}\right)}{\Gamma(m+2)}$$

Для частоты колебаний получим

$$\omega^2 = \left(\omega_0^2 + \omega_m^2\right)\left(1 + \frac{2\beta A^{m-1}}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_m^2}}\right) \tag{36}$$

Мы рассмотрели наиболее простой случай граничных условий. При иных условиях, хотя и выкладки станут более трудоемкими, однако принципиальные оценки и качественные результаты останутся теми же.

Авторы благодарны за полезные замечания рецензента, который, в частности, обратил наше внимание на работу [8], где рассматривается вопрос распространения изгибных волн в идеально проводящей нелинейно-упругой (по модели Каудерера) пластинке.

Настоящее исследование выполнено по гранту INTAS-94-1210.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.-М.: Наука, 1977. 272 с.
2. *Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.* Колебания и устойчивость тонкостенных упругих пластин.- Ереван, Изд. Академия, 1992. 121 с.
3. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек.-М.: Наука, 1974. 1-446 с.
4. *Ильюшин А.А.* Пластичность.-М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
5. *Амбарцумян С.А.* Об осесимметричной задаче трехслойной цилиндрической оболочки, составленной из нелинейно-упругих материалов.- Изв. АН Арм. ССР, сер. физ-мат. н., 1961, т.14, в.1.
6. *Ambartsumian S.A., Belubekian M.V. and Minassian M.M.* On the Problem of Vibrations of Non- Linear Elastic Elektroconductive Plates in Transverse and Longitudinal Magnetic Fields.-Int. J. Non-Linear Mechanics, 1983, vol.19, No 2.
7. *Ambartsumian S.A., Belubekian M.V. and Minassian M.M.* The Problem of Vibration of Current-Carrying Plates.- Int. J. Applied Elektromagnetics in Materials, 1992, No 3.
8. *Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А.* Нелинейные колебания пластин в продольном магнитном поле.-Изв.АН Арм ССР, Механика, 1982, т.35, №1, с.16-22

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию
25.10.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 2, 1995 Механика

ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТОУПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА

БАГДАСАРЯН Г. Е. , ПИЛИПОСЯН Г. Т.

Բաղդասարյան Գ.Ե., Փիլիպոսյան Գ.Թ.

Գերհաղորդիչ սալի մագնիսաառաձգական կայունության ուսումնասիրությունը Նեյմանի խնդրի թվային լուծման հիման վրա

Հոդվածում Նեյմանի արտաքին խնդրի համար առաջարկված է լուծման թվային մեթոդ: Ցույց է տրված սալի ստատիկ կայունության կորստի հնարավորությունը: Ընդ որում, ընդլայնական մագնիսական դաշտի կրիտիկական արժեքը մեկ կարգով փոքր է երկայնական մագնիսական դաշտի կրիտիկական արժեքից:

Bagdasarian G.Y., Piliposian G.T.

Investigation of Magnetoelastic Stability of Superconducting Plates Based on the Numerical Solution of Neyman's External Problem.

В статье предложен численный метод решения для внешней задачи Неймана. Показана возможность потери статической устойчивости сверхпроводящей пластинки, причем критическое значение поперечного магнитного поля на порядок ниже критического значения продольного магнитного поля.

1. Постановка задачи. Пусть изотропная упругая пластинка постоянной толщины $2h$ изготовлена из сверхпроводящего материала и находится во внешнем стационарном магнитном поле H_0. Пусть, далее, пластинка отнесена к прямоугольной декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью x_1x_2. Принимается, что электромагнитные свойства среды, окружающей пластинку, эквивалентны свойствам вакуума. Предполагается также, что влияние деформацией невозмущенного состояния и влияния токов смещения на характеристики магнитоупругой устойчивости пластинки можно пренебрегать.

Известно, [1], что при помещении сверхпроводящего тела в магнитное поле на тонком приповерхностном слое появляются экранирующие токи, препятствующие проникновению магнитного поля во внутрь тела и изменяющие напряженности магнитного поля в области вне тела. Это изменение является результатом наложения на начальное поле H_0 магнитного поля H^0, создаваемого экранирующими токами $\left(H^{(e)} = H_0 + H^0\right)$. Кроме этого, тангенциальные компоненты магнитного поля $H^{(e)}$ и следовательно компоненты тензора напряжений Максвелла $\hat{T}_0$ на поверхности пластинки претерпевают разрыв (так как напряженность магнитного поля во внутренней области равна нулю). Этим разрывом обусловлено появление магнитного давления P_0 магнитного происхождения, определяемого формулой [1]

$$P_0 = N_0 \hat{T}^0 \tag{1.1}$$

где $\hat{T}^0$ -тензор напряжений Максвелла

$$T_{ik}^0 = \mu_0 \left[\left(H_k^0 + H_{0k}\right)\left(H_i^0 + H_{0i}\right) - \frac{1}{2}\delta_{ik} H^{(e)2} \right] \tag{1.2}$$

N_0 - единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности пластинки.

Под действием поверхностной нагрузки P_0 в пластинке устанавливается напряженное состояние (которое будем называть невозмущенным), характеризующееся вектором перемещения u_0, тензором упругих напряжений $\hat{S}_0$ и вектором напряженности $H_0^{(e)}$ во внешней области. Указанные величины невозмущенного состояния, как обычно, в теории упругой устойчивости [2] будут определяться из линейных уравнений теории упругости и квазистатических уравнений Максвелла при поверхностных условиях, написанных без учет деформаций поверхности, ограничивающей пластинку. Тогда характеристики невозмущенного состояния будут определяться из следующих уравнений (равновесий и магнитостатики) и граничных условий на недеформированной поверхности пластинки:

$$\begin{gathered} \frac{\partial S_{ik}^0}{\partial x_k} = 0 \\ S_{ik}^0 N_k^0 = T_{ik}^0 N_k^0 \quad \text{при} \quad \left(x_1, x_2, x_3\right) \in \Gamma \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} \operatorname{rot} H^0 = 0, \qquad \operatorname{div} H^0 = 0 \\ \left(H_{0k} + H_k^0\right) N_k^0 = 0 \quad \text{при} \quad \left(x_1, x_2, x_3\right) \in \Gamma \\ H^0 \to 0, \quad \text{при} \quad x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2} \to \infty \end{gathered} \tag{1.4}$$

Характеристики возмущенного состояния $\left(u_0 + u, S_0 + S, P_0 + P, H_0^{(e)} + h\right)$ должны удовлетворять краевым условиям на деформированной поверхности пластинки и нелинейным уравнениям теории упругости и квазистатической электродинамики. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и граничные условия, аналогично работам [2,3,4], линеаризуются. В результате получаются следующие линейные уравнения возмущенного состояния:

в области, занимаемой пластинкой

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[S_{ik}+S_{im}^0\frac{\partial u_k}{\partial x_m}\right]=\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \tag{1.5}$$

в области вне тела пластинки:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{h}=0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{h}=0 \tag{1.6}$$

и следующие линейные условия на поверхности S:

$$S_{ik}N_k^0=T_{ik}N_k^0 \tag{1.7}$$

$$h_kN_k^0+H_k\frac{\partial u_k}{\partial x_i}N_i^0=0 \tag{1.8}$$

Здесь

$$S_{ik}=\frac{E}{(1+\nu)}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ik}\frac{\partial u_m}{\partial x_m}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right] \tag{1.9}$$

$$T_{ik}=\mu_0\left[H_kh_i+h_kH_i-\delta_{ik}hH\right] \tag{1.10}$$

где E - модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона, ρ - плотность материала пластинки, а по повторяющимся индексам производится суммирование.

Пусть для рассматриваемой пластинки справедлива гипотеза недеформируемых нормалей, согласно которой имеем следующие соотношения:

$$u=u-x_3\frac{\partial w}{\partial x_1}, \qquad u_2=\text{v}-x_3\frac{\partial w}{\partial x_2}, \qquad u_3=w(x_1,x_2) \tag{1.11}$$

где $u=u(x_1,x_2,t)$, $\text{v}=\text{v}(x_1,x_2,t)$, $w=w(x_1,x_2,t)$ - возмущения перемещений срединной плоскости пластинки.

Подставляя (1.9) и (1.10) в (1.5) и осредняя полученные при этом уравнения по толщине пластинки, с учетом поверхностных условий (1.8) и соотношений (1.10), получим следующую систему дифференциальных уравнений устойчивости пластинки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 \text{v}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1-\nu^2}{2Eh}\left(T_{31}^+-T_{31}^-\right)=0 \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial^2 \text{v}}{\partial x_2^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 \text{v}}{\partial x_1^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1-\nu^2}{2Eh}\left(T_{32}^+-T_{32}^-\right)=0$$

$$D\Delta^2 w - h\frac{\partial}{\partial x_1}\left(T_{31}^{+} + T_{31}^{-}\right) - h\frac{\partial}{\partial x_2}\left(T_{32}^{+} + T_{32}^{-}\right) -$$

$$-t_{11}^{0}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - 2t_{12}^{0}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - t_{22}^{0}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = T_{33}^{+} - T_{33}^{-}$$

В уравнениях (1.12) t_{ik}- усилия, характеризующие невозмущенное состояние пластинки

$$t_{ik}^{0} = \int_{-h}^{h} S_{ik}^{0} dx_3 \qquad (1.13)$$

где S_{ik}^{0} являются решением задачи (1.3), T_{ik} - компоненты тензора напряжений Максвелла возмущенного состояния, определяемые согласно (1.10), а знаками "+" и "-" здесь и в дальнейшем отмечены значения рассматриваемой величины на плоскостях $x_3 = h$ и $x_3 = -h$, соответственно.

Рассматривая систему уравнений (1.12), замечаем, что она не замкнута. В нее, согласно (1.10), входят неизвестные поверхностные значения $H_i^{0\pm}$ компоненты магнитного поля H^0 экранирующих токов и неизвестные поверхностные значения $h_i^{\pm}$ компонент индуцированного магнитного поля h. Их определяем, соответственно решая задачу (1.4) и задачу (1.6)-(1.7) при условии затухания возмущений на бесконечности.

При решении конкретных задач устойчивости к уравнениям (1.12) необходимо присоединить также условия на торцах пластинки.

2. Устойчивость сверхпроводящей пластинки-полосы в постоянном магнитном поле. На основе уравнений и граничных условий, приведенных выше, рассмотрим две конкретные задачи устойчивости пластинки-полосы ($|x_1| \le a$, $-\infty < x_2 < +\infty$, $|x_1| \le h$) в заданном постоянном магнитном поле, предполагая, что все величины не зависят от координаты x_2.

а) Случай продольного магнитного поля. Пусть рассматриваемая пластинка находится в продольном магнитном поле $H_0(0, H_0, 0)$, вектор напряженности которого параллелен оси $0x_2$. При этих условиях задачи (1.4), (1.5)-(1.7) имеют нулевые решения ($H^0 = 0$, $h = 0$) и поэтому, согласно (1.10), $T_{ik} = 0$. В силу этого легко заметить, что задача (1.3), определяющая напряжения S_{ik}^{0} невозмущенного состояния, имеет следующее значение:

$$\begin{aligned} &S_{11}^{0} = S_{33}^{0} = -\frac{1}{2}\mu_0 H_0^2 \\ &S_{12}^{0} = S_{13}^{0} = S_{22}^{0} = S_{23}^{0} = 0 \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Учитывая изложенное и подставляя (2.1) в систему (1.12), замечаем, задача определения продольного возмущения "u" отделяется от задачи определения поперечного возмущения "w" и задача устойчивости рассматриваемой сверхпроводящей пластинки в продольном магнитном поле сводится к решению следующего уравнения:

$$D\frac{d^4w}{dx_1^4}+2\rho_0 h\frac{d^2w}{dt^2}+h\mu_0 H_0^2\frac{d^2w}{dx_1^2}=0 \tag{2.2}$$

при обычных условиях закрепления краев $x_1=\pm a$ пластинки.

Рассматривая уравнение (2.2), замечаем, что данная задача устойчивости сводится к известной задаче [5] статической устойчивости пластинки-полосы, сжатой по направлению коротких сторон равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью $h\mu_0 H_0^2$, приложенной по длинным торцам пластинки. Решение уравнения (2.2) в случае шарнирно опертой пластинки будем искать в виде

$$w=w_0\cos\frac{n\pi x_1}{2a} \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.2) для определения минимального критического значения индукции магнитного поля $B_{0*}=\mu_0 H_{0*}$, при котором пластинка теряет устойчивость, получаем формулу

$$B_{0*}^2=\frac{\pi^2\mu_0 E}{6(1-\nu^2)}\left(\frac{h}{a}\right)^2 \tag{2.4}$$

Формула (2.4) показывает, что присутствие магнитного поля с индукцией порядка одной теслы может привести к потере статической устойчивости тонкой пластинки.

б) Случай поперечного магнитного поля. Рассмотрим случай, когда пластинка-полоса находится в заданном магнитном поле $H_0(0,0,H_0)$, вектор напряженности которого перпендикулярен к поверхности пластинки. В этом случае также плоская задача отделяется от задачи изгиба, а задача (1.3) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} &S_{13}^0=S_{31}^0=0\\ &S_{11}^0=\frac{1}{2}\mu_0\left[H_0+H_3^0(a,x_3)\right]^2\\ &S_{33}^0=-\frac{1}{2}\mu_0\left[H_1^0(x_1,h)\right]^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в третье уравнение системы (1.12) и учитывая поверхностные условия, из (1.4) и (1.7) получаем следующее уравнение устойчивости пластинки:

$$D\frac{d^4w}{dx_1^{\,4}}-h\mu_0\frac{d}{dx_1}\left\{\left[\left(H_1^{0+}\right)^2+\left(H_1^0\right)^2\right]\frac{dw}{dx}\right\}+$$
$$+\frac{\mu_0}{2}\frac{d^2w}{dx_1^{\,2}}\int_{-h}^{h}\left[H_0+H_0^3(a,x_3)\right]^2dx_3=\mu_0\left[\left(H_1^0h_1\right)^- -\left(H_1^0h_1\right)^+\right] \tag{2.6}$$

В уравнение (2.6) входят неизвестные компоненты H_i^0 магнитного поля $\boldsymbol{H}^0$ экранирующих токов, которые необходимо найти, решая задачу (1.4) во внешней области, и неизвестная компонента индуцированного магнитного поля $\boldsymbol{h}$, которую определяем, решая задачу (1.6)-(1.7). Решение задачи (1.4) введением потенциальной функции φ_0 посредством

$$\boldsymbol{H}^0=\boldsymbol{H}_0\,\mathrm{grad}\,\varphi_0 \tag{2.7}$$

сводится к решению следующей задачи Неймана вне прямоугольника $\left(|x_1|\le a,\ |x_3|\le h\right)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_1^{\,2}}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_3^{\,2}}=0\\
&\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_3}=-1 \qquad \text{при} \quad x_3=\pm h\\
&\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}=0 \qquad \text{при} \quad x_1=\pm a\\
&\varphi_0=0 \qquad \text{при} \quad |r|\to\infty
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Что же касается задачи (1.6)-(1.7), граничные условия которой согласно (1. 7) имеют вид

$$\begin{aligned}
&h_3=-H_1^0\frac{\partial u_1}{\partial x_3}=H_1^0\frac{\partial w}{\partial x_1}=H_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1} \qquad \text{при} \quad x_3=\pm h\\
&h_1=-\left(H_{03}+H_3^0\right)\frac{\partial w}{\partial x_1} \qquad \text{при} \quad x_1=\pm a
\end{aligned} \tag{2.9}$$

то для ее решения необходимо знать выражения прогиба пластинки. Поэтому, предполагая, что края пластинки $x_1=\pm a$ шарнирно оперты, решение уравнения (2.5) представим в виде

$$w=w_0\cos\frac{\pi x_1}{2a} \tag{2.10}$$

Тогда введением потенциальной функции φ посредством

$$h = H_0 w_0 \frac{\pi}{2\alpha} \operatorname{grad} \varphi \tag{2.11}$$

задача определения магнитного поля h сводится к решению следующей внешней задачи Неймана для рассматриваемого прямоугольника:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3{}^2} = 0 \\
&\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = -\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}\frac{\pi}{2a}\sin\frac{\pi x_1}{2a} \qquad \text{при} \quad x_3 = \pm h \\
&\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \left(1 + \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_3}\right)\frac{\pi}{2a}\sin\frac{\pi x_1}{2a} \qquad \text{при} \quad x_1 = \pm a \\
&\varphi = 0 \qquad \text{при} \quad |r| \to \infty
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Задачи (2.8) и (2.12) в следующем пункте будут решаться численным методом и поэтому будем считать, что функции φ_0 и φ известны. Тогда, подставляя (2.9) в уравнение устойчивости (2.6) и используя процесс ортогонализации с учетом (2.7) и (2.11), получаем следующую формулу для определения критического значения индукции B_{0*} магнитного поля:

$$\begin{aligned}
&B_{0*} = \frac{2\mu_0 D\lambda^3}{[\lambda A + 2C - 4hB]} \\
&A = \int_{-h}^{h}\left[1 + \frac{\partial\varphi_0(a, x_3)}{\partial x_3}\right]^2 dx_3, \qquad B = \frac{\lambda}{a}\int_{-a}^{a}\left(\frac{\partial\varphi_0(x_1, h)}{\partial x_1}\right)^2 \sin^2\lambda x_1\, dx_1 \\
&C = \frac{2}{a}\int_{-a}^{a}\frac{\partial\varphi_0(x_1, -h)}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_0(x_1, h)}{\partial x_1}\cos\lambda x_1\, dx_1
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Величины A, B, C, входящие в (2.13), вычисляются, используя формулы (3.14) и (3.15) и численные решения задач Неймана (2.8) и (2.12), которые приведены в следующем пункте. На основе (2.13) произведено вычисление критического значения индукции B_{0*} внешнего магнитного поля при различных значениях h/a. Для расчета принято $E = 7.5\cdot 10^{10}$ н/м^2, $\nu = 0.34$ (дюраль). Результаты вычисления приведены в таблице.

Таблица значений B_{0*}

$\frac{h}{a}$	0.05	0.01	0.005	0.002
$B_{0*}(TL)$	$7\cdot 10^{-1}$	$5\cdot 10^{-1}$	10^{-1}	$3\cdot 10^{-2}$

Сравнивая значения критического магнитного поля, приведенные в таблице и полученные по формуле (2.4), легко заметить, что влияние поперечного магнитного поля намного сильнее, чем в случае продольного магнитного поля. Значение B_{0*} в случае поперечного магнитного поля на порядок ниже по сравнению со значением B_{0*}, полученном на основе (1.14) в случае продольного магнитного поля.

3. Численное решение задачи Неймана вне прямоугольника. Рассмотрим внешнюю задачу Неймана в двумерной области D

$$\Delta u = 0$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_c = f \qquad (3.1)$$

где C - граница D; n - внешняя нормаль в точках C.

Приведем вкратце схему приведения этой задачи к интегральному уравнению .

Будем искать решение внешней второй краевой задачи (3.1) в виде потенциала простого слоя [6]

$$u(M) = \int_C \ln\frac{1}{R_{MP}}\mu(P)dS_P \qquad (3.2)$$

При любом выборе измеримой $\mu(P)$ функция $u(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа во внешней области. Нормальные производные потенциала простого слоя в некоторой точке P_0, лежащей на контуре C, являются разрывными функциями, для которых имеют место соотношения

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_B}\right)_B = \left(\frac{\partial u}{\partial n_B}\right)_0 - \pi\mu(P_0)$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_B}\right)_H = \left(\frac{\partial u}{\partial n_B}\right)_0 + \pi\mu(P_0) \qquad (3.3)$$

если ось x_3 направить по внутренней нормали. В (3.3) $\partial u / \partial n_B$ - внутренняя нормальная производная функции u, $(\partial u / \partial n)_B$ и $(\partial u / \partial n)_H$ - пределы производной $\partial u / \partial n$ при стремлении точки M к точке P_0 соответственно с внутренней или внешней стороны поверхности пластинки, $(\partial u / \partial n)_0$ - значение нормальной производной потенциала простого слоя в точке P_0. Для выполнения граничного условия , очевидно, надо потребовать, чтобы

$$\left(\frac{\partial u(P_0)}{\partial n_H}\right)_H = f(P_0) \qquad (3.4)$$

Принимая во внимание формулы (3.3), получаем уравнение для определения функции $\mu(P)$

$$\pi\mu(s_0)+\int_C K(s_0,s)\mu(s)\,ds=f(s_0) \tag{3.5}$$

где

$$K(s,s_0)=\frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\left(\ln\frac{1}{R_{PP_0}}\right)=\frac{\cos\psi}{R_{PP_0}} \tag{3.6}$$

В (3.6) ψ - угол между внутренней нормалью n в точке P и вектором PP_0. R_{PP_0} - расстояние между точками P и P_0.

В рассматриваемом случае область является прямоугольником $\{-a\le x\le a,-h\le y\le h\}$ и вычисления показывают, что уравнение (2.5) распадается на систему четырех интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4$:

$$\begin{gathered}
\pi\varphi_1(t)+\frac{h}{a}\int_{-1}^{1}\frac{2\varphi_2(t_0)\,dt_0}{4\frac{h^2}{a^2}+(t-t_0)^2}+\frac{h^2}{a^2}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_3(t_0)(1-t_0)\,dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(1-t_0)^2+(1-t)^2}+\\
+\frac{h^2}{a^2}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_4(t_0)(1-t_0)\,dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(1-t_0)^2+(1+t)^2}=f_1(t)\\
\frac{h}{a}\int_{-1}^{1}\frac{2\varphi_1(t_0)\,dt_0}{4\frac{h^2}{a^2}+(t-t_0)^2}+\pi\varphi_2(t)+\frac{h^2}{a^2}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_3(t_0)(1+t_0)\,dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(1+t_0)^2+(1-t)^2}+\\
+\frac{h^2}{a^2}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_4(t_0)(1+t_0)\,dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(1+t_0)^2+(1+t)^2}=f_2(t)\\
\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(t_0)(1-t_0)\,dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(1-t)^2+(1-t_0)^2}+\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_2(t_0)(1-t_0)\,dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(1+t)^2+(1-t_0)^2}+\pi\varphi_3(t)+\\
+\frac{h}{a}\int_{-1}^{1}\frac{2\varphi_4(t_0)\,dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(t-t_0)^2+4}=f_3(t)
\end{gathered} \tag{3.7}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(t_0)(1+t_0)dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(1-t)^2+(1+t_0)^2}+\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_2(t_0)(1+t_0)dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(1+t)^2+(1+t_0)^2}+$$

$$+\frac{h}{a}\int_{-1}^{1}\frac{2\varphi_3(t_0)dt_0}{\frac{h^2}{a^2}(t-t_0)^2+4}+\pi\varphi_4(t)=f_4(t)$$

В (3.7) $\varphi_i(t)$ - значения функции $\mu(as)$ на соответствующих сторонах прямоугольника $y=\pm h$ и $\mu(hs)$ - на сторонах $x=\pm a$.

Запишем систему уравнений (3.6) в векторно-матричной форме

$$\varphi(t)+\int_{-1}^{1}K(t,t_0)\varphi(t_0)dt_0=f(t) \tag{3.8}$$

где

$$\varphi(t)=\left(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t),\varphi_4(t)\right)^{tr}$$

$$f(t)=\left(f_1(t),f_2(t),f_3(t),f_4(t)\right)^{tr}$$

$$K(t,t_0)=\left\|K(t,t_0)\right\|_{I,J}^{4}$$

$$K_{11}(t,t_0)=K_{22}(t,t_0)=K_{33}(t,t_0)=K_{44}(t,t_0)=0$$

$$K_{12}(t,t_0)=\frac{h}{a}\frac{2}{4\frac{h^2}{a^2}+(t-t_0)^2},\qquad K_{13}(t,t_0)=\frac{h^2}{a^2}\frac{(1-t_0)}{\frac{h^2}{a^2}(1-t_0)^2+(1-t)^2}$$

$$K_{14}(t,t_0)=\frac{h^2}{a^2}\frac{(1-t_0)}{\frac{h^2}{a^2}(1-t_0)^2+(1+t)^2},\qquad K_{23}(t,t_0)=\frac{h^2}{a^2}\frac{(1+t_0)}{\frac{h^2}{a^2}(1+t_0)^2+(1-t)^2}$$

$$K_{24}(t,t_0)=\frac{h^2}{a^2}\frac{(1+t_0)}{\frac{h^2}{a^2}(1+t_0)^2+(1+t)^2},\qquad K_{31}(t,t_0)=\frac{h^2}{a^2}\frac{(1-t_0)}{\frac{h^2}{a^2}(1-t)^2+(1-t_0)^2}$$

$$K_{32}(t,t_0)=\frac{(1-t_0)}{\frac{h^2}{a^2}(1+t)^2+(1-t_0)^2},\qquad K_{34}(t,t_0)=\frac{h}{a}\frac{2}{\frac{h^2}{a^2}(t-t_0)^2+4}$$

$$K_{41}(t,t_0)=\frac{(1-t_0)}{\frac{h^2}{a^2}(1-t)^2+(1+t_0)^2},\qquad K_{42}(t,t_0)=\frac{(1+t_0)}{\frac{h^2}{a^2}(1+t)^2+(1+t_0)^2}$$

$$K_{21}(t,t_0)=K_{12}(t,t_0), \quad K_{43}(t,t_0)=K_{34}(t,t_0) \tag{3.9}$$

Для приближенного решения уравнения (3.8) интеграл, входящий в уравнение, заменим квадратурной формулой Гаусса порядка n, согласно которой [7]

$$\int_{-1}^{1} F(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} A_i F(t_i) \tag{3.10}$$

где точки $t_1, t_2, \ldots, t_n$ - нули соответствующего полинома Лежандра

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)\right] \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

а $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - соответствующие коэффициенты Гаусса.

В данном случае для вычисления интеграла общего вида

$$\int_a^b F(x)\,dx$$

сделав замену переменной

$$x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t$$

получим

$$\int_a^b F(x)\,dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\Phi(t)\,dt$$

$$\Phi(t)=F\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t\right) \tag{3.11}$$

Последний интеграл вычисляем по трехточечной формуле Гаусса

$$\int_{-1}^{1}\Phi(t)\,dt = A_1\Phi(z_{-1})+A_2\Phi(0)+A_3\Phi(z_1) \tag{3.12}$$

где $z_{-1}=-\sqrt{3/5}$, $z_1=\sqrt{3/5}$, $A_1=A_3=5/9$, $A_2=8/9$.

Разделив в интегральном уравнении (3.8) отрезок $(-1,1)$ на $2N$ частей точками $-1=x_{-n}<x_{-n+1}<\ldots<x_0=0<\ldots<x_n=1$, $(x_k=-x_{-k})$, применим к каждому интегралу

$$I_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k} K(t,t_0)\,\varphi(t_0)\,dt_0$$

формулу (3.12), $(a=t_{k-1},\ b=t_k)$.

В результате придем к системе алгебраических уравнений порядка $6N$

относительно матрицы $\{\varphi(z_p)\}$, где z_p пробегает построенную указанным образом сетку узлов Гаусса $(p = 1,2,\ldots,6N)$.

Таким образом, матрица полученной системы будет иметь вид

$$A = \left\| A_{ij} \right\|_{i,j=1}^{6N} \tag{3.13}$$

где (4×4)- блока A_{ij} имеют вид

$$A_{ii} = E, \qquad (E - \text{единичная матрица}),$$

$$A_{ij} = B_{ij}K(z_i, z_j) \qquad (i \neq j)$$

где B_{ij} - соответствующие коэффициенты.

Имея ввиду объем оперативной памяти в компьютере, можем производить расчеты для $N = 1,2,3,4$.

Обратив внимание на вид функций $K_{ij}(t,t_0)$, замечаем, что основная их часть имеет сингулярности в некоторых из точек $(t,t_0) = (-1,1)$. Например, функции K_{13} и K_{31} на линии $t = 1$ равны $1/(1-t_0)$, т. е. не интегрируемы на $t_0 \in [-1,1]$. Поэтому, естественно, что сеть дискретизации $\{z_k\} \in [-1,1]$ выгодно выбирать неравномерную, сгущающуюся у концов отрезка $[-1,1]$. Будем исходить из разбиения

$$x_k = \pm\left|\frac{k}{h}\right|^a, \qquad 0 < a < 1, \qquad k = 0,1,\ldots,N$$

Значение a в дальнейшем оптимизируем согласно данным численного эксперимента.

Из (3.2) искомые значения $\partial u/\partial x = H_1$ и $\partial u/\partial y = H_2$ (в приложениях представляющие искомые значения соответствующих компонент магнитных полей H^0 и h), которые были использованы в предыдущем пункте при решении задачи устойчивости, восстанавливаются по формулам

$$\begin{aligned} H_1 = -\Bigg[&\int_{-1}^{1} \frac{(t-t_0)\varphi_1(t_0)\,dt_0}{(t-t_0)^2 + \frac{h^2}{a^2}(t-1)^2} + \int_{-1}^{1} \frac{(t-t_0)\varphi_2(t_0)\,dt_0}{(t-t_0)^2 + \frac{h^2}{a^2}(t+1)^2} + \\ &+ \frac{h}{a}\int_{-1}^{1} \frac{(t-1)\varphi_3(t_0)\,dt_0}{(t-1)^2 + \frac{h^2}{a^2}(t-t_0)^2} + \frac{h}{a}\int_{-1}^{1} \frac{(t+1)\varphi_4(t_0)\,dt_0}{(t+1)^2 + \frac{h^2}{a^2}(t-t_0)^2} \Bigg] \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$H_2 = -\left[\frac{h}{a}\int_{-1}^{1}\frac{(t-1)\varphi_1(t_0)\,dt_0}{(t-t_0)^2+\frac{h^2}{a^2}(t-1)^2}+\frac{h}{a}\int_{-1}^{1}\frac{(t+1)\varphi_2(t_0)\,dt_0}{(t-t_0)^2+\frac{h^2}{a^2}(t+1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{h^2}{a^2}\int_{-1}^{1}\frac{(t-t_0)\varphi_3(t_0)\,dt_0}{(t-1)^2+\frac{h^2}{a^2}(t-t_0)^2}+\frac{h^2}{a^2}\int_{-1}^{1}\frac{(t-t_0)\varphi_4(t_0)\,dt_0}{(t+1)^2+\frac{h^2}{a^2}(t-t_0)^2}\right] \tag{3.15}$$

Если в формулах (3.14) и (3.15) $t \neq 1$, квадратурные формулы строятся по схеме п. 2. В противном случае в формулах (3.14) и (3.15) появляются сингулярные интегралы вида

$$I = \int_{-1}^{1}\frac{F(t)}{(x-t)}dt$$

которые, следуя известным рекомендациям [8] эффективно представляется по формуле трапеций

$$I = h\left[\frac{F(t_0)}{2(x_0-t_0)}+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{F(t_i)}{x_i-t_i}+\frac{F(t_N)}{2(x_N-t_N)}\right]$$

где t_k-точки равномерной сети $t_k \in \left\{\pm\frac{k}{N}\right\}$, $k = 0,1,\ldots,N$, а $x_k \in \left\{\pm\frac{k+1/2}{N}\right\}$.

Для того, чтобы применить эту схему в данном случае, надо значения $\varphi(t)$, найденные при решении системы с матрицей (3.13) на гауссовой сети, пересчитать на равномерной сети $t_k \in \left\{\pm\frac{k}{N}\right\}$. Для этого снова воспользуемся системой (3.7), применив те же гауссовы квадратурные формулы, но уже при $t \in \left\{\pm\frac{k}{N}\right\}$.

В заключение отметим, что на основании тестовых экспериментов при расчетах на сети вида $x_k = \left\{\pm\left(\frac{k}{N}\right)^{\alpha}\right\}$, $k = 0,1,\ldots,N$ параметр α выбран равным $\alpha = 0.6$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д. , Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред, М. : Наука, 1982. 624 с.

2. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. - М.: Физматгиз, 1961. 339 с.

3. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. -Л. -М. : Гостехиздат, 1948. 212 с.

4. *Амбарцумян С. А. , Багдасарян Г. Е. , Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. - ПММ, 1973, т. 37, вып. 1, 114-130 с.

5. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. -М.: Физматгиз, 1963. 879с.

6. *Тихонов А. Н. , Самарский А. А.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. 736 с.

7. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы.- М. : "Наука", 1974.

8. *Лифонов И. К.* Квадратурные формулы и формула Пуанкаре-Бертрана для сингулярных интегралов. - Сиб. мат. журнал, 1980, т. 21, №6, 46-60 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
9.08.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 2, 1995 Механика

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ПЬЕЗОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Аветисян А. С.

Ավետիսյան Ա.Ս.

Վերջավոր լայնույթով էլեկտրաառաձգական մակերևութային ալիքները պիեզոէլեկտրական միջավայրում

Դիտարկվում է պիեզոէլեկտրական $6mm$ դասի բյուրեղում մակերևութային ալիքի տարածումը երկրաչափական ոչ գծային դրվածքի դեպքում: Ստացված է ալիքային ազդանշանից գրգռված էլեկտրաառաձգական դաշտի նկարագիրը:

Avetisyan A.S.

Electroelastic surface waves of finite amplitude on an piezodielectric solid.

Исследуется распространение поверхностной электроупругой волны конечной амплитуды в пьезодиэлектрике класса 6mm с учетом только геометрической нелинейности. Получены описания генерируемых первичным волновым сигналом электроупругих полей.

Рассматривается распространение электроупругих высокочастотных (коротких) волн конечной амплитуды, локализованные у поверхности раздела $x_2 = 0$ пьезодиэлектрика класса $6mm$ гексагональной симметрии с вакуумом. Учет больших деформаций усложняет взаимодействие между упругим и электромагнитным полями, а также между плоским и антиплоским электроупругим состояниями.

Пьезодиэлектрическая среда занимает полупространство $|x_1| < \infty$, $|x_2| < 0$, $|x_3| < \infty$, где решаются уравнения движения упругой среды

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial x_j} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_j}{\partial j^2}, \qquad i,j = 1,2,3 \tag{1.1}$$

и уравнения электромагнетостатики

$$\frac{\partial D_n}{\partial x_n} = 0, \qquad \frac{\partial B_p}{\partial x_p} = 0, \qquad n,p = 1,2,3 \tag{1.2}$$

в лагранжевой форме описания. Здесь $L_{ij} = \sigma_{ij} + t_{ij}$ - тензор термодинамических напряжений Лагранжа, компоненты которого с учетом только геометрической нелинейности имеют вид [1, 2]:

$$L_{ij} = c_{ijmk}\frac{\partial u_m}{\partial x_k} + e_{mij}\frac{\partial \Phi}{\partial x_m} + \delta_{nj}e_{mik}\frac{\partial \Phi}{\partial x_m}\frac{\partial u_n}{\partial x_k} + \left(\delta_{jm}c_{inkl} + \frac{1}{2}\delta_{km}c_{ijkl}\right)\frac{\partial u_n}{\partial x_l}\frac{\partial u_m}{\partial x_n} \tag{1.3}$$

Лагранжевые индукции электрического и магнитного полей с учетом конечных деформаций соответственно равны :

$$D_m = e_{mij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \varepsilon_{mk}\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\delta_{ik}e_{mnj}\frac{\partial u_k}{\partial x_n}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \varepsilon_{mn}l_{kmij}\frac{\partial \Phi}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{1.4}$$

$$B_p = -\left(\mu_{kp}\frac{\partial u_n}{\partial x_n} - \mu_{kn}\frac{\partial u_p}{\partial x_n} - \mu_{pl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} - \mu_{kp}\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \tag{1.5}$$

В материальных соотношениях (1.3)-(1.5), а также в дальнейшем в материальных соотношениях внешней среды мы пользуемся выражениями лагранжевых напряженностей электрического $E_k(x_j, t)$, магнитного $H_k(x_j, t)$ полей, которые с учетом конечных деформаций описываются через градиент деформаций $\xi_{i,j} = \delta_{ij} + u_{i,j}$ и потенциалы соответствующих полей $\Phi(x_j, t)$ и $\Psi(x_j, t)$

$$\begin{aligned} E_m &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x_m} - l_{mnij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \\ H_m &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x_m} - l_{mnij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \end{aligned} \tag{1.6}$$

В соотношениях (1.4) , (1.6) тензор " геометрической стрикции" $\ddot{a}_{mnij}$ имеет вид

$$l_{mnij} = \delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{ij}\delta_{nm}$$

Во внешней вакуумной области $|x_1| < \infty$, $x_2 < 0$, $|x_3| < \infty$ решаются уравнения электромагнетостатики для вакуума

$$\frac{\partial D_n^{(0)}}{\partial x_n} = 0, \qquad \frac{\partial E_p^{(0)}}{\partial x_p} = 0, \qquad n, p = 1,2,3 \tag{1.7}$$

где индукции электрического $D_n^{(0)}(x_i,t)$ и магнитного $B_n^{(0)}(x_i,t)$ полей в лагранжевой форме описания выражаются через потенциалы этих внешних полей $\Phi^{(0)}(x_i,t)$ и $\Psi^{(0)}(x_i,t)$ соответственно, а также через деформации точек поверхности раздела сред $u_k^{(0)}(x_i,t)=u_k(x_1,0,x_3,t)$ [1]:

$$
\begin{aligned}
D_p^{(0)} &= -\varepsilon_0\left[\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial x_p}-\left(\frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_p}+\frac{\partial u_p^{(0)}}{\partial x_m}\right)\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial x_m}+\frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_n}\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial x_p}\right]\\
B_p^{(0)} &= -\mu_0\left[\frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial x_p}-\left(\frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_p}+\frac{\partial u_p^{(0)}}{\partial x_m}\right)\frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial x_m}+\frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_n}\frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial x_p}\right]
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Естественно, что конечность деформаций поверхности электроупругой среды искажает ("деформирует") нематериальную внешнюю среду, чем и продиктованы выражения материальных уравнений (1.8). Учет "деформаций" внешней вакуумной области особенно важно в задачах о распространении поверхностных электроупругих волн.

На границе раздела сред $x_2=0$ удовлетворяются непрерывность тангенциальных компонент векторов напряженностей электрического и магнитного полей

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial x_m}-\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial x_m}+l_{mnij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}-\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial x_m}\right]=0\\
&\frac{\partial\Psi}{\partial x_m}-\frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial x_m}+l_{mnij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial x_n}-\frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial x_m}\right]=0
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

и нормальных компонент векторов индукций этих полей

$$
D_2=D_2^{(0)},\qquad B_2=B_2^{(0)} \tag{1.10}
$$

На недеформированной границе раздела $x_2=0$ термодинамические напряжения L_{ij} должны равняться нулю :

$$
L_{ij}=0 \tag{1.11}
$$

Очевидно, что учет "деформирования" внешней нематериальной области усложняет запись материальных соотношений внешней среды (1.8) и граничных условий (1.9) , (1.10) . Кроме этого, из приведенных соотношений следует, что посредством градиента деформаций $\xi_{i,j}=\delta_{ij}+u_{i,j}$ квазистатические электрическое и магнитное поля взаимосвязаны. Это значит, что если в пьезодиэлектрическую среду излучать электроупругую волну конечной амплитуды, то в среде индуцируется также магнитное поле.

Наряду с граничными условиями (1.9) - (1.11) для локализованных у поверхности раздела волн должны удовлетворяться также условия затухания по глубине полупространств всех волновых характеристик .

2. Пусть на вход пьезодиэлектрической среды падает монохроматическая волна конечной амплитуды. Нелинейность уже не допускает простых периодических волновых решений и приводит к последовательному возбуждению временных гармоник падающей волны $f_n = A_n(\xi\,\tau)\exp i(\omega_n t - k_n r)$. При этом амплитуды генерационных гармоник будут медленно изменяющими функциями времени и направления распространения волны $(\xi = \varepsilon r,\ \tau = \varepsilon t)$. Здесь ε физический малый параметр, которым может быть мера понижения первичного волнового сигнала на расстоянии длины волны. Исходя из вышесказанного и учитывая, что нелинейность кристаллов мала, при решении задачи о распространении волн конечной амплитуды достаточно ограничиться приближением заданного волнового поля (падающего волнового сигнала).

Воспользуемся методом возмущений, представляя искомые величины электромагнитоупругого поля в виде

$$F(x_j, t, \xi\,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n F_n(x_j, t, \xi\,\tau) \tag{2.1}$$

Не нарушая общности решения, за направлением распространения волны принята координатная ось Ox_1 (т.е. $\xi = \varepsilon x_1$). В нелинейные волновые уравнения и граничные условия эти изменения входят посредством замены производных по x_1 и по t

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \to \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial \tau} \tag{2.2}$$

Подставляя разложение искомых величин (2.1) в уравнения электромагнитоупругости (1.1), (1.2), (1.7) и в граничные условия (1.9) - (1.11) с учетом материальных соотношений (1.3) - (1.5), (1.8), преобразований (2.2) и приравнивая выражения при одинаковых степенях ε , в первом приближении получим линейную однородную краевую задачу электромагнитоупругости. Известно, что для пьезодиэлектрических кристаллов класса $6mm$ задачи плоско - деформированного упругого поля и магнитного поля разделяются от задачи антиплоской деформации, которая электроактивна. Это означает, что в данной среде в качестве волнового сигнала можно возбуждать один из указанных волновых полей.

В дальнейшем вместо обозначений декартовых координат x_1, x_2, x_3 для удобства будем пользоваться обозначениями x, y, z.

Затухающие по глубине граничащих полупространств решения полученных краевых задач, с учетом слабой нелинейности пьезокристалла, запишутся в виде

$$u_0(x,y,t,\xi,\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}U_{0m}(\xi,\tau)\left[\exp(-m\nu_1 y)-(\nu_1\nu_2)^{1/2}\exp(-m\nu_2 y)\right]\times$$
$$\times\exp(im\varphi)+k.c.$$
$$v_0(x,y,t,\xi,\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}-iU_{0m}(\xi,\tau)\left[\nu_1\exp(-m\nu_1 y)-\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{1/2}\exp(-m\nu_2 y)\right]\times \quad (2.3)$$
$$\times\exp(im\varphi)+k.c.$$

$$w_0(x,y,t,\xi,\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}W_{0m}(\xi,\tau)\exp(-mk\alpha y)\exp(im\varphi)+k.c.$$
$$\Phi_0(x,y,t,\xi,\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e_{15}}{e_{11}}W_{0m}(\xi,\tau)\left[\exp(-mk\alpha y)+\right.$$
$$\left.+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}\exp(-mky)\right]\exp(im\varphi)+k.c \quad (2.4)$$
$$\Phi_0^{(0)}(x,y,t,\xi,\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e_{15}}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}W_{0m}(\xi,\tau)\times$$
$$\times\exp(mky)\exp(im\varphi)+k.c$$

Потенциальные, затухающие по глубине полупространств сигнальные магнитные поля не существуют. А это значит, что в данной среде невозможно возбуждать локализованное у поверхности раздела сред высокочастотное потенциальное магнитное поле. Однако из линейной теории электроупругости известно, что электрическое поле в пьезодиэлектрике индуцирует вихревое магнитное поле, определяющееся формулой [3]

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}_0}{\partial t}$$

Под индукцией $\vec{D}_0$ понимается заданное значение $\vec{D}$, определяемое из задачи электроупругости, вихревая часть магнитоупругого поля в акустоэлектрической задаче имеет порядок $(v^2/c_0^2)\times|\nabla\Phi|$ и всегда пренебрежимо мала.

В соотношениях (2.3) и (2.4) использованы обозначения

$$\alpha=\left[1-\frac{v_B^2}{c_t^2}\right]^{1/2}=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}\frac{\chi^2}{1+\chi^2}$$
$$\nu_1=\sqrt{1-v_R^2/c_l^2},\qquad \nu_2=\sqrt{1-v_R^2/c_{1t}^2} \quad (2.5)$$
$$c_t^2=\frac{c_{44}}{\rho}(1+k^2),\qquad c_{1t}^2=\frac{c_{66}}{\rho},\qquad c_l^2=\frac{c_{11}}{\rho}$$

$\varphi(x,t) = kx - \omega t$ - фазовая функция.

В случае "электрически закрытой" границы (металлизированная поверхность пьезоэлектрика) во внешней вакуумной среде отсутствует также электрическое поле (т.е. $\Phi_0^{(0)}(x,y,t,\xi,\tau) = 0$), а внутри пьезодиэлектрика электрическое поле описывается функцией

$$\Phi_0^{(0)}(x,y,t,\xi,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} W_{0m}(\xi,\nu)\left[\exp(-m\alpha k y) - \exp(-mky)\right] \times$$
$$\times \exp(im\varphi) + k.c.$$

Во втором приближении волновые уравнения электромагнитоупругости получаются в виде

$$L_1[u_1,v_1] = -2c_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \xi} - (c_{11} - c_{66})\frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial \xi} + 2\rho \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial \tau} + F_1[u_0, v_0, w_0, \Phi_0]$$
$$L_2[u_1,v_1] = -2c_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \xi} - (c_{11} - c_{66})\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial \xi} + 2\rho \frac{\partial^2 v_0}{\partial t \partial \tau} + F_2[u_0, v_0, w_0, \Phi_0] \tag{2.6}$$

$$L_3[w_1,\Phi_1] = -2c_{44}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \xi} - 2e_{15}\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial \xi} + 2\rho \frac{\partial^2 w_0}{\partial t \partial \tau} + F_3[u_0, v_0, w_0, \Phi_0]$$
$$L_4[w_1,\Phi_1] = -2e_{15}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \xi} + 2\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial \xi} + F_4[u_0, v_0, \Phi_0] \tag{2.7}$$

$$L_5[\Phi_1^{(0)}] = -2\frac{\partial^2 \Phi_0^{(0)}}{\partial x \partial \xi} + F_5[u_0^{(0)}, v_0^{(0)}, \Phi_0^{(0)}]$$
$$L_6[\Psi_1] = -2\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x \partial \xi} + F_6[u_0, v_0, \Psi_0] \tag{2.8}$$
$$L_7[\Psi_1^{(0)}] = -2\frac{\partial^2 \Psi_0^{(0)}}{\partial x \partial \xi} + F_7[u_0^{(0)}, v_0^{(0)}, \Psi_0^{(0)}]$$

Здесь $L_k[*]$ - линейные волновые операторы, а $F_k[*]$ - нелинейные операторы.

На деформированной поверхности раздела двух сред $y = 0$ искомые величины волнового поля удовлетворяют неоднородным граничным условиям

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{c_{11}}{c_{12}}\frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{\partial u_0}{\partial \xi} + B_1[u_0, v_0, w_0, \Phi_0]$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial v_0}{\partial \xi} + B_2[u_0, v_0, w_0, \Phi_0, \Phi_0^{(0)}] \tag{2.9}$$
$$\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{e_{15}}{c_{44}}\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = B_3[u_0, v_0, w_0, \Phi_0, \Phi_0^{(0)}]$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{\partial w_1}{\partial y}-\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}}\frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial y}=B_4\left[u_0,v_0,w_0,\Phi_0,\Phi_0^{(0)}\right]\\
&\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}-\frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial x}=-\frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi}+\frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\delta \xi}+B_5\left[u_0^{(0)},v_0^{(0)},\Phi_0,\Phi_0^{(0)}\right]
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mu_{11}}{\mu_0}\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}-\frac{\partial \Psi_1^{(0)}}{\partial x}=B_6\left[u_0^{(0)},v_0^{(0)},\Psi_0,\Psi_0^{(0)}\right]\\
&\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}-\frac{\partial \Psi_1^{(0)}}{\partial x}=-\frac{\partial \Psi_0}{\partial \xi}+\frac{\partial \Psi_0^{(0)}}{\partial \xi}+B_7\left[u_0^{(0)},v_0^{(0)},\Psi_0,\Psi_0^{(0)}\right]
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

здесь также $B_x[*]$ - нелинейные операторы и выражения соответствующих слагаемых не приводятся из-за громоздкости.

В практике обычно используются или рэлеевский электроупругий сигнал $\{u_0(x,y,t),\ v_0(x,y,t),\ 0,\ \Phi_0(x,y,t)\}$, или чисто сдвиговой электроупругий волновой сигнал $\{0,\ 0,\ w_0(x,y,t),\ \Phi_0(x,y,t)\}$ (волны Гуляева - Блюстейна). В случае пьезокристалла класса $6mm$, в указанном срезе xOy, рэлеевское волновое поле не электроактивное, то есть имеем

$$
\begin{aligned}
&u_0(x,y,t)\neq 0,\quad v_0(x,y,t)\neq 0,\quad w_0(x,y,t)=0\\
&\Phi_0(x,y,t)=0,\quad \Phi_0^{(0)}(x,y,t)=0\\
&\Psi_0(x,y,t)=0,\quad \Psi_0^{(0)}(x,y,t)=0
\end{aligned}
$$

Тогда, если в первом приближении имеется только одна рэлеевская волна, в соотношениях (2.6) - (2.11), а также в следующих приближениях $(m\geq 1)$ будем иметь:

$$
\begin{aligned}
&F_k\left[u_m,v_m,0,0\right]=F_k^{(1)}\left[u_m,v_m\right],\quad (k=1,2)\\
&F_j\left[u_m,v_m,0,0\right]=0,\quad (j=3,4,5,6,7)\\
&B_k\left[u_m,v_m,0,0\right]=B_k^{(1)}\left[u_m,v_m\right],\quad (k=1,2)\\
&B_j\left[u_m,v_m,0,0\right]=0,\quad (j=3,4,5,6,7)
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

С учетом (2.12) из (2.7), (2.8) и (2.10), (2.11), очевидно, что начальное плоско-деформированное волновое поле не возбуждает высшие гармоники антиплоского электроупругого, а также магнитоупругого полей. Происходит только последовательное возбуждение высших гармоник чисто упругого плоско-деформированного волнового поля в плоскости изотропии пьезокристалла xOy. Исследование данной задачи можно найти в работах [4,5].

В случае чисто сдвигового электроупругого волнового сигнала:

$$u_0(x,y,t)=0, \qquad v_0(x,y,t)=0$$
$$\Psi_0(x,y,t)=0, \qquad \Psi_0^{(0)}(x,y,t)=0$$

а $w_0(x,y,t)$, $\Phi_0(x,y,t)$ и $\Phi_0^{(0)}(x,y,t)$ определяются соотношениями (2.4). Существует также пренебрежимо малое вихревое поле внутри и вне пьезополупространства. Тогда в уравнениях и граничных условиях имеем:

$$\begin{gathered}
F_k(0,0,w_m,\Phi_m)=F_k^{(2)}(w_m,\Phi_m)\\
F_j(0,0,w_m,\Phi_m,\Phi_m^{(0)})=0\\
B_k(0,0,w_m,\Phi_m,\Phi_m^{(0)})=B_k^{(2)}(w_m,\Phi_m,\Phi_m^{(0)})\\
B_j(0,0,w_m,\Phi_m,\Phi_m^{(0)})=0
\end{gathered} \tag{2.13}$$

где также $k=1,2$ и $j=3,4,5,6,7$.

Генерация высших гармоник сдвиговой электроупругой волны происходит из-за самовоздействия волнового сигнала (первичной гармоники). Условие отсутствия вековых членов в решении, получается из граничных условий краевой задачи электроупругости (2.7) и (2.10):

$$M_{ij}^{\ 0}C_j(\varepsilon,\tau)=A_i(W_{0,\xi},W_{0,\tau}) \tag{2.14}$$

Учитывая, что первичным электроупругим полем обеспечивается выполнение условия $\det\left\|M_{ij}^{\ 0}\right\|=0$, из условия существования нетривиального решения получаем дифференциальное уравнение, описывающее характер изменения амплитуд высших гармоник сдвиговой электроупругой волны

$$a_0W_{om,\xi}+W_{om,\tau}=0 \quad \text{для} \quad m\geq 1 \tag{2.15}$$

где $a_0=\dfrac{c_\chi^{\ 2}}{v_B}\left(1-\alpha^2\dfrac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}+\varepsilon_0}\right)$ - скорость изменения амплитуды волны (групповая скорость), $\alpha=\chi^2\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}+\varepsilon_0}$, $v_B=c_t\left[1-\alpha^2\right]^{1/2}$ - скорость поверхностной волны Гуляева - Блюстейна.

При падении линейного волнового сигнала, для комплексных амплитуд гармоник $W_{0m}(\xi\,\tau)$ входными условиями будут

$$\begin{gathered}
\mathrm{Re}\left[W_{01}(0,0)\right]=A_0, \quad \mathrm{Im}\left[W_{01}(0,0)\right]=0\\
\mathrm{Re}\left[W_{0m\geq 2}(0,0)\right]=0, \quad \mathrm{Im}\left[W_{0m\geq 2}(0,0)\right]=0
\end{gathered} \tag{2.16}$$

С учетом этого для комплексных амплитуд получаем

$$W_{01}(\xi,\tau)=A_0\exp(a_0\tau-\xi),\quad \mathrm{Im}[W_{01}(\xi,\tau)]=0$$
$$W_{0m}(\xi,\tau)=0 \quad \text{при} \quad m\geq 2 \tag{2.17}$$

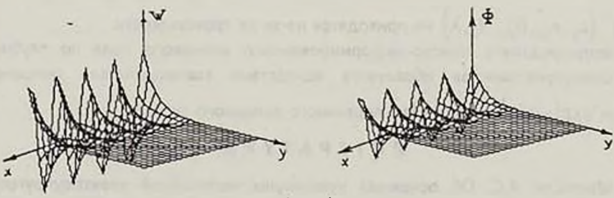
Затухающие по глубине граничащих полупространств антиплоское электроупругое поле получается в виде

$$w_1(x,y,t,\xi,\tau)=A_0\exp(a_0\tau-\xi)\left[\cos(kx-\omega t)+\alpha\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}+\varepsilon_0}y\sin(kx-\omega t)\right]\times\exp(-k\alpha y)$$

$$\Phi_1(x,y,t,\xi,\tau)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}A_0\exp(a_0\tau-\xi)\left[\cos(kx-\omega t)\left[\exp(-k\alpha y)+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}\exp(-ky)\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\exp(-ky)+\alpha\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}\exp(-k\alpha y)\right]y\sin(kx-\omega t)\right] \tag{2.18}$$

$$\Phi_1^{(0)}(x,y,t,\xi,\tau)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}A_0\exp(a_0\tau-\xi)\exp(ky)\left[\cos(kx-\omega t)-y\sin(kx-\omega t)\right]$$

Очевидно, что возникает запаздывающая электроупругая волна, отстающая из основного волнового сигнала фазой на $\frac{3}{2}\pi$ и неоднородность волны в глубь полупространств имеет иной характер по сравнению с основным волновым сигналом (фиг. 1). Запаздывающая волна имеет максимальную амплитуду не на поверхности $y=0$, а на глубине $y=\frac{\lambda}{2\pi\alpha}$ для каждой волны длиной λ.



фиг. 1

Из (2.13) следует, что в этом случае генерируется также плоско-деформированное волновое поле. Во первых, здесь возникает акустическое детектирование (нераспространяющаяся волна), обусловленное взаимодействием гармоник электроупругой сдвиговой волны

$$u_{01}(x,y,t,\xi,\tau)=0$$
$$v_{01}(x,y,t,\xi,\tau)=R_0^2\left[A_1\exp(-2\alpha ky)+B_1\exp(-2\alpha ky)\right]$$

где

$$A_1 = 1+\alpha^2 - 2\frac{c_{66}}{c_{11}} + (1-\alpha^2)\frac{\varepsilon_{15}^2}{c_{66}\varepsilon_{11}}$$

$$B_1 = 4\frac{e_{15}^2}{c_{11}\varepsilon_{11}}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}, \qquad R_0^2 = \frac{2\pi A_0^2}{\lambda}$$

Локализованное у поверхности раздела $y=0$ распространяющееся плоско-деформированное поле (волна Рэлея) определяется из краевой задачи (2.6),(2.9) с учетом (2.13) и (2.18):

$$u_1(x,y,t,\xi\,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[A_{1n}^{(1)}\exp(-n\alpha ky) + A_{1n}^{(2)}\exp(-nky) +$$

$$+A_{1n}^{(3)}\exp(-(n+\alpha-1)ky) + A_{1n}^{(4)}\exp((-n\alpha+\alpha-1)ky)\Big] +$$

$$+\sum_{n=2}^{1+\frac{1}{\alpha}} A_{1n}^{(5)}\exp((n\alpha-\alpha-1)ky)\exp(in\varphi) + k.c.$$

$$v_1(x,y,t,\xi\,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[B_{1n}^{(1)}\exp(-n\alpha ky) + B_{1n}^{(2)}\exp(-nky) +$$

$$+B_{1n}^{(3)}\exp(-(n+\alpha-1)ky) + B_{1n}^{(4)}\exp((-n\alpha+\alpha-1)ky)\Big] +$$

$$+\sum_{n=2}^{1+\frac{1}{\alpha}} B_{1n}^{(5)}\exp((n\alpha-\alpha-1)ky)\exp(in\varphi) + k\,c$$

где выражения коэффициентов $A_{mn}^{(i)}\left(c_{ij}, e_{kij}, \delta_{jk}, A_0, \lambda\right)$ и $B_{mn}^{(i)}\left(c_{ij}, e_{kij}, \delta_{jk}, A_0, \lambda\right)$ не приводятся из-за их громоздкости.

Неоднородность плоско-деформированного волнового поля по глубине пьезополупространства образуется вследствие взаимодействия основных форм $\exp(-\alpha ky)$ и $\exp(-ky)$ первичного волнового сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аветисян А.С.* Об основных уравнениях нелинейной электроупругости пьезоэлектрического диэлектрика. - Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1990, т.43, № 4, с. 41-51.
2. *Maugin G.A.* Nonlinear electromechanical effects and application.- World Sci. Publ., Singapore, 1985.
3. *Балакирев М.К., Гилинский И.А.* Волны в пьезокристаллах.- Новосибирск.: Наука, 1982.
4. *Kalyanasundaram N.* Nonlinear surface acoustic waves on an isotropic solid.- Int. J. Eng. Sci., 1981, v.19, № 1, pp. 279-286.

5. *Lardner R.W.* Nonlinear surface acoustic waves on an elastic solid of general anisotropy.- J. Elast., 1986, v.16, № 1, pp. 63-75.
6. *Nelson D.F.* Theory of nonlinear electroacoustics of dielectric, piezoelectric and pyroelectric crystals. - J. Acoust. Soc. Amer., 1978. v. 63. pp. 1738-1748.

Институт Механики АН Армении

Поступила в редакцию
19.12.1992

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 2, 1995 Механика

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ СЛОИСТОЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С МАГНИТОЗВУКОВОЙ ВОЛНОЙ

АЗАТЯН Л. Д.

Линеаризованная система уравнений приводится к интегро-дифференциальному уравнению второго порядка для прогиба пластинки, которое решается численными методами. Произведен анализ полученных результатов.

Ազատյան Լ.Դ.

Շերտավոր սալի օպտիմալ կառուցվածքի որոշումը մագնիսաակուստիկ ալիքի փոխազդեցության դեպքում

Աշխատանքում դիտարկված է շերտավոր սալի օպտիմալ պրոյեկտման խնդիրը մագնիսաակուստիկ ալիքի փոխազդեցության դեպքում: Գծայնացված հավասարումների սիստեմը բերված է երկրորդ կարգի ինտեգրոդիֆերենցիալ հավասարման սալի ճկվածքի նկատմամբ: Հավասարումը լուծված է թվային մեթոդներով: Ստացված արդյունքները բերված են աղյուսակում:

Azatian L. D.

Determination of optimal structure of slice plate-stripe, interacting with magnetoacustic wave.

Пусть упругая слоистая пластинка-полоса шириной l $(0 \le x \le l$, $-\infty < y < \infty)$ и постоянной толщины h отнесена к декартовой системе координат x, y, z так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью x, y. Пластинка, изготовленная из непроводящего материала $(\sigma = 0)$, помещена во внешнем магнитном поле с вектором магнитной индукции $\overline{B}_0(0, B_0, 0)$, параллельным оси oy. Предполагается, что пластинка-полоса по сторонам $x = 0$, $x = l$ шарнирно закреплена и реализуется цилиндрическая форма изгиба пластинки.

Пусть далее рассматривается идеальная плазма, то есть рассматривается невязкий, нетеплопроводный газ с бесконечной проводимостью. Известно, что в идеально проводящем газе существуют три скорости распространения слабых разрывов: альфвеновские, быстрые и медленные магнитозвуковые волны. В настоящей работе рассматривается случай, когда вектор напряженности магнитного поля перпендикулярен плоскости течения XOZ. Известно, что в направлении, перпендикулярном магнитному полю, скорости альфвеновских и медленных магнитозвуковых волн, обращаются в нуль, то есть имеется только быстрая магнитозвуковая волна, которая распространяется со скоростью $\sqrt{c_0^2+a_0^2}$, где c_0 - скорость звука в невозмущенном газе, $a_0^2=B_0^2/4\pi\rho_0$ - скорость распространения электромагнитных волн Альфвена, ρ_0 - плотность невозмущенного газа.

Уравнения, описывающие движение идеально проводящего газа в магнитном поле, имеют вид [1]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}=(\overline{B}\nabla)\overline{V}'-(\overline{V}'\nabla)\overline{B}-\overline{B}(\nabla\overline{V}') \\
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{V}'\nabla\right)\rho'+\rho'\nabla\overline{V}'=0 \\
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{V}'\nabla\right)\overline{V}'+\frac{1}{\rho'}\nabla\rho'-\frac{1}{4\pi\rho'\mu}(\nabla\times\overline{B})\times\overline{B}=0 \\
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{V}'\nabla\right)P'+c_0^2\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{V}\nabla\right)\rho'=0
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь ρ' - плотность, P' - давление, $\overline{V}'$ - скорость частиц газа. Так как магнитная и диэлектрическая проницаемости газа мало отличаются от единицы, поэтому мы будем полагать $\mu=\varepsilon=1$.

Уравнение движения несимметрично собранной пластинки-полосы имеет вид [2]

$$\left(D_{11}-\frac{K_{11}^2}{C_{11}}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+m_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=Z \tag{2}$$

где w - прогиб, $m_0=\sum_{s=1}^{n}\rho_s h_s$, h_s - толщина s-го слоя, ρ_s - плотность материала s-го слоя, D_{11}, C_{11}, K_{11} - жесткости, определяющиеся по известным формулам [2]

$$\begin{aligned}
&C_{ik}=\sum_{s=1}^{m+n}B_{ik}^{(s)}(\delta_s-\delta_{s-1}) \\
&K_{ik}=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m+n}B_{ik}^{(s)}\left[(\delta_s-\Delta)^2-(\delta_{s-1}-\Delta)^2\right] \\
&D_{ik}=\frac{1}{3}\sum_{s=1}^{m+n}B_{ik}^{(s)}\left[(\delta_s-\Delta)^3-(\delta_{s-1}-\Delta)^3\right]
\end{aligned}$$

Z - нормальная составляющая внешней поверхностной нагрузки, которая имеет вид

$$Z=P_0+P+T_{zz} \tag{3}$$

В (3) P_0 - давление в падающей волне, P - давление в отраженной и излученной волнах, T_{zz} - напряжения Максвелла в газе. Влиянием напряжений Максвелла в вакууме пренебрегается. Уравнения электромагнитного поля в вакууме (внутри пластинки) имеют вид

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\overline{B} = \frac{\partial\overline{E}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot}\overline{E} = -\frac{\partial\overline{B}}{\partial t} \\ &\operatorname{div}\overline{B} = 0 \qquad \operatorname{div}\overline{E} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

$\overline{E}$ - вектор напряженности электрического поля.

Так как рассматриваются поверхности слабого разрыва (малые возмущения), то для нахождения малых величин

$$\overline{b} = \overline{B} - \overline{B}_0, \quad P = P' - P_0, \quad \rho = \rho' - \rho_0, \quad \overline{v} = \overline{v}'(x,z) \tag{5}$$

может быть применена теория возмущений. Здесь индексом "0" обозначены параметры невозмущенного газа впереди магнитозвуковой волны. После подстановки (5) в основную систему уравнений магнитной газодинамики (1) и линеаризации, получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial b_y}{\partial t} = -B_0\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ &\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{B_0}{4\pi\rho_0}\frac{\partial b_y}{\partial x} \\ &\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{B_0}{4\pi\rho_0}\frac{\partial b_y}{\partial z} \\ &\frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 c_0^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

где b_x, b_y, u, v - проекции векторов $\overline{b}$ и $\overline{v}$ на оси Ox, Oz.

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к совместному решению уравнений (2) и (6) при граничных условиях шарнирного опирания по краям $x = 0$, $x = l$, нулевых начальных условиях, условии затухания возмущений на бесконечности и контакта среды с пластинкой.

Введем функцию $\varphi(t, x, z)$ такую, что

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{7}$$

Исключая из уравнений (6) P, b_y, и используя (7), для функции φ получим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2 + a_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{8}$$

Из второго и третьего уравнений системы (6) с использованием (7) можно получить

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}P+\frac{B_0}{4\pi\rho_0}b_y\right)=0 \qquad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}P+\frac{B_0}{4\pi\rho_0}b_y\right)=0$$

Отсюда следует, что выражение в скобках является функцией только t.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}P+\frac{B_0}{4\pi\rho_0}b_y=f(t)$$

Это выражение справедливо для всех точек плоскости течения и неизвестную функцию $f(t)$ можно определить по заданным значениям функции φ и других характеристик в некоторой точке. Если функцию $\varphi(t,x,z)$ определять с точностью до аддитивной постоянной (поле скоростей от этого не меняется), то функцию $f(t)$ можно положить равной нулю

$$P+\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{B_0}{4\pi}b_y=0 \qquad (10)$$

Из первого и четвертого уравнений системы (6) можно получить

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(P-\frac{\rho_0 c_0^2}{B_0}b_y\right)=0 \qquad (11)$$

Так как в момент $t=0$ возмущения равны нулю, то из (11) следует

$$P=\frac{\rho_0 c_0^2}{B_0}b_y \qquad (12)$$

Из соотношений (10) и (12) следует

$$P=-\frac{\rho_0}{1+a_1^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad (13)$$

где $a_1^2=a_0^2/c_0^2$

То есть в результате решения уравнения (8) и определения функции $\varphi(t,x,z)$ можно по формуле (13) определить возмущенное давление. Уравнение (8) решается при следующих начальных и граничных условиях:

$$\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0, \qquad \text{при } t=0$$

$$\varphi \to 0 \qquad \text{при} \quad z \to \infty \tag{14}$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial t} \qquad \text{при} \quad z = 0$$

Здесь φ_0 - потенциал скорости падающей волны, который задается в виде экспоненциально затухающей функции

$$\varphi_0 = \frac{P^0 l}{\alpha \rho_0 \sqrt{c_0^2 + a_0^2}} l^{-\alpha(\tau + \bar{z})} H(\tau + \bar{z})$$

где $\tau = \sqrt{c_0^2 + a_0^2}\, t / l$, $\bar{z} = z / l$, P^0 - давление на фронте волны, $\alpha - \mathrm{const}$, определяющая скорость падения давления за фронтом волны, H - единичная функция Хевисайда. В случае шарнирного закрепления краев пластинки - полосы функция прогиба $w(t, x)$ и потенциалы скоростей $\varphi_0(t, x, z)$ и $\varphi(t, x, z)$ можно представить в виде

$$w(t, x) = \sum_n w_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\varphi_0(t, x, z) = \sum_n \varphi_{0n}(t, z) \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{15}$$

$$\varphi(t, x, z) = \sum_n \varphi_n(t, z) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Здесь функции $w_n(t)$ и $\varphi_n(t)$ являются неизвестными и подлежат определению. После подстановки решения в виде (15) уравнение (8) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \varphi_n = \frac{1}{c_0^2 + a_0^2} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} \tag{16}$$

Применяя к (16) интегральное преобразование Лапласа по времени [3] и учитывая условие (14), в области изображений получим

$$\frac{\partial^2 \overline{\varphi}_n}{\partial z^2} - \left(k^2 + \frac{s^2}{c_0^2 + a_0^2} \right) \overline{\varphi}_n = 0 \tag{17}$$

где $k^2 = n^2 \pi^2 / l^2$, s - параметр преобразования, черточкой обозначены преобразованные по Лапласу функции. Последнее условие в (14) в области изображений записывается в виде

$$\frac{\partial \overline{\varphi}_{0n}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{\varphi}_n}{\partial z} = -s \overline{w}_n \tag{18}$$

Решение уравнения (17), удовлетворяющее второму условию из (14) и условию (18), записывается следующим образом:

$$\varphi_n = \frac{e^{-\sqrt{k^2+\frac{s^2}{c_0^2+a_0^2}}\,z}}{\sqrt{k^2+\frac{s^2}{c_0^2+a_0^2}}}\left(\frac{\partial\overline{\varphi}_{0n}}{\partial z}+s\overline{w}_n\right) \tag{19}$$

При переходе к оригиналам с помощью теоремы о свертке функций [3] искомая величина P, согласно (13), получается в виде

$$P = -\frac{c_0\rho_0}{\sqrt{1+a_1^2}}\sum_n\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\partial\varphi_{0n}}{\partial z}J_0\left[k_1\left(t-\tau_1\right)\right]d\tau_1 + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\partial w_n}{\partial t}J_0\left[k_1\left(t-\tau_1\right)\right]d\tau_1\right\}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{20}$$

где $k_1^2 = k^2\left(c_0^2+a_0^2\right)$, J_0 - функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Для нахождения величины $T_{=}$, входящей в правую часть уравнения движения пластики-полосы, надо найти компоненту b_y индуцированного в газе магнитного поля в направлении оси oy. Определяя b_y по формуле (12) с учетом (20), окончательно для поверхностной нагрузки Z получим

$$Z = \sum_n\left\{P_{0n} - c_0\rho_0\sqrt{1+a_1^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\partial\varphi_{0n}}{\partial t}J_0\left[k_1\left(t-\tau_1\right)\right]d\tau_1 + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\partial w_n}{\partial t}J_0\left[k_1\left(t-\tau_1\right)\right]d\tau_1\right]\right\}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{21}$$

Здесь использовано представление давления P_0 в виде

$$P_0 = \sum_n P_{0n}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

Перейдем к решению уравнения (2). Подстановка (15) и (21) в уравнение (2) приводит к следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\left(D_{11}-\frac{K_{11}^2}{C_{11}}\right)\frac{n^4\pi^4}{l^4}w_n + m_0\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} = P_{0n} - c_0\rho_0\sqrt{1+a_1^2}\times$$
$$\times\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\partial\varphi_{0n}}{\partial z}J_0\left[k_1\left(t-\tau_1\right)\right]d\tau_1 + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\partial w_n}{\partial t}J_0\left[k_1\left(t-\tau_1\right)\right]d\tau_1\right\} \tag{22}$$

Если воспользоваться приближенными формулами для расчета возмущенного давления, которые являются обобщением формулы для давления, полученной на основании гипотезы плоского отражения в гидроупругости на случай магнитоупругости, то формула (21) упростится и примет вид

$$Z = \sum_n \left[P_{0n} - c_0 \rho_0 \sqrt{1 + a_1^2} \left(\frac{\partial \varphi_{0n}}{\partial z} + \frac{\partial w_n}{\partial t} \right) \right] \sin \frac{n \pi x}{l} \tag{23}$$

С использованием (23) уравнение (22) перейдет в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, решение которого запишется в виде [4]

$$w(t,x) = \left[1 + \frac{1}{(1 + a_1^2)} \right] \frac{4P^0}{\pi m_0} e^{-\beta t} \sum_n (-1)^{\left(\frac{n+1}{2} - 1\right)} \times$$

$$\times \frac{\gamma \sin \omega_n' t - \omega_n' \cos \omega_n' t + \omega_n' e^{-\gamma t}}{n \omega_n' \left(\omega_n'^2 + \gamma^2 \right)} \sin \frac{n \pi x}{l}$$

при $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$

$$w(t,x) = \left[1 + \frac{1}{(1 + a_1^2)} \right] \frac{4P^0}{\pi m_0} e^{-\beta t} \sum_n (-1)^{\left(\frac{n+1}{2} - 1\right)} \times$$

$$\times \frac{\omega_n'' \operatorname{ch} \omega_n'' t - \gamma \operatorname{sh} \omega_n'' t + \omega_n'' e^{-\gamma t}}{n \omega_n'' \left(\omega_n''^2 - \gamma^2 \right)} \sin \frac{n \pi x}{l} \tag{24}$$

при $\omega_0^2 - \beta^2 < 0$

Здесь $\beta = \left(\rho_0 c_0 \sqrt{1 + a_1^2} \right) / m_0$, $\gamma = \alpha c_0 / l - \beta$

$$\omega_0^2 = \left(D_{11} - \frac{K_{11}^2}{C_{11}} \right) \frac{n^4 \pi^4}{l^4 m_0}, \quad \omega_n' = \left(\omega_0^2 - \beta^2 \right)^{1/2}, \quad \omega_n'' = i \omega_n'$$

Далее ставится оптимизационная задача: определить такое распределение безразмерных толщин слоев пластинки, которому соответствует пластинка максимальной жесткости, то есть найти

$$\min_{h_s} \max_{t,x} w\left(t, x, \bar{h}_s\right)$$

при ограничениях $0 \le \bar{h}_s = h_s / h \le 1$, $0 \le x \le l$, $t \ge 0$.

Проведены численные исследования для трех случаев: 1) двухслойная полоса состоит из слоев композиционного материала типа боропластика и пластмассы; 2) полоса состоит из трех слоев, симметрично расположенных относительно срединной плоскости. Средний слой изготовлен из пластмассы, два наружных слоя - из композиционного материала, 3) средний слой изготовлен из композиционного материала, а два наружных слоя - из пластмассы. В качестве внешней среды выбран воздух ($\rho_0 = 1.225$ кг/м³, $c_0 = 334$ м/с).

Численные расчеты проведены при следующих значениях параметров $\lambda = h/l = 0.05$; $\alpha = 0.1$; $a_1 = 0$; 0.01; 0.05; 0.1; 0.5; 1.

Оптимальные значения прогибов w и соответствующие им величины безразмерных толщин слоев для различных значений параметра a_1 приведены в таблице.

Таблица

I вариант						
a_1	0	0.01	0.05	0.1	0.5	1
$\bar{h}_1$	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
$\bar{w}$	0.11860	0.11859	0.11844	0.11798	0.10604	0.0869

II вариант						
a_1	0	0.01	0.05	0.1	0.5	1
$\bar{h}_1$	1	1	1	1	1	1
$\bar{w}$	0.17538	0.17537	0.17515	0.17446	0.15658	0.12788

III вариант						
a_1	0	0.01	0.05	0.1	0.5	1
$\bar{h}_1$	1	1	1	1	1	1
$\bar{w}$	0.17538	0.17537	0.17515	0.17446	0.15658	0.12788

Здесь $\bar{h}_1 = h_1 / h$, $\bar{w} = w / h$, h_1 - толщина слоя из композиционного материала.

Из таблицы следует, что вариант несимметричной двухслойной пластики является наилучшим. Как показывают численные расчеты, прогибы w получаются минимальными в случае, когда толщина h_1 слоя из композиционного материала равна $0.7h$. Как показывают результаты численного анализа для случая рассмотренных конкретных материалов оптимальные проекты для второго и третьего вариантов организации пакета пластинки-полосы по толщине совпадают и вырождаются в однослойный, целиком изготовленный из композиционного материала.

При ограничении количества композиционного материала оптимальными могут быть варианты пластинок слоистой структуры.

Как видно из таблицы, прогибы пластинки-полосы уменьшаются с ростом параметра a_1, характеризующего магнитное поле, то есть магнитное поле уменьшает прогибы пластинки.

Этот эффект может быть использован практически для ослабления воздействия ударной волны на объекты, находящиеся в электропроводящей жидкости (газе) при наличии магнитного поля.

Расчеты проведены на основе точной модели (уравнение (22)) и приближенной (формулы (24)). Результаты, полученные для обоих случаев, практически совпадают.

Автор благодарит В. Ц. Гнуни за постановку задачи и консультации.

Литература

1. *Jeffrey A., Taniuti T.* Non-Linear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodinamics. New Jork, London, 1964.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания.- М.: Наука, 1967.
3. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа.- М.: Наука, 1965.
4. *Аветисян Дж. К.* Воздействие акустической волны давления на динамический изгиб бесконечной полосы.- Изв. АН Арм. ССР, Механика, Ереван, 1989, (деп. в ВИНИТИ, 16. 08. 89, № 5503-В89).

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
23. 09. 1993г.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 2, 1995 Механика

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ АНИЗОТРОПНОЙ СЛОИСТОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ УДАРЕ

МОВСИСЯН Л.А.

Մովսիսյան Լ.Ա.

Հարվածի դեպքում անիզոտրոպ շերտավոր սալի կայունության մասին

Միջին հաստության նկատմամբ սիմետրիկ և անտիսիմետրիկ դասավորված անիզոտրոպ շերտավոր սալի համար դիտարկվում է կայունության խնդիր երկայնական հարվածի դեպքում: Գտնվում է սալը գլանային ձևով կայունությունը կորցնելու կրիտիկական ժամանակը:

Movsisian L.A.

About Stability of Anisotropic Laminates Plate for Impact

Исследуется устойчивость анизотропной слоистой пластинки при продольном ударе. Рассмотрены два случая: когда слои (ортотропные) симметрично и антисимметрично перевернуты относительно координатной линии пластинки. Определено критическое время потери устойчивости по цилиндрической форме.

1. Пластинка бесконечно длинная в одном направлении и удар бесконечной массой производится по этой стороне (или сторона движется в сторону другой с постоянной скоростью [1]).

Сначала рассмотрим случай антисимметричного расположения слоев [2].

Невозмущенное состояние определяется из уравнения

$$C_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=2nh\rho\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

где $2n$ - количество слоев и условий

$$u_0=0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad u_0=-ct \quad \text{при} \quad x=l$$

$$u_0=\frac{\partial u_0}{\partial t}=0 \quad \text{при} \quad t=0 \tag{1.2}$$

По сути невозмущенное состояние не отличается от однородной пластинки [1].

Картина напряженного состояния такова. Из ударяемого конца распространяется упругая волна со скоростью $a_1=\left(C_{11}/2nh\rho\right)^{1/2}$ и за фронтом волны в продольном направлении имеется сжатие $-T_1^0=-C_{11}c/a_1$, а в перпендикулярном направлении: $T_2^0 = -C_{12}c / a_1$. При каждом отражении от краев усилия по ступенчатому закону возрастают.

Нам нужны будут выражения T_1^0 и T_2^0 в виде рядов

$$T_1^0 = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(t) \cos\lambda_m x, \quad T_2^0 = \sum_{m=0}^{\infty} d_m(t) \cos\lambda_m x,$$
$$\lambda_m = \frac{m\pi}{l}, \quad c_0 = -C_{11}\frac{ct}{l}, \quad c_m = C_{11}\frac{2c}{m\pi a_1}(-1)^{m+1}\sin\lambda_m a_1 t \tag{1.3}$$

Уравнения устойчивости пластинки будут иметь вид [2].

$$C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{66})\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 3K_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - K_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0$$
$$(C_{12} + C_{66})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 3K_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - K_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$$
$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - 3K_{16}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \tag{1.4}$$
$$-K_{26}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - K_{16}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - 3K_{26}\frac{\partial^3 v}{\partial x\, \partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T_1^0 \frac{\partial w}{\partial x}\right) - T_2^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

В предположении, что края пластинки шарнирно оперты, решение (1.4) будем искать

$$u = \cos\mu y \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \sin\lambda_m x$$
$$v = \sin\mu y \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \cos\lambda_m x \tag{1.5}$$
$$w = \sin\mu y \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin\lambda_m x$$

где μ - волновое число по y. Тогда для определения критического времени потери и устойчивости получим систему [1].

$$2L_m f_m + \left[(2c_0 + c_{2m})\lambda_m^2 + (2d_0 - d_{2m})\mu^2\right] f_m +$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1}\left[\lambda_m\lambda_k(c_{m-k} + c_{m+k}) + \mu^2(d_{m-k} - d_{m+k})\right] f_k +$$
$$+\sum_{k=m+1}^{\infty}\left[\lambda_m\lambda_k(c_{k-m} + c_{m+k}) + \mu^2(d_{k-m} - d_{m+k})\right] f_k = 0$$

$$
\begin{aligned}
&L_m = D_{11}\lambda_m^4 + 2(D_{12}+D_{66})\lambda_m^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 - X_1 / X_2 \\
&X_1 = C_{11}K_{16}^2\lambda_m^8 + \left[2(2C_{66}-3C_{12})K_{16}^2 + 6C_{11}K_{16}K_{26}\right]\lambda_m^6\mu^2 + \\
&+\left[9C_{22}K_{16}^2 - 4(2C_{66}+5C_{12})K_{16}K_{26} + 9C_{11}K_{26}^2\right]\lambda_m^4\mu^4 + \\
&+\left[6C_{22}K_{16}K_{26} + 2(2C_{66}-3C_{12})K_{26}^2\right]\lambda_m^2\mu^6 + C_{22}K_{26}^2\mu^8 \\
&X_2 = C_{11}C_{66}\lambda_m^4 + (C_{11}C_{22} - C_{12}^2 - 2C_{12}C_{66})\lambda_m^2\mu^2 + C_{22}C_{66}\mu^4
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Можно показать, что критическое время, определяемое из (1.6) (минимальное собственное значение матрицы системы), будет минимальным, если изгиб происходит цилиндрическим образом (v и w зависят только от x). Поэтому (1.4) - (1.6) можно было и не привести. Однако, следует отметить, что по виду такое решение верно и для конечной пластинки. Когда края $y=0$, $y=b$ свободны от нормальных усилий ($T_2^0=0$), то вместо μ следует брать $\mu_n = n\pi / b$. Можно расположить слои таким образом, чтобы исчезли K_{16} (в [3], максимальная статическая критическая сила достигается именно тогда). В данном случае критическое время максимальным (по φ - угол поворота главного направления упругости относительно координатной оси) будет при $A_{11} > A_3$ (обозначения см. в [3]) , если $\varphi = \pi / 4$, а при $A_{11} < A_3$, когда $\varphi = 0$.

При цилиндрической форме потери устойчивости (подчеркнутые члены в (1.4)) вместо (1.6) будем иметь

$$
\begin{aligned}
&2\left[\overline{D}_{11}\lambda_m^2 + \left(c_0 - \frac{c_{2m}}{2}\right)\right]\lambda_m f_m + \sum_{k=1}^{m-1}\lambda_k\left(c_{m-n} + c_{m+n}\right)f_k + \\
&+\sum_{k=m+1}^{\infty}\lambda_k\left(c_{k-m} + c_{m+k}\right)f_k = 0 \qquad \overline{D}_{11} = D_{11} - K_{16}^2 / C_{66}
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

2. При симметричном расположении слоев уравнениями невозмущенного состояния будут

$$
\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \alpha_1\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = \frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \alpha_2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}
\tag{2.1}
$$

Здесь $a_2 = (C_{66} / 2nh\rho)^{1/2}$ - скорость волны сдвига, $\alpha_1 = C_{16} / C_{11}$, $\alpha_2 = C_{16} / C_{66}$

Имеются следующие условия:

$$
u_0 = v_0 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0
\tag{2.2}
$$

$$
u_0 - ct,\; v_0 = 0 \quad \text{при} \quad x = l
$$

$$u_0=\frac{\partial u_0}{\partial t}=v_0=\frac{\partial v_0}{\partial t}=0 \qquad \text{при} \qquad t=0 \tag{2.3}$$

В данном случае помимо T_1^0, T_2^0 появляется также сдвигающее усилие S^0. Как и в предыдущем пункте, нам нужны будут выражения усилий в виде рядов, но для наглядности картины напряженно-деформированного состояния удобнее сначала изучить задачу операционным методом.

Подвергая (2.1), (2.3) преобразованию по t и удовлетворяя условиям (2.2) для усилий в изображениях получим

$$\overline{T}_1^0=A_1Z_1+B_1Z_2, \qquad \overline{S}^0=A_2Z_1+B_2Z_2$$

$$A_1=-c\frac{C_{11}b_1}{a_1^2}\overline{A}_1, \qquad B_1=-c\frac{C_{11}b_2}{a_1^2}\overline{B}_1 \tag{2.4}$$

$$A_2=-c\frac{C_{66}}{a_1^2\alpha_1 b_1}-\left[b_1^2-a_1^2\left(1-\alpha_1\alpha_2\right)\right]\overline{A}_1$$

$$B_2=-c\frac{C_{66}}{a_1^2 b_2\alpha_1}\left[b_2^2-a_1^2\left(1-\alpha_1\alpha_2\right)\right]\overline{B}_1$$

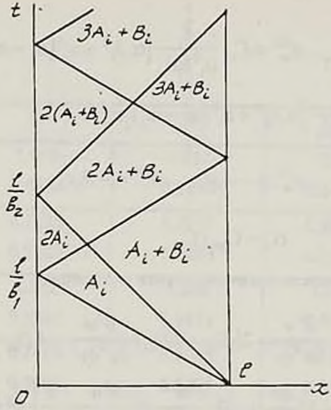
$$\overline{A}_1=\frac{a_1^2-b_2^2}{b_1^2-b_2^2}, \qquad \overline{B}_1=\frac{b_1^2-a_1^2}{b_1^2-b_2^2}$$

$$Z_i=\left(e^{-\frac{px}{b_i}}+e^{\frac{px}{b_i}}\right)\Big/\left(e^{\frac{pl}{b_i}}-e^{-\frac{pl}{b_i}}\right) \tag{2.5}$$

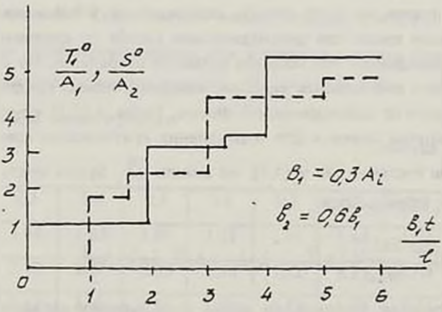
$$b_{1,2}^2=\frac{a_1^2+a_2^2}{2}\pm\left[\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{2}\right)^2-a_1^2a_2^2\left(1-\alpha_1\alpha_2\right)\right]^{1/2}$$

Выражение для T_2^0 получится аналогичным образом $T_2^0=C_{12}\frac{\partial u_0}{\partial x}+C_{22}\frac{\partial v_0}{\partial x}$.

Нетрудно по (2.4), (2.5) записать выражение для усилий, однако, для краткости записи наглядности, целесообразнее представить их в виде графиков. На фиг.1 представлена картина усилий T_1^0 и S^0 для различных моментов времени по длине пластинки. От ударяемого конца распространяются две волны со скоростями b_1 $\left(b_1>a_1\right)$ и b_2 $\left(b_2<a_2\right)$ и при каждом отражении от концов на две "единицы" $\left(A_i, B_i\right)$ увеличиваются. На фиг. 2 показана типичная картина усилий для ударяемого (сплошная линия) и для закрепленного (пунктирная линия) концов.



фиг. 1



фиг. 2

Приведенное решение в форме рядов выглядит следующим образом:

$$T_1^0 = \sum_{m=0}^{\infty} \left[a_m^{(1)} \sin b_1 \lambda_m t + b_m^{(1)} \sin b_2 \lambda_m t \right] \cos \lambda_m x$$

$$S^0 = \sum_{m=0}^{\infty} \left[a_m^{(3)} \sin b_1 \lambda_m t + b_m^{(3)} \sin b_2 \lambda_m t \right] \cos \lambda_m x$$

$$a_0^{(1)} = -C_{11} \frac{ct}{l}, \quad a_m^{(1)} = -A_1 c_m', \quad b_m^{(1)} = -B_1 c_m'$$

$$a_0^{(2)} = -C_{12}\frac{ct}{l}, \quad a_m^{(2)} = C_{12}\frac{\overline{A}_1}{a_1^{\,2}b_1\alpha_1}\left[\alpha_3 b_1^{\,2} + a_1^{\,2}(\alpha_1 - \alpha_3)\right]c'_m$$

$$b_m^{(2)} = C_{12}\frac{\overline{B}_1}{a_1^{\,2}b_2\alpha_1}\left[\alpha_3 b_2^{\,2} + a_1^{\,2}(\alpha_1 - \alpha_3)\right]c'_m \tag{2.6}$$

$$a_0^{(3)} = -C_{16}\frac{ct}{l}, \quad a_m^{(3)} = -A_2 c'_m, \quad b_m^{(3)} = -B_2 c'_m$$

$$c'_m = \frac{2c}{m\pi}(-1)^{m+1}, \quad \alpha_3 = C_{26}/C_{12}$$

Уравнение устойчивости в данном случае следующее:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} +$$
$$+ D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T_1^0\frac{\partial w}{\partial x}\right) - T_2^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - S^0\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(S^0\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \tag{2.7}$$

Возможна ли потеря устойчивости такой пластинки не только по цилиндрической форме, но и по форме, зависящей от y? И минимальное ли будет критическое время при цилиндрическом изгибе по сравнению с другими (если она возможны)? Эти вопросы остаются открытыми. Но судя по предыдущей задаче и аналогичным задачам, наверное, можно предполагать, что будет происходить по цилиндрической форме. Тогда, в (2.7) нужно оставлять только подчеркнутые члены и для определения критического времени будем иметь такую же систему, как и (1.7), но вместо $\overline{D}_{11}$ будем иметь D_{11}, а коэффициенты c_m определятся

$$c_m = (-1)^{m+1}\frac{2cC_{11}}{m\pi a_1^{\,2}}\left[b_1\overline{A}_1 \sin\lambda_m b_1 t + b_2\overline{B}_1 \sin\lambda_m b_2 t\right] \tag{2.8}$$

Как уже отметили, критическое время определяется согласно критерию [1].

3. Для иллюстрации вышеприведенных решений рассмотрим числовой пример. В качестве его взята четырехслойная пластинка, материал которой ортотропный и характеризуется данными:

Случай I $\quad A_{11} = A_{22}, \quad A_{66} = 0.6A_{11}, \quad A_{12} = 0.2A_{11}$

Случай II $\quad A_{11} = A_{22}, \quad A_{66} = 0.3A_{11}, \quad A_{12} = 0.2A_{11}$

В табл. 1 помещены значения скоростей распространения волн, когда главное направление упругости одного слоя совпадает с координатной $(\varphi^{(1)} = 0)$, а второй слой $(\varphi^{(2)})$ перевернут на указанный угол.

В каждой клетке в первых строках приведены значения для первого случая, а во вторых- второго.

Таблица 1

$\varphi^{(2)}$	0°	15°	30°	45°
a_1	1	1.018 0.9937	1.037 0.9810	1.049 0.9746
a_2	0.7700 0.5477	0.7583 0.5590	0.7217 0.5809	0.7071 0.5916
b_1	1 1	1.022 0.9951	1.048 0.9829	1.049 0.9746
b_2	0.7700 0.5477	0.7469 0.5560	0.7089 0.5777	0.7071 0.5916

В качестве единицы скорости взят случай $\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0$.

В табл. 2 приведены значения безразмерной скорости удара $\lambda = (c/a)/ /(4h^2\pi^2/3l^2)$ при первом прохождении волны, при которой возможна потеря устойчивости для данного момента времени ($\tau_{кр} = at/l$, $a = a_1$ при $\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0$ для материала первого случая.

Таблица 2

$\tau_{кр}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
I	4.00	2.16	1.98	1.89	1.88	1.82	1.65	1.44	1.22
II	4.11	2.48	2.12	2.07	2.05	2.04	1.62	1.31	1.08
III	4.20	2.51	2.13	2.05	1.93	1.84	1.73	1.49	1.24
IV	4.15	2.49	2.07	2.04	2.02	1.93	1.73	1.49	1.24

Строки таблицы расположены в следующем порядке:

I - случай $\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0$ ($\tau_{кр} = 1$ будет при $\lambda = 1$)

II - случай $\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 45^0$ ($\tau_{кр} = 0.912$ - при $\lambda = 0.91$)

III - антисимметричный случай ($\varphi^{(1)} = 0$, $\varphi^{(2)} = 30^0$, $\tau_{кр} = 0.96$, $\lambda = 1.08$)

IV - антисимметричный случай ($\varphi^{(1)} = 0$, $\varphi^{(2)} = 30^0$, $\tau_{кр} = 0.95$, $\lambda = 1.06$)

В скобках указаны значения λ и $\tau_{\text{кр}}$, при которых пластинка теряет устойчивость по всей длине.

Как видно из таблиц, расположением слоев можно менять как скорость распространения волн, так и время потери устойчивости и поэтому можно решать вопрос о рациональном использовании возможностей материала пластинки.

4. Так как анизотропная слоистая балка по напряженно-деформируемому состоянию отличается от одномерной пластинки, то имеет смысл о ней сказать в отдельности.

Во-первых, хотя по виду уравнение устойчивости будет таким же, как и для пластинки, но значения приведенных коэффициентов жесткости будут другими, в частности,

$$C_{11}^{(0)} = 2hb\sum_{k=1}^{n} A_{11}^{0(k)}, \qquad D_{11}^{(0)} = \frac{2h^3 b}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[k^3-(k-1)^3\right]A_{11}^{0(k)} \tag{3.1}$$

(для конкретности взято прямоугольное сечение и b - толщина балки). Здесь уже $A_{11}^{(0)} = 1/a_{11}$ в отличие от A_{11} (см. например, стр. 243 [4]). В то же время, если такая балка теряет устойчивость уже в плоскости xy (оставим на стороне вопрос правомерности гипотезы прямых нормалей), то для изгибной жесткости уже будем иметь $D'_{11} = \dfrac{hb^3}{6}\sum\limits_{k=1}^{n} A_{11}^{'(k)}$, где $A'_{11} = a_{66}/\left(a_{11}a_{66} - a_{16}^{\,2}\right)$. Так, например, при статической потере устойчивости какая из критических сил будет больше $P_{\text{кр}}^{(1)} = D_{11}^{(0)}\lambda_1^{\,2}$ или $P_{\text{кр}}^{(2)} = D_{11}^{(1)}\lambda_1^{\,2}$ зависит не только от геометрических размеров, но и из упругих коэффициентов и расположением слоев.

Подобный же факт имеет место и при ударе. Более того, так как здесь изменением расположения слоев можно менять как скорость распространения (то есть участок, где балка сжата), так и величину сжимающей силы и жесткость изгиба, то появляется широкая возможность варьированием параметров добиться максимального момента времени потери устойчивости при заданной скорости удара или максимальной скорости при заданном времени. К примеру, при одной и той же скорости распространения волны ($a_1^0 = \sqrt{C_{11}^0/2\rho nh}$) для потери устойчивости при $t = l/2a_1^0$ в первом приближении для относительной скорости c/a_1^0 получается

$$\frac{c}{a_1^0} = \frac{2h^3}{3}\lambda_1^{\,2}\,\frac{Q}{B_{11}^{(\min)} + B_{11}^{(\max)}} \tag{3.2}$$

Величина Q (для $h=2$) в одном случае будет $B_{11}^{(\min)} + 7B_{11}^{(\max)}$ а в другом - $B_{11}^{(\max)} + 7B_{11}^{(\min)}$.

Литература

1. *Мовсисян Л.А.* Устойчивость балки при быстрых нагружениях.- Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1971, т.24, №1, с.38-50.
2. *Мовсисян Л.А.* Некоторые задачи вязкоупругих анизотропных слоистых пластин и оболочек.- Изв. АН Арм ССР, Механика, 1989, т.42, №3, с.37-44.
3. *Мовсисян Л.А.* К устойчивости упругой и вязкоупругой анизотропной многослойной пластинки.- Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1990, т.43, №4, с.3-12.
4. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки.- М.: ГИТТЛ, 1957. 463 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
10.08.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 2, 1995 Механика

КУСОЧНО-ОДНОРОДНАЯ ПЛАСТИНА С ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫМИ СТРИНГЕРАМИ

Агаян К. Л., Григорян Э. Х.

Աղայան Կ. Լ. Գրիգորյան Է. Խ.

Կտոր առ կտոր համասեռ սալը կամայական ուղղվածության վերադիրներով:

Ֆակտորիզացիայի և օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդով լուծված է երկու կամայական ուղղվածության վերջավոր վերադիրներից կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ սալին ուժի փոխանցման կոնտակտային խնդիրը:

Agayan K. L. Grigorian E. Ch.

Stepwise-homogeneous Plate with Arbitrary Oriented Stringers.

Методом факторизации и ортогональных многочленов решена контактная задача о передаче нагрузки от двух произвольно ориентированных конечных стрингеров к кусочно-однородной бесконечной пластине.

В работе рассматривается контактная задача о передаче нагрузки от двух произвольно ориентированных стрингеров к упругой кусочно-однородной бесконечной пластине. Наиболее полная библиография контактных задач о передаче нагрузки от упругих стрингеров к массивным телам можно найти в работах [1-4]. Контактные задачи, примыкающие к исследуемой здесь задаче, рассмотрены в работах [5-10].

Рассмотрим кусочно-однородную бесконечную пластину, приведенную к декартовой системе координат $0xy$, состоящую из двух упругих полубесконечных пластин с упругими характеристиками μ_1, ν_1 $(y>0)$ и μ_2, ν_2 $(y<0)$. Пластина усилена двумя упругими конечными стрингерами, расположенными на различных полуплоскостях и наклонены под углами φ_1 и φ_2 к линии разнородности $(y=0)$. Конец первого стрингера выходит на линию разнородности. По одним концам стрингера загружены сосредоточенными растягивающими силами P_1 и P_2 (рис. 1). Относительно стрингеров принимается модель одноосного напряженного состояния в сочетании с моделью контакта по линии [1]. Неизвестными считаются контактные касательные напряжения $\tau_1(r)$ и $\tau_2(r)$, возникающие в зоне контакта стрингеров с пластиной, удовлетворяющие следующим условиям равновесия:

$$\int_0^{a}\tau_1(r)\,dr = P_1, \qquad \int_{-c}^{-b}\tau_2(r)\,dr = P_2 \tag{1}$$

где $a_1 = a\cos\varphi_1$, $b_1 = b\cos\varphi_2$, $c_1 = c\cos\varphi_2$.

Для осевых деформаций по линиям расположения стрингеров имеем:

$$l_1 h\frac{du_r^{(1)}}{dr} = \frac{1}{\pi}\int_0^{a} K_{11}(r,t)\tau_1(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{-b} K_{12}(r,t)\tau_2(t)\,dt \qquad (0<r<\infty) \tag{2}$$

$$l_2 h\frac{du_r^{(2)}}{dr} = \frac{1}{\pi}\int_0^{a} K_{21}(r,t)\tau_1(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{-b} K_{22}(r,t)\tau_2(t)\,dt \qquad (-\infty<r<0) \tag{3}$$

где h-толщина пластины, $l_i = 8\mu_i/(3-\nu_i)$ $(i=1,2)$

$$\begin{aligned}
&K_{11}(r,t) \equiv K_{11}(r,t,\varphi_1,A_j) = \\
&= \frac{1}{t-r} + A_1\frac{r-t\cos 2\varphi_1}{\Delta(r,t,2\varphi_1)} - A_2\sin^2 2\varphi_1\frac{t(r^2-t^2)}{\Delta^2(r,t,2\varphi_1)} - \\
&-A_3\sin^2\varphi_1\left[\frac{t^2(r-t\cos 2\varphi_1)+3rt(t-r\cos 2\varphi_1)}{\Delta^2(r,t,2\varphi_1)} + \right.\\
&\left.+4rt\frac{(r-t\cos 2\varphi_1)\left[t(r-t\cos 2\varphi_1)+r(t-r\cos 2\varphi_1)\right]}{\Delta^3(r,t,2\varphi_1)}\right]
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&K_{12}(r,t) \equiv K_{12}(r,t,\varphi_1,\varphi_2,A_j) = \\
&= \frac{1}{\Delta(r,t,\varphi_-)}\left[-A_4\cos\varphi_-(r-t\cos\varphi_-) - A_5 t\sin^2\varphi_- - \right.\\
&\left.-A_6 t\sin^2\varphi_2 - A_7 t\sin^2\varphi_1 + 2A_7 r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right] - \\
&-\frac{2(r-t\cos\varphi_-)(r\sin\varphi_2 - t\sin\varphi_1)(A_7 r\sin\varphi_1 - A_6 t\sin\varphi_2)}{\Delta^2(r,t,\varphi_-)}
\end{aligned} \tag{5}$$

$$K_{21}(r,t) = K_{12}(r,t,\varphi_2,\varphi_1,B_j)$$

$$K_{22}(r,t) = K_{11}(r,t,\varphi_2,B_j)$$

$$\Delta(r,t,\alpha) = r^2 + t^2 - 2rt\cos\alpha, \qquad \varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$A_1(k,\nu_1,\nu_2)=\frac{k\left[k(3-\nu_1)(1+\nu_2)+2(1-\nu_1)(1-\nu_2)\right](3-\nu_1)}{(3-\nu_1)\left[k(3-\nu_1)+1+\nu_1\right]\left[3-\nu_2+k(1+\nu_2)\right]}-$$

$$-\frac{\left[8-(1+\nu_1)(3-\nu_1)\right](3-\nu_2)}{(3-\nu_1)\left[k(3-\nu_1)+1+\nu_1\right]\left[3-\nu_2+k(1+\nu_2)\right]}$$

$$A_2(k,\nu_1)=\frac{(k-1)(1+\nu_1)}{k(3-\nu_1)+1+\nu_1},\qquad A_3(k,\nu_1)=\frac{2(k-1)(1+\nu_1)^2}{(3-\nu_1)\left[k(3-\nu_1)+1+\nu_1\right]}$$

$$A_4(k,\nu_1,\nu_2)=\frac{8\left[k(3-\nu_1)+3-\nu_2\right]}{(3-\nu_2)\left[k(3-\nu_1)+1+\nu_2\right]\left[k(3-\nu_2)+1+\nu_2\right]}$$

$$A_5(k,\nu_1,\nu_2)=\frac{4\left[k(3-\nu_1)(1-\nu_2)-(3-\nu_2)(1-\nu_2)\right]}{(3-\nu_2)\left[k(3-\nu_1)+1+\nu_1\right]\left[k(3-\nu_2)+1+\nu_2\right]}$$

$$A_6(k,\nu_1,\nu_2)=\frac{4(1+\nu_2)}{(3-\nu_1)\left[k(1+\nu_2)+3-\nu_2\right]}$$

$$A_7(k,\nu_1)=\frac{4(1+\nu_1)}{(3-\nu_1)\left[k(3-\nu_1)+1+\nu_1\right]}$$

$$B_j(k,\nu_1,\nu_2)=A_j\left(\frac{1}{k},\nu_2,\nu_1\right)\qquad j=1,4,5,6.$$

$$B_j(k,\nu_1)=A_j\left(\frac{1}{k},\nu_2\right)\qquad j=2,3,7;\qquad k=\mu_2/\mu_1$$

μ_1,μ_2- модули сдвига, а ν_1, ν_2 - коэффициенты Пуассона материалов полубесконечных пластин.

Используя (2) и (3) и реализуя условия совместимости деформации стрингеров и пластины, после некоторых выкладок приходим к следующей системе сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных контактных напряжений $\tau_i(r)$ $(i=1,2)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}K_{11}(r,t)\tau_1^-(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{12}^-(r,t)\tau_2^+(t)\,dt=$$
$$=\lambda_1\vartheta(1-r)\int_0^{\infty}\vartheta(r-t)\tau_1^-(t)\,dt+g^+(r),\qquad (0<r<\infty)\tag{6}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\bar{1}} K_{21}^{\bullet}(r,t)\tau_1^-(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K_{22}^{\bullet}(r,t)\tau_2^{\bullet}(t)\,dt = \tag{7}$$
$$=\lambda_2\int_{-1}^{1}\vartheta(r-t)\tau_2^{\bullet}(t)\,dt, \quad (-1<r<1)$$

здесь $\vartheta(x)$ - функция Хевисайда,

$$\tau_1^-(r)=\vartheta(1-r)\tau_1(ar), \quad \lambda_1 = ahl_1 / E_s^{(1)}F_s$$

$$\tau_2^{\bullet}(r)=\tau_2(\alpha r+\beta), \quad \lambda_2 = \alpha\gamma hl_2 / E_s^{(2)}F_s$$

$$g^+(r)=\frac{1}{\pi}\vartheta(r-1)\int_0^{\bar{1}} K_{11}(r,t)\tau_1^-(t)\,dt$$

$$K_{12}^-(r,t)=\vartheta(1-r)K_{12}(r,\rho)\gamma, \quad \rho=\gamma t+\gamma_1$$

$$K_{21}^{\bullet}(r,t)=K_{12}(\bar{r},t), \quad \bar{r}=\gamma r+\gamma_1$$

$$K_{22}^{\bullet}(r,t)=K_{11}(\xi,\eta), \quad \xi=r+\gamma_0; \quad \eta=t+\gamma_0$$

$$\gamma=\frac{\alpha}{a}, \quad \gamma_1=\frac{\beta}{a}, \quad \gamma_0=\frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha=\frac{c-b}{2}, \quad \beta=-\frac{c+b}{2}$$

$E_s^{(1)}$, $E_s^{(2)}$ - модули упругости стрингеров, F_s - площадь поперечного сечения стрингеров.

Функции $K_{11}(r,t)$ и $K_{12}(r,t)$ даются формулами (4) и (5). Из (4) видно, что ядро $K_{11}(r,t)$ помимо особенности типа Коши имеет также неподвижную особенность в точке $r=t=0$.

Таким образом, решение поставленной выше задачи сводится к решению сингулярных интегральных уравнений (6) и (7) с неподвижной особенностью в точке нуль.

Отметим, что решения уравнения (6), (7) должны удовлетворять еще условиям равновесия (1).

Переходим к построению решения системы уравнений (6) и (7). В (6), считая $\tau_2^{\bullet}(r)$ известной и следуя методике, изложенной в [9], сделаем в нем замену переменных $t=e^u$, $r=e^x$ и применяя к нему интегральное преобразование Фурье, после некоторых довольно громоздких выкладок получим

$$\bar{K}(\alpha)\overline{\tau_1^-}(\alpha)+\frac{\lambda_1}{\alpha}\bar{\tau}_1^-(\alpha-i)=\bar{f}^-(\alpha)+\bar{g}^+(\alpha) \qquad \left(-1<\operatorname{Im}\alpha<-n_0\right) \tag{8}$$

где

$$\overline{K}(\alpha)=\frac{1}{\operatorname{sh}\pi\alpha}\left[\operatorname{ch}\pi\alpha+A_1\operatorname{ch}(\alpha+i)\psi-\right.$$

$$\left.-A_2(\alpha+i)\sin 2\varphi_1\operatorname{sh}(\alpha+i)\psi+A_3(\alpha+i)^2\sin^2\varphi_1\operatorname{ch}(\alpha+i)\psi\right]$$

$$n_0=i\alpha_1,\quad \overline{K}(\alpha_1)=0,\quad \psi=\pi-2\varphi_1$$

$$\overline{f}^-(\alpha)=\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\overline{K}_{12}^-(\alpha,\rho)\tau_2^*(\rho)d\rho$$

$$\overline{K}_{12}^-(\alpha,\rho)=\gamma\int_0^1 K_{12}(r,\rho)r^{i\alpha-1}\,dr=$$

$$=\gamma\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{\Gamma(i\alpha)}{\Gamma(1+m+i\alpha)}\left.\frac{\partial^m K_{12}(r,\rho)}{\partial r^m}\right|_{r=m}- \tag{9}$$

$$-(-1)^n\frac{\gamma\Gamma(i\alpha)}{\Gamma(1+n+i\alpha)}\int_0^1\frac{\partial^{n+1}}{\partial r^{n+1}}K_{12}(r,\rho)r^{n+i\alpha}\,dr,\quad (\operatorname{Im}\alpha<0)$$

$\Gamma(x)$ - известная гамма-функция, $\overline{\tau}_1^-(\alpha)$ и $\overline{g}^+(\alpha)$ являются трансформантами Фурье функции $\tau_1^-(\alpha)$ и $g^+(\alpha)$ соответственно.

Функциональное уравнение (8) решается методом факторизации. Оно представляется в виде

$$\overline{\tau}_1^-(\alpha)=\frac{a_0}{\overline{K}^-(\alpha)}-\lambda_1\frac{\overline{H}^-(\alpha)}{\overline{K}^-(\alpha)}+\frac{\overline{F}^-(\alpha)}{\overline{K}^-(\alpha)}-\frac{\lambda_1 P_1 a^{-1}-f_0}{\alpha\overline{K}^-(0)},\quad \left(-1<\operatorname{Im}\alpha<-n_0\right) \tag{10}$$

где a_0 - неизвестная постоянная, которое определяется из первого уравнения из (1).

$$\overline{K}(\alpha)=\overline{K}^+(\alpha)\overline{K}^-(\alpha),\quad \left(-1<\operatorname{Im}\alpha<-n_0\right)$$

$$\overline{K}^+(\alpha)=\frac{\overline{M}^+(\alpha)}{\overline{L}^+(\alpha)},\quad \overline{K}^-(\alpha)=\frac{\overline{M}^-(\alpha)}{\overline{L}^-(\alpha)}$$

$$\overline{M}^+(\alpha)=\frac{\Gamma(1/2-i\alpha)}{\Gamma(1-i\alpha)},\quad \overline{M}^-(\alpha)=\frac{\alpha}{2}\frac{\Gamma(1/2+i\alpha)}{\Gamma(1+i\alpha)}$$

$$\overline{L}^\pm(\alpha)=\exp\left[\mp\overline{R}^\pm(\alpha)\right]$$

$$\overline{R}(\alpha)=\overline{R}^+(\alpha)\overline{R}^-(\alpha)=\ln G(\alpha)$$

$$\overline{R}^{+}(\alpha)=\int_{0}^{\infty}R(u)e^{i\alpha u}\,du,\qquad \overline{R}^{-}(\alpha)=\int_{-\infty}^{0}R(u)e^{i\alpha u}\,du$$

$$G(\alpha)=\frac{1}{\operatorname{ch}\pi\alpha-1}\left[\operatorname{ch}\pi\alpha-A_1\operatorname{ch}(\alpha+i)\psi-\right.$$
$$\left.-A_2(\alpha+i)\sin 2\varphi_1\operatorname{sh}(\alpha+i)\psi+A_3(\alpha+i)^2\sin^2\varphi_1\operatorname{ch}(\alpha+i)\psi\right]$$

$$\overline{F}(\alpha)=\overline{F}^{+}(\alpha)+\overline{F}^{-}(\alpha),\qquad \overline{H}(\alpha)=\overline{H}^{+}(\alpha)+\overline{H}^{-}(\alpha)$$

$$\overline{F}(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\alpha\bar{f}^{-}(\alpha)}{\overline{K}^{+}(\alpha)}-\frac{f_0}{\overline{K}^{+}(0)}\right]$$

$$\overline{H}(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\overline{\tau}_1^{-}(\alpha-i)}{\overline{K}^{+}(\alpha)}-\frac{\overline{\tau}^{-}(-i)}{\overline{K}^{+}(0)}\right] \tag{11}$$

$$f_0=\operatorname*{Res}_{\alpha=0}\left[\alpha\bar{f}^{-}(\alpha)\right],\qquad \overline{\tau}_1^{-}(-i)=P_1/a$$

далее поступим так, как в работах [9, 10]. Функции $\overline{\tau}^{-}(\alpha)$, $\overline{H}^{-}(\alpha)$, $\overline{K}^{-}(\alpha)$ и $\overline{F}^{-}(\alpha)$ регулярны при $\operatorname{Im}\alpha<-n_0$. Аналитическое продолжение функции $\overline{F}^{-}(\alpha)$, как следует из (9), имеет простые полюса в точках $\alpha=in$ $(n=1,2,\ldots)$, а функции $\overline{\tau}_1^{-}(\alpha)$ - в точках $\alpha=\alpha_1+in$, $\alpha=\alpha_k+in$, $\alpha=-\overline{\alpha}_k+in$ $(n=0,1,2,\ldots;\ k=2,3,\ldots)$, где $\alpha_1=-in_0$ и α_k $(k=2,3,\ldots)$, корни уравнения $\overline{K}(\alpha)=0$, расположенные в порядке

$$0<\operatorname{Im}\alpha_k<\operatorname{Im}\alpha_{k+1},\qquad \operatorname{Re}\alpha_k>0\qquad (k=2,3,\ldots)$$

Функция $\overline{H}^{-}(\alpha)$ имеет те же полюса, что и $\overline{\tau}_1^{-}(\alpha)$, кроме точек $\alpha=\alpha_1$, $\alpha=\alpha_k$ и $\alpha=-\overline{\alpha}_k$. Эти результаты вытекают из обсуждения функционального уравнения (10) и из выражения (11).

Введем обозначения

$$m^{-\varepsilon}X_m=\operatorname*{Res}_{\alpha=\alpha_m}\overline{\tau}_1^{-}(\alpha),\qquad m^{-\varepsilon}Y_m=\operatorname*{Res}_{\alpha=-\overline{\alpha}_m}\overline{\tau}_1^{-}(\alpha),\qquad 0<\varepsilon<1/2$$

Тогда можно получить следующие представления:

$$\tau_1^{-}(r)=i\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda_1)^n b_{nm}^{(1)}r^{n-i\alpha_m}\right)m^{-\varepsilon}X_m+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda_1)^n b_{nm}^{(2)}r^{n+i\overline{\alpha}_m}\right)m^{-\varepsilon}Y_m\right] \tag{12}$$

$$\overline{H}^{-}(\alpha)=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_1)^n(\alpha_m+in+i)^{-1}}{(\alpha-\alpha_m-in-i)\overline{K}^{+}(\alpha_m+in+i)}b_{nm}^{(1)}\right)n^{-\varepsilon}X_m+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_1)^n(-\overline{\alpha}_m+in+i)^{-1}}{(\alpha+\overline{\alpha}_m-in-i)\overline{K}^{+}(-\overline{\alpha}_m+in+i)}b_{nm}^{(2)}\right)n^{-\varepsilon}Y_m\right] \qquad (13)$$

$$\overline{F}^{-}(\alpha)=\sum_{m=1}^{\infty}l_{\alpha m}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(\gamma_1+\gamma\rho)^{m+1}}\tau_2^{*}(\rho)d\rho \qquad (14)$$

$$l_{\alpha m}=\frac{-\gamma}{\pi\overline{K}^{+}(im)(\alpha-im)}\left[A_4\cos\varphi_-\cos(m+1)\varphi_- -\right.$$

$$-A_5\sin\varphi_-\sin(m+1)\varphi_- + A_6(m+1)\sin\varphi_2\sin((m+1)\varphi_-+\varphi_1)+$$

$$\left.+A_7(m+1)\sin\varphi_1\sin(m\varphi_-+\varphi_1)\right]$$

$$b_{nm}^{(1)}=\prod_{\rho=1}^{n}\frac{1}{(\alpha_m+i\rho)\overline{K}(\alpha_m+i\rho)};\qquad b_{nm}^{(2)}=\prod_{\rho=1}^{n}\frac{1}{(-\overline{\alpha}_m+i\rho)\overline{K}(-\overline{\alpha}_m+i\rho)}$$

$$b_{0m}^{(1)}=b_{0m}^{(2)}=1$$

Здесь α_k - корни уравнения $\overline{K}(\alpha)=0$, для которых получена асимптотическая формула

$$\alpha_k=\frac{\pi}{\pi-|\psi|}\left[(2k+1)i+\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\pi\sin\varphi_1}{\pi-|\psi|}\sqrt{|A_3|}(2k+1)\right)\right]\quad \text{при}\quad k\to\infty$$

При мнимом α_m в формулах (12) и (13) следует поставить $Y_m=0$.

Далее, ищем $\tau_2^{*}(x)$ в виде

$$\tau_2^{*}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{n=0}^{\infty}Z_nT_n(x),\qquad |x|<1 \qquad (15)$$

где $T_n(x)$ - многочлены Чебышева первого рода.

Используя (12)-(15), из (7) и (10) получим следующую систему бесконечных систем линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов X_n, Y_n и Z_n:

$$Z_m+\sum_{n=1}^{\infty}B_{nm}Z_n+\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_{mn}^{(1)}X_n+B_{mn}^{(2)}Y_n\right]=-Z_0B_m\qquad (m=1,2,\dots) \qquad (16)$$

$$X_m+\lambda_1 C_m(\alpha_m)\sum_{n=1}^{\infty}\left[R_{mn}^{(1)}X_n+R_{mn}^{(2)}Y_n\right]+C_m(\alpha_m)\sum_{n=1}^{\infty}L_{mn}Z_n=$$

$$=C_m(\alpha_m)\left[a_0-\frac{\lambda_1 a^{-1}P+f_0}{\alpha_m\overline{K}^+(0)}-Z_0L_{m0}\right]\quad(m=1,2,\ldots)\tag{17}$$

$$Y_m+\lambda_1 C_m(-\overline{\alpha}_m)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\widetilde{R}_{mn}^{(1)}X_n+\widetilde{R}_{mn}^{(2)}Y_n\right]+C_m(-\overline{\alpha}_m)\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{L}_{mn}Z_n=$$

$$=C_m(-\overline{\alpha}_m)\left[a_0+\frac{\lambda_1 a^{-1}P+f_0}{\overline{\alpha}_m\overline{K}^+(0)}-Z_0\widetilde{L}_{m0}\right]\quad(m=1,2,\ldots)\tag{18}$$

где

$$C_m(\alpha_m)=\frac{\overline{K}^+(\alpha_m)}{\overline{K}'(\alpha_m)}m^{\varepsilon},\qquad \overline{K}'(\alpha_m)=\frac{d\overline{K}(\alpha)}{d\alpha}$$

$$B_{mn}=\frac{2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}K_{22}^{**}(r,t)\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\right]\sqrt{1-r^2}\,U_{m-1}(r)\,dr$$

$$K_{22}^{**}(r,t)=K_{22}^{*}(r,t)-\frac{1}{t-r}-\pi\lambda_2\vartheta(r-t)$$

$$B_{mn}^{(1)}=\frac{\delta_m}{m^{\varepsilon}(1-i\alpha_n)}-B_{mn0}^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}B_{mnk}^{(1)}$$

$$\delta_m=\frac{2i}{\pi^2}\int_{-1}^{1}K_{21}^{*}(r,1)\sqrt{1-r^2}\,U_{m-1}(r)\,dr$$

$$B_{mn0}^{(1)}=\frac{i}{\pi^2 n^{\varepsilon}(1-i\alpha_n)}\left[\frac{1}{m-1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\sqrt{1-r^2}\,U_{m-2}(r)\,t^{1-i\alpha_n}\frac{\partial^2K_{21}^{*}}{\partial r\partial t}drdt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{m+1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\sqrt{1-r^2}\,U_m(r)\,t^{1-i\alpha_n}\frac{\partial^2K_{21}^{*}}{\partial r\partial t}drdt\right]$$

$$B_{mnk}^{(1)}=\frac{i(-\lambda_1)^k b_{kn}^{(1)}}{\pi^2 n^{\varepsilon}}\left[\frac{1}{m-1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\sqrt{1-r^2}\,U_{m-2}(r)\,t^{k-i\alpha_n}\frac{\partial K_{21}^{*}}{\partial r}drdt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{m+1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\sqrt{1-r^2}\,U_{m-1}(r)\,t^{k-i\alpha_n}\frac{\partial K_{21}^{*}}{\partial r}drdt\right].$$

$$R_{mn}^{(1)} = n^{-\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_1)^k (\alpha_n + ik + i)^{-1} b_{kn}^{(1)}}{(\alpha_m - \alpha_n - ik - i) \overline{K}^{+} (\alpha_n + ik + i)}$$

$$R_{mn}^{(2)} = n^{-\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_1)^k (-\overline{\alpha}_n + ik + i)^{-1} b_{kn}^{(2)}}{(\alpha_m + \overline{\alpha}_n - ik - i) \overline{K}^{+} (-\overline{\alpha}_n + ik + i)}$$

$$L_{m0} = \sum_{k=1}^{\infty} I_{\alpha_m k} \int_{-1}^{1} \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2} (\gamma_1 + \gamma\rho)^{m+1}}$$

$$L_{m1} = \sum_{k=1}^{\infty} I_{\alpha_m k} \int_{-1}^{1} \frac{1}{(\gamma_1 + \gamma\rho)^{m+1}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$L_{mn} = \frac{1}{2n(n^2-1)} \sum_{k=1}^{\infty} I_{\alpha_m k} \int_{-1}^{1} \frac{d^2}{d\rho^2} \left[(\gamma_1 + \gamma\rho)^{-k-1} \right] \times$$
$$\times \left[(n+1) U_{n-2}(\rho) - (n-1) U_n(\rho) \right] \sqrt{1-\rho^2} d\rho$$

$U_n(x)$ - многочлены Чебышева второго рода.

Выражения для коэффициентов бесконечной системы (18) $\overline{R}_{mn}^{(1)}$, $\overline{R}_{mn}^{(2)}$ и $\overline{L}_{mn}$ получаются из $R_{nn}^{(1)}$, $R_{mn}^{(2)}$ и L_{mn}, соответственно, если в последних вместо α_m положить $-\overline{\alpha}_m$.

В случае мнимого α_m следует в (16) и (17) положить $Y_k = 0$ и не рассматривать (18) при $m = k$.

Не трудно убедиться [10], что совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (16)-(18) квазивполне регулярна при $a < b$. Следует еще отметить, что если стрингеры находятся в одной полуплоскости и $\varphi_1 = \varphi_2$, то всегда $a < b$, то есть соответствующие бесконечные системы всегда квазивполне регулярны.

Постоянные a_0 и Z_0 определяются из условия равновесия стрингеров (1), а для f_0 получаем

$$f_0 = \frac{M}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\tau_2^*(t)}{\gamma_1 + \gamma t} dt$$

где

$$M = A_4 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) - A_5 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) + A_6 \sin\varphi_2 \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) - A_7 \sin^2\varphi_1$$

В табл. 1 приведены значения корней $\overline{K}(\alpha) = 0$ при $0 < \mathrm{Im}\,\alpha < 1$, которые характеризуют особенности контактных напряжений на конце стрингера, выходящего на линию раздела материалов пластины в зависимости от угла φ_1 и $k = \mu_2 / \mu_1$ при $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$

Таблица 1

φ_1° \ k	0	1/4	1/2	3/2	1	2	5	10
10	0.441	0.461	0.482	0.490	0.5	0.562	0.620	0.691
20	0.361	0.423	0.453	0.481	0.5	0.603	0.671	0.742
30	0.264	0.375	0.432	0.473	0.5	0.620	0.701	0.762
45	0.021	0.324	0.416	0.471	0.5	0.622	0.712	0.791
60	0.127	0.312	0.412	0.470	0.5	0.642	0.714	0.793
70	0.168	0.336	0.414	0.471	0.5	0.645	0.720	0.793
80	0.220	0.352	0.423	0.472	0.5	0.645	0.721	0.795
90	0.237	0.358	0.425	0.472	0.5	0.645	0.722	0.796

В заключении отметим, что если $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$, то получим решение задачи, рассмотренное в [10]. В случае $Z_k = 0$, системы (16) - (18) соответствуют решению задачи, рассмотренной в [8, 9].

Литература

1. *Муки Р., Стернберг Э.* Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной пластинке.- Прикл. мех. Тр. Америк. о-ва инж-мех, сер. Е., 1968, т. 35, № 4.
2. Развитие теории контактных задач в СССР.-М.: Наука, 1976. 486 с.
3. *Саркисян В. С.* Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками.- Ереван: Изд. ЕГУ, 1983. 256с.
4. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек.- М.: Машиностроение, 1980.
5. *Фильштинский Л. А.* Об особенностях поля напряжений в упругой анизотропной полуплоскости с выходящим на границу ребром.- Прикл. механика, 1981, т. 17, № 10.
6. *Григорян Э. Х.* Об одной задаче для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение.- Уч. зап. ЕГУ, 1982, № 2.
7. *Григорян Э. Х.* Задача для кусочно-однородной бесконечной пластины с конечным стрингером, выходящим на границу раздела сред.- Тезисы докл. III Всес. конф. по смешанным задачам деформ. тверд. тела. Харьков, 1985.
8. *Кривой А. Ф., Попов Г. Я., Радиолло М. В.* Некоторые задачи о произвольно ориентированном стрингере в составной анизотропной плоскости.- ПММ, 1986, № 4.
9. *Григорян Э. Х.* Об одном подходе к решению задач для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение, выходящее на границу полуплоскости.- Межвуз. сб. науч. тр. механика, Изд-во ЕГУ, 1987, № 6.

10. *Григорян Э. Х.* Контактная задача для кусочно-однородной бесконечной пластины с конечными стрингерами.- Уч. зап. ЕГУ, 1988, № 3.

Институт механики НАН Армении
Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
12.08.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 2, 1995 Механика

МОДЕЛЬ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛА ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

МУСАЕЛЯН С.Л.

Մուսայելյան Ս.Լ.

Նյութերի հոգնածային քայքայման մոդելը բարդ լարվածային վիճակի դեպքում

Առաջարկվում է նյութերի հոգնածային քայքայման հավանականային մոդել բարդ լարվածային վիճակի դեպքում: Վեյբուլ-Գնեդենկոյի երկպարամետր բաշխման ֆունկցիայի կիրառությամբ ստացվում են առնչություններ քայքայող ցիկլերի թվի բաշխման ֆունկցիայի որոշման համար:

Musaelian S.L.

A Model of Materials Fatigue Failure under Composite Stress State

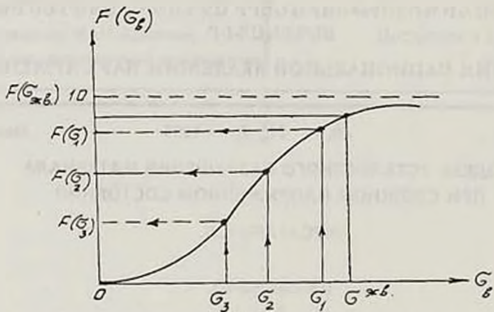
Предлагается вероятностная модель усталостного разрушения материалов при сложном напряженном состоянии. С применением двухпараметрической функции распределения Вейбулла-Гнеденко получаются зависимости для определения функции распределения числа разрушающих циклов.

В практике часто приходится иметь дело с многоосными циклическими напряженными состояниями, например, при расчете лопаток турбин, авиационных конструкций, деталей автомобилей, вращающихся валов и т.д. Однако, усталостное разрушение материалов при сложном напряженном состоянии по отношению к усталостному разрушению при линейном напряженном состоянии исследовано еще недостаточно хорошо. В литературе обычно приводятся экспериментальные данные по усталостному разрушению материалов при одноосном нагружении, в то время как можно указать лишь отдельные работы [1,5], посвященные теоретическим исследованиям усталостного разрушения материалов при сложном напряженном состоянии.

Рассмотрим случай сложного нагружения, когда главные напряжения $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ имеют одинаковые характеристики цикла. Считаем, что имеем экспериментальные данные по интегральной функции распределения предела прочности материала σ_b при линейном напряженном состоянии (фиг. 1).

В работе [3] для предела прочности материала нами была принята двухпараметрическая функция распределения Вейбулла- Гнеденко в виде

$$F(\sigma_b) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\left(\dfrac{\sigma}{c}\right)^b\right] & \sigma > 0 \\ 0 & \sigma = 0 \end{cases} \qquad (1)$$



фиг. 1

Функция распределения предела прочности материала при осевом нагружении.

Параметры b и c можно определить методом моментов или методом максимального правдоподобия. По функции распределения можно определить значения $F(\sigma_1)$, $F(\sigma_2)$ и $F(\sigma_3)$, соответствующие главным напряжениям σ_1, σ_2 и σ_3.

Предположим, что по какой-либо теории прочности имеем эквивалентное напряжение $\sigma_{экв}$ и соответствующее значение

$$F(\sigma_{экв}) = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = P_{1,2,3}^{экв} \tag{2}$$

где $P_{1,2,3}$ представляет из себя вероятность разрушения материала в случае одновременного действия всех трех главных напряжений. Тогда, согласно [5], будем иметь

$$\begin{aligned} P_{1,2,3} = P(\sigma_1) + P(\sigma_2) + P(\sigma_3) - P(\sigma_1)P(\sigma_2) - \\ - P(\sigma_2)P(\sigma_3) - P(\sigma_3)P(\sigma_1) + P(\sigma_1)P(\sigma_2)P(\sigma_3) \end{aligned} \tag{3}$$

с учетом (1) и (3) легко получить

$$P_{1,2,3} = 1 - \exp\left\{-\left[\left(\frac{\sigma_1}{a}\right)^b + \left(\frac{\sigma_2}{a}\right)^b + \left(\frac{\sigma_3}{a}\right)^b\right]\right\} \tag{4}$$

При получении (4) считается, что действие главных напряжений σ_1, σ_2 и σ_3 независимо. Формула (4) учитывает одновременное действие всех трех главных напряжений на вероятность разрушения материала при сложном нагружении.

Естественно предположить, что существует непосредственная связь между значениями $p_{1,2,3}^{экв}$ и $p_{1,2,3}$. Считаем, что

$$p_{1,2,3}^{экв.} = \alpha_0 p_{1,2,3} \tag{5}$$

откуда и определяем α_0 для данного материала

$$\alpha_0 = \frac{p_{1,2,3}^{экв.}}{_{1,2,3}} = \frac{p_{1,2,3}^{экв.}}{1-\exp\left\{-\left[\left(\frac{\sigma_1}{a}\right)^b + \left(\frac{\sigma_2}{a}\right)^b + \left(\frac{\sigma_3}{a}\right)^b\right]\right\}} \tag{6}$$

Например, в случае кручения имеем

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = 0, \quad |\sigma_3| = \sigma$$

Тогда

$$p(\sigma_1) = p(\sigma), \quad p(\sigma_2) = 0, \quad p(\sigma_3) = p(\sigma)$$

Из выражения (3) получим

$$\begin{aligned} P_{1,2,3} &= 2P(\sigma) - P^2(\sigma) = P(\sigma)[2 - P(\sigma)] \\ P_{1,3} &= \alpha_0\{P(\sigma)[2 - P(\sigma)]\} \end{aligned} \tag{7}$$

$$\alpha_0 = \frac{P_{1,3}}{P(\sigma)[2 - P(\sigma)]} \tag{8}$$

Здесь $P_{1,3}$ является вероятностью разрушения материала в случае кручения.

Перейдем к рассмотрению функции распределения числа разрушающих циклов. В работе [3] для случая осевого нагружения нами была получена усеченная функция распределения числа разрушающих циклов в виде

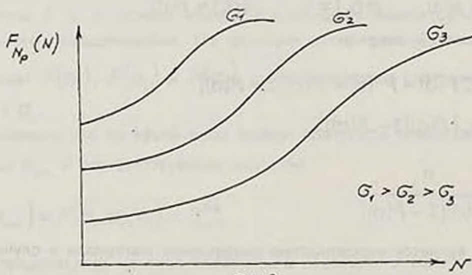
$$F_{N_p}(N) = \begin{cases} 1-\exp\left\{-\left[\dfrac{\left(\dfrac{\sigma}{\alpha}\right)^m}{1-mB\sigma^m N}\right]^{\frac{b}{m}}\right\} & \text{при } N > 0 \\ 1-\exp\left[-\left(\dfrac{\sigma}{a}\right)^b\right] & \text{при } N = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Здесь σ - уровень нагружения, m и B - постоянные материала, которые определяются экспериментальным путем. С помощью (3) выражение (9) принимает вид

$$F_{N_*}(N)=\begin{cases} 1-\exp\left\{-\left[\dfrac{\left(\dfrac{\sigma_1}{\alpha}\right)^m}{1-mB\sigma_1^m N}\right]^{\frac{b}{m}}-\left[\dfrac{\left(\dfrac{\sigma_2}{\alpha}\right)^m}{1-mB\sigma_2^m N}\right]-\left[\dfrac{\left(\dfrac{\sigma_3}{\alpha}\right)^m}{1-mB\sigma_3^m N}\right]\right\} & \text{при } N>0 \\ 1-\exp\left\{-\left[\left(\dfrac{\sigma_1}{a}\right)^b+\left(\dfrac{\sigma_2}{a}\right)^b+\left(\dfrac{\sigma_3}{a}\right)^b\right]\right\} & \text{при } N=0 \end{cases} \tag{10}$$

Как видно из полученного выражения, функция распределения числа разрушающих циклов получается усеченной. Значению $N=0$ соответствует вероятность разрушения

$$F_{N_p}(N)=1-\exp\left\{-\left[\left(\frac{\sigma_1}{a}\right)^b+\left(\frac{\sigma_2}{a}\right)^b+\left(\frac{\sigma_3}{a}\right)^b\right]\right\}$$



Фиг. 2

Усеченные функции распределения числа разрушающих циклов

Значению $\sigma=\sigma_1$ соответствует определенная функция распределения $F(N)=F\left(N(\sigma_1)\right)=F(N_1)$. Соответственно, при $\sigma=\sigma_2$ имеем $F(N)=F\left(N(\sigma_2)\right)=F(N_2)$ и $\sigma=\sigma_3$ имеем $F(N)=F\left(N(\sigma_3)\right)=F(N_3)$.

Тогда $F(N_1,N_2,N_3)=P_{N_1,N_2,N_3}$.

По выражению (10) можно построить функцию распределения числа разрушающих циклов при любой комбинации циклических напряжений σ_1, σ_2 и σ_3.

Литература

1. *Коллинз Дж.* Повреждение материалов в конструкциях. Пер. с англ.- М.: Мир, 1984. 624 с.

2. *Мусаелян С.Л.* О критериях разрушения при циклическом нагружении. Механика деформируемого твердого тела.- Сб.статей. Изд.АН Арм.ССР, Ереван, 1986, с.139-143.
3. *Мусаелян С.Л.* О функции распределения числа разрушающих циклов при малоцикловом нагружении.- Материалы 6-ой Всесоюзной конференции по композиционным материалам.- Ереван, 1987, т.2, с.158-160.
4. *Мусаелян С.Л.* Модель усталостного разрушения при осевом малоцикловом нагружении.- Материалы докладов 2-ой республиканской конференции аспирантов Арм.ССР, Ереван, 1987, 129 с.
5. *Сосновский Л.А.* Статистическая механика усталостного разрушения.- Минск: Изд. ???? 1987, 288 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
23.11.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, N° 2, 1995 Механика

КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА, СЦЕПЛЕННОГО С ЖЕСТКИМ ОСНОВАНИЕМ

БАБЛОЯН А. А. , БАБЛОЯН К. Б.

Բաբլոյան Ա.Ա., Բաբլոյան Կ.Բ.

Կոշտ հիմքի հետ ամրակցված առաձգական ուղղանկյան տատանումները

Դիտարկվում է առաձգական ուղղանկյան կայունացած տատանումների խնդիրը, երբ ուղղանկյունը ներքևի կողմով ամրակցված է տատանվող հիմքին: Ֆուրյեի եղանակով խնդիրը բերվում է ռեգուլյար անվերջ համակարգերի լուծմանը: Լարումները ստացված են անջատված եզակիություններով:

Babloyan A.A, Babloyan K.B.

Vibrations of an elastic rectangular coherent with rigid fundament

Приводится решение задачи об установившихся колебаниях упругого прямоугольника, основание которого жестко сцеплено с колеблющимися фундаментом. Методом Фурье задача сведена к решению регулярных бесконечных систем. Напряжения получаются с выделленными характерными особенностями.

Рассматривается стационарная задача об определении напряженно-деформированного состояния упругого прямоугольника, когда фундамент, к которому жестко сцеплено нижнее основание прямоугольника, совершает поперечные и изгибные колебания с частотой ω. На остальных участках границы заданы компоненты напряжений.

Задача решается методом Фурье. Исследование бесконечных систем алгебраических уравнений производится по методу [1-3].

Приведены формулы для напряжений с выделенными особенностями, а также для перерезывающей силы и изгибающего момента.

Особенности напряжений получены в виде "местных" решений [4].

1. Построение решения задачи. Как известно [2], стационарная плоская задача теории упругости при отсутствии массовых сил сводится к решению следующих дифференциальных уравнений:

$$\Delta\varphi + c_1^2\varphi = 0, \qquad \Delta\psi + c_2^2\psi = 0 \tag{1. 1}$$

где Δ - двумерный оператор Лапласа, c_1 и c_2- волновые числа продольных и сдвиговых волн, соответственно. Компоненты перемещении напряжений выражаются через потенциальные функции (1. 1) формулами:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma_x}{2G}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=mc_1^2\varphi+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\\
&\frac{\sigma_z}{2G}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-mc_1^2\varphi+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\\
&\frac{\tau_{xz}}{2G}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\\
&u_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z},\qquad u_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\\
&c_1^2=\frac{1-2\nu}{2-2\nu}c_2^2,\qquad c_2^2=\frac{\rho\omega^2}{G},\qquad m=\frac{\nu}{1-2\nu}
\end{aligned}
\tag{1. 2}
$$

где G и ν - модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала.

Здесь и в дальнейшем везде пропущен временный множитель $\exp(\pm i\omega t)$. Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x(\pm a,z)=\pm 2Gg(z),\qquad \tau_{xz}(\pm a,z)=0\qquad (0<z<h)\\
&\sigma_z(x,h)=\pm 2Gf(x),\qquad \tau_{xz}(x,h)=2G\tau_0\qquad (|x|<a)\\
&u_x(x,0)=c_0,\qquad u_z(x,0)=b_0x,\qquad (|x|\le a)
\end{aligned}
\tag{1. 3}
$$

где $f(x)$ - функция нечетная.

В силу наличия косой симметрии задачу будем решать только для области $(0\le x\le a,\ 0\le z\le h)$, удовлетворив при этом условиям косой симметрии.

$$
\sigma_x(0,z)=0,\qquad u_z(0,z)=0 \tag{1. 4}
$$

Исходя из условий (1.3), (1.4), решение уравнений (1.1) представим в виде

$$
\begin{aligned}
&\varphi(x,z)=\varphi_0(x,z)+\frac{2}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(\lambda_k^2X_k-c_2^2A_k\right)\operatorname{sh}\lambda_{1k}x}{c_2^2\lambda_{1k}\beta_k\operatorname{ch}\lambda_{1k}a}\sin\beta_kz+\\
&+\frac{2}{a}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{c_2^2\alpha_p}\left[\gamma_{2p}Z_p\frac{\operatorname{ch}\gamma_{1p}(h-z)}{\operatorname{ch}\gamma_{1p}h}+\frac{\gamma_p^2U_p}{\gamma_{1p}}\frac{\operatorname{sh}\gamma_{1p}z}{\operatorname{ch}\gamma_{1p}h}\right]\sin\alpha_px\\
&\psi(x,z)=\psi_0(z)+\frac{2}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}X_k\operatorname{ch}\lambda_{2k}x}{c_2^2\operatorname{ch}\lambda_{2k}a}\cos\beta_kz+\\
&+\frac{2}{a}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{c_2^2}\left[Z_p\frac{\operatorname{sh}\gamma_{2p}(h-z)}{\operatorname{ch}\gamma_{2p}h}-U_p\frac{\operatorname{ch}\gamma_{2p}z}{\operatorname{ch}\gamma_{2p}h}\right]\cos\alpha_px
\end{aligned}
\tag{1. 5}
$$

где введены обозначения

$$\varphi_0(x,z)=\frac{b_0x}{c_1}\sin c_1z,\qquad \alpha_p=\frac{(2p-1)\pi}{2a},\qquad \beta_k=\frac{(2k-1)\pi}{2h}$$

$$\psi_0(z)=\frac{2\left(b_0\cos c_1h-\tau_0\right)}{c_2^{\,2}\cos c_2h}\cos c_2z-\frac{c_0\sin c_2(h-z)}{c_2\cos c_2h}$$

$$A_k=\frac{\tau_0\beta_k}{\lambda_{2k}^{\,2}}+\frac{c_0c_2^{\,2}(-1)^{k-1}}{\lambda_{2k}^{\,2}}-\frac{b_0c_2^{\,2}\beta_k\cos c_1h}{2(1-\nu)\lambda_{1k}^{\,2}\lambda_{2k}^{\,2}} \tag{1. 6}$$

$$\lambda_{1k}^{\,2}=\beta_k^{\,2}-c_1^{\,2},\qquad \lambda_{2k}^{\,2}=\beta_k^{\,2}-c_2^{\,2},\qquad \lambda_k^{\,2}=\beta_k^{\,2}-0.5c_2^{\,2}$$

$$\gamma_{1p}^{\,2}=\alpha_p^{\,2}-c_1^{\,2},\qquad \gamma_{2p}^{\,2}=\alpha_p^{\,2}-c_2^{\,2},\qquad \gamma_p^{\,2}=\alpha_p^{\,2}-0.5c_2^{\,2}$$

При выборе (1. 5) часть дополнительных условий (1. 3) и (1. 4) удовлетворяются тождественно. Удовлетворяя остальным граничным условиям для определения неизвестных постоянных X_k, Z_p, U_p, получим следующие бесконечные системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&a_{1p}Z_p+a_{2p}U_p=\frac{\alpha_p}{(1-\nu)h}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}B_{kp}X_k+h_{1p}\\
&a_{3p}Z_p+a_{4p}U_p=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{kp}X_k}{(1-\nu)\beta_kh}+h_{2p}\\
&a_{5k}X_k+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{A_{kp}U_p+(-1)^{k-1}\beta_k\gamma_{2p}B_{kp}Z_p}{(1-\nu)\alpha_pa}=h_{3k}
\end{aligned} \tag{1. 7}$$

где

$$\left(\beta_k^{\,2}+\gamma_{1p}^{\,2}\right)\left(\beta_k^{\,2}+\gamma_{2p}^{\,2}\right)A_{kp}=\alpha_p\beta_k^{\,2}-0.5\nu c_2^{\,2}\left(\beta_k^{\,2}+\gamma_{2p}^{\,2}\right)$$

$$\left(\beta_k^{\,2}+\gamma_{1p}^{\,2}\right)\left(\beta_k^{\,2}+\gamma_{2p}^{\,2}\right)B_{kp}=\nu\lambda_{2k}^{\,2}-(1-\nu)\alpha_p^{\,2}$$

$$h_{1p}=\frac{2\alpha_p}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}A_k}{\beta_k^{\,2}+\gamma_{1p}^{\,2}}$$

$$h_{2p}=\frac{2}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k\left(\beta_k^{\,2}+mc_1^{\,2}\right)}{\beta_k\left(\beta_k^{\,2}+\gamma_{1p}^{\,2}\right)}-\frac{b_0c_2^{\,2}\sin c_1h}{2c_1\alpha_p^{\,2}}+(-1)^pf_p$$

$$h_{3k}=(-1)^kg_k-\frac{A_k\lambda_k^{\,2}\,\mathrm{th}\,\lambda_{1k}a}{\beta_k\lambda_{1k}}-\frac{b_0amc_1^{\,2}\cos c_1h}{\lambda_{1k}^{\,2}}$$

Здесь введены обозначения

$$c_2^{\,2}a_{1p}=\alpha_p^{\,2}\,\mathrm{th}\,\gamma_{2p}h-\gamma_{1p}\gamma_{2p}\,\mathrm{th}\,\gamma_{1p}h$$

$$c_2^{\,2}a_{2p}=\frac{\alpha_p^{\,2}}{\mathrm{ch}\,\gamma_{2p}h}-\frac{\gamma_p^{\,2}}{\mathrm{ch}\,\gamma_{1p}h},\qquad a_{3p}=\frac{\alpha_p}{\gamma_{2p}}a_{2p}$$

$$c_2^2 a_{4p} = \alpha_p \gamma_{2p} \operatorname{th} \gamma_{2p} h - \gamma_p^4 (\alpha_p \gamma_{1p})^{-1} \operatorname{th} \gamma_{1p} h$$

$$c_2^2 a_{5k} = \beta_k \lambda_{2k} \operatorname{th} \lambda_{2k} a - \lambda_k^4 (\beta_k \lambda_{1k})^{-1} \operatorname{th} \lambda_{1k} a$$

$$f_p = \int_0^a f(x) \sin \alpha_p x \, dx, \qquad g_k = \int_0^h g(z) \sin \beta_k z \, dz$$

$$d = (1-2\nu)\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}\right) + \sqrt{\nu(1-\nu)}$$

После решения бесконечных систем напряжения и перемещения будем вычислять по формулам (1. 2) и (1. 5).

2. Исследование бесконечных систем. Покажем, что бесконечные системы (1.7) при любом значении вынужденной частоты ω, отличной от собственных, можно решать методом редукции или же методом последовательных приближений. Действительно, исключая из (1. 7) неизвестные постоянные X_k, для определения неизвестных U_p и Z_p, получим две бесконечные системы

$$a_{1p} Z_p + \sum_{m=1}^{\infty} \left(U_m C_{1pm} + Z_m D_{1pm}\right) = H_{1p}$$

$$a_{4p} U_p - \sum_{m=1}^{\infty} \left(U_m C_{2pm} + Z_m D_{2pm}\right) = H_{2p} \tag{2.1}$$

где

$$C_{1pm} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \alpha_p A_{km} B_{kp}}{(1-\nu)^2 a h \alpha_m a_{5k}} + a_{2p} \delta_{pm}$$

$$D_{1pm} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_p \gamma_{2m} \beta_k B_{km} B_{kp}}{(1-\nu)^2 a h \alpha_m a_{5k}}$$

$$C_{2pm} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{kp} A_{km}}{(1-\nu)^2 a h \alpha_m \beta_k a_{5k}}$$

$$D_{2pm} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \gamma_{2m} A_{kp} B_{km}}{(1-\nu)^2 a h \alpha_m a_{5k}} - a_{3p} \delta_{pm} \tag{2. 2}$$

$$H_{1p} = h_{1p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \alpha_p B_{kp} h_{3k}}{(1-\nu) h a_{5k}}$$

$$H_{2p} = h_{2p} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{kp} h_{3k}}{(1-\nu) \beta_k h a_{5k}}$$

δ_{pm}- символ Кронекера.

Для систем (2. 1) оценим суммы модулей коэффициентов при неизвестных, считая, что $p >> 1$.

$$\begin{aligned} \rho_z &= \left|a_{1p}\right|^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left|C_{1pm}\right|+\left|D_{1pm}\right|\right) \\ \rho_u &= \left|a_{4p}\right|^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left|C_{2pm}\right|+\left|D_{2pm}\right|\right) \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Нетрудно проверить, что суммы, содержащие C_{1pm} и D_{2pm}, при $p \to \infty$ стремятся к нулю как $o\left(p^{-1}\right)$. Пользуясь асимптотическими представлениями $(k, p >> 1)$

$$a_{1p} \approx \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)}, \qquad a_{4p} \approx \frac{1}{4(1-\nu)}, \qquad a_{5k} \approx \frac{1}{4(1-\nu)} \qquad (2.4)$$

и формулами [6]

$$\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{\infty}\left|B_{kp}\right| = \frac{ad}{\pi\beta_k}\left[1+0\left(k^{-1}\right)\right] \\ &\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\alpha_p}{\left(\alpha_p^2+\beta_k^2\right)^2} = \frac{a}{2\pi\beta_k^2}\left[1+0\left(k^{-1}\right)\right] \end{aligned} \qquad (2.5)$$

для выражений (2.3) получим следующие асимптотические оценки:

$$\rho_z = \frac{16d^2}{(3-4\nu)\pi^2}+0\left(p^{-1}\right), \qquad \rho_u = \frac{4}{\pi^2}+0\left(p^{-1}\right) \qquad (2.6)$$

Свободные члены систем (2.1) при $p \to \infty$ стремятся к нулю. Отсюда следует, что системы (2.1) в общем случае квазивполне регулярны. Если считать $\tau_0 = 0$, $f_p, g_p = 0\left(p^{-2}\right)$, то для достаточно больших номеров из бесконечных систем (1.7) получим следующие асимптотические представления:

$$U_p \approx \frac{u_0}{\alpha_p}, \qquad Z_p \approx z_0\alpha_p^{\delta-1}, \qquad X_k \approx -\frac{u_0}{\beta_k}+(-1)^{k-1}x_0\beta_k^{\delta-1} \qquad (2.\ 7)$$

где $0<\delta<0.5$, а x_0 и z_0 связаны между собой следующими соотношениями:

$$z_0 = \frac{(2\nu+\delta-2)x_0}{(3-4\nu)\sin\frac{\pi\delta}{2}}, \qquad x_0 = \frac{(\delta-2\nu)z_0}{\sin\frac{\pi\delta}{2}} \qquad (2.\ 8)$$

полученными из первой и последней систем (1. 7) соответственно. Из условия эквивалентности соотношений (2. 8) следует, что число δ является наименьшим положительным корнем уравнения

$$(3-4\nu)\sin^2\frac{\pi\delta}{2} = (2\nu-\delta)(2-\delta-2\nu) \qquad (2.\ 9)$$

Число разрешаемых уравнений бесконечных систем (M, N) будем определять из эмпирических соотношений [2]

$$\frac{c_2^{\,2}}{\alpha_N^{\,2}} \approx \frac{c_2^{\,2}}{\beta_M^{\,2}} \approx 0.1 \tag{2. 10}$$

При решении бесконечных систем методом редукции неизвестные постоянные $U_p,\ Z_p,\ X_k\ \ (p > N,\ k > M)$ должны заменяться своими асимптотическими выражениями (2. 7).

Постоянные $u_0,\ z_0$ определяются в процессе решения бесконечных систем путем сравнений численных результатов с (2. 7). В следующем параграфе получено дополнительное уравнение для определения u_0.

3. Формула для напряжений. Из-за наличия угловых точек $A(a,h)$ и $B(a,0)$, функциональные ряды, входящие в выражения напряжений, в малых окрестностях этих точек сходятся медленно. Общие члены рядов на границе в малой окрестности точки A стремятся к нулю как $0(k^{-1})$, а около точки B - как $0(k^{\delta-1})$.

Асимптотические формулы (2.7) позволяют улучшить сходимость функциональных рядов и выделить главные части (особенности) напряжений в окрестностях угловых точек. Здесь, в отличие от [2], сходимость рядов улучшается не на граничных точках, а внутри области, в малых окрестностях особых точек. Поэтому выделенные здесь особенности напряжений имеют вид "местных" решений и зависят от двух местных полярных координат (ρ, θ).

Для окрестности точки $B(a,0)$ в точных формулах напряжений заменим неизвестные коэффициенты и некоторые сложные функции своими асимптотическими выражениями. Тогда, для напряжений получим следующие приближенные простые формулы:

$$\begin{aligned}
&\frac{1-\nu}{G}\begin{Bmatrix}\sigma_x^{(1)}\\ \sigma_z^{(1)}\end{Bmatrix} = -\frac{x_0}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k^{\delta-1}\sin\beta_k z}{\exp(\beta_k(a-x))}\left[1 \pm \beta_k(a-x)\right] - \\
&-\frac{z_0}{a}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\alpha_p^{\delta-1}\cos\alpha_p(a-x)}{e^{\alpha_p z}}\left[\begin{Bmatrix}2\nu\\ 2-2\nu\end{Bmatrix} \pm \alpha_p z\right] = \\
&= -\frac{\Gamma(\delta)}{\pi\rho^{\delta}}\Big\{x_0\left[\sin\delta\theta_0 \pm \delta\cos\theta_0\sin(\delta+1)\theta_0\right] + \\
&+z_0\left[\begin{Bmatrix}2\nu\\ 2-2\nu\end{Bmatrix}\cos\delta\theta_1 \mp \delta\cos d\theta_1\cos(\delta+1)\theta_1\right]\Big\} + O_{1,2}(1)
\end{aligned} \tag{3. 1}$$

$$\frac{1-\nu}{G}\tau_{xz}^{(1)} = 2(1-\nu)\tau_{xz}^{0}(z) + \frac{z_0}{a}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\alpha_p^{\delta-1}\sin\alpha_p(a-x)}{e^{\alpha_p z}}\left[1-2\nu+\alpha_p z\right] -$$

$$-\frac{x_0(a-x)}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k^{\delta}\cos\beta_k z}{e^{\beta_k(a-x)}} = 2(1-\nu)\tau_{xz}^{0}(z) + \frac{\Gamma(\delta)}{\pi\rho^{\delta}}\left\{z_0\left[(1-2\nu)\sin\delta\theta_1 + \right.\right. \qquad (3.2)$$

$$\left.\left.+\delta\cos\theta_1\sin(\delta+1)\theta_1\right] - x_0\delta\cos\theta_0\cos(\delta+1)\theta_0\right\} + O_3(1)$$

$$\tau_{xz}^{0}(z) = b_0\cos c_1 z - \frac{b_0\cos c_1 h - \tau_1}{\cos c_1 h}\cos c_1 z + \frac{c_0 c_1 \sin c_1(h-z)}{2\cos c_1 h}$$

где $\Gamma(\delta)$ - гамма-функция Эйлера,

$$\rho = \sqrt{(a-x)^2 + z^2}, \qquad \theta_0 + \theta_1 = \frac{\pi}{2} \qquad (3.3)$$

$$\rho\cos\theta_0 = a - x, \qquad \rho\sin\theta_0 = z, \qquad \rho << \min(a, h)$$

При суммировании рядов (3. 1), (3. 2) был использован только главный (первый) член формулы [6]

$$\Phi(z,s,\nu) = \frac{\Gamma(1-s)}{z^{\nu}}\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{s-1} + z^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\zeta(s-n,\nu)\frac{(\ln z)^n}{n!} \qquad (3.\ 4)$$

$$\Phi(z,s,\nu) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\nu)^{-s}z^n \qquad (3.\ 5)$$

$$\zeta\left(s,\frac{1}{2}\right) = \left(2^s - 1\right)\zeta(s)$$

Здесь $\zeta(s)$, $\zeta(s,\nu)$ - обычная и обобщенная функции Римана. Таблицы для $\zeta(s)$ содержатся в книге [5].

Явные выражения для ограниченных функций $O_p(1)$ $(p = 1,2,3)$ можно получить при помощи (3.4), если при суммировании рядов (3.1) и (3.2) не ограничиваться только первым членом (3.4).

Окончательные расчетные формулы для напряжений, действующих в малой окрестности точки $B(a,0)$, имеют вид

$$\sigma_x = \sigma_x^1 + \left(\sigma_x - \sigma_x^{(1)}\right), \qquad (3.\ 6)$$

где σ_x - точная формула, σ_x^1 - приближенная.

Если аналогичным образом улучшить сходимость рядов в малой окрестности угловой точки $A(a,h)$ и удовлетворить условию

$$\sigma_z(a,h) - \sigma_x(a,h) = 2G\left[f(a) - g(h)\right] \qquad (3.\ 7)$$

вытекающего из граничных условий (1. 3), то при $\tau_0 = 0$, для определения неизвестного постоянного u_0 получим следующее дополнительное уравнение:

$$\frac{u_0}{(1-\nu)\pi} = g(h) - f(a) - b_0 a c_1 \sin c_1 h + \frac{2\tau_0}{\pi} -$$

$$-\frac{4}{hc_2^2}\sum_{k=1}^{M}\left\{\frac{(2\beta_k^2 - c_1^2)\left[\lambda_k^2(X_k - X_M) - c_2^2 A_k\right]}{2\beta_k\lambda_{1k}\,\mathrm{cth}\,\lambda_{1k}a} + \frac{\tau_0 c_2^2}{\beta_k} -\right.$$

$$\left.-(X_k - X_M)\beta_k\lambda_{2k}\,\mathrm{th}\,\lambda_{2k}a\right\} + \sum_{k=1}^{N}\frac{4\alpha_p\gamma_{2p}}{ac_2^2}\left\{Z_p\left[\frac{2\alpha_p^2 - c_1^2}{2\alpha_p^2\,\mathrm{ch}\,\gamma_{1p}h} -\right.\right. \qquad (3.\ 8)$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\mathrm{ch}\,\gamma_{2p}h}\right] + (U_p - U_N)\left[\frac{\gamma_p^2(2\alpha_p^2 - c_1^2)\,\mathrm{th}\,\gamma_{1p}h}{2\alpha_p^2\gamma_{1p}\gamma_{2p}} - \mathrm{th}\,\gamma_{2p}h\right]\right\}$$

Здесь общие члены рядов, содержащие неизвестные коэффициенты, стремятся к нулю как $o(k^{-5})$.

Значения перерезывающей силы и изгибающего момента, действующих в сечении $z = \mathrm{const}$, определяются формулами

$$P(z) = 2\int_0^a \tau_{xz}(x,z)\,dx = 4G\left\{a\tau_{xz}^0(z) + u_z(a,z) - b_0 a\cos c_1 z -\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k\sin\beta_k(a-z)}{h\lambda_{2k}\,\mathrm{cth}\,\lambda_{2k}a} - \sum_{p=1}^{\infty}\frac{Z_p\,\mathrm{sh}\,\gamma_{2p}(h-z) - U_p\,\mathrm{ch}\,\gamma_{2p}z}{\alpha_p a\,\mathrm{ch}\,\gamma_{2p}a}\right\} \qquad (3.\ 9)$$

$$M(z) = 2\int_0^a x\sigma_z(x,z)\,dx$$

Прямое вычисление значений $P(z)$ и $M(z)$ по формулам (3. 9) малоэффективно, так как ряды, входящие в (3. 9) при $z \approx 0$ и $z \approx h$ сходятся медленно. Однако, если при помощи асимптотических формул (2. 7) и первой из бесконечных систем (1. 7) улучшить сходимость этих рядов, то для сечения $z = 0$ получим следующие расчетные формулы:

$$\frac{P(0)}{4G} = a\tau_{xz}^0(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_0\beta_k^{\delta-2}\lambda_{2k} - (-1)^{k-1}X_k\,\mathrm{th}\,\lambda_{2k}a}{\lambda_{2k}h} -$$

$$-\sum_{p=1}^{\infty}\left[\frac{Z_p\,\mathrm{th}\,\gamma_{2p}h - z_0\alpha_p^{\delta-1}}{\alpha_p a} - \frac{U_p}{\alpha_p a\,\mathrm{ch}\,\gamma_{2p}h}\right] - \frac{x_0 h^{1-\delta} z_0 a^{1-\delta}}{\pi^{2-\delta}}\zeta(2-\delta, 1/2) \qquad (3.10)$$

$$\frac{aM(0)}{4G} = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\gamma_{2p}Z_p - z_0\alpha_p^{\delta}}{\alpha_p^{3}} + z_0\left(\frac{a}{\pi}\right)^{3-\delta}\zeta(3-\delta, 1/2)$$

где z_0 и x_0 связаны соотношениями (2. 3). Аналогичным образом, при улучшении сходимости рядов (3. 9) для $z \approx h$ следует воспользоваться второй из бесконечных систем (1. 7). Для остальных значений z формулы (3. 9) можно считать расчетными.

Добавление. Асимптотические формулы (2.7), точнее, члены с коэффициентом u_0, а также вытекающие из них расчетные формулы для окрестности точки $A(a,h)$ и дополнительное уравнение (3.8) были получены при условии $\tau_0 = 0$, то есть, когда парность касательных напряжений в точке $A(a,h)$ не нарушена. При $\tau_0 \neq 0$ характер асимптотических поведений неизвестных коэффициентов пока ясен далеко не полностью и требует дополнительного исследования. На этой основе ограничимся только некоторыми фактами. Предположим, что для больших значений номеров имеет место

$$X_k \approx \frac{x_1}{\beta_k}, \quad U_p \approx \frac{u_1}{\alpha_p} \qquad (k, p >> 1) \tag{4. 1}$$

Тогда, из второй бесконечной системы (полученной из граничного условия на $\sigma_z(x,h)$) имеем

$$u_1 + x_1 = 4(1-\nu)\tau_0 \tag{4. 2}$$

а из третьей бесконечной системы (полученной из граничного условия на $\sigma_z(a,z)$) получим

$$u_1 + x_1 = -4(1-\nu)\tau_0 \tag{4. 3}$$

Последние два соотношения не согласуются между собой. Для выявления причины несогласия приведем приближенные формулы напряжений для малой окрестности угловой точки $A(a,h)$

$$-\frac{(1-\nu)\pi}{G}\begin{Bmatrix}\sigma_x^{(2)}\\ \sigma_z^{(2)}\end{Bmatrix} = \frac{\pi x_1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\beta_k(h-z)}{\beta_k e^{\beta_k(a-x)}}\left[1 \pm \beta_k(a-x) \pm \frac{4(1-\nu)\tau_0}{x_1}\right] +$$

$$+\frac{\pi u_1}{a}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_p(a-x)}{\alpha_p e^{\alpha_p(h-z)}}\left[1 \mp \alpha_p(h-z)\right] = \pm\left(x_1\cos^2\theta - u_1\sin^2\theta\right) +$$

$$+\left[x_1 + u_1 \pm 4(1-\nu)\tau_0\right]\ln\frac{4h}{\pi\rho_1} + u_1\ln\frac{a}{h} + 0\left(\rho_1^2\right) \tag{4. 4}$$

$$\frac{1}{2G}\tau_{xz}^{(2)} = \tau_{xz}^0(z) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\beta_k(h-z)}{he^{\beta_k(a-x)}}\left[\frac{x_1(a-x)}{2(1-\nu)} - \frac{2\tau_0}{\beta_k}\right] -$$

$$-\frac{u_1(h-z)}{2a(1-\nu)}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_p(a-x)}{e^{\alpha_p(h-z)}} = \tau_{xz}^0(z) - \frac{2\tau_0\theta}{\pi} - \frac{(x_1+u_1)\sin 2\theta}{4\pi(1-\nu)} + 0\left(\rho_1^2\right)$$

где

$$\rho_1 \cos\theta = a - x, \quad \rho_1 \sin\theta = h - z$$
$$\rho_1 = \sqrt{(a-x)^2 + (h-z)^2} << \min\{a, h\} \tag{4. 5}$$

Из (4.4) следует, что при асимптотике (4.1) и (4.2) напряжение σ_z, когда $\rho_1 \to 0$ остается ограниченным, а напряжение σ_x имеет логарифмическую особенность с коэффициентом, пропорциональным τ_0. При асимптотике (4.1) и (4.3) σ_z имеет ту же особенность с обратным знаком, а σ_x остается ограниченным. Касательное напряжение в обоих случаях остается ограниченным. Следовательно, формула (4.2) предполагает приближение к точке $A(a,h)$ по кривой, касающейся в точке A с линией $z = h$ $(\theta \to 0)$, а при (4.3) касательная к кривой будет прямая $x = a$ $(\theta \to \pi/2)$.

Если в условии (3.7) предельное значение $\sigma_z(a,h)$ вычислить по формуле (4.2), а $\sigma_x(a,h)$ - по формуле (4.3), то для определения неизвестного коэффициента u_1 снова получим дополнительное уравнение (3.8), в котором нужно сделать замену $u_0 \to u_1$ и считать $\tau_0 \neq 0$. Для облегчения дальнейших вычислительных работ приведем значения первых корней уравнения (2.9) в зависимости от коэффициента Пуассона.

Таблица

ν	δ	ν	δ	ν	δ
0.50	0.405388	0.32	0.301842	0.16	0.187198
0.48	0.394766	0.30	0.288627	0.14	0.170167
0.46	0.383923	0.28	0.275877	0.12	0.152158
0.44	0.372864	0.26	0.262159	0.10	0.132955
0.42	0.361588	0.25	0.255250	0.08	0.112262
0.40	0.350089	0.24	0.248231	0.06	0.089637
0.38	0.338359	0.22	0.233840	0.04	0.064393
0.36	0.326387	0.20	0.218926	0.02	0.035332
0.34	0.314154	0.18	0.203411	0.01	0.018699

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что $\delta_1 = 2 - \bar{\delta}$ также является корнем уравнения (2.9).

Собственные частоты ω_0 можно определить одним из двух способов:

а) как положительные корни определителя бесконечного порядка системы (1.7). Условия (2.6) позволяют определить приближенные значения ω_0 методом редукции определителя,

б) при $\omega = \omega_0$ задача не имеет ограниченного решения, поэтому точность удовлетворения граничных условий при $\omega=\omega_0$ резко падает. Исходя из этого факта, собственные частоты можно определять в процессе численного решения бесконечных систем для различных значений ω с одновременной проверкой тех граничных условий, из которых получены эти системы.

После определения собственных значений, собственные формы упругой балки будем определять по формулам (1.2) и (1.5).

Литература

1. *Улитко А. Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. - Киев: Наукова думка, 1979. 261 с.
2. *Гринченко В. Т. , Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. - Киев: Наукова думка, 1981. 283 с.
3. *Кояловић Б. М.* Исследование о бесконечных системах линейных уравнений. - Изв. физ-мат. ин-та В. А. Стеклова, 1930, 3, с. 41-167.
4. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. - М. : Наука, 1984. 255 с.
5. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. - М. : Наука, 1977. 342 с.
6. *Бейтмен Г. , Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1. - М. : Наука, 1973. 294 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
29. 10. 1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 2, 1995 Механика

СМЕШАННАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ ЛУНОЧЕК

АРУТЮНЯН Л. А.

Հարությունյան Լ. Ա.

Դիտարկված է տարբեր նյութերից երկու լուսնաձև մարմինների կոնտակտային խնդիրը, երբ կոնտակտի ուղիղ գծի վրա կան երկու սիմետրիկ ճեղքեր:

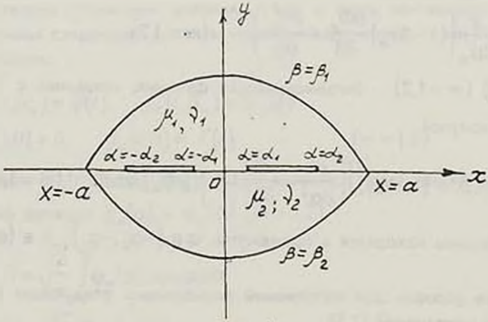
Arutunian L. A.

A Mixed Contact Problem for Two Moon-type Bodies.

Решена задача о контакте двух луночек из различных материалов, когда на прямой линии контакта имеются два одинаковых разреза.

В данной работе рассматривается плоская контактная задача для двух внутренних луночных областей, имеющих различные упругие характеристике. Контакт происходит по прямой линии без трения по всей линии кроме двух симметричных участков (фиг.1).

Ось $0x$ направим по линии контакта, а ось $0y$ - по оси симметрии.



Фиг. 1

Задача решается при помощи функции напряжений в биполярной системе координат α, β, которые связаны с декартовыми координатами x, y соотношениями [1,2]

$$g(\alpha,\beta)x=\operatorname{sh}\alpha; \qquad g(\alpha,\beta)y=\sin\beta \tag{1.1}$$

где $g(\alpha,\beta)=(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)/a$ характеризует масштаб преобразования, a - параметр биполярных координат.

В биполярной системе координат первый материал с упругими характеристиками μ_1, ν_1 занимает область $\alpha\in(-\infty;\infty)$; $\beta\in[0,\beta_1]$, а второй с упругими характеристиками μ_2, ν_2 - область $\alpha\in(-\infty;\infty)$; $\beta\in[\beta_2,0]$.

Функции напряжений $\Phi_m(\alpha,\beta)$ $(m=1,2)$ удовлетворяют бигармоническому уравнению в биполярной системе координат [2]

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}-2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)(g\Phi_m)=0 \qquad (m=1,2) \tag{1.2}$$

Напряжения и перемещения выражаются через функцию напряжений следующими формулами:

$$a\sigma_\alpha^{(m)}=\left((\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\operatorname{ch}\alpha\right)(g\Phi_m)$$

$$a\sigma_\beta^{(m)}=\left((\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}-\cos\beta\right)(g\Phi_m)$$

$$a\tau_{\alpha\beta}^{(m)}=-(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2(g\Phi_m)}{\partial\alpha\partial\beta} \tag{1.3.}$$

$$U_m=\frac{g}{2\mu_m}\left((1-2\nu_m)\frac{\partial\Phi_m}{\partial\alpha}-\frac{\partial\Psi_m}{\partial\beta}\right)$$

$$V_m=\frac{g}{2\mu_m}\left((1-2\nu_m)\frac{\partial\Phi_m}{\partial\beta}+\frac{\partial\Psi_m}{\partial\alpha}\right) \qquad (m=1,2)$$

где $\Psi_m(\alpha,\beta)$ $(m=1,2)$ - бигармоническая функция, связанная с $\Phi_m(\alpha,\beta)$ $(m=1,2)$ формулой

$$g\Psi_m(\alpha,\beta)=(1-\nu_m)\iint\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-1\right)(g\Phi_m)\,d\alpha d\beta \qquad (m=1,2) \tag{1.4}$$

Пусть трещины находятся в промежутке $\alpha\in(-\alpha_2,-\alpha_1)$, $\alpha\in(\alpha_1,\alpha_2)$ и $\beta=0$.

Граничные условия для напряжений равносильны следующим условиям для функции напряжений [2,3]:

$$(g\Phi_m)\big|_{\beta=\beta_m}=\varphi_m(\alpha); \qquad \left.\frac{\partial(g\Phi_m)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\beta_m}=\psi_m(\alpha) \tag{1.5}$$

Предполагая, что $\varphi_m(\alpha)$ и $\psi_m(\alpha)$ $(m=1,2)$ удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.

На линии контакта имеет следующие условия:

$$\left.\frac{\partial(g\Phi_m)}{\partial\beta}\right|_{\beta=0}=0 \quad \alpha\in(-\infty,\infty)$$

$$\begin{aligned}
&(g\Phi_m)\big|_{\beta=0}=0 \quad |\alpha|\in(\alpha_1,\alpha_2)\\
&(g\Phi_1)\big|_{\beta=0}=(g\Phi_2)\big|_{\beta=0} \quad |\alpha|\in(0,\alpha_1)\cup(\alpha_2,\infty)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$V_1\big|_{\beta=0}=V_2\big|_{\beta=0} \quad |\alpha|\in(0,\alpha_1)\cup(\alpha_2,\infty) \quad (m=1,2)$$

Учитывая симметрию, бигармоническую функцию напряжений $\Phi_m(\alpha,\beta)$ $(m=1,2)$ удобно представить интегралом Фурье такого вида

$$g\Phi_m(\alpha,\beta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_m(t,\beta)\cos\alpha\,dt \quad (m=1,2) \tag{1.7}$$

где

$$\begin{aligned}
&f_m(t,\beta)=A_m(t)\operatorname{ch}t\beta\cos\beta+B_m(t)\operatorname{sh}t\beta\sin\beta+\\
&+C_m(t)\operatorname{sh}t\beta\cos\beta+D_m(t)\operatorname{ch}t\beta\sin\beta \qquad (m=1,2)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.5) и часть контактным условиям (1.6), получаем следующие системы уравнений для определения неизвестных интегрирования:

$$\begin{aligned}
&f_m(t,\beta_m)=\overline{\varphi}(t), \quad f_m'(t,\beta_m)=\overline{\psi}_m(t)\\
&f_m'(t,0)=0, \quad f_m(t,0)=X(t) \qquad (m=1,2)
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где величины $\overline{\varphi}_m(t)$ и $\overline{\psi}_m(t)$ $(m=1,2)$ являются преобразованиями Фурье от значений функции $\varphi_m(\alpha)$ и $\psi_m(\alpha)$ $(m=1,2)$.

$$\begin{aligned}
&\overline{\varphi}_m(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\varphi_m(\alpha)\cos t\alpha\,d\alpha\\
&\overline{\psi}_m(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\psi_m(\alpha)\cos t\alpha\,d\alpha \quad (m=1,2)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

а $X(t)$ - пока неизвестная функция, которая определяется позже.

Разрешая систему (1.9) для неизвестных $A_m(t)$, $B_m(t)$, $C_m(t)$ и $D_m(t)$

$(m=1,2)$, найдем значения через неизвестную $X(t)$

$$A_m(t)=X(t)$$

$$B_m(t)=-\frac{t\left(\operatorname{sh}^2 t\beta_m+\sin^2\beta_m\right)}{\Delta_m(t)}X(t)+\frac{\left(t^2+1\right)\operatorname{sh} t\beta_m+\sin\beta_m}{\Delta_m(t)}\overline{\varphi}_m(t)+$$
$$+\frac{\operatorname{sh} t\beta_m\cos\beta_m-t\operatorname{ch} t\beta_m\sin\beta_m}{\Delta_m(t)}\overline{\psi}_m(t)$$

$$C_m(t)=-\frac{\operatorname{sh}2t\beta_m+t\sin 2\beta_m}{2\Delta_m(t)}X(t)-\frac{\operatorname{sh} t\beta_m\sin\beta_m}{\Delta_m(t)}\overline{\psi}_m(t)+ \tag{1.11}$$
$$+\frac{t\operatorname{ch} t\beta_m\sin\beta_m+\operatorname{sh} t\beta_m\cos\beta_m}{\Delta_m(t)}\overline{\varphi}_m(t)$$

$$D_m(T)=-tC_m(t)\qquad (m=1,2)$$

где

$$\Delta_m(t)=\operatorname{sh}^2 t\beta_m-t^2\sin^2\beta_m\qquad (m=1,2) \tag{1.12}$$

Неизвестная функция $X(t)$ определяется из следующей системы парных интегральных уравнений, которые получаются из следующих контактных условии (1.6):

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty X(t)\cos t\alpha\,dt=0 & \alpha\in(\alpha_1,\alpha_2)\\ \displaystyle\int_0^\infty t\left(M(t)X(t)+N(t)\right)\cos t\alpha\,dt=0 & \alpha\in(0,\alpha_1)\cup(\alpha_2,\infty)\end{cases} \tag{1.13}$$

где

$$M(t)=\frac{\operatorname{sh}2t\beta_1+t\sin 2\beta_1}{2\Delta_1(t)}-h\frac{\operatorname{sh}2t\beta_2+t\sin 2\beta_2}{2\Delta_2(t)}$$

$$N(t)=-\frac{t\operatorname{ch} t\beta_1\sin\beta_1+\operatorname{sh} t\beta_1\cos\beta_1}{\Delta_1(t)}\overline{\varphi}_1(t)+\frac{\operatorname{sh} t\beta_1\sin\beta_1}{\Delta_1(t)}\overline{\psi}_1(t)+$$
$$+\frac{ht\operatorname{ch} t\beta_2\sin\beta_2+\operatorname{sh} t\beta_2\cos\beta_2}{\Delta_2(t)}\overline{\varphi}_2(t)-\frac{h\operatorname{sh} t\beta_2\sin\beta_2}{\Delta_2(t)}\overline{\psi}_2(t) \tag{1.14}$$

$$h=\frac{\mu_1(1-\nu_2)}{\mu_2(1-\nu_1)}$$

Применяя преобразование Фурье, получаем интегральные уравнения

Фредгольма второго рода

$$X(t)=\frac{1}{\pi t M(t)}\int_0^\infty K(t,\tau)\left[\left(\tau M(\tau)-1\right)X(\tau)+\tau N(\tau)\right]d\tau-\frac{N(t)}{M(t)}$$

где

$$K(t,\tau)=\frac{\sin(t+\tau)\alpha_2-\sin(t+\tau)\alpha_1}{t+\tau}+\frac{\sin(t-\tau)\alpha_2-\sin(t-\tau)\alpha_1}{t-\tau} \quad (1.15)$$

В частном случае, при $\alpha_1=\alpha_2$

$$X(t)=-\frac{N(t)}{M(t)} \quad (1.16)$$

решение совпадает с решением, полученным в работе [4], при $\alpha_1=0$ или $\alpha_2=\infty$ решение совпадает с решением, полученным в работе [4].

На линии контакта нормальное напряжение имеет вид

$$a\sigma_\beta^{(m)}\Big|_{\beta=0}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^\infty\left(\left(\tau M(\tau)-1\right)X(\tau)+\tau N(\tau)\right)d\tau\times$$
$$\times\int_0^\infty\left(-t^2(\operatorname{ch}\alpha+1)\cos t\alpha+t\operatorname{sh}\alpha\sin t\alpha-\cos t\alpha\right)\frac{K(t,\tau)}{t}\frac{\Delta_1(t)\Delta_2(t)}{\Delta(t)}dt- \quad (1.17)$$
$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\left(-t^2(\operatorname{ch}\alpha+1)\cos t\alpha+t\operatorname{sh}\alpha\sin t\alpha-\cos t\alpha\right)\frac{N(t)}{M(t)}dt$$

где

$$\Delta(t)=\left(\operatorname{sh}2t\beta_1+t\sin2\beta_1\right)\left(\operatorname{sh}^2 t\beta_2-t^2\sin^2\beta_2\right)-$$
$$-h\left(\operatorname{sh}2t\beta_2+t\sin2\beta_2\right)\left(\operatorname{sh}^2 t\beta_1-t^2\sin^2\beta_1\right) \quad (1.18)$$

Выясним характер напряжений в точках $\alpha=\alpha_1$, $\alpha=\alpha_2$ и $\alpha=\infty$. Из (1.19) после некоторых преобразований получаем

$$a\sigma_\beta\Big|_{\beta=0}=\frac{\operatorname{ch}\alpha+1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{\sqrt{\alpha_1-\alpha}+\sqrt{\alpha_1+\alpha}}{\sqrt{\alpha_1^2-\alpha_2^2}}\cos\tau\alpha_1-\right.$$
$$\left.-\frac{\sqrt{\alpha-\alpha_2}+\sqrt{\alpha_2+\alpha}}{\sqrt{\alpha^2-\alpha_2^2}}\cos\tau\alpha_2\right]Y(\tau)d\tau+H(\alpha) \quad (1.19)$$

При $\alpha=\alpha_1$ или $\alpha=\alpha_2$ на линии контакта нормальные напряжения имеют особенность порядка $1/2$. В представленном виде (1.19) член, содержащий особенность в точках $\alpha=\alpha_1$ и $\alpha=\alpha_2$, разделен, а $H(\alpha)\to 0$ при $\alpha=\alpha_1$ или $\alpha=\alpha_2$.

Для исследования поведения напряжений в окрестности края поверхности контакта $x=a$ (т.е. $\alpha=\infty$) нормальное напряжение представим в виде

$$a\sigma_\beta\Big|_{\beta=0}=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(t^2\left(1-\bar{e}^{\alpha}\right)^2+it\left(1+\bar{e}^{2\alpha}\right)+2\bar{e}^{\alpha}\right)\frac{V(t)}{\Delta(t)}e^{(1+it)\alpha}\,dt \tag{1.20}$$

где

$$V(t)=\frac{\Delta_1(t)\Delta_2(t)}{t}\left(\int_0^{\infty}K(t,\tau)Y(\tau)\,d\tau-\pi tN(t)\right) \tag{1.21}$$

Для применения теоремы о вычетах интеграл (1.20) по вещественной оси дополняется интегралом по верхней (при $x<0$ или $\alpha<0$) или нижней (при $x>0$ или $\alpha>0$) полуокружностям радиуса $R\to\infty$ с центром в начале координат. После обычной процедуры (1.20) представим в виде бесконечного ряда

$$\begin{aligned}a\sigma_\beta\Big|_{\beta=0}&=-i\pi\sqrt{2\pi}\left(t_1^{\,2}\left(1+\bar{e}^{\alpha}\right)^2+it_1\left(1+\bar{e}^{2\alpha}\right)+2\bar{e}^{\alpha}\right)\frac{V(t_1)}{\Delta'(t_1)}e^{(1-\eta_1+i\xi_1)\alpha}-\\&-i\pi\sqrt{2\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\text{Выч}\left(t_k^{\,2}\left(1-\bar{e}^{\alpha}\right)^2+it_k\left(1+\bar{e}^{2\alpha}\right)+2\bar{e}^{\alpha}\right)\frac{V(t_k)}{\Delta'(t_k)}e^{(1+it_k)\alpha}\end{aligned} \tag{1.22}$$

где $t_k=\xi_k-i\eta_k$ - корни уравнения $\Delta(t)=0$, которые расположены в порядке возрастания положительных значений η_k.

Очевидно, характер напряженного состояния около края $x=a$ $(\alpha=\infty)$ определяется величиной мнимой части первого простого корня $t_1=\xi_1-i\eta_1$ уравнения $\Delta(t)=0$. Если $\eta_1>1$, имеем нулевое напряженное состояние. Если $\eta_1<1$, имеем концентрации напряжений. В случае $\eta_1=1$ напряжения на краю поверхности контакта конечны.

Уравнения, характеризующее поведение напряжений, не зависит от внешних усилий. В общем случае меняются только коэффициенты особенностей.

В случае, когда размеры областей одинаковы, и нагружение-симметричное, решение задач не зависят от упругих характеристик составляющих материалов. Аналогичные результаты для других областей были получены в работах [4, 5, 6].

Литература

1. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости- М. -Л.: Гостехиздат, 1950.
2. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости.- Ленинград, Изд. "Наука", 1968.

3. *Арутюнян Л. А.* Плоская задача теории упругости для составной области, образованной из двух луночек.- Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, 29, №1.
4. *Арутюнян Л. А., Апикян Ж. Г., Аветисян Г. А.* Плоская контактная задача для составного тела с симметричной трещиной между материалами.- Инж. проблемы строительной механики. ЕрПИ, Ереван, 1985.
5. *Мелконян М. Г., Мкртчян А. М.* Об одной контактной задаче для двух прямоугольников -Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. 28, №3.
6. *Абрамян Б. Л., Макарян В. С.* Осесимметричная задача о контакте между двумя слоями из различных материалов с учетом трения между слоями. - Изв. АН Арм ССР, Механика, 1976, т.29, №5.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
22. 11. 1993

ԿԱՆՈՆՆԵՐ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

1. Հայաստանի ԳԱԱ տեղեկագրի «Մեխանիկա» սերիային ներկայացվող հոդվածներին կցվում է փորձաքննության թույլտվություն այն հիմնարկից, որտեղ կատարված է աշխատանքը:

2. Հոդվածները ներկայացվում են հայերեն, անգլերեն կամ ռուսերեն, երկու օրինակից, հնարավորին չափ սեղմ, պարզ շարադրված:

3. Բանաձևերն ու նշանակումները գրվում են պարզ ու որոշակի, ընդ որում մեծատառերը ցայտուն կերպով պետք է տարբերվեն փոքրատառերից:

Եթե մեծատառերը և փոքրատառերը նման են իրենց գծագրությամբ, մեծատառերն ընդգծվում են երկու գծիկով, իսկ փոքրատառերը երկու գծիկով նշվում են վերևից: Օրինակ՝ $\underline{\underline{V}}$ և $\overline{\overline{v}}$, $\underline{\underline{O}}$ և $\overline{\overline{o}}$, $\underline{\underline{K}}$ և $\overline{\overline{k}}$, $\underline{\underline{U}}$ և $\overline{\overline{u}}$, $\underline{\underline{S}}$ և $\overline{\overline{s}}$ և այլն: Պետք է հստակ տարբերակել $\underline{\underline{O}}$-ն, $\overline{\overline{o}}$-ն և 0-ն (զրո), որի համար 0-ն (զրո) պետք է ընդգծել ներքևից քառակուսի փակագծով (մատիտով):

Անհրաժեշտ է խնամքով գրել իրար նման տառերը՝ g և q, l և e, I, J Y, u և n և այլն:

Հունարեն տառերն ընդգծել կարմիր մատիտով:

Ինդեքսներն ու աստիճանացույցը պետք է սև մատիտով նշել աղեղով՝ համապատասխանաբար ⌒ կամ ◡ օրինակ՝ N_{ρ}^{*}

Մաթեմատիկական նշանակումները (sin, arcsin, ln, lg, lim, const և այլն) ընդգծել հորիզոնական ուղիղ փակագծով:

4. Գրականությունը, ընդհանուր ցուցակով, կցվում է հոդվածի վերջում: Ընդ որում, տվյալները նշվում են հետևյալ հաջորդականությամբ, եթե գիրք է՝ հեղինակի ազգանունը, անվան, հայրանվան սկզբնատառերը, աշխատության վերնագիրը, ամսագրի անունը, հրատարակման տարեթիվը, հատորը, պրակը, էջերը:

Տեքստում հղումները նշվում են քառակուսի փակագծերի մեջ առնված թվերով:

5. Գծագրերը կցվում են առանձին թերթերով: Նկարների տեղերը նշվում են ձախ լուսանցքում «նկ ...» նշումով:

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статьи, представляемые в "Известия НАН Армении, Механика", должны сопровождаться разрешением на опубликование от учереждения, в котором выполнена работа.

2. Статьи представляются на армянском, английском или русском языках в двух экземплярах в возможно сжатой и ясно изложенной форме.

3. Формулы и все обозначения вписываются четко и ясно, при этом должно быть отчетливое различие между заглавными и строчными буквами.

В тех случаях, когда заглавные и строчные буквы одинаковы по начертанию необходтмо заглавные буквы подчеркнуть снизу двумя черточками, а строчные отметить двумя черточками сверху, например: $\underline{\underline{V}}$ и $\overline{\overline{v}}$, $\underline{\underline{O}}$ и $\overline{\overline{o}}$, $\underline{\underline{K}}$ и $\overline{\overline{k}}$, $\underline{\underline{U}}$ и $\overline{\overline{u}}$, $\underline{\underline{S}}$ и $\overline{\overline{s}}$ и т. д. Следует также делать различие между $\underline{\underline{O}}$, $\overline{\overline{o}}$ и 0 (нулем), для чего 0 (нуль) следует подчеркнуть снизу квадратной скопкой (карандашом).

Необходимо тщательно вписывать похожие друг на друга буквы, например g и q, l и e, I, J Y, u и n и др. Греческие буквы подчеркивать красным карандашом.

Индексы и показатели следует отметить черным карандашом соответственно дугой ⌒ или ◡, например: N_{ρ}^{*}.

Математические обозначения, например: sin, arcsin, ln, lg, lim, const и т. д. надо подчеркивать горизонтальной прямой скобкой.

6. Литература приводится общим списком в конце статьи, при этом в нижеследующей последовательности указываются: для книги- фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место издания, издательство, год издания, страницы; для журнала - фамилия и инициалы автора, наименование работы, название журнала, год издания, том (подчеркнуть) и выпуск. Ссылка на литературу в тексте дается цифрой в квадратных скобках.

7. Чертежы прилагаются на отдельных листах. Места илюстраций указываются на левом поле страницы отметкой "фиг..."