

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ ПРОCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA  
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՊԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵԴԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ  
МЕХАНИКА  
MECHANICS

ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ,  
 УСИЛЕННОЙ КРЕСТООБРАЗНЫМ БЕСКОНЕЧНЫМ  
 СТРИНГЕРОМ

ГРИГОРЯН Э. Х., ТОРОСЯН Д. Р

Рассматривается задача для упругой бесконечной пластины, усиленной двумя одинаковыми взаимно-перпендикулярными бесконечными стрингерами или, что то же самое, усиленной крестообразным бесконечным стрингером. Пластина деформируется под действием сил, приложенных к крестообразному стрингеру, симметрично относительно его центра и направленных к центру стрингера или наоборот. Задача заключается в определении контактных усилий, действующих между стрингером и пластиной.

С помощью преобразования Фурье задача сводится к решению системы разностных функциональных уравнений относительно трансформант Фурье контактных сил. Дается замкнутое решение этой системы функциональных уравнений. Получены асимптотические формулы, характеризующие поведения контактных сил в окрестности центра и далеких от него точках стрингера.

Пусть упругая бесконечность пластина толщины  $h$  усилена крестообразным бесконечным стрингером с модулем упругости  $E_s$  и с площадью поперечного сечения  $F_s$ . Пластина деформируется под действием сил  $P\delta(x-a)\delta(y)$ ,  $P\delta(x+a)\delta(y)$ ,  $Q\delta(y-a)\delta(x)$ ,  $Q\delta(y+a)\delta(x)$  (фиг. 1). Относительно крестообразного стрингера принимается модель контакта по линии, то есть считается, что контактные касательные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка, а для пластины предполагается, что во время деформации она находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. Требуется определить контактные напряжения, действующие под стрингером.

В силу вышесказанного, уравнения равновесия стрингера запишутся в виде

$$\frac{du^{(1)}}{dx} = \frac{1}{E_s F_s} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x-t)z^{(1)}(t)dt + \frac{P}{E_s F_s} [\Theta(x+a) - \Theta(x-a)]$$

$$\frac{dv^{(1)}}{dy} = \frac{1}{E_s F_s} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(y-\eta)z^{(1)}(\eta)d\eta + \frac{Q}{E_s F_s} [\Theta(y+a) - \Theta(y-a)]$$

где  $\Theta(x)$  — функция Хевисайда,  $u^{(1)}(x)$ ,  $v^{(1)}(y)$  — горизонтальные и вертикальные перемещения стрингера соответственно,  $\tau^{(1)}(x)$ ,  $\tau^{(2)}(y)$  — интенсивности горизонтальных и вертикальных контактных касательных сил соответственно.

Из постановки задачи нетрудно заключить, что  $\tau^{(1)}(x)$  и  $\tau^{(2)}(y)$  — нечетные функции.

С другой стороны имеем

$$h \frac{du^{(2)}(x,0)}{dx} = \frac{(3-\nu)(1+\nu)}{4\pi E^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau^{(1)}(t)}{t-x} dt - \frac{(1+\nu)^2}{4E\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_1(\eta^2-x^2)}{(x^2-\eta^2)^2} \tau^{(2)}(\eta) d\eta$$

$$h \frac{dv^{(2)}(0,y)}{dy} = \frac{(3-\nu)(1+\nu)}{4\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau^{(2)}(\eta)}{\eta-y} d\eta - \frac{(1+\nu)^2}{4E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t(t^2-y^2)}{(y^2+t^2)^2} \tau^{(1)}(t) dt$$

$$(-\infty < x, y < \infty)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала пластины, а  $E$  — ее модуль упругости,  $u^{(2)}(x,y)$ ,  $v^{(2)}(x,y)$  — горизонтальные и вертикальные перемещения пластины соответственно.

Теперь, удовлетворив условиям контакта

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx} = \frac{du^{(2)}(x,0)}{dx}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\frac{dv^{(1)}(y)}{dy} = \frac{dv^{(2)}(0,y)}{dy}, \quad -\infty < y < \infty$$

и имея в виду нечетность функции  $\tau^{(1)}(x)$  и  $\tau^{(2)}(y)$ , получим

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) \tau^{(1)}(t) dt - \frac{2A}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tau_1(\eta^2-x^2)}{(\eta^2+x^2)^2} \tau^{(2)}(\eta) d\eta =$$

$$= -i_0 \int_0^{\infty} \Theta(t-x) \tau^{(1)}(t) dt + P i_0 \Theta(a-x)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\eta-y} + \frac{1}{\eta+y} \right) \tau^{(2)}(\eta) d\eta - \frac{2A}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t(t^2-y^2)}{(t^2+y^2)^2} \tau^{(1)}(t) dt =$$

$$= -i_0 \int_0^{\infty} \Theta(\eta-y) \tau^{(2)}(\eta) d\eta + Q i_0 \Theta(a-y)$$
(1)

где

$$A = \frac{1+\nu}{3-\nu}, \quad i_0 = \frac{4Eh}{E_s F_s (3-\nu)(1+\nu)}$$

Таким образом, задача свелась к решению системы сингулярных интегральных уравнений (1). Решение системы уравнений (1) ищем в классе функций, равные нулю при нулевом значении аргумента и суммируемые на полуоси  $[0, \infty)$ . Для решения системы (1) сделаем замену переменных  $x = ae^v$ ,  $t = ae^u$ ,  $\eta = a \cdot e^u$ ,  $y = a \cdot e^w$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{1-e^{v-u}} + \frac{1}{1+e^{v-u}} \right) z^{(1)}(ae^u) du - \frac{2A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-e^{2(v-u)})}{(1+e^{2(v-u)})^2} z^{(2)}(ae^u) du = \\ = -i \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u-v) z^{(1)}(ae^u) du + i P_1 \theta(-v) \end{aligned} \quad (2)$$

$(-\infty < v < \infty)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{1-e^{w-u}} + \frac{1}{1+e^{w-u}} \right) z^{(2)}(ae^u) du - \frac{2A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-e^{2(w-u)})}{(1+e^{2(w-u)})^2} z^{(1)}(ae^u) du = \\ = -\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u-w) z^{(2)}(ae^u) du + i Q_1 \theta(-w) \end{aligned}$$

$(-\infty < w < \infty)$

где  $i = i_0 a$ ,  $Q_1 = \frac{Q}{a}$ ,  $P_1 = \frac{P}{a}$ .

Применив к (2) преобразования Фурье, задачу сведем к решению системы функционально-разностных уравнений

$$\alpha \operatorname{ctn} \frac{\pi \alpha}{2} z^{(1)}(\alpha) + \frac{i \alpha (\alpha + i) A}{\operatorname{sh} \frac{\pi \alpha}{2}} z^{(2)}(\alpha) + \lambda z^{(1)}(\alpha - i) = \lambda P_1 \quad (3)$$

$$\alpha \cdot \operatorname{cth} \frac{\pi \alpha}{2} z^{(2)}(\alpha) + \frac{i \alpha (\alpha + i) A}{\operatorname{sh} \frac{\pi \alpha}{2}} z^{(1)}(\alpha) + \lambda z^{(2)}(\alpha - i) = i Q_1$$

$$(-1 < \operatorname{Im} \alpha < 0)$$

где

$$z^{(k)}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} z^{(k)}(ae^u) e^{-\alpha u} du \quad (k=1,2)$$

Сложив первое уравнение системы (3) со вторым, а затем высчитав из первого второе, получим два независимых функциональных уравнения

$$\bar{K}_1(\alpha) \bar{\varphi}_1(\alpha) + i \bar{\varphi}_1(\alpha - i) = i R_1 \quad (4)$$

$$\bar{K}_2(\alpha) \bar{\varphi}_2(\alpha) + i \bar{\varphi}_2(\alpha - i) = i R_2 \quad (5)$$

$$(-1 < \operatorname{Im} \alpha < 0)$$

где

$$R_1 = P_1 + Q_1, \quad R_2 = P_1 - Q_2,$$

$$\bar{\varphi}_1(z) = \bar{\tau}^{(1)}(z) - \bar{\tau}^{(2)}(z), \quad \bar{\varphi}_2(z) = \bar{\tau}^{(1)}(z) - \bar{\tau}^{(2)}(z),$$

$$\bar{K}_1(\alpha) = \frac{\alpha \left( \operatorname{ch} \frac{\pi \alpha}{2} + i(\alpha + i)A \right)}{\operatorname{sh} \frac{\pi \alpha}{2}},$$

$$\bar{K}_2(\alpha) = \frac{\alpha \left( \operatorname{ch} \frac{\pi \alpha}{2} - i(\alpha + i)A \right)}{\operatorname{sh} \frac{\pi \alpha}{2}}.$$

Сначала рассмотрим уравнение (4) и его решение ищем в виде

$$\bar{\varphi}_1(z) = \frac{i\Gamma(i\alpha)}{\operatorname{ch} \frac{\pi \alpha}{2}} \bar{T}_1(z), \quad \bar{\varphi}_1(z-i) = -\frac{\Gamma(1+i\alpha)}{\operatorname{sh} \frac{\pi \alpha}{2}} \bar{T}_1(z-i) \quad (6)$$

где  $\Gamma(a)$  — известная функция-гамма.

Подставив выражения  $\bar{\varphi}_1(\alpha)$ ,  $\bar{\varphi}_1(\alpha-i)$  из (6) в (4), получим функциональное уравнение

$$\bar{B}_1(\alpha) \bar{T}_1(\alpha) - i \bar{T}_1(\alpha-i) = R_1 \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi \alpha}{2}}{\Gamma(1+i\alpha)} \quad (7)$$

при условии

$$\bar{T}_1(-i) = 0 \quad (8)$$

где

$$\bar{B}_1(\alpha) = \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi \alpha}{2} + i(\alpha + i)A}{\operatorname{ch} \frac{\pi \alpha}{2}}$$

Для решения (7), (8), рассмотрим функциональное уравнение

$$\bar{B}_1(\alpha) Y_1(\alpha-i) = Y_1(\alpha) \quad (9)$$

при условии

$$Y_1(-i) = 1 \quad (10)$$

Решение уравнения (9) при условии (10) строится методом, изложенным в работах [1, 2], и имеет вид

$$Y_1(z) = \exp \left[ - \frac{i}{2} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} (\operatorname{cth}\pi(x-s) + \operatorname{cth}\pi s) \operatorname{th} \bar{B}_1(s) ds \right] \quad (-1 < \operatorname{Im} z < \tau < 0)$$

Итак, мы представили  $\bar{B}_1(z)$  в виде

$$\bar{B}_1(z) = \frac{Y_1(z)}{Y_1(z-i)} \quad (-1 < \operatorname{Im} z < 0) \quad (11)$$

Имея в виду (11) и разделив обе части уравнения (7) на  $\operatorname{sh}\pi z$ , получим

$$\frac{Y_1(z)\bar{T}_1(z)}{\operatorname{sh}\pi z} + \frac{i Y_1(z-i)\bar{T}_1(z-i)}{\operatorname{sh}\pi(z-i)} = \frac{\lambda R_1 Y_1(z-i) \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2}}{\operatorname{sh}\pi z \Gamma(1+iz)} \quad (12)$$

Далее, применив к (12) обратное преобразование Фурье и имея в виду теорему Коши о вычетах, получим

$$F^{-1} \left[ \frac{Y_1(z)\bar{T}_1(z)}{\operatorname{sh}\pi z} \right] = \frac{i R_1}{(1+\lambda e^u)} F^{-1} \left[ \frac{Y_1(z-i) \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2}}{\Gamma(1+iz) \operatorname{sh}\pi z} \right] \quad (13)$$

где  $F$  — преобразование Фурье, а  $F^{-1}$  — обратное ему преобразование.

Теперь применив к (13) преобразование Фурье, при этом имея в виду теорему о свертке и, что

$$F \left[ \frac{1}{1+\lambda e^u} \right] = - \frac{i\pi \lambda^{-i\alpha}}{\operatorname{sh}\pi \alpha} \quad (-1 < \operatorname{Im} \alpha < 0)$$

будем иметь

$$\bar{T}_1(\alpha) = - \frac{i R_1 i}{2 Y_1(\alpha)} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} (\operatorname{cth}\pi(x-s) + \operatorname{cth}\pi s) \lambda^{-i(\alpha-s)} \frac{Y_1(s-i) \operatorname{sh} \frac{\pi s}{2}}{\Gamma(1+is)} ds \quad (-1 < \operatorname{Im} \alpha < \tau < 0)$$

Для дальнейшего определим значения  $\bar{\varphi}_1(a)$  при  $a = -i$ , после чего получим

$$\bar{\varphi}_1(-i) = - \frac{R_1 i}{2} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} \frac{i^{\alpha} Y_1(s-i)}{\Gamma(1+is) \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2} \operatorname{sh}\pi s} ds \quad (-1 < \tau < 0)$$

Итак, мы определили  $\bar{\varphi}_1(-i)$ , а тем самым и  $\varphi_1(\ln z) = \tau^{(1)}(az) + \tau^{(2)}(az)$

$$\zeta^{(1)}(az) + \zeta^{(2)}(az) = \frac{1}{2\pi} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{\Gamma'(iz) \bar{T}_1(z)}{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{2}} z^{-l} dz$$

$$(-1 < z < 0, \quad 0 < l < \infty) \quad (14)$$

Заметим, что если  $\bar{B}_1(z)$  представить в виде

$$\bar{B}_1(z) = \frac{\pi \bar{B}_1(-i)}{2(1+iz)^{n+1}} \prod_{s=1}^n \frac{\left(1 - \left(\frac{\alpha+i}{z_n+i}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{\alpha+i}{z_n-i}\right)^2\right)}{1 + \left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)^2}$$

$$\bar{B}_1(-i) = \left(1 - \frac{2A}{\pi}\right),$$

то  $Y_1(x)$  из (9), (10) определится в виде

$$Y_1(x) = \left(\frac{\pi}{2} \bar{B}_1(-i)\right)^{1-l} (1+iz)^{-l} \bar{\Phi}_1(x)$$

$$(16)$$

$$\bar{\Phi}_1(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(3-ix-iz_n) \Gamma(3-ix+iz_n) \Gamma(2n+1+ix) (1-iz_n)^{2ix-3} (1+iz_n)^{2ix-3}}{\Gamma(ix-iz_n) \Gamma(ix+iz_n) \Gamma(2n+2-ix) (2n+1)^{2ix-1}}$$

где  $\alpha_n$  — нули функции  $\bar{B}_1(z)$ , расположенные в порядке  $0 < \operatorname{Im} \alpha_n < \operatorname{Im} \alpha_{n+1}$  и  $\operatorname{Re} z_n > -1$  ( $n=1, 2, \dots$ ), а  $\bar{z}_n$  — сопряженные с  $\alpha_n$  и  $\bar{B}_1(-\bar{z}_n) = 0$ . Если корни мнимы, то вместо множителей в произведениях (15) и (16), соответствующих сопряженным корням, надо положить единицу. Известно, что  $z_1$  положительно мнима  $\operatorname{Im} z_1 > 0$  [3]. Отметим также, что

$$|z_n| = 4n + O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

Поступая аналогичным образом, как это делалось выше, решение функционального уравнения (5)  $\bar{\varphi}_2(z)$  представится в виде (6), только здесь индексы один надо заменить индексами два, а в (16) под  $z_k$  надо понимать нули функции  $\bar{B}_2(z)$ . Тогда

$$\zeta^{(1)}(az) - \zeta^{(2)}(az) = \frac{1}{2\pi} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{\Gamma'(iz) \bar{T}_2(z)}{\operatorname{ch} \frac{\pi z}{2}} z^{-l} dz$$

$$(-1 < z < 0, \quad 0 < z < \infty) \quad (17)$$

Для получения асимптотических формул для функции  $\varphi_1(x) = \zeta^{(1)}(ax) + \zeta^{(2)}(ax)$  при  $x \rightarrow 0$  и  $x \rightarrow \infty$ , исследуем полюса аналитического продолжения функции  $\bar{\varphi}_1(z)$ . Проще всего это сделать, обращая

ась к уравнению (4) [4,5]. Сперва исследуем полюса функции  $\bar{\varphi}_1(\alpha)$  (здесь и в дальнейшем под  $\bar{\varphi}_1(z)$  будем понимать и ее аналитическое продолжение) при  $\text{Im}z \leq -1$ . Так как  $\bar{\varphi}_1(-i)$  конечна, то из (4) следует, что  $\bar{\varphi}_1(-2i) = R_1$ . Далее, поскольку  $\bar{\varphi}_1(-2i)$  конечна, то, как следует из (4),  $\alpha = -3i$  будет простым полюсом для  $\bar{\varphi}_1(z)$ . Если  $\alpha = -3i$  является простым полюсом, то  $\alpha = -4i$  тоже будет таковым для  $\bar{\varphi}_1(z)$ . Далее, поскольку  $\alpha = -4i$  является простым полюсом для  $\bar{\varphi}_1(z)$ , то  $\alpha = -5i$  будет для  $\bar{\varphi}_1(z)$  двукратным полюсом (4). Из (4) следует также, что  $\alpha = -6i$  — двукратный полюс для  $\bar{\varphi}_1(z)$ . Так продолжая, мы убедимся, что функция  $\bar{\varphi}_1(z)$  имеет при  $\text{Im}z \leq -1$  полюса только в точках  $\alpha = -i(2n+1)$ ,  $\alpha = -i(2n+2)$  ( $n=1,2,\dots$ ) с кратностями  $n$ .

Теперь исследуем полюса функции  $\bar{\varphi}_1(\alpha)$  при  $\text{Im}z \geq 0$ . Для этого заметим, что поскольку точки  $z_k, -\bar{z}_k$  ( $k=1,2,\dots$ ) — нули функции  $\bar{K}_1(z)$ , то из (4) следует, что они могут быть простыми полюсами функции  $\bar{\varphi}_1(z)$ . Из (4) нетрудно заключить, что при этом точки  $\alpha = z_k + in$ ,  $\alpha = -\bar{z}_k + in$  ( $n=1,2,\dots$ ) тоже могут быть простыми полюсами  $\bar{\varphi}_1(z)$ . Значит функция  $\bar{\varphi}_1(z)$  при  $\text{Im}z > 0$  имеет полюса только в точках  $\alpha = z_k + in$ ,  $\alpha = -\bar{z}_k + in$  ( $k=1,2,\dots, n=0,1,2,\dots$ ) и притом простые.

Так как определили аналитические свойства функции  $\bar{\varphi}_1(z)$ , перейдем к вычислению интеграла в (14). Замыкая путь интегрирования сверху, получим формулу

$$\begin{aligned} \tau^{(1)}(az) + \tau^{(2)}(az) = & iA_{-1}^{(\alpha_1)} z^w + iA_{-1}^{(\alpha_1)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{nk} z^{n+w} + \\ & + i \sum_{k=2}^{\infty} \left[ \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_{nk} z^{n+\alpha_k} \right) A_{-1}^{(\alpha_k)} + \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \bar{b}_{nk} z^{n+\bar{\alpha}_k} \right) A_{-1}^{(-\bar{\alpha}_k)} \right] \quad (18) \end{aligned}$$

при  $0 \leq z < 1$

а замыкая снизу — формулу

$$\begin{aligned} \tau^{(1)}(az) + \tau^{(2)}(az) = & -iA_{-1}^{(\alpha_1)} z^{-3} - iA_{-1}^{(\alpha_1)} z^{-1} - z^{-3}(iA_{-1}^{(\alpha_1)} + A_{-1}^{(\alpha_1)} \ln z) - \\ & - z^{-5}(iA_{-1}^{(\alpha_1)} + A_{-1}^{(\alpha_1)} \ln z) + 0\{z^{-7}(1 + \ln z + \ln^2 z)\} \quad (19) \end{aligned}$$

при  $z \rightarrow \infty$ .

где  $\alpha_1 = i\omega$  ( $\omega > 0$ ),

$$\text{Res}_{\alpha=\alpha_k} \bar{\varphi}_1(\alpha) = \text{Res}_{\alpha=\alpha_k} \bar{\varphi}_1(\alpha_k) = A_{-1}^{(\alpha_k)}, \quad \text{Res}(\bar{\varphi}_1(-\bar{\alpha}_k)) = A_{-1}^{(-\bar{\alpha}_k)}$$

$$\text{Res}_{\alpha_k} \varphi_1(\alpha_k + in) = (-1)^n b_{nk} A_{-1}^{(\alpha_k)}, \quad \text{Res}_{\alpha_k} \varphi_1(-\bar{\alpha}_k + in) = (-1)^n \bar{b}_{nk} A_{-1}^{(-\bar{\alpha}_k)},$$

$$b_{nk} = \prod_{p=1}^n \frac{1}{K_1(z_k + ip)}, \quad \bar{b}_{nk} = \prod_{p=1}^n \frac{1}{K_1(-\bar{z}_k + ip)},$$

$$b_{0k} = \bar{b}_{0k} = 1, \quad A_{-1}^{(2)} = -i \frac{2i(R_1 - \bar{\varphi}_1(\vartheta_1 - i) \sin \frac{\pi\omega}{2})}{\omega \left( \pi \sin \frac{\pi\omega}{2} + 2A \right)}$$

$$A_{-1}^{(\alpha_k)} = \frac{2i(R_1 - \bar{\varphi}_1(z_k - i) \operatorname{sh} \frac{\pi z_k}{2})}{z_k \left( \pi \operatorname{sh} \frac{\pi z_k}{2} + 2iA \right)}, \quad A_{-1}^{(-z_k)} = - \frac{i \left( R_1 - \bar{\varphi}_1(-\bar{z}_k - i) \operatorname{sh} \frac{\pi z_k}{2} \right)}{\left( \pi \operatorname{sh} \frac{\pi z_k}{2} - 2iA \right) \bar{z}_k}$$

$$A_{-1}^{(k)} = \operatorname{Res}_{\bar{\varphi}_1}(-ki) \quad (k=3,4,5,6),$$

$$A_{-1}^{(k)} = \lim_{z \rightarrow -ik} [(z+ik)^2 \bar{\varphi}_1(z)] \quad (k=5,6),$$

$$A_{-1}^{(3)} = \frac{4i(1-A)R_1}{\pi\lambda}, \quad A_{-1}^{(4)} = \frac{24i(1-A)AR_1}{\pi\lambda^3}, \quad A_{-1}^{(5)} = \frac{8i(1+3A)A_0^{(4)}}{\pi\lambda}$$

$$- \frac{2(1+7A)A_{-1}^{(4)}}{\pi\lambda}, \quad A_{-1}^{(6)} = - \frac{A_{-1}^{(5)} \bar{K}_1(-5i)}{\lambda} - \frac{A_{-1}^{(5)} d\bar{K}_1(z)}{\lambda dx} \Big|_{z=-5i}$$

$$A_{-1}^{(5)} = \frac{8i(1+3A)A_{-1}^{(4)}}{\pi\lambda}, \quad A_{-1}^{(6)} = - \frac{A_{-1}^{(5)} \bar{K}_1(-5i)}{\lambda}$$

$$A_0^{(4)} = \frac{d}{dx} [(z+4i) \bar{\varphi}_1(z)] \Big|_{z=-i}$$

Отметим, что все вышеприведенные коэффициенты вычислены с помощью (4). Осталось вычислить  $A_0^{(4)}$ . После вычисления  $A_0^{(4)}$  вычеты  $A_{-1}^{(5)}$  и  $A_{-1}^{(6)}$  будут даваться в конечном виде. Приступив к вычислению  $A_0^{(4)}$ , дифференцируем обе части равенства (4) и поставим  $z = -i$ . Получим

$$A_1^{(2)} = - \frac{\bar{\varphi}_1(-i)}{\lambda} \frac{d}{dx} \bar{K}_1(z) \Big|_{z=-i}$$

где

$$A_1^{(2)} = \frac{d\bar{\varphi}_1(z-i)}{dz} \Big|_{z=-i} = \frac{d\bar{\varphi}_1(z)}{dz} \Big|_{z=-2i}$$

Далее, умножив обе части равенства (4) на  $z+ik$  ( $k=2,3$ ), после чего продифференцировав, положим  $z = -ik$ . В итоге получим

$$A_0^{(3)} = \frac{1}{\lambda} \left( iR_1 - R_1 \frac{d}{dz} [(z+2i)\bar{K}_1(z)] \Big|_{z=-2i} - A_1^{(2)} [\bar{K}_1(z)(z+2i)] \Big|_{z=-2i} \right)$$

$$A_0^{(4)} = \frac{1}{\lambda} \left( iR_1 - \bar{K}_1(-3i)A_0^{(3)} - A_{-1}^{(3)} \frac{d}{dz} K_1(z) \Big|_{z=-3i} \right)$$

где

$$A_0^{(0)} = \frac{d}{dz} [(x+3i) \bar{\varphi}_1(z)]_{z=-x}$$

Аналогичными рассуждениями, которые были сделаны выше, можно убедиться, что функция  $\bar{\varphi}_2(z)$  при  $\text{Im} z \leq -1$  имеет те же полюса, что и  $\bar{\varphi}_1(z)$ . При  $\text{Im} z \geq 0$  полюсами функции будут точки  $\alpha = \beta_k + i\pi$ ,  $\alpha = -\beta_k + i\pi$  ( $k=1, 2, \dots$ ,  $n=0, 1, \dots$ ), где  $\beta_k$ ,  $-\beta_k$  — нули функции  $\bar{K}_y(z)$ . Причем полюса функции  $\bar{\varphi}_2(z)$  имеют те же свойства, что и полюса  $\bar{\varphi}_1(z)$ . Тогда асимптотические формулы для  $\bar{\varphi}_2(\text{Im} z)$  будут иметь тот же вид, что и формулы (18), (19), только в этих формулах надо заменить  $\alpha_k$ ,  $-\alpha_k$  на  $\beta_k$ ,  $-\beta_k$  соответственно,  $\bar{K}_1(z)$  на  $\bar{K}_c(z)$ , а  $\bar{\varphi}_1(z)$  на  $\bar{\varphi}_2(z)$ .

Таким образом, искомые интенсивности контактных напряжений и их асимптотические формулы можно получить элементарным образом, исходя из (14), (17) и (18), (19), что и требовалось при постановке задачи.

В частном случае одного горизонтального бесконечного стрингера, задача сводится к решению функционального уравнения

$$\text{acth} \frac{\pi x}{2} \bar{\tau}(x) + \lambda \bar{\tau}(x-i) = i P_1 \quad (-1 < \text{Im} x < 0) \quad (20)$$

где  $\bar{\tau}(x) = \bar{\tau}^{(0)}(x)$ .

Решение функционального уравнения (20) можно получить, если в (6) полагать, что  $Y_1(\alpha) = 1$ , то есть

$$\bar{\tau}(x) = \frac{i P_1}{2} \text{sh} \frac{\pi x}{2} \Gamma(ix) \int_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{\lambda^{-s} \Gamma(1-s)}{\text{sh} \pi(x-s) \text{ch} \frac{\pi s}{2} \Gamma(1+is)} ds$$

$$(-1 < x < 0)$$

Отсюда, для  $\bar{\tau}(-i)$  получим

$$\bar{\tau}(-i) = -\frac{i P_1}{2} \int_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{\lambda^{s-i} \Gamma(1-s)}{\text{sh} \pi \text{sch} \frac{\pi s}{2} \Gamma(1+is)} ds \quad (-1 < x < 0)$$

Здесь опять для исследования аналитических свойств функции  $\bar{\tau}(z)$  удобно пользоваться уравнением (20). Рассуждениями, аналогичными тем, которые были сделаны выше, легко убедиться, что только точки  $\alpha = i(2n+1)$ ,  $\alpha = -i(2k+1)$  ( $n=0, 1, \dots$ ,  $k=1, 2, \dots$ ) являются полюсами функции  $\bar{\tau}(z)$  и притом простыми. Исходя из этого, можно получить следующие формулы для  $\bar{\tau}(ax)$ :

$$\bar{\tau}(ax) = i \sum_{n=0}^{\infty} B_{-1}^{(2n+1)} x^{2n+1} \quad (0 < x < 1) \quad (21)$$

$$z(ax) = -i \sum_{k=1}^{\infty} A_{-1}^{(2k+1)} x^{-2k-1} + O(x^{-2m-3})$$

при  $x \rightarrow \infty$ ,

где  $A_{-1}^{(2k+1)}$  и  $B_{-1}^{(2n+1)}$  — вычеты функции  $\bar{\varphi}_1(z)$ , соответствующие полюсам  $a = -i(2k+1)$ ,  $z = i(2n+1)$ , соответственно, которые даются с помощью рекуррентных соотношений

$$B_{-1}^{(2n+1)} = \frac{2i}{\pi(2n+1)} \left( \frac{i\pi}{4n} B_{-1}^{(2n-1)} - P_1 \right) \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$B_{-1}^{(1)} = \frac{2i}{\pi} (\bar{z}(0) - P_1), \quad \bar{z}(0) = \frac{\lambda\pi}{2} (P_1 - \bar{z}(-i))$$

$$A_{-1}^{(2k+1)} = \frac{4ik}{\pi\lambda^2} \left( P_1 + i\pi \left( k - \frac{1}{2} \right) A_{-1}^{(2k-1)} \right) \quad (k=2, 3, \dots)$$

$$A_{-1}^{(3)} = \frac{4iP_1}{\pi\lambda}$$

Тот факт, что в точке приложения силы в подобных задачах контактные напряжения имеют логарифмическую особенность, следует из (21) при  $x \rightarrow 1$ , поскольку  $B_{-1}^{(2n+1)}$  при  $n \rightarrow \infty$  имеет порядок  $\frac{1}{n}$ .

## A PROBLEM FOR ELASTIC INFINITE PLATE, ARMED BY CROSS-FORMED INFINITE STRINGER

E. KCH. GRIGORYAN, D. R. TOROSYAN

ԽԱՉԱԶԵԿ. ԱՆՎԵՐՋ ՎԵՐԴՐԱԿՆԵՐՈՎ ՌԻՖԵՂԱՅՎԱԾ ԱՆՎԵՐՋ  
ԱՌԱՉԳԱԿԱՆ ՍԱԼԻ ԽՆԴԻՐԸ

Է. Խ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Գ. Ռ. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Գիտարկված է անվերջ սալի և նրան ամրացված խաչաձև վերդրակների փոխազդեցության խնդիրը, երբ սալը ձգվում է անվերջում, խնդիրը լուծված է ֆուրյեի ձևափոխությունների օգնությամբ: Ստացված են խնդրի փակ լուծումը և կոնտակտային լարումների ասիմպտոտիկ բանաձևերը:

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kotler W. T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1955, vol. 8, № 2.
2. Григорян Э. X. Решение задачи упругого конечного включения, выходящего на границу полуплоскости.—Уч. записки ЕГУ, естеств. науки, 1981, № 3.

3. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости.—М.: Наука, 1981.
4. *Григорян Э. Х.* Об одном подходе к решению задач для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение, выходящее на границу полуплоскости.—Междуз. сб. науч. трудов, Механика, Ереван, изд. ЕГУ, 1987, № 6.
5. *Григорян Э. Х.* О решении контактной задачи для упругой полуплоскости, граница которой усилена двумя полубесконечными накладками.—Междуз. сб. науч. трудов, Механика, Ереван, изд. ЕГУ, 1991, № 8.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию

5.11.1992

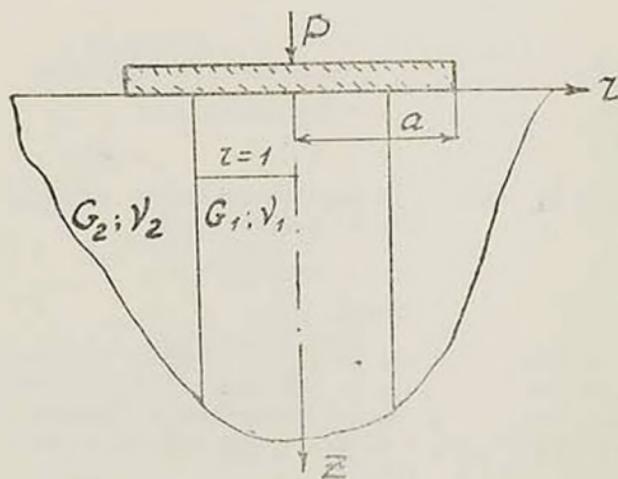
УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ  
 СОСТАВНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

ПАПОЯН С. О.

Исследуется осесимметричная контактная задача для упругого полупространства, имеющего цилиндрическую выемку, в которую вложен цилиндр из другого материала. На общей торцевой плоскости действует жесткий штамп. Решение задачи сведено к интегральному уравнению, затем—к квазиволле регулярной системе.

В работе исследуется осесимметричная контактная задача для упругого полупространства, имеющего цилиндрическую выемку, в которую вложен упругий цилиндр из другого материала. Контактные задачи для упругого полупространства с выемкой рассмотрены в работах [1—4]. Задача решается при помощи функции напряжений и сводится к интегральному уравнению, а затем—к квазиволле регулярной системе.



Фиг. 1.

Упругое полупространство имеет полубесконечную цилиндрическую выемку радиусом  $r=1$ , в которую вложен упругий полубесконечный цилиндр из другого материала с радиусом  $r=1$ . Цилиндр по боковой поверхности полностью сцеплен с полупространством (фиг. 1)

На граничной поверхности составного полупространства действует гладкий жесткий круглый штамп, радиус которого больше радиуса выемки  $a > 1$ , то есть линия раздела материалов останется под штампом. На плоской граничной поверхности полупространства вне штампа заданы нормальные напряжения. Трение между штампом и полупространством отсутствует. Упругий цилиндр имеет механические постоянные  $G_1, \nu_1$ , а полупространство с выемкой —  $G_2, \nu_2$ .

Граничные условия и условия контакта имеют вид.

$$\tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = 0 \quad (0 < r < 1) \quad (1)$$

$$U_z^{(1)}(r, 0) = c \quad (0 \leq r \leq 1) \quad (2)$$

$$\tau_{rz}^{(2)}(r, 0) = 0 \quad (1 < r < \infty) \quad (3)$$

$$U_z^{(1)}(r, 0) = c \quad (1 \leq r \leq a); \quad \tau_{rz}^{(2)}(r, 0) = \tau(r) \quad (a < r < \infty) \quad (4)$$

$$U_r^{(1)}(1, z) = U_r^{(2)}(1, z); \quad U_z^{(1)}(1, z) = U_z^{(2)}(1, z) \quad (0 < z < \infty) \quad (5)$$

$$\sigma_r^{(1)}(1, z) = \sigma_r^{(2)}(1, z); \quad \tau_{rz}^{(1)}(1, z) = \tau_{rz}^{(2)}(1, z)$$

Бигармоническую функцию напряжений для полубесконечного цилиндра удобно представить в виде [1]

$$\Phi_1(r, z) = E_0 z^3 + \int_0^{\infty} [C_1(\mu) J_0(\mu r) + D_1(\mu) \cdot \mu r I_1(\mu r)] \sin \mu z d\mu \quad (6)$$

$$(0 \leq r \leq 1); \quad (0 \leq z < \infty)$$

а для полупространства с цилиндрической выемкой — в виде [2]

$$\Phi_2(r, z) = \int_0^{\infty} [A(\mu) + \mu z B(\mu)] e^{-\mu z} W_0(\mu r) d\mu + \int_0^{\infty} [C_2(\mu) K_0(\mu r) + D_2(\mu) \mu r K_1(\mu r)] \sin \mu z d\mu \quad (7)$$

$$(1 \leq r < \infty); \quad (0 \leq z < \infty)$$

где  $W_n(\mu r) = J_n(\mu r) Y_1(\mu) - Y_n(\mu r) J_1(\mu)$ , а  $J_n(x)$ ;  $Y_n(x)$ ,  $I_n(x)$  и  $K_n(x)$  — функции Бесселя [5]

Пользуясь известными формулами [1], выражающими компоненты напряжений и перемещений через функцию напряжений, и удовлетворяя условиям (2) и (3), получим

$$E_0 = G_1 c / (1 - 2\nu_1); \quad A(\mu) = 2\nu_2 B(\mu) \quad (8)$$

а условие (1) удовлетворяется тождественно.

Удовлетворяя контактным условиям (5), для определения неизвестных функций  $C_i(\beta)$  и  $D_i(\beta)$  ( $i=1, 2$ ) получаем следующую систему из четырех уравнений:

$$\begin{aligned}
 & C_1(\beta)I_1(\beta) + D_1(\beta) \cdot \beta I_0(\beta) + G[C_2(\beta)K_1(\beta) + D_2(\beta) \cdot \beta K_0(\beta)] = 0 \\
 & C_1(\beta)I_0(\beta) + D_1(\beta)[4(1-\nu_1)I_0(\beta) + \beta I_1(\beta)] - \\
 & - G\{C_2(\beta)K_0(\beta) - D_2(\beta)[4(1-\nu_2)K_0(\beta) - \beta K_1(\beta)]\} = F_1(\beta) \\
 & C_1(\beta)I_1(\beta) + D_1(\beta)[2(1-\nu_1)I_1(\beta) + \beta I_0(\beta)] = \\
 & + C_2(\beta)K_1(\beta) - D_2(\beta)[2(1-\nu_2)K_1(\beta) - \beta K_0(\beta)] = 0 \\
 & C_1(\beta) \left[ I_0(\beta) - \frac{I_1(\beta)}{\beta} \right] + D_1(\beta)[(1-2\nu_1)I_0(\beta) + \beta I_1(\beta)] - \\
 & - C_2(\beta) \left[ K_0(\beta) + \frac{K_1(\beta)}{\beta} \right] + D_2(\beta)[(1-2\nu_2)K_0(\beta) - \beta K_1(\beta)] = F_2(\beta)
 \end{aligned} \tag{9}$$

здесь  $F_i(\beta)$  ( $i=1, 2$ ) определяются формулами:

$$F_1(\beta) = GF_2(\beta) - \frac{8G}{\pi^2\beta^2} \int_0^{\infty} \frac{\mu B^*(\mu) d\mu}{\mu^2 + \beta^2} \tag{10}$$

$$F_2(\beta) = \frac{8}{\pi^2\beta} \int_0^{\infty} \frac{\mu B^*(\mu) d\mu}{(\mu^2 + \beta^2)^2}; \quad G = G_1/G_2;$$

а  $B^*(\mu) = \mu^2 B(\mu)$ ; (11)

Таким образом, все неизвестные, входящие в (6) и (7), выражаются через  $B^*(\mu)$  (11).

Удовлетворяя теперь смешанным условиям (4), имея в виду (8), для определения  $B^*(\mu)$  получим следующие парные интегральные уравнения, содержащие функцию Вебера [2—3]:

$$\int_0^{\infty} B^*(\mu) W_0(\mu r) d\mu = -\frac{G_2 c}{1-\nu_2} \quad (1 \leq r \leq a) \tag{12}$$

$$\int_0^{\infty} \mu B^*(\mu) W_0(\mu r) d\mu = g(r) - M(r) \quad (a < r < \infty)$$

где

$$\begin{aligned}
 M(r) = \int_0^{\infty} \beta^2 \{ C_2(\beta) K_0(\beta r) - D_2(\beta) [2(2-\nu_2) K_0(\beta r) - \\
 - \beta r K_1(\beta r)] \} d\beta
 \end{aligned} \tag{13}$$

Дополним первое уравнение (12) на интервале ( $r > a$ ) при помощи неизвестной функции  $f(r)$ :

$$\int_0^{\infty} B^*(\mu) W_0(\mu r) d\mu = \begin{cases} -\frac{Gc}{1-\nu_2} & (1 \leq r \leq a) \\ -\frac{G}{1-\nu_2} f(r) & (a \leq r < \infty) \end{cases} \quad (14)$$

Отсюда при помощи формул интегрального преобразования Вебера-Орра для  $B^*(\mu)$  получим

$$B^*(\mu) = -\frac{G_2}{1-\nu_2} \frac{caW_1(\mu a)}{\Delta(\mu)} - \frac{G_2}{1-\nu_2} \cdot \frac{\mu}{\Delta(\mu)} \int_a^{\infty} r f(r) W_0(\mu r) dr \quad (15)$$

где

$$\Delta(\mu) = Y_1^2(\mu) + J_1^2(\mu) \quad (16)$$

Подставляя  $B^*(\mu)$  (15) во второе уравнение (12), имея в виду (8)–(11) и (13), после ряда преобразований для определения  $S(t)$ , связанной с  $f(r)$  формулой

$$S(t) = t \int_a^r \frac{f'(r) dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \quad (17)$$

получим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода [2, 3, 4]:

$$S(x) + c = \Phi(x) + \int_a^{\infty} S(t) K(t, x) dt \quad (a < x < \infty) \quad (18)$$

Ядро и свободный член этого уравнения имеют вид

$$K(t, x) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{J_1(\mu)}{K_1(\mu)} + \frac{1}{\mu K_1^2(\mu) \Delta_1(\mu)} \left[ \omega_1(\mu x) \left( 1 - \mu t + \mu \frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)} \right) - 2G(1-\nu_2)\omega_2(\mu x) \right] \right\} e^{-\mu(t+x)} d\mu \quad (19)$$

$$\Phi(x) = -\frac{1-\nu_2}{G_2} \int_x^{\infty} \frac{r \varphi(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr$$

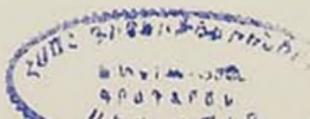
В (19) введены обозначения:

$$\omega_1(\mu x) = \omega_0(\mu x) [E(\mu) - GN(\mu)] + 2(1-\nu_1)2(1-\nu_2) \times \\ \times [z_1(\mu) - z_2(\mu) - 1/\mu] G$$

$$\omega_2(\mu x) = \omega_0(\mu x) \Lambda(\mu) + 2(1-\nu_1) [P(\mu) + (1-\mu x)Q(\mu)]$$

$$\omega_0(\mu x) = (1-G) [1 - \mu x + \mu x_2(\mu)] - 2(1-\nu_2)G$$

$$\Delta_1(\mu) = (1-G)^2 \cdot N(\mu) \cdot L(\mu) + 2(1-\nu_1)2(1-\nu_2)GQ^2(\mu) +$$



$$+2(1-\nu_1)(1-G)L(\mu)[2z_1(\mu)-1/\mu]+2(1-\nu_2)(1-G)GN(\mu) \times \quad (20)$$

$$\times [2z_2(\mu)+1/\mu];$$

$$z_1(\mu) = \frac{I_0(\mu)}{I_1(\mu)}; \quad z_2(\mu) = \frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)}; \quad z_3(\mu) = \mu[1-z_1(\mu)+z_2(\mu)],$$

$$N(\mu) = \mu[1-z_1^2(\mu)] + \frac{2(1-\nu_1)}{\mu}; \quad P(\mu) = z_3(\mu) + \frac{2(1-\nu_2)}{\mu},$$

$$L(\mu) = \mu[1-z_2^2(\mu)] + \frac{2(1-\nu_2)}{\mu}; \quad Q(\mu) = z_1(\mu) + z_2(\mu);$$

$$E(\mu) = \mu[1-z_1^2(\mu)] - 4(1-\nu_1)z_1(\mu);$$

При получении уравнения (18) были использованы следующие формулы [4,6]:

$$\int_x^{\infty} \frac{r W_0(\mu r)}{\sqrt{r^2-x^2}} dr = \frac{\cos \mu x Y_1(\mu) - \sin \mu x J_1(\mu)}{\mu};$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\mu |\cos \beta x Y_1(\beta) - \sin \beta x J_1(\beta)|}{\Delta(\beta)(\mu^2 - \beta^2)} d\beta = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{e^{-\mu x}}{K_1(\mu)}; \quad (21)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{T(\mu, x) T(\mu, t)}{\Delta(\mu)} d\mu = \frac{\pi}{2} [\delta(t-x) + \delta(t+x)] -$$

$$- \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{I_1(\mu)}{K_1(\mu)} e^{-\mu(t+x)} d\mu;$$

где

$$T(\mu, x) = \cos \mu x Y_1(\mu) - \sin \mu x J_1(\mu). \quad (22)$$

Для сведения интегрального уравнения (18) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений представим функцию  $S(x)$  в виде ряда по многочленам Лежандра:

$$S(x) + c = 1/x \sum_{n=1}^{\infty} X_n P_{2n-1}(a/x). \quad (23)$$

Подставляя (23) в (18) и используя ортогональность функций Лежандра для неизвестных коэффициентов  $X_n$ , получим бесконечную систему

$$X_n = \sum_{m=1}^{\infty} X_m A_{m,n} + b_n \quad (n=1; 2; 3; \dots) \quad (24)$$

где

$$A_{m,n} = \frac{1}{(4m-1)a} \int_a^{\infty} \Pi_n(x) dx \int_a^{\infty} \Pi_n(t) [xt \cdot k(t,x)]^{-x} dt$$

$$b_n = \int_a^{\infty} \Pi_n(x) [x \Phi^2(x)]_x dx$$

$$\Pi_n(x) = P_{2n}(a/x) - P_{2(n-1)}(a/x) \quad (25)$$

$$\Phi^2(x) = \Phi(x) - c \int_0^1 \frac{I_1(\mu)}{K_1(\mu)} -$$

$$- \frac{1}{\Gamma^2 K_1(\mu) \Delta(\mu)} \left[ \mu(a - x_2(\mu)) w_1(\mu, x) + 2(1 - x_2) G w_2(\mu, x) \right] \frac{e^{-\mu(a-x)}}{\mu} d\mu$$

Учитывая оценки для многочленов Лежандра (6)

$$|P_n(x)| \leq \left( \frac{2}{n\pi - (1-x^2)} \right)^{1/2}, \quad |x| < 1 \quad (26)$$

и поведения функций  $K(t, x)$  и  $\Phi(x)$  показывается, что сумма модулей коэффициентов бесконечной системы убывает

$$\sum_{m=1}^{\infty} |A_{m,n}| \sim \frac{A_0}{n^{3/2}}$$

а свободный член имеет порядок  $O(1/n^{3/2})$ .

Отсюда следует, что сумма модулей коэффициентов и свободные члены бесконечной системы (24) при возрастании номера  $n$  стремятся к нулю не медленнее, чем  $n^{-1/2}$ . Следовательно, система (24) квазиполне регулярна.

Равнодействующая контактных напряжений  $P$  определяется из условия

$$\int_0^1 \sigma_x^{(1)}(r, 0) r dr + \int_1^c \sigma_x^{(2)}(r, 0) \cdot r \cdot dr = \frac{P}{2\pi}$$

которая также показывает связь между силой  $P$  и вертикальным перемещением штампа  $s$ , которое фигурирует во всех полученных выражениях.

THE OXISIMMETRICAL CONTACT PROBLEM FOR AN  
COMPOSITE HALFE SPEASE

S. H. PAPOYAN

ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՐԵՏՐԻԿ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ  
ԿԻՄԱՏԱՐԱՄՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ս. Հ. ՊԼՊՈՅԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկվում է գլանային խոռոչ ունեցող կիսատարածության կոնտակտային խնդիրը, երբ խոռոչի մեջ դրված է ուրիշ նյութից պատրաստված գլան, իսկ ընդհանուր ճակատային հարթության վրա գործում է կոշա դրոշմը: Խնդրի լուծումը բերված է ինտեգրալ հավասարման, այնուհետև բվագիլիովին ռեկուլյար համակարգի:

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Некоторые осесимметричные задачи для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием — Изв АН АрмССР, Механика, 1969 г., т. 22, № 2, с. 3—13.
2. Макарян В. С., Папоян С. О. Об одной контактной задаче для упругого полупространства с полубесконечной цилиндрической выемкой. — Изв АН АрмССР, Механика, 1980 г., т. 33, № 1, с. 3—11.
3. Папоян С. О. Осесимметричная контактная задача для составного упругого слоя — В сб.: Исследования по механике твердого деформируемого тела, вып. 2 — Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1983, с. 120—128.
4. Папоян С. О. Осесимметричная контактная задача для составного полупространства с полубесконечным разрезом на контактной поверхности — В сб.: Механика деформируемого твердого тела. Ереван: Изд. АН АрмССР, 1986, с. 144—150.
5. Бейтман Т., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2 — М.: Наука, 1977, 295 с.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений — М.: Наука, 1971 1108 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
29.X 1992

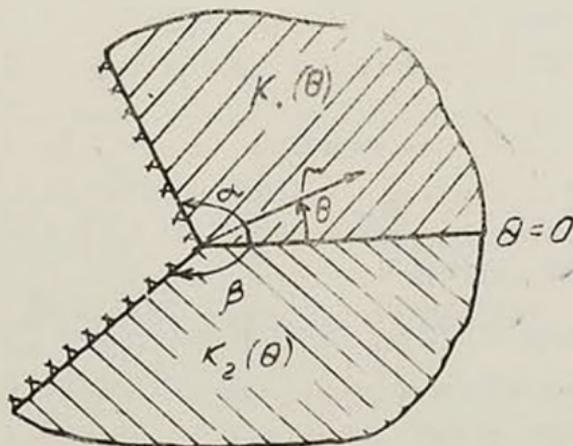
УДК 539.376

О ПРОДОЛЬНОМ СДВИГЕ НЕОДНОРОДНО-СОСТАВНОГО  
 КЛИНА

АКОПЯН А. Г.

Рассматривается влияние неоднородности материала по экспоненциальному закону от кольцевой координаты на мало-напряженное состояние на крае контактной поверхности составного клиновидного тела со степенным законом упрочнения в условиях продольного сдвига. Принимаем, что внешние грани клина жестко защемлены. Для однородного составного клина вопросы, связанные с малонапряженностью при продольном сдвиге, исследованы в работах [1—3]. Задача малонапряженности неоднородно-составного клина со свободными внешними гранями при продольном сдвиге рассмотрена в работах [4, 5].

1. *Постановка задачи.* Пусть два длинных цилиндрических тела из неоднородных материалов со степенным упрочнением, спаянные друг с другом по некоторой части боковых поверхностей полным прилипанием, подвергаются продольному сдвигу. В угловой точке контактной поверхности поместим начало цилиндрической системы координат, ось  $\theta=0$  проведем по контактной поверхности, ось  $z$ —по продольному направлению (фиг. 1).



Фиг. 1.

Между интенсивностями напряжений и деформаций принимаем зависимость

$$\varepsilon_0 = k \varepsilon_0^m, \quad k = k(\theta) \quad (1.1)$$

где  $k(\theta)$  характеризует неоднородные деформативные свойства материалов и определяется из соответствующих экспериментов. Степени упрочнения  $m$  у обоих материалов принимаем одинаковыми, а функции  $k(\theta)$  — различными.

Относительно перемещения будем иметь дифференциальное уравнение [5]

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ r k \varepsilon_0^{m-1} \frac{\partial w}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{k}{r} \varepsilon_0^{m-1} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (1.2)$$

2. Представление решения. Величины в областях  $0 \leq \theta \leq \alpha$ ,  $-\beta \leq r \leq 0$  обозначим индексами  $i=1, 2$ , соответственно. Компоненты напряжений и перемещений в каждой области представим в виде

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= k_i r^{(i-1)m} \chi_i f_i, & \varepsilon_{\theta\theta} &= k_i r^{(i-1)m} \chi_i f_i, \\ w_i &= r^i f_i, & \chi_i &= (\sqrt{f_i^2 + \lambda^2} f_i^2)^{m-1} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $f_i = f_i(\lambda, \theta)$  и  $i$  — искомые функция и постоянная, соответственно.

Подставляя выражения перемещений из (2.1) в (1.2) и вводя новую функцию  $\psi_i = f_i / f_i$ , приходим к дифференциальному уравнению [4]

$$\psi_i'' = - \frac{(\psi_i^2 + \lambda^2)(\psi_i^2 + 2nh_i \psi_i + s^2)}{\psi_i^2 + \lambda^2 n} \quad (2.2)$$

где

$$s^2 = \lambda(i + n - 1), \quad 2h_i = k_i / k_i, \quad n = 1/m.$$

В случае экспоненциального закона неоднородностей, то есть когда

$$k_i = k_i^0 \exp(2h_i^0 \theta) \quad (2.3)$$

где  $k_i^0$  и  $h_i^0$  — постоянные материалов, имеем  $h_i = \text{const}$ .

Тогда общее решение уравнений (2.2), когда  $\Delta_i = s^2 - n^2 h_i^2 > 0$ , представится в виде [4,5]

$$\frac{E_i}{\sqrt{\Delta_i}} \arctg \frac{\psi_i + nh_i}{\sqrt{\Delta_i}} + G_i \arctg \frac{\psi_i}{i} + Q_i \ln \left( \sqrt{\frac{\psi_i^2 + 2nh_i \psi_i + s^2}{\psi_i^2 + \lambda^2}} \frac{i}{s} \right) = H_i - 0 \quad (2.4)$$

где  $H_i$  — произвольные постоянные и введены обозначения

$$\begin{aligned} B_i G_i &= (n-1)^2, & B_i E_i &= 2(n-1)n^2 h_i^2 + (1-i)(n-1)^2 \\ B_i Q_i &= 2(n-1)nh_i, & B_i &= (n-1)^2 + 4n^2 h_i^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Используя граничные условия на гранях клина и условия сопряже-

ния на контактной поверхности, из (2.4) определяем  $H_1$  и  $\lambda$ , следовательно, и функции  $\psi_i$  в соответствующих областях.

3. *Крайевые условия.* На границах клина заданы нулевые перемещения. Для функции  $f_i$  имеем граничные условия

$$f_1(z) = f_2(-\beta) = 0$$

а также условия сопряжения на контактной поверхности

$$f_1 = f_2, \quad f_1/\lambda_1 = \gamma f_2/\lambda_2 \quad \text{при } \theta = 0$$

где  $\gamma = k_2(0)/k_1(0)$ . Для  $\psi_i$  будем иметь условия

$$\psi_1(\alpha) = -\psi_2(-\beta) = -\infty \quad (3.1)$$

и условие на контактной поверхности

$$\mu_1(\sqrt{\mu_1^2 + \lambda^2})^{m-1} = \gamma \mu_2(\sqrt{\mu_2^2 + \lambda^2})^{m-1} \quad (3.2)$$

причем,  $\mu_i = \psi_i(\lambda, 0)$ . Таким образом, приходим к трехточечной задаче об определении собственной функции  $\psi_i$  и собственного значения  $\lambda$  из уравнений (2.4) при граничных условиях (3.1), (3.2).

Используя граничные условия (3.1), из (2.4) находим

$$\begin{aligned} H_1 &= z - \frac{\pi}{2} \left( G_1 + \frac{E_1}{\sqrt{\Delta_1}} \right) + Q_1 \ln \frac{\lambda}{s} \\ H_2 &= -\beta + \frac{\pi}{2} \left( G_2 + \frac{E_2}{\sqrt{\Delta_2}} \right) + Q_2 \ln \frac{\lambda}{s}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Принимая в (2.4)  $\theta = 0$ , получаем уравнения относительно  $\mu_i$

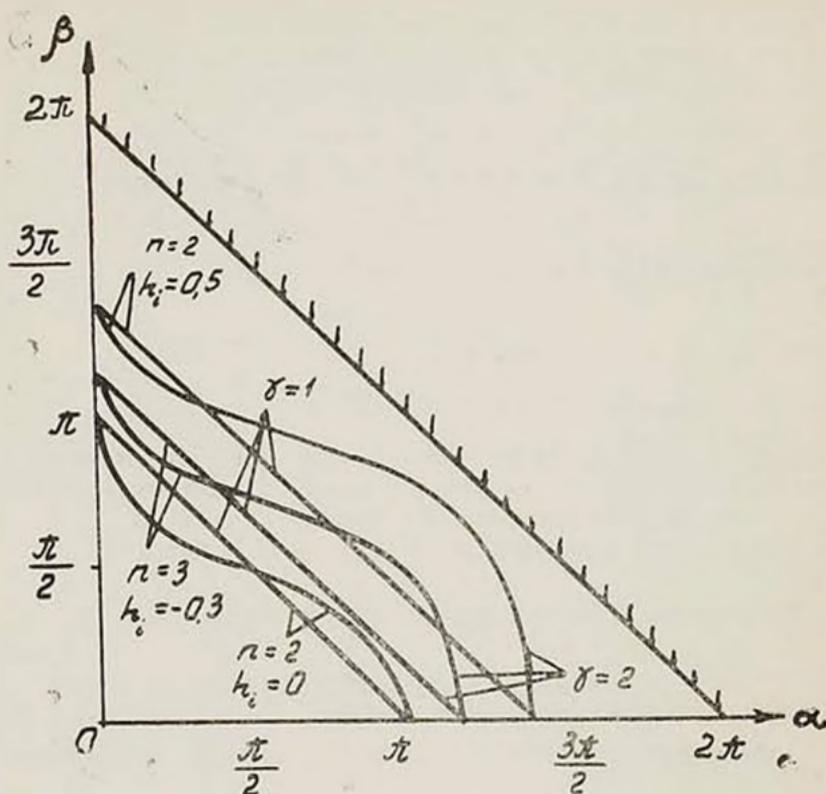
$$\alpha = \frac{E_1}{\sqrt{\Delta_1}} \left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\mu_1 + nh_1}{\sqrt{\Delta_1}} \right) + G_1 \left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{\lambda} \right) + \frac{Q_1}{2} \ln \frac{\mu_1^2 + 2nh_1\mu_1 + s^2}{\mu_1^2 + \lambda^2}, \quad (3.4)$$

$$\beta = \frac{E_2}{\sqrt{\Delta_2}} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_2 + nh_2}{\sqrt{\Delta_2}} \right) + G_2 \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_2}{\lambda} \right) - \frac{Q_2}{2} \ln \frac{\mu_2^2 + 2nh_2\mu_2 + s^2}{\mu_2^2 + \lambda^2}.$$

Полученные зависимости (3.2) и (3.4) составляют систему из трех трансцендентных уравнений относительно  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $\lambda$ , определяющих в конечном счете  $\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, n, h_1)$ .

4. *Гиперповерхность конечных напряжений.* Условие  $\lambda = 1$  в пространстве параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $n$ ,  $h_1$  определяет некоторую поверхность конечных напряжений, отделяющую зону малонапряженности от зоны сильной концентрации напряжений. Принимая в (3.2) и (3.4)  $\lambda = 1$ , получим систему трансцендентных уравнений предельных кривых малонапряженности. Результаты численного исследования этой системы приведены на фиг. 2, где показано изменение зоны малонапряженности (ниже кривых) в зависимости от неоднородности механических свойств материалов.

5. *Случай одного неоднородного клина.* Когда клин изготовлен



Фиг. 2.

из одного неоднородного материала, то есть при  $\gamma=1$ ,  $h_1=h_2=h$  полагая  $\mu_1=\mu_2$ , уравнение (3.2) удовлетворим тождественно, а из (3.4) находим

$$\lambda = \frac{M + \sqrt{M^2 + 4|N^2 - (n-1)^4| \{N^2 n^2 h^2 + [2(n+1)n^2 h^2 + (n-1)^2] h^2\}}}{2[(n-1)^4 - N^2]} \quad (5.1)$$

$$M = (n-1)[N^2 + 4(n^2 - 1)n^2 h^2 + 2(n-1)^2]$$

$$N = (n-1)^2(2\nu - 1) + 8n^2 h^2 \nu, \quad \nu = \sigma_0/\pi, \quad \alpha + \beta = 2\alpha_0$$

Найденное значение  $\lambda$  совпадает с соответствующей формулой работы [5] для клина со свободными границами.

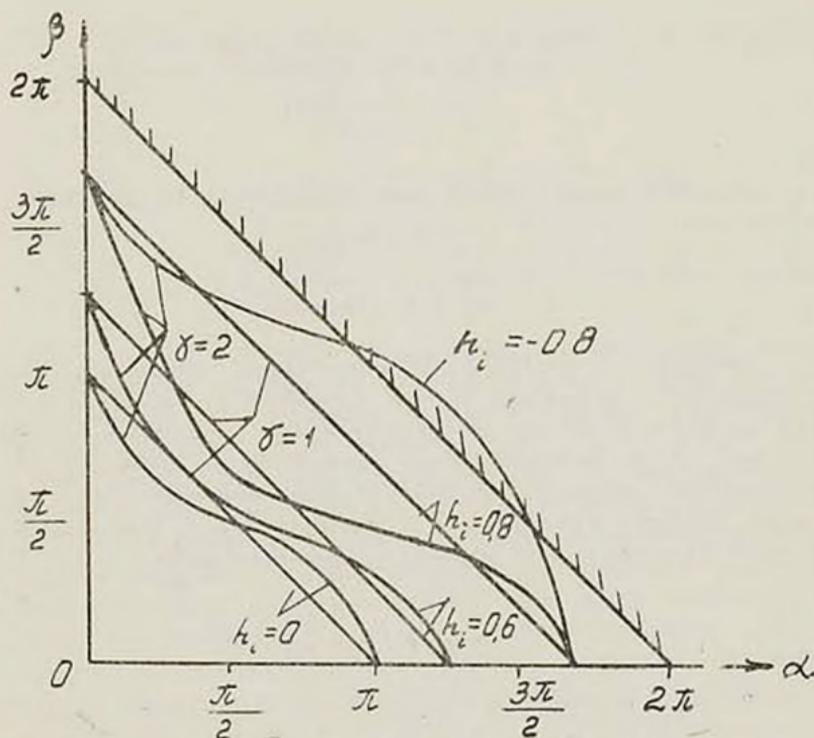
6. *Линейно-упругий неоднородно-составной клин.* Когда составной клин изготовлен из линейно-упругих неоднородных материалов, принимая в системе уравнений (3.2), (3.4)  $m=n=1$ , приходим к уравнению относительно  $\lambda$ :

$$\sqrt{\lambda^2 - h^2} \operatorname{ctg}(\alpha \sqrt{\lambda^2 - h^2}) + \gamma \sqrt{\lambda^2 - h^2} \operatorname{ctg}(\beta \sqrt{\lambda^2 - h^2}) + h_1 - \gamma h_2 = 0 \quad (6.1)$$

определяющему  $\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, h_1)$

Далее, полагая здесь  $\lambda=1$ , определяем уравнение предельных кривых малонапряженности. На фиг. 3 представлены эти кривые в плоскости  $\alpha\beta$ , отделяющие зону малонапряженности (ниже кривых) от зоны сильной концентрации напряжений (выше кривых).

В случае, когда линейно-упругий клин изготовлен из одного сплошного неоднородного материала, т. е. при  $\gamma=1$ ,  $h_1=h_2=h$ , согласно (6.1) имеем



Фиг. 3.

$$\lambda = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}} \quad (6.2)$$

Отсюда заключаем, что при растворе угла клина

$$2\alpha_* \leq \frac{\pi}{\sqrt{1-h^2}} \quad (6.3)$$

соблюдается условие малонапряженности.

Формулы (6.2) и (6.3) совпадают с соответствующими формулами работы [5] для клина со свободными границами.

В рассмотренной задаче, если для одного однородного клина с углом раствора больше  $\pi$ , всегда имеется концентрация напряжений в вершине, то для одного неоднородного клина, как показывают графики (фиг. 2 и 3), эта закономерность нарушается. Из этих графиков

закключаем также, что для одних и тех же значений степени упрочнения и раствора углов клина, в зависимости от неоднородности механических свойств материалов, клин может находиться в состоянии малонапряженности или сильной концентрации напряжений.

## ABOUT LONGITUDINAL SHIFT OF NONHOMOGENEOUS-COMPOUND WEDGE

A. G. HAKOBIAN

ԱՆՀՈՄՈԳՈՅԹ-ԲՈՂԱԿՐՅՈՒ ԱՆՊԻ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ԽԱՂԻ ԽՈՒՄԻ

Ա. Գ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Դիտարկվում է աստիճանային ամրապնդվող, անհամասեռ նյութերից պատրաստված բաղադրյալ մարմնի մակերևույթի ամրակցված սեպաձև եզրի լարվածային վիճակը երկայնական սահմանի պայմաններում: Ստացված են սեպի թերլարվածային վիճակի տիրույթները լարումների խիստ կոնցենտրացիայի տիրույթից բաժանող կորերի հավասարումները: Ցույց է տրված նյութերի մեխանիկական հատկությունների անհամասեռությունից կախված թերլարվածության տիրույթների փոփոխությունը:

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Чобинян К. С. Напряжения в составных уругих телах.—Ереван Изд-во АН Армении, 1987. 338 с.
- 2 Задоян М. А. Пространственные задачи теории пластичности—М: Наука, 1992 384 с.
- 3 Аксентян О. К., Луцник О. И. Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина—Изв. АН СССР. МТТ. 1978 № 5, с. 102—108
- 4 Задоян М. А. Продольный сдвиг составного клина—Докл. АН СССР, 1987, т. 296, № 2, с. 297—302.
- 5 Акопян А. Г., Задоян М. А. Малонапряженность неоднородно-составных клиньев.—Изв. Российской АН, МТТ, 1992 № 5, с. 88—96.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
17.11.1992

УДК 539.43

УСТОЙЧИВОСТЬ МОДУЛЯЦИОННОЙ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛАСТИНЕ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ

БАГДОЕВ А. Г., МОВСИСЯН Л. А.

Изучается вопрос распространения одномерной квазимонохроматической волны в нелинейно упругой пластине, находящейся на вязкоупругом полупространстве.

На основании дисперсионного уравнения, найденного в асимптотическом приближении, получено уравнение модуляции и условия устойчивости распространения волн.

Изучается вопрос устойчивости распространения одномерной квазимонохроматической волны в нелинейно-упругой пластине, находящейся на вязкоупругом полупространстве. Случай упругого основания рассмотрен в [1].

1. Пусть нелинейно-упругая [2, 3] пластинка находится на вязкоупругом полупространстве и по пластине распространяется изгибная волна.

Одномерное уравнение движения пластинки будет [3]

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z \quad (1.1)$$

где

$$D_1 = \frac{E h^3 \gamma_2 \nu_1}{135(1-\nu_1^2)}, \quad \nu_1 = \frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^2}, \quad \rho - \text{плотность пластинки, } Z - \text{влияние основания.}$$

Уравнениями движения основания будут

$$\tilde{\mu} \Delta u + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \frac{\partial e}{\partial x} - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \tilde{\mu} \Delta v + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \frac{\partial e}{\partial y} = \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

где для вязкоупругих операторов имеем

$$\tilde{\mu} u = \mu \left[ u - \int_{-\infty}^t \Gamma(t-s) u(s) ds \right] \quad (1.3)$$

и аналогичное выражение для  $\tilde{\lambda}$ , т. е. принимается, что коэффициент Пуассона постоянен.

На границе контакта пластинки с основанием принимается следующее условие:

$$v=w, \quad \sigma_y=Z, \quad \tau_{xy}=0 \quad \text{при } y=0 \quad (1.4)$$

Решение (1.1) и (1.2) ищется в виде

$$w=ae^{i\tau} + \bar{a}e^{-i\tau}, \quad \tau=kx-\omega t$$

$$u=f(y)e^{i\tau} + \bar{f}(y)e^{-i\tau}, \quad v=\varphi(y)e^{i\tau} + \bar{\varphi}(y)e^{-i\tau} \quad (1.5)$$

где чертой обозначены комплексно-сопряженные значения.

Подставляя (1.5) в (1.2) и в выражениях  $f$  и  $\varphi$  оставляя ограниченные части решения, имеем

$$u=(C_1e^{-p_1y} + C_2e^{-p_2y})e^{i\tau} + (\bar{C}_1e^{-\bar{p}_1y} + \bar{C}_2e^{-\bar{p}_2y})e^{-i\tau} \quad (1.6)$$

$$v=(B_1e^{-p_1y} + B_2e^{-p_2y})e^{i\tau} + (\bar{B}_1e^{-\bar{p}_1y} + \bar{B}_2e^{-\bar{p}_2y})e^{-i\tau}$$

$$p_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2 \rho_0}{(\lambda + 2\mu)(1 - \Gamma_c)}}, \quad p_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2 \rho_0}{\mu(1 - \Gamma_c)}} \quad (1.7)$$

$$\bar{p}_i = p_i(\omega \rightarrow \bar{\omega}, \Gamma_c \rightarrow \bar{\Gamma}_c), \quad \text{а } \Gamma_c = \int_0^{\infty} e^{i\omega z} \Gamma(z) dz$$

Удовлетворяя условиям (1.4), получим

$$C_1 = a \frac{p_2 - ikx_2}{x_1 p_2 - x_2 p_1}, \quad C_2 = a \frac{ikx_1 - p_1}{x_1 p_2 - x_2 p_1} \quad (1.8)$$

$$B_j = x_j C_j$$

$$x_j = \frac{i}{kp_j(\lambda + \mu)} \left[ k^2(\lambda + 2\mu) - p_j^2 - \frac{\rho\omega^2}{1 - \Gamma_c} \right]$$

Вычисляя  $\sigma_y$  по формуле  $\sigma_y = \tilde{\lambda}e + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$ , имеем

$$\sigma_y|_{y=0} = (1 - \Gamma_c) [\lambda ik(C_1 + C_2) - (\lambda + 2\mu)(B_1 p_1 + B_2 p_2)] e^{i\tau} + (1 - \bar{\Gamma}_c) [-\lambda k(\bar{C}_1 + \bar{C}_2) - (\lambda + 2\mu)(\bar{B}_1 \bar{p}_1 + \bar{B}_2 \bar{p}_2)] e^{-i\tau} \quad (1.9)$$

Подставляя (1.5) и (1.9) с учетом (1.7), (1.8) в (1.1), получим нелинейное дисперсионное уравнение (трансцендентное для  $\omega_0$ , где  $\omega_0$  — линейная частота).

Ввиду большой сложности, полученное уравнение целесообразно исследовать его асимптотически. В частности, для малых  $\omega^2/k^2$  для  $\sigma_y$  получим

$$\sigma_y \Big|_{y=0} = -\frac{2\mu(\lambda + \mu)k}{\lambda + 2\mu} [(1 - \Gamma_c)ae^{i\tau} + (1 - \bar{\Gamma}_c)\bar{a}e^{-i\tau}] \quad (1.10)$$

Дисперсионное уравнение в таком приближении будет

$$Dk^4 + 3D_1k^3|a|^2 + \alpha k[1 - \Gamma_c(\omega_0)] = \rho h \omega^2 \quad (1.11)$$

где

$$\alpha = 2\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)$$

В частности, если материал основания экспоненциального типа  $\Gamma(z) = \gamma e^{-\beta z}$ , то для линейной частоты  $\omega_0$  будем иметь

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega_1 + i\omega_2 \\ \rho h \omega_1^2 &= Dk^4 + 2\rho h \omega_2 \beta + \alpha k \\ \omega_1 &= -\frac{\alpha \gamma k}{2(Dk^4 + \alpha k + \rho h \beta^2)} \end{aligned} \quad (1.12)$$

При получении (1.12) учитывается малость диссипации ( $\omega_2$ ).

2. Для получения уравнения модуляции представим (1.11) в виде

$$\omega = \omega_0 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial A^2} \right)_{A^2=0} A^2, \quad A = |a| \quad (2.1)$$

где  $\omega_0$  определяется по (1.12), а

$$\frac{\partial \omega}{\partial A^2} = D_2 - iD_3 \quad (2.2)$$

$$D_2 = \frac{3}{2} \frac{D_1 k^8}{\rho h \omega_1} e^{i\omega_1 t}, \quad D_3 = \frac{3D_1 k^8}{(2\rho h \omega_1)^2} \left[ 2\rho h \omega_2 + \frac{\alpha \gamma k (\omega_1^2 - \beta^2)}{(\beta^2 + \omega_1^2)^2} \right] e^{2i\omega_1 t}$$

Следуя [4-6], модуляционное уравнение можно получить, заменяя в (2.1)  $\omega \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $k \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x}$  и применяя (2.1) к  $A e^{i\tau_0}$  ( $\tau_0 = kx - \omega_0 t$ ), при этом используется формула

$$\omega_0 \left( -i \frac{\partial}{\partial x} \right) A e^{i\tau_0} = \left[ \omega_0(k) A - i \omega_0'(k) \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{2} \omega_0'' \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right] e^{i\tau_0}$$

Тогда получится:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{d\omega_0}{dk} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{d^2 \omega_0}{dk^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + i(D_2 - iD_3) |A|^2 A = 0 \quad (2.3)$$

Здесь при вычислении  $\omega_1$  в (1.12), член с  $\omega_2$  можно отбросить.

В работе [7] модуляционное уравнение получено несколько иным путем. Вместе с тем, исследование на устойчивость нужно провести аналогично. Как и там, полагая

$$A = b e^{i\varphi}$$

$$b = b_0(t) + b'(x, t), \quad \varphi = \varphi_0(t) + \varphi'(x, t) \quad (2.4)$$

Получим системы для невозмущенного и возмущенного движений. Далее, записав решение для возмущения в виде

$$b' = F \exp[i(Kx - \Omega t)], \quad \varphi' = \Phi \exp[i(Kx - \Omega t)] \quad (2.5)$$

для  $\Omega$  получим уравнение

$$z^2 + 3D_3 b_0^2 z + z_1(z_1 + 2D_3 b_0^2) = 0 \quad (2.6)$$

где

$$z = -i\Omega + iK \frac{d\omega_1}{dk} - \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_2}{dk^2} K^2 \quad (2.7)$$

$$z_1 = iK \frac{d\omega_2}{dk} + \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_1}{dk^2} K^2$$

Из (2.9) следует, что условием устойчивости будет

$$\Omega_2 \leq 0, \quad \Omega = \Omega_1 + i\Omega_2 \quad (2.8)$$

Анализ корней (2.6) показывает, что имеется устойчивость, тогда

$$\frac{3}{2} b_0^2 |D_2| + \frac{d\omega_2}{dk} \frac{K \left( D_2 b_0^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_1}{dk^2} K^2 \right)}{\sqrt{z_2}} < \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_2}{dk^2} K^2,$$

$$\text{если } z_2 = \left( \frac{1}{2} K^2 \frac{d^2\omega_1}{dk^2} \right)^2 + D_1 b_0^2 K^2 \frac{d^2\omega_1}{dk^2} - \left( \frac{3}{2} D_3 b_0^2 \right)^2 > 0 \quad (2.9)$$

2) Если же  $z_2 < 0$ , то

$$\frac{2}{3} |D_3| b_0^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_2}{dk^2} K^2 > \sqrt{-z_2} \quad (2.10)$$

Полученные соотношения верны также и для Винклерового основания (вязкоупругого), т. е. тогда в (1.12) третий член должен быть заменен  $\alpha'(1-\Gamma_c)$  (в (1.11) форма волнообразования учитывается) и в дальнейших формулах  $zk$  должно быть заменено на  $\alpha'$ .

## THE STABILITY MODULATION WAVE IN NONLINEAR PLATE ON THE VISCOELASTIC BASE

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

ԱՌԱՋԳՈՄԱՄԱՍՏՈՒՑԻԿ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՍԱՒՈՒՄ  
ՄՈԳՈՒԼՅԱՆՈՆ ԱՒՔԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՅԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ո մ

Գիտարկվում է ոչ դժային առաձգական սալում, որը զտնվում է առաձգամածուցիկ կիսատարածության վրա, միաշափ քվադրմոնոխորմատիկ ալիքի տարածման հարցը:

Գիսպերսիոն հավասարման հիման վրա, որը զտնվել է ասիմպտոտիկ մոտավորությամբ, ստացվել է մոդուլացիայի հավասարումը և ալիքի տարածման կայունության պայմանը:

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Топчян Д. Х.* Волны модуляций в пластинах на упругом основании.—Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1982, с. 270—275.
2. *Каудерер Г.* Нелинейная механика.—М.: ИЛ, 1961, 777 с.
3. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Некоторые задачи по устойчивости распространения нелинейных волн.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1984, т. 37, № 2, с. 3—11.
4. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах.—М.: Наука, 1973, 175 с.
5. *Багдоев А. Г.* Распространение волн в сплошных средах.—Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1981, 306 с.
6. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн.—М.: Наука, 1984, 432 с.
7. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* К вопросу устойчивости распространения нелинейных волн в вязкоупругой пластине.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1983, т. 36, № 2, с. 3—10.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
11.12.1992

УДК 539.43

УСТОЙЧИВОСТЬ МОДУЛЯЦИОННОЙ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛАСТИНЕ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ

БАГДОЕВ А. Г., МОВСИСЯН Л. А.

Изучается вопрос распространения одномерной квазимонохроматической волны в нелинейно упругой пластине, находящейся на вязкоупругом полупространстве

На основании дисперсионного уравнения, найденного в асимптотическом приближении, получено уравнение модуляции и условия устойчивости распространения волн.

Изучается вопрос устойчивости распространения одномерной квазимонохроматической волны в нелинейно-упругой пластине, находящейся на вязкоупругом полупространстве. Случай упругого основания рассмотрен в [1].

1. Пусть нелинейно-упругая [2, 3] пластинка находится на вязкоупругом полупространстве и по пластине распространяется изгибная волна.

Одномерное уравнение движения пластинки будет [3]

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_1 \frac{\partial^4}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z \quad (1.1)$$

где

$$D_1 = \frac{E h^3 \nu_1 \nu_2}{135(1-\nu^2)}, \quad \nu_1 = \frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^2}, \quad \rho - \text{плотность пластинки, } Z - \text{влияние основания.}$$

Уравнениями движения основания будут

$$\bar{\mu} \Delta u + (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \bar{\mu} \Delta v + (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

где для вязкоупругих операторов имеем

$$\bar{\mu} u = \mu \left[ u - \int_{-\infty}^t \Gamma(t-s) u(s) ds \right] \quad (1.3)$$

и аналогичное выражение для  $\bar{\lambda}$ , т. е. принимается, что коэффициент Пуассона постоянен.

На границе контакта пластинки с основанием принимается следующее условие:

$$v=w, \quad \sigma_y=Z, \quad \tau_{xy}=0 \quad \text{при } y=0 \quad (1.4)$$

Решение (1.1) и (1.2) ищется в виде

$$w=ae^{i\tau} + \bar{a}e^{-i\tau}, \quad \tau=kx-\omega t$$

$$u=f(y)e^{i\tau} + \bar{f}(y)e^{-i\tau}, \quad v=z(y)e^{i\tau} + \bar{z}(y)e^{-i\tau} \quad (1.5)$$

где чертой обозначены комплексно-сопряженные значения.

Подставляя (1.5) в (1.2) и в выражениях  $f$  и  $z$  оставляя ограниченные части решения, имеем

$$u=(C_1 e^{-p_1 y} + C_2 e^{-p_2 y})e^{i\tau} + (\bar{C}_1 e^{-\bar{p}_1 y} + \bar{C}_2 e^{-\bar{p}_2 y})e^{-i\tau} \quad (1.6)$$

$$v=(B_1 e^{-p_1 y} + B_2 e^{-p_2 y})e^{i\tau} + (\bar{B}_1 e^{-\bar{p}_1 y} + \bar{B}_2 e^{-\bar{p}_2 y})e^{-i\tau}$$

$$p_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2 \rho_0}{(\lambda + 2\mu)(1 - \Gamma_c)}}, \quad p_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2 \rho_0}{\mu(1 - \Gamma_c)}} \quad (1.7)$$

$$\bar{p}_1 = p_1(\omega \rightarrow \bar{\omega}, \Gamma_c \rightarrow \bar{\Gamma}_c), \quad \text{а } \Gamma_c = \int_0^{\bar{z}} e^{i\omega z} \Gamma(z) dz$$

Удовлетворяя условиям (1.4), получим

$$C_1 = a \frac{p_2 - ik\alpha_2}{\alpha_1 p_2 - \alpha_2 p_1}, \quad C_2 = a \frac{ik\alpha_1 - p_1}{\alpha_1 p_2 - \alpha_2 p_1} \quad (1.8)$$

$$B_j = \alpha_j C_j$$

$$\alpha_j = \frac{l}{k p_j (\lambda + \mu)} \left[ k^2 (\lambda + 2\mu) - \rho_j \omega^2 - \frac{\rho_j \omega^2}{1 - \Gamma_c} \right]$$

Вычисляя  $\sigma_y$  по формуле  $\sigma_y = \tau e + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$ , имеем

$$\sigma_y|_{y=0} = (1 - \Gamma_c) [ik(C_1 + C_2) - (\lambda + 2\mu)(B_1 p_1 + B_2 p_2)] e^{i\tau} + (1 - \bar{\Gamma}_c) [-ik(\bar{C}_1 + \bar{C}_2) - (\lambda + 2\mu)(\bar{B}_1 \bar{p}_1 + \bar{B}_2 \bar{p}_2)] e^{-i\tau} \quad (1.9)$$

Подставляя (1.5) и (1.9) с учетом (1.7), (1.8) в (1.1), получим нелинейное дисперсионное уравнение (трансцендентное для  $\omega_0$ , где  $\omega_0$  — линейная частота).

Ввиду большой сложности, полученное уравнение целесообразно исследовать его асимптотически. В частности, для малых  $\omega^2/k^2$  для  $\sigma_y$  получим

$$\sigma_y|_{y=0} = -\frac{2\mu(\lambda + \mu)k}{l + 2\mu} [(1 - \Gamma_c) a e^{i\tau} + (1 - \bar{\Gamma}_c) \bar{a} e^{-i\tau}] \quad (1.10)$$

Дисперсионное уравнение в таком приближении будет

$$Dk^4 + 3D_1 k^3 |a|^2 + \alpha k [1 - \Gamma_c(\omega_0)] = \rho_0 \hbar \omega^3 \quad (1.11)$$

где

$$\alpha = 2\mu(i + \mu)/(\lambda + 2\mu)$$

В частности, если материал основания экспоненциального типа  $\Gamma(z) = \gamma e^{-\alpha z}$ , то для линейной частоты  $\omega_0$  будем иметь

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega_1 + i\omega_2 \\ \rho h \omega_1^2 &= Dk^4 + 2\rho h \omega_1 \beta + \sigma k \\ \omega_1 &= \frac{\alpha \gamma k}{2(Dk^4 + \alpha k + \rho h \beta^2)} \end{aligned} \quad (1.12)$$

При получении (1.12) учитывается малость диссипации ( $\omega_2$ ).

2. Для получения уравнения модуляции представим (1.11) в виде

$$\omega = \omega_0 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial A^2} \right)_{A^2=0} A^2, \quad A = |a| \quad (2.1)$$

где  $\omega_0$  определяется по (1.12), а

$$\frac{\partial \omega}{\partial A^2} = D_2 - iD_3 \quad (2.2)$$

$$D_2 = \frac{3}{2} \frac{D_1 k^3}{\rho h \omega_1} e^{i\tau_0}, \quad D_3 = \frac{3D_1 k^3}{(2\rho h \omega_1)^2} \left[ 2\rho h \omega_1 + \frac{\alpha \gamma k (\omega_1^2 - \beta^2)}{(\beta^2 + \omega_1^2)^2} \right] e^{i\tau_0}$$

Следуя [4-6], модуляционное уравнение можно получить, заменяя в (2.1)  $\omega \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $k \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x}$  и применяя (2.1) к  $A e^{i\tau_0}$  ( $\tau_0 = kx - \omega_0 t$ ), при этом используется формула

$$\omega_0 \left( -i \frac{\partial}{\partial x} \right) A e^{i\tau_0} = \left[ \omega_0(k) A - i \omega_0'(k) \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{2} \omega_0'' \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right] e^{i\tau_0}$$

Тогда получится:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{d\omega_0}{dk} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{d^2 \omega_0}{dk^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + i(D_2 - iD_3) |A|^2 A = 0 \quad (2.3)$$

Здесь при вычислении  $\omega_1$  в (1.12), член с  $\omega_2$  можно отбросить.

В работе [7] модуляционное уравнение получено несколько иным путем. Вместе с тем, исследование на устойчивость нужно провести аналогично. Как и там, полагая

$$\begin{aligned} A &= b e^{i\tau} \\ b &= b_0(t) + b'(x, t), \quad \tau = \tau_0(t) + \varphi'(x, t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Получим системы для невозмущенного и возмущенного движений. Далее, записав решение для возмущения в виде

$$b' = F \exp[i(Kx - \Omega t)], \quad \varphi' = \Phi \exp[i(Kx - \Omega t)] \quad (2.5)$$

для  $\Omega$  получим уравнение

$$z^2 + 3D_3 b_0^2 z + z_1(z_1 + 2D_3 b_0^2) = 0 \quad (2.6)$$

где

$$z = -i\Omega + iK \frac{d\omega_2}{dk} - \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_2}{dk^2} K^2 \quad (2.7)$$

$$z_1 = iK \frac{d\omega_1}{dk} + \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_1}{dk^2} K^2$$

Из (2.9) следует, что условием устойчивости будет

$$\Omega_2 \leq 0, \quad \Omega = \Omega_1 + i\Omega_2 \quad (2.8)$$

Анализ корней (2.6) показывает, что имеется устойчивость, тогда

$$\frac{3}{2} b_0^2 |D_2| + \frac{d\omega_2}{dk} \frac{K \left( D_2 b_0^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_1}{dk^2} K^2 \right)}{\sqrt{z_2}} < \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_2}{dk^2} K^2,$$

$$\text{если } z_2 = \left( \frac{1}{2} K^2 \frac{d^2\omega_1}{dk^2} \right)^2 + D_2 b_0^2 K^2 \frac{d^2\omega_1}{dk^2} - \left( \frac{3}{2} D_2 b_0^2 \right)^2 > 0 \quad (2.9)$$

2) Если же  $z_2 < 0$ , то

$$\frac{2}{3} |D_2| b_0^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_2}{dk^2} K^2 > \sqrt{-z_2} \quad (2.10)$$

Полученные соотношения верны также и для Винклерова основания (вязкоупругого), т. е. тогда в (1.12) третий член должен быть заменен  $\alpha'(1-\Gamma_c)$  (в (1.11) форма волнообразования учитывается) и в дальнейших формулах  $zk$  должно быть заменено на  $\alpha'$ .

## THE STABILITY MODULATION WAVE IN NONLINEAR PLATE ON THE VISCOELASTIC BASE

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

Ա.Ո.ԱԶԳԱՄԱՆՈՒՅԻԿ շԻՄՔԻ ՎՐԱ ՈՉ ԳՆԱՅԻՆ ՍԱՆՈՒՄ  
ՄՈՒԿՈՒՎԱՑԻՈՆ ԱՆՔԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԵՐ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՅՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է ոչ դժային առաձգական սալում, որը գտնվում է առաձգամածուցիկ հիսատարածության վրա, միաշափ քվադրմոնոխորամատիկ ալիքի տարածման հարցը:

Դիսպերսիոն հալատարման հիման վրա, որը գտնվել է սահմայտորիկ մոտավորությանը, ստացվել է մոդուլացիայի հավասարումը և ալիքի տարածման կայունության պայմանը:

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Гопчян Д. Х.* Волны модуляций в пластинках на упругом основании—Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1982, с. 270—275.
2. *Кюндерер Г.* Нелинейная механика.—М.: ИЛ, 1961, 777 с.
3. *Багдоян А. Г., Мовсисян Л. А.* Некоторые задачи по устойчивости распространения нелинейных волн.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1984, т. 37, № 2, с. 3—11.
4. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах—М. Наука, 1973, 175 с.
5. *Багдоян А. Г.* Распространение волн в сплошных средах—Ереван Изд-во АН АрмССР, 1981, 306 с.
6. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн.—М. Наука, 1984, 432 с.
7. *Багдоян А. Г., Мовсисян Л. А.* К вопросу устойчивости распространения нелинейных волн в вязкоупругой пластине.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1983, т. 36, № 2, с. 3—10.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
11.12.1992

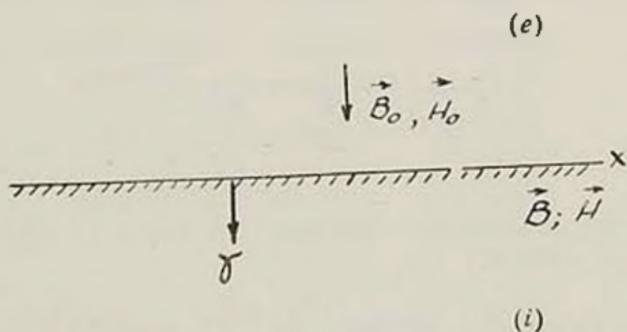
О МАГНИТОУПРУГОЙ ВОЛНЕ НА ПОВЕРХНОСТИ  
 ФЕРРОМАГНИТНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

АСАНЯН Д. Д., МАРГАРЯН Д. М.

В работе исследуется влияние магнитного поля и физико-механических характеристик полуплоскости на скорость поверхностных волн Релея. Показано, что вид функции  $\chi(H)$  в выражении  $\vec{B} = \chi(H) \vec{H}$  может влиять на скорость распространения поверхностных волн как качественным, так и количественным образом.

Приведен численный анализ полученных результатов.

Пусть магнитомягкая ферромагнитная полуплоскость помещена в однородном магнитном поле, вектор напряженности которого перпендикулярен поверхности раздела (фиг. 1), внешняя среда—вакуум.



Фиг. 1.

В настоящей работе исследуется влияние магнитного поля и физико-механических характеристик полуплоскости на скорость поверхностных волн Релея.

1. Под действием магнитного поля происходит магнитная поляризация упругой среды, приводящая как к изменению магнитного поля во всем пространстве, так и к появлению объемных сил и объемных моментов магнитного происхождения, плотность которых соответственно определяется формулами [1]:

$$\vec{f} = \mu_0 (\vec{M} \cdot \nabla) \vec{H} \tag{1.0}$$

$$\vec{C} = \mu_0 (\vec{M} \times \vec{H})$$

где  $\vec{H}$ —напряженность магнитного поля,  $\vec{M}$ —намагниченность среды,  $\nabla$ —оператор Гамильтона.

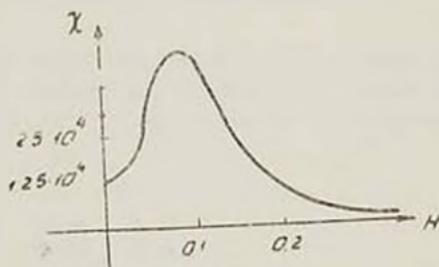
Зависимость между  $\vec{B}$ ,  $\vec{M}$  и  $\vec{H}$  задается

$$\vec{B} = (\vec{H} + \vec{M})\mu_0, \quad \vec{M} = \chi(\vec{H})\vec{H}$$

и удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\text{rot} \vec{H}^{(e)} = 0, \quad \text{div} \vec{B}^{(e)} = 0 \quad (1.1)$$

У ферромагнитных материалов магнитная восприимчивость  $\chi(H)$  не является постоянной, а зависит от величины напряженности магнитного поля  $H$ . Эта зависимость, например, для магнитного сплава Пермалой показана на фиг. 2.



Фиг. 2.

Для многих материалов функцию  $\chi$  можно аппроксимировать следующей формулой [2]:

$$\chi(H) = \frac{\beta}{\mu_0 H} \arctg \alpha H; \quad \beta = \frac{2B_s}{\mu}; \quad \alpha = \frac{\mu_H - 1}{\beta} \mu_0 \quad (1)$$

В работе [3] функция  $\chi$  берется в виде

$$\chi(H) = \chi_0 + b_0 |H|; \quad H = |\vec{H}| \quad (2)$$

$B_s$ —индукция насыщения,  $\mu_H$ —начальная магнитная проницаемость. Под действием объемных сил и моментов (1.0) среда деформируется и ее движение можно описывать следующими уравнениями [4]:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ S_{im} \left( \delta_{mk} + \frac{\partial U_k}{\partial x_m} \right) \right] + f_k = \rho \frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

$$n_k [e_{lmk} S_{lm} + c_k] = 0$$

Поверхностные условия будут:

$$[\vec{B} - \vec{B}^{(e)}] \times \vec{n} = 0 \quad [\vec{H} - \vec{H}^{(e)}] \times \vec{n} = 0 \quad (1.3)$$

$$\left[ S_{km} \left( \delta_{ml} + \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right) \right] n_k = F_l + [T_{km}^{(e)} - T_{km}] \cdot \left( \delta_{ml} + \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right) n_k$$

2. На основе уравнений (1.1)–(1.3) рассмотрим поверхностные волны Релея. Предполагается, что перемещение  $\vec{U}$  имеет только компоненты  $U_x$ ,  $U_y$  и зависит от  $(x, y, t)$

В этом случае уравнения движения (1.2) примут вид [4]:

$$\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} \right)_{,1} + \gamma_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) + \gamma_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2}$$

а уравнения Максвелла (1.1) будут иметь вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \gamma^{-2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.2)$$

$$\Delta \Phi^{(e)} = G$$

Граничные условия (1.3) и условие на бесконечности будут:

$$\begin{aligned} h_x^{(e)}(x, 0, t) - h_x(x, 0, t) - d_1 U_{y,t}(x, 0, t) &= 0 \quad |x| < \infty \\ h_y^{(e)}(x, 0, t) - a_{22} h_y(x, 0, t) &= 0 \quad |x| < \infty \\ t'_{xy}/\mu = 0 \quad \text{при } y=0 \quad |x| < \infty \\ t'_{yy}(x, 0, t)/\mu - \frac{t'_{yy}^{(e)}(x, 0, t)}{\mu} &= 0 \quad |x| < \infty \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\Phi^{(e)}(x, y, t)/y \rightarrow -\infty \rightarrow 0 \quad \vec{U}(x, y, t)/y \rightarrow -\infty \rightarrow 0$$

$$\Phi(x, y, t)/y \rightarrow \infty \rightarrow 0$$

В уравнениях (2.1)–(2.3) введены следующие обозначения:

$$\vec{h} = \text{grad} \Phi; \quad \lambda_1 = \frac{2\nu_0 \gamma(H)}{\mu} \cdot H; \quad \gamma = \sqrt{\frac{1+a_{11}}{1+a_{22}}}$$

$$\lambda_2 = \frac{\nu_0}{\mu} H \cdot \chi(H) \cdot \left[ \frac{2(\chi + H \cdot \chi')}{\chi} - \frac{H \cdot \chi'}{1 + \chi} \right]$$

$$a_{ii} = \chi + \frac{H \nu_i}{H} \cdot \frac{d\chi}{dH} \quad (i=1, 2)$$

Можно легко убедиться, что решения уравнений (2.1)–(2.2) будут такими:

$$\Phi^{(e)}(x, y, t) = i D e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{\alpha y}$$

$$\Phi(x, y, t) = i C e^{i\omega t} \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{-\alpha y}$$

$$\begin{aligned}
 U_x(x, y, t) &= e^{i\alpha x} \cdot e^{i\omega t} \cdot \{ \alpha A e^{-\alpha y} + \gamma_1 B e^{-\gamma_1 y} - C Q_1 e^{-\alpha y} \} \\
 U_y(x, y, t) &= i e^{i\alpha x} \cdot e^{i\omega t} \{ \gamma_1 A e^{-\gamma_1 y} + \alpha B e^{-\alpha y} - C Q_2 e^{-\alpha y} \}
 \end{aligned}
 \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= -\frac{\alpha^2 \gamma_1}{\Delta} \left\{ \lambda_2 \frac{\alpha^2 \gamma_1^2}{2(1-\nu)} + \lambda_1 \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left[ \gamma_1^2 - \alpha^2 \gamma_1^2 \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \right] \right\} \\
 Q_2 &= -\frac{\alpha^2 \gamma_1^2}{\Delta} \left\{ \lambda_2 \left[ \gamma_1^2 - \alpha^2 \gamma_1^2 \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \right] - \lambda_1 \frac{\alpha^2}{2(1-\nu)} \right\} \\
 \gamma_1^2 &= \alpha^2 - \omega^2; \quad \omega_1^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}; \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}; \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \\
 \Delta &= [\omega_1^2 - \alpha^2(1-\gamma^2)] \cdot [\omega_2^2 - \alpha^2(1-\gamma^2)]
 \end{aligned}$$

Для  $\gamma_1$  берется та ветвь, которая удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re}(\gamma_1) = \operatorname{Re}[\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}] \geq 0$$

Для определения постоянных  $A, B, C, D$ , решения (2.4) подставим в однородные граничные условия (2.3). После некоторых преобразований получим систему:

$$\begin{cases}
 \alpha_1 \gamma_1 A + \alpha d_1 B + (1 + \gamma a_{22} - d_1 Q_2) C = 0 \\
 2\alpha \gamma_1 A + (2\alpha^2 - \omega^2) B + [\alpha L - \alpha \gamma Q_1 - \alpha Q_2] \cdot C = 0 \\
 (2\alpha^2 - \omega^2) A + 2\alpha \gamma_1 B + \left[ \frac{2\nu}{1-2\nu} \alpha Q_1 - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \alpha \gamma Q_2 - \alpha \gamma \epsilon_1 \right] C = 0 \\
 \alpha + \gamma a_{22} C = 0
 \end{cases}
 \quad (2.5)$$

Для того, чтобы система (2.5) имела нетривиальные решения, необходимо, чтобы детерминант системы (2.5) был равен нулю

$$\begin{aligned}
 \Delta_0(\alpha) &= \frac{f_c(\alpha)}{4\omega_2^2 \gamma_1} [1 + \gamma a_{22} - d_1 Q_2] - \frac{2\nu}{1-2\nu} d_1 Q_1 + \\
 &+ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \gamma d_1 Q_2 + \gamma \epsilon_1 d_1 + \frac{\alpha}{\omega_2^2 \gamma_1} [2\alpha^2 - \omega^2 - \\
 &- 2\gamma_1 \gamma_2] \cdot [d_1 L - \gamma Q_1 d_1 - d_1 Q_2] = 0
 \end{aligned}
 \quad (2.6)$$

$$f_c(\alpha) = 4\alpha^2 \gamma_1 \gamma_2 - (2\alpha^2 - \omega^2)^2 - \text{функция Релея.}$$

Из условия  $\Delta_0 = 0$  можно найти скорость поверхностных волн Релея.

Когда  $\chi = \text{const}$  (магнитомягкий материал), из уравнения (2.6) получаем новое уравнение для определения скорости поверхностных волн Релея

$$(2-\eta)^2 - 4(1-\theta\eta)^{1/2} \cdot (1-\eta)^{1/2} + b_0^2 \cdot \eta(1-\theta\eta)^{1/2} = 0
 \quad (2.7)$$

$$b_0^2 = B_0^2 / \mu_0^2$$

в (2.7) введены обозначения  $\alpha^2 = \omega^2 / c^2$ ,  $\eta = c^2 / c_2^2$ ,  $\theta = c_2^2 / c_1^2$ .

Из (2.6) можно легко заметить, что поверхностные магнитоупругие волны Релея не обладают дисперсией, то есть скорость не зависит от  $\omega$ . Легко заметить также, что  $\Delta_0(a) = \Delta_0(-a)$ , то есть если  $a = a_R$  есть решение уравнения (2.6), то  $a = -a_R$  тоже является решением (2.6).

В табл. 1 и 2 приведены решения уравнения (2.6) с учетом формул (а) и (б), соответственно.

Из табл. 1 видно:

Таблица 1

$\nu = 0.25; B_5 \mu_0 = 0.01$			
	$\mu_0 = 50$	$\mu_0 = 10^3$	$\mu_0 = 10^4$
$\mu_0 H_0 B_5$	$\gamma = c^2/c_2^2$	$\gamma = c^2/c_2^2$	$\gamma = c^2/c_2^2$
0.1	0.367	0.8338	0.8227
0.3	0.8253	0.8238	0.8219
0.5	0.8207	0.8200	0.8192
0.7	0.8173	0.8169	0.8164
0.9	0.8143	0.8140	0.8137

Таблица 2

$\nu = 0.45; B_5^2 \mu_0 = 0.001; h_0 \cdot B_5 = 50$			
$x_0 = 1.0$		$x_0 = 1000$	
$\mu_0 H_0 B_5$	$\gamma = c^2/c_2^2$	$\mu_0 H_0 B_5$	$\gamma = c^2/c_2^2$
0.01	0.0815	0.1	0.0049
0.01	0.8941	0.1	0.0243
0.03	0.2536	0.2	0.0097
0.03	0.8851	0.2	0.0042
0.05	0.1548	0.4	0.0192
0.05	0.8405	0.4	0.0332
0.06	0.5999	0.6	0.0282
0.06	0.7735	0.6	0.1225
		0.9	0.0412
		0.9	0.1787

Таблица 3

$\nu = 0.35; B_5^2 \mu_0 = 0.001; b_0 \cdot B_5 = 56; x_0 = 100$			
$\mu_0 H_0 B_5$	$\gamma = c^2/c_2^2$	$\mu_0 H_0 B_5$	$\gamma = c^2/c_2^2$
0.01	0.0391	0.07	0.2167
0.01	0.8738	0.07	0.8483
0.02	0.0604	0.08	0.2501
0.02	0.8724	0.08	0.8388
0.05	0.1526	0.09	0.2850
0.05	0.8619	0.09	0.8270
0.06	0.1843		
0.06	0.8559		

1) с учетом формулы (а) решение уравнения (2.6) является единственным, лежащим в интервале  $0 < c < c_2$

2) с увеличением  $\mu_0/H_0$  (магнитного поля) и  $\mu_H$  решение уравнения (2.6) монотонно убывает.

Из табл. 2 и 3 видно:

1) уравнение (2.6) имеет два решения, с учетом формулы (б), в интервале  $0 < c < c_2$ . Одно расположено около нуля, другое—около скорости поперечной волны  $c_2$ .

2) с увеличением  $\mu_0/H_0$  эти корни приближаются.

С учетом формулы (б) получается, что есть случаи, когда поверхностная магнитоупругая волна Релея полностью исчезает.

Отметим также, что в случае  $\chi = \text{const}$  (магнитомягкий материал с линейной характеристикой) уравнение (2.7) имеет два решения— $c = 0$  и  $c = c_k < c_2 \cdot c_k$  очень мало отличается от  $c_2$ .

В работе [5] показано, что в магнитомягком ферромагнитном полупространстве при распространении релеевской волны, как следствие, возбуждается сдвиговая поверхностная волна, если присутствует наклонное к плоскости распространения магнитное поле.

## ABOUT A MAGNETOELASTIC WAVE ON THE FERROMAGNETIC SEMI-PLANE SURFACE

D. J. HASANIAN, J. M. MARGARIAN

ՅԵՐՐՈՄԸԳՆԵՒԱԿԱՆ ԿԵՍԵԼԶԱՐՔՈՒԹՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵԼՈՒՅԹՈՎ  
ՏԱՐԱԾՎՈՎ ԿԱԳՆԵՒԱԿԱՆ ԱՂԻՔԻ ՄԱՍԻՆ

Գ. Ջ. ՀԱՍԱՆՅԱՆ, Ջ. Մ. ՄԱՐԿԱՐՅԱՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է մագնիսական դաշտի և կիսահարթության Ֆիզիկամեխանիկական բնութագրիչների ազդեցությունը Ռեյլեյի սահմանի մակերևույթային ալիքների տարածման արագության վրա: Ցույց է տրվում, որ  $\vec{B} = \chi(H) \cdot H$  արտահայտության մեջ  $\chi(H)$  ֆունկցիայի տեսքով սահմանի մակերևույթային ալիքների տարածման արագության վրա կարող է ազդել ինչպես սրահասի, այնպես էլ բանակապես:

Բերված է ստացված արդյունքների վիճակի ուսումնասիրությունը:

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Рао У.—Н., Уей С.—С.: A Linear theory for soft ferromagnetic elastic solids—Int. J. Eng. sci. 11, 415 (1973)
- 2 Гачкевич А. Р., Солодяк М. Т. Термоупругость электропроводных ферромагнитных тел при индукционном нагреве квазистационарным электромагнитным полем—В кн. III Всесоюзный симпозиум «Теоретические вопросы магнитоупругости», Тезисы докл., Ереван, 1984
- 3 Белубекян М. В., Хачатрян Ю. М. К задаче о магнитоупругом излучивании тонкой ферромагнитной пластинки.—Вести АН БССР сер. физ.-мат. наук, 1984, № 4
- 4 Асанян Д. Д., Багдасарян Г. Е. Уравнения магнитоупругости ферромагнитного тела с нелинейным законом намагничивания. Некоторые примеры. В печати
- 5 Багдасарян Г. Е. Возбуждение дванговых поверхностных волн в полупространстве волной Релея—Изв. АН АрмССР, Механика, 1990, т. 43, № 2, с. 38—43

Институт механики

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
4.11.1992

МАГНITUОУПРУГИЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ  
 В КОНЕЧНО-ПРОВОДЯЩЕМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

ГЕВОРКЯН А. В

В работе установлено существование магнитуупругих обобщенных поверхностных сдвиговых волн в конечно-проводящем полупространстве при наличии внешнего постоянного магнитного поля, параллельно границе полупространства.

Исследуется вопрос существования поверхностных сдвиговых волн в случае конечно-проводящего полупространства при наличии внешнего постоянного магнитного поля, параллельного границе полупространства.

Пусть упругое конечно-проводящее полупространство отнесено к прямоугольной декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ : ось  $x_1$  направлена вдоль границы, ось  $x_3$  — в глубину полупространства.

Начальное магнитное поле  $\vec{H}_0$  ( $H_0, 0, 0$ ) направлено по оси  $x_1$ .

Магнитная проницаемость материала полупространства принимается равной единице.

Учитывая, что в антиплоской деформации поле смещений и характеристики индуцированного электромагнитного поля имеют вид, соответственно,  $\vec{u} = [0, 0, u_3(x_1, x_2, t)]$ ,  $\vec{h} = [0, 0, h_3(x_1, x_2, t)]$ ,  $\vec{e} = [e_1(x_1, x_2, t), e_2(x_1, x_2, t), 0]$

из системы линеаризованных уравнений магнитуупругости, описывающей поведение электромагнитного поля и движение проводящего упругого тела, при пренебрежении током смещения относительно тока проводимости, получим следующую систему уравнений (1-3):

$$\nabla^2 h_3 - \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\partial h_3}{\partial t} = - \frac{4\pi\sigma}{c^2} H_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial t},$$

$$G \nabla^2 u_3 + \frac{H_0}{4\pi} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad x_2 > 0 \tag{1}$$

где  $\sigma$  — удельная электропроводимость,  $c$  — электродинамическая постоянная,  $G$  — модуль сдвига,  $\rho$  — плотность материала полупространства.

В области  $x_2 < 0$  имеем уравнения Максвелла и вытекающее из них волновое уравнение

$$\nabla^2 h_1^* = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_1^*}{\partial t^2} \quad (2)$$

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad h_3 = h_3^*, \quad e_1 = e_1^*, \quad x_2 = 0 \quad (3)$$

Решения уравнений (1) и (2) будем искать в виде

$$u_2 = u(x_2) \exp i(kx_1 - \omega t) \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, характеристическое уравнение которой имеет следующий вид:

$$\epsilon^2 - k^2(2 - \alpha z + z^2)\epsilon^2 + k^4[(1 - \alpha z)(1 + z^2) - \alpha z] = 0 \quad (5)$$

где

$$\alpha = \frac{4\pi\sigma c_2}{kc^2}, \quad z = \frac{i\omega}{kc_2}, \quad \epsilon^2 = \frac{G}{\rho}, \quad s = \frac{v_2^2}{c^2}, \quad \alpha_2^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho}$$

Так как рассматриваются поверхностные волны, то из корней уравнения (5) выберем только те, которым соответствует уменьшение амплитуд волны с глубиной

$$\lambda_{1,2} = -k\lambda_{\pm} = -k \sqrt{1 - \frac{1}{2}\alpha z + \frac{1}{2}z^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}z^2(z - \alpha)^2 + \alpha z}} \quad (6)$$

при ограничении

$$\operatorname{Re} \lambda_{\pm}(z) > 0 \quad (7)$$

а для того, чтобы эти волны уходили от границы, должно выполняться условие (4)

$$\operatorname{Im} \lambda_{\pm}(z) < 0 \quad (8)$$

В дальнейшем, для определенности, используется положительное значение внутреннего корня (6).

Таким образом, решения системы (1) и уравнения (2) запишутся в следующем виде:

$$u_2 = \left[ \frac{\lambda_+^2 + \alpha z - 1}{ik_2 H_0 z} A_+ \exp(-k\lambda_+ x_2) + \frac{\lambda_-^2 + \alpha z - 1}{ik_2 H_0 z} A_- \exp(-k\lambda_- x_2) \right] \exp i(kx_1 - \omega t) \quad (9)$$

$$h_3 = (A_+ \exp(-k\lambda_+ x_2) + A_- \exp(-k\lambda_- x_2)) \exp i(kx_1 - \omega t) \quad (10)$$

$$h_3^* = B \exp(k\nu_4 x_2) \exp i(kx_1 - \omega t) \quad (11)$$

где

$$\nu_4 = \sqrt{1 + \epsilon_2^2 \cdot c^{-2} z^2} \sim 1, \quad \operatorname{Re} \nu_4 \approx 1, \quad \operatorname{Im} \nu_4 \approx 0.$$

Подставляя выражения (9)–(11) в граничные условия (3), получим систему алгебраических однородных линейных уравнений для произвольных постоянных и из условия совместности этой системы получим дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\lambda_+ \cdot \lambda_- [1 - c_2^2 \cdot e^{-2\alpha} v_+^{-1} v_-^{-1} z(\lambda_+ + \lambda_-)] = -1 - z^2 \quad (12)$$

Принимая во внимание, что

$$|1 - c_2^2 \cdot e^{-2\alpha} v_+^{-1} v_-^{-1} z(\lambda_+ + \lambda_-)| \approx 1$$

уравнение (12) переходит в уравнение

$$\lambda_+ \lambda_- = -1 - z^2 \quad (13)$$

которое, в свою очередь, сводится к кубическому уравнению

$$z^3 + \alpha z^2 + z + \alpha(1 - s) = 0 \quad (14)$$

Алгебраическое уравнение (14) имеет одно действительное отрицательное решение, не соответствующее условиям задачи, и комплексно-сопряженное решение с положительной действительной частью (5).

$$z_0 = \frac{1}{2} \left( \sqrt[3]{\sqrt{Q} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{Q} - \frac{q}{2}} \right) - \frac{\alpha}{3} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \sqrt[3]{\sqrt{Q} + \frac{q}{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{Q} - \frac{q}{2}} \right) \quad (15)$$

где

$$Q = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{1+s}{27} \alpha^3 + \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{2}{3} + s \right)^2 - \frac{1}{27} \right] \alpha^2 + \frac{1}{27} > 0$$

$$p = 1 - \frac{\alpha^2}{3}, \quad q = \frac{2}{27} \alpha^2 + \alpha \left( \frac{2}{3} + s \right) > 0$$

В дальнейшем будем предполагать, что искомая волна распространяется по положительному направлению оси  $x_1$ , то есть в формуле (15) берется знак плюс.

Теперь обсудим, при каких условиях уравнения (13) и (14) являются равносильными.

Легко проверить, что правая часть уравнения (13) при  $z = z_0$  имеет, соответственно, положительную реальную и отрицательную мнимую части:  $\operatorname{Re}(1 + z_0^2) < 0$ ,  $\operatorname{Im}(1 + z_0^2) > 0$ .

Следовательно, выражение (15) будет решением исходного уравнения (13) при выполнении условия

$$\operatorname{Re}[\lambda_+(z_0) \cdot \lambda_-(z_0)] = \operatorname{Re}\lambda_+(z_0) \cdot \operatorname{Re}\lambda_-(z_0) - \operatorname{Im}\lambda_+(z_0) \operatorname{Im}\lambda_-(z_0) > 0 \quad (16)$$

$$\operatorname{Im}[\lambda_+(z_0) \lambda_-(z_0)] = \operatorname{Re}\lambda_+(z_0) \operatorname{Im}\lambda_-(z_0) + \operatorname{Re}\lambda_-(z_0) \cdot \operatorname{Im}\lambda_+(z_0) < 0$$

$$\operatorname{Re}\lambda_+(z_0) > 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_+(z_0) < 0$$

С другой стороны, по условию,  $\lambda_+(z_0)$  и  $\lambda_-(z_0)$  имеют следующий вид:

$$h_{\pm}(z_0) = \sqrt{\frac{r_{\pm} + a_1 \pm \sqrt{\frac{r_{\pm} + a_2}{2}}}{2}} + i \operatorname{sgn}\left(b_1 \pm \sqrt{\frac{r_{\pm} - a_2}{2}} \operatorname{sgn} b_2\right) \times$$

$$\times \sqrt{\frac{r_{\pm} - \left(a_1 \pm \sqrt{\frac{r_{\pm} + a_2}{2}}\right)}{2}} \quad (17)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{2} |1 - 3\gamma \operatorname{Re} z_0 - 2(\operatorname{Re} z_0)^2|$$

$$b_1 = \operatorname{Im} z_0 \left( \operatorname{Re} z_0 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$a_2 = \frac{1}{4} |1 - \gamma^2 (1 + s) - 3\gamma s \operatorname{Re} z_0 + 2(\operatorname{Re} z_0)^2| \quad (18)$$

$$b_2 = -\frac{1}{4} \operatorname{Im} z_0 [2 \operatorname{Re} z_0 + \alpha(2 - 3s)]$$

$$r^{\pm} = \left( a_1 \mp \sqrt{\frac{r_{\pm} + a_2}{2}} \right)^2 \mp \left( b_1 \pm \sqrt{\frac{r_{\pm} - a_2}{2}} \operatorname{sgn} b_2 \right)^2$$

$$r_{\pm}^2 = a_{\pm}^2 + b_{\pm}^2 \quad \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

а из (14) можно установить следующие тождества:

$$(\operatorname{Im} z_0)^2 = 3(\operatorname{Re} z_0)^2 + 2\gamma \operatorname{Re} z_0 + 1 \quad (19)$$

$$8(\operatorname{Re} z_0)^3 - \alpha s - 2(1 + \gamma^2) \operatorname{Re} z_0 - 8\gamma (\operatorname{Re} z_0)^2 > 0 \quad (20)$$

Тогда из (20) следует, что

$$\operatorname{Re} z_0 < -\frac{s}{\alpha + \gamma^2 + \sqrt{(\gamma + \alpha^{-1})^2 + 8s}} < \frac{s}{2(\alpha + \alpha^{-1})} < \frac{s}{4} \quad (21)$$

В первую очередь нас интересуют те значения напряженности внешнего магнитного поля, которые реализуются на практике постоянными магнитами. Исходя из этого, при значениях  $s < 0,1$ :

$$a_1 > 0, \quad b_1 < 0, \quad b_2 < 0 \quad (22)$$

и

$$\operatorname{Im} h_{\mp}(z_0) < 0$$

Теперь рассмотрим условие  $\operatorname{Im} \lambda_{\pm}(z_0) < 0$ , то есть

$$b_1 + \sqrt{\frac{r_{\pm} - a_2}{2}} < 0 \quad (23)$$

Неравенство (23) с учетом (19) и (20) преобразуется

$$\operatorname{Re} z_0 > \frac{s \cdot \theta}{\sqrt{(s^2 + 1 + s)^2 + 2s(s^2 + 1 - 3s) + s^2 + 1 + s}} = \varphi(s) \quad (24)$$

Графики функций  $\operatorname{Re} z_0(s)$  и  $\varphi(s)$  в интервале  $0 < s < \infty$  пересекаются в единственной точке

$$\operatorname{Re} z_0(s_0) = \varphi(s_0) \quad (25)$$

где

$$s_0 = \frac{\sqrt{\frac{s}{2\eta} - 1}}{2\eta + 1}, \quad 1 < \alpha_0(s) < \sqrt{3}$$

$$\eta(s) = 2 \sqrt{-\frac{p_*}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos b(s)\right) - \frac{2(1-s)}{3(1-3s)}; \quad \frac{s}{8} < \eta < \frac{s}{8-2s}$$

$$b = \frac{-\frac{q_*}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{p_*}{3}\right)^2}}, \quad p_* = -\frac{7s^2 + 7s + 4}{12(1-3s)^2}$$

$$q_* = \frac{263s^3 + 30s^2 - 201s + 16}{216(1-3s)^3}$$

Кроме этого, положительные функции  $\operatorname{Re} z_0(s)$  и  $\varphi(s)$  при  $s \rightarrow 0$ ;  $s \rightarrow \infty$  стремятся к нулю и

$$\operatorname{Re}' z_0(0) = \frac{s}{2} > \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{1+s} > \varphi'(0) = \frac{s}{\sqrt{(1+s)^2 + 2s(1-3s) + 1 + s}} \quad (26)$$

Следовательно, решением неравенства (24) является

$$\alpha < \alpha_0(s) \quad (27)$$

Таким образом, второе из неравенств (16) удовлетворяется.

Теперь докажем справедливость первого из неравенств (16) в интервале (27), преобразуя его с учетом (17)

$$r_-\left(\sqrt{\frac{r_2 + a_2}{2}} + a_1\right) > r_+\left(\sqrt{\frac{r_2 + a_2}{2}} - a_1\right) \quad (28)$$

Пусть

$$a_1 < \sqrt{\frac{r_2 + a_2}{2}} \quad (29)$$

тогда, учитывая (18), неравенство (28) можно записать в виде

$$(2a_1 b_1 - b_2) \left( b_1 \sqrt{\frac{r_2 + a_2}{2}} + a_1 \sqrt{\frac{r_2 - a_2}{2}} \right) > 0 \quad (30)$$

С другой стороны, из соотношений (21), (27) и (29) следует отрицательность множителей (30), подтверждающие справедливость неравенства (28).

И, наконец, рассмотрим особый случай, когда

$$\operatorname{Im} z_0 = 0 \quad (31)$$

Это возможно, если одновременно имеют место условия

$$b_1(z) + \sqrt{\frac{r_1(z) - a_1(z)}{2}} = 0 \quad (32)$$

$$a_1(z) > \sqrt{\frac{r_2(z) + a_2(z)}{2}} \quad (33)$$

Решением уравнения (32) является

$$z = z_0(s) \quad (34)$$

Из неравенства (21) вытекает, что

$$-a_1(z_0)b_1(z_0) > -\frac{1}{2} b_2(z_0) = \sqrt{\frac{r_2(z_0) + a_2(z_0)}{2}} \cdot \sqrt{\frac{r_2(z_0) - a_2(z_0)}{2}}$$

Так как

$$-b_1(z_0) = \sqrt{\frac{r_1(z_0) - a_1(z_0)}{2}}$$

то неравенство (33) выполняется и, тем самым, в соотношении (27) допускается знак равенства, то есть

$$z \leq z_0(s) \quad (35)$$

Соотношение (35), фактически, является условием существования поверхностных сдвиговых волн.

Итак, в конечно-проводящем полупространстве распространяются затухающие магнитоупругие поверхностные сдвиговые волны со структурными волновыми векторами  $\vec{k}_\pm(k, -k \operatorname{Im} z_\pm(z_0), 0)$  с соответствующими фазовыми скоростями

$$v_\pm = \frac{\operatorname{Im} z_0}{\sqrt{1 + (\operatorname{Im} z_\pm(z_0))^2}} c_2 \quad (36)$$

и вдоль границы распространяется поверхностная затухающая волна с фазовой скоростью

$$v_p = \operatorname{Im} z_0(z) \cdot c_2 \quad (37)$$

являющейся монотонно возрастающей функцией от параметра  $\alpha$  и

$$c_1 < v_p \leq \operatorname{Im} z_0(z_0) \cdot c_2 \quad (38)$$

причем

$$v_+ < v_- \leq v_p \quad (39)$$

Интересно отметить, что при  $\alpha = \alpha_0(s)$  волновой вектор  $\vec{k}_-$  становится параллельным оси  $x_1$ , причем

$$v_-(\alpha_0) = v_p(z_0) = \operatorname{Im} z_0(z_0) \cdot c_2 \quad (40)$$

Кроме того, заслуживает внимания и тот факт, что к интервалу  $\alpha > \alpha_0(s)$  относится идеально проводящая среда.

Аналогичным образом решается задача при зависимости  $k = k(\omega)$  с действительной частотой  $\omega$ . Тогда волновое число  $k$  становится комплексным и определяется формулой

$$k = k_0 \left[ \sqrt{\frac{r + \frac{1 + (1+s)\alpha^2}{2}}{1 + (1+s)^2 \alpha^2}} + i \sqrt{\frac{r - \frac{1 + (1+s)\alpha^2}{2}}{1 + (1+s)^2 \alpha^2}} \right] \quad (41)$$

$$r = \frac{|1 + (1+s)\alpha^2|^2 + s^2 \alpha^2}{|1 + (1+s)^2 \alpha^2|^2}, \quad \alpha = \frac{4\pi\sigma}{\omega} \cdot \frac{c_1^2}{c^2}, \quad k = \frac{\omega}{c_2}$$

Соответствующие корни характеристического уравнения системы имеют вид

$$i_{1,2} = -k\omega j_{\pm} = -k_0 \left[ \sqrt{\frac{r_{\pm} + a_1 \pm \sqrt{\frac{r_1 + a_2}{2}}}{2}} - i \sqrt{\frac{r_{\pm} - (a_1 \pm \sqrt{\frac{r_2 + a_2}{2}})}{2}} \right] \quad (42)$$

$$r_{\pm}^2 = \left( a_1 \pm \sqrt{\frac{r_2 + a_2}{2}} \right)^2 + \left( b_1 \mp \sqrt{\frac{r_2 - a_2}{2}} \right)^2, \quad r_2^2 = a_2^2 + b_2^2 \quad (43)$$

$$a_1 = \frac{1 + (1+s)\alpha^2}{1 + (1+s)^2 \alpha^2} - \frac{1}{2} > 0$$

$$b_1 = \alpha \left[ \frac{s}{2 + (1+s)^2 \alpha^2} - \frac{1}{2} \right] < 0$$

$$a_2 = \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{s^2 \alpha^2}{1 + (1+s)^2 \alpha^2}$$

$$b_2 = \alpha \left[ s \cdot \frac{1 + (1+s)\alpha^2}{1 + (1+s)^2 \alpha^2} - \frac{1}{2} \right] < 0$$

Здесь условие существования магнитоупругих неоднородных поверхностных сдвиговых волн выглядит так:

$$\alpha \ll \alpha_0(s) \quad (44)$$

где

$$\alpha_0^2(s) = \frac{\eta(s)}{(1+s)^2 (s - \eta(s))},$$

$$0 < \eta(s) < \frac{1,5s(1-2s)}{\sqrt{(1-3,5s+s^2)^2 + 6s(1-s)(1-2s)} + 1 - 3,5s + s^2}$$

$$\eta(s) = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \frac{-q}{2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \right] - \frac{2}{3}(1-s)$$

$$p = -\frac{1}{3}(1+2.5s+s^2) < 0, \quad q = -\frac{1}{108}(8-51s-30s^2-s^3) < 0$$

$$Q = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$$

Таким образом, в этом случае, в конечно-проводящем полупространстве распространяются магнитоупругие неоднородные поверхностные сдвиговые волны со структурными волновыми векторами  $\vec{k}_{\pm}(\text{Re}k, -k, \text{Im}k_{\pm}, 0)$  с соответствующими фазовыми скоростями

$$v_{\pm} = \frac{\omega}{\sqrt{(\text{Re}k)^2 + k_{\omega}^2 (\text{Im}k_{\pm})^2}} = \frac{v_p}{\sqrt{1 + \left(\frac{\text{Im}k_{\pm}}{\text{Re}(k_{\omega}^{-1}k)}\right)^2}} \quad (45)$$

причем

$$v_+ < v_- \leq v_p, \quad c_s < v_+ \leq v_p(v_0) \quad (46)$$

где  $v_0 = \omega/\text{Re}k$  — скорость распространения затухающей поверхностной волны вдоль границы полупространства.

## MAGNETOELASTIC SURFACE SHEAR WAVES IN THE HALF SPACE WITH FINITE CONDUCTIVITY

A. V. GEVORKIAN

ՄԱԳՆԵՏԱՆՈՒԿԱԿԱՆ, ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԱՅԻՆ, ՍԱՐՔԻ ԱԼԻԲԵՐԸ  
ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՀԱՂՈՐԴԻՉ ԿԻՍՏԱՐԱՄՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ա. Վ. ԳԵՎՈՐԳԻԱՆ

Ա. Մ. Փ. Ռ. Փ. ՈՒՄ

Այսատանրում ցույց է տրված մագնիսատուաձգական սահրի ընդհանրացված մակերևութային ալիքների դոյույունը վերջավոր հաղորդիչ կիսատարածույունում՝ ելրին զուգահեռ արտաքին հաստատուն մագնիսական դաշտի առկայույամբ:

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред — М: Наука, 1982
- 2 *Седов Л. И.* Механика сплошной среды.—М: Наука, 1983, т. 1
- 3 *Новицкий В. В.* Теория упругости —М: Мир, 1975
- 4 *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах.—М: АН СССР, 1957
- 5 *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике —М: Наука, 1984

Институт механики НАН Армении

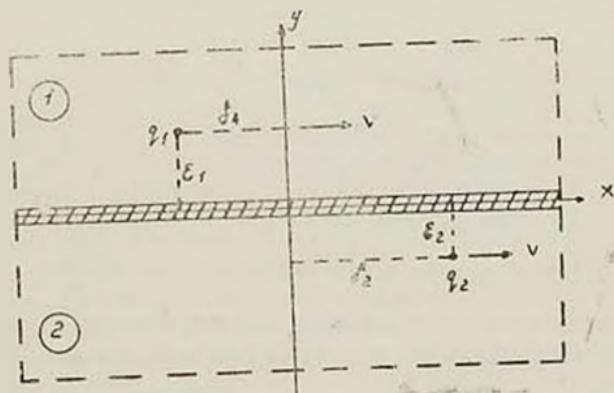
Поступила в редакцию  
3.12.1992

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В СОПРЯЖЕННЫХ ВСТЫК  
С ПОМОЩЬЮ ТОНКОГО ПРОМЕЖУТОЧНОГО СЛОЯ  
РАЗНОРОДНЫХ ПЛАСТИНКАХ, ВОЗНИКАЮЩЕЕ  
ОТ ПОДВИЖНЫХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

ՏԱՐԳՅԱՆ Ա. Մ.

Исследовано влияние теплофизических характеристик разнородных материалов, мощности и скорости движения источников тепла на термоупругие напряжения в составной пластинке. Получены условия, обеспечивающие в случае идеального термомеханического контакта между разнородными пластинками непрерывность всех напряжений.

Определение температурных полей и тепловых напряжений в нагреваемых подвижными источниками тепла тонких пластинках необходимо для проектирования оптимальных процессов сварки. Температурные поля и напряжения в однородных изотропных и анизотропных пластинках, обусловленные движущимися источниками тепла, широко освещены в работах [1—4]. В работах [5—7] приведены решения задач о температурных полях, возникающих в процессе соединения разнородных пластин. Исследованию квазистатической задачи термоупругости для составной пластинки, по прямолинейному контакту которой движется линейный источник тепла, посвящены работы [8, 9].



Փյգ. 1.

В настоящей работе определяются квазистатические термоупругие напряжения в сопряженных встык с помощью тонкого промежуточного слоя разнородных пластинках, возникающие от двух источников тепла, движущихся параллельно краям пластинок (фиг. 1). Тепло-

вые и упругие характеристики, относящиеся к слою и разнородным пластинкам, имеют индексы 0, 1 и 2, соответственно, и не зависят от температуры. Тонкий промежуточный слой обладает внутренним термосопротивлением, жесткостью на растяжение-сжатие и жесткостью на изгиб. Через поверхности пластинок осуществляется теплообмен с внешней средой постоянной температуры по закону Ньютона. Предполагается, что на бесконечности разность температур пластинок и среды, а также напряжения исчезают.

Расчетная схема определения температурных напряжений, принятая в настоящей работе, в первом приближении соответствует сварке-пайке разнородных пластин с предварительным нагревом или с интенсивным охлаждением, сварке-пайке с сопутствующим нагревом или охлаждением, сварке с применением промежуточной прокладки и т. д. [10, 11]

При сделанных предположениях относительно свойств тонкого промежуточного слоя его термоупругие характеристики входят в условия неидеального термомеханического контакта между разнородными пластинками [4].

1. Составную пластинку отнесем к декартовой системе координат (фиг. 1). Для определения квазистационарного температурного поля в составной пластинке должна быть решена система дифференциальных уравнений

$$\Delta T_j - m_j^2 T_j - \frac{v}{a_j} \frac{\partial T_j}{\partial y} = - \frac{q_j}{i_j h} \delta(x - \varepsilon_j) \delta(y - \varepsilon_j) \quad (1)$$

$$j=1, \quad y > 0, \quad \varepsilon_1 > 0; \quad j=2, \quad y < 0, \quad \varepsilon_2 < 0; \quad |x| < \infty$$

при следующих условиях неидеального теплового контакта на линии раздела  $y=0$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y}, \quad \lambda_2 = \frac{\partial T_2}{\partial y} = \alpha_2 (T_1 - T_2), \quad y=0 \quad (2)$$

Здесь  $T_j$  — разность температур пластинок и среды,  $i_j$ ,  $a_j$  — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности разнородных пластинок,  $h$  — толщина пластинок,  $q_j$  — мощности источников тепла,  $\delta(z)$  — функция Дирака,  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ ,  $m_j^2 = 2\beta_j/\lambda_j h$  ( $\beta_j$  — коэффициент теплоотдачи с поверхностями пластинок),  $\alpha_2 = \frac{2h_0}{i_0 h}$  — контактное

термосопротивление, учитывающее наличие тонкого промежуточного слоя,  $i_0$ ,  $h_0$  — коэффициент теплопроводности и ширина промежуточного слоя.

Решение краевой задачи (1), (2) с помощью интегрального преобразования Фурье получено в работе [6] и имеет следующий вид:

$$T_j(x, y) = \int_0^\infty \bar{T}_j(u, y) e^{-iux} du \quad (3)$$

где

$$\bar{T}_1(u, y) = Q_1 [e^{-\gamma_1 + i_1 k_1} - e^{-(\gamma_1 + i_1) k_1}] + C_1 \cdot e^{-\gamma k_1}$$

$$\bar{T}_2(u, y) = Q_2 [e^{-\gamma_2 + i_2 k_2} - e^{-(\gamma_2 + i_2) k_2}] + C_2 \cdot e^{\gamma k_2}$$

$$C_j = \frac{1}{2\pi h} \cdot \frac{\sum_{n=1}^2 q_j e^{-\gamma_n (k_1 - i_1) k_1} + q_j i_2 k_2 - j e^{-\gamma_j |k_1 - i_1 k_j|}}{i_1 k_1 \cdot i_2 k_2 + \gamma_n (i_1 k_1 + i_2 k_2)}$$

$$k_j = \sqrt{u^2 + m_j^2 + i u p_j}, \quad p_j = \frac{\nu_j}{a_j}, \quad \operatorname{Re} k_j > 0, \quad Q_j = \frac{q_j e^{-i_1 k_j}}{4\pi h i_j k_j}$$

2. Решения двумерной квазистатической задачи термоупругости для составной пластинки приводится к интегрированию уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xj}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xyj}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xyj}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yj}}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

и условий совместности деформаций

$$\Delta(\tau_{xj} + \tau_{yj}) + \alpha_j E_j \Delta T_j = 0 \quad (5)$$

с условиями неидеального термомеханического контакта между разнородными пластинками на линии  $y=0$  [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu_j \sigma_{yj}}{E_j} - \alpha_j T_j + \frac{T_1 + T_0}{2} \alpha_0 \right) &= \frac{h}{g_0} (\tau_{x,1} - \tau_{x,2}) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{2 + \nu_1}{E_1} \cdot \frac{\partial \tau_{x,1}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tau_{x,2}}{E_2} - \alpha_1 T_1 \right) + \alpha_0 \frac{T_1 - T_2}{h_\nu} \right] &= \\ &= \frac{k}{g_0} (\tau_{y,1} - \tau_{y,2}), \quad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2 \end{aligned} \quad (6)$$

где  $E_j$ ,  $\nu_j$  и  $\alpha_j$  — модули упругости, коэффициенты Пуассона и линейного расширения разнородных пластинок;  $E_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $h_\nu$ ,  $g_0$ ,  $g_0^*$  — модуль упругости, коэффициент линейного расширения, толщина, жесткость на растяжение-сжатие и жесткость на изгиб промежуточного материала ( $g_0 = E h h_\nu$ ,  $g_0^* = E_0 h h_\nu^* / 12$ ).

Применяя экспоненциальное преобразование Фурье, заменяя предварительно непрерывность перемещений  $u_j$  и  $v_j$  эквивалентными им условиями непрерывности  $\partial u_j / \partial x$  и  $\partial v_j / \partial x^2$  [11], соответственно, для преобразований напряжений получим

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{yj}(u, y) &= (A_j + y B_j) e^{-|y| |k_j|} + b_j F_j u^2 k_j C_j e^{-\gamma_j |k_j|} + \\ &+ Q_j b_j F_j |u| k_j [e^{-\gamma_j + i_1 k_j} - e^{-\gamma_j - i_1 |k_j|}] - \\ &- Q_j b_j F_j u^2 [e^{-\gamma_j + i_1 k_j} - e^{-\gamma_j - i_1 |k_j|}], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\bar{\sigma}_{xj}(u, y) = - \frac{1}{u^2} \frac{d^2 \bar{\tau}_{yj}(u, y)}{dy^2} \quad (8)$$

$$\bar{\sigma}_{i,j}(u,y) = \frac{1}{iu} \frac{d\bar{\sigma}_{i,j}(u,y)}{dy} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A_j \Delta_0 = & b_j F_j d_j |u| \left\{ \left\langle \left( 1 - \frac{d_{j-1}}{4\mu_{j-1}} \right) |u| - k_j \right\rangle C_j + 2Q_j e_j k_j \right\} + \\ & + b_{j-1} F_{j-1} d_{j-1} |u| (|u| - k_{j-1}) C_{j-1} + 2Q_{j-1} e_{j-1} k_{j-1} + \\ & + G_0 \left\{ -2b_j F_j \mu_j u^2 C_j |< l_{j-1} + \mu(1 - \nu_j) > |u| + 2\mu(1 + \nu_j) k_j | + \right. \\ & + 4b_{j-1} F_{j-1} \mu_{j-1} u^2 C_{j-1} (1 + \nu_{j-1}) (|u| - k_{j-1}) + \\ & \left. + 4\mu \sum_{n=1}^j \mu_n (1 + \nu_n) b_n F_n u^2 k_n 2Q_n e_n + \mu(\nu_1 + \nu_2 - 2) b_0 |u| (C_1 + C_2) \right\} + \\ & + G_0^* u^2 \left\{ (-1)^j \left[ l_{j-1} + \mu(5 + \nu_1 \nu_2 - \nu_1 - \nu_2) \frac{b_0}{h_y} (C_1 + C_2) - b_j F_j u^2 [2\mu \mu_j \times \right. \right. \\ & \times (1 - \nu_j) |u| C_j + 2\mu_j k_j \langle l_{j-1} + 2\mu_j (1 + \nu_j) \rangle (C_j - 2Q_j e_j) \left. \right] + b_{j-1} F_{j-1} \times \\ & \times u^2 |u| C_{j-1} - k_{j-1} (C_{j-1} - 2Q_{j-1} e_{j-1}) \cdot 2\mu \mu_{j-1} (1 - \nu_j) (1 + \nu_{j-1}) \left. \right\} - \\ & - (-1)^j \frac{2b_0}{h_y} (C_1 - C_2) + \frac{b_0}{2} (1 - \nu_j) |u| (C_1 + C_2), \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_j \Delta_0 = & \frac{d_j}{2\mu_j} (4 - p) b_j F_j u^2 (|u| - k_j) C_j + 2Q_j e_j k_j - (-1)^j 2\mu_{j-1} (1 + \nu_j) \times \\ & \times G_0 |u| \left\{ \frac{b_0 d_j (1 + \nu_{j-1})}{8\mu_j (1 + \nu_j)} (C_1 + C_2) |u| + \mu_j \sum_{n=1}^j \mu_n (1 + \nu_n) b_n F_n u^2 \left\langle (|u| - k_n) \times \right. \right. \\ & \times C_n + 2Q_n e_n k_n \left. \right\rangle + 2\mu_{j-1} (1 + \nu_j) G_0^* |u|^2 \left\{ \frac{b_0 d_j (1 + \nu_{j-1})}{4\mu_j h_y (1 + \nu_j)} (C_1 - C_2) + \right. \\ & \left. + \mu_j \sum_{n=1}^j (-1)^n \mu_n (1 + \nu_n) b_n F_n u^2 [(|u| - k_n) C_n + 2Q_n e_n k_n] \right\} - \mu_j l_{j-1} \times \\ & \times (1 + \nu_j) G_0 G_0^* u^2 \left\{ \frac{b_0}{h_y} (C_1 - C_2) - \frac{b_0}{2} (C_1 + C_2) |u| + \mu_j (1 + \nu_j) b_j F_j u^2 \times \right. \\ & \left. \times [(|u| - k_j) C_j + 2Q_j e_j k_j] \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\Delta_0 = pd + 2G_0 (l_2 + \mu l_1) |u| + 2G_0^* (l_2 - \mu l_1) |u|^2 - G_0 G_0^* l_2 l_1 u^4, \quad (12)$$

$$F_j = (m_j + i\mu p_j)^{-1}, \quad b_j = \alpha_j E_j, \quad b_0 = \alpha_0 E_1, \quad p = 3 - \nu_1 + \mu(1 + \nu_2),$$

$$d = 1 + \nu_1 + \mu(3 - \nu_2), \quad l_j = \mu_j^2 (1 + \nu_j) (3 - \nu_j), \quad e_j = e^{-\nu_j |k_j|} - e^{-\nu_j |u|},$$

$$\mu = \frac{E_2}{E_3}, \quad G_0 = \frac{g_0}{h E_1}, \quad G_0^* = \frac{g_0^*}{h E_1}, \quad d_j = \begin{cases} 2d, & j=1 \\ 2\mu p_j, & j=2 \end{cases}, \quad \nu_j = \begin{cases} 1, & j=1 \\ \mu, & j=2 \end{cases}$$

Полагая в (10)–(12)  $g_0 = g_0^* = 0$ ,  $\alpha_2 \rightarrow \infty$ , приходим к решению термо-

упругой задачи для кусочно-однородной пластинки, нагреваемой двумя движущимися источниками тепла, когда термомеханический контакт между разнородными пластинками является идеальным. При этом

$$A_j \Delta_0 = b_j F_j d_j |u| \left\{ \left( 1 - \frac{d_{3-j}}{4\mu_{3-j}} \right) (|u| - k_j) C_j + 2Q_j e_j k_j \right\} + b_{3-j} F_{3-j} d_{3-j} |u| \left\{ (|u| - k_{3-j}) C_{3-j} - 2Q_{3-j} e_{3-j} k_{3-j} \right\}, \quad (13)$$

$$B_1 \Delta_0 = \frac{d_1}{2\mu_1} (4-p) b_1 F_1 u^2 \left\{ (|u| - k_1) C_1 + 2Q_1 e_1 k_1 \right\},$$

$$C_3 = C_1 = \frac{q_1 e^{-\varepsilon_1 k_1 - i \varepsilon_1} + q_2 e^{\varepsilon_2 k_2 - i \varepsilon_2}}{2\pi h (\varepsilon_1 k_1 + \varepsilon_2 k_2)}, \quad \Delta_0 = p d$$

Легко заметить, что в этом случае на контактной линии  $y=0$  удовлетворены условия непрерывности контактных напряжений. Если к тому же  $\bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_2$ ,  $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ ,  $m_1^2 = m_2^2$ ,  $a_1 = a_2$  и  $q_2 = -q_1$  (сток тепла), то при соблюдении условий

$$\varepsilon_2 b_1 d = \varepsilon_1 b_2 p \quad (14)$$

на контактной линии  $y=0$  непрерывны также и нормальные напряжения  $\sigma_x$

$$\sigma_{x1}(x, 0) = \sigma_{x2}(x, 0)$$

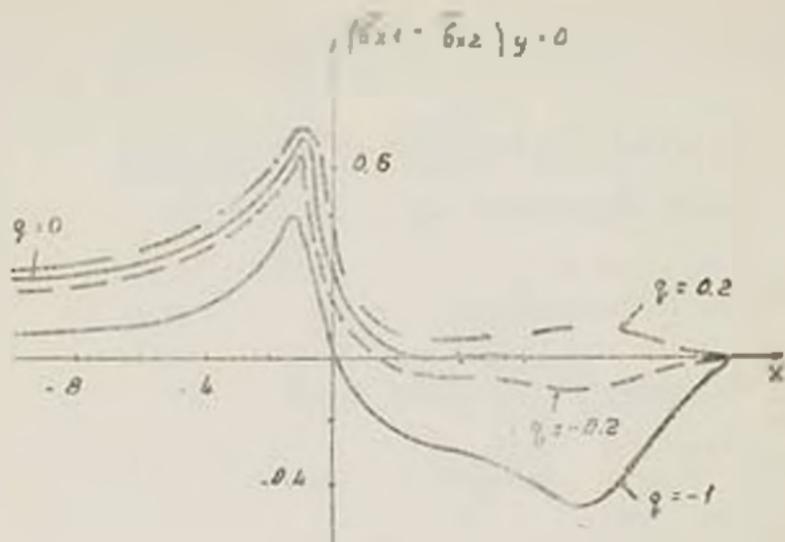
Принимая в (7)–(9) и (13)  $\varepsilon_j = \bar{\delta}_j = 0$ , получим известное решение квазистатической задачи термоупругости для составной пластинки, нагреваемой движущимся вдоль прямолинейного контакта источником тепла постоянной мощности  $q = q_1 + q_2$  [8].

Численные расчеты проведены по формулам (9), (13), когда термоупругие свойства пластинок одинаковы, кроме коэффициентов линейного теплового расширения. В этом случае для разности напряжений  $(\bar{\sigma}_{y1} - \bar{\sigma}_{y2})_{y=0}$  получим

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma}_{y1} - \bar{\sigma}_{y2})_{y=0} &= (\alpha - 1) [e^{-\bar{\varepsilon}_1 \bar{r}_1} K_0(\bar{r}_1) + q e^{-\bar{\varepsilon}_2 \bar{r}_2} K_0(\bar{r}_2)] \\ \bar{x} &= p_1 x / 2, \quad \bar{\delta}_j = p_j \delta_j / 2, \quad \bar{\varepsilon}_1 = p_1 \varepsilon_1 / 2, \quad \alpha = \varepsilon_2 / \varepsilon_1, \quad q = q_2 / q_1, \\ \bar{r}_j &= \sqrt{(x + \bar{\delta}_j)^2 + \bar{\varepsilon}_j^2}, \quad \bar{\sigma}_{xj} = 2\pi h \sigma_{xj} / E_1 q_1 \alpha_j. \end{aligned}$$

$K_0(r)$  — функция Бессели мнимого аргумента.

На фиг. 2 приведены кривые распределения разности напряжений  $(\bar{\sigma}_{y1} - \bar{\sigma}_{y2})_{y=0}$  в зависимости от  $\bar{x}$  при различных значениях  $q$ . Кривая 1 соответствует случаю действия одного источника тепла мощностью  $q_1$  в точке  $\bar{\delta}_1 = 0$ ,  $\bar{\varepsilon}_1 = 1$  ( $q = 0$ ), а кривая 2 — когда, помимо этого источника тепла, в точке  $\bar{\delta}_2 = 10$ ,  $\bar{\varepsilon}_2 = -1$  действует сток тепла мощностью  $q_2 = -q_1$  ( $q = -1$ ), а кривая 4 — когда  $q = -0,2$ .



Условие (11) и приведенные на фиг. 2 кривые показывают, что зависимость температурных напряжений от теплофизических характеристик различных материалов, от скорости движения и мощности источника (стока) тепла позволяет выбором этих параметров определить оптимальные режимы ряда технологических процессов, связанных с соединением разнородных материалов (сварка, пайка, сварка пайка, сварка с интенсивным охлаждением или предварительным прогревом, сварка с применением промежуточной прокладки из биметалла и т. д.)

**THERMAL STRESS STATE OF TWO DISSIMILAR PLATES,  
ARISING WITH THE HELP OF THIN INTERMEDIATE  
LAYER ARISEN FROM MOVING HEAT SOURCES**

A. M. SARGSIAN

ՄԵԿԱՆԻԿԱ ԵՎ ԵՆԾՈՒ ԵՄԻ ԿՈՄՊԼԵԿՍ ՏՈՐՈՆԻ  
ԲԻՆԻՆԱՐԻԻՄ ՀԱՐԻՉՈՂ ՎԵՐՈՒՅԻՆ ԱՂՅՈՒՆՆԵՐԻՑ ԱՌԱՋԱՆԱԾ  
ՋԵՐՄԱՎԱՐՈՒՄԵՆԻ ՎԵՐԱԿՈՒՄ

Ա. Մ. ՍԱՐԳՍԻԱՆ

Ա Մ Փ Ո Ւ Ո Ւ Մ

*Քերտապատկերման գրքի տեսության սահմաններում ստույգագրություն և բաղադրյալ թիվերի շարժման վերաբերյալ գիտություն*

տակտային մակերևույթին դուրսն ա շարժվող ջերմային աղբյուրների ազդեցության դեպքում: Միջանկյալ բարակ շերտը ունի կոնտակտային ջերմադիմադրություն, ինչպես նաև ծածկն է ձգման-սեղմման կոշտության, որոնք հաշվի են առնված բիբեղների միջև ոչ իդեալական ջերմամեխանիկական պայմանների մեջ: Հետադրուված են ջերմաօճակական լարումների վրա բիբեղների ջերմային և մեխանիկական հատկությունների, աղբյուրների հզորությունների և շարժման արագության ազդեցությունները: Ստացվել են պայմաններ, որոնք բիբեղների միջև իդեալական ջերմամեխանիկական կոնտակտի դեպքում ապահովում են բոլոր լարումների անընդհատությունը:

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Рыкалин Н. Н. Расчет тепловых процессов при сварке.—М: Машгиз, 1951. 296 с.
- 2 Корнеев Б. Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в Бесселевых функциях.—М: Физматгиз, 1960. 314 с.
- 3 Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения.—М Физматгиз 1963 251 с.
- 4 Подстригач Я С., Коляко Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках.— Киев Наукова думка, 1972. 308 с.
- 5 Махненко В. И. Расчет тепловых процессов при сварке встык разнородных пластинок.—Физика и химия обработки материалов, 1967. № 6, с 78—83.
- 6 Саргсян А. М. Нагрев составной пластины источниками тепла, движущимися параллельно прямолинейному контакту.—Изв. АН АрмССР, серия тех наук, 1980, № 3, с 52—59.
- 7 Саргсян А. М., Хачикян А С Температурное поле в нагреваемых подвижными источниками тепла разнородных пластинках при разрывных тепловых условиях между ними.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1987. № 2, с. 3—10.
- 8 Саргсян А М., Чобанян К. С. Исследование термоупругих напряжений составной пластинки, по прямолинейному контакту которой движется источник тепла.—Изв. АрмССР, серия тех наук, 1975, № 6, с. 17—23.
- 9 Саргсян А М. Напряженное состояние двух разнородных пластин в процессе их соединения движущимся источником тепла.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1983, № 4, с. 35—45.
- 10 Технология электрической сварки металлов и сплавов плавлением.—М Машинностроение, 1974 768 с.
- 11 Чобанян К. С. О функции напряжений для плоской задачи теории упругости составных тел.—Докл. АН АрмССР, 1961, т. 32, 2, с. 69—77.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
30.11.1992

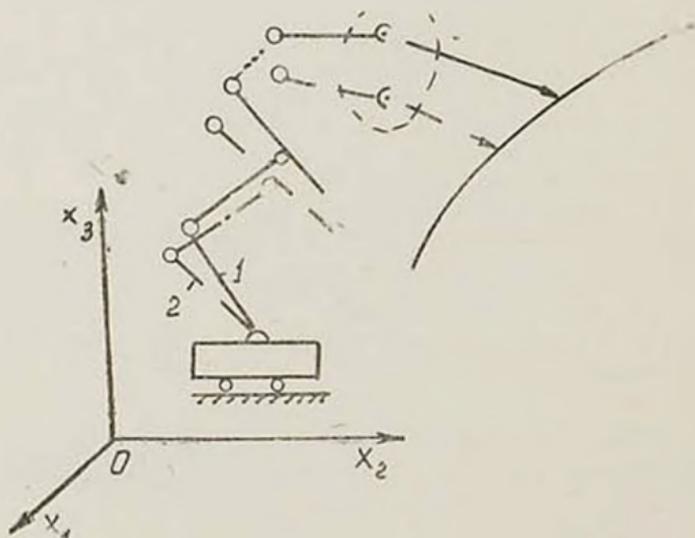
УДК 6250

О ВЛИЯНИИ ВАРИАЦИИ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ НА РЕШЕНИЕ  
 ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ  
 МАНИПУЛЯЦИОННЫХ РОБОТОВ

А. А. ГУКАСЯН

В работе исследуются вопросы определения моментов переключения для релейного типа управления манипуляционным роботом в случае изменения начальных условий. Подобные вопросы для различных механических систем исследованы в работах [1-8] и др.

1. *Исходные предположения.* Рассмотрим управляемое движение  $N$  звеного манипулятора фиг. 1. Обобщенные координаты манипулятора обозначим через вектор  $a = (a_1, \dots, a_n)^T$ , где  $a_i$  — углы в шарнирах или линейное относительное движение звеньев. Положение схвата в пространстве определим вектором  $x = (x_1, x_2, x_3)$  (схват моделируется как материальная точка).



1 - начальное состояние манипулятора  
 2 - начальное состояние после нескольких циклов работы

Фиг. 1.

Уравнение движения манипулятора определим в форме Лагранжа и представим в векторном виде

$$\ddot{\alpha} = f(\alpha, \dot{\alpha}, M) \quad (1.1)$$

где  $M = M_1, \dots, M_n$  — управляющие силы и моменты, развиваемые приводами, расположенными в шарнирах  $O_i$ .

Между обобщенными координатами манипулятора  $\alpha_i$  и координатами, определяющими положение схвата, имеется следующая связь:

$$x = \bar{f}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (1.2)$$

Пусть в пространстве переменных  $x_i (i = 1, 2, 3)$  задана некоторая линия, которую с учетом (1.2) представим в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= 0 \\ \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Функции  $\varphi_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$  в пространстве переменных  $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$  представляют собой гладкие гиперповерхности. Пересечение  $\Omega$  этих гиперповерхностей является  $(n-2)$ -мерным гладким многообразием, если в каждой точке  $\alpha \in \Omega$  векторы  $\text{grad } \varphi_i(\alpha) (i = 1, 2)$  линейно независимы [1].

Пусть требуется за время  $t_i \in [t_0, T]$  из начального положения  $x(t_0) = x^0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}^0$  привести схват манипулятора на линию (1.3) со скоростью  $\dot{x}(T) = a$  и с минимизацией некоторого функционала, характеризующего качество переходного процесса:

$$J = \int_{t_0}^T \Phi(x, \dot{x}, M) dt \rightarrow \min_{\substack{\alpha \\ |M(t)| \leq m}} \quad (1.4)$$

Введем фазовые переменные

$$\alpha_i = y_i, \quad \dot{\alpha}_i = y_{i+n}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.5)$$

Начальное множество представляет собой  $r_0 = (2n-6)$ -мерное гладкое многообразие  $S^0$ , а конечное  $r_1 = (2n-5)$ -мерное гладкое многообразие  $S_1$  в пространстве переменных  $\{y_i, y_{i+n}\} (i = 1, 2, \dots, n)$ .

Векторное уравнение (1.1) и функционал (1.4) в фазовом пространстве (1.5) представим в виде

$$\dot{y} = F(y, M), \quad y^0 \in S^0 \quad (1.6)$$

$$J = \int_{t_0}^T \Phi(y, M) dt \rightarrow \min_{\substack{\alpha \\ |M(t)| \leq m}} \quad (1.7)$$

соответственно.

2. *Математическая формулировка и исследование задачи.* Пусть движение механической системы описывается векторным дифферен-

циальным уравнением (1.6) Требуется найти такие управляющие силы и моменты, которые приводят фазовую точку из начального положения на многообразии  $S^1[y(T)] = 0$  с минимизацией функционала (1.7).

Сформулированная задача является задачей оптимального управления с подвижными концами [1].

Предположим, что при применении принципа максимума Понтрягина [1], управление  $M$ , решающее поставленную задачу, имеет линейный вид:

$$M = m \operatorname{sign}[\xi(y)], \quad \dot{\varphi} = g(y) \quad (2.1)$$

а сопряженным уравнением является

$$\dot{\psi} = h(y, \psi), \quad \dot{\varphi} = g(y), \quad \psi(T) = 0 \quad (2.2)$$

Пусть функция  $\dot{\varphi} = g(y)$  имеет  $k$  простых нулей. Это означает, что управляющее устройство при реализации оптимального управления манипулятором изменяет знак управления  $k$  раз.

Подставляя (2.1) в правую часть уравнения (1.6), получим

$$\dot{y} = F\{y, m \operatorname{sign}[\xi(y)]\} \quad (2.3)$$

Правая часть уравнения (2.3) имеет разрыв в момент переключения  $\tau_i (i=1, 2, \dots, k)$ . Разделим пространство состояний  $Y$ , где происходит движение, на  $(k-2)$  подпространств  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k, Y_R$ ; с гиперповерхностями  $g_i(y) = 0 (i=1, 2, \dots, k)$ , так что

$$y \in \begin{cases} Y_{i-1}, & \text{если } g_i(y) > 0 \\ Y_i, & \text{если } g_i(y) = 0 \\ Y_{i+1}, & \text{если } g_i(y) < 0 \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (2.4)$$

Уравнение (2.3), описывающее движение манипулятора, можно заменить системой дифференциальных уравнений следующего типа:

$$\dot{y} = F_i(y) \quad \text{для } y \in \bar{Y}_{i-1} \quad (2.5)$$

$$\dot{y} = F_{i+1}(y) \quad \text{для } y \in \bar{Y}_{i+1}$$

Здесь под  $\bar{Y}_{i-1} (i=1, 2, \dots, k)$  понимается замыкание подпространства  $Y_{i-1}$ . Предположим, что правые части системы (2.5) удовлетворяют условиям единственности и непрерывности решений в  $\bar{Y}_{i-1}$  и в  $\bar{Y}_{i+1} (i=1, 2, \dots, k)$ .

Пусть  $y = y(t)$  является решением задачи оптимального управления, начинающимся в точке  $y(t_0) \in Y_0$ , пересекающим гиперповерхности  $g_i(y) = 0 (i=1, 2, \dots, k)$  в точках  $y(\tau_i)$  и проходящим через некоторую точку  $y_1 \in Y_{k+1}$ . Траектория  $y = y(t)$  является непрерывной и кусочно-дифференцируемой, именно, во всех точках, кроме  $\tau_i (i=1, 2, \dots, k)$ .

В соответствии с оптимальным решением  $y = y(t)$ , которое характеризует оптимальное изменение конфигурации манипулятора в фазо-

вом пространстве, можно из выражений (1.2) определить также оптимальный закон движения схвата манипулятора:

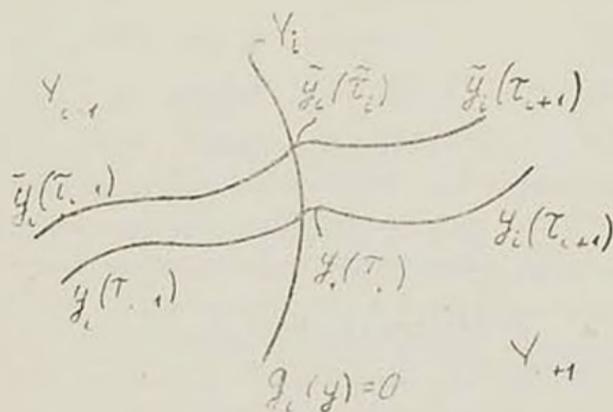
$$x = \bar{f}(y_1(t), \dots, y_n(t)) \quad (2.6)$$

$$x = f'(x)_0 = \left\{ \partial \bar{f}_i(y) / \partial y_j \right\}_{j=1}^n (y_{1+n}(t), \dots, y_n(t))'$$

Фазовая траектория схвата также является непрерывной и кусочно-дифференцируемой

Во время работы манипулятора, в силу действия различных воздействий и помех, начальное (исходное) состояние манипулятора трудно восстановить (фиг. 1). Это приводит к тому, что если известна вариация начального условия  $\delta y_0 = y_0 - \bar{y}_0$ , то в случае релейного управления необходимо определить новые моменты переключения управляющей функции соответственно новому начальному условию

3. *Определение моментов переключения.* Не нарушая общности, рассмотрим поведение фазовой траектории движений манипулятора



Фиг. 2.

$y = y(t)$  на интервале времени  $\tau_{i-1} \leq t \leq \tau_{i+1}$ , где  $\tau_i$  — момент переключения, а  $y(\tau_i)$  — точка переключения управляющей функции (фиг. 2). Предполагаем, что  $y(\tau_{i-1}) \in Y_{i-1}$  является начальным условием и обозначим через  $y_i^0 = y(\tau_{i-1})$ , а траекторию на интервале времени  $t \in [\tau_{i-1}, \tau_{i+1}]$  — через  $y = y(t)$ , где  $y_i^0 = y_i^0 + \varepsilon \delta y_i^0 + O(\varepsilon)$  [7]

Пусть возмущенная фазовая траектория движения манипулятора  $y_i(t)$  пересекает гиперповерхность  $g_i(y) = 0$  в момент времени  $\bar{\tau}_i$ , т. е.  $g[y(\bar{\tau}_i)] = 0$  и проходит через некоторую точку  $y(\tau_{i+1}) = y_i^1 \in Y_{i+1}$ . Без потери общности будем рассматривать случай, когда  $\tau_i \leq \bar{\tau}_i$  (случай  $\tau_i \geq \bar{\tau}_i$  не вносит в анализе исследования принципиальных затруднений)

Траекторию системы, соответствующую новому начальному условию, представим в виде [7]

$$\bar{y}_i(t) = y_i(t) + \delta y_i(t), \quad \text{для } \tau_{i-1} \leq t < \bar{\tau}_i \quad (3.1)$$

$$\bar{y}_i(t) = y_i(t) + \delta y_i^+(t), \text{ для } \tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}$$

где  $\delta y_i^-(t)$ ,  $\delta y_i^+(t)$  — решения уравнения

$$\frac{d}{dt} [\delta y_i^-(y)] = \left. \frac{\partial F_i}{\partial y} \right|_{y_i(t)} \cdot \delta y_i^-(t) \quad (3.2)$$

$$\delta y_i^-(\tau_{i-1}) = \delta y_i^0$$

$$\frac{d}{dt} [\delta y_i^+(y)] = \left. \frac{\partial F_i}{\partial y} \right|_{y_i(t)} \cdot \delta y_i^+(t) \quad (3.3)$$

Из (3.1) — (3.3) следует, что  $\delta y_i^-(t)$  на интервале  $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$  можно определить из (3.2), а для определения решения  $\delta y_i^+(t)$  уравнения (3.3), необходимо найти соотношение между  $\delta y_i^+(t)$  и  $\delta y_i^-(t)$ .

Момент переключения, соответствующий новому начальному условию, определим следующим образом:

$$\bar{\tau}_i = \tau_i + \delta t_i \quad (3.4)$$

Тогда

$$\bar{y}_i(\bar{\tau}_i) = y_i(\tau_i) + \delta y_i^-(\bar{\tau}_i) + F_i[\bar{y}_i(\bar{\tau}_i)] \cdot \delta t_i + O(\epsilon) \quad (3.5)$$

$$\delta y_i^+(\bar{\tau}_i) = \delta y_i^-(\bar{\tau}_i) + \{F_{i+1}[\bar{y}_i(\bar{\tau}_i)] - F_i[\bar{y}_i(\bar{\tau}_i)]\} \delta t_i + O(\epsilon) \quad (3.6)$$

Так как гиперповерхность  $g_i[y(t)] = 0$  является поверхностью переключения, то это означает, что фазовые точки движения манипулятора  $\bar{y}_i(\bar{\tau}_i)$  и  $y_i(t_i)$  одновременно принадлежат ему, то есть

$$g_i[\bar{y}_i(\bar{\tau}_i)] - g_i[y_i(\tau_i)] = 0$$

или в первом приближении

$$g_i[\bar{y}_i(\bar{\tau}_i)] - g_i[y_i(\tau_i)] \approx \langle g_{i,y}[y_i(\tau_i)] + O(\epsilon), \quad (3.7)$$

$$\bar{y}_i(\bar{\tau}_i) - y_i(\tau_i) \rangle = 0$$

Подставляя (3.5) в соотношение (3.7) и перейдя к пределу, когда  $\epsilon \rightarrow 0$ , получим

$$\delta t_i = - \frac{\langle g_{i,y}[y_i(\tau_i)], \delta y_i^-(\tau_i^-) \rangle}{\langle g_{i,y}[y_i(\tau_i)], F_i[y_i(\tau_i^-)] \rangle} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \delta y_i^+(\tau_i^+) - \delta y_i^-(\tau_i^-) &= \{F_{i+1}[y_i(\tau_i^+)] - F_i[y_i(\tau_i^-)]\} \times \\ &\times \frac{\langle g_{i,y}[y_i(\tau_i)], \delta y_i^-(\tau_i^-) \rangle}{\langle g_{i,y}[y_i(\tau_i)], F_i[y_i(\tau_i^-)] \rangle} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Разность между  $\delta y_i^+(\tau_i^+)$  и  $\delta y_i^-(\tau_i^-)$  называется условием скачка для возмущенного движения в точке переключения.

Из (3.9) следует, что между функциями  $\delta y_i^+(\tau_i^+)$  и  $\delta y_i^-(\tau_i^-)$  имеется линейная связь, то есть

$$\delta y_i(\tau_i) = A \delta y_i(\tau_{i-1}) \quad (3.10)$$

После того, как найдена связь (3.10), можно определить новую фазовую траекторию движения манипулятора из уравнений (3.2) и (3.3)

$$\delta y_i^-(t) = \Phi_1[t, \tau_{i-1}] \cdot \delta y_i^-(\tau_{i-1}), \quad \tau_{i-1} \leq t \leq \tau_i \quad (3.11)$$

$$\delta y_i^-(t) = \Phi_2[t, \tau_i^-] \cdot \delta y_i^-(\tau_i^+), \quad t \geq \tau_i \quad (3.12)$$

Здесь  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — фундаментальные матрицы решений уравнений (3.2) и (3.3), соответственно.

Из (3.10) — (3.12) следует, что

$$\delta y_i^-(t) = M(t, \tau_{i-1}) \delta y_i^-(\tau_{i-1}) \quad (3.13)$$

где

$$M(t, \tau_{i-1}) = \Phi_2[t, \tau_i^-] A^{-1} \Phi_1[t, \tau_{i-1}]$$

Если матрица  $M$  — неособая, то

$$\delta y_i^-(\tau_{i-1}) = M^{-1} \delta y_i^-(t)$$

Заметим, что если заданы исходное решение  $y_i(t)$  и вариации начального условия  $\delta y_i(\tau_{i-1})$ , то известны все члены в правой части выражения (3.8), определяющие влияние вариации начальных условий на момент переключения  $\tau_i$ . Проведенное исследование можно распространить для любого  $i$  и тем самым, определить влияние вариации начальных условий на моменты переключения  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ .

В соответствии с (2.6) возмущенная траектория движения схвата манипулятора по первому приближению на интервале времени  $t \in [\tau_{i-1}, \tau_{i+1}]$  имеет вид

$$\delta x = F(\tau) \delta z = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right\} \delta y_j \Big|_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \cdot \delta y$$

#### ABOUT INFLUENCE OF INITIAL CONDITIONS VARIATIONS ON SOLUTION OF OPTIMAL CONTROL OF MANIPULATING ROBOTS MOTION PROBLEM

A. A. GUKASIAN

ԻՐԱՆԻՊՈՒՅԱՅԻՈՆ, ԹՈՐՈՏՆԵՐԻ ԹՓՏԻՄԱԿ ԳԵՄԵՎՈՐՄԱՆ  
ԿԵՐԻ ՎՐԱ ԽՉՔՆԱԿԱՆ, ՓԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ՎՈՐԻԱՅԻՈՅԻ  
ԱԶԳԵՅՈՒՔՅԱՆ ԸՆԴՈՒՆ

Ա. Ա. ԳՈՒԿԱՅԵԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հետազոտում է մանիպուլյացիոն սորտաների օպտիմալ ղեկավարման  
անջատման կետերի որոշման հարցերը, սկզբնական պայմանների փո-  
փոխության դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов.—М: Наука, 1983, 392 с
2. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями.—М: Наука, 1980, 384 с
3. Акуленко Л. Д. Асимптотические методы оптимального управления.—М: Наука, 1987, 365 с
4. Черноусько Ф. Л., Медикян А. А. Игровые задачи управления и поиска.—М: Наука, 1978, 270 с
5. Моисеев Н. И. Численные методы в теории оптимальных систем.—М: Наука, 1971, 424 с
6. Рагов Н. И., Черноусько Ф. Л. Оптимальное управление электродвигателем работа с упругими элементами.—Тех. кибернетика, 1989, № 1, с. 135—145
7. Леондес В. У. Функции чувствительности относительно начальных условий и их применение.—Тр. американского общества инженеров-механиков «Теоретические основы инженерных расчетов», 1971, № 3, с. 128—134.
8. Гукасян А. А. О влиянии вариации начальных условий на решение задачи оптимального управления манипуляционных роботов.—Тезисы докл 7-ой Всесоюзной конференции по управлению в механических системах. Свердловск, 1990, 32 с.

Երևանский государственный  
университет

Поступила в редакцию:  
20.11.1991