ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1994

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, № 5-6, 1994 Механика

ОТРАЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ГАУССОВА ПУЧКА ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ МАГНИТОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Багдоев А.Г.

Բագդոև Ա. Գ.

Ոչ գծային գաուսյան փնջի անդրադարձումը մագնիսաառաձգական կիսատարածության ազատ մակերևույթից

Դիտարկվում է մագնիսաառաձգական կիսատարածությունում գաուսյան փնջի անդրադարձումը ազատ եզրից: Արտածված են կարճ ալիքների հավասարումները, որոնք նկարագրում են ընկնող և անդրադարձող ալիքները, ըստ որում էյկոնալով միջինացված մեծությունների էվոլուցիոն հավասարումներն իրարից անկախ են: Ստացված են, գաուսյան փնջի տեսքով, լուծումները: Դիտարկված է նաև ռեզոնատորի խնդիրը, որում կան հանդիպակաց գաուսյան փնջեր:

A.G.Bagdoev

Reflection of Nonlinear Gaussian Beam from Free Surface of Magnetoelastic Halfspace

В работе рассматривается задача отражения гауссова пучка, генерируемого на некоторой глубине в магнитоупругом полупространстве от его свободной границы.

Выведены уравнения коротких волн, описывающие поля падающей и отраженной волн, причем указанные эволюционные уравнения для осредненных по эйконалам величин оказываются несвязными. Решение полученных уравнений ищется в виде ряда гармоник, получены уравнения для первой и второй гармоник и решение в виде узких гауссовых пучков. Рассмотрена также задача о резонаторе, в котором имеются падающие слева и справа гауссовы пучки.

1. Получение уравнения для двух пучков Пусть на некоторой глубине магнитоупругой среды, занимающей полупространство, имеется квазимонохроматическая волна в виде гауссова пучка. Обозначим через $x = l$ расстояние от волны до свободной поверхности, кооордината x отсчитывается от волны, координата y есть нормальная к x, отсчитываемая вдоль фронта невозмущенной начальной волны. Кроме падающей на свободную поверхность волны имеется также отраженная волна.

Покажем, что для типичной дифракционной [1] задачи, в которой имеются лишь первые и вторые гармоники и свободные члены не влияют на их уравнения, можно проводить суперпозицию волн. Для этого используем результаты работ [2,3,4], причем в отличие от [4] выбираем произвольное число уравнений и искомых функций, а также рассматриваем возможность наличия любого числа волн.

Кроме того, расматривается случай трех независимых переменных.

Уравнения движения среды можно описывать в виде системы уравнений с гиперболическим типом в левой части

$$a_i^{j\lambda}(u)\frac{\partial u^i}{\partial x^\lambda} + b^j(u) = a_{il}^{j\lambda}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^\lambda \partial x^l} + a_{ikl}^{j\lambda}\frac{\partial^3 u_i}{\partial x^\lambda \partial x^k \partial x^l} \tag{1.1}$$

$(\lambda = 0,1,2,3;\ x^0 = t)$

где $u = \left(u^i\right)$ - неизвестный вектор поля.

В правой части (1.1) стоят малые диссипация и дисперсия, не влияющие на уравнения в основном порядке, то есть соотношения характеристик.

Решение (1.1) ищется в виде лучевого ряда

$$u^i = \sum_{q=0}^{\infty} \omega^{-q} u_q^i \left(t, \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_N, y\right) \tag{1.2}$$

где $\omega^{-1} << 1$ есть параметр возмущений, $\xi_i = \omega \varphi_i$, $\xi_1 = t + \dfrac{x}{c_*}$, $\xi_2 = t - \dfrac{x}{c_*}$; c_* - скорость волны линейной задачи, φ_i - фазовые функции, u_0 - невозмущенное решение, не зависящее от ξ_i. В работе [4] взято $N = 2$ и не учтена зависимость $u_q(y)$, хотя все выкладки остаются. Учитывая, что $\dfrac{\partial}{\partial x^\lambda} = \dfrac{\partial}{\partial x^\lambda} + \omega \dfrac{\partial \varphi^k}{\partial x^\lambda} \dfrac{\partial}{\partial \xi_k}$ и подставляя (1.2) в (1.1), получим в нулевом приближении уравнение характеристик

$$\left\{A(x, p)\right\}_{p=\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \left\{\det a_i^{j\lambda}\left(u_0\right) p_\lambda\right\}_{p_\lambda = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\lambda}} \tag{1.3}$$

Если мы обозначим собственные векторы системы (1.3) через $h_1, \ldots, h_N$, то решение (1.1) можно записать в первом и втором порядке в виде

$$u_1^i = \Gamma^m\left(t, \xi_m, y\right) h_m^i \tag{1.4}$$

$$u_2^i = \Sigma^m\left(t, \xi_m, y\right) h_m^i \tag{1.5}$$

где Γ^m и Σ^m - произвольные дифференцируемые функции, причем необходимо отметить, что Γ^m зависит от одного φ_m и по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Подставляя (1.4) и (1.5) в (1.1), умножая на $\overline{h}_j^m$, где $\overline{h}_j^m$ - собственные векторы транспонированной матрицы $A(x, p)$ и принимая, что $a_i^{j\lambda} \overline{h}_j^m h_m^i \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x^\lambda} = 0$ определяя по переменным $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_N$, можно в первом порядке получить в силу произвола в выборе компонент собственного вектора h_m^i, как и в [2], для нормальной к волне скорости частиц [1,5] $u = u_1 - u_2$, $u_{1,2} = \Gamma^{1,2}$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t \partial \tau_{1,2}} - \frac{1}{2} L\left(u_{1,2}\right) = -\frac{1}{c_*} \frac{\partial}{\partial \tau_{1,2}} \left(\Gamma u_{1,2} \frac{\partial u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}} - D \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}^2} + E \frac{\partial^3 u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}^3} \right) \tag{1.6}$$

где $\xi_{1,2} = -\tau_{1,2} + \frac{l}{c_n}$

а поперечный оператор - $L = \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)$

$\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_2)$ есть дисперсионное уравнение для первой волны, (α_1, α_2) - компоненты волнового вектора и поскольку ось x нормальна к начальной волне, можно считать $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = \frac{1}{c_n}$, где c_n - нормальная скорость волны. Уравнения выписаны только для одной прямой (Γ^1) и отраженной (Γ^2) от свободной поверхности среды волны, Γ - коэффициент в разложении нормальной скорости волны по степеням малого возмущения нормальной скорости частицы $(u_i = \Gamma^i)$ к волне, причем в силу произвола $\bar{h}_j^m$, $u = u_1 - u_2$.

2. **Уточнение коэффициентов уравнений коротких волн для магнитоупругой среды.** Для одной волны коэффициенты уравнения коротких волн определены в [3,5] и равны для случая нормального к волне начального магнитного поля $H_y = 0$, $H_x = H_0$

$$
\begin{gathered}
c_*^2\left(2c_*^2 - a^2 - b^2 - a_1^2\right)\Gamma = \frac{3}{2}\left(c_*^2 - a^2\right)a_1^2 - \\
-\frac{1}{\rho_0}\left(c_*^2 - b^2 - a_1^2\right)\left(A + 3B + C + \frac{3}{2}\lambda_0 + 3\mu\right)
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

$K = \lambda_0 + \frac{3}{2}\mu$, A, B, C - нелинейные упругие модули, $D_1 = c_*^2\big(2c_*^2 - a^2 - b^2 - a_1^2\big)$

$$
D_1 D = -\frac{c_*}{2}\left(c_*^2 - b^2 - a_1^2\right)\frac{\lambda^{(1)} + 2\lambda^{(0)}}{\rho_0} - a_1^2 c_n \frac{\lambda^{(0)}}{2\rho_0}\frac{c_n^2 - a^2}{c_*^2 - b^2},
$$

$$
D_1 E = \frac{c_*}{2}\left(c_n^2 - b^2 - a_1^2\right)\frac{\zeta^{(1)} + 2\zeta^{(0)}}{\rho_0} + a_1^2 c_n \frac{c_*^2 - a^2}{c_n^2 - b^2}\frac{\zeta^{(0)}}{2\rho_0}, \quad a_1^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0}
$$

где $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^y + \sigma_{ij}^b + \sigma_{ij}^g$; σ_{ij}^y - нелинейный упругий тензор напряжений,

$$
\sigma_{ij}^b = \lambda^{(1)}\delta_{ij}\operatorname{div}\bar{v} + \lambda^{(1)}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}
$$

$$
\sigma_{ij}^g = \zeta^{(1)}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\bar{v} + \zeta^{(1)}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial t}
$$

Коэффициент $\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}$ получится из уравнения $c_л^4 - c_л^2\left(a^2 + b^2 + a_1^2\right) + a^2\frac{H_л^2}{4\pi\rho_0} + b^2\left(a^2 + a_1^2 - \frac{H_л^2}{4\pi\rho_0}\right)$ в следующем виде:

$$\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} = \frac{c_л^2\mu_1^2 - \bar{\omega}\nu}{c_л^3\mu_1^3}\left\{\left(a^2 - b^2\right)a_1^2 - c_л^2\left(a^2 + b^2 + a_1^2\right)\right\} + \\ + \frac{2c_л^2\left(a^2 + a_1^2\right)b^2\mu_1^2 - \bar{\omega}\nu\left(c_л^4 - a^2b^2 - b^2a_1^2\right)}{c_л^3\mu_1^3} \tag{2.2}$$

$$\bar{\omega} = c_л^4 - c_л^2\left(a^2 + b^2 + a_1^2\right) + b^2\left(a^2 + a_1^2\right) \tag{2.3}$$

$$\mu_1 = 2c_л^2 - a^2 - a_1^2 \tag{2.4}$$

$$\nu = 6c_л^2 - a^2 - a_1^2 - b^2 \tag{2.5}$$

Медленная волна [5] есть малая более высокого порядка.

В соотношениях (2.1)-(2.5) a, b - скорости продольных и поперечных волн, H_0 - невозмущенное магнитное поле. Поскольку $c_л$ входит в четной степени в коэффициенты (1.6), совпадение этих уравнений обеспечивается. Исключение составляет минус перед $\Gamma^2\Gamma$.

3. Получение уравнений для амплитуд и фаз квазимонохроматической стационарной волны. Решение уравнений (1.6) можно искать в виде волн модуляции $u_{1,2} = \Gamma^{1,2}$ [7]

$$u_{1,2} = \left\{U_{1,2}^{(0)} + U_{1,2}^{(1)}e^{i\alpha\tau_{1,2} - i\omega x - \nu_1\alpha^2 t} + \\ + U_{1,2}^{(2)}e^{2i\alpha\tau_{1,2} - 2i\omega x - 2\nu_1\alpha^2 t} + \text{к с}\right\} \tag{3.1}$$

$$\tau'_{1,2} = \mp\frac{x}{c_л}, \quad \tau_{1,2} = \tau'_{1,2} - t + \frac{l}{c_л}$$

$u_{1,2}$ - компоненты нормальной к волне скорости частиц, где α - основная частота, ω - модуляционная частота, $U_{1,2}^{(0,1,2)}$ - амплитуда гармоник. В силу произвола выбора собственных компонент вектора можно полагать $h_1^1 = 1$, $h_2^1 = -1$, $u = u_1 - u_2$, что использовано при получении (1.6).

Подставляя (3.1) в (1.6) и приравнивая слагаемые при гармониках, можно получить дисперсионное соотношение из уравнения при первой гармонике в нулевом порядке

$$\omega = \xi\alpha^3, \quad \nu_1 = -D, \quad \xi = -\frac{E}{c_n}$$

и уравнения первой и второй гармоник

$$\frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial\tau_{1,2}'}\left(i\alpha + 2\nu_1\alpha^2 + 3i\omega\right) - \frac{1}{2\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{\partial^2 U_{1,2}^{(1)}}{\partial y^2} - \frac{1}{2\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{1}{y}\frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial y} =$$
$$= -\Gamma\left(i\alpha - \nu_1\alpha^2\right)^2 U_{1,2}^{(0)} U_{1,2}^{(1)} + \frac{\Gamma}{c_n}\alpha^2 U_{1,2}^{(2)} U_{1,2}^{(1)*} e^{-2\nu_1\alpha^2 t} \tag{3.2}$$

$$U_{1,2}^{(2)} 4\left(-3\omega\alpha + i\nu_1\alpha^2\right) + 2\left(i\alpha + 30i\omega + 10\nu_1\alpha^2\right)\frac{\partial U_{1,2}^{(2)}}{\partial\tau_{1,2}'} -$$
$$- \frac{1}{2\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{\partial^2 U_{1,2}^{(2)}}{\partial y^2} - \frac{1}{\varepsilon\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{1}{y}\frac{U_{1,2}^{(2)}}{\partial y} = \frac{2\Gamma\alpha^2}{c_n} U_{1,2}^{(1)2} \tag{3.3}$$

Уравнение нулевой гармоники $U_{1,2}^{(0)} \sim \nu_1\alpha U_{1,2}^{(1)2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial\tau_{1,2}'}$.

Следует рассмотреть случай при $\frac{\omega}{\alpha} << 1$, при условии, что в дифракционной задаче $\frac{\partial}{\partial y} \sim \alpha^{\frac{1}{2}}$:

а) $\omega \sim \frac{\partial}{\partial\tau_{1,2}'}$, $\nu_1\alpha << \frac{\alpha}{\omega}$ и в уравнении (3.2) слагаемое с $U_{1,2}^{(0)}$ можно отбросить. Тогда получатся уравнения для $U_{1,2}^{(1)}$, $U_{1,2}^{(2)}$;

б) $\omega >> \frac{\partial}{\partial\tau_{1,2}'}$. При этом в уравнении (3.3) можно отбросить производные $U_{1,2}^{(2)}$ и получить

$$U_{1,2}^{(2)} = -\frac{\Gamma\alpha^2 U_{1,2}^{(1)2}}{2\left(3\omega\alpha - i\nu_1\alpha^3\right)} \tag{3.4}$$

Подставляя в (3.2), можно записать

$$\frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial\tau_{1,2}'}\left(i\alpha + 3i\omega + 2\nu_1\alpha^2\right) - \frac{1}{2\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{\partial^2 U_{1,2}^{(1)}}{\partial y^2} - \frac{1}{2\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{1}{y}\frac{U_{1,2}^{(1)}}{\partial y} =$$
$$= -\frac{\Gamma^2}{2c_n^2}\frac{\alpha^3}{3\omega - i\nu_1\alpha^2} U_{1,2}^{(1)2} U_{1,2}^{(1)*} e^{-2\nu_1\alpha^2 t} \tag{3.5}$$

где $U_{1,2}^{(1)*}$ комплексно сопряжено с $U_{1,2}^{(1)}$. Следует отметить, что при получении (3.5) использовано условие $\omega\tau'_{1,2} >> 1$ и если считать $\nu_1\alpha^2 \sim \omega$, следует учитывать экспоненту в (3.4), что осложняет решение. Однако, поскольку ν_1 и ω входят в виде действительной и мнимой части и при $\nu_1\alpha^2 << \omega$, диссипация влияет на решение, что видно из дальнейшего.

Пусть невозмущенная волна представляет гауссовый пучок квазимонохроматической волны с заданным значением $c_л$ (быстрая волна)

$$u_1 = U_1^{(1)}(0)\exp\left(-i\alpha t - i\omega t - \nu_1\alpha^2 t\right) + \text{к с}, \quad U_1^{(1)}(0) = a_0\exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2}\right)$$

Тогда можно искать решение (3.5) в виде гауссовова пучка падающей и отраженной волн $U_{1,2}^{(1)} = ae^{i\varphi}$

$$u_{1,2} = \frac{a_0\exp\left(i\alpha\tau_{1,2} - i\omega t - \nu_1\alpha^2 t\right)}{f_{1,2}\left(\tau'_{1,2}\right)}\exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2 f_{1,2}^2\left(\tau'_{1,2}\right)} + i\varphi_{1,2}\left(\tau'_{1,2}y\right)\right) + \text{к с} \qquad (3.6)$$

$$u = u_1 - u_2$$

Подставляя (3.6) в (3.5), можно в осесиммметричной задаче получить для $f_{1,2}\left(\tau'_{1,2}\right)$ и $\varphi_{1,2}\left(\tau'_{1,2}, y\right)$ систему уравнений, которая имеет решение

$$\varphi_{1,2}\left(\tau'_{1,2}, y\right) = \sigma_{1,2}\left(\tau'_{1,2}\right) + \frac{y^2}{2R_{1,2}}$$

$$-\frac{d\sigma_{1,2}}{d\tau'_{1,2}} = \chi_1\frac{K_2}{f_{1,2}^2} - \frac{1}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{2}{f_{1,2}^2 y_0^2} \qquad (3.7)$$

$$-\frac{1}{f_{1,2}}\frac{df_{1,2}}{d\tau'_{1,2}} = \chi_2\frac{K^2}{f_{1,2}^2} + \frac{1}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{1}{R_{1,2}}$$

$$\frac{df_{1,2}}{d\tau'_{1,2}} = \mp\sqrt{C' - \frac{\bar{\xi}}{f_{1,2}^2}} \qquad (3.8)$$

где $\bar{\xi} = -\chi_1\dfrac{4}{\alpha\alpha_1}\dfrac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\dfrac{a_0^2}{y_0^2} + \dfrac{4}{y_0^4}\left(\dfrac{1}{\alpha\alpha_1}\dfrac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\right)^2 - \chi_2^2 a_0^4$

$$C' = \left(\frac{1}{R_0}\frac{1}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} + \chi_2 a_0^2\right)^2 + \bar{\xi}, \quad a_0 = K$$

где R_0 есть значение R_1 при $x = l$

$$\chi_1 = 3E\alpha^2\zeta, \quad \chi_2 = D\alpha\zeta, \quad \zeta = \frac{1}{2c_л\alpha}\frac{\Gamma^2\exp\left(-2\nu_1\alpha^2 t\right)}{9E^2\alpha^2 + D^2}$$

В силу симметрии можно полагать $f_2(x) = f_1(x)$, $f_1 = f$ и (3.8) дает

$$\frac{df_2}{dx} = \frac{df_1}{dx}, \quad \pm\frac{1}{f}\frac{df}{dx} = \chi_2\frac{K^2}{f^2} + \frac{1}{c_n\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{1}{R_{1,2}}$$

Тогда получится

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{C' - \frac{\bar{\xi}}{f^2}}, \quad -\frac{l-x}{c_n} = \frac{\sqrt{C'f^2 - \bar{\xi}}}{C'} - \frac{\sqrt{C' - \bar{\xi}}}{C'},$$

$$f^2 = \frac{\bar{\xi}}{C'} + \left(\frac{\sqrt{C' - \bar{\xi}}}{\sqrt{C'}} - \sqrt{C'}\frac{l-x}{c_n}\right)^2$$

Из (3.7) получится

$$A' = \frac{1}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{2}{y_0^2} - \chi_1 K^2, \quad c_n\frac{d\sigma_{1,2}}{dx} = \pm\frac{A'}{f^2}$$

Отсюда можно найти

$$\sigma_{1,2} = \pm\frac{A'}{\sqrt{\bar{\xi}}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{C' - \bar{\xi}} - C'\dfrac{l}{c^n} + C'\dfrac{x}{c_n}}{\sqrt{\bar{\xi}}} + \sigma_{01,2}$$

$$\sigma_{01} = -\frac{A'}{\sqrt{\bar{\xi}}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{C' - \bar{\xi}} - C'\dfrac{l}{c_n}}{\sqrt{\bar{\xi}}}$$

$$\sigma_{02} = -\sigma_{01} + \pi$$

Для немалых значений y_0 может образоваться каустика [5]. Решение $u = u_1 - u_2$ имеет вид

$$u = e^{-\nu_1\alpha^2 t}\frac{2K}{f}\cos\left(\sigma_1 + \frac{1}{R_1}\frac{y^2}{2} + \frac{l-x}{c_n}\alpha - \alpha t - \omega t\right) -$$

$$-\exp(-\nu_1\alpha^2 t)\frac{2K}{f}\cos\left(\sigma_2 + \frac{1}{R_2}\frac{y^2}{2} + \frac{x+l}{c_n}\alpha - \alpha t - \omega t\right)$$

откуда получится

$$u = \exp\left(-\nu_1\alpha^2 t - \frac{y^2}{y_0^2 f^2}\right)\frac{4K}{f}\cos\left(\frac{1}{R_1}\frac{y^2}{2} + \frac{1}{R_2}\frac{y^2}{2} + \frac{l}{c_n}\alpha - \alpha t - \omega t\right)\times$$

$$\times\cos\left(\frac{1}{R_2}\frac{y^2}{2} - \frac{1}{R_1}\frac{y^2}{2} + \frac{x}{c_n}\alpha + \sigma_1\right) \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}=-2\frac{\dfrac{df}{dx}}{f\dfrac{1}{\alpha\alpha_1}\dfrac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}}$$

$$\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}=-2\frac{\chi_2 K^2}{f^2}\frac{\alpha\alpha_1}{\dfrac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}}$$

При выборе $\sqrt{C'-\bar{\xi}}=C'\dfrac{l}{c_n}$ получится $\dfrac{df}{dx}=0$ на границе $x=0$ и условие $\sigma_x=0$ удовлетворится на всей поверхности.

Указанная задача представляет стоячую волну в интерферометре со свободной нижней поверхностью и заданным в начальном сечении гауссовым пучком.

Из условий на свободной поверхности $x=0$, $\sigma'_{xy}=0$, $\sigma'_x=\dfrac{H_0^2}{8\pi\rho_0}$, где $\sigma'_{i,k}$ есть компоненты тензора Максвелла

$$\sigma'_{ik}=\sigma_{ik}+\frac{H_iH_k}{4\pi\rho_0}-\frac{1}{2}\frac{H^2}{4\pi\rho_0}\delta_{ik},\ \sigma'_{xy}=\sigma_{xy}+\frac{H_0h_y}{4\pi\rho_0},\ \sigma'_x=\sigma_x+\frac{H_0^2}{8\pi\rho_0}$$

и уравнений индукции

$$\frac{\partial\bar{h}}{\partial t}=-\left(\overline{H}_0\nabla\right)\bar{v}+\left(\bar{v}\nabla\right)\overline{H}_0+\overline{H}_0\operatorname{div}\bar{v},\ \overline{H}=\overline{H}_0+h$$

можно получить, отбрасывая малые члены [1,5] $h_x=0$, $h_y=0$, $\sigma_x=0$, $\dfrac{\partial u_x}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ при $x=0$.

Решение (3.9) для больших $\dfrac{\alpha l}{c_n}$ удовлетворяет условию $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ при учете узости по y возмущенной области.

Приведенный аппарат можно использовать и в задаче о встречных пучках в интерферометре [6].

В указанной проблеме следует считать функцию $f(x)$ гладкой и полагать $\dfrac{df}{dx}=0$ при $x=0$, откуда $l=\dfrac{c_n\sqrt{C'-\bar{\xi}}}{C'}$

Тогда получится $f^2=\dfrac{\bar{\xi}}{C'}+\dfrac{C'x^2}{c_n^2}$ и для фазы

$$\sigma_{1,2} = \pm\frac{A'}{f_0^2}\sqrt{\frac{\xi c_*^2}{C'^2\alpha^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{C'\alpha^2}{\xi c_*^2}}x + \sigma_{01,2}$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{A'}{c_n f_0^2}\sqrt{\frac{\xi c_n^2}{C'^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{C'^2\alpha^2}{\xi c_n^2}}x + \Delta$$

где Δ находится из того, что при $x = l$ для резонатора суммарная фаза равняется нулю, откуда получается $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = -\frac{\alpha}{c_n}l$ при $x = l$. Следуя работе [6], где рассмотрена круговая поляризация, для звуковой волны, имеющей почти линейную поляризацию по оси x, можно записать аналогичные соотношения на зеркалах

$$|u_B|^2 = R|u_F|^2;\ (1-R)K_0^2 = u_F^2 + Ru_B^2 - 2\sqrt{R}u_F u_B$$

Первые соотношения означают равенство мощности отраженной волны $(u_B)^2$ значению мощности падающей волны (u_F^2), умноженной на квадрат коэффициента отражения, второе есть равенство скорости частиц u_F прямой волны скорости частиц прошедшей части начальной волны $K_0\sqrt{1-R}$ плюс скорости частиц отраженной части обратной волны [6]

$$u_F = K_0\sqrt{1-R} + u_B\sqrt{R},\quad K_0 = |K_0|\cos\alpha\tau$$

Для коэффициента пропускания интерферометра принято полагать

$$P = \frac{|u_F|^2(1-R)}{|K_0|^2}$$

Поскольку $u_{1,2} = |u_{1,2}|\cos\Phi_{1,2}$, $\Phi_{1,2} = (-\omega t + \alpha\tau_{1,2} + \varphi_{1,2})$, можно, интегрируя по ωt от 0 до 2π, вышеописанное уравнение найти в виде

$|u_F| = K$ и

$$(1-R)|K_0|^2 = K^2(1-R)^2 + K^2 4R\sin^2\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}$$

Пропускная способность примет вид

$$P = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}}$$

Сюда нужно подставить значение $\frac{1}{2}(\Phi_1-\Phi_2)=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)-\frac{\alpha l}{c_n}$. Требуя, чтобы аргумент арктангенса в $\sigma_1-\sigma_2$ при $x=l$ равнялся 1, как и в [6], можно получить

$$C'=2\bar{\xi},\quad \frac{1}{R_0}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}+\chi_2 K^2=\sqrt{\bar{\xi}}$$

Для интерферометра имеет место условие [6]

$$f_0^4=\frac{1}{4}\frac{\left(2\left|R_0^*\right|-2l\right)^2}{R_0^{*2}},\quad R_0^*=R_0\frac{\alpha}{c_n}$$

Отсюда $1=\frac{\bar{\xi}}{C'}+\frac{l}{\left|R_0\right|}$. Окончательно получится $P=\frac{K^2(1-R)}{K_0^2}$

$$P=\frac{1}{1+\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2(\delta-F)},\quad \delta=-\frac{2\alpha l}{c_n},\quad F=-\frac{\pi}{4}\frac{l+x'}{\sqrt{1+x'}},$$

$$x'=\frac{\chi_1 K^2}{\alpha\mu},\quad \mu=-\frac{c_n}{\alpha^2 y_0^2}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}$$

при $\chi_2=0,\ \frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}<0.$

Полученные уравнения дают неявное значение x'. Можно отметить, что $R_{1,2}=\frac{c_n}{\alpha}R_{1,2}^*$, где $R_{1,2}^*$ - радиусы кривизны прямой и обратной волн и из (3.8), считая, что $f_1=f_2$, $\tau_{1,2}'=\pm\frac{x}{c_n}$, получить при $x=l$

$$\mp\frac{df(l)}{dx}=\frac{1}{c_n}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{1}{R_{1,2}^*(0)}+\chi_2 K^2$$

что дает

$$-\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{1}{c_n}\frac{1}{R_2^*(0)}-2\chi_2 K^2=\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{1}{c_n}\frac{1}{R_1^*(0)}$$

При больших (K_0) левая часть уравнения P, являющаяся прямой линией, имеет несколько пересечений с функцией, даваемой правой частью, что приводит к возможным многим амплитудам, приводя к явлению [6] бистабильности.

Аналогичные рассмотрения применимы к вышерассмотренной задаче об отражении гауссова пучка от свободной поверхности.

Литература

1. *Bagdoev A.G., Petrosian L.G.* Nonlinear waves in mixture of magnetic fluid with gas bubbles. - Amse press,1987, vol.7, №.4, pp.53-62.
2. *Канер В.В., Руденко О.В.* О распространении волн конечной амплитуды в акустических волноводах. - Вестник Московского университета. Сер. физич., астрономии. 1978, т.19, с.78.
3. *Hunter J.K., Keller J.B.* Weakly nonlinear high frequency waves. - Comm. Pure Appl. Math.,1983, 36, p.547-563.
4. *Carbonaro P.* High frequency waves in quasilinear inviscid gasdinamics. - ZAMP, vol.37, №.1.
5. *Багдоев А.Г.* Распространение волн в сплошных средах. - Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1981, 300 с.
6. *Marburger J.H., Felber F.S.* Theory of a lossless Fabry-Perot Interferometer. - Phys. Rev. A 1978, vol.17, №.1, p.336-342.
7. *Багдоев А.Г., Шекоян А.В.* Отражение квазимонохроматической нелинейной волны от свободной поверхности среды. - Изв. АН РА, Механика, 1991, т.44, №.1, с.28-36.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
26.02.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, № 5-6, 1994 Механика

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Гаспарян А.Е., Хачатрян А.А.

Հ. Ե. Գասպարյան, Ա. Ա. Խաչատրյան

Փոփոխական կտրվածքով ձողերի երկայնական տատանումներին նվիրված որոշ խնդիրներ

Լուծված են փոփոխական կտրվածքով ձողերի երկայնական տատանումների խնդիրներ, երբ ձողերի ընդլայնական կտրվածքների մակերեսները փոփոխվում են երկու տարբեր ֆունկցիաների ընտանիքներով: Ստացված են համապատասխան բանաձևեր տեղափոխությունների համար: Կատարված են թվային հաշվարկներ:

A.E. Gasparian, A.A. Khachatrian

Some Problems on the Longitudinal Vibrations of Rods with Variable Cross Sections

Решены задачи о продольных колебаниях стержней, площади поперечных сечений которых меняются по двум различным семействам функций. Получены необходимые формулы и соотношения для перемещений. Рассмотрены числовые примеры.

В настоящей работе, являющейся как бы продолжением статьи [1], рассматриваются стержни, площади поперечных сечений которых по длине стержня изменяются по законам следующих двух семейств функции:

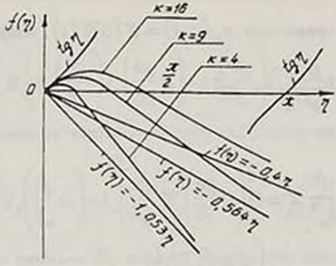
$$\text{a)}\ F_m(x)=F_0\left(1-\delta_m\frac{x}{l}\right)^m,\quad \delta_m=1-\frac{1}{\sqrt[m]{k}}$$

$$\text{b)}\ F_{-m}(x)=F_0\left(1+\lambda_m\frac{x}{l}\right)^{-m},\quad \lambda_m=\sqrt[m]{k}-1=\sqrt[m]{k}\,\delta_m\quad (m=1,2,\ldots) \tag{1}$$

Здесь для каждого стержня, независимо от значения индекса

$$F_{\pm m}(0)=F_0=kF_{\pm m}(l),\quad (k>1) \tag{2}$$

Предположим,стержни имеют форму тела вращения. При этом на фиг. 1 представлены примерные графики радиусов $r_{\pm m}(x)$ поперечных сечений для некоторых значений m при $k=16$. Здесь $r_1(x)$ есть выпуклая кривая, $r_2(x)$ - прямая (случай усеченного конуса), все остальные - вогнутые.



фиг. 1

Отметим, что для функций $r_{\pm m}(x)$ в открытом интервале $0 < x < l$ имеют место следующие неравенства:

$$r_{-m}(x) < r_{-(m+1)}(x) < r(x) = r_0 e^{-\frac{x}{l}\ln\sqrt{k}} < r_{m+1}(x) < r_m(x) \qquad (3)$$

где $r(x)$ является предельным значением функций $r_{\pm m}(x)$, когда $m \to \infty$ и представляет собой границу раздела двух рассматриваемых семейств.

Как известно, свободное продольное колебание стержней переменного поперечного сечения описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{F'(x)}{F(x)} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (4)$$

Здесь $u(x,t)$ - продольное перемещение точек стержня с координатой x в момент времени t; $a^2 = E/\rho$; E, ρ - модуль упругости и плотность материала.

Для решения конкретных примеров к уравнению (4) присоединяются необходимые граничные и начальные условия.

Ниже рассматриваются задачи, где стержни (1), закрепленные в одном конце $x = 0$, растянуты силой P и в момент времени $t = 0$ внезапно освобождаются от силы, представив им свободно колебаться.

1. В этом пункте рассмотрим стержни $F_m(x)$ - первого семейства (1).

Подставляя в уравнение (4) значение $F_m(x)$ из (1), с заменой x на α

$$1 - \delta_m \frac{x}{l} = \alpha \qquad \left(\frac{1}{\sqrt[m]{k}} \le \alpha \le 1 \right) \qquad (1.1)$$

и производя разделение переменных $u_m(\alpha,t)=X(\alpha)T(t)$, получим

$$\frac{\delta_m^{\,2}}{X}\left(X''+\frac{m}{\alpha}X'\right)=\frac{l^2}{a^2}\frac{T''}{T}=-\omega^2 \tag{1.2}$$

или

$$\begin{cases} X''+\dfrac{2p+1}{\alpha}X'+\dfrac{\omega^2}{\delta_m^{\,2}}X=0 \\ T''+\dfrac{\omega^2\alpha^2}{l^2}T=0 \qquad \left(p=\dfrac{m-1}{2}\right) \end{cases} \tag{1.3}$$

Общие решения уравнений (1.3) имеют вид

$$\begin{aligned} &X(\alpha)=\alpha^{-p}\left[A_1J_p\left(\frac{\omega}{\delta_m}\alpha\right)+A_2Y_p\left(\frac{\omega}{\delta_m}\alpha\right)\right] \\ &T(t)=A_3\cos\frac{\omega a}{l}t+A_4\sin\frac{\omega a}{l}t \end{aligned} \tag{1.4}$$

Для рассматриваемой задачи граничные и начальные условия следующие:

$$\begin{aligned} &1)\ \text{при}\ \alpha=1\quad u_m=0; &&3)\ \text{при}\ t=0\quad \frac{\partial u_m}{\partial t}=0, \\ &2)\ \text{при}\ \alpha=\frac{1}{\sqrt[m]{k}}\quad \frac{\partial u_m}{\partial \alpha}=0; &&4)\ \text{при}\ t=0\quad u_m=\frac{Pl}{2pEF_0\delta_m}\left(\alpha^{-2p}-1\right) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Из первых двух условий (1.5) имеем

$$\begin{aligned} &A_1J_p\left(\frac{\omega}{\delta_m}\right)+A_2Y_p\left(\frac{\omega}{\delta_m}\right)=0 \\ &A_1J_{p+1}\left(\frac{\omega}{\lambda_m}\right)+A_2Y_{p+1}\left(\frac{\omega}{\lambda_m}\right)=0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

а из третьего условия - $A_4=0$.

Из системы (1.6) для определения ω получаем следующее трансцендентное уравнение, которое имеет неограниченное количество корней $\omega_n(n=1,2,3\ldots)$:

$$J_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right)Y_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right)-Y_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right)J_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right)=0 \tag{1.7}$$

Таким образом, общее решение рассматриваемой задачи можно представить в виде

$$u_m(\alpha,t)=\alpha^{-p}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left[Y_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right)J_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\alpha\right)-J_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right)Y_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\alpha\right)\right]\cos\frac{\omega_n a}{l}t \quad (1.8)$$

Удовлетворив теперь четвертому условию (1.5), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left[Y_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right)J_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\alpha\right)-J_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right)Y_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\alpha\right)\right]=\frac{Pl}{2pEF_0\delta_m}\left(\alpha^{-p}-\alpha^{p}\right) \quad (1.9)$$

Для определения величин B_n следует учесть, что здесь функции в квадратных скобках ортогональны в интервале $1/\sqrt[m]{k}\le\alpha\le 1$ с весом α (доказательство не приводится).

После определения величин B_n и некоторых преобразований, окончательное решение задачи представим в виде

$$u_m(\alpha,t)=\frac{\pi Plk^{\frac{p+1}{m}}}{EF_0\alpha^{p}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right)J_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right)}{\omega_n\left[J_p^{2}\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right)-J_{p+1}^{2}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right)\right]}\times$$

$$\times\left[Y_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right)J_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\alpha\right)-J_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right)Y_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\alpha\right)\right]\cos\frac{\omega_n a}{l}t \quad (1.10)$$

Отметим, что это решение верно для всех конечных значений $m=1,2,3,\ldots$ $\left(p=0,1/2,1,3/2,\ldots\right)$ несмотря на то, что в четвертом условии (1.5) случай $m=1$ $\left(p=0\right)$ является особым и при отдельном его рассмотрении необходимо было бы произвести предельный переход $p\to 0$.

Из решения (1.10) можно получить соответствующее решение для стержня постоянного поперечного сечения $(k=1)$. Но для этого следует учесть, что при $k\to 1$ аргументы функции Бесселя безгранично возрастают, так как при этом δ_m, $\lambda_m\to 0$ и поэтому необходимо предварительно пользоваться их асимптотическими разложениями. Тогда трансцендентное уравнение (1.7) преобразуется к виду

$$\cos\omega_n=0,\quad \omega_n=(2n-1)\frac{\pi}{2} \quad (1.11)$$

Далее в (1.10), пользуясь асимптотическими разложениями и учитывая (1.11), после перехода к переменной x и пределу $k\to 1$, получим известное решение рассматриваемой задачи для стержня постоянного поперечного сечения [2]

$$u(x,t)=\frac{8Pl}{\pi^2 EF_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{2n-1}{2l}\pi x\cos\frac{2n-1}{2l}\pi at \tag{1.12}$$

Следует отметить, что при нечетных значениях $m=1,3,\ldots$ индексы бесселевых функций целые числа, а при четных значениях $m=2,4,\ldots$ указанные индексы принимают значения целое число плюс $1/2$. В последнем случае известно, что бесселевы функции выражаются через элементарные функции.

2. Теперь рассмотрим стержни $F_{-m}(x)$ второго семейства (1). Подставляя в уравнение (4) значение $F_{-m}(x)$ из (1), с заменой x на β

$$1+\lambda_m\frac{x}{l}=\beta \qquad \left(1\le\beta\le\sqrt[m]{k}\right) \tag{2.1}$$

и производя разделение переменных $u_{-m}(\beta,t)\equiv v_m(\beta,t)=Z(\beta)\Theta(t)$ получим

$$\frac{\lambda_m^2}{Z}\left(Z''-\frac{m}{\beta}Z'\right)=\frac{l^2}{a^2}\frac{\Theta''}{\Theta}=-\Omega^2 \tag{2.2}$$

или

$$\begin{cases} Z''+\dfrac{2q+1}{\beta}Z'+\dfrac{\Omega^2}{\lambda_m^2}Z=0 \\ \Theta''+\dfrac{\Omega^2a^2}{l^2}\Theta=0 \end{cases} \qquad \left(q=-\frac{m+1}{2}=-(p+1)\right) \tag{2.3}$$

Общие решения уравнений (2.3) имеют вид

$$\begin{aligned} Z(\beta)&=\beta^{-q}\left[C_1J_q\left(\frac{\Omega}{\lambda_m}\beta\right)+C_2Y_q\left(\frac{\Omega}{\lambda_m}\beta\right)\right] \\ \Theta(t)&=C_3\cos\frac{\Omega a}{l}t+C_4\sin\frac{\Omega a}{l}t \end{aligned} \tag{2.4}$$

Для рассматриваемой задачи граничные и начальные условия следующие:

$$\begin{aligned} &1)\ \text{при}\ \beta=1\quad v_m=0; && 3)\ \text{при}\ t=0\quad \frac{\partial v_m}{\partial t}=0, \\ &2)\ \text{при}\ \beta=\sqrt[m]{k}\quad \frac{\partial v_m}{\partial\beta}=0; && 4)\ v_m(\beta,0)=\frac{Pl}{2qEF_0\lambda_m}\left(1-\beta^{-2q}\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Поступая аналогично первому пункту, получим следующее трансцендентное уравнение относительно Ω_n $(n = 1,2,3,\ldots)$

$$J_q\left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m}\right)Y_{q+1}\left(\frac{\Omega_n}{\delta_m}\right)-Y_q\left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m}\right)J_{q+1}\left(\frac{\Omega_n}{\delta_m}\right)=0 \qquad (2.6)$$

Тогда общее решение можно представить в виде

$$v_m(\beta,t)=\beta^{-q}\sum_{n=1}^{\infty}D_n\left[Y_q\left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m}\right)J_q\left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m}\beta\right)-J_q\left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m}\right)Y_q\left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m}\beta\right)\right]\cos\frac{\Omega_n a}{l}t \qquad (2.7)$$

Прежде чем перейти к определению величин D_n, преобразуем трансцендентное уравнение (2.6). Учитывая, что $q=-(p+1)<0$ и пользуясь известными формулами перехода от отрицательных к положительным индексам бесселовых функций, уравнение (2.6) приводится к виду

$$J_p\left(\frac{\Omega_n}{\delta_m}\right)Y_{p+1}\left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m}\right)-Y_p\left(\frac{\Omega_n}{\delta_m}\right)J_{p+1}\left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m}\right)=0 \qquad (2.8)$$

Из сравнения уравнений (2.8) и (1.7) следует, что

$$\Omega_n=\omega_n \qquad (2.9)$$

Таким образом, имеет место любопытный факт, что в поставленной здесь задаче для стержней обоих семейств (1), определяемых одним и тем же значением m, их собственные числа совпадают.

После удовлетворения четвертому условию (2.5) и учитывая (2.9), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}D_n\left[Y_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right)J_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\beta\right)-J_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right)Y_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\beta\right)\right]=\frac{Pl}{2qEF_0\lambda_m}\left(\beta^q-\beta^{-q}\right) \qquad (2.10)$$

Пользуясь ортогональностью функции в квадратных скобках (2.10) с весом β в интервале $1\le\beta\le\sqrt[m]{k}$, определяем коэффициенты D_n, после чего общее решение задачи будет

$$v_m(\beta,t)=\frac{\pi Plk^{-\frac{q+1}{m}}}{EF_0\beta^q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right)J_{q+1}\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right)}{\omega_n\left[J_q^2\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right)-J_{q+1}^2\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right)\right]}\times \qquad (2.11)$$

$$\times\left[Y_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right)J_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\beta\right)-J_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right)Y_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\beta\right)\right]\cos\frac{\omega_n a}{l}t$$

После перехода от отрицательных к положительным индексам Бесселевых функций, окончательное решение задачи принимает вид

$$v_m(\beta,t)=\frac{\pi l P k^{\frac{p}{m}}}{EF_0}\beta^{p+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right)J_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right)}{\omega_n\left[J_p^2\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right)-J_{p+1}^2\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right)\right]}\times$$

$$\times\left[Y_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right)J_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\beta\right)-J_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right)Y_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\beta\right)\right]\cos\frac{\omega_n a}{l}t \qquad (2.12)$$

Отметим, что результат (1.12), полученный для стержней постоянного поперечного сечения из (1.10), получается аналогичным образом также и из (2.12).

3. Выше было показано, что в рассматриваемой задаче для обоих семейств стрежней (1) трансцендентное уравнение одно и то же (1.7). Корни этого трансцендентного уравнения ω_n зависят от параметров m и k, то есть $\omega_n=\omega_n(m,k)$.

Рассмотрим частные случаи ($m=2$ и $m=4$), при которых бесселовы функции выражаются через элементарные функции

а) $m=2 \quad (p=1/2)$

В этом случае из (1) имеем $\delta_2=1-1/\sqrt{k}$, $\lambda_2=\sqrt{k}-1=\sqrt{k}\delta_2$.

Обозначив $\omega_n(2,k)=\xi_n(k)$, из (1.7) получим

$$J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_n}{\delta_2}\right)Y_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\xi_n}{\lambda_2}\right)-Y_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_n}{\delta_2}\right)J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\xi_n}{\lambda_2}\right)=0 \qquad (3.1)$$

Отсюда, после замены бесселовых функций соответствующими их выражениями, получим

$$\operatorname{tg}\xi_n=-\frac{\xi_n}{\lambda_2} \qquad (3.2)$$

Здесь очевидно, что интересующие нас положительные корни трансцендентного уравнения (3.2) находятся в следующих интервалах:

$$(2n-1)\frac{\pi}{2}<\xi_n<n\pi \qquad (n=1,2,\ldots) \qquad (3.3)$$

Они расположены ближе к левому краю и по мере возрастания n приближаются к левому значению (3.3).

В табл.1 приведены значения нескольких корней $\xi_n(k)$ уравнения (3.2) при двух значениях k $(k=2,\ k=10)$.

ТАБЛИЦА 1

n	$\xi_n(2)$	$\xi_n(10)$	n	$\xi_n(2)$	$\xi_n(10)$
1	1.7973	2.3209	4	11.0331	11.1865
2	4.7985	5.1125	5	14.1664	14.2874
3	7.9062	8.1144	6	17.3026	17.4024

В общих решениях (1.10) и (2.12), произведя необходимые замены и некоторые преобразования с учетом (3.2), соответственно получим

$$u_2(\alpha,t)=\frac{2\sqrt{k}Pl\lambda_2}{EF_0\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\xi_n}{\xi_n^2\left(\lambda_2^2+\cos^2\xi_n\right)}\sin\frac{\xi_n}{\delta_2}(1-\alpha)\cos\frac{\xi_n a}{l}t \quad (3.4)$$

$$v_2(\beta,t)=\frac{2\sqrt{k}Pl\lambda_2}{EF_0}\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\xi_n^2\left(\lambda_2^2+\cos^2\xi_n\right)}\cos\frac{\xi_n}{\lambda_2}\left(\beta-\sqrt{k}\right)\cos\frac{\xi_n a}{l}t \quad (3.5)$$

б) $m=4$ $\quad (p=3/2)$

В этом случае из (1) имеем $\delta_4=1-1/\sqrt[4]{k}$, $\lambda_4=\sqrt[4]{k}-1=\sqrt[4]{k}\delta_4$. Обозначив $\omega_n(4,k)=\eta_n(k)$, из (1.7) получим

$$J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\eta_n}{\delta_4}\right)Y_{\frac{5}{2}}\left(\frac{\eta_n}{\lambda_4}\right)-Y_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\eta_n}{\delta_4}\right)J_{\frac{5}{2}}\left(\frac{\eta_n}{\lambda_4}\right)=0 \quad (3.6)$$

После соответствующих преобразований, трансцендентное уравнение (3.6) принимает вид

$$\operatorname{tg}\eta_n=-\frac{\eta_n}{\delta_4}\frac{\eta_n^2-3\delta_4\lambda_4^2}{\left(3\lambda_4+2\right)\eta_n^2+3\lambda_4^2} \quad (3.7)$$

Для того, чтобы иметь четкое представление о корнях этого уравнения, необходимо исследовать его правую часть как функцию от η

$$f(\eta)=-\frac{\eta}{\delta_4}\frac{\eta^2-3\delta_4\lambda_4^2}{\left(3\lambda_4+2\right)\eta^2+3\lambda_4^2} \quad (3.8)$$

Прежде всего отметим, что эта функция нечетная, а нас интересует ее поведение только при положительных значениях η.

Приведем некоторые характерные данные из результатов исследования функции (3.8).

Функция (3.8) с возрастанием η возрастает от нуля (причем $f'(0)=1$), принимая свое максимальное значение ($f'(\eta)=0$) при

$$\eta=\lambda_4\left(\frac{6\delta_4}{\sqrt{\left(3\sqrt[4]{k}+\delta_4\right)^2-4\delta_4}+3\sqrt[4]{k}-\delta_4}\right)^{1/2}$$

затем убывает, обращаясь в нуль при $\eta=\eta^*=\lambda_4\sqrt{3\delta_4}$. Имеем точку перегиба ($f''(\eta)=0$) при $\eta=3\lambda_4/\sqrt{3\lambda_4+2}$ и асимптоту с уравнением

$$f(\eta)=-\frac{\eta}{(3\lambda_4+2)\delta_4}$$

Из приведенных здесь данных о функции (3.8) нетрудно заключить, что корни η_n трансцендентного уравнения (3.7), аналогично ξ_n, находятся в интервалах (3.3).

В табл. 2 приведены значения нескольких корней уравнения (3.7) при двух значениях k $(k=2,\ k=10)$.

ТАБЛИЦА 2

n	$\eta_n(2)$	$\eta_n(10)$	n	$\eta_n(2)$	$\eta_n(10)$
1	1.7982	2.3603	4	11.0326	11.1559
2	4.7976	5.0853	5	14.1660	14.2701
3	7.9057	8.0885	6	17.3024	17.3879

Рассматривая значения корней $\xi_n(k)$ (при $m=2$) и $\eta_n(k)$ (при $m=4$), можно заметить, что при одном и том же значении k они мало отличаются друг от друга (в особенности при $k=2$).

Что же касается решениям $u_4(\alpha,t)$ и $v_4(\beta,t)$, хотя они после преобразований выражаются через элементарные функции, здесь не будем приводить из-за громоздкости их выражений.

Литература

1. *Гаспарян А. Е., Хачатрян А.А.* О продольных колебаниях стержней с переменными поперечными сечениями.- Изв. АН Армении, Механика, 1993, т.46, № 3-4, с.36-41.
2. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле.- М.: Физматгиз, 1959. 440с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
6.04.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, № 5-6, 1994 Механика

ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЕБРИСТОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА НАИБОЛЬШЕЙ НИЗШЕЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Белубекян Э. В., Погосян А. Г.

Բելուբեկյան Է. Վ., Պողոսյան Ա. Գ.

Կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված, սեփական փատանումների ամենամեծ ստորին հաճախականություն ունեցող, կողավոր սալի նախագծումը

Դիտարկվում է կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված ուղղանկյուն սալ, որն երկու կողմերով ուժեղացված է կոշտության կողերով: Սալի հաստատուն կշռի դեպքում, որոշվում են նրա ֆիզիկական և երկրաչափական պարամետրերը, որոնք ապահովում են սեփական փատանումների ստորին հաճախականության մեծագույն արժեքը:

E. V. Belubekian, A. G. Pogosian

The Making Designs of Plate from Composite Material with Ribs when its First Natural Frequensy is Maximal

Рассматривается прямоугольная пластинка, изготовленная из композиционного материала, усиленная по двум кромкам ребрами жесткости. При заданном весе конструкции определяются оптимальные физические и геометрические параметры пластинки, обеспечивающие наибольшее значение низшей частоты собственных колебаний.

Рассматривается прямоугольная пластинка размерами $a \times b \times h_2$, шарнирно опертая по краям $y = 0$, $y = b$ и усиленная ребрами жесткости размерами $\alpha h_1 \times h_1 \times b$ по свободным кромкам $x = \pm a/2$.

Предполагается, что пластинка изготовлена из монослоев ВКМ, уложенных поочередно под углами $\pm\varphi$ к оси x, а в ребрах монослои ориентированы вдоль оси y.

Ставится задача определения оптимального вектора $\bar{x} = \{\alpha, h_1, h_2, \varphi\}$, обеспечивающего наибольшее значение низшей частоты собственных колебаний ω пластинки при постоянном весе конструкции.

Уравнение собственных колебаний рассматриваемой ортоторпной пластинки имеет вид :

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+$$
$$+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\rho h_2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

где: $D_{ik}=B_{ik}h_2^3/12$ - жесткости пластинки, B_{ik} - упругие характеристики материала в главных геометрических направлениях, определяемые через характеристики ВКМ по известным формулам поворота [1], ρ - плотность ВКМ.

Граничные условия задачи запишутся в виде:

- шарнирного опирания

$$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \qquad \text{при} \qquad y=0,\ y=b \tag{2}$$

- симметрии (в случае симметричной формы колебаний)

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0,\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \qquad \text{при} \qquad x=0 \tag{3}$$

- антисимметрии (в случае антисимметричной формы колебаний)

$$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \qquad \text{при} \quad x=0 \tag{4}$$

- упругого опирания на ребро жесткости

$$C\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}=D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$
$$E_1J\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(D_{12}+4D_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2} \tag{5}$$

при $x=a/2$

где C - жесткость прямоугольного ребра на кручение [2]:

$$C=G_{23}\alpha h_1^4\beta,\quad d=\alpha\sqrt{G_{23}/G_{13}}$$
$$\beta=d^2\left[\frac{1}{3}-\frac{64}{\pi^5}d\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\operatorname{th}\frac{n\pi}{2d}\right] \tag{6}$$

$A=\alpha h_1^2$ - площадь поперечного сечения ребра; G_{13}, G_{23}- модули сдвига материала ребра в плоскостях $x0z$ и $y0z$.

Решение уравнения (1) с удовлетворением условий (2), (3), (4) принимается в виде:

- для симметричной формы

$$w=\left(C_1\,\mathrm{ch}\,\mu_1\lambda_m x+C_2\cos\mu_2\lambda_m x\right)\sin\omega t\sin\lambda_m y \tag{7}$$

-для антисимметричной формы

$$w=\left(C_1\,\mathrm{sh}\,\mu_1\lambda_m x+C_2\sin\mu_2\lambda_m x\right)\sin\omega t\sin\lambda_m y \tag{8}$$

где

$$\mu_{1,2}=\sqrt{\frac{\sqrt{D_3^2+D_{11}D_{22}\left(k_m^2-1\right)}\pm D_3}{D_{11}}}$$

$$\lambda_m=\frac{m\pi}{b},\quad D_3=D_{12}+4D_{66},\quad k_m^2=\omega^2\frac{\rho h_2}{\lambda_m^4 D_{22}} \tag{9}$$

Здесь принято $k_m>1$, так как в случае наличия ребер ω будет больше частоты собственных колебаний пластинки со свободными кромками, где принимается $k_m=1$.

Из условий (5) получается система однородных уравнений относительно коэффициентов C_1, C_2. Условие существования нетривиального решения этой системы приводит к следующему уравнению относительно коэффициента k_m:

- для симметричной формы колебаний

$$\frac{B_{11}}{B_{22}}\mu_1\mu_2 f_1\left(\mu_1^2+\mu_2^2\right)\mathrm{sh}\,\mu_1\lambda_m x\sin\mu_2\lambda_m x-$$
$$-\frac{B_{11}}{B_{22}}f_2\left(f_3-k_m^2\right)\left(\mu_1^2+\mu_2^2\right)\mathrm{ch}\,\mu_1\lambda_m x\cos\mu_2\lambda_m x+$$
$$+\mu_1\left(\frac{B_{11}}{B_{22}}\mu_2^2-f_4-f_1 f_2\left(f_3-k_m^2\right)\right)\mathrm{sh}\,\mu_1\lambda_m x\cos\mu_2\lambda_m x+$$
$$+\mu_2\left(\frac{B_{11}}{B_{22}}\mu_2^2+f_4-f_1 f_2\left(f_3-k_m^2\right)\right)\mathrm{ch}\,\mu_1\lambda_m x\sin\mu_2\lambda_m x=0$$

где

$$f_1=12\pi m\frac{G_{23}\beta h_1^4}{B_{12}bh_2^3},\quad f_2=\pi m\frac{\alpha h_1^2}{h_2}$$

$$f_3=\frac{E_1h_1^2}{B_{22}h_2^2},\quad f_4=\frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{22}}$$

- для антисимметричной формы уравнение относительно k_m получается из (10) заменой

$$\operatorname{sh}\mu_1\lambda_m x \quad \text{на} \quad \operatorname{ch}\mu_1\lambda_m x, \quad \operatorname{ch}\mu_1\lambda_m x \quad \text{на} \quad \operatorname{sh}\mu_1\lambda_m x$$

$$\sin\mu_2\lambda_m x \quad \text{на} \quad -\cos\mu_2\lambda_m x, \quad \cos\mu_2\lambda_m x \quad \text{на} \quad \sin\mu_2\lambda_m x$$

После определения k_m из (10), частоты собственных колебаний пластинки, согласно (9), определятся по формуле:

$$\omega_m = \lambda_m^2 k_m \sqrt{\frac{D_{22}}{\rho h_2}} \tag{11}$$

Оптимизационную задачу определения параметров α, h_1, h_2, φ конструкции заданного веса, обеспечивающих максимальное значение низшей частоты собственных колебаний, можно представить в виде задачи нелинейного программирования:

Найти

$$\omega = \max_{\bar{x}} \min_{m} \omega_m, \quad \bar{x} = \{\alpha, h_1, h_2, \varphi\} \tag{12}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} & h_0 \le h_1 \le 0.2b, \quad 0.2 \le \alpha \le 5.0, \\ & \delta \le h_2 \le h_0, \qquad 0^0 \le \varphi \le 90^0, \\ & \frac{ah_2 + 2\alpha h_1^2}{a + 2\alpha h_1} = h_0 \end{aligned} \tag{13}$$

Первые три ограничения обусловлены пределами применимости классической теории балок и пластин. Для δ принимается: $\delta = 0.01b$ при $a \geq b$; $\delta = 0.01a$ при $a \leq b$. Последнее ограничение обеспечивает постоянство объема (веса) конструкции, h_0 - толщина соответствующей гладкой пластинки заданного веса.

Задача (12), (13) решается методом деформируемого многогранника [3].

Численная реализация проведена для различных значений $\xi = (a + 2\alpha h_1)/b = 0.5;\ 1;\ 2$ при $\bar{h}_0 = h_0/b = 0.015;\ 0.02;\ 0.03;\ 0.04;\ 0.05$.

В качестве материала принят ВКМ со следующими приведенными характеристиками:

$$\begin{aligned} & \bar{B}_{11}^0 = 1, \ \bar{B}_{22}^0 = B_{22}^0 / B_{11}^0 = 0.0818, \ \bar{B}_{12}^0 = B_{12}^0 / B_{11}^0 = 0.0196, \\ & \bar{B}_{66}^0 = B_{66}^0 / B_{11}^0 = 0.04297, \ G_{23}/G_{13} = 1, \\ & \bar{E}_1 = E_1 / B_{11}^0 = 0.995, \ \bar{G}_{23} = G_{23} / B_{11}^0 = 0.0497 \end{aligned}$$

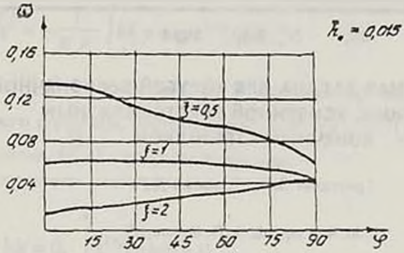
Полученные значения оптимальных параметров конструкции и соответствующих наибольших низших частот $\bar{\omega} = \omega / \sqrt{\rho b^2 / B_{11}^0}$ приведены в табл. 1.

Там же приведены наибольшие значения низших частот собственных колебаний $\overline{\omega}^0$ для сплошной пластинки заданного веса, которые получаются при $\varphi = 90^0$. Следует отметить, что оптимальные значения $\overline{\omega}$ при всех значениях $\overline{h}_0$ соответствуют симметричной форме колебаний при $m = 1$.

Таблица 1

ξ	$\overline{h}_0$	α	$\overline{h}_1$	$\overline{h}_2$	φ	$\overline{\omega}$	$\overline{\omega}^0$
0.5	0.015	0.541	0.0704	0.00503	0°	0.1303	0.0427
	0.02	0.505	0.0858	0.00621	0°	0.167	0.0569
	0.03	0.447	0.116	0.00830	0°	0.236	0.0854
	0.04	0.404	0.141	0.0102	0°	0.304	0.114
	0.05	0.370	0.167	0.0118	0°	0.367	0.142
1.0	0.015	3.168	0.038	0.00771	0°	0.0624	0.0427
	0.02	3.464	0.046	0.00784	0°	0.08695	0.0569
	0.03	4.071	0.056	0.00821	0°	0.135	0.0854
	0.04	2.108	0.0859	0.0138	0°	0.175	0.114
	0.05	2.267	0.0957	0.0146	0°	0.224	0.142
2.0	0.015	0.2	0.0422	0.0148	90°	0.0430	0.0427
	0.02	0.2	0.0472	0.0197	90°	0.0574	0.0569
	0.03	0.2	0.0572	0.0297	90°	0.0859	0.0854
	0.04	0.2	0.0672	0.0396	90°	0.114	0.114
	0.05	0.2	0.0908	0.0492	90°	0.143	0.142

Как следует из табл. 1, оптимальное оребрирование пластинки приводит к увеличению низшей частоты собственных колебаний почти в 1,5 раза (при $\xi = 1$).



фиг. 1

На фиг. 1 для $\bar{h}_0 = 0.015$ показан график зависимости наибольшего значения низшей частоты $\overline{\omega}$ от угла φ. Как видно из графика, угол укладки монослоев ВКМ существенно влияет на величину $\overline{\omega}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизоторпных пластин.- М. : Наука, 1967. 534 с.
2. *Лехницкий С. Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней.- М. : Наука, 1971. 240 с.
3. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование.- М.: Мир, 1975. 532 с.

Государственный инженерный университет Армении

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 30.03.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, № 5-6, 1994 Механика

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ КРЕСТООБРАЗНЫМ КОНЕЧНЫМ СТРИНГЕРОМ

Григорян Э.Х., Торосян Д.Р.

Է. Խ. Գրիգորյան, Դ. Ռ. Թորոսյան

Վերջավոր խաչաձև վերադիրով ուժեղացված անվերջ սալի համար կոնտակտային խնդիր

Դիտարկված է վերջավոր խաչաձև վերադիրով ուժեղացված անվերջ սալի համար կոնտակտային խնդիր: Սալը դեֆորմացվում է անվերջում կիրառված ուժերի ազդեցության տակ: Ֆակտորիզացիայի մեթոդի օգնությամբ խնդիրը բերված է հանրահաշվական հավասարումների քվազիլիովին ռեգուլյար անվերջ համակարգի:

Grigorian E. Kh., Torosian D.R.

The Contact Problem for Elastic Infinite Plate, Reinforced by Crestwise Finite Stringer

В работе рассматривается контактная задача для бесконечной упругой пластины, усиленной крестообразным конечным стрингером, состоящей из двух взаимно перпендикулярных, одинаковых стрингеров. Пластина деформируется под действием сил, приложенных на бесконечности по горизонтальным и вертикальным направлениям. Задача сводится к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью, а затем - к решению функциональных уравнений Винера-Хопфа. Решение функциональных уравнений строится сведением их к квазивполне регулярной совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно вычетов трансформантов Фурье интенсивностей контактных усилий.

Пусть упругая бесконечная пластина толщины h усилена крестообразным конечным стрингером с модулем упругости E_s и с площадью поперечного сечения F_s. Ширина креста равна $2a$. Пластина деформируется под действием сил p и q, приложенных на бесконечности и направленных по x и по y, соответственно. Относительно крестообразного стрингера принимается модель контакта по линии, то есть предполагается, что касательные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка. Тогда, уравнения равновесия стрингера запишутся в виде

$$\frac{\partial u^{(1)}(x)}{\partial x}=-\frac{1}{E_1F_1}\int_{-a}^{a}\Theta(x-t)\tau^{(1)}(t)dt$$

$$\left(|x|<a,\ |y|<a\right)$$

$$\frac{\partial v^{(1)}(y)}{\partial y}=-\frac{1}{E_1F_1}\int_{-a}^{a}\Theta(y-\eta)\tau^{(2)}(\eta)d\eta$$

где $u^{(1)}(x)$, $v^{(1)}(y)$ - горизонтальные и вертикальные перемещения точек крестообразного стрингера, соответственно, а $\tau^{(1)}(x)$, $\tau^{(1)}(y)$ - касательные контактные усилия, $\Theta(x)$ - функция Хевисайда.

Заметим, что имеют место условия

$$\int_{-a}^{a}\tau^{(1)}(t)dt=0,\quad \int_{-a}^{a}\tau^{(2)}(\eta)d\eta=0$$

С другой стороны, для пластины имеем

$$\left.\frac{\partial u^{(2)}(x,y)}{\partial x}\right|_{y=0}=-\frac{(3-\nu)(1+\nu)}{4\pi Eh}\int_{-a}^{a}\frac{\tau^{(1)}(t)}{t-x}dt+$$

$$+\frac{(1+\nu)^2}{4\pi Eh}\int_{-a}^{a}\frac{\eta\left(\eta^2-x^2\right)}{\left(\eta^2+x^2\right)^2}\tau^{(2)}(\eta)d\eta+\frac{p}{E}-\frac{\nu q}{E}$$

$$\left.\frac{\partial v^{(2)}(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0}=-\frac{(3-\nu)(1+\nu)}{4\pi Eh}\int_{-a}^{a}\frac{\tau^{(2)}(\eta)}{\eta-y}d\eta+$$

$$+\frac{(1+\nu)^2}{4\pi Eh}\int_{-a}^{a}\frac{t\left(t^2-y^2\right)}{\left(t^2+y^2\right)^2}\tau^{(1)}(t)dt+\frac{q}{E}-\frac{\nu p}{E}$$

$$\left(-\infty<x,y<\infty\right)$$

где $u^{(2)}(x,y)$, $v^{(2)}(x,y)$ - горизонтальные и вертикальные перемещения точек пластины соответственно, ν - коэффициент Пуассона, E - модуль упругости пластины.

Далее, имея в виду условия контакта

$$\frac{\partial u^{(1)}(x)}{\partial x}=\frac{\partial u^{(2)}(x,0)}{\partial x},\quad |x|<a$$

$$\frac{\partial v^{(1)}(y)}{\partial y}=\frac{\partial v^{(2)}(0,y)}{\partial y},\quad |y|<a$$

и нечетность функций $\tau^{(1)}(x)$, $\tau^{(2)}(y)$, будем иметь

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{\pi}\int_0^a\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x}\right)\tau^{(1)}(t)dt-\frac{2A}{\pi}\int_0^a\frac{\eta(\eta^2-x^2)}{(\eta^2+x^2)^2}\tau^{(2)}(\eta)d\eta+R_1= \\
=-\lambda_1\int_0^a\Theta(t-x)\tau^{(1)}(t)dt \qquad (0<x<a) \\
\frac{1}{\pi}\int_0^a\left(\frac{1}{\eta-y}+\frac{1}{\eta+y}\right)\tau^{(2)}(\eta)d\eta-\frac{2A}{\pi}\int_0^a\frac{t^2(t^2-y^2)}{(t^2+y^2)^2}\tau^{(1)}(t)dt+R_2= \\
=-\lambda_1\int_0^a\Theta(\eta-y)\tau^{(2)}(\eta)d\eta \qquad (0<y<a)
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где

$$
A=\frac{1+\nu}{3-\nu},\quad \lambda_1=\frac{4Eh}{E_1F_1(3-\nu)(1+\nu)},
$$

$$
R_1=\frac{4h}{(3-\nu)(1+\nu)}(\nu q-p),\quad R_2=\frac{4h}{(3-\nu)(1+\nu)}(\nu p-q)
$$

Таким образом, задача свелась к решению системы сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью в нуле (1).

Плоская задача о крутильных колебаниях жесткого крестообразного включения рассмотрена в работе [1]. Решение системы уравнений (1) построим с помощью метода, изложенного в работе [2], и ищем его в классе функций равные в нуле при нулевом значении аргумента и суммируемые на отрезке $(0,a)$.

Для этого запишем (1) в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x}\right)\tau_-^{(1)}(t)dt-\frac{2A}{\pi}\int_0^\infty\frac{\eta(\eta^2-x^2)}{(\eta^2+x^2)^2}\tau_-^{(2)}(\eta)d\eta= \\
=-\Theta(a-x)\lambda_1\int_0^\infty\Theta(t-x)\tau_-^{(1)}(t)dt-R_1\Theta(a-x)+g_+^{(1)}(x) \\
\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{1}{\eta-y}+\frac{1}{\eta+y}\right)\tau_-^{(2)}(\eta)d\eta-\frac{2A}{\pi}\int_0^\infty\frac{t(t^2-y^2)}{(t^2+y^2)^2}\tau_-^{(1)}(t)dt= \\
=-\Theta(a-y)\lambda_1\int_0^\infty\Theta(\eta-y)\tau_-^{(2)}(\eta)d\eta-R_2\Theta(a-y)+g_+^{(2)}(y)
\end{gathered}
\tag{2}
$$

$$
(0<x,\,y<\infty)
$$

где

$$\tau_-^{(1)}(x)=\Theta(a-x)\tau^{(1)}(x),\quad \tau_-^{(2)}(y)=\Theta(a-y)\tau^{(2)}(y)$$

$$g_+^{(1)}(x)=\frac{4Eh}{(3-\nu)(1+\nu)}\left(\frac{p}{E}-\frac{\nu q}{E}-\frac{\partial u^{(2)}(x,0)}{\partial x}\right)\Theta(x-a)$$

$$g_+^{(2)}(y)=\frac{4Eh}{(3-\nu)(1+\nu)}\left(\frac{q}{E}-\frac{\nu p}{E}-\frac{\partial v^{(2)}(0,y)}{\partial y}\right)\Theta(y-a)$$

Далее, произведя в (2) замену переменных $x=ae^{v}$, $t=ae^{u}$, $\eta=ae^{u}$, $y=ae^{w}$, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1-e^{v-u}}+\frac{1}{1+e^{v-u}}\right)\tau_-^{(1)}(ae^{u})du-\frac{2A}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(1-e^{2(v-u)}\right)}{\left(1+e^{2(v-u)}\right)^2}\tau_-^{(2)}(ae^{u})du=$$

$$=-\lambda\Theta(-v)\int_{-\infty}^{\infty}\Theta(u-v)\tau_-^{(1)}(ae^{u})e^{u}du-R_1\Theta(-v)+g_+^{(1)}(ae^{v})$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1-e^{w-u}}+\frac{1}{1+e^{w-u}}\right)\tau_-^{(2)}(ae^{u})du-\frac{2A}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(1-e^{2(w-u)}\right)}{\left(1+e^{2(w-u)}\right)^2}\tau_-^{(1)}(ae^{u})du= \tag{3}$$

$$=-\lambda\Theta(-w)\int_{-\infty}^{\infty}\Theta(u-w)e^{u}\tau_-^{(2)}(ae^{u})du-R_2\Theta(-w)+g_+^{(2)}(ae^{w})$$

$$(-\infty<v,w<\infty)$$

где $\lambda=\lambda_1 a$

Теперь, применив к (3) преобразования Фурье, задачу сведем к решению системы функционально-разностных уравнений:

$$\operatorname{cth}\frac{\pi\alpha}{2}\bar{\tau}_-^{(1)}(\alpha)+\frac{i(\alpha+i)A}{\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha}{2}}\bar{\tau}_-^{(2)}(\alpha)+\frac{\lambda}{\alpha}\bar{\tau}_-^{(1)}(\alpha-i)=-\frac{R_1}{\alpha}+i\,\bar{g}_+^{(1)}(\alpha)$$

$$(-1<\operatorname{Im}\alpha<0) \tag{4}$$

$$\operatorname{cth}\frac{\pi\alpha}{2}\bar{\tau}_-^{(2)}(\alpha)+\frac{i(\alpha+i)A}{\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha}{2}}\bar{\tau}_-^{(1)}(\alpha)+\frac{\lambda}{\alpha}\bar{\tau}_-^{(2)}(\alpha-i)=-\frac{R_2}{\alpha}+i\,\bar{g}_+^{(2)}(\alpha)$$

$$(-1<\operatorname{Im}\alpha<0)$$

где

$$\overline{\tau}_-^{(k)}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau_-^{(k)}(ae^u)e^{i\alpha u}du$$

$$\overline{g}_+^{(k)}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} g_+^{(k)}(ae^u)e^{i\alpha u}du$$

$$(k = 1,2)$$

$\overline{\tau}_-^{(1)}(\alpha)$, $\overline{\tau}_-^{(2)}(\alpha)$ - регулярны при $\operatorname{Im}\alpha < 0$, а $\overline{g}_+^{(1)}(\alpha)$, $\overline{g}_+^{(2)}(\alpha)$ - при $\operatorname{Im}\alpha > -1$.

Переходя к решению системы функциональных уравнений, сложим первое уравнение системы (4) со вторым и отнимем от первого второе. В итоге получим два независимых функциональных уравнения:

$$\overline{K}^{(1)}(\alpha)\overline{\varphi}_-^{(1)}(\alpha) + \frac{\lambda}{\alpha}\overline{\varphi}_-^{(1)}(\alpha - i) = \frac{Q_1}{\alpha} + \overline{G}_+^{(1)}(\alpha) \tag{5}$$

$$\overline{K}^{(2)}(\alpha)\overline{\varphi}_-^{(2)}(\alpha) + \frac{\lambda}{\alpha}\overline{\varphi}_-^{(2)}(\alpha - i) = \frac{Q_2}{\alpha} + \overline{G}_+^{(2)}(\alpha) \tag{6}$$

$$(-1 < \operatorname{Im}\alpha < 0)$$

где

$$Q_1 = -R_1 - R_2, \quad Q_2 = R_2 - R_1$$

$$\overline{G}_+^{(1)}(\alpha) = i\left(\overline{g}_+^{(1)}(\alpha) + \overline{g}_+^{(2)}(\alpha)\right), \quad \overline{G}_+^{(2)}(\alpha) = i\left(\overline{g}_+^{(1)}(\alpha) - \overline{g}_+^{(2)}(\alpha)\right)$$

$$\overline{\varphi}_-^{(1)}(\alpha) = \overline{\tau}_-^{(1)}(\alpha) + \overline{\tau}_-^{(2)}(\alpha), \qquad \overline{\varphi}_-^{(2)}(\alpha) = \overline{\tau}_-^{(1)}(\alpha) - \overline{\tau}_-^{(2)}(\alpha)$$

$$\overline{K}^{(1)}(\alpha) = \frac{\operatorname{ch}\frac{\pi\alpha}{2} + i(\alpha + i)A}{\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha}{2}}, \quad \overline{K}^{(2)}(\alpha) = \frac{\operatorname{ch}\frac{\pi\alpha}{2} - i(\alpha + i)A}{\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha}{2}}$$

Сначала рассмотрим уравнение (5) и применим к нему метод Винера-Хопфа [3]. Для этого факторизуем $\overline{K}^{(1)}(\alpha)$, представив ее в виде

$$\overline{K}^{(1)}(\alpha) = \overline{K}_+^{(1)}(\alpha)\,\overline{K}_-^{(1)}(\alpha) \tag{7}$$

где

$$\overline{K}_+^{(1)}(\alpha) = \overline{M}_+(\alpha)\overline{L}_+(\alpha), \quad \overline{K}_-^{(1)}(\alpha) = \overline{M}_-(\alpha)\overline{L}_-(\alpha)$$

$$\overline{M}_+(\alpha)=\sqrt{2}\,\frac{\Gamma\left(1-\frac{i\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{i\alpha}{2}\right)},\quad \overline{M}_-(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{\alpha}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{i\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{i\alpha}{2}\right)}$$

$$\overline{L}_+(\alpha)=\int_0^\infty L(u)e^{i\alpha u}du,\quad \overline{L}_-(\alpha)=\int_{-\infty}^0 L(u)e^{i\alpha u}du$$

$$L(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\ln\left(1+\frac{i(\alpha+i)A}{\operatorname{ch}\frac{\pi\alpha}{2}}\right)e^{-i\alpha u}d\alpha \qquad (-1<\tau<0)$$

$\Gamma(z)$ - известная функция-гамма.

Очевидно, что $\overline{M}_+(\alpha)$, $\overline{L}_+(\alpha)$ регулярны при $\operatorname{Im}\alpha>-1$, а $\overline{M}_-(\alpha)$, $\overline{L}_-(\alpha)$ - при $\operatorname{Im}\alpha<0$, и в своих областях регулярности не имеют нулей. Кроме того, $\overline{M}_+(\alpha)\sim\alpha^{1/2}$, $\overline{L}_+(\alpha)\sim O(1)$ при $\operatorname{Im}\alpha>-1$, $|\alpha|\to\infty$, $\overline{M}_-(\alpha)\sim\alpha^{-1/2}$, $\overline{L}_-(\alpha)\sim O(1)$ при $\operatorname{Im}\alpha<0$, $|\alpha|\to\infty$.

Имея в виду (7), уравнение (5) можно записать в виде

$$\overline{K}_-^{(1)}(\alpha)\overline{\varphi}_-^{(1)}(\alpha)+\frac{\lambda}{\alpha}\overline{\Phi}_-^{(1)}(\alpha)-\frac{Q_1}{\alpha\overline{K}_+^{(1)}(0)}+\frac{\lambda}{\alpha}\overline{\Phi}_+^{(1)}(0)=$$

$$=\frac{\overline{G}_+^{(1)}(\alpha)}{\overline{K}_+^{(1)}(\alpha)}+\frac{Q_1}{\alpha\overline{K}_+^{(1)}(\alpha)}-\frac{Q_1}{\alpha\overline{K}_+^{(1)}(0)}-\frac{\lambda}{\alpha}\left(\overline{\Phi}_+^{(1)}(\alpha)-\overline{\Phi}_+^{(1)}(0)\right) \tag{8}$$

$$(-1<\operatorname{Im}\alpha<0)$$

где $\overline{\Phi}^{(1)}(\alpha)=\overline{\Phi}_+^{(1)}(\alpha)+\overline{\Phi}_-^{(1)}(\alpha)$

$$\overline{\Phi}_+^{(1)}(\alpha)=\int_0^\infty \Phi^{(1)}(u)e^{i\alpha u}du,\quad \overline{\Phi}_-^{(1)}(\alpha)=\int_{-\infty}^0 \Phi^{(1)}(u)e^{i\alpha u}du$$

$$\Phi^{(1)}(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\overline{\Phi}^{(1)}(\alpha)e^{-i\alpha u}d\alpha \qquad (-1<\tau<0)$$

$$\overline{\Phi}^{(1)}(\alpha)=\frac{\overline{\varphi}_-^{(1)}(\alpha-i)}{\overline{K}_+^{(1)}(\alpha)}$$

$\overline{\Phi}_+^{(1)}(\alpha)$ регулярна при $\operatorname{Im}\alpha > -1$, а $\overline{\Phi}_-^{(1)}(\alpha)$ - при $\operatorname{Im}\alpha < 0$. Функции $\overline{\Phi}_\pm^{(1)}(\alpha)$ в своих областях регулярности имеют порядок $O\left(\frac{\ln\alpha}{\alpha}\right)$ при $|\alpha| \to \infty$. Кроме того, $\overline{\varphi}_-^{(1)}(\alpha) \sim \alpha^{-1/2}$ при $|\alpha| \to \infty$, $\operatorname{Im}\alpha < 0$, $\overline{G}_+^{(1)}(\alpha) \sim \alpha^{-1/2}$ при $|\alpha| \to \infty$, $\operatorname{Im}\alpha > -1$, поскольку, как известно, [4], $\overline{\varphi}_-^{(1)}(u) \sim u_-^{-1/2}$ при $u \to 0$, а $G_+^{(1)}(u) = g_+^{(1)}(ae^*) + g_+^{(2)}(ae^*) \sim u_+^{-1/4}$ при $u \to +0$. В силу вышесказанного, левые и правые части равенства (8) стремятся к нулю. Тогда, в силу теоремы об аналитическом продолжении и на основе теоремы Лиувиля, будем иметь

$$
\begin{gathered}
\overline{K}_-^{(1)}(\alpha)\overline{\varphi}_-^{(1)}(\alpha) + \frac{\lambda}{\alpha}\overline{\Phi}_-^{(1)}(\alpha) - \frac{Q_1}{\alpha\overline{K}_+^{(1)}(0)} + \frac{\lambda}{\alpha}\overline{\Phi}_+^{(1)}(0) = 0 \\
\frac{G_+^{(1)}(\alpha)}{\overline{K}_+^{(1)}(\alpha)} + \frac{Q_1}{\alpha\overline{K}_+^{(1)}(\alpha)} - \frac{Q_1}{\alpha\overline{K}_+^{(1)}(0)} - \frac{\lambda}{\alpha}\left(\overline{\Phi}_+^{(1)}(\alpha) - \overline{\Phi}_+^{(1)}(0)\right) = 0
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Из (9) получим

$$
\overline{\varphi}_-^{(1)}(\alpha) + \frac{\lambda\overline{\Phi}_-^{(1)}(\alpha)}{\alpha\overline{K}_-^{(1)}(\alpha)} = \frac{Q_1}{\alpha\overline{K}_+^{(1)}(0)\overline{K}_-^{(1)}(\alpha)} - \frac{\lambda\overline{\Phi}_+^{(1)}(0)}{\alpha\overline{K}_-^{(1)}(\alpha)}
\tag{10}
$$

После применения к (10) обратного преобразования Фурье, можно получить фредгольмовское интегральное уравнение второго рода относительно $\varphi(az) = \tau^{(1)}(az) + \tau^{(2)}(az)$ $(0 < z < 1)$, разрешающее задачу [5]. Однако мы пойдем другим путем [2]. Как нетрудно видеть, из (5) $\overline{\varphi}_-^{(1)}(\alpha)$ имеет полюса только в точках $\alpha = \alpha_k + in$, $\alpha = -\overline{\alpha}_k + in$, $\overline{\alpha}_k$ - сопряженное с α_k число, притом простые. Причем $0 < \operatorname{Im}\alpha_k < \operatorname{Im}\alpha_{k+1}$, $\operatorname{Re}\alpha_k > 0$, $\overline{K}^{(1)}(\alpha_k) = 0$, $\overline{K}^{(1)}(-\overline{\alpha}_k) = 0$, $(k = 1,2\ldots,\ n = 0,1\ldots)$. Отметим, что α_1 положительно мнимо [6]. Исходя из сказанного, $\tau^{(1)}(az) + \tau^{(2)}(az)$ представится в виде

$$
\begin{gathered}
\tau^{(1)}(az) + \tau^{(2)}(az) = i\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n b_{nk} z^n\right)B_k z^{-i\alpha_k} + \\
+ i\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n b_{nk}^{*} z^n\right)C_k z^{i\overline{\alpha}_k}
\end{gathered}
\tag{11}
$$

где

$$
B_k = \operatorname*{Res}_{\alpha=\alpha_k}\overline{\varphi}_-^{(1)}(\alpha),\quad C_k = \operatorname*{Res}_{\alpha=-\overline{\alpha}_k}\overline{\varphi}_-^{(1)}(\alpha)
$$

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=\alpha_k+in}\overline{\varphi}_-^{(1)}(\alpha)=(-\lambda)^n b_{nk}B_k \quad \operatorname*{Res}_{\alpha=-\overline{\alpha}_k+in}\overline{\varphi}_-^{(1)}(\alpha)=(-\lambda)^n b_{nk}^{*}C_k$$

$$b_{ok}=b_{ok}^{*}=1 \quad b_{nk}=\prod_{l=0}^{n}\left[\overline{K}^{(1)}(\alpha_k+il)(\alpha_k+il)\right]^{-1}$$

$$b_{nk}^{*}=\prod_{l=0}^{n}\left[\overline{K}^{(1)}(-\overline{\alpha}_k+il)(-\overline{\alpha}_k+il)\right]^{-1}$$

Так как α_1 положительно мнимо, то из (11) можно заключить, что $\tau^{(1)}(0)=\tau^{(2)}(0)=0$.

В (11) допускается, что все α_k комплексные. В случае мнимых α_k в (11) вместо C_k надо положить нуль. Теперь приступим к определению неизвестных B_k, C_k. Для этого заметим, что $\overline{\Phi}_-^{(1)}(\alpha)$, в силу вышесказанного, можно представить в виде:

$$\overline{\Phi}_-^{(1)}(\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n\left[\overline{K}_+^{(1)}(\alpha_k+in+i)\right]^{-1}b_{nk}}{\alpha-\alpha_k-in-i}\right]B_k+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n\left[\overline{K}_+^{(1)}(-\overline{\alpha}_k+in+i)\right]^{-1}b_{nk}^{*}}{\alpha+\overline{\alpha}_k-in-i}\right]C_k \tag{12}$$

Тогда из (10) относительно B_k, C_k получим следующую систему уравнений:

$$B_k+\frac{\lambda\overline{K}_+^{(1)}(\alpha_k)\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha_k}{2}}{\beta(\alpha_k)\alpha_k}\overline{\Phi}_-^{(1)}(\alpha_k)=f_k^{(1)} \tag{13}$$

$$C_k+\frac{\lambda\overline{K}_+^{(1)}(-\overline{\alpha}_k)\operatorname{sh}\frac{\pi\overline{\alpha}_k}{2}}{\beta(-\overline{\alpha}_k)\overline{\alpha}_k}\overline{\Phi}_-^{(1)}(-\overline{\alpha}_k)=f_k^{(2)} \tag{14}$$

$(k=1,2\ldots)$

где

$$f_k^{(1)}=\frac{Q\,\overline{K}_+^{(1)}(\alpha_k)\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha_k}{2}}{\alpha_k\beta(\alpha_k)\overline{K}_+^{(1)}(0)}-\lambda\frac{\overline{\Phi}_+^{(1)}(0)\overline{K}_+^{(1)}(\alpha_k)\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha_k}{2}}{\alpha_k\beta(\alpha_k)}$$

$$f_k^{(2)} = \frac{Q_1 \overline{K}_+^{(1)}(-\overline{\alpha}_k)\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\overline{\alpha}_k}{2}}{\overline{\alpha}_k \beta(-\overline{\alpha}_k)\overline{K}_+^{(1)}(0)} - \lambda \frac{\overline{\Phi}_+^{(1)}(0)\overline{K}_+^{(1)}(-\overline{\alpha}_k)\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\overline{\alpha}_k}{2}}{\overline{\alpha}_k \beta(-\overline{\alpha}_k)}$$

$$\beta(\alpha) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\alpha}{2} + iA \qquad (k = 1,2)$$

Далее, подставляя $\overline{\Phi}_-^{(1)}(\alpha_k)$, $\overline{\Phi}_-^{(1)}(-\overline{\alpha}_k)$ из (12) в (13), (14), для определения B_k, C_k получим совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$B_k + \frac{\lambda \overline{K}_+^{(1)}(\alpha_k)\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\alpha_k}{2}}{\beta(\alpha_k)\alpha_k}\sum_{m=1}^{\infty}\left[K_{mk}^{(1)}B_k + K_{mk}^{(2)}C_k\right] = f_k^{(1)} \tag{15}$$

$$C_k + \frac{\lambda \overline{K}_+^{(1)}(-\overline{\alpha}_k)\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\overline{\alpha}_k}{2}}{\beta(-\overline{\alpha}_k)\overline{\alpha}_k}\sum_{m=1}^{\infty}\left[K_{mk}^{(3)}B_k + K_{mk}^{(4)}C_k\right] = f_k^{(2)} \tag{16}$$

$$(k = 1,2\ldots)$$

где

$$K_{mk}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n\left[\overline{K}_+^{(1)}(\alpha_m + in + i)\right]^{-1} b_{nm}}{\alpha_k - \alpha_m - in - i}$$

$$K_{mk}^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n\left[\overline{K}_+^{(1)}(-\overline{\alpha}_m + in + i)\right]^{-1} b_{nm}^{*}}{\alpha_k + \overline{\alpha}_m - in - i}$$

$$K_{mk}^{(3)} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n\left[\overline{K}_+^{(1)}(\alpha_m + in + i)\right]^{-1} b_{nm}}{\overline{\alpha}_k + \alpha_m + in + i}$$

$$K_{mk}^{(4)} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n\left[\overline{K}_+^{(1)}(-\overline{\alpha}_m + in + i)\right]^{-1} b_{nm}^{*}}{\overline{\alpha}_k - \overline{\alpha}_m + in + i}$$

Постоянная $\overline{\Phi}_+^{(1)}(0)$ определяется из (10), если положить $\alpha = -i$, то есть из уравнения

$$\overline{\varphi}_-^{(1)}(-i) + \frac{\lambda i \overline{\Phi}_-^{(1)}(-i)}{\overline{K}_-^{(1)}(-i)} = \frac{iQ_1}{\overline{K}_+^{(1)}(0)\overline{K}_-^{(1)}(-i)} - \frac{i\lambda\overline{\Phi}_+^{(1)}(0)}{\overline{K}_-^{(1)}(-i)}$$

Квазиполная регулярность совокупности бесконечных систем (15), (16) следует из оценок

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|\overline{K}_{mk}^{(1)}\right| < \infty, \quad \left|\frac{\overline{K}_{+}^{(1)}(\alpha_k)\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha_k}{2}}{\alpha_k\beta(\alpha_k)}\right| < \frac{\text{const}}{\sqrt{k}}$$

$$(k \to \infty)$$

Отметим, что при мнимых α_j в (15) надо положить $C_j = 0$ и не рассматривать (15) при $k = j$.

Аналогичным образом можно получить решение уравнения (6) только в (15), (16) нули функции $\overline{K}^{(1)}(\alpha)$ $(\alpha_k, -\overline{\alpha}_k)$ надо заменить соответствующими нулями функции $\overline{K}^{(2)}(\alpha)$, а индексы 1 заменить индексами 2.

В частном случае одного горизонтального стрингера задача сводится к решению функционального уравнения

$$\operatorname{cth}\frac{\pi\alpha}{2}\overline{\tau}_{-}(\alpha) + \frac{\lambda}{\alpha}\overline{\tau}_{-}(\alpha - i) = -\frac{R_1}{\alpha} + i\,\overline{g}_{+}(\alpha) \tag{17}$$

где

$$\overline{\tau}_{-}(\alpha) = \overline{\tau}_{-}^{(1)}(\alpha), \quad \overline{g}_{+}(\alpha) = \overline{g}_{+}^{(1)}(\alpha)$$

Сначала исследуем аналитические свойства функции $\overline{\tau}_{-}(\alpha)$. Из (17) следует, что $\alpha = 0$ не является полюсом функции $\overline{\tau}_{-}(\alpha)$, поскольку $\overline{g}_{+}(\alpha)$ ограничена при $\alpha = 0$. Далее, поскольку $\overline{\tau}_{-}(0)$, $\overline{g}_{+}(i)$ конечны, то отсюда следует, что $\alpha = i$ может быть простым полюсом функции $\overline{\tau}_{-}(\alpha)$. Тогда $\alpha = 2i$ не может быть полюсом функции $\overline{\tau}_{-}(\alpha)$, так как $\alpha = i$ является простым полюсом для $\overline{\tau}_{-}(\alpha)$ и $\overline{g}_{+}(-2i)$ конечна. В таком случае, как следует из (17), $\alpha = 3i$ будет простым полюсом для $\overline{\tau}_{-}(\alpha)$. Так продолжая, убедимся, что функция $\overline{\tau}_{-}(\alpha)$ имеет полюса только в точках $\alpha = i(2n-1)$ $n = (1, 2\ldots)$, и притом простые. Тогда, поступая аналогичным образом, как выше, для $\overline{\tau}_{-}(\alpha)$ получим представления

$$\overline{\tau}_{-}(\alpha) = -\frac{\lambda\overline{\Phi}_{-}(\alpha)}{\overline{M}_{-}(\alpha)} - \frac{R_1}{\overline{M}_{+}(0)\overline{M}_{-}(\alpha)} \tag{18}$$

где $\overline{\Phi}_{-}(\alpha) = \dfrac{\overline{\tau}_{-}(-i)}{\overline{M}_{+}(0)\alpha} - i\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{A_{-1}^{(2n-1)}}{\overline{M}_{+}(2ni)(\alpha - 2ni)(2n)}$

Тогда из (18) получим

$$A_{-1}^{(2m-1)}+\frac{\lambda}{2\pi}\overline{M}_{+}(i(2m-1))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{-1}^{(2n-1)}}{\overline{M}_{+}(2ni)n\left(n+\frac{1}{2}-m\right)}=$$

$$=i\frac{2}{\pi}\frac{\left(\lambda\overline{\tau}_{-}(-i)+R_{1}\right)\overline{M}_{+}(i(2m-1))}{\overline{M}_{+}(0)(2m-1)}\qquad(m=1,2\ldots)\tag{19}$$

где $A_{-1}^{(2m-1)}=\operatorname*{Res}_{\alpha=i(2m-1)}\overline{\tau}_{-}(\alpha)$

После замены

$$\frac{A_{-1}^{(2m-1)}}{\overline{M}_{+}(2mi)}=Y_{m}$$

система (19) запишется в виде

$$Y_{m}+\frac{\lambda}{2\pi}\beta_{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_{n}}{n\left(n+\frac{1}{2}-m\right)}=i\frac{2}{\pi}\frac{\left(\lambda\overline{\tau}_{-}(-i)+R_{1}\right)\beta_{m}}{2m-1}\tag{20}$$

$$(m=1,2\ldots)$$

где $\beta_{m}=\dfrac{\Gamma^{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)}{m\Gamma^{2}(m)}$ и $\beta_{m}\sim O(1)$ при $m\to\infty$

Таким образом, задача свелась к решению бесконечной системы (20). Квазиполная регулярность системы следует из оценки

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left|n+\frac{1}{2}-m\right|}=\frac{2}{2m-1}\left(\Psi\left(m-\frac{1}{2}\right)+2\Psi(m)-2\Psi\left(\frac{1}{2}\right)+\gamma\right)$$

$$(m=2,3\ldots)$$

где $\Psi(z)$ - функция пси, γ - постоянная Эйлера. Причем $\Psi(z)\sim\ln z$ при $|z|\to\infty$, $|\arg z|<\pi$. После определения Y_{n} из бесконечной системы (20), контактные силы $\tau(ax)$ можно представить в виде

$$\tau(ax)=\frac{\lambda}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{2}{\pi}[\lambda\bar{\tau}_-(-i)+R_1]\beta_m}{2m-1}-iY_m\right)\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m)}x^{2m-1}-$$

$$-\frac{\lambda\bar{\tau}_-(-i)+R_1}{4\pi}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\qquad (0<x<1)$$

Постоянную $\bar{\tau}_-(-i)$ можно определить из (18), если положить $\alpha=-i$, то есть из уравнения

$$\bar{\tau}_-(-i)+\lambda\left(\bar{\tau}_-(-i)-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n}{n(2n+1)}\right)=-R_1$$

Решение задачи об одном горизонтальном стрингере другими методами были получены многими исследователями, перечень работ которых можно найти в [7].

Литература

1. *Попов В.Г.* Динамические и статические задачи о концентрации упругих напряжений возле пересекающихся включений. - В кн.: Смешанные задачи механики деформируемого тела. II Всесоюзн.конф. Тезисы докл. Днепропетровск, с.78-79.
2. *Григорян Э.Х.* Об одном подходе к решению задач для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение, выходящее на границу полуплоскости. - Межвуз.сб.науч.трудов, Механика, Ереван, изд. ЕГУ, 1987, № 6, с.127-133.
3. *Нобл Б.* Метод Винера-Хопфа. - М.: ИЛ, 1962.
4. *Арутюнян Н.Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. - ПММ, 1968, т.32, № 4, с.632-646.
5. *Григорян Э.Х.* Об одной задаче для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение. - Уч.записки ЕГУ, естеств.науки, 1982, № 2, с.38-43.
6. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. - М.: Наука, 1981.
7. *Григолюк Э.И., Толкачев В.М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. - М.: Машиностроение, 1980.

Ереванский университет

Поступила в редакцию 24.05.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, № 5-6, 1994 Механика

О ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ МАЛОНАПРЯЖЕННОГО НЕОДНОРОДНО-СОСТАВНОГО КЛИНА

Акопян А.Г.

Ա. Գ. Հակոբյան

Թերլարված անհամասեռ-բաղադրյալ սեպի հարթ դեֆորմացիայի մասին

Դիտարկվում է աստիճանային օրենքով ամրապնդվող, բաղադրյալ, սեպաձև մարմնի կոնտակտային մակերևույթի եզրին թերլարվածության վիճակի վրա նյութի անհամասեռության ազդեցությունը հարթ դեֆորմացիայի դեպքում

Hakobyan A.G.

On The Plane Deformation of Low-Stress Level Nonhomogeneous-Compound Wedge

Рассматривается влияние неоднородности материала на малонапряженное состояние на крае контактной поверхности составного клиновидного тела, со степенным законом упрочнения, в условиях плоской деформации. Принимаем, что одна грань клина свободна, а на другой задано условие гладкого контакта.

Решение аналогичной задачи для однородного составного клина изложено в монографии [1]. Вопросам концентрации напряжений в угловой точке составного, однородного линейно-упругого тела, при плоской деформации, посвящены работы [2,3]. Задачи малонапряженности неоднородно-состаaного клина со свободными гранями, при продольном сдвиге и плоской деформации, рассмотрены в работе [4].

1.Постановка задачи. Пусть два призматических тела, соединенные по боковым поверхностям полным прилипанием, находятся в состоянии плоской деформации. Механические характеристики обоих материалов считаются неоднородными. Одна из двух других боковых поверхностей свободна от нагрузок, а другая опирается на жесткий неподвижный штамп с плоской, абсолютно гладкой подошвой. В поперечном сечении этого тела, в окрестности угловой точки поверхности соединения, проведем полярную систему координат с центром в вершине клиновидного края поверхности.

В каждой клиновидной области имеем дифференциальные уравнения равновесия

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0 \\
\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{2}{r}\tau_{r\theta}=0
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

соотношения между компонентами деформаций и перемещений

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r},\quad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} \\
2\gamma_{r\theta}=\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}
\end{gathered} \tag{1.2}
$$

зависимости между компонентами напряжений и деформаций

$$
\begin{gathered}
\sigma_r-\sigma=2\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(\varepsilon_r-\varepsilon),\quad \sigma_\theta-\sigma=2\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(\varepsilon_\theta-\varepsilon) \\
\tau_{r\theta}=2\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\gamma_{r\theta},\quad \sigma=\frac{1}{2}(\sigma_r+\sigma_\theta)
\end{gathered} \tag{1.3}
$$

Здесь

$$
\sigma_0=\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+\tau_{r\theta}^2},\quad \varepsilon_0=\sqrt{(\varepsilon_r-\varepsilon_\theta)^2+4\gamma_{r\theta}^2}
$$

- интенсивности напряжений и деформаций, между которыми принимается зависимость

$$
\sigma_0=K\varepsilon_0^m,\quad K=K(\theta),\quad 0\le m\le 1 \tag{1.4}
$$

где функция $K(\theta)$ характеризует неоднородные деформативные свойства материалов и определяется из экспериментов. Степени упрочнения m у обоих материалов принимаются одинаковыми, а функции $K(\theta)$ - различными.

В каждой области допускается условие несжимаемости материала $\varepsilon=0$, то есть

$$
\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}=0 \tag{1.5}
$$

Принимаем край $\theta=\alpha$ свободным, то есть $\sigma_\theta=\tau_{r\theta}=0$, а на крае $\theta=-\beta$ касательное напряжение и нормальное перемещение равны нулю $\tau_{r\theta}=v=0$.

Величины в областях $0\le\theta\le\alpha$, $-\beta\le\theta\le0$ обозначим индексами $i=1,2$.

2. Случай $\lambda\ne1$. Поле перемещений в каждой области, удовлетворяющее условию несжимаемости (1.5), в окрестности точки $r=0$ представим в виде

$$u_i = r^\lambda f_i', \quad v_i = -(\lambda+1) r^\lambda f_i$$

где $f_i = f_i(\lambda,\theta)$ и λ - соответственно, искомая собственная функция и собственное значение задачи.

Компоненты напряжений представятся в виде

$$\sigma_{ri} = \sigma_{\theta i} + 4\lambda K_i r^{(\lambda-1)m} f_i' \chi_i, \quad \tau_{r\theta i} = K_i r^{(\lambda-1)m}\left[f_i'' + (1-\lambda^2) f_i\right]\chi_i$$

где

$$\chi_i = \left\{\sqrt{\left[f_i'' + (1-\lambda^2) f_i\right]^2 + 4\lambda^2 f_i'^2}\right\}^{m-1}$$

Удовлетворив дифференциальным уравнениям равновесия (1.1), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\begin{gathered}\left\{K_i\left[f_i'' + (1-\lambda^2) f_i\right]\chi_i\right\}'' + K_i\left(1-\frac{\eta^2}{\lambda^2}\right)\left[f_i'' + (1-\lambda^2) f_i\right]\chi_i + \\ +4\eta\left(K_i f_i' \chi_i\right)' = 0, \qquad \eta = \lambda[1+(\lambda-1)m]\end{gathered} \tag{2.1}$$

и к выражению

$$\sigma_{\theta i} = -\frac{r^{(\lambda-1)m}}{(\lambda-1)m}\left\{\left(K_i\left[f_i'' + (1-\lambda^2) f_i\right]\chi_i\right)' + 4\eta K_i f_i' \chi_i\right\}, \; \lambda \neq 1$$

Граничные условия на внешних поверхностях клина

$$\left(K_1\left[f_1'' + (1-\lambda^2) f_1\right]\chi_1\right)' + 4\eta K_1 f_1' \chi_1 = 0, \quad f_1'' + (1-\lambda^2) f_1 = 0 \text{ при } \theta = \alpha$$

$$f_2'' = f_2 = 0 \quad \text{при} \quad \theta = -\beta \tag{2.2}$$

на контактной поверхности

$$\left\{K_1\left[f_1'' + (1-\lambda^2) f_1\right]\chi_1\right\}' + 4\eta K_1 f_1' \chi_1 =$$

$$= \left\{K_2\left[f_2'' + (1-\lambda^2) f_2\right]\chi_2\right\}' + 4\eta K_2 f_2' \chi_2$$

$$\left[f_1'' + (1-\lambda^2) f_1\right]\chi_1 = \gamma\left[f_2'' + (1-\lambda^2) f_2\right]\chi_2, \quad \gamma = \frac{K_2(0)}{K_1(0)}$$

$$f_1 = f_2, \quad f_1' = f_2' \quad \text{при} \quad \theta = 0 \tag{2.3}$$

Система дифференциальных уравнений (2.1) с граничными условиями (2.2), (2.3) - трехточечная задача на собственные значения для определения $f_i(\lambda,\theta)$ и λ.

Полуобратным способом, придавая различные значения $\lambda=\lambda_* < 1$ из (2.1)-(2.3) численным способом определяются, в конечном счете, соотношения между параметрами α, β, γ, m и параметрами неоднородности материалов для данной степени концентрации напряжений.

При условии $\lambda=\lambda_* > 1$ в пространстве этих параметров определится область малонапряженности.

При подстановке $f_i' = f_i F_i$ снижается порядок уравнения (2.1) с граничными условиями (2.2), (2.3).

3.Случай $\lambda = 1$. В специальном исследовании нуждается случай конечных напряжений. Поле перемещений, удовлетворяющее условию несжимаемости (1.5), представим в виде

$$u_i = rf_i', \quad v_i = -2rf_i, \quad w_i = 0$$

где $f_i = f_i(\theta)$ - искомая функция θ.

Соответственно, компоненты напряжений можно записать в виде

$$\sigma_{ri} = \sigma_{\theta i} + 4K_i\psi_i\chi_i, \quad \tau_{r\theta i} = K_i\psi_i'\chi_i \tag{3.1}$$

где

$$\chi_i = \left(\sqrt{\psi_i'^2 + 4\psi_i^2}\right)^{m-1}, \quad \psi_i = f_i'(\theta)$$

Подставляя (3.1) в уравнения равновесия (1.1), приходим к выражениям

$$\sigma_{\theta 1} = 2\int_\theta^\alpha K_1\psi_1'\chi_1 d\theta, \quad \sigma_{\theta 2} = 2\left(\int_0^\alpha K_1\psi_1'\chi_1 d\theta + \int_\theta^0 K_2\psi_2'\chi_2 d\theta\right)$$

где использованы условия отсутствия нормальных напряжений на свободном крае клина и их равенство на контактной поверхности $\theta = 0$.

Для функции $\psi_i(\theta)$ получается система дифференциальных уравнений

$$\left(K_i\psi_i'\chi_i\right)' + 4K_i\psi_i\chi_i = 0 \tag{3.2}$$

с граничными условиями

$$\psi_1'(\alpha) = \psi_2'(-\beta) = 0 \tag{3.3}$$

и с условиями на контактной поверхности

$$\psi_1' \chi_1 = \gamma \psi_2' \chi_2, \quad \psi_1 = \psi_2 \quad \text{при} \quad \theta = 0 \tag{3.4}$$

где $\gamma = K_2(0)/K_1(0)$.

После некоторых преобразований из (3.2) следует

$$\left(\psi_i'' + 4\psi_i\right)\frac{m\psi_i'^2 + 4\psi_i^2}{\psi_i'^2 + 4\psi_i^2} + \frac{K_i'}{K_i}\psi_i' = 0 \tag{3.5}$$

Откуда, вводя новую функцию $\varphi_i = \psi_i' / \psi_i$, получим систему уравнений первого порядка

$$\varphi_i' = -\frac{K_i'}{K_i}\frac{\varphi_i^2 + 4}{m\varphi_i^2 + 4}\varphi_i - \varphi_i^2 - 4 \tag{3.6}$$

с граничными условиями

$$\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(-\beta) = 0 \tag{3.7}$$

Усоловие контакта (3.4) примет вид

$$\varphi_1(0)\left[\sqrt{\varphi_1^2(0) + 4}\right]^{m-1} = \gamma\varphi_2(0)\left[\sqrt{\varphi_2^2(0) + 4}\right]^{m-1} \tag{3.8}$$

Таким образом, система уравнений (3.6) с краевыми условиями (3.7), (3.8) определяет гиперповерхность конечных напряжений с учетом неоднородности материалов и физической нелинейности.

Для случая экспоненциального закона неоднородности

$$K_i(\theta) = k_i \exp(2h\theta) \tag{3.9}$$

где k_i и h_i - заданные постоянные, построено численное решение краевой задачи (3.3)-(3.5), которая устанавливает зависимость $\beta = \beta(\alpha, n, \gamma, h)$. Здесь обозначено $n = 1/m$, $\gamma = k_2/k_1$. С точки зрения численного решения, уравнения (3.6)-(3.8) оказались неудобными из-за быстрого возрастания значений функций $\varphi_i(\theta)$, что приводило к переполнению порядка числа при выполнении арифметической операции ЭВМ. Для построения численного решения задачи (3.3)-(3.5), вводя новую функцию $g(\theta)$, сначала уравнения (3.5) приводим к каноническому виду

$$\begin{aligned} \psi_i' &= g_i \\ g_i' &= -2h\frac{4\psi_i^2 + g_i^2}{4\psi_i^2 + mg_i^2} - 4\psi_i \end{aligned} \tag{3.10}$$

с трехточечными краевыми условиями:

точке $\theta = \alpha$

$$g_1(\alpha) = 0 \tag{3.11}$$

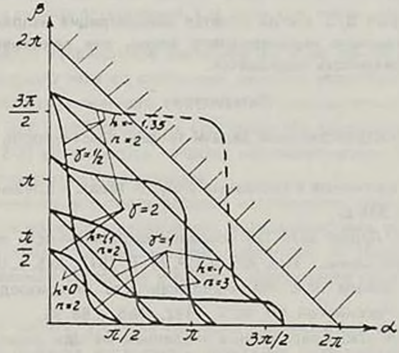
точке $\theta = 0$

$$g_1(0)\left[\sqrt{4\psi_1^2(0) + g_1^2(0)}\right]^{m-1} = \gamma g_2(0)\left[\sqrt{4\psi_2^2(0) + g_2^2(0)}\right]^{m-1}$$
$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \tag{3.12}$$

точке $\theta = -\beta$

$$g_2(-\beta) = 0 \tag{3.13}$$

Задавая произвольное значение $\psi_1(\alpha) = A$, систему уравнений (3.10) с условием (3.11) сведем к задаче Коши, которая решается методом Рунге-Кутты [5] в интервале $0 \le \theta \le \alpha$. Находя значения $\psi_1(0)$ и $g_1(0)$, из (3.12) определяем $\psi_2(0)$ и $g_2(0)$, которые, принимая как начальные условия, продолжаем численное интегрирование (3.10) до той точки $\theta_* = -\beta$, где впервые выполняется условие (3.13). Для различных значений параметра A эта точка $\theta_* = -\beta$ остается неизменной, что является следствием однородности уравнений (3.5).



фиг.1

Результаты численного решения приведены на фиг.1, откуда следует, что с изменением степени неоднородности h, зоны малонапряженности (ниже кривых) заметно изменяются, как для составного, так и для сплошного $(\gamma = 1)$ неоднородного клина.

4.Линейно-упругий неоднородно-составной клин. Если составной клин изготовлен из линейно-упругих неоднородных материалов, принимая в уравнениях (3.6)-(3.8) $m=1$ и экспоненциальный закон неоднородности (3.9), приходим к следующему трансцендентному уравнению предельных кривых малонапряженности:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\sqrt{4-h^2}\alpha\right)}{\sqrt{4-h^2}-h\operatorname{tg}\left(\sqrt{4-h^2}\alpha\right)}+\gamma\frac{\operatorname{tg}\left(\sqrt{4-h^2}\beta\right)}{\sqrt{4-h^2}+h\operatorname{tg}\left(\sqrt{4-h^2}\beta\right)}=0 \qquad (4.1)$$

Здесь соблюдается условие $|h|<2$.

Для однородного составного линейно-упругого клина, принимая $h=0$, из (4.1) следует уравнение

$$\operatorname{tg}2\alpha+\gamma\operatorname{tg}2\beta=0$$

Во время исследования случая $|h|\geq 2$ выяснилось, что гиперповерхности конечных напряжений в интеравле $0<\alpha+\beta\leq 2\pi$ не пересекаются с координатной плоскостью $\alpha\beta$ (эти уравнения не приводятся). Это означает, что при таких значениях параметра h составной линейно-упругий клин находится в состоянии малонапряженности.

В рассматриваемой задаче, если для сплошного однородного клина при растворе угла больше $\pi/2$ всегда имеется концентрация напряжений в вершине, то для сплошного неоднородного клина, как показывают графики (фиг.1), эта закономерность нарушается.

Литература

1. *Задоян М.А.* Пространственные задачи теории пластичности. - М.: Наука, 1992. 384 с.
2. *Чобанян К.С.* Напряжения в составных упругих телах. - Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1987. 338 с.
3. *Аксентян О.К., Лущик О.Н.* Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина. - Изв. АН СССР, МТТ, 1978, №5, с.102-108.
4. *Акопян А.Г., Задоян М.А.* Малонапряженность неоднородно-составных клиньев. - Изв. Российской АН, МТТ, 1992, №5, с.88-96.
5. *Холл Дж., Уатт Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1979. 312 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
1.04.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, № 5-6, 1994 Механика

О МАЛОНАПРЯЖЕННОСТИ ПЛОСКО-НАПРЯЖЕННОГО СОСТАВНОГО КЛИНА

Сафарян Н. Б

Սաֆարյան Ն.Բ.

Հարթ լարված բաղադրյալ սեպի թերլարվածության մասին

Ուսումնասիրված է բաղադրյալ մարմնի միացման մակերևույթի անկյունային կետի շրջակայքում լարումների վարքը հարթ լարվածային վիճակի դեպքում, երբ արտաքին եզրերից մեկը ազատ է լարումներից, իսկ մյուս եզրում տեղափոխությունները հավասար են զրոյի:

N.B. Safarian

Low- stress Level of Plane-stressed Composed Wedge

В случае плоского напряженного состояния при помощи местного решения исследуется поведение поля напряжений в окрестности края поверхности соединения составного тела, когда один край внешней поверхности свободен от напряжений, а на другом краю перемещения равны нулю.

Рассматривается напряженное состояние на крае контактной линии составного клиновидного тела со степенным законом упрочнения материалов в условиях плоского напряженного состояния. Фундаментальное исследование в этой области для линейно-упругих составных тел приведено в монографии [1]. В статьях [2-3] обсуждаются вопросы малонапряженности составных тел со степенным упрочнением материалов.

В теории линейной упругости плоское напряженное состояние и плоская деформация описываются одинаковыми математическими уравнениями, меняются только некоторые физические параметры. В теории пластичности плоское напряженное состояние и плоская деформация существенно отличаются.

В настоящей работе, в случае плоского напряженного состояния, при помощи местного решения исследуется поведение поля напряжений в окрестности края поверхности соединения составного тела, когда один край внешней поверхности свободен от напряжений, а на другом крае перемещения равны нулю. Аналогичная задача в случае плоской деформации рассмотрена в работе [4].

В полярной системе координат угловая точка выбрана за начало системы координат; ось $\theta = 0$ направлена по контактной поверхности, а ось z -

вдоль продольной оси тела. В каждой области поперечного сечения имеем уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{2}{r}\tau_{r\theta}=0 \tag{1}$$

Закон упрочнения

$$\sigma_0=k\varepsilon_0^m \tag{2}$$

где

$$\sigma_0=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sigma_r^2-\sigma_r\sigma_\theta+\sigma_\theta^2+3\tau_{r\theta}^2};\quad \varepsilon_0=2\sqrt{\varepsilon_r^2+\varepsilon_r\varepsilon_0+\varepsilon_\theta^2+\gamma_{r\theta}^2}$$

- соответственно, интенсивности касательных напряжений и деформации сдвига, m - показатель упрочнения. Принимается, что степени упрочнения m обоих материалов одинаковы, а модули деформации k различны.

Соотношения между компонентами деформаций, перемещений и напряжений будут

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{2}K\sigma_0^{1/m-1}(\sigma_r-\sigma)$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}=\frac{1}{2}K\sigma_0^{1/m-1}(\sigma_\theta-\sigma) \tag{3}$$

$$\gamma_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

Здесь $\sigma=1/3(\sigma_r+\sigma_\theta)$ - среднее напряжение, $K=1/k^{1/m}$ и, кроме того, принято условие несжимаемости $\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z=0$.

В каждой из клиновидных областей $-\beta\le\theta\le0$ и $0\le\theta\le\alpha$, соответственно, компоненты напряжений и перемещений представим через неизвестные функции $f_1(\theta)$, $\psi_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$, $\psi_2(\theta)$ в виде

$$\sigma_{ri}=2k_ir^{-\lambda m}\left[\psi_i''+(3-2\lambda)f_i\right]\chi_i$$

$$\sigma_{\theta i}=2k_ir^{-\lambda m}\left[2\psi_i'+(3-\lambda)f_i\right]\chi_i$$

$$\tau_{r\theta i}=k_ir^{-\lambda m}\left(f_i'-\lambda\psi_i\right)\chi_i$$

$$\chi_i=\left[4(1-\lambda)^2 f_i^2+4(1-\lambda)f_i\left(\psi_i'+f_i\right)+4\left(\psi_i'+f_i\right)^2+\left(f_i'-\lambda\psi_i\right)^2\right]^{\frac{m-1}{2}} \tag{4}$$

$$u_i=r^{1-\lambda}f_i(\theta),\quad v_i=r^{1-\lambda}\psi_i(\theta),\quad i=1,2$$

Здесь функции $f_i(\theta)$ и $\psi_i(\theta)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\left[\left(f_i'-\lambda\psi_i\right)\chi_i\right]'-2\left[(1+\lambda m)\psi_i'+\lambda(1+m(3-2\lambda))f_i\right]\chi_i=0\\ \left[\left(2\psi_i'+(3-\lambda)f_i\right)\chi_i\right]'+\left(1-\frac{1}{2}\lambda m\right)\left(f_i'-\lambda\psi_i\right)\chi_i=0\end{gathered} \tag{5}$$

Граничные условия рассматриваемой задачи будут

$$\begin{gathered}f_1(\theta)=0,\quad \psi_1(\theta)=0 \qquad \text{при}\quad \theta=-\beta\\ 2\psi_2'(\theta)+(3-\lambda)f_2(\theta)=0;\quad f_2'(\theta)-\lambda\psi_2(\theta)=0\quad \text{при}\quad \theta=\alpha\end{gathered} \tag{6}$$

На контактной поверхности имеем

$$\begin{gathered}\left[2\psi_2'(0)+(3-\lambda)f_2(0)\right]\chi_2(0)=\gamma\left[2\psi_1'(0)+(3-\lambda)f_1(0)\right]\chi_1(0)\\ \left(f_2'(\theta)-\lambda\psi_2(\theta)\right)\chi_2(\theta)=\gamma\left(f_1'(\theta)-\lambda\psi_1(\theta)\right)\quad \text{при}\quad \theta=0\\ f_1(\theta)=f_2(\theta),\quad \psi_1(\theta)=\psi_2(\theta);\quad \gamma=\frac{k_1}{k_2}\end{gathered} \tag{7}$$

Система дифференциальних уравнений (5) с условиями (6) - (7) является задачей на собственные значения для определения $f_i(\theta)$, $\psi_i(\theta)$ и λ. Придавая различные числовые значения λ из (5) - (7), численными способами определим соотношения между параметрами α, β, γ, m. При условии $\lambda<0$ в пространстве этих параметров будем иметь область малонапряженности. Принимая $\lambda=\lambda_*>0$, находим гиперповерхности одинаковых степеней концентрации напряжений

$$F\left(\alpha,\beta,\gamma,m,\lambda_*\right)=0$$

В случае $\lambda=0$, то есть при конечных напряжениях, решение системы (1) - (3) представится в виде

$$\begin{gathered}\sigma_{ri}=2k_i\left(\psi_i'+3f_i\right)\chi_i,\quad \sigma_{\theta i}=2k_i\left(2\psi_i'+3f_i\right)\chi_i\\ \tau_{r\theta i}=k_i f_i'\chi_i,\quad \chi_i=\left[f_i'^2+4\left(f_i^2+3f_i\psi_i'+\psi_i'^2\right)\right]^{\frac{m-1}{2}}\\ u_i(r,\theta)=rf_i(\theta),\quad v_i(r,\theta)=r\psi_i(\theta)\end{gathered} \tag{8}$$

Приведенные выражения компонентов напряжений и перемещений (8) будут решениями системы уравнений (1)- (3), если $f_i(\theta)$ и $\psi_i(\theta)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\left(f_i'\chi_i\right)' - 2\psi_i'\chi_i = 0 \\
&\left[\left(2\psi_i' + 3f_i\right)\chi_i\right]' + f_i'\chi_i = 0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

При смешанных граничных условиях, то есть когда одна из поверхностей, образующих ребро, свободна от напряжений, а другое ребро жестко закреплено, имеем

$$
\begin{aligned}
&f_1(-\beta) = 0, \quad \psi_1(-\beta) = 0 \\
&2\psi_2'(\alpha) + 3f_2(\alpha) = 0, \quad f_2'(\alpha) = 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

На контактной поверхности имеем

$$
\begin{aligned}
&\left(2\psi_2'(\theta) + 3f_2(\theta)\right)\chi_2(\theta) = \gamma\left(2\psi_1'(\theta) + 3f_1(\theta)\right)\chi_1(\theta) \\
&f_1(\theta) = f_2(\theta), \quad \psi_1(\theta) = \psi_2(\theta) \quad \text{при} \quad \theta = 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Система дифференциальных уравнений (9) с граничными условиями (10) - (11) определяет гиперповерхность $F(\alpha, \beta, \gamma, m, 0) = 0$ конечных напряжечий, отделяющую зону малонапряженности от зоны сильной концентрации.

Для построения этой поверхности удобно свести систему дифференциальных уравнений (9)-(11) к системе из четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$
\begin{aligned}
&\psi_i' = \frac{1}{2}\left(F_i - 3f_i\right), \quad f_i' = \tau_i, \quad F_i' = \Phi_i \\
&\tau_i' = \frac{I_i\left(F_i - 3f_i\right) + (1-m)\tau_i\left(F_i\Phi_i + 3f_i\tau_i\right)}{I_i + (m-1)\tau_i^2} \qquad i = 1,2
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где обозначено

$$
\begin{aligned}
&I_i = \tau_i^2 + F_i^2 + 3f_i^2 \\
&\Phi_i = \left\{(1-m)F_i\tau_i\left[3(m-1)f_i\tau_i^2 - I_i\left(F_i - 3f_i\right)\right] + \right. \\
&\left. +\left[I_i\tau_i + 3(m-1)f_iF_i\tau_i\right]\left[I_i + (m-1)\tau_i^2\right]\right\} \Big/ \left\{(1-m)^2F_i^2\tau_i^2 - \right. \\
&\left. -\left[I_i + (m-1)F_i^2\right]\left[I_i + (m-1)\tau_i^2\right]\right\}, \qquad i = 1,2
\end{aligned}
$$

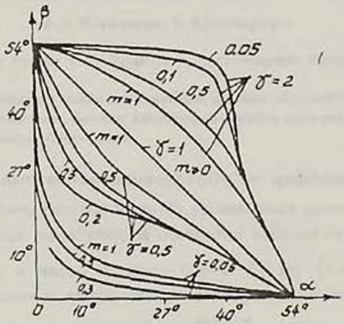
Граничные условия для системы (12) будут

$$f_1(\theta)=0, \quad \psi_1(\theta)=0 \quad \text{при} \quad \theta=-\beta$$
$$F_2(\theta)=0, \quad \tau_2(\theta)=0 \quad \text{при} \quad \theta=\alpha \tag{13}$$

На контактной поверхности имеем

$$F_2(\theta)\chi_2(\theta)=\gamma F_1(\theta)\chi_1(\theta), \quad \tau_2(\theta)\chi_2(\theta)=\gamma\tau_1(\theta)\chi_1(\theta),$$
$$f_1(\theta)=f_2(\theta), \quad \psi_1(\theta)=\psi_2(\theta) \quad \text{при} \quad \theta=0 \tag{14}$$

Рассмотрим сначала случай $\gamma>1$, то есть когда более жесткий материал закреплен. На фиг. 1 показаны ближайшие к началу координат кривые, для которых степень упрочнения m, определяемая системой (12)-(14), велика. При $\gamma\to 1$, для произвольной степени упрочнения m, эти кривые вырождаются в прямую $\alpha+\beta=54^0$, что соответствует величине угла, разграничивающего области конечных и бесконечных напряжений в вершине однородного клина с углом $\alpha+\beta$. Причем, область конечных напряжений в этом случае соответствует углам $0<\alpha+\beta\le 54^0$.



фиг. 1

Для $\gamma<1$, то есть когда более жесткий материал имеет свободную от напряжений поверхность, граничные кривые, определяемые уравнениями (12)-(14), показаны на фиг. 1 при разных значениях степени упрочения m. При значениях $\gamma=\gamma_* <1$ эти кривые более и более приближаются к координатным осям с уменьшением степени упрочнения m.

Из характера изменения этих кривых заключаем, что при уменьшении степени упрочнения m зона малонапряженности увеличивается, если закреплен край клина из более сильного материала, и наоборот, зона уменьшается, если закреплен край клина из более слабого материала.

Автор благодарит А. Оганнисяна за помощь в проведении численных расчетов.

Литература

1. *Чобанян К.С.* Напряжения в составных упругих телах. - Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1987. 380 с.
2. *Задоян М. А.* Некоторые задачи концентрации напряжений в угловой точке контактной поверхности составного тела со степенным упрочнением. - Докл.АН АрмССР, 1982, т.74, № 1, с.18-25.
3. *Задоян М.А.* Пространственные задачи теории пластичности. - М.: Наука, 1992. 712 с.
4. *Аксентян О.К. Лущик О.Н.* Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина. - МТТ, 1978, № 5, с.102-108.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию

8.04. 1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, № 5-6, 1994 Механика

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО МАНИПУЛЯТОРА

Гукасян А.А., Барсегян В.Р.

Ա. Ա. Ղուկասյան, Վ. Ռ. Բարսեղյան

Էլեկտրոմեխանիկական մանիպուլյատորի դինամիկայի հակադարձ խնդիրը

Օգտվելով հակադարձ խնդիրների լուծման դասական մեթոդներից, ուսումնասիրվում է բազմօղակ էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի շարժումը տված դիֆերենցիալ և հոլոնոմ ծրագրով:

A.A.Ghukasyan, V.R.Barseghian

Reverse Problem of the Dynamics for Electro-magnetic Manipulator

В работе, с использованием классических методов решения обратной задачи динамики [1-5 и др.], исследовано движение многозвенного электромеханического манипулятора по заданной дифференциальной и по голономной программе.

1. Управление движением манипулятора по дифференциальной и голономной программе. Рассматривается управляемое движение N-звенного манипулятора. Звенья манипулятора считаются абсолютно твердыми телами, линейные размеры и массы которых равны l_i, m_i $(i=1,2,\dots N)$, соответственно. Обобщенные координаты, определяющие ее конфигурацию в инерциальной системе координат $OXYZ$, обозначим через q_i $(i=1,2,\dots,n;\ n\geq N)$. Положение схвата, как абсолютно твердое тело, в пространстве определим через вектор $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$. Компоненты вектора x являются декартовые координаты центра масс твердого тела и углы Эйлера. Движение манипулятора осуществляется посредством электромеханических приводов, с двигателями постоянного тока с независимым возбуждением и редуктора, расположенных в соединительных шарнирах звеньев манипулятора и в основании. Предполагается, что оси вращения роторов электродвигателей и оси выходных валов редукторов приводов совпадают с осями шарниров. Электромеханические силы и моменты, действующие на манипулятор, обозначим через $n_i Q_i$ $(i=1,2,\dots,n)$. Между усилиями Q_i и значениями сил тока (I_i) в цепях роторов приводов имеется следующая связь:

$Q_i = k_i I_i \; (i = 1,2,\ldots,n)$. Уравнения баланса напряжений в цепях роторов электродвигателей приводятся к виду [6]

$$L_i \dot{Q}_i + R_i Q_i + k_i^2 n_i \dot{q}_i = k_i u_i \quad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{1.1}$$

где L_i- коэффициент индуктивности, R_i- электрическое сопротивление обмотки ротора электродвигателя, k_i- коэффициент пропорциональности между электрическим током и усилиями Q_i; n_i - передаточное число редуктора, u_i- электрическое напряжение, подаваемое на вход электродвигателя i -го привода.

Пусть задана программа движения выходного звена манипулятора в виде

$$\Phi_k\left(x_1,\ldots,x_m,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_m\right) = 0 \quad \left(k = 1,\ldots,r;\; r \le m \le 6\right) \tag{1.2}$$

Учитывая из кинематики манипуляторов известную связь [7] между координатами схвата и обобщенных координат манипулятора, программу движения схвата (1.2) представим в виде:

$$\Phi_k^*\left(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n\right) = 0 \quad \left(k = 1,\ldots,r;\; r \le n\right) \tag{1.3}$$

Уравнение движения электромеханического манипулятора представим системой механических уравнений Лагранжа и уравнений баланса напряжений в цепях роторов электродвигателей [5-7]:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\left(q_i, c_s\right)\ddot{q}_i + B_j\left(q_i, \dot{q}_i, c_s\right) = n_j Q_j \\ L_j \dot{Q}_j + R_j Q_j + k_j^2 n_j \dot{q}_j = k_j u_j \quad \left(j = 1,\ldots n\right) \end{gathered} \tag{1.4}$$

где c_s - постоянные параметры манипулятора.

Механические уравнения запишем в форме Коши:

$$\begin{gathered} \dot{q}_i = p_i \\ \dot{p}_i = f_i\left(q_i, p_i, c_s\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\left(q_i, p_i, c_s\right) Q_j \end{gathered} \tag{1.5}$$

Следуя [1-4], применяя метод о построении дифференциальных уравнений по заданному частному решению, к решению обратных задач динамики для построения алгоритмов и систем управления,условия осуществимости программы (1.3) для системы (1.5) запишем в виде:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi_k^*}{\partial q_i} p_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi_k^*}{\partial p_i}\Big[f_i\left(q_i, p_i, c_s\right) + \\ + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\left(q_i, p_i, c_s\right) Q_j \Big] = R_k^* \quad \left(k = 1,\ldots,r\right) \end{gathered} \tag{1.6}$$

де $R_k^*(f_i, q_i, p_i)$ - произвольные функции, обращающиеся в нуль на многообразии $\Phi_k^* = 0$ $(k = 1,\ldots,r)$.

Система уравнений (1.6) является линейной относительно неизвестных функций p_i $(i = 1,\ldots,n)$. Число искомых функций равно n, а число уравнений - r $(r \le n)$. Решая систему уравнений (1.6) относительно $\dot{p}_i$, получим искомое множество систем дифференциальных уравнений:

$$\dot{q}_i = p_i, \quad \dot{p}_j = \sum_{k=1}^{r} \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} R_k^* - \sum_{s=r+1}^{n} \frac{\Delta_{ks}}{\Delta} F_s \tag{1.7}$$

$$\dot{p}_s = F_s \quad \left(i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,r;\ s = r+1,\ldots,n\right)$$

Здесь функции $F_s(s = r+1,\ldots,n)$ являются произвольными и вместе с функциями $R_k^*(k = 1,\ldots,r)$ обращаются в нуль на многообразиях $\Phi_k^* = 0$; Δ - функциональный определитель системы (1.6), который не равен нулю в силу независимости функций Φ_k^* $(k = 1,\ldots,r)$; Δ_{jk} - алгебраическое дополнение элемента определителя Δ; Δ_{ks} - определитель, полученный из определителя Δ заменой его k-го столбца s-м столбцом матрицы $\left[\dfrac{\partial\Phi_k^*}{\partial q_i} \ \dfrac{\partial\Phi_k^*}{\partial p_i}\right]$.

Оставшиеся функции F_s $(s = r+1,\ldots,n)$ могут быть использованы для выполнения дополнительных условий. Такими условиями могут быть условия оптимальности, устойчивости, точности и т.д.

Так как уравнения (1.6) относительно Q_i являются r линейных уравнений с n неизвестными, то имеется возможность относительно управляющих усилий Q_i вводить дополнительное условие оптимальности, например,

$$Z = \sum_{j=1}^{n} Q_j^2(t) \to \min, \quad t \in [t_0, T] \tag{1.8}$$

Здесь T - окончание процесса управления.

Применяя метод неопределенных коэффициентов Лагранжа для решения задачи условного экстремума (1.6), (1.8), получим для Q_i следующие выражения:

$$Q_j = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial\Phi_k^*}{\partial p_i} b_{ij} \quad (j = 1,\ldots,n) \tag{1.9}$$

где неопределенные множители λ_k определяются из следующей системы уравнений:

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\Phi_k^*}{\partial p_i}b_{il}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Phi_s^*}{\partial p_l}b_{lj}\right)\right]=$$
$$=R_s^*-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi_s^*}{\partial q_i}p_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi_s^*}{\partial p_i}f_i\qquad(s=1,\dots,r)\tag{1.10}$$

Обозначая главный определитель системы уравнений (1.10) через Δ и предполагая, что $\Delta\neq 0$, а через Δ_k - определитель, полученный из определителя Δ заменой k-го столбца правой частью системы уравнений (1.10), и учитывая, что $R_s^*=0$ на многообразии $\Phi_k^*=0$, из (1.9) и (1.10), получим оптимальное значение управляющих усилий:

$$Q_j^0=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\frac{\Delta_k}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi_k^*}{\partial q_i}b_{ij}\qquad(j=1,\dots,n)\tag{1.11}$$

Подставляя выражения для Q_j^0 из (1.11) во второе уравнение системы (1.4), получим значение входного напряжения u_j^0 электрического тока

$$u_j^0=\frac{1}{k_j}\left(L_j\dot{Q}_j^0+R_jQ_j^0+k_j^2n_j\dot{q}_j\right)\qquad(j=1,\dots,n)\tag{1.12}$$

при которых электромеханические приводы обеспечивают движение манипулятора по заданной программе.

В случае голономной программы выражения (1.3) имеют вид:

$$\Phi_k^*(q_1,q_2,\dots,q_n)=0\qquad(k=1,\dots,r,\ r\leq n)\tag{1.13}$$

Основное условие осуществимости программы (1.13), описываемой уравнениями (1.8), получим путем дифференцирования программы (1.13) в силу (1.5) [3]:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi_k^*}{\partial q_i}\left[f_i(q_s,p_s,c_s)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(q_s,p_s,c_s)Q_j\right]+$$
$$+\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi_k^*}{\partial q_s\partial q_l}p_sp_l=R_k^*\qquad(k=1,\dots,r)\tag{1.14}$$

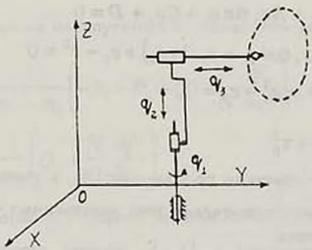
Дальнейшие исследования задачи при голономной программе следуют из вышерассмотренного общего случая.

Имеет смысл рассматривать также частный случай (1.12), когда $L_i<<R_i$. В терминах физических параметров это неравенство означает, что время $\tau_i=L_i/R_i$ $(i=1,\dots,n)$ установления токов в цепях электродвигателей

много меньше времени рабочей операции [6]. При этом управляющие напряжения u_i^0 в нулевом приближении определяются из соотношения

$$u_i^0 = \frac{1}{k_i}\left(R_i Q_i^0 + k_i^2 n_i \dot{q}_i\right) \quad (i = 1,\ldots,n) \tag{1.15}$$

2. Движение трехзвенного электромеханического манипулятора по эллиптической траектории с постоянной скоростью. Рассматривается движение электромеханического манипулятора с тремя степенями подвижности. Звенья манипулятора совершают одну вращательную и два поступательных движения (фиг. 1). Требуется определить входные напряжения электрического тока приводов и соответствующие управляющие усилия для обеспечения движения схвата манипулятора по произвольно заданной эллиптической траектории с постоянной скоростью.



Фиг. 1

Механические уравнения манипулятора (1.4) в форме Коши имеют следующий вид:

$$\dot{q}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = f_i + b_{ii} Q_i \quad (i = 1,2,3) \tag{2.1}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$b_{11} = n_1/\left(J_z + m_3 q_3^2\right); \quad b_{22} = n_2/\left(m_2 + m_3\right); \quad b_{33} = n_3/m_3$$

$$f_1 = -\left(b_1 p_1 + 2m_3 q_3^2 + p_1 p_3\right)/\left(J_z + m_3 q_3^2\right); \quad f_2 = -b_2 p_2/\left(m_2 + m_3\right)$$

$$f_3 = -\left(b_3 p_3 - m_3 p_1^2 q_3\right)/m_3$$

где $J_z = J_1 + J_2 + J_3$ (J_1, J_2, J_3 - моменты инерции звеньев относительно центральных осей параллельных оси oz); m_2, m_3 - массы второго и третьего звеньев, b_i - коэффициенты трения соединительных шарниров, $n_i Q_i$ - электромеханические силы и моменты, развиваемые приводами.

Эллиптическую траекторию в системе координат $OXYZ$ зададим в виде пересечения кругового цилиндра и плоскости:

$$Ax + By + Cz + d = 0; \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0 \tag{2.2}$$

Условия движения схвата с постоянной скоростью являются

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v_0^2 \tag{2.3}$$

Используя связь между обобщенными координатами манипулятора и декартовыми координатами схвата ($x = q_3 \cos q_1$, $y = q_3 \sin q_1$, $z = q_2$), программы (2.2), (2.3) представим в виде

$$\begin{aligned}
&\Phi_1^* = Aq_3 \cos q_1 + Bq_3 \sin q_1 + Cq_2 + D = 0 \\
&\Phi_2^* = q_3^2 - 2q_3(x_0 \cos q_1 + y_0 \sin q_1) + c_2 - r^2 = 0 \\
&\Phi_3^* = p_2^2 + p_3^2 + p_1^2 q_3^2 - c_3 = 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где $c_2 = x_0^2 + y_0^2$, $c_3 = v_0^2$

Из условия осуществимости программы (1.6), в рассматриваемом случае получим три уравнения относительно трех независимых Q_i $(i = 1,2,3)$, которые, решая, будем иметь:

$$\begin{aligned}
&Q_1 = \{f_2 p_2 C\sigma_{23} + (p^2 + q_3^2 p_1^2) p_2 \sigma_{13} + (p_1 p_3 + q_3 f_1) q_3^2 p_1 C - \\
&- Cq_3^3 - (2p_1 p_3 + q_3 f_1)[(Ay_0 - Bx_0) p_2 + q_3 p_2 \sigma_{11} + p_3 C\sigma_{21} + \\
&+ q_3 p_1 C\sigma_{23}]\} \times \{b_{11} q_3 [q_3 \sigma_{11} + (Ay_0 - Bx_0)] p_2 + \\
&+ b_{11} q_3 C(\sigma_{21} p_3 - q_3^2 p_1 + q_3 p_1 \sigma_{23})\}^{-1} \\
&Q_2 = \{\sigma_{13}(p_3^2 + q_3^2 p_1^2) - (q_3 - \sigma_{23}) C f_2 - (2p_1 p_3 + q_3 f_1)[q_3 \sigma_{11} + \\
&+ (Ay_0 - Bx_0)] + b_{11} q_3 [q_3 \sigma_{11} - (Bx_0 - Ay_0)] Q_1\} \times \\
&\times [Cb_{22}(q_3 - \sigma_{23})]^{-1} \\
&Q_3 = [-(2p_1 p_3 + q_3 f_1)\sigma_{21} - (q_3 p_1^2 - f_3)\sigma_{23} - \\
&- (p_3^2 + q_3 f_3) - b_{11} q_3 \sigma_{21} Q_1][b_{33}(q_3 - \sigma_{23})]^{-1}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$\sigma_{11} = -A\sin q_1 + B\cos q_1; \quad \sigma_{13} = -\frac{d\sigma_{11}}{dq_1}$$

$$\sigma_{21} = x_0\sin q_1 - y_0\cos q_1; \quad \sigma_{23} = \frac{d\sigma_{21}}{dq_1}$$

Подставляя выражения (2.5) в уравнения баланса напряжений (1.12), определим управляющие напряжения для обеспечения движения схвата по эллиптической траектории с постоянной скоростью (2.4).

3. **Решение обратной задачи динамики электромеханического манипулятора, выполняющей обработку поверхности.** Построим алгоритм управления двухзвенного электромеханического манипулятора, имеющий две поступательные пары для обработки поверхности при заданной нормальной силе в точке контакта.

Механическое уравнение манипулятора в нормальном виде является:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= p_1, \quad \dot{p}_1 = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(-P_1 - P_2 + Q_1 + \frac{N}{G}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) \\ \dot{q}_2 &= p_2, \quad \dot{p}_2 = \frac{1}{m_2}\left(Q_2 + \frac{N}{G}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

где m_1, m_2 - массы первого и второго звеньев манипулятора; P_1, P_2 - силы тяжести первого и второго звеньев; Q_1, Q_2 - электромеханические силы, развиваемые приводами манипулятора в первом и во втором шарнирах; N - модуль вектора нормальной силы в точке контакта инструмента и детали; $f(q_1, q_2) = 0$ - уравнение кривой, по которой необходимо осуществить движение инструмента; $G = |\mathrm{grad}\, f(q_1, q_2)|$.

Из (1.14) следует, что для выполнения программы $f(q_1, q_2) = 0$, имеем одно уравнение относительно двух неизвестных Q_1 и Q_2. Для полного определения управляющих воздействий Q_1, Q_2, вводится также дополнительное условие оптимальности

$$Z = \sum_{i=1}^{k} Q_i^2(t) \to \min \qquad t \in [t_0, T] \tag{3.2}$$

Решая полученную задачу условного экстремума, имеем:

$$Q_1^0 = -\frac{\lambda}{2}\frac{1}{m_1 + m_2}\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad Q_2^0 = -\frac{\lambda}{2}\frac{1}{m_1}\frac{\partial f}{\partial q_2} \tag{3.3}$$

где

$$\lambda=\left[\frac{2}{m_1}\frac{N}{G}\left(\frac{\partial f}{\partial q_2}\right)^2+\frac{1}{m_1+m_2}\frac{\partial f}{\partial q_1}\left(-P_1-P_2-\frac{N}{G}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i-R^*\right]\left[\left(\frac{1}{m_1}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{1}{m_1+m_2}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)^2\right]^{-1} \quad (3.4)$$

Для определения управляющих напряжений u_i^0, подставим выражени (3.3), (3.4) при $R^*=0$ в уравнение (1.12).

Пусть закон изменения нормальной силы при обработке поверхности имеет вид

$$\dot{N}=\mu\left(N-N_{пр}\right) \quad (3.5)$$

где $\mu<0$, $N_{пр}$ - программное значение силы реакции поверхности в точ контакта.

В частном случае $L_i << R_i$ и при условий (3.5), для управляющих напр жений имеем выражения:

$$u_1^0=\frac{1}{k_1}\left[L_1\varphi_1\mu\left(N-N_{пр}\right)+\left(L_1\dot{\varphi}_1+R_1\varphi_1\right)\mu+\right.$$
$$\left.+L_1\dot{\varphi}_2+R_1\varphi_2\right]+n_1k_1\dot{q}_1$$
$$u_2^0=\frac{1}{k_2}\left[L_2\varphi_3\mu\left(N-N_{пр}\right)+\left(L_2\dot{\varphi}_3+R_3\varphi_3\right)\mu+\right. \quad (3.$$
$$\left.+L_2\dot{\varphi}_4+R_2\varphi_4\right]+k_2n_2\dot{q}_2$$

где

$$\varphi_1=\frac{1}{m_1+m_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\psi_1,\quad \varphi_2=-\frac{1}{m_1+m_2}\frac{\partial f}{\partial q_1}\psi_2$$
$$\varphi_3=-\frac{1}{m_1}\frac{\partial f}{\partial q_2}\psi_1,\qquad \varphi_4=-\frac{1}{m_1}\frac{\partial f}{\partial q_2}\psi_2$$

$$\psi_1=\left[\frac{1}{m_1+m_2}\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)^2-\frac{1}{m_1}\left(\frac{\partial f}{\partial q_2}\right)^2\right]\left[G\left(\frac{1}{m_1}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+G\left(\frac{1}{m_1+m_2}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)^2\right]^{-1}$$

$$\psi_2 = \left[\frac{P_1 + P_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \right)^2 - \sum_{i=1}^{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i \right] \left[\left(\frac{1}{m_1} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{m_1 + m_2} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right)^2 \right]^{-1}$$

Обработку поверхности в подобных задачах можно считать завершенной, если сила реакции в точке контакта инструмента достигает своего программного значения. Следить за уменьшением силы реакции можно с помощью датчика усилий, расположенного на схвате манипулятора.

Литература

1. *Галиуллин А.С.* Обратные задачи динамики. - М.: Наука, 1981.
2. *Петров Б.Н., Крутько П.Д., Попов Е.П.* Построение алгоритмов управления как обратная задача динамики. - ДАН СССР, 1979, т. 247, №5, с. 1078-1081.
3. Механика промышленных роботов. В 3-х томах. /Под ред. К.В.Фролова, Е.И.Воробьева/. - М.: Высшая школа, 1988.
4. *Крутко П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. - М.: Наука, 1988.
5. *Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г.* Манипуляционные роботы. - М.: Наука, 1989.
6. *Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н.* Синтез оптимального управления транспортными движениями манипуляционных роботов. - Изв. АН СССР, МТТ, №4, 1986, с. 21- 29.
7. *Гукасян А.А.* Об оптимальном управлении манипулятором с электромеханическими приводными системами. - ЕГУ, Межвуз. сборн. науч. трудов. Прикладная математика, 1988, вып. 7, с. 86-105.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию 10.08.1992

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, N° 5-6, 1994 Механика

К УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ ОРТОТОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Киракосян Р.М.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

Փոփոխական հաստության գլանային օրթոտրոպ սալերի ճշգրտված տեսության մասին

Առաջարկվում է փոփոխական հաստության գլանային օրթոտրոպ սալի ճշգրտված տեսության մի տարբերակ, որը հաշվի է առնում լայնական սահքի դեֆորմացիաների ազդեցությունը:

Kirakosian R.M.

On the Improved Theory Cylindrical Ortotropic Plates of Variable Thickness

Предлагается один вариант уточненной теории цилиндрически ортотропных пластин переменной толщины, учитывающий влияние деформаций поперечных сдвигов.

В настоящее время существуют много вариантов уточненной теории анизотропных пластин, учитывающих влияние деформаций поперечных сдвигов. Несмотря на разницу подходов и степени строгости, все эти варианты для прогибов, частот собственных колебаний и критических сил пластинки дают практически одинаковые значения. Поэтому, если необходимо определить только отмеченные величины, то можно применить любой вариант уточненной теории. Если же из соображений прочности современных анизотропных материалов нужно определить еще и поперечные касательные напряжения, которые уже становятся расчетными, то в обязательном порядке следует применить такую уточненную теорию, в которой эти напряжения на поверхностях пластинки удовлетворяют заданным условиям. Для анизотропных пластин переменной толщины известны два основных таких вариантов [1]. В одном из них уточненная теория пластинок постоянной толщины [2] просто распространяется на случай пластинки переменной толщины. Для поперечных касательных напряжений принимаются такие параболические законы распределения по толщине, которые удовлетворяют условиям на поверхностях пластинки. Эти законы содержат поверхностные значения основных напряжений. В силу этого дальнейшие процедуры приводят к таким выражениям обобщенного закона Гука, в которых фигурируют поверхностные значения частных производных основных напряжений. При решении конкретных задач рекомендуется исключить эти значения из дифференциальных уравнений равновесия сплошной среды, записанных на поверхностях пластинки. Оставляя в стороне вопросы корректности двукратного удовлетворения поверхностным условиям, отметим лишь то, что при таком подходе не удается написать систему разрешающих уравнений задачи в окончательном виде и что получение решений конкретных задач крайне затруднено.

Сущность второго варианта заключается в следующем. Считается, что по толщине пластинки тангенциальные перемещения меняются линейно, а поперечные касательные напряжения - такими параболическими законами, которые содержат две произвольные функции и обеспечивают удовлетворение условиям на поверхностях пластинки. Далее эти функции определяются так, чтобы принятые независимые друг от друга законы распределения перемещений и напряжений каким-то образом связывались бы между собой. С этой целью, например, приравнивают работы поперечных касательных напряжений и перерезывающих сил пластинки или производят минимизацию интегралов от квадрата разностей тангенциальных перемещений или касательных напряжений, соответствующих двум группам принятых законов распределения и т.д. В любом случае для произвольных функций получаются очень громоздкие выражения, что существенно осложняет решение конкретных задач.

В работе [3] на примере прямолинейной ортотропии предложен один вариант уточненной теории пластинок переменной толщины, в которой также поперечные касательные напряжения удовлетворяют заданным поверхностным условиям. Эта теория позволяет написать в окончательном виде разрешающие уравнения плоской задачи и задачи изгиба пластинки и отличается существенной простотой.

1. Рассмотрим круглую пластинку переменной толщины h, обладающую цилиндрической ортотропией. Пластинку отнесем к системе цилиндрических координат r, θ, z, направив ось z вертикально вниз. Пусть пластинка несет поперечную нагрузку, интенсивности которой на поверхностях $z=+h/2$ и $z=-h/2$, приведенные к единице площади срединной плоскости, составляют Z^+ и Z^-, соответственно. Условия крепления краев пластинки произвольны. По аналогии [3] будем исходить из следующих допущений:

а) нормальные к срединной плоскости пластинки перемещения не зависят от координаты z;

б) нормальным напряжением σ_z на площадках, параллельных срединной плоскости, можно пренебречь;

в) касательные напряжения τ_{rz} и $\tau_{\theta z}$ по толщине пластинки меняются по законам

$$\tau_{rz}=\varphi_1+z\varphi_2+z^2\varphi_3, \quad \tau_{\theta z}=\psi_1+z\psi_2+z^2\psi_3 \tag{1.1}$$

где φ_i и ψ_i - неизвестные функции координат r и θ. Нетрудно заметить, что для обеспечения непротиворечивости дифференциальных уравнений равновесия сплошной среды, необходимо в выражениях напряжений σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$, следовательно, и перемещений u_r, u_θ, сохранить лишь члены, линейные по поперечной координате z. Это приведет к согласованным распределениям напряжений по толщине пластинки - линейному распределению основных напряжений будет соответствовать параболическое распределение поперечных касательных напряжений. Как показывает анализ решений конкретных задач [7], такой подход без заметного ущерба в точности вносит существенное упрощение. В результате этого, удается из поверхностных условий пластинки исключить четыре функции φ_2, φ_3, ψ_2, ψ_3. Относительно остальных пяти функций u, v, w, φ_1, ψ_1 получается разрешающая система дифференциальных уравнений десятого порядка. Подобно случаю пластинок постоянной толщины [2], эта система распадается на две системы, одна из которых относится к плоской задаче, а другая - к задаче изгиба пластинки.

Общий порядок разрешающих систем уравнений плоской задачи и задачи изгиба предлагаемой уточненной теории, подобно случаю пластинок постоянной толщины [2], равен десяти. В соответствии с этим, на каждом крае пластинки следует ставить по пять условий - два для плоской задачи, три - для задачи изгиба.

Условия свободного и шарнирно опертого краев формулируются обычным образом [2]. Несколько иначе выглядят условия заделки, поскольку в рамках изложенной теории удается обеспечить равенство нулю радиального перемещения во всех точках контурного сечения пластинки. Условия заделанного края можно представить в виде

$$u = 0, \quad v = 0 \qquad \text{(условия плоской задачи)} \tag{1.2}$$

$$\left.\begin{aligned} & w = 0, \ \frac{\partial w}{\partial r} - a_r\varphi_1 = 0 \\ & \frac{\partial w}{\partial \theta} - a_\theta r\psi_1 = 0 \end{aligned}\right| \qquad \text{(условия задачи изгиба)} \tag{1.3}$$

Забегая вперед, отметим, что применение предложенной теории к пластинкам постоянной толщины, подобно случаю прямолинейной ортотропии [7], здесь также приводит к приемлемым результатам. Во всех рассмотренных задачах значения поперечных касательных напряжений точно, а прогиб пластинки - практически, совпадают с соответствующими результатами теории [2].

2. Рассмотрим круглую кольцевую пластинку с внутренним и внешним радиусами a и b, толщина которой в радиальном направлении меняется по линейному закону

$$h = h_0 + h_1 r \tag{2.1}$$

Здесь h_0 и h_1 - заданные параметры. Пусть пластинка несет только равномерно распределенную поперечную нагрузку $Z_2 = q$. Граничные условия таковы, что пластинка испытывает осесимметричное деформирование. Так как плоская задача не отличается от соответствующей задачи классической теории пластинок, то в дальнейшем будем рассматривать только задачу изгиба. Отметим, что в силу осесимметричности, из пяти функций w, φ_1, φ_3, ψ_1, ψ_3, описывающих изгиб пластинки, последние две тождественно равны нулю. И, поскольку функция φ_3 выражается через w и φ_1, то решение задачи осесимметричного изгиба пластинки сводится к отысканию лишь двух функций.

Введем обозначения:

$$z = h_0\delta, \quad r = \rho b, \quad \frac{h_0}{b} = s, \quad \frac{h_1}{s} = \gamma, \quad \frac{a}{b} = k, \quad h = h_0 H$$

$$\sqrt{\frac{B_\theta}{B_r}} = m, \quad \frac{B_r}{\sigma_0} = n, \quad a_r\sigma_0 = l, \quad \frac{\sigma q}{n\sigma_0 s^3} = q^*, \quad u_r = h_0\overline{u}$$

$$w = h_0\overline{w}, \quad \frac{d\overline{w}}{d\rho} = \alpha, \quad \varphi_1 = \sigma_0 t, \quad s\alpha - lt = y, \quad N_r = \overline{N}_r\sigma_0 h_0$$

$$M_r = \overline{M}_r\sigma_0 h_0^2, \quad M_\theta = \overline{M}_\theta\sigma_0 h_0^2$$

Здесь ρ - безразмерная радиальная координата, σ_0 - характерное напряжение материала пластинки. Величины $\overline{u}$, H, $\overline{N}_r$, $\overline{M}_r$, $\overline{M}_\theta$ определяются формулами:

$$\overline{u} = -\delta y, \quad H = 1 + \gamma\rho$$

$$\overline{N}_r = \frac{H}{12}\left[8t - n\gamma s^2 H\left(\frac{dy}{d\rho} + \nu_r m^2 \frac{y}{\rho}\right)\right] \tag{2.3}$$

$$\overline{M}_r = -\frac{nsH^3}{12}\left(\frac{dy}{d\rho} + \nu_r m^2 \frac{y}{\rho}\right), \quad \overline{M}_\theta = -\frac{nsm^2H^3}{12}\left(\nu_r \frac{dy}{d\rho} + \frac{y}{\rho}\right)$$

Имея в виду, что в рассмотренном случае

$$\overline{N}_r = -\frac{q^* ns^2}{12\rho}\left(\rho^2 - k^2\right) \tag{2.4}$$

для функции t получим

$$t = \frac{ns^2\gamma H}{8}\left(\frac{dy}{d\rho} + \nu_r m^2 \frac{y}{\rho}\right) - \frac{q^* ns^2\left(\rho^2 - k^2\right)}{8H\rho} \tag{2.5}$$

Пользуясь осесимметричностью, можно понизить порядок разрешающих уравнений. Подставив выражения $\overline{M}_r$, $\overline{M}_\theta$ и $\overline{N}_r$ в четвертое уравнение равновесия дифференциального элемента пластинки [2] относительно функции y, получим следующее уравнение второго порядка:

$$(1+\gamma\rho)\rho^2 \frac{d^2 y}{d\rho^2} + (1+4\gamma\rho)\rho\frac{dy}{d\rho} - m^2\left[1+(1-3\nu_r)\gamma\rho\right]y = \frac{q^*\rho(\rho^2-k^2)}{(1+\gamma\rho)^2} \quad (2.6)$$

3. Рассмотрим сплошную пластинку радиуса R. Положим

$$r = c\rho, \quad \frac{h_0}{c} = s \quad (3.1)$$

где c - неизвестная постоянная размерности длины. Остальные же обозначения (2.2) оставим прежними. Обозначения (3.1) позволяют вместо краевой задачи решить задачу Коши, что можно реализовать численно, по методу [4], [5].

Поскольку для сплошной пластинки $k=0$, то вместо уравнения (2.6) будем иметь

$$(1+\gamma\rho)\rho^2 \frac{d^2 y}{d\rho^2} + (1+4\gamma\rho)\rho\frac{dy}{d\rho} - m^2\left[1+(1-3\nu_r)\gamma\rho\right]y = \frac{q^*\rho^3}{(1+\gamma\rho)^2} \quad (3.2)$$

где

$$\gamma = \frac{h_1}{s} = \frac{h_1 c}{h_0}, \quad q^* = \frac{6qc^3}{B_r h_0^3} \quad (3.3)$$

В малой окрестности центра пластинки $\rho \le \rho_0$, где $\gamma\rho << 1$, уравнение (3.2) можно приближенно заменить уравнением

$$\rho^2 \frac{d^2 y}{d\rho^2} + \rho\frac{dy}{d\rho} - m^2 y = q^*\rho^3 \quad (3.4)$$

что совпадает с соответствующим уравнением пластинки постоянной толщины. Общее решение (3.4) имеет вид [6] [*)]

$$y = \begin{cases} A_1\rho^m + A_2\rho^{-m} + \dfrac{q^*}{9-m^2}\rho^3, & \text{при } m \ne 3 \\ A_1\rho^3 + A_2\rho^{-3} + \dfrac{q^*}{6}\rho^3 \ln\rho, & \text{при } m = 3 \end{cases} \quad (3.5)$$

где A_1 и A_2 - постоянные интегрирования.

В силу осесимметричности, в центре пластинки радиальные перемещения u_r, следовательно и функция y, равны нулю. Поэтому положим

---

*) В [6] случай $m=3$ не рассмотрен

$$A_2 = 0 \tag{3.6}$$

Пользуясь (2.2), (3.5) и (3.6), для асимптотического поведения изгибающих моментов в окрестности центра пластинки получим

$$\overline{M}_r = -\frac{ns}{12}\begin{cases} A_1 m\left(1+\nu_r m^2\right)\rho^{m-1}, & m<3 \\ \dfrac{q^*}{6}\left(3+\nu_r m^2\right)\rho^2 \ln\rho, & m=3 \\ \dfrac{q^*}{9-m^2}\left(3+\nu_r m^2\right)\rho^2, & m>3 \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\overline{M}_\theta = -\frac{nsm^2}{12}\begin{cases} A_1\left(1+\nu_r m\right)\rho^{m-1}, & m<3 \\ \dfrac{q^*}{6}\left(1+3\nu_r\right)\rho^2 \ln\rho, & m=3 \\ \dfrac{q^*}{9-m^2}\left(1+3\nu_r\right)\rho^2, & m>3 \end{cases} \tag{3.8}$$

Из этих выражений видно, что изгибающие моменты в центре пластинки при $m<1$ $(B_\theta < B_r)$ имеют особенность, а при $m>1$ $(B_\theta > B_r)$ превращаются в нуль. В случае же изотропной пластинки $(m=1)$, как и следовало ожидать, эти моменты принимают одинаковое конечное значение

$$\overline{M}_r\Big|_{\rho=0} = \overline{M}_\theta\Big|_{\rho=0} = -\frac{ns}{12}A_1\left(1+\nu_r\right) \tag{3.9}$$

Положив

$$\frac{dy}{d\rho} = v \tag{3.10}$$

вместо (3.2) получим следующую систему двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dy}{d\rho} = v, \quad \frac{dv}{d\rho} = \frac{q^*\rho}{(1+\gamma\rho)^3} - \frac{1+4\gamma\rho}{\rho(1+\gamma\rho)}v + m^2\frac{\left[1+\left(1-3\nu_r\right)\gamma\rho\right]}{\rho^2(1+\gamma\rho)}y = F(\rho, y, v) \tag{3.11}$$

Задаваясь некоторыми значениями параметров $\gamma > 0$, $A_1 < 0$, $q^* > 0$ и переходя к конечным разностям, можно значения функций y и v в последующих друг другу сечениях $\rho_i = \rho_{i-1} + \Delta\rho$ $(i = 1,2,3,\ldots)$ вычислить по формулам

$$y_i = y_{i-1} + v_{i-1}\,\Delta\rho, \quad v_i = v_{i-1} + F_{i-1}\Delta\rho, \quad (i = 1,2,3,\ldots) \tag{3.12}$$

Здесь $\Delta\rho$ - шаг интегрирования. Начальные значения функций y и v определяются из выражений (3.5) для достаточно малого ρ_0

$$y_0 = \begin{cases} A_1\rho_0^m, & m < 3 \\ \dfrac{q^*}{6}\rho_0^3 \ln\rho_0, & m = 3 \\ \dfrac{q^*}{9-m^2}\rho_0^3, & m > 3 \end{cases}, \qquad v_0 = \begin{cases} A_1 m\rho_0^{m-1}, & m < 3 \\ \dfrac{q^*}{2}\rho_0^2 \ln\rho_0, & m = 3 \\ \dfrac{3q^*}{9-m^2}\rho_0^2, & m > 3 \end{cases} \tag{3.13}$$

Численное интегрирование продолжается до тех пор, пока не удовлетворяется заданное краевое условие пластинки.Рассмотрим два варианта краевых условий.

1. Условие свободного или шарнирно опертого края

$$\rho v + \nu_r m^2 y = 0 \qquad (M_r = 0) \tag{3.14}$$

2. Условие защемленного края

$$y = 0 \tag{3.15}$$

Так как с удалением от центра защемленной по контуру пластинки изгибающий момент M_r убывает и, не доходя до края, в некотором сечении превращается в нуль, то сначала удовлетворяется условие шарнирного опирания. Поэтому в ходе решения задачи защемленной по контуру пластинки попутно получается и решение задачи при шарнирном опирании.

Допустим краевое условие удовлетворяется при $\rho = \rho_R$. Тогда, с помощью (3.1) имеем

$$c = \frac{R}{\rho_R} \tag{3.16}$$

При желании, можно путем варьирования одного из параметров γ, A_1, q^* добиться того, чтобы краевое условие удовлетворилось бы при $\rho_R = 1$. После определения ρ_R решение задачи фактически завершается, поскольку можно вычислить значение любой расчетной величины. В частности, безразмерный прогиб определится по формуле

$$\overline{w} = -\frac{1}{s}\int_{\rho}^{\rho_R} \alpha d\rho = -\frac{1}{s}\int_{\rho}^{\rho_R} (y + lt)d\rho \tag{3.17}$$

Нетрудно заметить, что формулы изгибающих моментов (2.3), разрешающее дифференциальное уравнение (3.2) и краевые условия пластинки (3.14) (3.15) с точностью до обозначений совпадают со своими классическими аналогами (вместо $d\overline{w}/d\rho$ в них фигурирует y). В силу этого, для осесимметричного изгиба пластинки значения изгибающих моментов в уточненной и классической постановках совпадают. Влияние же поперечных сдвигов сказывается лишь на деформации, а следовательно, и на прогиб пластинки. На основе этого, решение задачи осесимметричного изгиба пластинки по уточненной теории можно получить из соответствующего классического решения, положив

$$y = \frac{d\overline{w}^{\kappa\ \wedge}}{d\rho} \tag{3.18}$$

откуда

$$\frac{d\overline{w}}{d\rho} = \frac{1}{s}\left(\frac{d\overline{w}^{\kappa\ \wedge}}{d\rho} + lt\right) \tag{3.19}$$

Здесь $\overline{w}^{\kappa\ \wedge}$ безразмерный прогиб в классической постановке.

4. Проведем сравнение предложенной уточненной теории и теории [2]. Удобнее это сделать на примере сплошной пластинки постоянной толщины, изготовленной из трансверсально-изотропного материала. В нижеприведенной таблице представлены безразмерные значения некоторых величин защемленной и шарнирно опертой пластинок толщины h и радиуса R при действии равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности q. Через G и ν обозначены модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала в плоскости изотропии, через G'- модуль сдвига в поперечном направлении, а через D- цилиндрическая жесткость пластинки. В случае защемления приведены значения максимального прогиба и опорного момента, а в случае шарнирного опирания- только значения максимального прогиба пластинки. Для защемленной пластинки теория [2] приводит к множеству решений, зависящих от точек крепления $z = \pm z_0$ опорного сечения пластинки. Эти решения мало отличаются друг от друга. Причем поправка изгибающего момента или отсутствует, или является незначительной величиной нестабильного знака. Предложенная же теория приводит к единственному решению, поскольку из-за отсутствия кубических по поперечной координате членов удается удовлетворить условие заделки во всех точках опорного сечения пластинки. При этом, как уже отмечалось в предыдущем пункте, изгибающие моменты поправки не получают.

Данные таблицы показывают, что учет влияния поперечных сдвигов в рамках обеих теорий приводит к качественно одинаковому результату - к увеличению прогибов пластинки. Предложенная теория для прогиба дает или одинаковую поправку, или поправку, незначительно большую, чем теория [2]. Значения же напряжения τ_{rz} по обеим теориям совпадают.

ТАБЛИЦА 1

Случай защемления по контуру				Случай шарнирного опирания по контуру	
По теории Амбарцумяна С.А.			по предл. теории	по теории А.С.А.	по предл. теории
$z_0 = \frac{h}{2}$	$z_0 = \sqrt{\frac{3}{20}}h$	$z_0 = 0$			
$W_{max} = \frac{qR^4}{64D}\left[1+\frac{8}{3(1-\nu)}\frac{G}{G'}\frac{h^2}{R^2}\right]$ $M_{on} = -\frac{qR^2}{8}\left[1+\frac{2(1+\nu)}{15(1-\nu)}\frac{G}{G'}\frac{h^2}{R^2}\right]$	$W_{max} = \frac{qR^4}{64D}\left[1+\frac{16}{5(1-\nu)}\frac{G}{G'}\frac{h^2}{R^2}\right]$ $M_{on} = -\frac{qR^2}{8}$	$W_{max} = \frac{qR^4}{64D}\left[1+\frac{4}{1-\nu}\frac{G}{G'}\frac{h^2}{R^2}\right]$ $M_{on} = -\frac{qR^2}{8}\left[1-\frac{1+\nu}{5(1-\nu)}\frac{G}{G'}\frac{h^2}{R^2}\right]$	$W_{max} = \frac{qR^4}{64D}\left[1+\frac{4}{1-\nu}\frac{G}{G'}\frac{h^2}{R^2}\right]$ $M_{on} = -\frac{qR^2}{8}$	$W_{max} = \frac{qR^4}{64D}\frac{5+\nu}{1+\nu}\left[1+\frac{16(1+\nu)}{5(1-\nu)(5+\nu)}\frac{G}{G'}\frac{h^2}{R^2}\right]$	$W_{max} = \frac{qR^4}{64D}\frac{5+\nu}{1+\nu}\left[1+\frac{4(1+\nu)}{(1-\nu)(5+\nu)}\frac{G}{G'}\frac{h^2}{R^2}\right]$

Отметим, что идентичные заключения для цилиндрического изгиба полосы постоянной толщины содержатся в работе [7].

Литература

1. *Григоренко Я. М., Василенко А.Т.* Теория оболочек переменной жесткости.- Киев: Наукова думка, 1981. 544 с.
2. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин.- М.: Наука, 1987. 360 с.
3. *Киракосян Р.М.* Об одной уточненной теории анизотропных пластич переменной толщины. - ИАН РА, Механика, 1991, т. 44, №3.
4. *Ильюшин А.А.* Пластичность. - М. - Л., Гостехиздат, 1948.
5. *Киракосян Р.М.* Об одной задаче круглой пластинки наименьшего объема за пределами упругости материала.- ИАН Арм.ССР, Механика, 1977, т. 30, №1.
6. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. - М.-Л.: Гостехиздат, 1947.

7. *Аревшатян Н.Г., Киракосян Р.М.* К цилиндрическому изгибу ортотропной полосы переменной толщины с учетом поперечных сдвигов. - ИАН РА, Механика, 1993, т. № 1-2, с. 32-40.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
9.04.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, № 5-6, 1994 Механика

РАЗВИТИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ СКОРОСТЕЙ В ПЛОСКОЙ ТРУБЕ С ДВИЖУЩЕЙСЯ СТЕНКОЙ

Мнацаканян Р.Ж.

Ռ. Ժ. Մնացականյան

Արագությունների կամայական պրոֆիլի զարգացումը շարժական պատով հարթ խողովակում

Ուսումնասիրվում է մածուցիկ հեղուկի շարժման զարգացումը շարժական պատով հարթ խողովակում, երբ խողովակի սկզբնական կտրվածքում հիմնական հոսքի արագությունների պրոֆիլն ունի կամայական տեսք: Գտնված են արագության, ճնշման և շփման ուժի փոփոխման օրենքները խողովակի սկզբնական և հաստատված հատվածներում, կախված խողովակի սկզբնական կտրվածքում արագությունների բաշխման պրոֆիլից և պատի արագությունից:

R.Zh. Mnatsakanyan

On the Development of the Arbitrary Profile of Velocities in the Flat Pipe with Moving Wall.

Рассматривается развитие течения вязкой жидкости в плоской трубе с подвижной стенкой на случай начального произвольного профиля продольных скоростей основного потока жидкости.

Полученные результаты показывают, что выбором скоростей подвижной стенки и начального профиля продольных скоростей можно изменить распределения скоростей, давлений и силы трения в начальном и в стабилизированном участках трубы.

1. За последние годы о развитии течения вязкой жидкости между параллельными (подвижными, пористыми) стенками опубликован ряд работ, в которых, в основном, рассмотрены случаи, когда поступающая в трубу жидкость имеет во входном сечении линейный профиль.

В настоящей работе рассматривается развитие течения вязкой жидкости в плоской трубе с подвижной стенкой на случай начального произвольного профиля и делается попытка найти законы распределения скоростей и давления для любого сечения трубы, а также силы трения в потоке жидкости и на стенках трубы.

Такого рода задачи рассматривались и в работах [1,2,3,4] и других.

Изучение таких задач представляет теоретический и практический интерес. При произвольном профиле скоростей скольжение поверхностей относительно обтекающего потока имеет место в различных технологических и химических процессах. Например, при непрерывaной обработке листовых материалов в металлургии и т.д.

Для описания движения воспользуемся уравнениями [1]

$$U\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

В системе уравнений (1.1) v_x, v_y - соответствующие компоненты скорости по осям OX и OY, p - давление, ρ - плотность, ν - кинематический коэффициент вязкости, U - значение средней скорости по сечению в начале трубы.

Предположим, что поступающая в трубу жидкость имеет во входном сечении $x = 0$ некоторый заранее заданный произвольный осесимметричный профиль скоростей $v_x(\xi)$, где $\xi = y / h$.

Допустим, что функция $v_x(\xi)$ может быть разложена в ряд Фурье и что это разложение имеет вид

$$v_x = U\psi(\xi) \tag{1.2}$$

$$\psi(\xi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi\xi \tag{1.3}$$

где a_n - постоянные коэффициенты разложения. Что касается величины U, то она при любом выборе $\psi(\xi)$ в виде (1.3) будет равна средней по расходу скорости во входном сечении трубы.

Граничные условия для поставленной задачи будут иметь вид

$$\text{при} \quad x = 0 \quad v_x = U\psi(\xi), \quad p = p_H$$
$$\text{при} \quad y = h \quad x > 0 \quad v_x = U_1, \quad v_y = 0 \tag{1.4}$$
$$\text{при} \quad y = -h \quad x > 0 \quad v_x = 0, \quad v_y = 0$$

где p_H - давление во входном сечении, $2h$ - ширина плоской трубы, U_1 - заданная скорость верхней стенки трубы.

Введем безразмерные переменные

$$z = \frac{x}{h}, \quad u = \frac{v_x - U\psi(\xi)}{U}, \quad v = \frac{v_y}{U}, \quad P = \frac{p - p_H}{\rho U^2} \tag{1.5}$$

Тогда уравнения (1.1) и граничные условия (1.4) примут следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2\psi}{d\xi^2}$$
$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \xi} = 0 \tag{1.6}$$

при $\quad z = 0 \quad u = 0, \quad P = 0$

при $\quad \xi = 1 \quad z > 0 \quad u = \dfrac{U_1 - U\psi(1)}{U}, \quad \mathrm{v} = 0 \qquad (1.7)$

при $\quad \xi = -1 \quad z > 0 \quad u = -\psi(-1), \quad \mathrm{v} = 0$

здесь $\mathrm{Re} = \dfrac{Uh}{\mathrm{v}}$ (число Рейнольдса), $\psi(1) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n$

2. Решение системы уравнений (1.6) при граничных условиях (1.7) найдем методом операционного исчисления.

Применив преобразование Лапласа к уравнениям (1.6) и к граничным условиям (1.7) получим

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2\bar{u}}{d\xi^2} - \lambda\bar{u} = \lambda\bar{P} + \frac{1}{\lambda \mathrm{Re}}\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^2 \pi \cos n\pi\xi$$
$$\frac{d\bar{P}}{d\xi} = 0, \quad \lambda\bar{u} + \frac{d\bar{\mathrm{v}}}{d\xi} = 0 \tag{2.1}$$

при $\quad \xi = 1 \quad z > 0 \quad \bar{u} = \dfrac{U_1 - U\psi(1)}{\lambda U}, \quad \bar{\mathrm{v}} = 0$

при $\quad \xi = -1 \quad z > 0 \quad \bar{u} = -\dfrac{\psi(-1)}{\lambda}, \quad \bar{\mathrm{v}} = 0 \qquad (2.2)$

здесь λ - параметр преобразования Лапласа. Решая уравнение (2.1) и учитывая граничные условия (2.2), для $\bar{u}$, $\bar{\mathrm{v}}$ и $\bar{P}$ получим

$$\bar{u} = \frac{U_1}{2\lambda U}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda \mathrm{Re}}\,\xi}{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda \mathrm{Re}}} + \left[\frac{U_1 - 2U\psi(1)}{2\lambda U} + \bar{P} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(-1)^n\right]\frac{\mathrm{ch}\sqrt{\lambda \mathrm{Re}}\,\xi}{\mathrm{ch}\sqrt{\lambda \mathrm{Re}}} -$$
$$-\bar{P} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\pi\xi \tag{2.3}$$

$$\bar{P} = -\left[\frac{U_1 - 2U\psi(1)}{2\lambda U} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(-1)^n\right]\frac{\mathrm{th}\,\beta}{\mathrm{th}\,\beta - \beta} \tag{2.4}$$

$$\bar{v} = -\frac{U_1}{2U}\frac{\operatorname{ch}\beta\xi}{\beta\operatorname{sh}\beta} - \left[\frac{U_1 - 2U\psi(1)}{2\lambda U} + \bar{P} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(-1)^n\right]\frac{\lambda\operatorname{sh}\beta\xi}{\beta\operatorname{ch}\beta} +$$
$$+\lambda\bar{P}\xi + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n\pi}\sin\pi n\xi + \frac{U_1}{2U}\frac{1}{\beta\operatorname{th}\beta} \qquad (2.5)$$

где $\beta = \sqrt{\lambda\,\mathrm{Re}}$, $B_n = \dfrac{a_n n^2\pi^2}{\lambda(\lambda\,\mathrm{Re} + n^2\pi^2)}$

Совершив обратные преобразования Лапласа и переходя к старым переменным, для v_x, v_y и p получим

$$v_x = \frac{3U}{2}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) + \left(\frac{3y^2}{h^2} - 1\right)\frac{U_1}{4} + \frac{U_1}{2}\frac{y}{h} +$$
$$+\frac{U_1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin\pi n y/h}{n}\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right) + \qquad (2.6)$$
$$+2U\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{U_1}{2U} - 1\right)\frac{1}{\mu_k^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(-1)^n}{\mu_k^2 - \pi^2 n^2}\right]\left(1 - \frac{\cos\mu_k y/h}{\cos\mu_k}\right)\exp\left(-\frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right)$$

$$v_y = \frac{U_1}{\mathrm{Re}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[1 - (-1)^n\cos\pi n y/h\right]\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right) +$$
$$+\frac{2U}{\mathrm{Re}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{U_1}{2U} - 1\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(-1)^n\mu_k^2}{\mu_k^2 - \pi^2 n^2}\right]\left(\frac{y}{h} - \frac{\sin\mu_k y/h}{\sin\mu_k}\right)\exp\left(-\frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right) \qquad (2.7)$$

$$\frac{p - p_H}{\rho U^2} = \left(\frac{U_1}{2U} - 1\right)\left[\frac{3}{\mathrm{Re}\,h}x + \frac{1}{5} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^2}\exp\left(-\frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right)\right] -$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[3a_n(-1)^n\frac{1}{\pi^2 n^2} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_n(-1)^n}{\mu_k^2 - \pi^2 n^2}\exp\left(-\frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right)\right] \qquad (2.8)$$

В формулах (2.6), (2.7) и (2.8) μ_k - простые корни уравнения $\operatorname{tg}\mu = \mu$
Найдем значение силы трения

$$\tau = \frac{3\mu}{h^2}\left(\frac{U_1}{2} - U\right)y + \frac{\mu U_1}{2h} +$$
$$+\frac{\mu U_1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1 + \frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}^2}\right)(-1)^n\cos\pi n y/h - \frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}^2}\right]\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right) + \qquad (2.9)$$
$$+\frac{2\mu U}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{U_1 - 2U}{2U} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(-1)^n\mu_k^2}{\mu_k^2 - \pi^2 n^2}\right]\left[\left(1 + \frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}^2}\right)\frac{\sin\mu_k y/h}{\sin\mu_k} - \frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}^2 h}y\right]\exp\left(-\frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}\,h}x\right)$$

Значения силы трения на стенках будут

$$\tau^{h}=\frac{2\mu U_1}{h}-\frac{3\mu U}{h}+\frac{\mu U_1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}h}x\right)+\frac{\mu(U_1-2U)}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}h}x\right)-$$
$$-\frac{2\mu U}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_n(-1)^n\frac{\mu_k^2}{\mu_k^2-\pi^2n^2}\exp\left(-\frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}h}x\right) \tag{2.10}$$

$$\tau^{-h}=\frac{\mu U_1}{h}+\frac{3\mu U}{h}+\frac{\mu U_1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}h}x\right)-\frac{\mu(U_1-2U)}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}h}x\right)+$$
$$+\frac{2\mu U}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_n(-1)^n\frac{\mu_k^2}{\mu_k^2-\pi^2n^2}\exp\left(-\frac{\mu_k^2}{\mathrm{Re}h}x\right) \tag{2.11}$$

На бесконечном удалении от начала трубы, то есть для стабилизированного участка течения значения искомых величин будут

$$\mathrm{v}_{x\infty}=U+\left(\frac{U_1}{4}-\frac{U}{2}\right)\left(\frac{3y^2}{h^2}-1\right)+\frac{U_1}{2}\frac{y}{h} \tag{2.12}$$

$$\mathrm{v}_{y\infty}=0,\quad \frac{p_\infty-p_{II}}{\rho U^2}=\left(\frac{U_1}{2U}-1\right)\left(\frac{3}{\mathrm{Re}\,h}x+\frac{1}{5}\right)-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2n^2}a_n(-1)^n \tag{2.13}$$

$$\tau_{x\infty}=\frac{3\mu}{h^2}\left(\frac{U_1}{2}-U\right)y+\frac{\mu U_1}{2h} \tag{2.14}$$

Сила трения на стенках для стабилизированного участка примет следующие значения:

$$\tau^{h}_{x\infty}=\frac{\mu}{h}(2U_1-3U),\quad \tau^{-h}_{x\infty}=\frac{\mu}{h}(3U-U_1) \tag{2.15}$$

При $U_1=0$ определим в заключение с помощью формулы (2.6) длину начального участка.

Подставляя в (2.6) $y=0$ и сохраняя в сумме одно лишь первое слагаемое, так как величины μ_k^2 растут очень быстро, для начального участка получим следующее приближенное выражение:

$$L=\frac{\mathrm{Re}\,h}{20.19}\ln\left[36.98+747.06\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(-1)^n}{20.19-\pi^2n^2}\right] \tag{2.16}$$

В качестве характерного примера использования полученных выше формул рассмотрим случай, когда

$$\psi(y/h) = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

В этом случае коэффициенты разложения Фурье будут

$$a_n = -\frac{6(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

Подставляя это значение в формулу (2.16), получим $L = 0$, то есть если распределение скоростей потока в начальном сечении трубы имеет параболический вид, в сравнении с линейным профилем скоростей [1], по мере удаления от начального сечения сохраняет свой вид, сразу имея стабилизированный режим течения.

Если в (2.16) подставить $a_n = 0$, то получим значение начального участка для линейного профиля [1], то есть

$$L \approx 0.18\,\mathrm{Re}\,h$$

3. Анализ полученных результатов:

а). Из формулы (2.12) видно, что при течении в трубе любой симметричный профиль продольных скоростей переходит в пределе в параболический, независимо от того, стенка трубы подвижная или нет.

б). Результаты работы [5] и настоящей работы (2.14), (2.15) показывают, что значение силы трения в потоке жидкости и на стенках трубы не зависят от начального профиля продольных скоростей жидкости и от того, принимается ли давление переменным в поперечном направлении трубы или нет.

в). Как показывают полученные формулы, выбором скоростей подвижной стенки и начального профиля продольных скоростей основного потока можно изменить распределения скоростей, давлений и силы трения в начальном и в стабилизированном участках и, в частности, на стенках трубы.

г). Если в формулу (2.6), (2.7) и (2.8) подставить $a_n = 0$, $U_1 = 0$, то получим развитие линейного профиля скоростей [1], если $a_n \neq 0$, $U_1 = 0$. то получим результаты [4], а если $a_n = 0$, $U_1 \neq 0$, полученные результаты совпадают с результатами [6] при $U_2 = 0$.

Литература

1. *Тарг С.М.* Основные задачи теории ламинарных течений. - М.: Гостехиздат, 1951, с. 420.
2. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Гостехиздат, 1955, 519 с.
3. *Бабаджанян Г.А., Мнацаканян Р.Ж.* О развитии течения вязкой жидкости в плоской трубе с проницаемыми стенками. - Проблемы динамики взаимодействия деформируемых средств. Ереван, изд-во АН Арм.ССР, 1987, с. 42-47.

4. *Мнацаканян Р.Ж.* Развитие произвольного профиля скоростей между параллельными стенками. - Межвуз. сб. научн, тр., Механика, Ереван, изд. ЕГУ, 1987, вып. 6, с. 191-187.
5. *Бабаджанян Г.А., Мнацаканян Р.Ж.* Об одном точном решении уравнения Навье-Стокса. - Изв. АН Арм.ССР. Механика, 1988, №5, т. 41, с. 47-52.
6. *Бабаджанян Г.А., Мнацаканян Р.Ж.* О развитии течения вязкой жидкости между параллельными движущимися плоскостями. - Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1987, т. 40, №3, с. 49-53

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
15.04.1993

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИЙ

Մեխանիկա 47, № 5-6, 1994 Механика

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ТЕРМОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ЖИДКОСТЬ

Саркисян А.В.

Ա. Վ. Սարգսյան

Ալիքների տարածումը հեղուկ պարունակող ջերմաառաձգական գլանային թաղանթում

Հեղուկ պարունակող ջերմաառաձգական գլանային թաղանթում ալիքների տարածման խնդրի լուծման համար դիտարկված են թաղանթ-հեղուկ, թաղանթ-ջերմաստիճան համակարգերը, որոնց համար ստացված են արտահայտություններ ալիքի տարածման արագության համար: Ընդհանրացված է Ժուկովսկու բանաձևը ջերմաստիճանային դաշտի դեպքում:

Sarkisian A. V.

The Waves Propagation in Thermoelastic Cylindrical Shell with the Fluids.

Для решения задачи распространения волн в термоупругой цилиндрической оболочке, наполненной идеальной жидкостью, рассмотрены системы оболочка-жидкость и оболочка-температура, для которых получены выражения скорости распространения волны. Обобщена формула Жуковского на случай температурного поля.

1. Рассматривается распространение осесимметричных волн бесконечно длинной изотропной цилиндрической оболочки (с радиусом R, плотностью ρ, толщиной h, модулем Юнга E), наполненной идеальной жидкостью с плотностью ρ_0. Предполагается, что колебания цилиндра сопровождаются выделением теплоты, что, в свою очередь, создает тепловые напряжения (тепловая связанная задача).

Пусть температурное поле в оболочке изменяется по следующему закону [1]:

$$T = \Theta_1 + z\Theta_2 \tag{1.1}$$

Уравнения движения оболочки имеют вид [2]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial T_1}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} - \frac{T_2}{R} + T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{gathered} \tag{1.2}$$

где P - давление жидкости, T_1, T_2 - усилия, M_1 - изгибающий момент, T_0 - начальное усилие срединной поверхности оболочки, u, w - перемещения срединной поверхности.

Принимая во внимание (1.1), уравнения теплопроводности будут иметь следующий вид [3,4]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\Theta_1}{\partial t}-\chi\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial x^2}+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\Theta_1+\eta\chi\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial t}\right]=0\\
&\frac{\partial\Theta_2}{\partial t}-\chi\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial x^2}+\left[\frac{12\chi}{h^2}+\frac{6k^*}{c_p\rho h}\right]\Theta_2-\eta\chi\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}=0
\end{aligned}
\qquad (1.3)
$$

где χ - коэффициент температуропроводности, k^* - коэффициент теплообмена поверхности тела, c_p - удельная теплоемкость, $\eta=\dfrac{3\lambda+2\mu}{c_p\rho\chi}\alpha T$, α - коэффициент температурного расширения, λ, μ - коэффициенты Ламэ.

Двумерное уравнение движения жидкости и выражение для давления известно из [5]

$$
\begin{aligned}
&\Delta\varphi=0\\
&P=\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}
\end{aligned}
\qquad (1.4)
$$

где φ - функция потенциала, $\Delta\{\ \}=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ - оператор Лапласа.

Граничное условие на внутренней поверхности цилиндра будет

$$
\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R}=-\frac{\partial w}{\partial t}
\qquad (1.5)
$$

Решение уравнения (1.2)-(1.5) ищется в виде

$$
\begin{aligned}
&u=A\exp i(\omega t-kx)\\
&w=B\exp i(\omega t-kx)\\
&\Theta_1=C_1\exp i(\omega t-kx)\\
&\Theta_2=C_2\exp i(\omega t-kx)
\end{aligned}
\qquad (1.6)
$$

где ω - частота, k - волновое число, A, B, C_1, C_2 - неизвестные постоянные.

Учитывая граничное условие (1.5) из (1.4) и (1.6), для давления получаем следующее выражение:

$$P=\rho_0 B\omega^2\frac{I_0(kR)}{kI_1(kR)}\exp(\omega t-kx) \tag{1.7}$$

где $I_0(kR)$, $I_1(kR)$ - функции Бесселя [6].

Учитывая закон Дюамеля-Неймана [1], гипотезу Кирхгофа-Лява [2], а также выражение для давления (1.7), в уравнениях (1.2) усилия T_1 и T_2, изгибающий момент M_1 выражая через компоненты перемещений, получим систему

$$\begin{gathered}
\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial x}-\alpha(1+\nu)\frac{\partial\Theta_1}{\partial x}\right]-\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\\
\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{Eh^3\alpha}{12(1-\nu)}\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial x^2}+\frac{Eh}{R(1-\nu^2)}\left[\frac{w}{R}+\right.\\
\left.+\nu\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha\Theta_1(1+\nu)\right]-T_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\rho_0 B\omega^2\frac{I_0(kR)}{kI_1(kR)}\exp i(\omega t-kx)=0
\end{gathered} \tag{1.8}$$

где ν - коэффициент Пуассона.

Таким образом, для решения данной задачи необходимо решить системы (1.3), (1.8). Из-за громоздкости дисперсионного уравнения шестого порядка относительно частоты оно не приводится, а его анализ можно провести только численно, поэтому здесь довольствуемся только частными случаями.

2. Рассмотрим систему оболочка-жидкость, предполагая отсутствие теплового эффекта. В этом случае получится биквадратное уравнение относительно отношения $\frac{v}{c}$, где $v=\frac{\omega}{k}$ - фазовая скорость распространения волны, $c^2=\frac{E}{\rho}$.

Таблица 1

$\frac{1}{kR}$	$\left(\frac{v}{c}\right)_1$	$\left(\frac{v}{c}\right)_2$	$\left(\frac{v}{c}\right)_3$
1	0.2189	1.00180	0.2284
2	0.2192	1.00230	0.2299
3	0.2193	1.00243	0.2304
5	0.2194	1.00248	0.2305
10	0.2195	1.00250	0.2306

В табл. 1 для этого случая для данных значений $1/kR$ указаны соотношения $\left(\frac{v}{c}\right)_1$ и $\left(\frac{v}{c}\right)_2$. Для значений, для волн с малыми частотами $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\right)$ для соотношения $\frac{v}{c}$ будем иметь:

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2=\frac{1/k^2R^2+h^2k^2/12\left(1-v^2\right)+T_0/Eh}{1+\dfrac{\rho_0}{\rho}\dfrac{I_0(kR)}{I_1(kR)}\dfrac{1}{kh}} \tag{2.1}$$

которому соответствует в табл. 1 отношение $\left(\frac{v}{c}\right)_3$.

3. Для выяснения влияния температур рассмотрим систему оболочка - температура, довольствуясь безмоментной постановкой задачи. В этом случае (при отсутствии жидкости), в предположении малости продольного инерционного члена, из (1.3) и (1.8) задача сводится к решению данной системы

$$\begin{gathered}\frac{\partial T_1}{\partial x}=0\\ \frac{T_2}{R}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0\\ \frac{\partial\Theta_1}{\partial t}-\chi\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial x^2}+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\Theta_1+\eta\chi\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial t}\right]=0\end{gathered} \tag{3.1}$$

из которой получится кубическое дисперсионное уравнение

$$\begin{gathered}[1+\alpha\eta\chi(1+v)]\omega^3-i\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)\omega^2-\\ -\frac{E}{\rho R^2}(1+2\alpha\eta\chi)\omega+\frac{E}{\rho R^2}i\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)=0\end{gathered} \tag{3.2}$$

При отсутствии связанности задачи для частот имеем

$$\begin{gathered}\omega_{1,2}=\pm\frac{1}{R}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\\ \omega_3=i\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)\Big/\left(1+\alpha\eta\chi(1+v)\right)\end{gathered} \tag{3.3}$$

Удобнее приближенные корни уравнения (3.2) искать в виде, учитывающей малость связанности (η). Тогда, если решение (3.2) представить в виде

$$\left(\omega-\frac{1}{R}\sqrt{\frac{E}{\rho}}+a_1\right)\left(\omega+\frac{1}{R}\sqrt{\frac{E}{\rho}}+a_2\right)\frac{\left(\omega-i\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)+a_3\right)}{1+\alpha\eta\chi(1+\nu)}=0 \quad (3.4)$$

где a_i - малые величины, характеризующие малость связанности, сравнивая (3.2) и (3.4), для a_i получим

$$\operatorname{Re} a_{1,2}=\frac{\pm\frac{1}{2}\frac{E}{\rho R^2}\alpha\eta\chi(1-\nu)(1+\alpha\eta\chi(1+\nu))}{\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)^2+\frac{E}{\rho R^2}(1+\alpha\eta\chi(1+\nu))^2} \quad (3.5)$$

a_3 - мнимое число, характеризующее процесс затухания.

Следовательно, для изгибной скорости распространения волны получим

$$v=\pm\frac{1}{kR}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\left[1-\frac{\frac{1}{2}\frac{E}{\rho R^2}\alpha\eta\chi(1-\nu)(1+\alpha\eta\chi(1+\nu))}{\frac{E}{\rho R^2}(1+\alpha\eta\chi(1+\nu))^2+\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)^2}\right] \quad (3.6)$$

4. Известно выражение скорости пульсовой волны [7,8,9]. Обобщим его на случай наличия теплопередачи.

Предполагается, что есть только усилие T_2, которое в предположении $T_1=0$ дает

$$T_2=Eh\left(\frac{w}{R}-\alpha\Theta_1\right) \quad (4.1)$$

Уравнение теплопроводности в этом случае согласно (1.3) имеет вид

$$[1+\alpha\eta\chi(1+\nu)]\frac{\partial\Theta_1}{\partial t}-\chi\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial x^2}+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\Theta_1+\eta\frac{\chi}{R}(1-\nu)\frac{\partial w}{\partial t}=0 \quad (4.2)$$

Давление жидкости по одномерной модели определяется из [10]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=\frac{2\rho_0}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.3)$$

Из уравнений движения оболочки (1.8), из соотношения (4.3) и уравнения теплопроводности (4.2), решение задачи сводится к решению данной системы

$$Eh\left[\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial x^2}\right]=2\rho_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\left[1+\alpha\eta\chi(1+\nu)\right]\frac{\partial\Theta_1}{\partial t}-\chi\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial x^2}+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\Theta_1+\frac{\eta\chi}{R}(1-\nu)\frac{\partial w}{\partial t}=0 \qquad (4.4)$$

В этом случае имеем следующее кубическое дисперсионное уравнение:

$$\left[1+\alpha\eta\chi(1+\nu)\right]\omega^3-i\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)\omega^2-\frac{Ehk^2}{2\rho_0 R}(1-2\alpha\eta\chi\nu)\omega+$$

$$+\frac{Ehk^2}{2\rho_0 R}i\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)=0 \qquad (4.5)$$

При отсутствии тепловыделения для частот имеем

$$\omega_{1,2}=\pm k\sqrt{\frac{Eh}{2\rho_0 R}}$$

$$\omega_3=i\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)\Big/\left[\alpha\eta\chi(1+\nu)+1\right] \qquad (4.6)$$

Для скорости распространения волны будем иметь

$$c=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{Eh}{2\rho_0 R}} \qquad (4.7)$$

(4.7) получена в [9] и носит название формулы Жуковского.

Обобщим эту формулу на случай температурного поля. Корни уравнения (4.5) также ищем в виде предыдущего пункта. Не останавливаясь на подробностях, приведем окончательное выражение для скорости распространения волн

$$v=\pm\sqrt{\frac{Eh}{2\rho_0 R}}\left[1-\frac{Ehk^2}{4\rho_0 R}\frac{\alpha\eta\chi(1+3\nu)\left(1+\alpha\eta\chi(1+\nu)\right)}{\frac{Ehk^2}{2\rho_0 R}\left(1+\alpha\eta\chi(1+\nu)\right)^2+\left(\chi k^2+\frac{2k^*}{c_p\rho h}\right)^2}\right] \qquad (4.8)$$

Как видно из приведенной формулы (4.8), скорость зависит от волнового числа, то есть в этом случае наблюдается дисперсия.

Формула (4.8) обобщает известную формулу Жуковского, принятую в биомеханике как скорость распространения пульсовой волны.

Литература

1. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. - М.: Физматгиз 1963.
2. *Новожилов В. В.* Теория тонких упругих оболочек.-Л.: Суд-промгиз, 1962.
3. *Болотин В. В.* Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла. - ПММ, 1960, т. 24 в. 2.
4. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. - М.: Мир, 1970.
5. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. I. - М.: Наука, 1973.
6. *Коренев Б. Г.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. - М.: Физматгиз, 1960.
7. *Каро, Педли, Шротер, Сид.* Механика кровообращения. - М.: Мир, 1981.
8. *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. - М.: Мир, 1983.
9. *Рашевски Н.* Некоторые медицинские аспекты математической биологии. - М.: Мир, 1966.
10. *Амбарцумян С. А., Мовсисян Л. А.* К вопросу распространения пульсовой волны. -Механика полимеров. 1978, № 4.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
26. 11. 1993