

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ. ПРОCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱՊՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՐԶԱՍԻՐՆԵՐ ԱՎԱԴԵՐՄԱՅԻ ՏԵԴԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1994

УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ЖЕСТКОСТИ, КОЛЕБАНИЙ И
УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ, ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ
СЛОЕВ СО СЛУЧАЙНЫМИ
УПРУГИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

БЕЛУБЕКЯН М.Э., ГНУНИ В.Ц.

Բելուբեկյան Մ.Է., Գնունի Վ.Շ.

Պարահալան առաձգական բնութագրեր ունեցող շերտերից պատրաստված բազմաշերտ սալի կոշտության, փափանումների և կայունության օպտիմիզացման խնդիրներ

Դիֆուրկում են օպտիմիզացման խնդիրներ, երբ սալի շերտերը պատրաստված են այնպիսի իզոտրոպ նյութերից, որոնց առաձգական բնութագրերը նորմալ օրենքով բաշխված մեծություններ են: Պահպանելով սալի կշիռը հաստատուն, որոշվում են դրա այնպիսի օպտիմալ կառուցվածքները, որոնց դեպքում մեծագույն հավանականությամբ կապահովվեն սալի կոշտությունը, կայունությունը և փափանումների փոքրագույն առաջին հաճախությունը:

Belubekian M.E., Gnuni V.Z.

Optimization Problems on Stiffness, Vibrations and Stability of
a Multi-Layer Plate Made of Layers With Random Elastic Characteristics

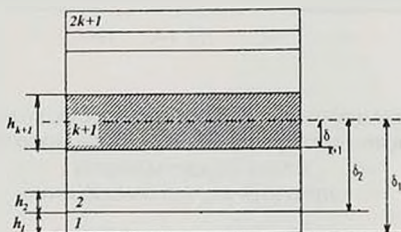
В работе рассматриваются оптимизационные задачи жесткости, колебаний и устойчивости многослойной прямоугольной пластинки в случае, когда слои пластинки изготовлены из изотропных материалов, характеристики упругости которых являются случайными величинами с нормальными законами распределения. При постоянном весе пластинки определяются ее оптимальные структуры, при которых с наибольшей вероятностью будут обеспечены жесткость, устойчивость и заданная низшая частота собственных колебаний пластинки.

1. Рассматривается $(2k+1)$ -слойная пластинка симметричной структуры размерами $a \times b \times h$, шарнирно опертая по контуру и нагруженная поперечной равномерно распределенной нагрузкой $q_0 = \text{const}$ (фиг.1). Считается, что слои пластинки изготовлены из изотропных материалов с нормально распределенными характеристиками упругости. Ставится задача определения структуры пластинки (относительно толщин слоев), при которой с наибольшей вероятностью максимальный прогиб пластинки постоянного веса не будет превышать заданную величину.

Дифференциальное уравнение изгиба пластинки представляется в виде [1]:

$$D\Delta^2 W = q_0 \quad (1)$$

где $W(x, y)$ - функция прогибов пластинки.



Фиг. 1

Жесткость на изгиб многослойной симметричной пластинки вычисляется по формуле

$$D = \frac{2}{3} \left[B_{k+1} \delta_{k+1}^3 + \sum_{i=1}^k B_i (\delta_i^3 - \delta_{i+1}^3) \right]$$

где $B_i = \frac{E}{1 - \nu_i^2}$ - характеристика упругости i -го слоя, δ_i - расстояние от срединной поверхности до i -го слоя, которое можно выразить через толщины слоев пластинки:

$$\delta_i = \sum_{l=i}^k h_l + \frac{h_{k+1}}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

$$\delta_{k+1} = \frac{h_{k+1}}{2}$$

где h_i - толщина i -го слоя пластинки.

Принимается масса пластинки заданной и равной массе однослойной пластинки толщины h изготовленной из материала $(k+1)$ -го слоя:

$$\rho_{k+1} h_{k+1} + 2 \sum_{i=1}^k \rho_i h_i = \rho_{k+1} h$$

где ρ_i - плотность материала i -го слоя.

Введением безразмерных величин характеристик упругости и жесткости пластинки:

$$\bar{B}_i = \frac{B_i}{B_{k+1}^0}, \quad \bar{D} = \frac{3D}{2h^3 B_{k+1}^0} \quad (2)$$

где B_{k+1}^0 - среднее значение B_{k+1} , для безразмерной жесткости получится следующая формула:

$$\bar{D} = \sum_{i=1}^{k+1} \bar{B}_i \left[\left(\sum_{l=i}^k \alpha_l \right)^3 - \left(\sum_{l=i+1}^k \alpha_l \right)^3 \right] + \bar{B}_k \left[\alpha_k^3 - \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^k \frac{\rho_i}{\rho_{k+1}} \alpha_i \right)^3 \right] + \\ + \bar{B}_{k+1} \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^k \frac{\rho_i}{\rho_{k+1}} \alpha_i \right)^3$$

где $\alpha_i = \frac{h_i}{h}$.

Зная законы распределения входящих в это выражение величин $\bar{B}_i$, можно определить также закон распределения жесткости $\bar{D}$. Предполагается, что случайные величины $\bar{B}_i$ подчиняются нормальным законам распределения вероятностей со стандартами $\bar{S}_i$ и модами $\bar{m}_i$, причем $\bar{S}_i$ является среднеквадратическим отклонением, а $\bar{m}_i$ - математическим ожиданием случайной величины $\bar{B}_i$, то есть плотность распределения вероятностей $\bar{B}_i$ имеет вид [2]:

$$f_i(\bar{B}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \bar{S}_i} e^{-\frac{(\bar{B}_i - \bar{m}_i)^2}{2\bar{S}_i^2}} \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

Поскольку $\bar{D}$ является суммой случайных величин $\bar{B}_i$ с соответствующими коэффициентами, то ее закон распределения также нормальный:

$$f(\bar{D}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \bar{S}} e^{-\frac{(\bar{D} - \bar{m})^2}{2\bar{S}^2}}$$

Безразмерное математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины $\bar{D}$ вычисляются по следующим формулам:

$$\bar{m} = \sum_{i=1}^{k+1} \left[\left(\sum_{l=i}^k \alpha_l \right)^3 - \left(\sum_{l=i+1}^k \alpha_l \right)^3 \right] + \left[\alpha_k^3 - \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^k \frac{\rho_i}{\rho_{k+1}} \alpha_i \right)^3 \right] + \\ + \bar{m}_{k+1} \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^k \frac{\rho_i}{\rho_{k+1}} \alpha_i \right)^3$$

$$\bar{S} = \left[\sum_{i=1}^{k-1} \bar{S}_i^2 \left[\left(\sum_{l=1}^k \alpha_l \right)^3 - \left(\sum_{l=i+1}^k \alpha_l \right)^3 \right]^2 + \bar{S}_k^2 \left[\alpha_k^3 - \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^k \frac{\rho_i}{\rho_{k+1}} \alpha_i \right)^3 \right]^2 + \right. \\ \left. + \bar{S}_{k+1}^2 \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^k \frac{\rho_i}{\rho_{k+1}} \alpha_i \right)^6 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Прогибы пластинки определяются из уравнения (1) с удовлетворением граничных условий опирания по контуру [3]

$$W(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

Максимальный прогиб $\left(x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2} \right)$ равен

$$\bar{W}_{\max} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}+1}}{mn(m^2 + n^2 \lambda^2)^2}$$

где $\lambda = \frac{a}{b}$.

Подстановкой сюда значения D из формулы (2) и переходом к безразмерным величинам получается

$$\bar{W}_{\max} = \frac{\pi^6 h^3 B_{k+1}^0}{24q_0 a^4} \frac{1}{\sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}+1}}{mn(m^2 + n^2 \lambda^2)^2}} \cdot W_{\max} = \frac{1}{D} \quad (3)$$

Поставленная задача сводится к нахождению такой структуры пластинки (значений $\alpha_i, i=1, 2, \dots, k$) при которой с наибольшей вероятностью $W_{\max}$ не будет превышать заранее заданное значение γ , то есть нужно найти:

$$Q_n = \sup_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} [P(W \leq \gamma)],$$

что ввиду (3) равносильно

$$Q_W = \sup_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \left(1 - \int_0^{\frac{1}{D}} f(\bar{D}) d\bar{D} \right) \quad \alpha_i \in [0; 1] \quad (4)$$

2. Для рассматриваемой задачи пластинки ставится задача нахождения оптимальной структуры, при которой с наибольшей вероятностью значение низшей частоты собственных колебаний будет больше заданной величины.

Уравнение собственных колебаний пластинки имеет вид [1]:

$$D\Delta^2 W + \rho_{k+1} h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$$

где t - время.

Решение задачи с учетом формулы (2) для жесткости пластинки приводит к следующему значению квадрата первой частоты собственных колебаний:

$$\omega_{11}^2 = \frac{2h^2 B_{k+1}^0}{3\rho_{k+1}} \cdot \frac{\pi^4}{a^4} (1 + \lambda^2)^2 \bar{D}$$

После введения безразмерного значения квадрата частоты собственных колебаний

$$\bar{\omega}^2 = \frac{3\rho_{k+1} a^4}{2h^2 B_{k+1}^0 \pi^4 (1 + \lambda^2)^2} \omega^2$$

получается $\bar{\omega}_{11}^2 = \bar{D}$.

Поставленная задача сводится к определению такой структуры пластинки (значений $\alpha_i, i=1, 2, \dots, k$), при которой с наибольшей вероятностью значение $\bar{\omega}_{11}$ будет больше заданного β , то есть ищется

$$Q_\omega = \sup_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \left(1 - \int_0^{\beta^2} f(\bar{D}) d\bar{D} \right) \quad \alpha_i \in [0; 1] \quad (5)$$

3. Рассматривается случай многослойной симметричной пластинки, когда к ее граням перпендикулярно оси X приложена равномерно распределенная нагрузка P . Ставится задача определения структуры пластинки постоянного веса, при которой критическая нагрузка с наибольшей вероятностью будет больше заданной величины.

Дифференциальное уравнение устойчивости пластинки имеет вид [2]:

$$D\Delta^2 W + P \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$$

После решения этого уравнения с учетом условия граничного опирания пластинки по контуру получается следующее выражение для критической силы:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(m^2 + \frac{\lambda^4}{m^2} + 2\lambda^2 \right)$$

С учетом формулы (2) для жесткости пластинки и обезразмериванием величины P_{KP} получается:

$$\bar{P}_{KP} = \frac{3a^3}{2\pi^2 h^3 B_{k+1}^0} \frac{1}{\left(m^2 + \frac{\lambda^2}{m^2} + 2\lambda^2\right)} P_{KP} = \bar{D}$$

Поставленная задача сводится к нахождению такой структуры пластинки (значений α_i , $i = 1, 2, \dots, k$), при которой $\bar{P}_{KP}$ с наибольшей вероятностью будет больше заранее заданного значения ϑ , то есть надо найти:

$$Q_i = \sup_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \left(1 - \int_0^{\vartheta} f(\bar{D}) d\bar{D} \right) \quad \alpha_i \in [0; 1] \quad (6)$$

4. Как видно, для решения всех трех задач необходимо вычисление интегральной функции распределения случайной величины $\bar{D}$:

$$F(\bar{D}) = \int f(\bar{D}) d\bar{D}$$

В качестве примера решения этих задач рассматривается трехслойная пластинка ($k = 1$), где толщина внешнего слоя равна $\frac{h_1}{2}$, толщина внутреннего слоя равна h_2 , а $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 0.62$. Числовые расчеты произведены для двух случаев распределения упругих характеристик. В первом случае принимается $\bar{m}_1 = 1.57$; $\bar{m}_2 = 1$; $\bar{S}_1^2 = 0.31$; $\bar{S}_2^2 = 0.011$. Во втором случае $\bar{m}_1 = 10$; $\bar{m}_2 = 1$; $\bar{S}_1^2 = 1.1$; $\bar{S}_2^2 = 0.031$.

Поскольку формулы (4), (5), (6) для вычисления наибольших вероятностей в каждой из рассматриваемых задач имеют одинаковый вид, то для упрощения числовых расчетов пределы интегрирования приняты одинаковыми

$$\left(\frac{1}{\gamma} = \beta^2 = \vartheta = A \right). \text{ Тогда}$$

$$Q_w = Q_\omega = Q_i = Q = \sup_{\alpha} \left(1 - \int_0^A f(\bar{D}) d\bar{D} \right)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{h_1}{h}.$$

$\bar{m}_1 = 1.57; \bar{m}_2 = 1; \bar{S}_1^2 = 0.3; \bar{S}_2^2 = 0.01$			$\bar{m}_1 = 10; \bar{m}_2 = 1; \bar{S}_1^2 = 1.1; \bar{S}_2^2 = 0.031$		
A	α	Q_0	A	α	Q_0
0.900	0.95	0.8488	3.4	0.55	0.8646
0.925	0.95	0.7755	3.5	0.55	0.7999
0.950	0.95	0.6856	3.6	0.55	0.7197
0.975	1.00	0.5941	3.7	0.55	0.6263
1.000	1.00	0.5000	3.8	0.55	0.5249
1.025	1.00	0.4059	3.9	0.55	0.4218
1.050	1.00	0.3169	4.0	0.55	0.3239
1.075	1.00	0.2375	4.1	0.55	0.2368
1.100	1.00	0.1704	4.2	0.55	0.1645
1.125	1.00	0.1169	4.3	0.55	0.1082

В табл.1 приведены оптимальные значения параметра α и соответствующие вероятности Q в зависимости от величин A .

Как видно из полученных результатов, при использовании материалов слоев со сравнительно близкими упругими характеристиками (первый случай) оптимальной получается пластинка, изготовленная из материала среднего слоя. При более резком различии упругих характеристик материалов слоев (второй случай) оптимальной является структура пластинки, когда $\alpha = 0.55$ ($h_2 = 0.55h$, $h_1 = 0.28h$). То есть получается пластинка со сравнительно тонкими усиливающими наружными слоями ($\frac{h_1}{2} = 0.14h$) из материала с высокими упругими характеристиками.

Л и т е р а т у р а

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. - М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. - М.: Наука, 1967. 984 с.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. - М.: Госфизматиздат, 1963. 635 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
10.03.1993

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АМПЛИТУД ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ
И УГЛОВЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖЕСТКОГО ФУНДАМЕНТА, ЛЕЖАЩЕГО НА
УПРУГОМ ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СО СЦЕПЛЕНИЕМ

Абрамян Б.Л., Гаспарян А.В.

Բ. Լ. Աբրահամյան, Ա. Վ. Գասպարյան

Համասեռ առաձգական կիսավարածության վրա ամրակցումով զննվող
կոշտ կշռելի ֆունդամենտի հորիզոնական եւ անկյունային տատանումների
ամպլիտուդների որոշման մի եղանակի մասին

Դիտարկվում են առաձգական կիսավարածության մակերևույթի վրա ամրակցված
կշռելի կլոր հիմքով կոշտ ֆունդամենտի հորիզոնական եւ անկյունային տատանիկ տատա-
նումները: Խնդրի լուծումը կառուցվում է մի սկայյար եւ մի վեկտորային պոտենցիալ ֆունկ-
ցիաների օգնությամբ: Ֆունդամենտի եւ առաձգական կիսավարածության միջև կոնտակ-
տային յարամների որոշումը բերվում է երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումնե-
րի համակարգի լուծմանը: Կոշտ ֆունդամենտի հորիզոնական եւ անկյունային տատանում-
ների ամպլիտուդների որոշման համար արտածվում են մաթեմատիկական բանաձևեր: Դի-
նամիկ խնդրի համար ստացված լուծումից մասնավոր դեպքում ստացվում է համապատաս-
խան ստատիկ խնդրի լուծումը:

B.L.Abrahamian, A.V.Gasparyan

On the One Method of Amplitudes Definition of Horizontal and Rocking Vibrations
of Solid Heavy Footing Lying on the Elastic Homogeneous Half-Space with Cohesion

Рассматриваются горизонтальные и угловые гармонические колебания сцепленного с упругим
полупространством круглого в плане жесткого весомого фундамента.

Решение задачи строится при помощи одной скалярной и одной векторной потенциальных
функций. Определение контактных напряжений фундамента с упругим полупространством сводится
к решению системы сингулярных интегральных уравнений второго рода. Выводятся аналитические
выражения для определения амплитуд горизонтальных и угловых колебаний фундамента.

В частном случае из полученного решения динамической задачи получается решение
соответствующей статической задачи.

Горизонтальные и угловые колебания жесткого круглого фундамента рассматривались также в
работах [1-5].

1. Постановка задачи. Под действием горизонтальной гармонической на-
грузки вида $Qe^{i\omega t}$, приложенной на верхней поверхности круглого жесткого
фундамента, сцепленного с упругим однородным основанием-полупростран-

ством, и направленной параллельно оси Ox , фундамент совершает колебательные движения.

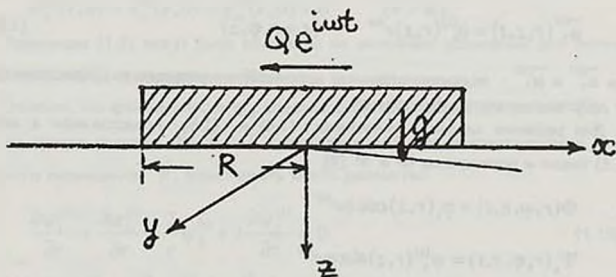
Граничные условия на поверхности упругого полупространства можно представить в виде (фиг. 1)

$$\begin{aligned} u_x|_{z=0} &= -\gamma_{\omega} e^{i\omega t} \\ u_x|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} u_z|_{z=0} - \varepsilon &= \chi_{\omega} x e^{i\omega t} \quad (x^2 + y^2 < R^2) \\ \sigma_z|_{z=0} = \tau_{xz}|_{z=0} = \tau_{yz}|_{z=0} &= 0 \quad (x^2 + y^2 > R^2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь ε - осадка центральной точки нижней подошвы фундамента под действием собственного веса P фундамента; γ_{ω} - амплитуда горизонтальных колебаний фундамента, вызванных действием гармонической касательной силы $Qe^{i\omega t}$; χ_{ω} - амплитуда угловых колебаний фундамента вокруг оси Oy .

Осадка центральной точки подошвы фундамента под действием собственного веса фундамента считается известной из решения соответствующей статической задачи о действии жесткого круглого фундамента с плоским основанием вдавливаемого в упругое однородное полупространство с учетом сцепления.



Фиг. 1

Эта задача рассматривалась многими авторами и в работах В.И. Моссаковского [6,7] для осадки ε дается значение

$$\varepsilon = \frac{P(1+\nu)(1-2\nu)}{2ER \ln(3-4\nu)} \quad (1.3)$$

где P - вес фундамента, E - модуль упругости материала упругого основания фундамента, R - радиус фундамента, а V - коэффициент Пуассона основания.

Переходя из условий (1.1) и (1.2) к цилиндрической системе координат, для граничных условий будем иметь

$$\begin{aligned} u_r|_{z=0} &= -\gamma_\omega \cos \varphi e^{i\omega t} \\ u_\varphi|_{z=0} &= \gamma_\omega \sin \varphi e^{i\omega t} \quad (r < R) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} u_z|_{z=0} - \varepsilon &= \chi_\omega r \cos \varphi e^{i\omega t} \\ \sigma_z|_{z=0} = \tau_{rz}|_{z=0} = \tau_{z\varphi}|_{z=0} &= 0 \quad (r > R) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Представляем искомые перемещения в виде

$$\begin{aligned} u_r(r, \varphi, z, t) - \bar{u}_r^{(0)}(r, z) &= \bar{u}_r^{(1)}(r, z, t) \cos \varphi \\ u_\varphi(r, \varphi, z, t) &= \bar{u}_\varphi^{(1)}(r, z, t) \sin \varphi \\ u_z(r, \varphi, z, t) - \bar{u}_z^{(0)}(r, z) &= \bar{u}_z^{(1)}(r, z, t) \cos \varphi \\ \bar{u}_s^{(1)}(r, z, t) &= u_s^{(1)}(r, z) e^{i\omega t} \quad (s = r, \varphi, z) \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\bar{u}_r^{(0)}$ и $\bar{u}_z^{(0)}$ - осесимметричные перемещения упругого полупространства от действия весомого фундамента.

Для решения задачи с условиями (1.4) и (1.5) представляем в виде (1.6) также и потенциалы Φ и $\bar{\Psi}$ [8]

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi, z, t) &= \varphi_1(r, z) \cos \varphi e^{i\omega t} \\ \Psi_z(r, \varphi, z, t) &= \psi_z^{(1)}(r, z) \sin \varphi e^{i\omega t} \\ \Psi_\varphi(r, \varphi, z, t) &= \frac{1}{2} [\psi_1^{(1)}(r, z) - \psi_2^{(1)}(r, z)] \cos \varphi e^{i\omega t} \\ \Psi_r(r, \varphi, z, t) &= \frac{1}{2} [\psi_1^{(1)}(r, z) + \psi_2^{(1)}(r, z)] \sin \varphi e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (1.7)$$

После произведения преобразования по времени, волновые уравнения для потенциалов и граничные условия, с учетом нулевых начальных условий, приводятся к виду

$$(\nabla_1^2 + a^2 \omega^2) \varphi_1 = (\nabla_1^2 + b^2 \omega^2) \psi_z^{(1)} = 0$$

$$(\nabla_0^2 + b^2 \omega^2) \psi_1^{(1)} = (\nabla_2^2 + b^2 \omega^2) \psi_2^{(1)} = 0 \quad (1.8)$$

$$\nabla_m^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2}$$

$$a^2 = \frac{1}{c_1^2}, \quad b^2 = \frac{1}{c_2^2}, \quad \frac{a^2}{b^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

где c_1, c_2 - соответственно, скорости распространения продольной и поперечной волн.

А граничные условия (1.4) и (1.5) приводятся к виду

$$u_r^{(1)}(r, 0) + u_\varphi^{(1)}(r, 0) = 0$$

$$u_r^{(1)}(r, 0) - u_\varphi^{(1)}(r, 0) = -2\gamma_\omega \quad (r \leq R) \quad (1.9)$$

$$u_z^{(1)}(r, 0) = \chi_\omega r$$

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0) = \tau_z^{(1)}(r, 0) = \tau_{z\varphi}^{(1)}(r, 0) = 0 \quad (r > R)$$

Уравнения (1.8) могут быть получены из основных уравнений для потенциалов Φ и $\bar{\Psi}$, приведенных в [8].

Отметим, что функции ψ_1 и ψ_2 впервые были использованы в работе [9].

На основе условия $\text{div } \bar{\Psi} = 0$, существующего между компонентами векторного потенциала $\bar{\Psi}$, будет иметь место равенство

$$\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial r} + \frac{2}{r} \psi_2^{(1)} + 2 \frac{\partial \psi_z^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad (1.10)$$

Перемещения $u_r^{(1)}$, $u_\varphi^{(1)}$ и $u_z^{(1)}$ представляются при помощи потенциалов следующими выражениями:

$$u_r^{(1)}(r, z) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \psi_z^{(1)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial z} \right)$$

$$u_\varphi^{(1)}(r, z) = -\frac{\varphi_1}{r} - \frac{\partial \psi_z^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial z} \right) \quad (1.11)$$

$$u_z^{(1)}(r, z) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial r} - \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial r} - \frac{2}{r} \psi_2^{(1)} \right)$$

На основе представлений (1.6) и (1.11) в аналогичном виде представляются также и компоненты напряжений $\sigma_z^{(1)}$, $\tau_{rz}^{(1)}$ и $\tau_{\theta\theta}^{(1)}$.

При абсолютно жестком фундаменте и выбранной координатной системе, согласно (1.4), (1.5) и (1.9) для касательных напряжений под фундаментом допускается равенство

$$\tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = -\tau_{\theta\theta}^{(1)}(r, 0) \quad (1.12)$$

Для определения введенных неизвестных амплитуд γ_ω и χ_ω должны быть использованы динамические условия равновесия фундамента, которые записываем в виде [2,4]

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \tau_{rz} \Big|_{z=0} d\Omega &= Q e^{i\omega t} - \frac{P\omega^2 \gamma_\omega e^{i\omega t}}{g} \\ \iint_{\Omega} \tau_{\theta\theta} \Big|_{z=0} d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\iint_{\Omega} r \sigma_z \Big|_{z=0} d\Omega = M e^{i\omega t} - \frac{16P\omega^2 R^2 \chi_\omega e^{i\omega t}}{9\pi^2 g}$$

где Ω - область контакта фундамента с упругим полупространством; Q - амплитуда динамической силы, приложенной на фундаменте в горизонтальном направлении; P - вес фундамента; g - ускорение на поверхности Земли; M - амплитуда момента, вызывающего угловые колебания фундамента вокруг оси Oy , если центр тяжести фундамента находится на высоте h от контактной поверхности фундамента с упругим полупространством, то $M = hQ$.

В (1.13) учтены инерционные силы, появляющиеся из-за веса фундамента.

Введением обозначений $\sigma_z^{(1)}(r, 0) = G\sigma_z^{(1)}(r, \omega)$ и $\tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = G\tau_{rz}^{(1)}(r, \omega)$, условия (1.13) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \int_0^R r \tau_{rz}^{(1)}(r, \omega) dr &= \frac{Q}{2\pi G} - \frac{P\omega^2 \gamma_\omega}{2\pi G g} \\ \int_0^R r^2 \sigma_z^{(1)}(r, \omega) dr &= \frac{M}{\pi G} - \frac{16P\omega^2 R^2 \chi_\omega}{9\pi^3 G g} \end{aligned} \quad (1.14)$$

где второе условие из (1.13) удовлетворяется тождественно.

2. **Определение контактных напряжений.** Для решения задачи с граничными условиями (1.9) и условиями (1.14) функции $\varphi_1(r, z)$ и $\psi_s^{(1)}(r, z)$ ($s=z, 1, 2$) ищем в виде интегралов Ханкеля

$$\varphi_1(r, z) = \int_0^\infty \beta J_1(\beta r) \bar{\varphi}_1(\beta, z) d\beta, \quad \psi_z^{(1)}(r, z) = \int_0^\infty \beta J_1(\beta r) \bar{\psi}_z^{(1)}(\beta, z) d\beta$$

$$\psi_1^{(1)}(r, z) = \int_0^\infty \beta J_0(\beta r) \bar{\psi}_1^{(1)}(\beta, z) d\beta, \quad \psi_2^{(1)}(r, z) = \int_0^\infty \beta J_2(\beta r) \bar{\psi}_2^{(1)}(\beta, z) d\beta \quad (2.1)$$

Здесь путь интегрирования проходит вдоль вещественной оси плоскости β . $\bar{\varphi}_1(\beta, z)$ и $\bar{\psi}_s^{(1)}(\beta, z)$ - функции, подлежащие определению при помощи граничных условий (1.9), выражений (1.11) и подобных же выражений для напряжений.

Используя представления (2.1) в уравнениях (1.8), для определения функций $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\psi}_s^{(1)}$ получим уравнения

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_1}{\partial z^2} - \mu_a^2 \bar{\varphi}_1 = \frac{\partial^2 \bar{\psi}_s^{(1)}}{\partial z^2} - \mu_b^2 \bar{\psi}_s^{(1)} = 0 \quad (s = z, 1, 2) \quad (2.2)$$

где введены обозначения

$$\mu_a = (\beta^2 - a^2 \omega^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mu_b = (\beta^2 - b^2 \omega^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

При составлении решений для уравнений (2.2), которые получены использованием зависимости от времени множителем вида $\exp(+i\omega t)$, вдоль пути

интегрирования функции $\left(\beta^2 - \frac{\omega^2}{c_{1,2}^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ берутся неотрицательными вещественными частями, то есть по пути интегрирования вдоль действительной оси в

плоскости β обход точек $-\frac{\omega}{c_{1,2}}$ производится снизу, а точек $+\frac{\omega}{c_{1,2}}$ - сверху.

Тогда экспоненциальные выражения $e^{-\mu_a z}$ и $e^{-\mu_b z}$ при $z \neq 0$ будут соответствовать уходящим волнам [10]. Исходя из этого, поскольку мы рассматриваем упругое полупространство $z \geq 0$, ограниченные при $z \rightarrow \infty$ решения (а также и единственные) уравнений (2.2) следует взять в виде

$$\bar{\varphi}_1(\beta, z, \omega) = B^{(1)}(\beta, \omega) e^{-\mu_a z}, \quad \bar{\psi}_s^{(1)}(\beta, z, \omega) = B_s^{(1)}(\beta, \omega) e^{-\mu_b z} \quad (s = z, 1, 2) \quad (2.4)$$

Используя далее представления (1.11), (2.1) и (2.4) на поверхности упругого полупространства, будем иметь значения

$$u_z^{(1)}(r, 0) = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \beta J_1(\beta r) d\beta \left\{ 2\mu_* B^{(1)}(\beta, \omega) + \right. \\ \left. + \beta [B_1^{(1)}(\beta, \omega) + B_2^{(1)}(\beta, \omega)] \right\} = \int_0^{\infty} \beta J_1(\beta r) \bar{u}_z^{(1)}(\beta, 0, \omega) d\beta \quad (2.5)$$

$$u_r^{(1)}(r, 0) + u_\varphi^{(1)}(r, 0) = \int_0^{\infty} \beta J_2(\beta r) d\beta [\beta B_z^{(1)}(\beta, \omega) - \beta B^{(1)}(\beta, \omega) - \\ - \mu_* B_2^{(1)}(\beta, \omega)] = \int_0^{\infty} \beta J_2(\beta r) [\bar{u}_r^{(1)}(\beta, 0, \omega) + \bar{u}_\varphi^{(1)}(\beta, 0, \omega)] d\beta \quad (2.6)$$

$$u_r^{(1)}(r, 0) - u_\varphi^{(1)}(r, 0) = \int_0^{\infty} \beta J_0(\beta r) d\beta [\beta B_z^{(1)}(\beta, \omega) + \beta B^{(1)}(\beta, \omega) + \\ + \mu_* B_1^{(1)}(\beta, \omega)] = \int_0^{\infty} \beta J_0(\beta r) [\bar{u}_r^{(1)}(\beta, 0, \omega) - \bar{u}_\varphi^{(1)}(\beta, 0, \omega)] d\beta \quad (2.7)$$

$$\frac{\sigma_z^{(1)}(r, 0)}{G} = \int_0^{\infty} \beta J_1(\beta r) d\beta \left\{ (2\beta^2 - b^2 \omega^2) B^{(1)}(\beta, \omega) + \right. \\ \left. + \beta \mu_* [B_1^{(1)}(\beta, \omega) + B_2^{(1)}(\beta, \omega)] \right\} = \int_0^{\infty} \beta J_1(\beta r) \bar{\sigma}_z^{(1)}(\beta, 0, \omega) d\beta \quad (2.8)$$

$$\frac{\tau_{rz}^{(1)}(r, 0) + \tau_{\varphi\theta}^{(1)}(r, 0)}{G} = \int_0^{\infty} \beta J_2(\beta r) d\beta \left\{ \mu_*^2 B_z^{(1)}(b, \omega) + 2\beta \mu_* B^{(1)}(\beta, \omega) + \right. \\ \left. + \beta^2 B_1^{(1)}(\beta, \omega) \right\} = \int_0^{\infty} \beta J_2(\beta r) [\bar{\tau}_{rz}^{(1)}(\beta, 0, \omega) + \bar{\tau}_{\varphi\theta}^{(1)}(\beta, 0, \omega)] d\beta \quad (2.9)$$

$$\frac{\tau_{rz}^{(1)}(r, 0) - \tau_{\varphi\theta}^{(1)}(r, 0)}{G} = -\int_0^{\infty} \beta J_0(\beta r) d\beta \left\{ \mu_*^2 B_1^{(1)}(\beta, \omega) + 2\beta \mu_* B^{(1)}(\beta, \omega) + \right. \\ \left. + \beta^2 B_2^{(1)}(\beta, \omega) \right\} = \int_0^{\infty} \beta J_0(\beta r) [\bar{\tau}_{rz}^{(1)}(\beta, 0, \omega) - \bar{\tau}_{\varphi\theta}^{(1)}(\beta, 0, \omega)] d\beta \quad (2.10)$$

Учитывая граничные условия (1.9) и выражения (2.5) - (2.10), решение задачи приводим к системе сингулярных интегральных уравнений первого рода следующего вида:

$$\int_0^{\infty} t \tau_{\alpha}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} L_1(\beta, \omega) J_0(\beta t) J_1(\beta r) d\beta -$$

$$(0 < r < R) \quad (2.11)$$

$$- \int_0^R t \sigma_z^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} L_2(\beta, \omega) J_1(\beta t) J_1(\beta r) d\beta = \chi_{\omega} r$$

$$\int_0^R t \tau_{\alpha}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} L_3(\beta, \omega) J_0(\beta t) J_0(\beta r) d\beta -$$

$$(0 < r < R) \quad (2.12)$$

$$- \int_0^R t \sigma_z^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} L_1(\beta, \omega) J_1(\beta t) J_0(\beta r) d\beta = 2\gamma_{\omega}$$

Здесь использованы также следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \beta J_1(\beta r) \bar{\sigma}_z^{(1)}(\beta, 0, \omega) d\beta &= \begin{cases} \sigma_z^{(1)}(r, \omega) & (r < R) \\ 0 & (r > R) \end{cases} \\ \int_0^{\infty} \beta J_0(\beta r) [\bar{\tau}_{\alpha}^{(1)}(\beta, 0, \omega) - \bar{\tau}_{\alpha\varphi}^{(1)}(\beta, 0, \omega)] d\beta &= \begin{cases} 2\tau_{\alpha}^{(1)}(r, \omega) & (r < R) \\ 0 & (r > R) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

$$D(\beta, \omega) = 4\beta^2 \mu_a \mu_b - (2\beta^2 - b^2 \omega^2)^2$$

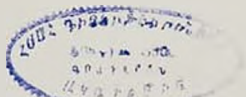
$$\beta^2 (2\mu_a \mu_b + b^2 \omega^2 - 2\beta^2) = D(\beta, \omega) L_1(\beta, \omega)$$

$$\mu_a \beta b^2 \omega^2 = D(\beta, \omega) L_2(\beta, \omega)$$

$$\beta [D(\beta, \omega) + \mu_b^2 b^2 \omega^2] = \mu_b D(\beta, \omega) L_2(\beta, \omega) \quad (2.14)$$

Интегрируемость подобных систем интегральных уравнений первого рода, полученных при решении динамических контактных задач теории упругости с учетом сцепления штампов с упругим основанием, в том числе плоских, осесимметричных и других динамических задач, исследовалась в работах В.А.Бабешко [11-13 и в др.].

В данной работе не является целесообразным провести дополнительные исследования об интегрируемости полученной системы (2.11) и (2.12). Здесь только приводится некоторое преобразование этой системы, которое делается для того, чтобы облегчить получение аналитических формул, выражающих амплитудные значения смещений точек под фундаментом и



угла наклона фундамента на поверхности упругого полупространства в зависимости от геометрических и физических параметров фундамента и его упругого основания и других факторов, влияющих на колебания фундамента.

Уравнения (2.11) и (2.12), для определения безразмерных величин $\sigma_z^{(1)}(r, \omega)$ и $\tau_{rz}^{(1)}(r, \omega)$, связанных с контактными напряжениями на поверхности упругого полупространства под фундаментом, записываем в виде

$$\int_0^R t \sigma_z^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} J_1(\beta r) J_1(\beta t) d\beta = \Phi_1(r, \chi_\omega, \omega) \quad (0 < r < R) \quad (2.15)$$

$$\int_0^R t \tau_{rz}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} J_0(\beta r) J_0(\beta t) d\beta = \Phi_2(r, \gamma_\omega, \omega) \quad (0 < r < R) \quad (2.16)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, \chi_\omega, \omega) = & \int_0^R t \sigma_z^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{L_2(\beta, \omega)}{1 - \nu} \right] J_1(\beta r) J_1(\beta t) d\beta + \\ & + \int_0^R t \tau_{rz}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} \frac{L_1(\beta, \omega)}{1 - \nu} J_1(\beta r) J_0(\beta t) d\beta - \frac{\chi_\omega r}{1 - \nu} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(r, \gamma_\omega, \omega) = & \int_0^R t \tau_{rz}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{L_3(\beta, \omega)}{2 - \nu} \right] J_0(\beta r) J_0(\beta t) d\beta + \\ & + \int_0^R t \sigma_z^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} \frac{L_1(\beta, \omega)}{2 - \nu} J_0(\beta r) J_1(\beta t) d\beta + \frac{2\gamma_\omega}{2 - \nu} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Используя здесь представления

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} J_1(\beta r) J_1(\beta t) d\beta &= \frac{2}{\pi r t} \int_0^{\min(r, t)} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)(t^2 - x^2)}} \\ \int_0^{\infty} J_0(\beta r) J_0(\beta t) d\beta &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\min(r, t)} \frac{dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)(t^2 - x^2)}} \end{aligned}$$

уравнения (2.15) и (2.16) можем представить в виде

$$\int_0^r \frac{x^2 dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} \int_0^R \frac{\sigma_z^{(1)}(t, \omega)}{\sqrt{(t^2 - x^2)}} dt = \frac{\pi r}{2} \Phi_1(r, \chi_\omega, \omega)$$

$$\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} \int_0^R \frac{t \tau_{rz}^{(1)}(t, \omega)}{\sqrt{(t^2 - x^2)}} dt = \frac{\pi}{2} \Phi_2(r, \gamma_\omega, \omega)$$

Далее, применив формулы обращения Абеля из этих уравнений, получим

$$\sigma_z^{(1)}(t, \omega) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^R \frac{dx}{x \sqrt{(x^2 - t^2)}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r^2 dr}{\sqrt{(x^2 - r^2)}} \Phi_1(r, \chi_\omega, \omega) \quad (0 < t < R) \quad (2.19)$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(t, \omega) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^R \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - t^2)}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r dr}{\sqrt{(x^2 - r^2)}} \Phi_2(r, \gamma_\omega, \omega) \quad (0 < t < R) \quad (2.20)$$

Учитывая обозначения (2.17) и (2.18), из уравнений (2.19) и (2.20), для определения безразмерных величин $\sigma_z^{(1)}(t, \omega)$ и $\tau_{rz}^{(1)}(t, \omega)$, получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$\sigma_z^{(1)}(t, \omega) = f_1(r, \chi_\omega, \omega) + \int_0^R \sigma_z^{(1)}(z, \omega) K_{11}(t, z, \omega) dz + \int_0^R \tau_{rz}^{(1)}(z, \omega) K_{12}(t, z, \omega) dz \quad (0 < t < R) \quad (2.21)$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(t, \omega) = f_2(r, \gamma_\omega, \omega) + \int_0^R \sigma_z^{(1)}(z, \omega) K_{21}(t, z, \omega) dz + \int_0^R \tau_{rz}^{(1)}(z, \omega) K_{22}(t, z, \omega) dz \quad (0 < t < R) \quad (2.22)$$

Здесь введены обозначения

$$f_1(t, \chi_\omega, \omega) = -\frac{4\chi_\omega t}{\pi(1-\nu)\sqrt{R^2 - t^2}}, \quad (2.23)$$

$$f_2(t, \gamma_\omega, \omega) = \frac{4\gamma_\omega}{\pi(2-\nu)\sqrt{R^2 - t^2}}$$

$$K_{11}(t, z, \omega) = \frac{2z}{\pi(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int_t^R \frac{dx}{\sqrt{x^2 - t^2}} \int_0^x [1 - \nu - L_2(\beta, \omega)] J_1(\beta x) \sin(\beta x) d\beta \quad (2.24)$$

$$K_{12}(t, z, \omega) = \frac{2z}{\pi(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int_t^R \frac{dx}{\sqrt{x^2 - t^2}} \int_0^x L_1(\beta, \omega) J_0(\beta x) \sin(\beta x) d\beta$$

$$K_{21}(t, z, \omega) = -\frac{2z}{\pi(2-\nu)} \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \int_0^R \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - t^2}} \int_0^\infty L_1(\beta, \omega) J_1(\beta z) \cos(\beta x) d\beta \quad (2.25)$$

$$K_{22}(t, z, \omega) = -\frac{2z}{\pi(2-\nu)} \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \int_0^R \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - t^2}} \int_0^\infty [2-\nu - L_3(\beta, \omega)] J_0(\beta z) \cos(\beta x) d\beta$$

3. Определение амплитуд колебаний фундамента

Подставив значения правых частей (2.19) и (2.20), или (2.21) и (2.22) в условия динамического равновесия фундамента (1.14), и произведя интегрирования, для определения амплитуд колебаний фундамента получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \gamma_\omega \left[1 - \frac{P(2-\nu)\omega^2}{8GRg} \right] &= \frac{Q(2-\nu)}{8GR} - \\ &- \frac{1}{2R} \int_0^R z \sigma_z^{(1)}(z, \omega) dz \int_0^\infty L_1(\beta, \omega) \frac{J_1(\beta z) \sin(\beta R)}{\beta} d\beta - \\ &- \frac{1}{2R} \int_0^R z \tau_\kappa^{(1)}(z, \omega) dz \int_0^\infty [2-\nu - L_3(\beta, \omega)] \frac{J_0(\beta z) \sin(\beta R)}{\beta} d\beta \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \chi_\omega \left[1 - \frac{2P(1-\nu)\omega^2}{3\pi^2 GRg} \right] &= -\frac{3Q(1-\nu)h}{8GR^3} - \\ &- \frac{3}{2R^3} \int_0^R z \sigma_z^{(1)}(z, \omega) dz \int_0^\infty [1-\nu - L_2(\beta, \omega)] J_1(\beta z) \frac{d}{d\beta} \left(\frac{\sin(\beta R)}{\beta} \right) d\beta - \\ &- \frac{3}{2R^3} \int_0^R z \tau_\kappa^{(1)}(z, \omega) dz \int_0^\infty L_1(\beta, \omega) J_0(\beta z) \frac{d}{d\beta} \left(\frac{\sin(\beta R)}{\beta} \right) d\beta \end{aligned} \quad (3.2)$$

При помощи этих выражений можно сделать выводы о характере зависимости величин амплитуд колебаний фундамента от геометрических и физических параметров фундамента и упругого полупространства, на котором лежит фундамент со сцеплением.

4. Решение статической задачи о действии сдвига жесткого фундамента касательной силой, когда фундамент лежит на упругом полупространстве со сцеплением

Из решения динамической задачи о колебаниях жесткого фундамента, лежащего на упругом полупространстве со сцеплением, произведя предельный переход в соотношениях (2.21) - (2.25), (3.1) и (3.2) при $\omega \rightarrow 0$,

можно получить решение соответствующей статической задачи и формулы для определения величин горизонтального сдвига фундамента на поверхности упругого полупространства под действием горизонтальной сосредоточенной силы, и угла наклона фундамента, а также систему интегральных уравнений, для определения контактных напряжений под фундаментом.

Произведя предельный переход при $\omega \rightarrow 0$, из (2.21) и (2.22) получим

$$\sigma_z^{(1)}(t, 0) = f_1(t, \chi_0, 0) + \int_0^R \tau_{rc}^{(1)}(z, 0) K_{12}(t, z, 0) dz$$

$$\tau_{rc}^{(1)}(t, 0) = f_2(t, \gamma_0, 0) + \int_0^R \sigma_z^{(1)}(z, 0) K_{21}(t, z, 0) dz \quad (0 < t < R) \quad (4.1)$$

где

$$f_1(t, \chi_0, 0) = -\frac{4\chi_0 t}{\pi(1-\nu)\sqrt{R^2 - t^2}}, \quad f_2(t, \gamma_0, 0) = \frac{4\gamma_0}{\pi(2-\nu)\sqrt{R^2 - t^2}}$$

$$K_{12}(t, z, 0) = \frac{(1-2\nu)z}{\pi(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int_{\max(t, z)}^R \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - t^2)(x^2 - z^2)}}$$

$$K_{21}(t, z, 0) = -\frac{1-2\nu}{\pi(2-\nu)} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 - t^2}} + \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \int_{\max(t, z)}^R \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 - t^2)(x^2 - z^2)}} \right] \quad (4.2)$$

Аналогичным образом, из формул (3.1) и (3.2), получим

$$\gamma_0 = \frac{(2-\nu)Q}{8GR} + \frac{1-2\nu}{4R} \int_0^R \sigma_z^{(1)}(z, 0) (R - \sqrt{R^2 - z^2}) dz \quad (4.3)$$

и

$$\chi_0 = -\frac{3(1-\nu)hQ}{8GR^3} - \frac{3(1-2\nu)}{4R^3} \int_0^R z \sqrt{R^2 - z^2} \tau_{rc}^{(1)}(z, 0) dz \quad (4.4)$$

где γ_0 и χ_0 - соответственно, горизонтальный сдвиг фундамента и угол его наклона на поверхности упругого полупространства.

Подобные формулы (4.1) - (4.4) были получены другим путем в работе [14].

Л и т е р а т у р а

1. *Назаров А.Г.* О взаимодействии между фундаментом и сооружением при землетрясении. - Тр.Тбилисского геофизического института, 1939, т.4, с.35-63.
2. *Gladwell G.M.L.* Forced tangential and rotatory vibration of a rigid circular disc on a semi-infinite solid. - Intern. Journ. of Engin. Sciences. 1968, vol.6, No.10, 591-607.
3. *Luco J.E., Westmann R.A.* Dinamic Response of circular Footing. - Journ. of Engineering mechanics division (Proceed. of ASCE), 1971, vol.97, octob., 1381-1395.
4. *Луко, Вестманн.* Динамика жесткого фундамента, соединенного с упругим полупространством - Прикл.механика (Тр.американского общества инженеров, механиков, сер.Е), 1972, т.39, № 2, с.211- 219.
5. *Beredugo Y.O. and Novak M.* Coupled horizontal and rocking vibrations of embedded footings. - Canadian Geotechnical Journal, 1972, vol.9, 477-497.
6. *Моссаковский В.И.* Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий . - ПММ, 1954, т.18, вып.2, 187-196.
7. *Моссаковский В.И., Качаловская Н.Е., Голикова С.С.* Контактные задачи математической теории упругости. - Киев: Наукова думка, 1985. 175 с.
8. *Achenbach J.D.* Wave propagation in elastic solids. - North-Holland publ. Co., Amsterdam - New York - Oxford. 4-th printing, 1984. 425 p.
9. *Chi-Chang Chao.* Dynamical response of an elastic half-space to tangential surface Loadings. - Journ. of Appl. Mechanics (Trans. ASME, ser.E), 1960, vol.27, №.3, 559-567.
10. *Нобль Б.* Применение метода Винера-Хопфа. - М.: Изд. Иностр. литер., 1962. 279 с.
11. *Бабешко В.А.* О системах интегральных уравнений динамических контактных задач. - ДАН СССР, 1975, т.220, №.6, 1293-1296.
12. *Бабешко В.А.* Статические и динамические контактные задачи со сцеплением. - ПММ, 1975, т.39, вып.3, 505-512.
13. *Бабешко В.А., Румянцев А.Н.* Вибрация штампа, частично сцепленного с упругой средой. - ПММ, 1978, т.42, вып.6, 1085-1092.
14. *Abramian B.L.* Certain asymmetrical contact problems for semi-space. The mechanics of the contact between deformable bodies. Proceed. of the IUTAM Symposium 20-23 August 1974, Enschede, Netherlands. 1975, Delft Univ. Press, Ed-s A.D. de Pater and J.J.Kalker, p. 84-98.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
22.10.1992

УДК 62.50

**ВЛИЯНИЕ ВАРИАЦИЙ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ НА
КОНЕЧНОЕ СОСТОЯНИЕ СХВАТА МАНИПУЛЯТОРА**

Гукасян А. А.

Ա.Ա.Դուկասյան

**Մանիպուլյատորի թանիչի վերջնական դիրքի վրա
սկզբնական պայմանների վարիացիաների ազդեցությունը**

Օպտիմալ ղեկավարման խնդրի լուծման հիման վրա ուսումնասիրվում է մանիպուլյատորի նպատակային դիրքին հասնելու հնարավորությունը, կախված սկզբնական պայմանների փոփոխությունից: Գնահատված է նաև ֆունկցիոնալի փոփոխությունը:

Ghukasyan A.A.

The Influence of Variations of the Initial Conditions on the Final State of the Holder of a Manipulator

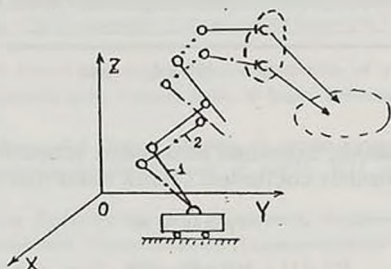
В работе, на основе решения задачи оптимального управления, исследуется возможность достижения цели манипулятором после изменения начального состояния, а также изменение функции стоимости. Подобные вопросы для широкого класса механических систем исследованы в работах [1-7] и др.

1. Математическая формулировка задачи и определение вариаций конечных состояний манипулятора. Рассматривается управляемое движение N -звенного манипулятора, звенья которого считаются абсолютно твердыми телами. Конфигурацию манипулятора в пространстве определим вектором $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ ($n \geq N$). Компоненты α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) включают в себя углы в шарнирах и относительное перемещение звеньев. Положение схвата в системе координат $OXYZ$ определим через вектор $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)^T$ (фиг. 1), где

$$q = f(\alpha) \quad (1.1)$$

Предполагая, что каждая степень свободы α_i управляется моментом M_i , развиваемым приводом, расположенным в шарнирах манипулятора, уравнение движения можно представить в виде

$$\ddot{\alpha} = f(\alpha, \dot{\alpha}, M); \quad \alpha(t_0) = \alpha^0, \quad \dot{\alpha}(t_0) = \dot{\alpha}^0 \quad (1.2)$$



Фиг. 1

1 - начальное состояние манипулятора

2 - начальное состояние после нескольких циклов работ

Пусть в пространстве состояний $\{q_i, \dot{q}_i\}$ ($i=1, 2, \dots, m$) задано начальное состояние $(q_i(t_0), \dot{q}_i(t_0))$ схвата манипулятора, а конечное состояние задано в $2m$ -мерном пространстве состояний в виде K -мерного многообразия Q , которое определяется l -уравнениями ($k=2m-l$; $l \leq 2m$)

$$Q_i[x(t_i)] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, l)$$

$$x = \{x_j, x_{j+m}\}, \quad x_j = q_j, \quad x_{j+m} = \dot{q}_j \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (1.3)$$

С учетом (1.1) отображение многообразия Q в пространстве состояний $\{\alpha_i, \dot{\alpha}_i\}$ ($i=1, 2, \dots, n$) является $r=(2n-l)$ -мерным многообразием S конечных конфигураций манипулятора, которая также определяется l -уравнениями.

Не нарушая общности в (1.2), введем фазовые переменные

$$\alpha_i = y_i, \quad \dot{\alpha}_i = y_{i+n} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

и представим движение манипулятора векторным уравнением

$$\dot{y} = F(y, M), \quad y(t_0) = y^0 \quad (1.4)$$

Предполагается, что пара $M = M(t)$, $y = y(t)$ является решением задачи оптимального управления движением манипулятора, которая приводит к

нипулятор из начального состояния в n -мерное многообразие S с минимизацией функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \Phi[y, M] dt \rightarrow \min_{M \in P} \quad (t_1 \text{ не фиксирована}).$$

Ставится следующая задача. Если начальное условие (начальное состояние) манипулятора изменяется от y^0 до $\bar{y}^0$, где

$$\bar{y}^0 = y^0 + \varepsilon \delta y^0 + O(\varepsilon), \quad \delta y^0 = \delta y(t_0) \quad (1.5)$$

то будет ли достигнуто при управлении $M = M(t)$ конечное множество состояний манипулятора.

Исследование этого вопроса связано с оценкой влияния вариаций начальных условий на траекторию движения манипулятора в пространстве состояний. Обозначим через $\bar{y}(t)$ траекторию движения манипулятора, соответствующую новому начальному условию $\bar{y}^0$. Предполагая, что траектория непрерывно зависит от вариации начального условия, в первом приближении $\bar{y}(t)$ представим в виде [7]

$$\bar{y}(t) = y(t) + \varepsilon \delta y(t) \quad (1.6)$$

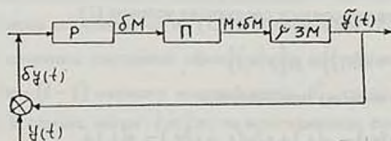
где $\delta y(t)$ является решением вариационного уравнения

$$\delta \dot{y}(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{y, M} \delta y(t) \quad (1.7)$$

Здесь $\frac{\partial F}{\partial y}$ - матрица Якоби, элементы которой равны $\left\{ \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right\}_{i,j=1}^{2n, 2m}$

Уравнение (1.7) соответствует разомкнутой схеме управления манипулятора, когда $\delta M = 0$ (фиг.2).

Если управление манипулятором осуществляется по принципу обратной связи (фиг.3), то вариационное уравнение, определяющее новую траекторию, имеет вид

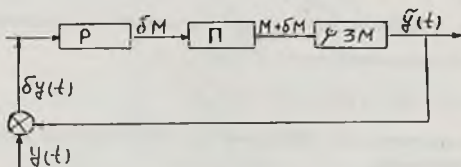


Фиг. 2

П - привод, ЗМ - звено манипулятора.

$$\delta \dot{y}(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{y, M} \delta y + \left. \frac{\partial F}{\partial M} \right|_{y, M} \delta M \quad (1.8)$$

где матрица $\frac{\partial F}{\partial M}$ определяется аналогично матрице $\frac{\partial F}{\partial y}$.



Фиг. 3

Р - регулятор, П - привод, ЗМ - звено манипулятора,

⊗ - измерительное устройство.

Поставленную задачу с управлением манипулятора по принципу обратной связи, можно исследовать методом теории оптимальной стабилизации [8].

Вернемся к разомкнутой схеме управления манипулятором. Предполагаем, что при наличии оптимального управления $M = M(t)$ и при новом начальном состоянии $\tilde{y}^0$, фазовое состояние манипулятора в конце процесса управления принадлежит многообразию S . Определим те условия, которые разрешают данный вопрос.

Поскольку конечное время управления манипулятором t_1 не фиксировано, то требуется, чтобы S достигалось в некоторый момент времени $t_1 + \epsilon \delta t_1$. Моменту времени $t_1 + \epsilon \delta t_1$ соответствует $\tilde{y}(t_1 + \epsilon \delta t_1)$ - конечное состояние.

Предполагаем, что l -уравнения описывают многообразие

$$g_i[y(t_1)] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, l; l \leq n) \quad (1.9)$$

Поскольку состояние $y(t_1)$ и $\tilde{y}(t_1 + \epsilon \delta t_1)$ принадлежит многообразию S , то должно удовлетворяться следующее условие [7]:

$$g_i[\tilde{y}(t_1 + \epsilon \delta t_1)] - g_i[y(t_1)] = 0 \quad (1.10)$$

Так как по первому приближению

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t_1 + \epsilon \delta t_1) &= y(t_1) + \epsilon \delta y(t_1 + \epsilon \delta t_1) = y(t_1) + \\ &+ \epsilon \{ \delta y(t_1) + F[y(t_1), M(t_1)] \delta t_1 \} \end{aligned}$$

то соотношение (1.10) принимает вид

$$\left\langle \frac{\partial g_i}{\partial y}, \delta y(t_1) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial g_i}{\partial y}, F[y(t_1), M(t_1)] \right\rangle \delta t_1 = 0 \quad (1.11)$$

$$(i = 1, 2, \dots, l)$$

Из (1.11) можно определить δt_1 , если существует p ($1 \leq p \leq l$), при котором $\left\langle \frac{\partial g_p}{\partial y}, F[y(t_1), M(t_1)] \right\rangle \neq 0$

$$\delta t_1 = - \frac{\left\langle \frac{\partial g_p}{\partial y}, \delta y(t) \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial g_p}{\partial y}, F[y(t_1), M(t_1)] \right\rangle} \quad (1.12)$$

Подставляя (1.12) в (1.11), получим

$$\left\langle \left(\left\langle \frac{\partial g_p}{\partial y}, F \right\rangle \frac{\partial g_i}{\partial y} - \left\langle \frac{\partial g_i}{\partial y}, F \right\rangle \frac{\partial g_p}{\partial y} \right) \delta y(t_1) \right\rangle = 0 \quad (1.13)$$

$$(i \neq p, i = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, l)$$

Система уравнений (1.13) описывает пересечения $(l-1)$ гиперплоскостей, которые можно записать в виде

$$A \delta y(t_1) = 0 \quad (1.14)$$

где $\{a_{ij}\} = A$, $[(l-1) \times 2n]$ -мерная матрица.

Обозначим пересечение гиперплоскостей, где должен быть $\delta y(t_1)$, через S^* . Здесь S^* в $2n$ -мерном пространстве состояний $2n - (l-1)$ -мерное многообразие. Если среди $l-1$ уравнений (1.13) есть линейно зависимые, то размерность матрицы A можно понизить. В частности, если $l=1$, то из (1.13) следует, что S^* представляет собой все пространство, и конечное множество состояний манипулятора S всегда достижимо. Дополнительное время в этом случае также определяется из (1.12). В противном случае, если $l > 1$, то множество конечных состояний манипулятора достижимо, когда $\delta y(t_1)$ принадлежит $2n - (l-1)$ -мерному многообразию S^* , определяемому уравнениями (1.13). В случае, когда $l = 2n$, то есть конечное состояние манипулятора фиксировано, S^* представляет собой в $2n$ -мерном пространстве состояний линию.

2. Область допустимых изменений начальных условий схвата манипулятора. Прежде чем определить область начальных изменений схвата манипулятора, определим область начальных изменений конфигурации.

Из вариационного уравнения (1.7) следует, что при заданных $\delta y(t_0) = \delta y^0$, для широкого класса управления $M = M(t)$ решение можно представить в виде

$$\delta y(t) = Y[t, t_0] \delta y^0 \quad (2.1)$$

где матрица $Y[t, t_0]$ имеет размерность $2n \times 2n$ и является фундаментальной матрицей решений уравнения (1.7).

Из (2.1), в частности, получим

$$\delta y(t_1) = Y[t_1, t_0] \delta y^0 \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (1.14), имеем

$$Y^0[t_1, t_0] \delta y^0 = 0 \quad (2.3)$$

где $Y^0[t_1, t_0] = AY[t_1, t_0]$ имеет размерность $(l-1) \times 2n$.

Из (2.3), в частности, следует, что область (S^0) начальных изменений конфигурации манипулятора также принадлежит пересечению $l-1$ гиперповерхностей и имеет размерность $[2n - (l-1)]$.

Из (1.1) следует, что вариация начального и конечного состояний схвата манипулятора, в зависимости от изменения конфигурации, имеет вид

$$\delta x(t_1) = X \delta y(t_1); \quad \delta x(t_0) = X \delta y(t_0) \quad (2.4)$$

где $x_i = q_i$, $\dot{x}_{i+m} = \dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$),

$$X = \begin{bmatrix} F(\alpha) & 0 \\ \dot{F}(\alpha) & F(\alpha) \end{bmatrix}, \quad F(\alpha) = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} \right\}_{i,j=1}^{m,n}$$

X имеет размерность $2m \times 2n$.

Изменение конечного состояния схвата манипулятора, в зависимости от изменения начальной конфигурации, можно определить из соотношений (2.2) и (2.4)

$$\delta x(t_0) = X Y[t_1, t_0] \delta y(t_0) \quad (2.5)$$

Если в системе управления манипулятором имеются датчики положения и скорости, которые могут измерять $n-m$ компонент δy_i , или когда $n=m$, то можно также определить изменение положения схвата манипулятора в зависимости от изменения начального положения схвата

$$\delta x(t_1) = X Y[t_1, t_0] X^{-1} \delta x(t_0)$$

3. Приращение функционала. По предложению $y(t)$ и $M(t)$ - оптимальное решение задачи управления манипулятором по критерию качества

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \Phi[y, M] dt \rightarrow \min_{M \in P} \quad (3.1)$$

с фиксированным начальным состоянием y^0 . Минимальное значение функционала при оптимальном управлении $M(t)$ и траектории $y(t)$ обозначим через J^* .

В соответствии с изменением начального состояния манипулятора $\bar{y}^0 = y^0 + \varepsilon \delta y^0 + O(\varepsilon)$, фазовая траектория $\bar{y}(t) = y(t) + \varepsilon \delta y(t)$ достигает конечного состояния S за время $t_1 + \varepsilon \delta t_1$.

Вычислим приращение функционала (3.1), отвечающее траектории $\bar{y}(t)$

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_0}^{t_1 + \varepsilon \delta t_1} \Phi[y + \varepsilon \delta y, M] dt = \int_{t_0}^{t_1} \Phi[y + \varepsilon \delta y, M] dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_1 + \varepsilon \delta t_1} \Phi[y + \varepsilon \delta y, M] dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \Phi[y, M] + \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta y + \dots + O(\varepsilon) \right\} dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_1 + \varepsilon \delta t_1} \left\{ \Phi[y, M] + \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta y + \dots + O(\varepsilon) \right\} dt = J^* + \eta + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

Приращение функционала (3.1) имеет вид

$$\eta = \varepsilon \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta y dt + \Phi[y(\vartheta), M(\vartheta)] \delta t_1 \right\}$$

где $\vartheta \in [t_1, t_1 + \varepsilon \delta t_1]$.

Из (2.1) следует, что η можно определить в зависимости от вариации начального состояния манипулятора в виде

$$\eta = \varepsilon \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Phi}{\partial y} Y[t, t_0] \delta y^0 dt + \Phi[y(\vartheta), M(\vartheta)] \delta t_1 \right\}$$

Приращение η имеет порядок ε .

Л и т е р а т у р а

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.С., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.В. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1983. 392 с.

2. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
3. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. - М. 1987. 365 с.
4. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. - М. Наука, 1978. 270 с.
5. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. - М.: Наука, 1971. 424 с.
6. Рогов Н.Н., Черноусько Ф.Л. Оптимальное уравнение электродвигателем робота с упругими элементами. - Тех. кибернетика, 1989, N I, с.135-145.
7. Леондес, Ву. Функции чувствительности относительно начальных условий и их применение. - Тр. американского общества инженеров-механиков "Теоретические основы инженерных расчетов", 1971, N3, с.128-134.
8. Гуксян А.А. Об оптимальной стабилизации движений манипулятора с электромеханическими приводами. - Тех.кибернетика. 1991, N4, с.189-195.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию

20.11.1991

УДК 539.3: 534.2

**ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ СДВИГА НА ГРАНИЦЕ
РАЗДЕЛА ДВУХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ**

Аветисян А.С., Маргарян Дж.М.

Ա.Ս.Ավերիսյան, Զ.Մ.Մարգարյան

**Էլեկտրաառաձգական մակերևութային սահքի ալիքները երկու
պինգոէլեկտրիկ կիսաբարձությունների բաժանման եզրում**

Ներառվում է հաղորդիչ սուսնով միացված կիսաբարձությունների եզրում սահքի մակերևութային էլեկտրաառաձգական ալիքների տարածումը: Ստացված են ալիքների գոյության պայմանները երկու բարձրագույն առանձնահատկությունների՝ եզրակցված փաթեթի պինգո բյուրեղների դեպքում:

Avetisyan A.S., Margaryan J.M.

Electroelastic surface shear waves on an division surface of two piezoelectric half-space

Рассматривается распространение поверхностных сдвиговых волн по границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств (пьезоэлектрики разных кристаллических структур — $6mm$ гексогональной и $43m$ кубической симметрий), склеенных электропроводящим тонким слоем. Получены условия существования и особенности распространения электроупругих волн, при разных парах пьезоэлектриков.

Проблеме распространения поверхностных электроупругих волн по границе раздела сред (начиная с первоисточников [1-2]) посвящено большое количество работ, обзор которых можно найти в [3]. В этих работах рассматриваются различные варианты присоединения двух пьезоэлектрических полупространств и исследуются особенности распространения электроупругих волн.

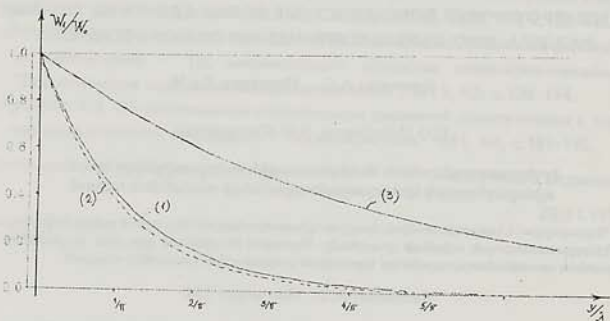
Часто в практике используется электропроводящий клей и при решении задач электромагнитоупругости необходимо учесть это в граничных условиях. Вызывает интерес также вопрос устранения или возникновения поверхностной волны в теле с помощью склеивания другого тела, если волна до этого существовала или если волна до этого не существовала. Исходя из этого, в настоящей работе исследуется распространение поверхностных сдвиговых волн $U = (0, 0, W(x, y, t))$ на границе раздела $y = 0$ двух пьезоэлектрических полупространств, которые соединены электропроводящим клеем, механическими свойствами которого можно пренебречь из-за тонкости

слоя. При этом на границе раздела $y = 0$ удовлетворяются условия непрерывности антиплоских полей деформаций

$$W_1(x, 0, t) = W_2(x, 0, t), \quad \sigma_{yz}^{(1)}(x, 0, t) = \sigma_{yz}^{(2)}(x, 0, t) \quad (1)$$

а также условия электрически закрытой границы для каждого пьезополупространства

$$\varphi_1(x, 0, t) = 0, \quad \varphi_2(x, 0, t) = 0 \quad (2)$$



Фиг. 1

(1) - $(C_{1t}; 0)$, (2) - $(C_{1t} > C_{2t})$, (3) - $(C_{1t} < C_{2t})$

Предполагается, что оси симметрии пьезокристаллов параллельны и направлены по координатной оси OZ , а плоская волна распространяется по оси OX (фиг. 1).

1. В случае, когда граничат два пьезоэлектрика класса *6mm* гексогональной симметрии, для обоих сред решается система уравнений электроупругости

$$G_i \left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} \right) = \rho_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} = \frac{e_{15}^{(i)}}{\epsilon_{11}^{(i)}} \left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} \right) \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

где $G_i = C_{44}^{(i)}(1 + \chi_i^2)$, $\chi_i^2 = \frac{(e_{15}^{(i)})^2}{C_{44}^{(i)}\epsilon_{11}^{(i)}}$ - коэффициенты электрической связи пьезоэлектриков. Затухающие по глубине полупространств $y > 0$ и $y < 0$ решения системы (1.1) соответственно имеют вид :

$$W_i(x, y, t) = A_i \exp[\pm k\alpha_i y + i(kx - \omega t)]$$

$$\varphi_i(x, y, t) = \left[B_i \exp(\pm ky) + \frac{e_{15}^{(i)}}{\varepsilon_{11}^{(i)}} A_i \exp(\pm k\alpha_i y) \right] \times \exp[i(kx - \omega t)] \quad (1.2)$$

где $\alpha_i = \sqrt{1 - v^2/c_i^2}$, $c_i^2 = G_i/\rho_i$, а $v = \omega/k$ - фазовая скорость поверхностной волны.

Эти волны распространяются со скоростью $v = \min(c_1, c_2)$, которая определяется из дисперсионного уравнения

$$\alpha_1(v) + \gamma\alpha_2(v) = \frac{\chi_1^2}{1 + \chi_1^2} + \delta \frac{\chi_2^2}{1 + \chi_2^2} \quad (1.3)$$

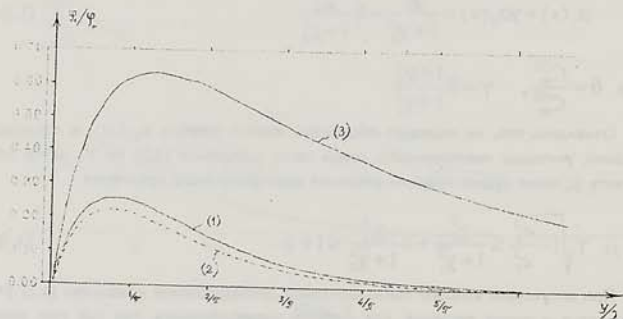
$$\text{где } \delta = \frac{C_{44}^{(2)}}{C_{44}^{(1)}}, \quad \gamma = \delta \frac{1 + \chi_2^2}{1 + \chi_1^2}$$

Очевидно, что, не нарушая общности, можно принять $c_1 < c_2$, а следовательно, учитывая монотонность левой части уравнения (1.3) по v , легко получить условия существования решения дисперсионного уравнения

$$\gamma \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \leq \frac{\chi_1^2}{1 + \chi_1^2} + \delta \frac{\chi_2^2}{1 + \chi_2^2} \leq 1 + \gamma \quad (1.4)$$

При отсутствии второго пьезоэлектрика дисперсионное уравнение (1.3) упрощается и имеет решения для любого пьезоэлектрика, так как при этом условие существования решения (1.4) будет тривиальным. Как следует из (1.4), условие существования может не выполняться при наличии второго пьезоэлектрика. В случае, когда граничат пьезоэлектрик класса *6mm ZnO* ($C_{44} = 4.25 \times 10^{10}$ н/м², $\rho = 5.68 \times 10^3$ кг/м³, $e_{15} = -0.59$ кл/м², $\varepsilon_{11} = 7.38 \times 10^{-11}$ ф/м) и пьезоэлектрика ЦТС-19 ($C_{44} = 2.49 \times 10^{10}$ н/м², $\rho = 7.3 \times 10^3$ кг/м³, $e_{15} = 9.45$ кл/м², $\varepsilon_{11} = 725.7 \times 10^{-11}$ ф/м) или пьезоэлектрики *CdS* ($C_{44} = 1.49 \times 10^{10}$ н/м², $\rho = 4.82 \times 10^3$ кг/м³, $e_{15} = -0.21$ кл/м², $\varepsilon_{11} = 8 \times 10^{-11}$ ф/м) и *ZnO*, условия (1.4) нарушаются, а следовательно, поверхностные электроупругие волны в этих случаях не существуют. В случае же склеивания пьезоэлектрика класса *6mm* гексагональной симметрии *ZnO* с пьезокерамикой ЦТС-4 ($C_{44} = 2.56 \times 10^{10}$ н/м², $\rho = 7.5 \times 10^3$ кг/м³, $e_{15} = 12.5$ кл/м², $\varepsilon_{11} = 650 \times 10^{-11}$ ф/м) или пьезокерамик ЦТС-4 и ЦТС-19, локализованные волны у границы раздела в обоих случаях существуют. Эти случаи отличаются тем, что в первом случае $c_{1r} < c_{2r}$, а во втором случае $c_{1r} > c_{2r}$, что приводит к существенному количественному из-

менению затуханий электроупругих величин по глубине первого пьезополупространства. Оказывается, когда пьезоэлектрик граничит с более мягким пьезоэлектриком ($c_{1t} > c_{2t}$), то как упругое перемещение $W_1(y/\lambda)$, так и электрический потенциал $\varphi_1(y/\lambda)$ затухают быстрее по сравнению со случаем отдельного пьезоэлектрика. Если же пьезоэлектрик граничит с более жестким пьезоэлектриком ($c_{1t} < c_{2t}$), то электроупругая волна становится более однородной по глубине первого пьезоэлектрика (фиг. 2). Необходимо отметить, что затухание по глубине довольно быстрое, а амплитудная функция $\varphi_1(y/\lambda)$ электрического потенциала достигает своего максимума не на поверхности полупространства, а на глубине $\frac{y}{\lambda} = \frac{1}{2\pi\alpha - 1}$.



Фиг. 2

(1) - ($C_{1t}; 0$), (2) - ($C_{1t} > C_{2t}$), (3) - ($C_{1t} < C_{2t}$)

2. В случае, когда граничат пьезоэлектрики классов **6mm** гексагональной и **43m** кубической симметрий, оси симметрии которых параллельны, как в предыдущей задаче, вопрос существования поверхностных электроупругих сдвиговых волн по границе раздела сравнительно сложный. Фактически здесь исследуется влияние непрерывности механических полей на границе раздела (1) на существование волны в пьезоэлектрике **6mm**, когда данный пьезокристалл склеен с пьезоэлектриком **43m**. Или можно вопрос поставить по другому: возникает ли электроупругая поверхностная сдвиговая волна в пьезокристалле **43m**, если склеить пьезоэлектриком класса **6mm**.

В этом случае в полупространстве $y < 0$, занимающим пьезоэлектриком класса **43m**, решаются уравнения электроупругости

$$G_i \left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} \right) = \rho_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} = \frac{e_{15}^{(i)}}{\epsilon_{11}^{(i)}} \left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} \right) \quad (i=1,2) \quad (2.1)$$

а в полупространстве $y > 0$ решаются уравнения электроупругости (1.1) (с индексом $i=1$). На границе раздела $y=0$ удовлетворяются условия (1) и (2). Локализованные у границы раздела сред $y=0$ электроупругие поля возможны при условии $v < \min(c_{1r}, c_{2r})$ и описываются выражениями (1.2) для пьезоэлектрика бтм индексом $i=1$ и выражениями

$$W_2(x, y, t) = \left[-\frac{2ie_{14}^{(2)}\gamma_+}{C_{44}^{(2)}(\gamma_+^2 - \alpha_2^2)} B_2 \exp(k\gamma_+ y) + A_2 \exp(k\gamma_- y) \right] \exp[i(kx - \alpha t)]$$

$$\varphi_2(x, y, t) = \left[\frac{2ie_{14}^{(2)}\gamma_-}{\epsilon_{11}^{(2)}(\gamma_-^2 - 1)} A_2 \exp(k\gamma_- y) + B_2 \exp(k\gamma_+ y) \right] \exp[i(kx - \alpha t)] \quad (2.2)$$

где $\gamma_{\pm} = \sqrt{\frac{1 + \alpha_2^2 + \chi_2^2 \pm \sqrt{(1 + \alpha_2^2 + \chi_2^2)^2 - 4\alpha_2^2}}{2}}$ - коэффициенты затухания

волн, а $\chi_2^2 = \frac{4(e_{14}^{(2)})^2}{\epsilon_{11}^{(2)} C_{44}^{(2)}}$ - коэффициент электромеханической связи пьезокристалла 43m.

Для определения фазовой скорости электроупругих поверхностных волн получаем дисперсионное уравнение в виде

$$(\gamma_-(v) - \gamma_+(v)) + \left[1 - \frac{\chi_2^2 \alpha_2(v)}{(\gamma_-^2(v) - 1)(\gamma_+^2(v) - \alpha_2^2(v))} \right] \times$$

$$\times [\gamma_+(v) + \alpha_1(v)(1 + \chi_1^2)\alpha - \alpha\chi_1^2] = 0 \quad (2.3)$$

где $\alpha = \frac{C_{44}^{(1)}}{C_{44}^{(2)}}$.

Записывая дисперсионное уравнение в виде $F\left(\frac{v}{c_{\min}}\right) = 0$, легко проверить, что левая часть дисперсионного уравнения монотонно убывает на отрезке $0 \leq v \leq \min(c_{1r}, c_{2r})$, так, что условия существования поверхностных волн получаются в виде

$$F(0) \leq 0 \leq F(1) \quad (2.4)$$

Анализируя вопрос существования электроупругой поверхностной волны в случае конкретных пьезоэлектриков (пьезокерамика ЦТС-4 и *GaP* класса 43m) получаем следующую картину (фиг. 2):

- по металлизированной поверхности пьезокерамики ЦТС-4 может распространяться сдвиговая волна со скоростью $C_{lr}^2 = \frac{C_{44}^{(1)}}{\rho_1} (1 + \chi^2)$ (кривая -1);

- при наличии граничащего упругого непьезоактивного полупространства, дисперсионная кривая -1 перемещается вверх (кривая -2);

- при учете пьезоэффекта у второго материала дисперсионная кривая еще более перемещается вверх (кривая -3).

Это означает, что наличие второго пьезоэлектрика может привести к усилению поверхностной электроупругой волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bleustein J.L. A new surface wave in piezoelectrical materials. - *Appl. Phys. Lett.*, 1968, v. 13, 12, pp. 412-413.
2. Maerfeld C., Tournois P. Pure shear elastic surface wave guided by the interface of two semi-infinite media. - *Appl. Phys. Lett.*, 1971, v. 19, 4, pp. 117-121.
3. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. - М.: Наука, 1988, 470 с.
4. Аветисян А.С. - К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде. - *Изв. АН Арм. ССР, Механика* - 1985, т. 38, 1, с. 12-19.

Институт Механики НАН Армении

Поступила в редакцию
18.12.1992

УДК 532.591:534.22.2

ОДНОМЕРНЫЕ ВОЛНЫ В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

Оганян Г.Г.

Օհանյան Գ.Գ.

Միաչափ ալիքները գազահեղուկ խառնուրդում

Դիվարվում են այնպիսի գազահեղուկ միջավայրեր, որտեղ սահմանային իզոթերմիկ եւ ադիաբատիկ ծայնի արագությունները մոտ են իրար: Մտացված են գրգռումների վարքը նկարագրող ապիմպոլիկ բանաձեւեր ալիքի ճակարից հետո կերկրում: Ցույց է տրված, որ երկար ալիքային մոտավորությունում միջֆազային ջերմափոխանակությունը խոչընդոտում է իսկ կարճալիքային մոտավորությունում ուժեղացնում է գրգռումների մաքումը:

Ohanian G.G.

One Dimensional Wave in Gas-Fluid Mixture

Исследуется волновое движение в газожидкостных средах, в которых величины предельных изотермической и адиабатической скоростей звука в смеси близки одна другой. Полученное уравнение в предельных случаях переходит в уравнения, описывающие волновой процесс в средах, в которых термодинамическое поведение пузырьков близко либо к изотермическому, либо к адиабатическому.

В наиболее общей постановке система уравнений движения газожидкостной монодисперсной бесстолкновительной смеси с учетом несовпадений давлений и температур в фазах, а также эффектов сжимаемости и вязкости фаз приведена в [1]. Теоретическое исследование волновых процессов в рамках односкоростной и однотемпературной модели газожидкостной смеси [2,3] качественно не всегда совпадает с данными эксперимента [2,4,5] ввиду того, что исследовались либо чисто изотермический, либо адиабатический термодинамические режимы поведения газового пузырька в жидкости. Физически приемлемое истолкование результатов проведенных экспериментов дано в [6,7], где впервые подчеркнута важность учета тепловых эффектов, обусловленных межфазным взаимодействием пульсирующего пузырька с несущей жидкостью.

В настоящей работе исследуется волновое движение в специальных газожидкостных средах, в которых величины предельных изотермической и адиабатической скоростей звука в смеси близки одна другой. Методом коротких волн [8,9] выведено двухволновое уравнение, переходящее в предельных случаях в уравнения, описывающие распространение нелинейных акустических волн в смесях, в которых термодинамическое поведение пузырьков

близко, либо к изотермическому, либо к адиабатическому. В частных случаях отсутствия теплообмена между пузырьком и жидкостью, они совпадают с известными уравнениями [2,3].

Рассмотрена частная задача с начальными условиями. В линейной постановке получены асимптотические формулы, описывающие поведение возмущений далеко впереди и позади фронта волны. Выявлено, что в длинноволновом приближении межфазный теплообмен противодействует затуханию, а в коротковолновом - усиливает эффект затухания.

1. **Исходные уравнения.** Предположим, что в монодисперсной газожидкостной смеси частицы фаз движутся с одинаковой скоростью. Несущая жидкая фаза обладает эффектами вязкости и сжимаемости, а газовая фаза представляет собой пузырьки калорически совершенного газа. Будем считать, что в рассматриваемой области течения в смеси не происходит сильного пересечения газовой фазы и потому, ввиду существенного влияния температуры на плотность газа в пузырьках, примем, что теплообмен между фазами определяется лишь тепловым сопротивлением газовой фазы. Тогда можно полагать температуру жидкости T_1 постоянной ($T_1 = T_0 = \text{const}$), при этом, согласно [6,7], учет эффекта теплопроводности газа важен лишь при межфазном взаимодействии с жидкостью. Пренебрегая эффектами образования, дробления, коагуляции и столкновения пузырьков, уравнения движения исследуемой газожидкостной смеси возьмем в виде [1,7,10]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

$$P_2 - P = (1 - \phi_1) \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + (1 - \phi_2) \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \quad (1.3)$$

$$+ \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{R}{\alpha} \frac{d}{dt} \left(P_2 - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} \right)$$

$$\frac{\rho_2 \beta}{\rho_1 (1 - \beta)} = \text{const}, \quad \rho_2 R^3 = \text{const}, \quad P_2 = c_{v2} (\gamma - 1) \rho_2 T_2 \quad (1.4)$$

$$\rho = \rho_1 (1 - \beta) + \rho_2 \beta, \quad P = P_1 (1 - \beta) + P_2 \beta \quad (1.5)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = - \frac{3\gamma P_2}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{3(\gamma - 1)k_2 \text{Nu}}{2R^2} (T_2 - T_0) \quad (1.6)$$

$$\varphi_1 = \frac{1,1\beta^{1/3} - \beta}{1 - \beta}, \quad \varphi_2 = \frac{1,47\beta^{1/3} - 0,33\beta}{1 - \beta}$$

Здесь t - время, x - координатная ось, u - скорость частиц смеси, R - радиус пузырьков, β - объемная концентрация газа, $\gamma = c_{p2}/c_{v2}$ - показатель адиабаты газа, $\mu = \mu_1[1 + o(\beta)]$ - динамический коэффициент вязкости смеси, a - скорость звука, k_2 - коэффициент теплопроводности газа, Nu - число Нуссельта, остальные обозначения общепринятые. Индексы 1 и 2 отнесены, соответственно, к параметрам течения жидкой и газовой фаз. Параметры, характеризующие движения всей смеси, индексов не имеют. Поправочные коэффициенты φ_1, φ_2 учитывают конечность величины β и неодионочность газового пузырька в безграничной жидкости [1,7]. Использование уравнения (1.6) позволяет в первом приближении учесть несовпадение температур в фазах.

Комбинируя соотношения (1.4), характеризующие условия сохранения массы газа в пузырьке, и совпадения скоростей частиц жидкой и газовой фаз, получим

$$\frac{1}{\beta(1-\beta)} \frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dt} - \frac{1}{\rho_2} \frac{d\rho_2}{dt}, \quad \frac{d\rho_2}{dt} = -\frac{3\rho_2}{R} \frac{dR}{dt} \quad (1.7)$$

Учитывая (1.7) и определение плотности всей смеси (1.5), уравнение неразрывности смеси (1.1) преобразуется к виду

$$\frac{(1-\beta)}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dt} - \frac{3\beta}{R} \frac{dR}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.8)$$

Используя уравнения (1.7), (1.8) и (1.3), из определения давления всей смеси (1.5) находим

$$(1-\beta) \frac{dP_2}{dt} - \frac{d}{dt} \left[(1-\varphi_1) \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + (1-\varphi_2) \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{R}{a_1} \frac{d}{dt} \left(P_2 - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} \right) \right] = (1-\beta) \frac{dP_1}{dt} + \beta(P_2 - P_1) \left(\frac{3}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1.9)$$

Комбинирование уравнений импульса смеси (1.2), пульсации пузырька (1.3) и состояний (1.4) дает

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{P_2}{T_2} \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{3T_2}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} + \left[(1-\varphi_1) \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + \right. \\ \left. + (1-\varphi_2) \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{R}{a_1} \frac{d}{dt} \left(P_2 - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} \right) \right] + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.10)$$

Исключив из рассмотрения в уравнении (1.6) давление в пузырьке P_2 посредством уравнения состояния калорически совершенного газа (1.4) и используя (1.7), будем иметь

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + u \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{3(\gamma-1)T_2}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial t} + u \frac{\partial R}{\partial x} \right) = -\frac{3}{2} \frac{k_2 \text{Nu}}{\rho_2 c_{v2} R^2} (T_2 - T_0) \quad (1.11)$$

В зависимости от величины теплообмена между пузырьком и жидкостью в газожидкостных смесях скорость распространения возмущений в предельных случаях совпадает либо с изотермической a_e , либо с адиабатической a_f скоростями звука в смеси, которые задаются формулами [2,3,11]

$$\frac{1}{a_{e0}^2} - \frac{(1-\beta_0)\rho_0}{\rho_{10}a_{e0}^2} - \frac{\beta_0\rho_0}{P_0} = 0, \quad \frac{1}{a_{f0}^2} - \frac{(1-\beta_0)\rho_0}{\rho_{10}a_{f0}^2} - \frac{\beta_0\rho_0}{\gamma P_0} = 0 \quad (1.12)$$

Здесь и далее индекс 0 отнесен к состоянию покоя. Первый из режимов реализуется при $\text{Nu} \rightarrow \infty$, а второй - при $\text{Nu} \rightarrow 0$. Дифференцируя по ρ_1 тождество $P_1(\rho_1, s_1) = P_1[\rho_1, T_1(\rho_1, s_1)]$ и учитывая постоянство температуры в жидкости, нетрудно показать, что $a_{1e} = a_{1f} = a_1$.

2. Асимптотические разложения. Предположим, что по невозмущенной покоящейся смеси в направлении оси x распространяется волна, в которой избыточные значения всех параметров течения малы по сравнению с начальными. Примем, что величины возмущений параметров имеют такой же порядок малости, что и массовая скорость частиц смеси

$$u = \varepsilon a_0 u', \quad P = P_0(1 + \varepsilon P'), \quad P_i = P_0(1 + \varepsilon P'_i), \quad \rho = \rho_0(1 + \varepsilon \rho')$$

$$\rho_i = \rho_{i0}(1 + \varepsilon \rho'_i), \quad T_2 = T_0(1 + \varepsilon T'), \quad R = R_0(1 + \varepsilon R'), \quad \beta = \beta_0 + \varepsilon \beta' \quad (2.1)$$

$$a_i = a_{i0}(1 + \varepsilon a'_i), \quad (i=1,2)$$

Здесь ε - безразмерный малый параметр. Рассматриваемую область течения считаем областью коротких волн. В этой области, примыкающей к ударному фронту, изменения избыточных величин, характеризующих возмущенное течение, происходит весьма быстро, несмотря на их малость. Ширина области течения, где сосредоточены возмущения, мала по сравнению с расстояниями, на которые может распространяться волна. Поэтому, для последующих преобразований и упрощений уравнений п.1, введем систему координат, движущуюся со скоростью звука a_0 невозмущенной смеси [8,9]

$$t = \frac{L}{a_0 \Delta} t', \quad x = a_0 t + L x_1 \quad (2.2)$$

где L - характерная длина в направлении оси, Δ - второй безразмерный малый параметр. Напомним, что a_0 , в предельных случаях совпадает либо с изотермической a_{e0} , либо с адиабатической a_{f0} скоростями звука в смеси. При упрощении уравнений в дальнейшем будут удержаны лишь главные (порядка 1) и старшие (порядка ε) члены и штрихи над возмущениями параметров течения будут опущены.

Применяя преобразования (2.1), (2.2) к уравнениям (1.1)-(1.3) и (1.7)-(1.10), удержим главные члены. Учитывая, что в системе координат (x_1, t') волна распространяется по покоящейся смеси, проинтегрируем получаемые упрощенные уравнения

$$\begin{aligned} \rho = u, \quad P = P_1 = P_2 = \frac{\rho_0 a_0^2}{P_0} u, \quad \rho_1 = \frac{1}{1 - \beta_0} (u + 3\beta_0 R) \\ \rho_2 = -3R, \quad R = -\frac{\rho_0 a_0^2}{3P_0} u, \quad \beta = \beta_0 (u + 3R) \end{aligned} \quad (2.3)$$

В рассматриваемой газожидкостной смеси пусть величины (1.12) невозмущенных предельных скоростей звука a_{e0} и a_{f0} близки одна другой. По предположению, скорость a_0 распространения волны малой, но конечной интенсивности, не совпадает ни с a_{e0} , ни с a_{f0} и потому примем

$$a_0 - a_{e0} = \varepsilon a_0 \sigma_e, \quad a_{f0} - a_0 = \varepsilon a_0 \sigma_f \quad (2.4)$$

Очевидно, что σ_e и σ_f - постоянные величины порядка единицы, связанные между собой, согласно формулам (1.12), соотношением

$$\sigma_e = -\sigma_f + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\beta_0 \rho_0 a_0^2}{2P_0} \quad (2.5)$$

Отсюда следует $(\gamma - 1) \sim \varepsilon$, что соответствует пузырькам, наполненным многоатомным газом (например, пропаном C_3H_8 при 0,1 МПа и $T = 280^\circ K$). Комбинирование уравнений состояния газа, (1.8) с формулой $dP_1 = a_1^2 d\rho_1$ позволяет записать уравнение неразрывности в форме, удобной при рассмотрении режима распространения возмущений, близкого к изотермическому

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \beta_0) P_2}{T_2} \left(\frac{dT_2}{dt} - \frac{3T_2}{R} \frac{dR}{dt} \right) - \\ \frac{d}{dt} \left[(1 - \varphi_1) \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + (1 - \varphi_2) \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{R}{a_1} \frac{d}{dt} \left(P_2 - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} \right) \right] - \\ - \rho_1 a_1^2 \left(\frac{3\beta}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \beta (P_2 - P_1) \left(\frac{3}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ввиду того, что искомое уравнение должно быть получено из упрощенных в порядке ε системы уравнений (1.10), (1.11) и (2.6), преобразование (2.2), с учетом определения (2.4), очевидно, можно переписать в явном виде

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\Delta}{L} a_{e0} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{a_{e0}}{L} (1 + \varepsilon \sigma_e) \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (2.7)$$

Применим преобразования (2.1) и (2.7) к уравнению (1.11) и при его упрощении оставим главные члены. Получим

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} + 3(\gamma - 1) \frac{\partial R}{\partial x_1} = \frac{3\gamma}{2} \frac{L^2}{R_0^2} \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}} T, \quad \text{Pe} = \frac{La_0}{\lambda_2} \quad (2.8)$$

Здесь Pe - число Пекле, $\lambda_2 = k_2 (c_{p2} \rho_{20})^{-1}$ - коэффициент температуропроводности газа. Для того, чтобы в (2.8) все члены были одного порядка, необходимо принять

$$T \sim \varepsilon, \quad \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}} \sim \frac{R_0^2}{L^2}$$

откуда следует, что возмущение температуры - величина более высокого порядка малости, чем величина массовой скорости частиц смеси. Разлагая функцию $a_1 = a_1(\rho_1, T_1)$ в ряд Тейлора в окрестности локального термодинамического равновесия и используя формулы (2.1), (2.3), находим главный член разложения

$$a_1 = (m-1) \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_{10} a_{10}^2} u, \quad m = \frac{1}{a_{10}} \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1} (\rho_1 a_1) \right]_0 \quad (2.9)$$

Применение преобразования (2.1), (2.7) к уравнениям (1.10) и (2.6) и их последующее комбинирование позволяет исключить из рассмотрения член порядка единицы $\partial R / \partial x_1$, при этом получаемое упрощенное уравнение, кроме старших членов порядка ε , содержит также член порядка единицы $\partial u / \partial x_1$ с коэффициентом, в точности совпадающим с первой из формул (1.12). В теории коротких волн известно [8,9], что члены порядка единицы упрощенного уравнения связаны с переносом массы и импульса смеси. Поэтому в полученном уравнении вышеупомянутый коэффициент необходимо приравнять нулю, и, тем самым, снова придем к определению (1.12) изотермической скорости звука в смеси. Далее, подставляя соотношения (2.3), (2.9) в члены порядка ε , находим

$$\Delta \frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon (\alpha_e u_1 - \sigma_e) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \left(\frac{1}{\text{Re}} \delta_e + \frac{R_0}{L} \frac{a_{e0}}{a_{10}} \delta_a \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{R_0^2}{L^2} d_e \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial x_1}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_0 La_{e0}}{\mu}, \quad u_1 = \frac{1}{\beta_0} u \quad (2.10)$$

$$\alpha_e = m \frac{(1-\beta_0)\beta_0\rho_0^2 a_{e0}^4}{\rho_{10}^2 a_{10}^4} + \left[1 - \frac{(1-\beta_0)\beta_0\rho_0 a_{e0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \right]^2, \quad \delta_e = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{\rho_0 a_{e0}^2}{P_0} A_e \right)$$

$$d_e = \frac{(1-\varphi_{10})\rho_{10} a_{e0}^2}{6P_0} A_e, \quad \delta_e = \frac{A_e}{2}, \quad A_e = \left(1 - \frac{P_0}{\rho_{10} a_{e0}^2} \right) \left[1 - \frac{(1-\beta_0)\rho_0 a_{e0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \right]$$

Если же исходить от альтернативной формы записи уравнения (1.9), удобной при рассмотрении режима распространения возмущений, близкого к адиабатическому, и проделать аналогичные выкладки, то снова придем к упрощенному в порядке ε уравнению (2.10), в котором заменены a_{e0} на a_{f0} , σ_e на $-\sigma_f$, α_e на α_f , где

$$\alpha_f = m \frac{(1-\beta_0)\beta_0\rho_0^2 a_{f0}^4}{\rho_{10}^2 a_{10}^4} + \frac{\gamma+1}{2} \left[1 - \frac{(1-\beta_0)\rho_0 a_{f0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \right]^2$$

Ввиду того, что $(\gamma-1) \sim \varepsilon$, в рассматриваемом приближении (порядка ε) $\alpha_e = \alpha_f = \alpha$ и в коэффициентах уравнения (2.10), везде можно заменить a_{e0} на a_0 , то есть принять $d_e = d_f = d$, $\delta_e = \delta_f = \delta$, $A_e = A_f = A$. Исключив возмущение радиуса пузырька в уравнении (2.8) и комбинируя его с уравнением (2.10), приходим к окончательному уравнению, описывающему распространение возмущений со скоростью a_0 , не совпадающей обязательно ни с одной из предельных невозмущенных скоростей звука:

$$\Delta \frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon (\alpha u_1 - \sigma_e) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \left(\frac{1}{\text{Re}} \delta + \frac{R_0}{L} \frac{a_0}{a_{10}} \delta_a + \frac{N}{2} \delta_r \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{R_0^2}{L^2} d \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} =$$

(2.11)

$$= N \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\Delta \frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon (\alpha u_1 - \sigma_e) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \left(\frac{1}{\text{Re}} \delta + \frac{R_0}{L} \frac{a_0}{a_{10}} \delta_a \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{R_0^2}{L^2} d \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} \right]$$

$$N = \frac{2}{3\gamma} \frac{R_0^2}{L^2} \frac{\text{Re}}{\text{Nu}}, \quad \delta_r = (\gamma-1) \left[1 - \frac{(1-\beta_0)\rho_0^2 a_0^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \right]$$

Здесь вторые слагаемые в круглых скобках ответственны за учет эффекта сжимаемости жидкой фазы и исходят от уравнения (1.3). Существует и иной альтернативный подход к учету сжимаемости, предложенный в [1].

Для сохранения требования сплошности рассматриваемого континуума при воздействии на него умеренных ($P_0 \leq 3$ МПа) давлений, обычно [7,12], на величину объемного газосодержания налагается ограничение сверху: $\beta_0 \leq 0,1$. Для

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{N + 2\delta}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + d \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = N \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + d \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right)$$

Линейное приближение. Применяя к полученному уравнению преобразование Фурье

$$V(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(x, t) \exp(-ikx) dx$$

нетрудно выписать общее решение

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(k, 0) \exp \left\{ i \left[dk^3 t - \frac{N^2 k^3 t}{2(1 + N^2 k^2)} + kx \right] - \left[\delta k^2 t + \frac{N k^2 t}{2(1 + N^2 k^2)} \right] \right\} dk$$

где спектральная функция $V(k, 0)$ есть Фурье-трансформанта начального условия. Здесь k - безразмерное волновое число.

3. Асимптотические решения. Для получения простых аналитических решений перейдем к исследованию предельных случаев.

Длинноволновое приближение. Полагая $N^2 k^2 \ll 1$, из общего решения находим

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(k, 0) \exp \left[i \left(d - \frac{N^2}{2} \right) k^3 t + ikx - \left(\delta + \frac{N}{2} \right) k^2 t \right] dk \quad (3.1)$$

Коротковолновое приближение. Если же полагать $N^2 k^2 \gg 1$, то из общего решения имеем

$$v(x, t) = \exp \left(-\frac{t}{2N} \right) \int_{-\infty}^{\infty} V(k, 0) \exp \left[i \left(dk^3 t - \frac{kt}{2} + kx \right) - \delta k^2 t \right] dk \quad (3.2)$$

Из решения (3.2) видно, что учет тепловой релаксации в пузырьке приводит к экспоненциальному затуханию во времени амплитуды волны. Такой же закон следует из линейного варианта уравнения, описывающего квазиadiабатический режим распространения волны.

Пусть начальное условие задается в виде

$$v(x, 0) = x^2 \exp(-m^2 x^2), \quad m = \text{const}$$

Тогда, можно искомую спектральную функцию выразить через элементарные

$$V(k, 0) = \frac{1}{4m^3 \sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{k^2}{2m^2} \right) \exp \left(-\frac{k^2}{4m^2} \right) \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в решение (3.1) и применяя теорему о свертке функций, в длинноволновом приближении получим

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1+4m^2\delta.t)^{\frac{3}{2}} (3d.t)^{-\frac{1}{3}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\delta.t + \frac{z^2}{1+4m^2\delta.t} \right) \times$$

(3.4)

$$\times \exp\left(-\frac{m^2 z^2}{1+4m^2\delta.t}\right) Ai\left(\frac{x-z}{\sqrt{3d.t}}\right) dz; \quad \delta_* = \delta + \frac{N}{2}, \quad d_* = d - \frac{N^2}{2}$$

где $Ai(y)$ - функция Эйри. При $t \rightarrow 0$, используя свойства функции Эйри [13], нетрудно показать переход решения (3.4) в начальное условие. Разлагая в решении (3.4) функцию Эйри в ряд по степеням z и используя интегральное представление гамма-функций, после применения формулы Лежандра находим

$$v(x,t) = \frac{1}{m(1+4m^2\delta.t)} (3d.t)^{-\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (3d.t)^{-\frac{2n}{3}} \left(\frac{1+4m^2\delta.t}{m^2} \right)^n \times$$

$$\times Ai^{(2n)}\left(\frac{x}{\sqrt{3d.t}}\right) \left[\frac{2\delta.t}{n!} + \frac{1}{m^2} \frac{1}{n!} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]$$

Выпишем асимптотические решения далеко впереди и позади фронта волны, для чего воспользуемся предварительно формулами асимптотического разложения производных функций Эйри при больших значениях аргумента [13]. Далее, ввиду сходимости получаемых рядов [14], получаем соответственно:

$$\text{при } x(3d.t)^{\frac{1}{3}} \rightarrow \infty$$

$$v(x,t) = \frac{(3d.tx)^{-\frac{1}{4}}}{4m^3} \left(1 + \frac{1}{2m^2} \frac{x}{3d.t} \right) \exp \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{x}{\sqrt{3d.t}} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1+4m^2\delta.t}{4m^2} \frac{x}{3d.t} \right]$$

$$\text{при } x(3d.t)^{\frac{1}{3}} \rightarrow -\infty$$

$$v(x,t) = \frac{1}{2m^3} |3d.t|^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{1}{2m^2} \left| \frac{x}{3d.t} \right| \right) \exp \left(-\frac{1+4m^2\delta.t}{4m^2} \left| \frac{x}{3d.t} \right| \right) \times$$

$$\times \cos \left(\frac{2}{3} \left| \frac{x}{3d.t} \right|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right)$$

(3.5)

Очевидно, что характер поведения возмущений определяется вторыми слагаемыми в выписанных решениях, при этом далеко впереди волны эффекты вязкости и теп-

лообмена противодействуют, а далеко позади - способствуют затуханию возмущений. В длинноволновом приближении учет межфазного теплообмена аналогичен воздействию второй (продольной) вязкости на процесс распространения возмущений и одновременно приводит к уменьшению эффекта дисперсии.

Перейдем теперь к исследованию распространения линейных волн в коротковолновом приближении. Подставляя выражение Фурье-образа (3.3) начального условия в решение (3.2) и опять применяя теорему о свертке функций, находим

$$v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 + 4m^2 \delta t)^{-\frac{3}{2}} (3dt)^{-\frac{1}{3}} \exp\left(-\frac{t}{2N}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\delta t + \frac{z^2}{1 + 4m^2 \delta t}\right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{m^2 z^2}{1 + 4m^2 \delta t}\right) Ai\left(\frac{x - \frac{t}{2} - z}{\sqrt[3]{3dt}}\right) dz \quad (3.6)$$

Легко проверить, что при $t \rightarrow 0$ данное решение переходит в заданное начальное условие. Как и выше, следуя известной методике [13], решение (3.6) можно представить в виде

$$v(x, t) = \frac{1}{m(1 + 4m^2 \delta t)} (3dt)^{-\frac{1}{3}} \exp\left(-\frac{t}{2N}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (3dt)^{-\frac{2n}{3}} \left(\frac{1 + 4m^2 \delta t}{m^2}\right)^n \times \\ \times \left[\frac{2\delta t}{n!} + \frac{1}{m^2} \frac{1}{n!} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right] Ai^{(2n)}\left(\frac{x - \frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right)$$

Аналогично выводу асимптотических решений (3.5) длинноволнового приближения, можно получить: при $\left(x - \frac{t}{2}\right)(3dt)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow \infty$ (далеко впереди фронта волны)

$$v(x, t) = \frac{1}{8m^5} \left(\frac{x - \frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{1}{3dt} \exp\left[-\frac{t}{2N} - \frac{2}{3} \left(\frac{x - \frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1 + 4m^2 \delta t}{4m^2} \frac{x - t/2}{3dt}\right]$$

при $\left(x - \frac{t}{2}\right)(3dt)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow -\infty$ (далеко позади фронта волны)

$$v(x, t) = \frac{1}{4m^5} \left|\frac{x - \frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right|^{\frac{3}{4}} \frac{1}{3dt} \exp\left[-\frac{t}{2N} - \frac{1 + 4m^2 \delta t}{4m^2} \left|\frac{x - \frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right|\right] \cdot \cos\left(\frac{2}{3} \left|\frac{x - \frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Таким образом, в коротковолновом приближении межфазный теплообмен усиливает эффект затухания возмущений.

Л и т е р а т у р а

1. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. - М.: Наука, 1978. 336 с.
2. Кутателидзе С.С., Накоряков В.Е. Теплообмен и волны в газожидкостных системах. - Новосибирск: Наука, 1984. 301 с.
3. Ван-Вейнгарден Л. Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа. Реология суспензий. - М.: Мир, 1975, с.68-103.
4. Кузнецов В.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Экспериментальное исследование распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа. //Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977, с.32-44.
5. Noordzij L., Van Wijngaarden L. Relaxation effects, caused by relative motion, on shock waves in gas-bubble liquid mixtures. //J.Fluid Mech, 1974, v.66, № 1, p.115-143.
6. Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш. Структура ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа. - Изв.АН СССР. МЖГ, 1974, №6, с.30-41.
7. Губайдулин А.А., Ивандаев А.И., Нигматулин Р.И. Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры. - ПМТФ, 1978, № 2, с.78-86.
8. Гриб А.А., Рыжов О.С., Христианович С.А. Теория коротких волн. - ПМТФ, 1960, № 1, с.63-74.
9. Рыжов О.С. О нелинейной акустике химически активных сред. - ПММ, 1971, т.35, № 6, с.1023-1037.
10. Акуличев В.А. Пульсация кавитационных полостей. // Мощные ультразвуковые поля. - М.: Наука, 1968, с.129-165.
11. Оганян Г.Г. Об уравнениях нелинейной акустики газожидкостных сред. Изв.АН АрмССР, Механика, 1988, т.41, № 3, с.25-36.
12. Гельфанд Б.Е., Губин С.А., Когарко С.М., Тимофеев Е.И. Прохождение ударных волн через границу раздела в двухфазных газожидкостных средах. - Изв.АН СССР, МЖГ, 1974, № 6, с.58-65.
13. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. - М.: Наука, 1973. 176 с.
14. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. - М.: Наука, 1981. 800 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
3.12.1990

УДК 532.591:534.22.2

ОДНОМЕРНЫЕ ВОЛНЫ В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

Оганян Г.Г.

Օհանյան Գ.Գ.

Միաչափ ալիքները գազահեղուկ խառնուրդում

Դիվերգենցիայից առաջացող ալիքները, որոնք սահմանային իզոթերմիկ և ադիաբատիկ ծայրի արագությունները մոտ են իրար: Ստացված են գրգռումների վաղըր նկարագրող ապիմպոնիկ բանաձևեր ալիքի ճակատից հեռու կներըրում: Ցույց է տրված, որ երկար ալիքային մոլավորությունում միջֆազային ջերմափոխանակությունը խցընդոլում է իսկ կարճալիքային մոլավորությունում ուժեղացնում է գրգռումների մարումը:

Ohanian G.G.

One Dimensional Wave in Gas-Fluid Mixture

Исследуется волновое движение в газожидкостных средах, в которых величины предельных изотермической и адиабатической скоростей звука в смеси близки одна другой. Полученное уравнение в предельных случаях переходит в уравнения, описывающие волновой процесс в средах, в которых термодинамическое поведение пузырьков близко либо к изотермическому, либо к адиабатическому.

В наиболее общей постановке система уравнений движения газожидкостной мономодисперсной бесстолкновительной смеси с учетом несовпадений давлений и температур в фазах, а также эффектов сжимаемости и вязкости фаз приведена в [1]. Теоретическое исследование волновых процессов в рамках односкоростной и однотемпературной модели газожидкостной смеси [2,3] качественно не всегда совпадает с данными эксперимента [2,4,5] ввиду того, что исследовались либо чисто изотермический, либо адиабатический термодинамические режимы поведения газового пузырька в жидкости. Физически приемлемое истолкование результатов проведенных экспериментов дано в [6,7], где впервые подчеркнута важность учета тепловых эффектов, обусловленных межфазным взаимодействием пульсирующего пузырька с несущей жидкостью.

В настоящей работе исследуется волновое движение в специальных газожидкостных средах, в которых величины предельных изотермической и адиабатической скоростей звука в смеси близки одна другой. Методом коротких волн [8,9] выведено двухволновое уравнение, переходящее в предельных случаях в уравнения, описывающие распространение нелинейных акустических волн в смесях, в которых термодинамическое поведение пузырьков

быстро, либо к изотермическому, либо к адиабатическому. В частных случаях отсутствия теплообмена между пузырьком и жидкостью, они совпадают с известными уравнениями [2,3].

Рассмотрена частная задача с начальными условиями. В линейной постановке получены асимптотические формулы, описывающие поведение возмущений далеко впереди и позади фронта волны. Выявлено, что в длинноволновом приближении межфазный теплообмен противодействует затуханию, а в коротковолновом — усиливает эффект затухания.

1. Исходные уравнения. Предположим, что в монодисперсной газожидкостной смеси частицы фаз движутся с одинаковой скоростью. Несущая жидкая фаза обладает эффектами вязкости и сжимаемости, а газовая фаза представляет собой пузырьки калорически совершенного газа. Будем считать, что в рассматриваемой области течения в смеси не происходит сильного пересечения газовой фазы и потому, ввиду существенного влияния температуры на плотность газа в пузырьках, примем, что теплообмен между фазами определяется лишь тепловым сопротивлением газовой фазы. Тогда можно считать температуру жидкости T_1 постоянной ($T_1 = T_0 = \text{const}$), при этом, согласно [6,7], учет эффекта теплопроводности газа важен лишь при межфазном взаимодействии с жидкостью. Пренебрегая эффектами образования, дробления, коагуляции и столкновения пузырьков, уравнения движения исследуемой газожидкостной смеси возьмем в виде [1,7,10]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

$$P_2 - P = (1 - \beta_1) \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + (1 - \beta_2) \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \quad (1.3)$$

$$+ \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{R}{\rho_1} \frac{d}{dt} \left(P_2 - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} \right)$$

$$\frac{\rho_2 \beta}{\rho_1 (1 - \beta)} = \text{const}, \quad \rho_2 R^3 = \text{const}, \quad P_2 = c_{v2} (\gamma - 1) \rho_2 T_2 \quad (1.4)$$

$$\rho = \rho_1 (1 - \beta) + \rho_2 \beta, \quad P = P_1 (1 - \beta) + P_2 \beta \quad (1.5)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = - \frac{3\gamma\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{3}{2} \frac{(\gamma - 1) k_2 \text{Nu}}{R^2} (T_2 - T_0) \quad (1.6)$$

$$\varphi_1 = \frac{1,1\beta^{1/3} - \beta}{1 - \beta}, \quad \varphi_2 = \frac{1,47\beta^{1/3} - 0,33\beta}{1 - \beta}$$

Здесь t - время, x - координатная ось, u - скорость частиц смеси, R - радиус пузырьков, β - объемная концентрация газа, $\gamma = c_{p2}/c_{v2}$ - показатель адиабаты газа, $\mu = \mu_1[1 + o(\beta)]$ - динамический коэффициент вязкости смеси, a - скорость звука, k_2 - коэффициент теплопроводности газа, Nu - число Нуссельта, остальные обозначения общепринятые. Индексы 1 и 2 относятся, соответственно, к параметрам течения жидкой и газовой фаз. Параметры, характеризующие движения всей смеси, индексов не имеют. Поправочные коэффициенты φ_1, φ_2 учитывают конечность величины β и неоднородность газового пузырька в безграничной жидкости [1,7]. Использование уравнения (1.6) позволяет в первом приближении учесть несовпадение температур в фазах.

Комбинируя соотношения (1.4), характеризующие условия сохранения массы газа в пузырьке, и совпадения скоростей частиц жидкой и газовой фаз, получим

$$\frac{1}{\beta(1-\beta)} \frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dt} - \frac{1}{\rho_2} \frac{d\rho_2}{dt}, \quad \frac{d\rho_2}{dt} = -\frac{3\rho_2}{R} \frac{dR}{dt} \quad (1.7)$$

Учитывая (1.7) и определение плотности всей смеси (1.5), уравнение неразрывности смеси (1.1) преобразуется к виду

$$\frac{(1-\beta)}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dt} - \frac{3\beta}{R} \frac{dR}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.8)$$

Используя уравнения (1.7), (1.8) и (1.3), из определения давления всей смеси (1.5) находим

$$(1-\beta) \frac{dP_2}{dt} - \frac{d}{dt} \left[(1-\varphi_1)\rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + (1-\varphi_2) \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{R}{a_1} \frac{d}{dt} \left(P_2 - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} \right) \right] = (1-\beta) \frac{dP_1}{dt} + \beta(P_2 - P_1) \left(\frac{3}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1.9)$$

Комбинирование уравнений импульса смеси (1.2), пульсации пузырька (1.3) и состояний (1.4) дает

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{P_2}{T_2} \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{3T_2}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} + \left[(1-\varphi_1)\rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + \right. \\ \left. + (1-\varphi_2) \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{R}{a_1} \frac{d}{dt} \left(P_2 - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} \right) \right] + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.10)$$

Исключив из рассмотрения в уравнении (1.6) давление в пузырьке P_2 посредством уравнения состояния калорически совершенного газа (1.4) и используя (1.7), будем иметь

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + u \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{3(\gamma-1)T_2}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial t} + u \frac{\partial R}{\partial x} \right) = -\frac{3}{2} \frac{k_2 \text{Nu}}{\rho_2 c_{v2} R^2} (T_2 - T_0) \quad (1.11)$$

В зависимости от величины теплообмена между пузырьком и жидкостью в газожидкостных смесях скорость распространения возмущений в предельных случаях совпадает либо с изотермической a_i , либо с адиабатической a_f скоростями звука в смеси, которые задаются формулами [2,3,11]

$$\frac{1}{a_{i0}^2} - \frac{(1-\beta_0)\rho_0}{\rho_{i0}a_{i0}^2} - \frac{\beta_0\rho_0}{P_0} = 0, \quad \frac{1}{a_{f0}^2} - \frac{(1-\beta_0)\rho_0}{\rho_{i0}a_{i0}^2} - \frac{\beta_0\rho_0}{\gamma P_0} = 0 \quad (1.12)$$

Здесь и далее индекс 0 отнесен к состоянию покоя. Первый из режимов реализуется при $\text{Nu} \rightarrow \infty$, а второй - при $\text{Nu} \rightarrow 0$. Дифференцируя по ρ_i тождество $P_i(\rho_i, s_i) = P_i[\rho_i, T_i(\rho_i, s_i)]$ и учитывая постоянство температуры в жидкости, нетрудно показать, что $a_{i*} = a_{if} = a_i$.

2. Асимптотические разложения. Предположим, что по невозмущенной покоящейся смеси в направлении оси x распространяется волна, в которой избыточные значения всех параметров течения малы по сравнению с начальными. Примем, что величины возмущений параметров имеют такой же порядок малости, что и массовая скорость частиц смеси

$$u = \varepsilon a_0 u', \quad P = P_0(1 + \varepsilon P'), \quad P_i = P_0(1 + \varepsilon P'_i), \quad \rho = \rho_0(1 + \varepsilon \rho')$$

$$\rho_i = \rho_{i0}(1 + \varepsilon \rho'_i), \quad T_2 = T_0(1 + \varepsilon T'), \quad R = R_0(1 + \varepsilon R'), \quad \beta = \beta_0 + \varepsilon \beta' \quad (2.1)$$

$$a_i = a_{i0}(1 + \varepsilon a'_i), \quad (i=1,2)$$

Здесь ε - безразмерный малый параметр. Рассматриваемую область течения считаем областью коротких волн. В этой области, примыкающей к ударному фронту, изменения избыточных величин, характеризующих возмущенное течение, происходит весьма быстро, несмотря на их малость. Ширина области течения, где сосредоточены возмущения, мала по сравнению с расстояниями, на которые может распространяться волна. Поэтому, для последующих преобразований и упрощений уравнений п.1, введем систему координат, движущуюся со скоростью звука a_0 невозмущенной смеси [8,9]

$$t = \frac{L}{a_0 \Delta} \bar{t}, \quad x = a_0 t + Lx_1 \quad (2.2)$$

где L - характерная длина в направлении оси, Δ - второй безразмерный малый параметр. Напомним, что a_0 , в предельных случаях совпадает либо с изотермической $a_{0,0}$, либо с адиабатической $a_{f,0}$ скоростями звука в смеси. При упрощении уравнений в дальнейшем будут удержаны лишь главные (порядка 1) и старшие (порядка ϵ) члены и штрихи над возмущениями параметров течения будут опущены.

Применяя преобразования (2.1), (2.2) к уравнениям (1.1)-(1.3) и (1.7)-(1.10), удержим главные члены. Учитывая, что в системе координат (x, t) волна распространяется по покоящейся смеси, проинтегрируем получаемые упрощенные уравнения

$$\begin{aligned} \rho = u, \quad P = P_1 = P_2 = \frac{\rho_0 a_0^2}{P_0} u, \quad \rho_1 = \frac{1}{1 - \beta_0} (u + 3\beta_0 R) \\ \rho_2 = -3R, \quad R = -\frac{\rho_0 a_0^2}{3P_0} u, \quad \beta = \beta_0 (u + 3R) \end{aligned} \quad (2.3)$$

В рассматриваемой газожидкостной смеси пусть величины (1.12) возмущенных предельных скоростей звука $a_{e,0}$ и $a_{f,0}$ близки одна другой. По предположению, скорость a_0 распространения волны малой, но конечной интенсивности, не совпадает ни с $a_{e,0}$, ни с $a_{f,0}$ и потому примем

$$a_0 - a_{e,0} = \epsilon a_0 \sigma_e, \quad a_{f,0} - a_0 = \epsilon a_0 \sigma_f \quad (2.4)$$

Очевидно, что σ_e и σ_f - постоянные величины порядка единицы, связанные между собой, согласно формулам (1.12), соотношением

$$\sigma_e = -\sigma_f + \frac{1}{\epsilon} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\beta_0 \rho_0 a_0^2}{2P_0} \quad (2.5)$$

Отсюда следует $(\gamma - 1) \sim \epsilon$, что соответствует пузырькам, наполненным многоатомным газом (например, пропаном C_3H_8 при 0,1 МПа и $T = 280^\circ K$).

Комбинирование уравнений состояния газа, (1.8) с формулой $dP_1 = a_1^2 d\rho_1$ позволяет записать уравнение неразрывности в форме, удобной при рассмотрении режима распространения возмущений, близкого к изотермическому

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \beta_0) P_2}{T_2} \left(\frac{dT_2}{dt} - \frac{3T_2}{R} \frac{dR}{dt} \right) - \\ \frac{d}{dt} \left[(1 - \varphi_1) \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + (1 - \varphi_2) \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{R}{a_1} \frac{d}{dt} \left(P_2 - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} \right) \right] - \\ - \rho_1 a_1^2 \left(\frac{3\beta}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \beta (P_2 - P_1) \left(\frac{3}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ввиду того, что искомое уравнение должно быть получено из упрощенных в порядке ε системы уравнений (1.10), (1.11) и (2.6), преобразование (2.2), с учетом определения (2.4), очевидно, можно переписать в явном виде

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\Delta}{L} a_{*0} \frac{\partial}{\partial t_*} - \frac{a_{*0}}{L} (1 + \varepsilon \sigma_*) \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (2.7)$$

Применим преобразования (2.1) и (2.7) к уравнению (1.11) и при его упрощении оставим главные члены. Получим

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} + 3(\gamma - 1) \frac{\partial R}{\partial x_1} = \frac{3\gamma}{2} \frac{L^2}{R_0^2} \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}} T, \quad \text{Pe} = \frac{La_0}{\lambda_2} \quad (2.8)$$

Здесь Pe - число Пекле, $\lambda_2 = k_2 (c_{p2} \rho_{20})^{-1}$ - коэффициент температуропроводности газа. Для того, чтобы в (2.8) все члены были одного порядка, необходимо принять

$$T \sim \varepsilon, \quad \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}} \sim \frac{R_0^2}{L^2}$$

откуда следует, что возмущение температуры - величина более высокого порядка малости, чем величина массовой скорости частиц смеси. Разлагая функцию $a_1 = a_1(\rho_1, T_1)$ в ряд Тейлора в окрестности локального термодинамического равновесия и используя формулы (2.1), (2.3), находим главный член разложения

$$a_1 = (m-1) \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_{10} a_{10}^2} u, \quad m = \frac{1}{a_{10}} \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1} (\rho_1 a_1) \right]_{10} \quad (2.9)$$

Применение преобразования (2.1), (2.7) к уравнениям (1.10) и (2.6) и их последующее комбинирование позволяет исключить из рассмотрения член порядка единицы $\partial R / \partial x_1$, при этом получаемое упрощенное уравнение, кроме старших членов порядка ε , содержит также член порядка единицы $\partial u / \partial x_1$ с коэффициентом, в точности совпадающим с первой из формул (1.12). В теории коротких волн известно [8,9], что члены порядка единицы упрощенного уравнения связаны с переносом массы и импульса смеси. Поэтому в полученном уравнении вышеупомянутый коэффициент необходимо приравнять нулю, и, тем самым, снова придем к определению (1.12) изотермической скорости звука в смеси. Далее, подставляя соотношения (2.3), (2.9) в члены порядка ε , находим

$$\begin{aligned} \Delta \frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon (\alpha_* u_1 - \sigma_*) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \left(\frac{1}{\text{Re}} \delta_* + \frac{R_0}{L} \frac{a_{*0}}{a_{10}} \delta_* \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{R_0^2}{L^2} d_* \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} = \\ = - \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial x_1}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_0 La_{*0}}{\mu}, \quad u_1 = \frac{1}{\beta_0} u \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\alpha_* = m \frac{(1-\beta_0)\beta_0 \rho_0^2 a_{*0}^4}{\rho_{10}^2 a_{10}^4} + \left[1 - \frac{(1-\beta_0)\beta_0 \rho_0 a_{*0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \right]^2, \quad \delta_* = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{\rho_0 a_{*0}^2}{P_0} A_* \right)$$

$$d_* = \frac{(1-\beta_{10})\rho_{10} a_{*0}^2}{6P_0} A_*, \quad \delta_* = \frac{A_*}{2}, \quad A_* = \left(1 - \frac{P_0}{\rho_{10} a_{*0}^2} \right) \left[1 - \frac{(1-\beta_0)\rho_0 a_{*0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \right]$$

Если же исходить от альтернативной формы записи уравнения (1.9), удобной при рассмотрении режима распространения возмущений, близкого к адиабатическому, и проделать аналогичные выкладки, то снова придем к уравнению в порядке ϵ уравнению (2.10), в котором заменены a_{*0} на a_{f0} , σ_* на σ_f , α_* на α_f , где

$$\alpha_f = m \frac{(1-\beta_0)\beta_0 \rho_0^2 a_{*0}^4}{\rho_{10}^2 a_{10}^4} + \frac{\gamma+1}{2} \left[1 - \frac{(1-\beta_0)\rho_0 a_{*0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \right]^2$$

Ввиду того, что $(\gamma-1) \sim \epsilon$, в рассматриваемом приближении (порядка ϵ) $\alpha_* = \alpha_f = \alpha$ и в коэффициентах уравнения (2.10), везде можно заменить a_{*0} на a_0 , то есть принять $d_* = d_f = d$, $\delta_* = \delta_f = \delta$, $A_* = A_f = A$. Исключив возмущение радиуса пузырька в уравнении (2.8) и комбинируя его с уравнением (2.10), приходим к окончательному уравнению, описывающему распространение возмущений со скоростью a_0 , не совпадающей обязательно с одной из предельных невозмущенных скоростей звука:

$$\Delta \frac{\partial u_1}{\partial t} + \epsilon (\alpha u_1 - \sigma_*) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \left(\frac{1}{\text{Re}} \delta + \frac{R_0}{L} \frac{a_0}{a_{10}} \delta_* + \frac{N}{2} \delta_r \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{R_0^2}{L^2} d \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} =$$

(2.11)

$$= N \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\Delta \frac{\partial u_1}{\partial t} + \epsilon (\alpha u_1 - \sigma_*) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \left(\frac{1}{\text{Re}} \delta + \frac{R_0}{L} \frac{a_0}{a_{10}} \delta_* \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{R_0^2}{L^2} d \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} \right]$$

$$N = \frac{2}{3\gamma} \frac{R_0^2}{L^2} \frac{\text{Re}}{\text{Nu}}, \quad \delta_r = (\gamma-1) \left[1 - \frac{(1-\beta_0)\rho_0^2 a_0^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \right]$$

Здесь вторые слагаемые в круглых скобках ответственны за учет эффекта сжимаемости жидкой фазы и исходят от уравнения (1.3). Существует и иной альтернативный подход к учету сжимаемости, предложенный в [1].

Для сохранения требования сплошности рассматриваемого континуума при воздействии на него умеренных ($P_0 \leq 3$ МПа) давлений, обычно [7,12], на величину объемного газосодержания налагается ограничение сверху: $\beta_0 \leq 0,1$. Дл

Уравнение движения манипулятора определим в форме Лагранжа и представим в векторном виде

$$\ddot{\alpha} = f(\alpha, \dot{\alpha}, M) \quad (1.1)$$

где $M = M_1, \dots, M_n$ — управляющие силы и моменты, развиваемые приводами, расположенными в шарнирах O_i .

Между обобщенными координатами манипулятора α_i и координатами, определяющими положение схвата, имеется следующая связь:

$$x = \bar{f}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (1.2)$$

Пусть в пространстве переменных $x_i (i=1, 2, 3)$ задана некоторая линия, которую с учетом (1.2) представим в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= 0 \\ \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Функции $\varphi_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$ в пространстве переменных $\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$ представляют собой гладкие гиперповерхности. Пересечение Ω этих гиперповерхностей является $(n-2)$ -мерным гладким многообразием, если в каждой точке $\alpha \in \Omega$ векторы $\text{grad } \varphi_i(\alpha) (i=1, 2)$ линейно независимы [1].

Пусть требуется за время $t \in [t_0, T]$ из начального положения $x(t_0) = x^0$, $\dot{x}(t_0) = \dot{x}^0$ привести схват манипулятора на линию (1.3) со скоростью $\dot{x}(T) = a$ и с минимизацией некоторого функционала, характеризующего качество переходного процесса:

$$J = \int_{t_0}^T \Phi(\alpha, \dot{\alpha}, M) dt \rightarrow \min_{\substack{\{M(t)\} \leq m}} \quad (1.4)$$

Введем фазовые переменные

$$\alpha_i = y_i, \quad \dot{\alpha}_i = y_{i+n} (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.5)$$

Начальное множество представляет собой $r_0 = (2n-6)$ -мерное гладкое многообразие S^0 , а конечное $r_1 = (2n-5)$ -мерное гладкое многообразие S_1 в пространстве переменных $\{y_i, y_{i+n}\} (i=1, 2, \dots, n)$.

Векторное уравнение (1.1) и функционал (1.4) в фазовом пространстве (1.5) представим в виде

$$\dot{y} = F(y, M), \quad y^0 \in S^0 \quad (1.6)$$

$$J = \int_{t_0}^T \Phi(y, M) dt \rightarrow \min_{\substack{\{M(t)\} \leq m}} \quad (1.7)$$

соответственно.

2. Математическая формулировка и исследование задачи. Пусть движение механической системы описывается векторным дифферен-

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{N + 2\delta}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + d \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = N \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + d \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right)$$

Линейное приближение. Применяя к полученному уравнению преобразование Фурье

$$V(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(x, t) \exp(-ikx) dx$$

нетрудно выписать общее решение

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(k, 0) \exp \left\{ i \left[dk^3 t - \frac{N^2 k^3 t}{2(1+N^2 k^2)} + kx \right] - \left[\delta k^2 t + \frac{Nk^2 t}{2(1+N^2 k^2)} \right] \right\} dk$$

где спектральная функция $V(k, 0)$ есть Фурье-трансформанта начального условия. Здесь k - безразмерное волновое число.

3. Асимптотические решения. Для получения простых аналитических решений перейдем к исследованию предельных случаев.

Длинноволновое приближение. Полагая $N^2 k^2 \ll 1$, из общего решения находим

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(k, 0) \exp \left[i \left(d - \frac{N^2}{2} \right) k^3 t + ikx - \left(\delta + \frac{N}{2} \right) k^2 t \right] dk \quad (3.1)$$

Коротковолновое приближение. Если же полагать $N^2 k^2 \gg 1$, то из общего решения имеем

$$v(x, t) = \exp \left(-\frac{t}{2N} \right) \int_{-\infty}^{\infty} V(k, 0) \exp \left[i \left(dk^3 t - \frac{kt}{2} + kx \right) - \delta k^2 t \right] dk \quad (3.2)$$

Из решения (3.2) видно, что учет тепловой релаксации в пузырьке приводит к экспоненциальному затуханию во времени амплитуды волны. Такой же закон следует из линейного варианта уравнения, описывающего квазиадiabатический режим распространения волны.

Пусть начальное условие задается в виде

$$v(x, 0) = x^2 \exp(-m^2 x^2), \quad m = \text{const}$$

Тогда, можно искомым спектральную функцию выразить через элементарные

$$V(k, 0) = \frac{1}{4m^3 \sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{k^2}{2m^2} \right) \exp \left(-\frac{k^2}{4m^2} \right) \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в решение (3.1) и применяя теорему о свертке функций в длинноволновом приближении получим

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 + 4m^2 \delta_* t)^{-\frac{3}{2}} (3d_* t)^{-\frac{1}{3}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\delta_* t + \frac{z^2}{1 + 4m^2 \delta_* t} \right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{m^2 z^2}{1 + 4m^2 \delta_* t}\right) Ai\left(\frac{x-z}{\sqrt{3d_* t}}\right) dz; \quad \delta_* = \delta + \frac{N}{2}, \quad d_* = d - \frac{N^2}{2} \quad (3.4)$$

где $Ai(y)$ - функция Эйри. При $t \rightarrow 0$, используя свойства функции Эйри [13], нетрудно показать переход решения (3.4) в начальное условие. Разлагая в решении (3.4) функцию Эйри в ряд по степеням z и используя интегральное представление гамма-функций, после применения формулы Лежандра находим

$$v(x,t) = \frac{1}{m(1 + 4m^2 \delta_* t)} (3d_* t)^{-\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (3d_* t)^{-\frac{2n}{3}} \left(\frac{1 + 4m^2 \delta_* t}{m^2} \right)^n \times$$

$$\times Ai^{(2n)}\left(\frac{x}{\sqrt{3d_* t}}\right) \left[\frac{2\delta_* t}{n!} + \frac{1}{m^2} \frac{1}{n!} \left(n + \frac{1}{2}\right) \right]$$

Выпишем асимптотические решения далеко впереди и позади фронта волны, для чего воспользуемся предварительно формулами асимптотического разложения производных функций Эйри при больших значениях аргумента [13]. Далее, ввиду сходимости получаемых рядов [14], получаем соответственно:

$$\text{при } x(3d_* t)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow \infty$$

$$v(x,t) = \frac{(3d_* t x)^{-\frac{1}{4}}}{4m^3} \left(1 + \frac{1}{2m^2} \frac{x}{3d_* t} \right) \exp \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{x}{\sqrt{3d_* t}} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1 + 4m^2 \delta_* t}{4m^2} \frac{x}{3d_* t} \right]$$

$$\text{при } x(3d_* t)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow -\infty$$

$$v(x,t) = \frac{1}{2m^3} |3d_* t|^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{1}{2m^2} \left| \frac{x}{3d_* t} \right| \right) \exp \left(-\frac{1 + 4m^2 \delta_* t}{4m^2} \left| \frac{x}{3d_* t} \right| \right) \times$$

$$\times \cos \left(\frac{2}{3} \left| \frac{x}{3d_* t} \right|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right)$$

(3.5)

Очевидно, что характер поведения возмущений определяется вторыми слагаемыми в выписанных решениях, при этом далеко впереди волны эффекты вязкости и теп-

лообмена противодействуют, а далеко позади - способствуют затуханию возмущений. В длинноволновом приближении учет межфазного теплообмена аналогичен воздействию второй (продольной) вязкости на процесс распространения возмущений и одновременно приводит к уменьшению эффекта дисперсии.

Перейдем теперь к исследованию распространения линейных волн в коротковолновом приближении. Подставляя выражение Фурье-образа (3.3) начального условия в решение (3.2) и опять применяя теорему о свертке функций, находим

$$v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 + 4m^2 \delta t)^{\frac{3}{2}} (3dt)^{-\frac{1}{3}} \exp\left(-\frac{t}{2N}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\delta t + \frac{z^2}{1 + 4m^2 \delta t}\right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{m^2 z^2}{1 + 4m^2 \delta t}\right) Ai\left(\frac{x - \frac{t}{2} - z}{\sqrt[3]{3dt}}\right) dz \quad (3.6)$$

Легко проверить, что при $t \rightarrow 0$ данное решение переходит в заданное начальное условие. Как и выше, следуя известной методике [13], решение (3.6) можно представить в виде

$$v(x, t) = \frac{1}{m(1 + 4m^2 \delta t)} (3dt)^{-\frac{1}{3}} \exp\left(-\frac{t}{2N}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (3dt)^{-\frac{2n}{3}} \left(\frac{1 + 4m^2 \delta t}{m^2}\right)^n \times \\ \times \left[\frac{2\delta t}{n!} + \frac{1}{m^2} \frac{1}{n!} \left(n + \frac{1}{2}\right) \right] Ai^{(2n)}\left(\frac{x - \frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right)$$

Аналогично выводу асимптотических решений (3.5) длинно-волнового приближения, можно получить: при $\left(x - \frac{t}{2}\right)(3dt)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow \infty$ (далеко впереди фронта волны)

$$v(x, t) = \frac{1}{8m^5} \left(\frac{x - \frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{1}{3dt} \exp\left[-\frac{t}{2N} - \frac{2}{3} \left(\frac{x - \frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1 + 4m^2 \delta t}{4m^2} \frac{x - t/2}{3dt}\right]$$

при $\left(x - \frac{t}{2}\right)(3dt)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow -\infty$ (далеко позади фронта волны)

$$v(x, t) = \frac{1}{4m^5} \left|\frac{x - \frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right|^{\frac{3}{4}} \frac{1}{3dt} \exp\left[-\frac{t}{2N} - \frac{1 + 4m^2 \delta t}{4m^2} \left|\frac{x - \frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right|\right] \cdot \cos\left(\frac{2}{3} \left|\frac{x - \frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Таким образом, в коротковолновом приближении межфазный теплообмен усиливает эффект затухания возмущений.

Л и т е р а т у р а

1. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. - М.: Наука, 1978. 336 с.
2. Кутателидзе С.С., Накоряков В.Е. Теплообмен и волны в газожидкостных системах. - Новосибирск: Наука, 1984. 301 с.
3. Ван-Вейнгаарден Л. Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа. Реология суспензий. - М.: Мир, 1975, с.68-103.
4. Кузнецов В.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Экспериментальное исследование распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа. //Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977, с.32-44.
5. Noordzij L., Van Wijngaarden L. Relaxation effects, caused by relative motion, on shock waves in gas-bubble liquid mixtures. //J.Fluid Mech.1974, v.66, № 1, p.115-143.
6. Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш. Структура ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа. - Изв.АН СССР. МЖГ, 1974, №6, с.30-41.
7. Губайдулин А.А., Ивандаев А.И., Нигматулин Р.И. Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры. - ПМТФ, 1978, № 2, с.78-86.
8. Гриб А.А., Рыжов О.С., Христианович С.А. Теория коротких волн. - ПМТФ, 1960, № 1, с.63-74.
9. Рыжов О.С. О нелинейной акустике химически активных сред. - ПММ, 1971, т.35, № 6, с.1023-1037.
10. Акуличев В.А. Пульсация кавитационных полостей. // Мощные ультразвуковые поля. - М.: Наука, 1968, с.129-165.
- 11.Оганян Г.Г. Об уравнениях нелинейной акустики газожидкостных сред. Изв.АН АрмССР, Механика, 1988, т.41, № 3, с.25-36.
12. Гельфанд Б.Е., Губин С.А., Когарко С.М., Тимофеев Е.И. Прохождение ударных волн через границу раздела в двухфазных газожидкостных средах. - Изв.АН СССР, МЖГ, 1974, № 6, с.58-65.
- 13.Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. - М.: Наука, 1973. 176 с.
14. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. - М.: Наука, 1981. 800 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
3.12.1990

УДК 532.516

НЕСИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ
СМАЗКИ В СЛОЕ МЕЖДУ ДВУМЯ СООСНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Бондаренко В.С., Петросян Л.Г.

Բոնդարենկո Վ.Ս., Պետրոսյան Լ.Գ.

Երկու համառանցք գլանների միջև եղած շերտում քսուքի յկայունացած շարժման σ_2 սիմետրիկ մոդելը

Խնդրի լուծման համար կիրառվում է σ_2 սիմետրիկ յարման թենզորով կոնսերվատիվ տեսությունը Ստացված են անալիտիկ ադրահայտություններ մասնիկների ադադության եւ պարման անկյունային ադադության համար: Հասարակված է որ քսուքի հոսքի սրահիոնար ռեժիմի հասարարման ժամանակը փոքրանում է Նավյե-Ստոքսի դառական ադյունքների հառմադությանը: Միկրոկատմվածքի հառվաման ազդեցությունը լուսաբառված է գրաֆիկների վրա:

Bondarenko V.S., Petrosian L.G.

Asymmetrical Model for Non Steady Motion of Lubricant in Film Between Two Co-centric Cylinders

Использована теория континуума с несимметричным тензором напряжений к решению задачи неустойчившегося движения смазки в слое между соосными цилиндрами. Получены аналитические выражения для скорости и угловой скорости вращения частиц. Установлено, что время разгона шипа, как и время установления стационарного режима течения смазки в слое между двумя соосными цилиндрами (шипом и подшипником) уменьшается (в зависимости от микроструктуры жидкости) по сравнению с результатами классической теории Навье-Стокса. Влияние учета микроструктуры проиллюстрировано на графиках.

Рассмотрим два соосных цилиндра, пространство между которыми заполнено вязкой несимметричной жидкостью. Пусть при этом внешний цилиндр неподвижен, а внутренний начинает вращаться под действием приложенной к нему в момент $t = 0$ пары с постоянным моментом M . Найдем последующее движение внутреннего цилиндра, принимая во внимание трение его о смазочный слой.

Задача в такой постановке аналогична задаче Н.П.Петрова и будет соответствовать случаю шипа, не несущего поперечной нагрузки. Задача о несимметричной модели гидродинамической теории цилиндрического подшипника (задача Зоммерфельда) рассмотрена в [1]. С практической точки зрения достаточно будет ограничиться приближенным решением, полагая просвет между цилиндрами малым.

Задачу в такой постановке решил С.М.Тарг [2]. Вышеуказанное решение было основано на классической теории континуума. Однако, классическая точка зрения налагает сильные ограничения на пределы, в которых континуальное описание макроскопического поведения может успешно отражать тонкую структуру материала.

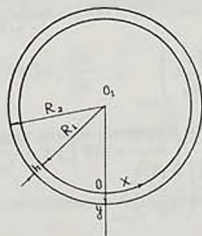
Накопившиеся факты свидетельствуют о том, что классическая теория континуума Навье-Стокса не может точно предсказать поведение некоторого класса жидкостей и особенно течений через тонкие капилляры и узкие зазоры, так как не содержит механизма для объяснения наблюдаемых новых физических явлений. Такая потеря точности возможна в случаях, когда характерный размер системы (разность радиусов коаксиальных цилиндров) сравним с характерной материальной длиной вещества, значение которой обусловлено средним размером молекул или зерен, содержащихся в среде [3].

Это обстоятельство (совместно с другими недостатками классической теории континуума) привело исследователей к разработке теории несимметричных жидкостей.

Все более очевидно, что разработанные в последнее время положения теории структурных жидкостей могут успешно описывать неньютоновские поведения реальных жидкостей [3]. В эту теорию введены два независимых кинематических векторных поля, одно из которых представляет поступательные движения частиц жидкости, а другое - вращательные движения частиц, характеризующие внутренние степени свободы, соответствующие им моментные напряжения [3-12]. Характерным отличием теории структурных сред с несимметричным тензором напряжений является присутствие масштабных параметров. Эти жидкости реагируют на микровращательные движения и спиновую инерцию, поэтому могут воспринимать распределенные поверхностные и массовые пары сил.

В настоящей работе применена теория континуума с несимметричным тензором напряжений к решению задачи неустановившегося движения смазки в слое между двумя соосными цилиндрами.

Обозначим радиусы внутреннего цилиндра (шипа) и внешнего цилиндра (подшипника) соответственно через R_1 и R_2 , длина шипа H , а момент инерции вращающихся частей (шипа), относительно оси вращения J_1 . Считая течение плоско-параллельным и отсчитывая криволинейную координату x вдоль дуги окружности радиуса R_1 , а координату y - вдоль внешней нормали к этой окружности, будем полагать величину $h = R_2 - R_1$ малой по сравнению с R_1 и пренебрегать кривизной координатных линий (фиг. 1).



Фиг. 1

Дифференциальные уравнения неустановившегося движения несимметричной жидкости в смазочном слое имеют вид [3,13]

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = (v + v_r) \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + 2v_r \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

$$I \frac{\partial \omega}{\partial t} = (c_s + c_r) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - 2v_r \left(2\omega + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (\omega = \omega_z)$$

где v_x, v_y - проекции вектора скорости соответственно на оси x, y ; ω - проекция на оси z вектора, характеризующего среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума; v - кинематическая вязкость; v_r - кинематическая вращательная вязкость; c_s, c_r - коэффициенты моментной вязкости; I - скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы.

В уравнениях (1), (2) пренебрегали действием массовых сил и моментом давления, считали давление всюду постоянным, аналогично простому срезающему течению Куэтта.

Дифференциальное уравнение вращательного движения шипа будет

$$J_1 \frac{d\Omega}{dt} = M - M_{mp}$$

где M_{mp} - момент сил трения.

Если принять во внимание, что [3]

$$\begin{aligned} M_{mp} &= -2\pi R_1^2 H \tau_0 = -2\pi R_1^2 H \rho (v + v_r) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \\ &= -\rho (v + v_r) R_1 S \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} \end{aligned}$$

то уравнение вращательного движения можно привести к виду

$$\frac{du}{dt} = \frac{q}{m} + \frac{\rho (v + v_r)}{m} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0}$$

При этом в (5)

$$u = R_1 \Omega, m = \frac{J_1}{SR_1^2}, q = \frac{M}{SR_1}$$

Здесь τ_0 - напряжение силы вязкости на поверхности шипа, ρ - массовая плотность смазки, u - переменная скорость движения точки шипа при $y=0$.

Мы предполагаем, что жидкость прилипает к стенкам цилиндров при $y=0$ и $y=h$, тогда начальные и граничные условия для поступательной скорости и угловой скорости вращения частиц будут:

$$\text{при } t=0 \quad v_x=0, \quad u=0, \quad \omega=0$$

$$\text{при } y=0 \quad (t>0), \quad v_x=u, \quad \omega=0 \quad (7)$$

$$\text{при } y=h \quad (t>0), \quad v_x=0, \quad \omega=0$$

Так как нестационарные гидродинамические задачи в рамках теории несимметричной модели жидкости даже в простейших постановках имеют свои решения весьма громоздкие, сложные выражения, то мы приведем ниже приближенное решение задачи. Идея метода состоит в приближенном учете инерционных членов $\partial v_x/\partial t$ и $\partial \omega/\partial t$ в уравнении движения вязкой несимметричной жидкости [14]. Такой приближенный учет инерционных сил был сделан при решении задачи в случае классической ньютоновской жидкости [2]. Вместо полных уравнений (1) и (2) будем рассматривать уравнения, в которых ускорения заменены их средним по толщине слоя значениями и которые имеют следующий вид:

$$\varphi(t) = \frac{1}{h_0} \int_0^h \frac{\partial v_x}{\partial t} dy \quad (8)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{h_0} \int_0^h \frac{\partial \omega}{\partial t} dy \quad (9)$$

При этом условимся в дальнейшем всюду вместо h писать h_0 . Выражения (8) и (9) зависят от t .

При таком осреднении уравнения (1) и (2) примут следующий вид:

$$\varphi(t) = (v + v_r) \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + 2v_r \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (10)$$

$$I\psi(t) = (c_s + c_d) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - 2v_r \left(2\omega + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (11)$$

Граничными условиями по-прежнему будут условия (7), а именно:

$$\text{при } y=0 \quad v_x=u(t), \quad \omega=0;$$

$$\text{при } y=h \quad v_x=0, \quad \omega=0 \quad (12)$$

Разрешая (10) относительно $\partial v_x / \partial y$, получаем

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{v + v_r} \varphi(t)y - 2 \frac{v_r}{v + v_r} \omega - C_1 \quad (13)$$

Подстановка $\partial v_x / \partial y$ в уравнение (11) дает

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - k^2 \omega = \frac{2N^2}{c_a + c_d} \varphi(t)y + \frac{I}{c_a + c_d} \psi(t) - \frac{2v_r}{c_a + c_d} C_1, \quad (14)$$

где

$$k = \left(\frac{4v}{v + v_r} \frac{v_r}{c_a + c_d} \right)^{1/2}, \quad N = \left(\frac{v_r}{v + v_r} \right)^{1/2} \quad (15)$$

Общее решение уравнения (14) есть

$$\omega = C_2 \operatorname{ch}(ky) + C_3 \operatorname{sh}(ky) - \frac{1}{2v} \varphi(t)y + \frac{v + v_r}{2v} C_1 - \frac{I}{4N^2 v} \psi(t) \quad (16)$$

Подставляя (16) в (13) и интегрируя по y , получим

$$v_x = \frac{1}{2v} \varphi(t)y^2 - \frac{2N^2}{k} C_2 \operatorname{sh}(ky) - \frac{2N^2}{k} C_3 \operatorname{ch}(ky) + \\ + \frac{v - v_r}{v} C_1 y + \frac{1}{2v} \psi(t)y + C_4 \quad (17)$$

где C_1 , C_2 , C_3 и C_4 - функции от времени.

Используя граничные условия (12) из (16) и (17), определяем C_1 , C_2 , C_3 и C_4 :

$$C_1(t) = -\frac{IA\psi(t)}{v} \left[\frac{1 - \operatorname{ch} \lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda} + \frac{1}{2} \right] - \frac{Ah_0 \varphi(t)}{v} \left[\frac{N^2}{\lambda} \frac{1 - \operatorname{ch} \lambda}{\operatorname{sh} \lambda} + \frac{1}{2} \right] - \frac{uA}{h_0} \quad (18)$$

$$C_2(t) = \frac{I}{4N^2 v} \psi(t) - \frac{v + v_r}{2v} C_1 \quad (19)$$

$$C_3(t) = \frac{I}{4N^2 v} \psi(t) \frac{1 - \operatorname{ch} \lambda}{\operatorname{sh} \lambda} + \frac{h_0 \varphi(t)}{2v \operatorname{sh} \lambda} - \frac{v + v_r}{2v} \frac{1 - \operatorname{ch} \lambda}{\operatorname{sh} \lambda} C_1 \quad (20)$$

$$C_4(t) = u + \frac{I}{2kv} \frac{1 - \operatorname{ch} \lambda}{\operatorname{sh} \lambda} \psi(t) + \frac{N^2}{kv} \frac{h_0 \varphi(t)}{\operatorname{sh} \lambda} - \frac{v_r}{kv} \frac{1 - \operatorname{ch} \lambda}{\operatorname{sh} \lambda} C_1 \quad (21)$$

где
$$A = \frac{1}{1 - \frac{v_r}{v} + \frac{v_r}{v} \frac{\text{sh} \lambda}{\lambda} - 2N^2 \frac{(1 - \text{ch} \lambda)^2}{\lambda \text{sh} \lambda}}, \quad \lambda = \left(\frac{4v}{v + v_r} \frac{v_r}{c_s + c_d} \right)^{1/2} h_0 \quad (22)$$

Подставляя эти значения v_r и ω в правые части дифференциального уравнения вращения шипа (5) и выражений (8) и (9), с учетом (18)-(21), приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = & \frac{q}{m} - \frac{\rho(v + v_r)A}{mh_0} u - \frac{\rho(v + v_r)Ah_0}{2mv} \varphi(t) \left(2N^2 \frac{1 - \text{ch} \lambda}{\lambda \text{sh} \lambda} + 1 \right) - \\ & - \frac{\rho(v + v_r)IA}{2mv} \left(2 \frac{1 - \text{ch} \lambda}{\lambda \text{sh} \lambda} + 1 \right) \psi(t) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \frac{h_0^2}{2v} \frac{d\varphi(t)}{dt} - \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{2N^2}{\lambda \text{sh} \lambda} - \frac{2N^2}{\lambda} \right) - \frac{A}{2} \left(1 - \frac{v_r}{v} - \frac{2v_r}{v} \frac{1 - \text{ch} \lambda}{\lambda \text{sh} \lambda} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(2N^2 \frac{1 - \text{ch} \lambda}{\lambda \text{sh} \lambda} + 1 \right) \right] + \frac{Ih_0}{4v} \frac{d\psi(t)}{dt} \left(2 \frac{1 - \text{ch} \lambda}{\lambda \text{sh} \lambda} + 1 \right) \times \\ & \times \left[1 - A \left(1 - \frac{v_r}{v} - \frac{2v_r}{v} \frac{1 - \text{ch} \lambda}{\lambda \text{sh} \lambda} \right) \right] + \frac{du}{dt} \left[1 - \frac{A}{2} \left(1 - \frac{v_r}{v} - \frac{2v_r}{v} \frac{1 - \text{ch} \lambda}{\lambda \text{sh} \lambda} \right) \right] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \psi(t) = & - \left(2 \frac{1 - \text{ch} \lambda}{\lambda \text{sh} \lambda} + 1 \right) \left\{ \frac{I}{4v} \frac{d\psi(t)}{dt} \left[\frac{1}{N^2} + \left(1 + \frac{v_r}{v} \right) \left(2 \frac{1 - \text{ch} \lambda}{\lambda \text{sh} \lambda} + 1 \right) A \right] + \right. \\ & + \frac{h_0}{4v} \frac{d\varphi(t)}{dt} \left[1 + \left(1 + \frac{v_r}{v} \right) \left(2N^2 \frac{1 - \text{ch} \lambda}{\lambda \text{sh} \lambda} + 1 \right) A + \frac{A}{2h_0} \left(1 + \frac{v_r}{v} \right) \frac{du}{dt} \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

Введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} u^* = \frac{u}{U_\infty} = u \frac{\rho v}{qh_0}, \quad \Theta = \frac{v}{h_0^2} t, \quad n = \rho \frac{h_0}{m}, \quad g = \frac{I}{h_0^2}, \\ \Phi(\Theta) = \frac{\rho h_0}{q} \varphi(t), \quad \Psi(\Theta) = \frac{\rho I}{q} \psi(t) \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $U_\infty = \frac{qh_0}{\rho v}$ - предельное значение скорости точки шипа (при $u = 0$)

при $t \rightarrow \infty$, относящегося к классическому случаю ньютоновской жидкости [2].

Тогда, уравнения (23)-(25) в безразмерной форме примут следующий вид:

$$\frac{du^*}{d\theta} = n - \left(1 + \frac{v_r}{v}\right) Anu^* - \left(1 + \frac{v_r}{v}\right) \frac{An}{2} \left(2N^2 \frac{1 - \text{ch}\lambda}{\lambda \text{sh}\lambda} + 1\right) \Phi(\theta) - \left(1 + \frac{v_r}{v}\right) \frac{An}{2} \left(2 \frac{1 - \text{ch}\lambda}{\lambda \text{sh}\lambda} + 1\right) \Psi(\theta) \quad (27)$$

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{2} \frac{d\Phi(\theta)}{d\theta} \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{2N^2}{\lambda \text{sh}\lambda} - \frac{2N^2}{\lambda^2} \right) - \frac{A}{2} \left(1 - \frac{v_r}{v} - \frac{2v_r}{v} \frac{1 - \text{ch}\lambda}{\lambda \text{sh}\lambda} \right) \right] \times \\ \times \left(2N^2 \frac{1 - \text{ch}\lambda}{\lambda \text{sh}\lambda} + 1 \right) + \frac{1}{4} \frac{d\Psi(\theta)}{d\theta} \left(2 \frac{1 - \text{ch}\lambda}{\lambda \text{sh}\lambda} + 1 \right) \times \quad (28)$$

$$\times \left[1 - A \left(1 - \frac{v_r}{v} - \frac{2v_r}{v} \frac{1 - \text{ch}\lambda}{\lambda \text{sh}\lambda} \right) \right] + \frac{du^*}{d\theta} \left[1 - \frac{A}{2} \left(1 - \frac{v_r}{v} - \frac{2v_r}{v} \frac{1 - \text{ch}\lambda}{\lambda \text{sh}\lambda} \right) \right] \\ \Psi(\theta) = -g \left(2 \frac{1 - \text{ch}\lambda}{\lambda \text{sh}\lambda} + 1 \right) \left\{ \frac{d\Psi(\theta)}{d\theta} \left[\frac{1}{N^2} + \left(1 + \frac{v_r}{v} \right) \left(2 \frac{1 - \text{ch}\lambda}{\lambda \text{sh}\lambda} + 1 \right) A \right] + \right. \\ \left. + \frac{d\Phi(\theta)}{d\theta} \left[1 + \left(1 + \frac{v_r}{v} \right) \left(2N^2 \frac{1 - \text{ch}\lambda}{\lambda \text{sh}\lambda} + 1 \right) A \right] + \frac{du^*}{d\theta} \left(1 + \frac{v_r}{v} \right) \frac{A}{2} \right\} \quad (29)$$

Так как при $t = 0$ $v_x = 0$, $u = 0$ и $\omega = 0$, то из (16)-(21) следует, что $\Phi(0) = 0$ и $\Psi(0) = 0$. Тогда, принимая во внимание (26), получим следующие начальные условия:

$$\text{при } \theta = 0 \quad u^* = 0, \quad \Phi(0) = 0, \quad \Psi(0) = 0 \quad (30)$$

Уравнения (16) для ω и (17) для скорости v_x , с учетом обозначения (26), в безразмерном виде запишутся так:

$$\omega^* = \frac{\omega h_0}{U_-} = C_2^* \text{ch}(\lambda y^*) + C_3^* \text{sh}(\lambda y^*) - \frac{1}{2} \Phi(\theta) y^* + \frac{v + v_r}{2v} C_1^* - \frac{1}{4N^2} \Psi(\theta) \quad (31)$$

$$v_x^* = \frac{v_x}{U_-} = \frac{1}{2} \Phi(\theta) y^{*2} - \frac{2N^2}{\lambda} C_2^* \text{sh}(\lambda y^*) - \frac{2N^2}{\lambda} C_3^* \text{ch}(\lambda y^*) + \\ + \frac{v - v_r}{v} C_1^* y^* + \frac{1}{2} \Psi(\theta) y^* + C_4^* \quad (32)$$

Здесь

$$C_1^* = \frac{\rho v}{q} C_1, \quad C_2^* = \frac{\rho v}{q} C_2, \quad C_3^* = \frac{\rho v}{q} C_3,$$

$$C_4^* = \frac{\rho v}{q h_0} C_4, \quad y^* = \frac{y}{h_0}$$

Решения (28) и (32) переходят в классические при $v_r = 0$ [2] и (31) дает $\omega = 0$.

Так как v , v_r , c_a , c_d не отрицательны, то λ - действительное число.

Структурная несимметричная жидкость, помимо обычных безразмерных параметров, встречающихся в теории ньютоновской жидкости, обладает новыми скалярными константами, связанными с учетом вращательного движения частиц. Несимметричная жидкость характеризуется тремя физическими константами v , v_r и $(c_a + c_d)$ в отличие от классической ньютоновской жидкости, которая характеризуется лишь одной константой вязкости [3]. Параметр v имеет размерность вязкости. Поскольку он появляется в результате учета вращательного движения частиц, то естественно его называть вязкостью вращательного движения или просто вращательная вязкость [15]. v_r характеризует сопротивление вращательным движениям подобно тому, как сдвиговая ньютоновская вязкость характеризует сопротивление поступательным движениям. Константа $(c_a + c_d)$ имеет размерность $[v \cdot L^2]$, и с ее помощью можно составить параметр $l = \left(\frac{c_a + c_d}{4v} \right)^{1/2}$, который имеет размерность длины. Параметр l может быть отождествлен с некоторой характеристикой вещества, зависящей от размера молекул (подструктуры).

Структурные несимметричные жидкости характеризуются двумя безразмерными параметрами.

Параметр связи N , определенный формулой $N = [v / (v + v_r)]^{1/2}$, характеризует связь уравнений (1) поступательного и (2) вращательного движений. Когда $v_r \rightarrow 0$, получаем $N \rightarrow 0$, эти уравнения разделяются, и уравнение поступательного движения (1) сводится к обычному уравнению Навье-Стокса.

Второй важный безразмерный параметр L представляет собой отношение зазора между стенками внешнего и внутреннего цилиндров $h_0 = R_2 - R_1$ к характерной материальной длине l , то есть

$$L = \frac{h_0}{l} \quad (\text{или } \lambda = kh_0 = \frac{Nh_0}{l} = NL)$$

Это число характеризует взаимосвязь между геометрией и свойствами жидкости.

Можно ожидать, что эффекты несимметричности жидкости будут значительными, когда l либо велико (что соответствует большому размеру подструктуры вещества), либо зазор между цилиндрами h_0 мал.

Большое значение L означает большой зазор между цилиндрами или малую характерную материальную длину l . В этом случае влияние микроструктуры

жидкости незначительно. Здесь, по-видимому, представляет интерес второй случай, когда зазор между цилиндрами h_0 мал и сравним с l .

Чтобы показать влияние учета микроструктуры жидкости (смазки) на значение v_x и u , используем их значения, полученные Таргом [2] при анализе решения классического случая. Для u и v_x имеем [2]

$$u = \Omega R_1 = \frac{qh_0}{\rho v} \left(1 - \exp \frac{v_n}{h_0^2 t} \right) \quad (33)$$

$$v_x = \frac{qh_0}{\rho v} \left(1 - \frac{y}{h_0} \right) \left(1 - \exp \frac{v_n}{h_0^2 t} \right) = u \left(1 - \frac{y}{h_0} \right) \quad (34)$$

Из (33) видно, что скорость точки шипа (при $y=0$) при $t \rightarrow \infty$ стремится к предельному значению $U_{\infty} = \frac{qh_0}{\rho v}$. Заметим, что u будет отличаться от U_{∞} менее чем на 1% по истечении промежутка времени t_1 , для которого $\exp \frac{v_n}{h_0^2 t_1} = 0,01$. Отсюда

$$t_1 = 4,6 \frac{h_0^2}{v_n} = 4,6 \frac{h_0 J_1}{\rho v S R_1^2} \quad (35)$$

Если, в частности, считать, что вращающееся тело представляет однородный цилиндрический вал, концы которого являются шипами, и если принять, что полная длина вала в l_1 раз больше длины смоченной части H , то будет $J_1 = 0,5 R_1^2 m_1 = 0,25 R_1^3 \rho_1 S l_1$ и формула (35), определяющая время разгона, имеет вид

$$t_1 \approx 1.15 l_1 \frac{R_1 h_0 \rho_1}{v \rho} \quad (36)$$

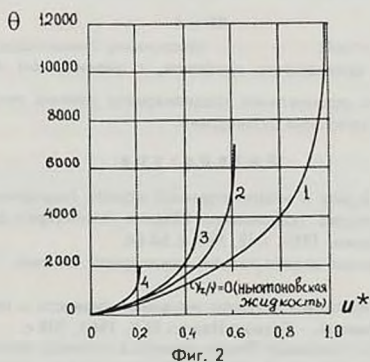
Следует отметить, что для подшипника t_1 будет невелико: порядка нескольких секунд. Если принять, например, $l_1 = 10$, $v = 2 \text{ см}^2/\text{с}$, $\rho_1 = 10\rho$, $R_1 = 5 \text{ см}$, $h_0 = 0.05 \text{ см}$, то получится $t_1 = 14 \text{ с}$.

Был произведен численный эксперимент для исследования системы дифференциальных уравнений (27)-(29) при начальных условиях (30) для различных значений $\frac{v_n}{v}$ и g . Результаты этих исследований были использованы для построения профилей скоростей для различных моментов времени.

На фиг.2 представлены графики зависимости безразмерной скорости движения точки шипа (при $y=0$) от безразмерного времени θ (для рассмотренной задачи $\theta = 800t$) при различных значениях $\frac{v_n}{v}$ (при $\lambda = 1$). Кривая 1

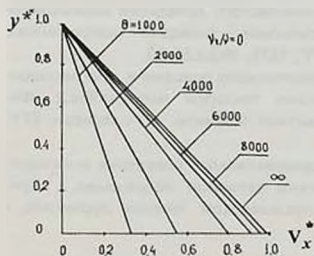
построена для $\frac{v_r}{v} = 0$ (классический профиль - ньютоновская жидкость),
 кривая 2 - для $\frac{v_r}{v} = 0,5$, кривая 3 - для $\frac{v_r}{v} = 1$, кривая 4 - для $\frac{v_r}{v} = 9$.

Как видно из этого графика, с увеличением отношения $\frac{v_r}{v}$ скорость точки шипа уменьшается по сравнению со скоростью для классических жидкостей Навье-Стокса, где внутреннее вращение не учитывается. С увеличением $\frac{v_r}{v}$ уменьшается также время разгона t_1 .

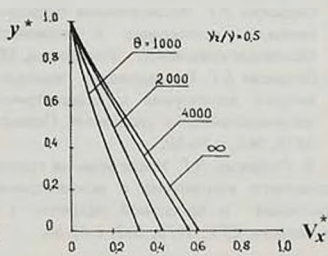


Фиг. 2

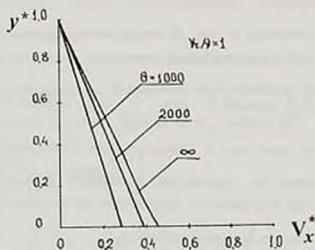
На фиг.3, 4, 5 представлены профили безразмерных скоростей смазки в слое между двумя соосными цилиндрами для разных моментов времени при $\frac{v_r}{v} = 0$, $\frac{v_r}{v} = 0,5$, $\frac{v_r}{v} = 1$ (при $\lambda = 1$).



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Как видно из приведенных графиков, с увеличением значений $\frac{v_r}{v}$ уменьшается время установления стационарного режима течения смазки в слое между двумя соосными цилиндрами.

Л и т е р а т у р а

1. Петросян Л.Г. Задача о несимметричной модели гидродинамической теории цилиндрического подшипника (Задача Зоммерфельда). - Изв. АН АрмССР, Механика, 1989, т.42, №3, с.54-64.
2. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. 420 с.
3. Петросян Л.Г. Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений. - Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984. 308 с.
4. Grad H. Statistical Mechanics-Thermo-dynamics and fluid dynamics of sistems with an arbitrary number of Integrals. - Commun.pure appl.math., 1952, vol.5, №4, p.455-494.
5. Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Кувшинский Е.В. Асимметрическая гидромеханика. - ПММ, 1965, т.29, вып.2, с.297-308.
6. Нгуен Ван Дьеп, Листров А.Т. О неізотермической модели несимметричных жидкостей. - ИАН СССР, МЖГ, 1967, №5, с.132-136.
7. Петросян Л.Г. Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения.1. Основные уравнения. - Уч.записки, ЕГУ, 1976, №3, с.56-63.
8. Петросян Л.Г. Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения.2. Феноменологические уравнения. Перекрестные эффекты. - Уч.записки, ЕГУ, 1977, №2, с.74-80.
9. Петросян Л.Г. Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения.3. Пристеночный и приосевой эффекты в пуазелевском течении суспензии. - Уч.записки, ЕГУ, 1978, №2, с.46-54.

10. Петросян Л.Г. К построению модели магнитной гидродинамики несимметричных жидкостей. - ПМ, 1976, т.12, №11, с.103-109.
11. Петросян Л.Г. О модели электродинамики с несимметричным тензором напряжений. - ЖТФ, 1979, т.49, вып.3, с.481-487.
12. Петросян Л.Г. К построению неизотермической модели электрогидродинамики с несимметричным тензором напряжений. - ПМ, 1980, т.16, №4, с.108-114.
13. Петросян Л.Г. Моментная гидродинамическая теория прокатки. - ПМ, 1982, т.18, №4, с.116-121.
14. Слезкин Н.А., Тарг С.М. Обобщенные уравнения Рейнольдса. - ДАН СССР, 1946, т.LIV, №3, с.205-208.
15. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. - М.: Мир, 1964, 456 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию

22.10.1992

УДК 539.3: 534.2

О СДВИГОВОЙ ВОЛНЕ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ ВДОЛЬ
ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКОВ.

Белубекян М.В. Белубекян В.М.

Մ.Վ.Բելուբեկյան, Վ.Մ.Բելուբեկյան.

Պինդոլեկտրիկների շարժվող բաժանման սահմանում
փրկայնացված սահրի ալիքի մասին

Տեսություն է երկու պինդոլեկտրիկ կիսադարձությունների հարաբերական շարժման ազդեցությունը Սպոուսլի փրկի մակերևութային սահրի ալիքի վարքի վրա: Յույց է փրկված, որ զոյություն ունի հարաբերական շարժման սահմանային արագություն, որից մեծ արագությունների դեպքում մակերևութային ալիքը վերանում է:

Belubekjan M.V., Belubekjan V.M.

About Shear Localized Wave Propagation Along the Moving Surfaces of Piezoelectrics.

В настоящей статье рассматривается влияние относительного движения двух упругих пьезоэлектрических полупространств на характер распространения поверхностной сдвиговой волны типа Стоунли. Показывается, что существует определенная скорость относительного равномерного движения, превышение которой приводит к невозможности поверхностной волны. При меньших скоростях возможны как одна, так и две различные скорости поверхностной волны.

Вопросы распространения упругих волн в движущихся средах исследованы во многих работах [1,2]. Особый интерес представляют движущиеся среды, взаимодействующие с электромагнитным полем [3].

1. В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) плоскость (xOz) является границей раздела полупространств из разных пьезоэлектрических материалов класса *бтм*. Упругие и пьезоэлектрические характеристики материалов различаются индексами 1 для полупространства $y > 0$ и 2 для полупространства $y < 0$. Система координат считается привязанной к полупространству $y > 0$, а полупространство $y < 0$ движется относительно системы координат по направлению оси Ox с постоянной скоростью V_0 .

Уравнения задачи антиплоской деформации с учетом относительного движения полупространства $y < 0$ имеют вид [4]:

$$C_1^2 \Delta W_1 = \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2}, \quad \Delta \varphi_1 = \frac{e_{15}^{(1)}}{\epsilon_1} \Delta W_1 \quad (1.1)$$

$$C_2^2 \Delta W_2 = \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 W_2}{\partial t \partial x} + V_0^2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2}, \quad \Delta \varphi_2 = \frac{e_{15}^{(2)}}{\epsilon_2} \Delta W_2 \quad (1.2)$$

где W_i - упругие перемещения в направлении оси z ,

$$C_i^2 = \frac{C_{44}^{(i)}}{\rho_i} (1 + \chi_i), \quad \chi_i = \frac{e_{15}^{(i)}}{\epsilon_i C_{44}^{(i)}}, \quad E^{(i)} = -\nabla \varphi_i, \quad i = 1, 2$$

$C_{44}^{(i)}$ - модули сдвига, $e_{15}^{(i)}$ - пьезоэлектрические модули, ϵ_i - диэлектрические проницаемости, χ_i - коэффициенты электромеханической связи, $E^{(i)}$ - векторы напряженностей электрического поля, ρ_i - плотности материалов.

На границе раздела $y = 0$ принимаются условия скользящего контакта (касательные напряжения равны нулю), условия непрерывности касательной составляющей вектора напряженности электрического поля и нормальной составляющей вектора индукции электрического поля. Указанные условия для пьезоэлектриков класса *btt* имеют вид [4]

$$C_{44}^{(i)} \frac{\partial W_i}{\partial y} + e_{15}^{(i)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2 \quad (1.3)$$

$$-\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + e_{15}^{(1)} \frac{\partial W_1}{\partial y} = -\epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + e_{15}^{(2)} \frac{\partial W_2}{\partial y}$$

Задача состоит в нахождении решений уравнений (1.1), (1.2), удовлетворяющих граничным условиям (1.3) и условиям затухания на бесконечности

$$\lim_{y \rightarrow \infty} W_i = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \varphi_i = 0, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} W_i = 0, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \varphi_i = 0 \quad (1.4)$$

Искомое решение, в виде гармонических волн, распространяющихся в направлении оси Ox , представляется следующим образом

$$W_1 = A_1 e^{-ky\sqrt{1-\eta}} \exp j(\omega t - kx) \quad (1.5)$$

$$\varphi_1 = \left(B_1 e^{-ky} + \frac{e_{15}^{(1)}}{\epsilon_1} A_1 e^{-ky\sqrt{1-\eta}} \right) \exp j(\omega t - kx)$$

$$W_2 = A_2 e^{-ky\sqrt{1-\theta^2(p-\eta)^2}} \exp j(\omega t - kx)$$

$$\varphi_2 = \left(B_2 e^{-ky} + \frac{e_{15}^{(2)}}{\epsilon_2} A_2 e^{-ky\sqrt{1-\theta^2(p-\eta)^2}} \right) \exp j(\omega t - kx)$$

$$\text{где } \eta = \frac{\omega}{kC_1}, \quad p = \frac{V_0}{C_1}, \quad \theta = \frac{C_2}{C_1}$$

В дальнейшем для определенности принимается $\theta \leq 1$. При этом нетрудно показать, что решения (1.5) будут удовлетворять условиям затухания, если

$$-1 < \eta < 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq p \leq \frac{1}{\theta} - 1 \quad (1.6)$$

$$-\frac{1}{\theta} + p < \eta < 1 \quad \text{при} \quad \frac{1}{\theta} - 1 < p \quad (1.7)$$

Отсюда следует, что при $p \geq 1 + \theta^{-1}$ локализованная волна не существует.

2. Подстановка (1.5) в граничные условия (1.3) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_1, B_1, A_2, B_2 . Приравнивание нулю детерминанта системы дает следующее уравнение, определяющее безразмерную характеристику η фазовой скорости поверхностной волны

$$\Gamma(\eta) = \sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{1 - \theta^2 (p - \eta)^2} - \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \left(\frac{\epsilon_1 \chi_2}{1 + \chi_2} \sqrt{1 - \eta^2} + \frac{\epsilon_2 \chi_1}{1 + \chi_1} \sqrt{1 - \theta^2 (p - \eta)^2} \right) = 0 \quad (2.1)$$

Вначале рассмотрим предельные случаи $\epsilon_1 \rightarrow 0$ и $\epsilon_2 \rightarrow 0$. При $\epsilon_1 \rightarrow 0$ скорость локализованной волны определяется по формуле

$$\eta^2 = 1 - \alpha_1^2, \quad \alpha_1 = \chi_1 (1 + \chi_1)^{-1} \quad (2.2)$$

что совпадает со скоростью поверхностной волны Гуляева-Блюштейна. В этом случае волна существует независимо от скорости относительного движения. При $\epsilon_2 \rightarrow 0$ имеем

$$\eta = p \pm \theta^{-1} \sqrt{1 - \alpha_1^2} \quad (2.3)$$

Из (1.6), (1.7) и (2.3) следует, что локализованная волна существует, если

$$p < 1 - \theta^{-1} \sqrt{1 - \alpha_1^2} \quad (2.4)$$

В случае одинаковых пьезоэлектрических материалов класса *6mm* ($\theta = 1$, $\epsilon_1 = \epsilon_2$, $\chi_1 = \chi_2 = \chi$) уравнение (2.1) приводится к виду

$$\Gamma_1(\eta) = \sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{1 - (p - \eta)^2} - \frac{\chi}{2(1 + \chi)} \left[\sqrt{1 - \eta^2} + \sqrt{1 - (p - \eta)^2} \right] = 0 \quad (2.5)$$

Для того, чтобы решения (1.5) были бы затухающими при $y \rightarrow \pm\infty$, необходимо, чтобы корни уравнения (2.5) удовлетворяли условию

$$-1 + p < \eta < 1 \quad (2.6)$$

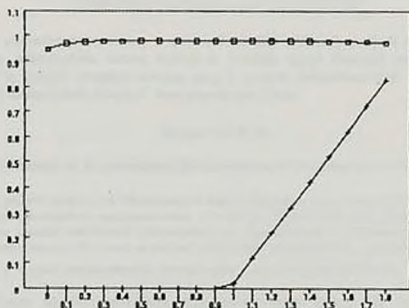
Из (2.6) следует, что при $p \geq 2$ локализованная волна не может существовать.

Вычисляя значения Γ , легко заметить, что при

$$p^2 < 1 - \alpha_z^2, \quad \alpha_z = \chi(2 + \chi)^{-1} \quad (2.7)$$

существует по крайней мере один положительный корень уравнения (2.5). Из уравнения (2.5) также следует, что если $p^2 \approx 1 - \alpha_z^2$ и если η_+ является корнем уравнения, то $\eta_- = p - \eta_+$ также является корнем. Т.е. в этом случае возможны две волны, локализованные вдоль границы раздела полупространств.

На графике (фиг.1) показана зависимость скорости локализованной волны от скорости относительного движения для пьезокерамики *PZT65/35*. Аналогичные графики получены также для окиси цинка (*ZnO*), сульфида кадмия (*CdS*) и титаната бария (*BaTiO₃*). Для указанных материалов коэффициенты электромеханической связи χ имеют следующие значения: $\chi = 0.320$; 0.111 ; 0.037 ; 0.479 .



фиг. 1

В табл.1 приводятся значения одной безразмерной скорости поверхностной волны η_+ для разных значений p .

$\chi \backslash p$	0.4	0.8	1.0	1.2	1.6	1.8
CdS	0.99983	0.99984	0.99984	0.99984	0.99983	0.99983
ZnO	0.99858	0.99861	0.99862	0.99861	0.99858	0.99851
PZT	0.98978	0.99039	0.99044	0.99038	0.98971	0.98823
BaTiO₃	0.97937	0.98103	0.98115	0.98097	0.97895	0.97384

Значения второй скорости получаются при $p^2 \geq 1 - \alpha_z^2$ и равны $p - \eta_+$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. - М.: Наука, 1981, 208 с.

2. Лямшев Л. М. Об определении импеданса в акустике движущейся среды. Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 1, с. 74 - 78.
3. Лямшев Л. М., Шевяхов Н. С. О структуре волнового поля на движущейся доменной границе в сегнетоэлектрике и феррите. - Акустический журнал, 1991, т. 37, вып. 6, с. 1170-1176.
4. Балакирев М. К., Гилинский И. А. Волны в пьезокристаллах. - Новосибирск: Наука, 1982, 239с.

Институт Механики НАН Армении

Поступила в редакцию
18.12.1992