

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՄԵԼԵԿԱՆԻԿԱ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1993

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ТРЕХМЕРНОЙ
ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ
ПЛАСТИНКИ

ԱԳԱՋՅԱՆ Լ. Ա., ԴՈՎՄԱՅԱՆ Ա. Բ.

В работе рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния анизотропной термоупругой пластины, когда на одной из ее лицевых поверхностей заданы значения напряжений, а на другой — нормальная компонента вектора перемещения и тангенциальные напряжения. Задача, в частности, моделирует взаимодействие фундамента с жестким основанием — учетом трения между фундаментом и основанием. Установлена асимптотика всех компонент тензора напряжений и вектора перемещения, который принципиально отличается от асимптотики тех же величин по классической теории пластин. Полученная асимптотика, решение пространственной задачи сведено к двумерной. Выведены рекуррентные формулы для определения напряжений и перемещений, соответствующие внутренней задаче.

Доказана неприменимость гипотез Кирхгофа-Лива классической теории пластин и оболочек к указанным задачам.

Для решения пространственных краевых задач теории упругости тонкостенных тел (или сведения к двумерным задачам), одним из эффективных методов оказался асимптотический. Этим методом построена асимптотическая теория изотропных пластин и оболочек [1—4], анизотропных пластин и оболочек [5—7]. Метод оказался эффективным при рассмотрении задач взаимодействия тонкостенных тел с различными физическими полями [8—12]. Этим же методом решены новые классы неклассических краевых задач пластин и оболочек (на лицевых поверхностях пластин и оболочек заданы компоненты вектора перемещения или условия третьей краевой задачи теории упругости) [13—17]. Была установлена неприменимость гипотез Кирхгофа-Лива классической теории пластин и оболочек к указанным задачам. Рассмотрение этого класса задач позволило установить также связь между решением краевой задачи теории упругости и моделью Винклера-Фусса для упругого основания, вывести формулу для вычисления коэффициента постели анизотропного основания и основания с переменными по толщине упругими свойствами [14—16].

1. Требуется найти решение уравнений пространственной задачи термоупругости анизотропного тела в области $\Omega = \{x, y, z: x, y \in \Omega_0, |z| \leq h, h \ll a\}$, где Ω_0 — область, занятая срединной поверхностью пластинки, a — характерный тангенциальный размер пластинки. Считается, что анизотропия — самая общая (21) упругая константа), на пластинку действуют заданные объемные силы с компонентами $F_\alpha(x, y, z)$,

$F_y(x, y, z)$, $F_z(x, y, z)$ и температурные воздействия. Изменение температурного поля характеризуется функцией $\Theta = T - T_0$, которая считается известной, то есть рассматривается несвязанная задача термоупругости в силу статической постановки задачи [18]. На лицевых поверхностях заданы условия:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{xz}^+(x, y), \quad \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^+(x, y) \quad (1.1)$$

$$\sigma_z = \sigma_z^+(x, y), \quad \text{при } y = h,$$

$$w = \varepsilon^{-1} \omega^-(x, y), \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^-(x, y) \quad (1.2)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{yz}^-(x, y), \quad \text{при } y = -h$$

Условия на боковой поверхности пока будем считать произвольными.

Чтобы решить поставленную трехмерную краевую задачу, в уравнениях и соотношениях термоупругости перейдем к безразмерным переменным $\xi = x/a$, $\eta = y/a$, $\zeta = z/h$ и безразмерным перемещениям $U = u/a$, $V = v/a$, $W = w/a$. В результате получаем следующую сингулярно-возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/a$ систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial \zeta} + a F_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial \zeta} + a F_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_z}{\partial \zeta} + a F_z &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \xi} &= a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{13} \sigma_z + a_{14} \sigma_{xy} + a_{15} \sigma_{xz} + a_{16} \sigma_{yz} + \alpha_{11} \Theta \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} &= a_{22} \sigma_x + a_{23} \sigma_y + \dots + a_{26} \sigma_{xy} + \alpha_{22} \Theta \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial W}{\partial \zeta} &= a_{33} \sigma_x + a_{34} \sigma_y + \dots + a_{36} \sigma_{xy} + \alpha_{33} \Theta \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial \eta} &= a_{44} \sigma_x + a_{45} \sigma_y + \dots + a_{46} \sigma_{xy} + \alpha_{44} \Theta \\ \frac{\partial W}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} &= a_{55} \sigma_x + a_{56} \sigma_y + \dots + a_{56} \sigma_{xy} + \alpha_{55} \Theta \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} &= a_{66} \sigma_x + a_{67} \sigma_y + \dots + a_{66} \sigma_{xy} + \alpha_{66} \Theta \end{aligned} \quad (1.3)$$

где a_{ik} — упругие коэффициенты податливости, α_{ik} — коэффициенты теплового расширения.

Решение системы (1.3) складывается из решения внутренней задачи и пограничного слоя [1, 3, 7, 19]. Решение внутренней задачи или проникающее решение ищем в виде

$$Q = e^{i\tau} Q^{(0)}(\xi, \eta, z), \quad z = 0, N \quad (1.4)$$

где Q — любая из искомым величин, по некому индексу s идет суммирование от нуля до числа приближений N , q_i — целые числа, которые должны быть такими, чтобы получить непротиворечивую систему относительно $Q^{(0)}$. Эта цель достигается лишь при

$$\begin{aligned} q_i &= -1 \quad \text{для} \quad z_x, z_y, z_z, z_{xy}, U, V, W \\ q_i &= 0 \quad \text{для} \quad z_{xz}, z_{yz} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Вклад объемных сил и температурных воздействий и общее напряженное состояние будет соизмеримым со вкладом поверхностных сил, если

$$F_i = e^{-1+\alpha} a^{-1} F_i^{(0)}(\xi, \eta, z), \quad (x, y) \quad (1.6)$$

$$F_i = e^{-2+\alpha} a^{-1} F_i^{(0)}(\xi, \eta, z)$$

$$H = e^{-1+\alpha} H^{(0)}(\xi, \eta, z)$$

откуда следует, что нормальная составляющая объемной силы должна иметь достаточно большую интенсивность, в противном случае влияние объемных сил будет меньше и соответствующие слагаемые войдут в уравнения для более высоких приближений. Для сравнения с найденной асимптотикой (1.4), (1.5), приведем асимптотику решения задачи классической теории пластинок (на линейных поверхностях $y = \pm h$ заданы компоненты тензора напряжений) [1, 5]:

$$q_i = -2 \quad \text{для} \quad z_x, z_y, z_{xy}, U, V \quad (1.7)$$

$$q_i = -1 \quad \text{для} \quad z_{xz}, z_{yz}, q_i = 0 \quad \text{для} \quad z_z, q_i = -3 \quad \text{для} \quad W$$

Сравнение асимптотики (1.5) с (1.7) показывает их принципиальное различие. Асимптотика (1.4), (1.5) существенно отличается и от асимптотики во второй и третьей краевых задачах [13—15]. Ниже убедимся, что это отличие существенным образом влияет на структуру основных разрешающих уравнений.

2. Подставив (1.4) в (1.3), приравняв коэффициенты при одинаковых степенях τ , с учетом (1.5), (1.6) получим следующую систему относительно $Q^{(0)}$

$$\frac{\partial z_{xy}^{(0)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial z_{xy}^{(0)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial z_{xy}^{(0)}}{\partial z^2} + F_{xy}^{(0)} = 0$$

$$\frac{\partial z_{xz}^{(0)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial z_{xz}^{(0)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial z_{xz}^{(0)}}{\partial z^2} + F_{xz}^{(0)} = 0$$

$$\frac{\partial z_{yz}^{(0)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial z_{yz}^{(0)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial z_{yz}^{(0)}}{\partial z^2} + F_{yz}^{(0)} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi} &= a_{11} \sigma_v^{(1)} + a_{12} \sigma_v^{(1)} + a_{13} \sigma_z^{(1)} + a_{14} \sigma_{vz}^{(1-1)} + a_{15} \sigma_{xz}^{(1-1)} + a_{16} \sigma_{xy}^{(1)} + \tau_{11} H^{(1)} \\
\frac{\partial V^{(1)}}{\partial \eta} &= a_{11} \sigma_x^{(1)} + a_{12} \sigma_v^{(1)} + a_{23} \sigma_z^{(1)} + a_{24} \sigma_{yz}^{(1-1)} + a_{25} \sigma_{xz}^{(1-1)} + a_{26} \sigma_{xy}^{(1)} + \tau_{21} H^{(1)} \\
\frac{\partial W^{(1)}}{\partial \xi} &= a_{11} \sigma_v^{(1-1)} + a_{22} \sigma_v^{(1-1)} + a_{33} \sigma_z^{(1-1)} + a_{34} \sigma_{vz}^{(1-2)} + a_{35} \sigma_{xz}^{(1-2)} + a_{36} \sigma_{xy}^{(1-1)} + a_{37} \sigma_{yz}^{(1-1)} + \\
&\quad \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial W^{(1-1)}}{\partial \eta} = a_{14} \sigma_z^{(1-1)} + a_{11} \sigma_y^{(1-1)} + a_{34} \sigma_z^{(1-1)} + \\
&\quad + a_{31} \sigma_{vz}^{(1-2)} + a_{45} \sigma_{xz}^{(1-2)} + a_{36} \sigma_{xy}^{(1-1)} + \tau_{21} H^{(1-1)} \\
\frac{\partial W^{(1-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi} &= a_{33} \sigma_v^{(1-1)} + a_{23} \sigma_v^{(1-1)} + a_{35} \sigma_z^{(1-1)} + \\
&\quad + a_{15} \sigma_{vz}^{(1-2)} + a_{35} \sigma_{xz}^{(1-2)} + a_{36} \sigma_{xy}^{(1-1)} + \tau_{12} H^{(1-1)} \\
\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \xi} &= a_{14} \sigma_z^{(1)} + a_{24} \sigma_{yz}^{(1)} + a_{34} \sigma_{xz}^{(1)} + a_{44} \sigma_{xy}^{(1-1)} + \\
&\quad + a_{36} \sigma_{xz}^{(1-1)} + a_{66} \sigma_{xy}^{(1)} + \tau_{12} H^{(1)}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Учитывая, что $Q^{(1)} = 0$ при $s < 0$, из системы (2.1) можно определить все неизвестные величины с точностью некоторых функций, зависящих только от переменных ξ, η . Приведем процедуру решения системы (2.1). Из третьего уравнения равновесия определяется $\sigma_z^{(1)}$, из шестого, седьмого, восьмого уравнений системы определяются $U^{(1)}$, $V^{(1)}$, $W^{(1)}$, а из четвертого, пятого, девятого уравнений, с учетом уже определенных величин, определяются $\sigma_x^{(1)}$, $\sigma_y^{(1)}$, $\sigma_{xz}^{(1)}$. Вернувшись к первым двум уравнениям системы (2.1), определяются $\sigma_{xz}^{(1)}$, $\sigma_{xy}^{(1)}$. В результате имеем решение:

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{(1)} &= \sigma_{z0}^{(1)}(\xi, \eta) + \sigma_z^{(1-1)}(\xi, \eta, \tau), \quad W^{(1)} = u^{(1)}(\xi, \eta) + w^{(1-1)}(\xi, \eta, \tau) \\
V^{(1)} &= v^{(1)}(\xi, \eta) + v^{(1-1)}(\xi, \eta, \tau), \quad U^{(1)} = u^{(1)}(\xi, \eta) + u^{(1-1)}(\xi, \eta, \tau) \\
\sigma_x^{(1)} &= A_{11} \sigma_{z0}^{(1)} + L_{11} u^{(1)} + L_{12} v^{(1)} + \sigma_x^{(1-1)}(\xi, \eta, \tau) \\
\sigma_y^{(1)} &= A_{21} \sigma_{z0}^{(1)} + L_{21} u^{(1)} + L_{22} v^{(1)} + \sigma_y^{(1-1)}(\xi, \eta, \tau) \\
\sigma_{xz}^{(1)} &= A_{31} \sigma_{z0}^{(1)} + L_{31} u^{(1)} + L_{32} v^{(1)} + \sigma_{xz}^{(1-1)}(\xi, \eta, \tau) \\
\sigma_{xy}^{(1)} &= A_{41} \sigma_{z0}^{(1)} + L_{41} u^{(1)} + L_{42} v^{(1)} + \sigma_{xy}^{(1-1)}(\xi, \eta, \tau) \\
\sigma_{xz}^{(1)} &= \sigma_{xz0}^{(1)}(\xi, \eta) - \tau \left(\frac{\partial L_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial L_{21}}{\partial \eta} \right) u^{(1-1)} - \\
&\quad - \tau \left(\frac{\partial L_{12}}{\partial \xi} + \frac{\partial L_{22}}{\partial \eta} \right) v^{(1-1)} - \tau \left(A_{11} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(1-1)}}{\partial \xi} + A_{61} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(1-1)}}{\partial \eta} \right) + \sigma_{xz}^{(1-1)}(\xi, \eta, \tau) \\
\sigma_{xy}^{(1)} &= \sigma_{xy0}^{(1)}(\xi, \eta) - \tau \left(\frac{\partial L_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial L_{12}}{\partial \eta} \right) u^{(1-1)} - \tau \left(\frac{\partial L_{21}}{\partial \xi} + \frac{\partial L_{22}}{\partial \eta} \right) v^{(1-1)} - \\
&\quad - \tau \left(A_{61} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(1-1)}}{\partial \xi} + A_{21} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(1-1)}}{\partial \eta} \right) + \sigma_{xy}^{(1-1)}(\xi, \eta, \tau)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{12} &= (a_{12}B_{20} + a_{22}B_{12} + a_{02}B_{02})/\Delta, \quad (1,2) \\ A_{02} &= (a_{12}B_{02} + a_{22}B_{01} + a_{02}A_{12})/\Delta \\ A_{12} &= a_{12}^2 - a_{11}a_{02}, \quad B_{12} = a_{12}a_{02} - a_{10}a_{20} \\ B_{10} &= a_{10}^2 - a_{11}a_{00}, \quad B_{01} = a_{11}a_{20} - a_{12}a_{10}, \quad (1,2) \\ \Delta &= a_{11}^2 - a_{00}a_{22} - 2a_{12}a_{20}a_{10} - a_{11}a_{20}^2 - a_{22}a_{10}^2 - a_{00}a_{12}^2 \\ &\quad B_{00} - B_{01} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} L_{11} &= -\frac{1}{\Delta} \left(B_{20} \frac{\partial}{\partial \xi} + B_{02} \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad L_{22} = -\frac{1}{\Delta} \left(B_{02} \frac{\partial}{\partial \xi} + A_{12} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ L_{22} &= -\frac{1}{\Delta} \left(B_{12} \frac{\partial}{\partial \xi} + B_{01} \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad L_{12} = -\frac{1}{\Delta} \left(B_{11} \frac{\partial}{\partial \eta} + B_{02} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \\ L_{23} &= -\frac{1}{\Delta} \left(B_{10} \frac{\partial}{\partial \eta} + B_{01} \frac{\partial}{\partial \xi} \right), \quad L_{02} = -\frac{1}{\Delta} \left(B_{01} \frac{\partial}{\partial \eta} + A_{12} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \end{aligned}$$

Величины $Q^{(s)}$ (ξ , η , ζ) для каждого s являются известными функциями, если определены величины предыдущих приближений. Они вычисляются по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} \varphi^{(s)} &= - \int_0^1 \left(f(\eta) + \frac{\partial \varphi^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi^{(s-2)}}{\partial \eta} \right) d\eta \\ w^{(s)} &= \int_0^1 (a_{31} \varphi_x^{(s-1)} + a_{32} \varphi_y^{(s-1)} + a_{33} \varphi_z^{(s-1)} + a_{34} \varphi_{yz}^{(s-2)} + \\ &\quad + a_{35} \varphi_{xz}^{(s-2)} + a_{36} \varphi_{xy}^{(s-1)} + \varphi_{23}^{(s-1)}) d\xi \\ v^{(s)} &= \int_0^1 (a_{41} \varphi_x^{(s-1)} + a_{42} \varphi_y^{(s-1)} + a_{43} \varphi_z^{(s-1)} + a_{44} \varphi_{yz}^{(s-2)} + \\ &\quad + a_{45} \varphi_{xz}^{(s-2)} + a_{46} \varphi_{xy}^{(s-1)} + \varphi_{23}^{(s-1)} - \frac{\partial \psi^{(s-1)}}{\partial \eta}) d\xi \\ u^{(s)} &= \int_0^1 (a_{11} \varphi_x^{(s-1)} + a_{12} \varphi_y^{(s-1)} + a_{13} \varphi_z^{(s-1)} + a_{15} \varphi_{yz}^{(s-2)} + \\ &\quad + a_{16} \varphi_{xz}^{(s-2)} + a_{36} \varphi_{xy}^{(s-1)} + \varphi_{23}^{(s-1)} - \frac{\partial \psi^{(s-1)}}{\partial \xi}) d\eta \\ \varphi_i^{(s)} &= -\frac{1}{\Delta} (b_1^{(s)} B_{20} + b_2^{(s)} B_{12} + b_3^{(s)} B_{02}) \\ \varphi_v^{(s)} &= -\frac{1}{\Delta} (b_1^{(s)} B_{12} + b_2^{(s)} B_{10} + b_3^{(s)} B_{01}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$z_{xy}^{*(s)} = -\frac{1}{\Delta} (b_1^{(s)} B_{xz} + b_2^{(s)} B_{yz} + A_{zz} b_3^{(s)})$$

$$\sigma_{xz}^{(s)} = - \int_0^z \left[F_x^{(s)} + \frac{\partial z_{xy}^{*(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial z_{xy}^{*(s)}}{\partial \eta} \right] d\xi$$

$$\sigma_{yz}^{(s)} = - \int_0^z \left[F_y^{(s)} + \frac{\partial z_{xy}^{*(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial z_{xy}^{*(s)}}{\partial \eta} \right] d\xi$$

$$b_1^{(s)} = \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial \xi} - a_{13} z_r^{(s)} - a_{14} z_{xz}^{(s-1)} - a_{15} z_{yz}^{(s-1)} - a_{11} b^{(s)}$$

$$b_2^{(s)} = \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial \eta} - a_{23} z_r^{(s)} - a_{24} z_{xz}^{(s-1)} - a_{25} z_{yz}^{(s-1)} - a_{21} b^{(s)}$$

$$b_3^{(s)} = \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial \xi} - a_{36} z_r^{(s)} - a_{36} z_{yz}^{(s-1)} - a_{36} z_{xz}^{(s-1)} - a_{33} b^{(s)}$$

Как следует из формул (2.2), (2.4), вклад объемных сил и температурного поля в общее напряженное состояние вычисляется непосредственно, входящими в (2.4) соответствующими интегралами.

В (2.2) неизвестными являются функции $u^{(s)}$, $v^{(s)}$, $w^{(s)}$, $z_{xz}^{(s)}$, $z_{yz}^{(s)}$, $z_{xz0}^{(s)}$, которые должны быть определены из условий (1.1), (1.2) и условий на боковой поверхности. Удовлетворяя условиям (1.1), (1.2), получим

$$w^{(s)}(\xi, \eta) = w^{(s)} - w^{(s)}(\xi, \eta, -1)$$

$$z_{xz}^{(s)}(\xi, \eta) = z_{xz}^{+(s)} - z_{xz}^{-(s)}(\xi, \eta, 1) \quad (2.5)$$

$$z_{yz}^{(s)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} [z_{xz}^{+(s)} + z_{xz}^{-(s)} - z_{xz}^{(s)}(\xi, \eta, 1) - z_{xz}^{(s)}(\xi, \eta, -1)], (x, y)$$

где

$$z_{xz}^{+(s)} = z_{xz}^+, z_{xz}^{\pm(s)} = z_{xz}^{\pm(s)}, z_{xz}^{-(s)} = z_{xz}^-(s) = 0, (s > 0), (x, y)$$

для определения же величин $u^{(s)}$, $v^{(s)}$ получают следующие дифференциальные уравнения:

$$L_1 u^{(s)} + L_2 v^{(s)} = P_1^{(s)}$$

$$(2.6)$$

$$L_2 u^{(s)} + L_1 v^{(s)} = P_2^{(s)}$$

где

$$L_1 = \frac{\partial L_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial L_{12}}{\partial \eta}, \quad L_2 = \frac{\partial L_{21}}{\partial \xi} + \frac{\partial L_{22}}{\partial \eta}$$

$$(2.7)$$

$$\begin{aligned}
L_3 &= \frac{\partial l_{32}}{\partial \xi} + \frac{\partial l_{23}}{\partial \eta}, \quad L_4 = \frac{\partial l_{42}}{\partial \xi} + \frac{\partial l_{24}}{\partial \eta} \\
P_1^{(1)} &= \frac{1}{2} [\sigma_{xz}^{(1)} - \tau_{xz}^{(1)} - \tau_{xz}^{(1)}(\xi, \eta, -1) + \sigma_{xz}^{(1)}(\xi, \eta, 1)] - \\
&\quad - A_{12} \frac{\partial \tau_{z0}^{(1)}}{\partial \xi} + A_{13} \frac{\partial \tau_{z0}^{(1)}}{\partial \eta} \\
P_2^{(1)} &= \frac{1}{2} [\tau_{yz}^{(1)} - \tau_{yz}^{(1)} - \tau_{yz}^{(1)}(\xi, \eta, -1) + \tau_{yz}^{(1)}(\xi, \eta, 1)] - \\
&\quad - A_{22} \frac{\partial \tau_{z0}^{(1)}}{\partial \xi} - A_{23} \frac{\partial \tau_{z0}^{(1)}}{\partial \eta}
\end{aligned}$$

Решив систему (2.6) в частных производных четвертого порядка, определим $u^{(1)}$, $v^{(1)}$, а по формулам (1.4), (1.5), (2.2), (2.5) определяются все искомые величины. Поскольку система (2.6) эллиптическая и четвертого порядка, то приведенных краевых условий на боковой поверхности должны быть два. Если особо не рассматривать граничный слой, то для исходного приближения эти условия можно выписать, усреднив по толщине условия на боковой поверхности пластинки относительно тангенциальных величин.

Отметим некоторые различительные стороны полученных двумерных уравнений по сравнению с классическими и другими [1, 5, 15]. В случае классической теории пластинок [1, 2, 5] получаются дифференциальные уравнения не только относительно тангенциальных компонентов u , v вектора перемещения, но и относительно нормальной компоненты w . В нашем случае уравнения получились относительно u , v , а w определяется для каждого приближения арифметическими действиями по формуле (2.5), то есть условия на лицевых поверхностях диктуют вид приведенных двумерных уравнений и изменяя лишь одно условие по сравнению с классическими (в нашем случае на $y = \pm h$, относительно w), коренным образом можно менять характер напряженно-деформированного состояния пластинки, что ярко проявляется в асимптотиках (1.5), (1.7) всех искомых величин. Сказанное еще ярче проявляется в случаях второй и третьей краевых задач [15], когда не получается никакое двумерное приведенное уравнение и величины u , v , w полностью определяются при помощи условий на $y = \pm h$, а условиями на боковой поверхности обуславливается появление лишь граничного слоя.

Систему (2.6) можно свести к решению одного уравнения четвертого порядка. Для этого применим к обеим частям первого уравнения оператор L_1 , а ко второму — $(-L_2)$ и сложим, в результате получим уравнение:

$$(L_1 L_4 - L_2 L_3) u^{(1)} = L_1 P_1^{(1)} - L_2 P_2^{(1)} \quad (2.8)$$

Для ортогонных пластинок, когда главные направления анизотропии совпадают с направлениями координатных линий

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=a_{12}=a_{21}=a_{13}=a_{31}=a_{15}=a_{51}=a_{25}=a_{52}=a_{35}=a_{53}=a_{44}=a_{55}=0, \quad (2.9)$$

приведенные выше формулы значительно упрощаются.

В заключение отметим, что мы здесь рассмотрели лишь внутреннюю задачу, вопрос о пограничном слое и его взаимодействии с решением внутренней задачи предмет отдельного рассмотрения, что можно осуществить указанным в [2, 7, 20] способом.

ASYMPTOTIC SOLUTION OF MIXED THREE DIMENSIONAL INTERIOR PROBLEM FOR ANISOTROPIC THERMOELASTIC PLATES

L. A. AGHALOVIAN, A. B. TOVMASIAN

ԱՆԻՍՏՐՈՊ ԶԵՐՄԱՌՈՋԳԱՎԱՆ ՈՍԼԻ ԵՌԱԶԱԿ ԽԱՐԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ՆԵՐՔԻՆ ԵՆԴՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԼՈՒՇՈՒՄԸ

Լ. Ա. ԱԶԱՈՎՅԱՆ, Ա. Բ. ԽՈՎԱՏԻԱՆ

Ստացված է ախմպատասիկ լուծում ընդհանուր առաձգական և ջերմային անիզոտրոպիաներով օժտված սուլի ներքին տիրույթում, երբ սուլի նախատային նիստերից մեկի վրա տրվում են լարման տենզորի բաղադրիչները, իսկ մյուս նիստի վրա տեղափոխման վեկտորի նորմալ բաղադրիչ և տանգենցիալ լարումները:

Ապացուցված է Կիրխոֆ-Լյամի վարկածի անընդունելի լինելը նշված դասի խնդիրների համար: Ստացված են երկչափ բերված հավասարումներ տեղափոխման վեկտորի տանգենցիալ բաղադրիչների նկատմամբ և սեկուլերնոս բանաձևեր անհայտ լարումների և տեղափոխումների որոշման համար:

Ապացուցված է սուլի ճակատային նիստերի վրա զրփոյ պայմանների տեսքի որոշիչ աղյուսակային բերված երկչափ խնդրի բնույթի վրա: Մասնավորապես ցույց է տրված, որ ի տարբերություն դասական տեսաբանության, աշտտեղ չի ստացվում հավասարում տեղափոխման վեկտորի նորմալ բաղադրիչի նկատմամբ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Гильдебаккер А. Л. Построение приближенной теории оболочки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.—*ДАН*, 1962, т. 26, вып. 4, с. 668—686.
2. Гильдебаккер А. Л. Теория упругих тонких оболочек.—*М.* Наука, 1976, 512 с.
3. Воронин Н. Н. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек.—В сб.: Материалы I Всесоюз. школы по теории и численным методом расчета оболочек и пластин.—Тбилиси, Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975.
4. Воронин Н. Н., Козловская Н. Г., Устинова И. А. К теории неоднородных по толщине плит.—*Изв. АН СССР, МТТ*, 1975, № 3, с. 119—130.

5. Агаджян Л. А. К теории изгиба ортотропных пластин.—Изв. АН СССР. МТТ, 1966, № 6, с. 116—121.
6. Агаджян Л. А. О некоторых соотношениях линейной теории анизотропных оболочек и возможностях их уточнения.—Изв. АН СССР, 1972, № 1, с. 109—120.
7. Агаджян Л. А. О приведении пространственной задачи теории упругости к двумерной для ортотропных оболочек и неглубоких некоторых прикладных теорий.—Докл. АН АрмССР, 1979, т. 69, № 3, с. 151—156.
8. Зинн Н. Е., Троин Э. А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
9. Роговцева Н. Н. Уточненная теория термоупругих оболочек.—В сб. Тр. X Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин. Гданьск, Мемингера, 1975, с. 251—259.
10. Комодовский А. С., Рожкин В. В. Асимптотический анализ электроупругого состояния тонкого пьезоэлектрического слоя.—Пробл. механики, 1978, т. 14, № 5.
11. Роговцева Н. Н. Уточненная теория пьезокерамических оболочек.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1981, т. 34, № 1, с. 55—64.
12. Саркисян С. О. К построению и целом асимптотической теории колебаний проводящей тонкой анизотропной оболочки методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости.—Материалы II Всесоюзной конф. «Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов» Ереван, Изд. ЕГУ, 1984, с. 130—135.
13. Агаджян Л. А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела.—Междунац. сборник научн. тр. Механика, изд-во ЕГУ, 1982, вып. 2, с. 7—12.
14. Агаджян Л. А. К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера.—Тр. XIII Всесоюзной конф. по теории пластин и оболочек. Галля, 1983, с. 13—18.
15. Агаджян Л. А., Геворкян Р. С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок.—ПММ, 1986, т. 50, вып. 2, с. 271—278.
16. Агаджян Л. А., Адамян С. X. О коэффициентах постелл для оснований с переменными упругими характеристиками.—Докл. АН АрмССР, 1987, т. 84, № 3, с. 115—118.
17. Агаджян Л. А., Товмисян А. Б. О смешанной краевой задаче для анизотропной термоупругой полосы.—Докл. АН Армении, 1991, т. 92, № 2, с. 76—81.
18. Новикова В. Динамические задачи термоупругости.—М.: Мир, 1970. 256 с.
19. Вильямс А. Б., Бртунов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.—М.: Наука, 1973. 272 с.
20. Агаджян Л. А. О пограничном слое пластинок.—Докл. АН АрмССР, 1972, т. 55, № 3, с. 149—155.

Институт Механики
АН Армении

Поступила в редакцию
7.07.1992

УДК 534.001

О ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ДЛЯ ДВУХСЛОЯ
С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ

БАГДАСЯНИ Ю. М., ХАЧАТРИАН А. М.

Получены асимптотические формулы для определения комплексных корней тригонометрического уравнения, реальная часть которых определяет скорость затухания решения пограничного. Исследуется поведение первого корня и зависимости от значений геометрических и физических параметров задачи.

Работа посвящена описанию и анализу напряженно-деформированного состояния типа пограничного слоя для двухслойных анизотропных балок с проскальзыванием. Исследуется поведение первого корня характеристического уравнения и зависимости от значений геометрических и физических параметров. Вещественная часть этого корня характеризует скорость затухания величин пограничного при удалении от торца.

В работе [1] асимптотическим методом построено решение внутренней задачи, а в [2] — пограничный слой для слоистых анизотропных балок, когда между слоями имеется полный контакт. В статье [3] исследовано напряженно-деформированное состояние, соответствующее внутренней задаче двухслойной анизотропной балки, когда контакт между слоями неполный. В этих же работах приведен обзор работ по методам расчета многослойных конструкций.

В работах [4, 5] получены асимптотические решения смешанных краевых задач для двухслойных анизотропных балок — полос, а в работе [6] — решения типа пограничного слоя для ортотропных пластинок. В статье [7] асимптотическим методом построены пограничный слой вблизи свободного края слоистой пластинки, составленной из чередующихся жестких и слабых слоев при полном их контакте. В работе [8] исследовано поведение первых корней характеристических уравнений потенциального и вихревого решений задач изгиба и растяжения трехслойной плиты.

В работе рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния типа пограничного слоя в плоской задаче для двухслойной балки — полосы длиной l и толщиной $2h$. Слои имеют различные толщины h_k и коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$ ($k=1,2$).

Предполагается, что на продольных сторонах балки отсутствуют напряжения, а на торцах могут быть заданы различные условия.

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при} \quad y = h_1, -h_1, \quad (1.1)$$

На линии раздела двух слоев $y=0$ impose следующие условия continuity:

$$\sigma_{xx}^{(1)} = \sigma_{xx}^{(2)}, \quad \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)}, \quad u^{(1)} = u^{(2)} = 0 \quad (1.2)$$

Для построения пограничного слоя вблизи торца $x=0$ в рамках теории упругости сделаем замену переменных

$$t = x/h, \quad \tau = y/h, \quad h = (h_1 + h_2)/2 \quad (1.3)$$

Решение искомых уравнений ищется в виде функции типа пограничного слоя [2, 6]

$$R^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{(k)n} R_n^{(k)} \exp(-\tau) \quad (1.4)$$

где $R_n^{(k)}$ — любое из напряжений и перемещений, $\varepsilon = h/a$ — малый параметр, $\varepsilon^{(k)}$ — показатель интенсивности, ε характеризует изменяемость напряженно-деформированного состояния, k — номер слоя. Противоположные значения $\varepsilon^{(k)}$ задаются следующим образом [2, 6]

$\varepsilon^{(k)} = 1$ для всех напряжений и $\varepsilon^{(k)} = -1$ для всех перемещений, где n — целое число, значение которого определяется в ходе сопряжения внутреннего и типа пограничного слоев.

Подставив (1.4) в уравнения теории упругости, преобразованные по формулам (1.3), с учетом вышеуказанных значений $\varepsilon^{(k)}$, получим систему относительно $R_n^{(k)}$, решением которой является

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \frac{1}{\varepsilon^{(k)}} \frac{d^2 \sigma_{xx}^{(k)}}{d\tau^2}, \quad \sigma_{xy}^{(k)} = \frac{1}{\varepsilon^{(k)}} \frac{d \sigma_{xy}^{(k)}}{d\tau} \quad (1.5)$$

$$u_p^{(k)} = - \left(a_{11}^{(k)} \frac{1}{\varepsilon^{(k)}} \frac{d^2 \sigma_{xx}^{(k)}}{d\tau^2} + a_{12}^{(k)} \frac{1}{\varepsilon^{(k)}} \frac{d \sigma_{xy}^{(k)}}{d\tau} + a_{13}^{(k)} \frac{1}{\varepsilon^{(k)}} \sigma_{xx}^{(k)} \right)$$

$$v_p^{(k)} = - \left[a_{11}^{(k)} \frac{1}{\varepsilon^{(k)}} \frac{d^2 \sigma_{xx}^{(k)}}{d\tau^2} + 2a_{12}^{(k)} \frac{1}{\varepsilon^{(k)}} \frac{d \sigma_{xy}^{(k)}}{d\tau} + \right. \\ \left. + (a_{13}^{(k)} + a_{14}^{(k)}) \frac{1}{\varepsilon^{(k)}} \frac{d \sigma_{xx}^{(k)}}{d\tau} + a_{15}^{(k)} \frac{1}{\varepsilon^{(k)}} \sigma_{xx}^{(k)} \right]$$

где напряжение $\sigma_{xx}^{(k)}$ удовлетворяет уравнению

$$a_{11}^{(k)} \frac{d^2 \sigma_{xx}^{(k)}}{d\tau^2} + 2a_{12}^{(k)} \frac{d \sigma_{xy}^{(k)}}{d\tau} - \varepsilon^2 (a_{13}^{(k)} + 2a_{14}^{(k)}) \frac{d \sigma_{xx}^{(k)}}{d\tau} + \\ + 2a_{15}^{(k)} \sigma_{xx}^{(k)} = 0 \quad (1.6)$$

$$1 - 2\nu^{(k)} a_{11}^{(k)} \frac{d \sigma_{xx}^{(k)}}{d\tau} - \varepsilon^2 a_{15}^{(k)} \sigma_{xx}^{(k)} = 0$$

и условиям

$$\sigma_{xy}^{(k)} = \frac{d \sigma_{xx}^{(k)}}{d\tau} = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0 \quad (1.7)$$

$$\alpha_1 = h_1/h, \quad \alpha_2 = -h_2/h$$

В зависимости от вида корней соответствующего (1.6) характеристического уравнения [9]

$$\begin{aligned} \text{а) } \alpha_1 &= i\beta_1, \quad \alpha_2 = i\beta_2 \\ \text{б) } \alpha_{1k} &= i\beta_{1k}, \quad \alpha_{2k} = i\beta_{2k} \end{aligned} \quad (1.8)$$

возможны различные решения задачи (1.6) — (1.7).

Ограничимся рассмотрением двухслойной балки из изотропных слоев, что дает качественную картину исследуемой проблемы. Аналогичное исследование можно провести и для других случаев.

2. Пусть имеем двухслойную балку из изотропных слоев, верхний слой которой характеризуется упругими постоянными E_1, ν_1 , а нижний — E_2, ν_2 . Слои имеют толщины h_1 и h_2 соответственно. Ось Ox направим по линии раздела этих слоев. Характеристическое уравнение, соответствующее (1.6) имеет только двухкратные мнимые корни [9], поэтому решением уравнения (1.6) будет

$$u_j^{(0)} = C_1^{(0)} \cos \alpha_1 z + C_2^{(0)} \cos \alpha_2 z + C_3^{(0)} \sin \alpha_1 z + C_4^{(0)} \sin \alpha_2 z \quad (2.1)$$

По формулам (1.5), определяя значения остальных напряжений, перемещений и удовлетворяя условиям контакта (1.2), получим

$$\begin{aligned} C_1^{(0)} &= C_3^{(0)}, \quad C_2^{(0)} = -C_4^{(0)}, \quad C_2^{(0)} = -E_0 C_3^{(0)}, \\ C_3^{(0)} &= E_0 C_1^{(0)}, \quad E_0 = E_2/E_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Остаются неопределенными четыре неизвестные константы $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, C_3^{(0)}$ и $C_4^{(0)}$, которые будут определяться из условий (1.7).

Удовлетворяя этим условиям, получим систему однородных алгебраических уравнений относительно указанных неизвестных.

Из условия существования нетривиального решения (приравняв к нулю определитель этой системы) получим трансцендентное уравнение для определения z

$$(\sin 2\alpha_1 z_1 - 2\alpha_1 z_1)(\sin^2 \alpha_1 z_1 - z_1^2) - E_0(\sin 2\alpha_2 z_1 + 2\alpha_2 z_1)(\sin^2 \alpha_2 z_1 - z_1^2) = 0 \quad (2.3)$$

Вводя новые обозначения

$$z = i\alpha_1 z_1, \quad m z = -i\alpha_2 z_1, \quad m = -\alpha_2/\alpha_1 = h_1/h_2$$

уравнение (2.3) перепишем в виде

$$(\sin 2mz + 2mz)(\sin^2 z - z^2) + E_0(\sin 2z - 2z)(\sin^2 mz - m^2 z^2) = 0 \quad (2.4)$$

Заметим, что если z есть корень уравнения (2.4), то $-z$ — также корень этого уравнения. Трансцендентное уравнение (2.3) имеет бесконечное число комплексных корней z_{jk} . В пункте 4 приводятся асимптотические формулы для приближенного определения этих корней.

Так как определитель системы равен нулю, между уравнениями этой системы существует линейная зависимость, что позволяет все неизвестные величины выразить через одну. Обозначая эту неизвестную

через $A_n^{(0)}$, решение уравнения (1.6), а также остальные некоторые функции можно представить в виде

$$F_{kn} = \dots = A_n^{(0)} \cdot F_{kn}^{(0)} = F_{kn}^{(0)}(z) A_n^{(0)}, \quad (2.5)$$

где

$$F_{1n} = D_{11}^{-1} [D_{11} \cos \varphi_{n1} + D_{12} (\sin \varphi_{n1} - i n_1 \cos \varphi_{n1}) + D_{13} \sin \varphi_{n1}] \quad (2.6)$$

$$F_{2n} = D_{11}^{-1} [D_{11} \cos \varphi_{n1} + E_0 D_{13} (\sin \varphi_{n1} - i n_1 \cos \varphi_{n1}) + D_{14} \sin \varphi_{n1}]$$

D_{ij} — алгебраические дополнения первой строки матрицы $D = \|d_{ij}\|$ четвертого порядка с элементами

$$d_{11} = \cos^2 \varphi_{n1}, \quad d_{12} = \sin \varphi_{n1} - i n_1 \cos \varphi_{n1}, \quad d_{13} = i_2 \sin \varphi_{n1}$$

$$d_{14} = i_2 n_1 \sin \varphi_{n1}, \quad d_{22} = i_1 \sin \varphi_{n1}, \quad d_{23} = \sin \varphi_{n1} - i n_1 \cos \varphi_{n1} \quad (2.7)$$

$$d_{33} = \cos^2 \varphi_{n2}, \quad d_{34} = E_0 (\sin \varphi_{n1} - i n_1 \cos \varphi_{n1}) \cos \varphi_{n2}, \quad d_{44} = i_2 \sin \varphi_{n2}$$

$$d_{41} = -i_1 \sin \varphi_{n1}, \quad d_{42} = i_1 n_1 \sin \varphi_{n1}$$

$$d_{44} = \sin^2 \varphi_{n2} + i_2 n_2 \cos^2 \varphi_{n2}, \quad d_{14} = d_{41} = d_{24} = d_{42} = 0$$

и определяются по формулам

$$D_{11} = -E_0 (\sin^2 \varphi_{n1} + i_1 \cos^2 \varphi_{n1}) (\sin^2 \varphi_{n2} - i_2 n_2^2) \quad (2.8)$$

$$D_{12} = 1/2 (\sin^2 \varphi_{n1} + i_1 \cos^2 \varphi_{n1}) (\sin 2\varphi_{n2} + 2i_2 n_2)$$

$$D_{13} = -i_2 n_1 \sin^2 \varphi_{n1} [E_0 (\sin^2 \varphi_{n2} - i_2 n_2^2) + 1/2 n_2 (\sin 2\varphi_{n2} + 2i_2 n_2)]$$

$$D_{14} = -E_0 \sin^2 \varphi_{n1} (\sin^2 \varphi_{n2} + i_2 n_2 \cos^2 \varphi_{n2})$$

Остальные напряжения и перемещения, согласно (1.5), легко выразить через функции F_{kn} и их производные. Считаем, что в (2.5) и в дальнейшем, где какая-либо функция умножается на производную по z параллельно $A_n^{(0)}$, производится суммирование по всем значениям индекса n , соответствующего всем корням ε_n .

При $h_1 = h_2 (m=1)$ и уравнение (2.1) распадается на три независимых уравнения. В этом случае функции $F_{kn}(z)$ также распадутся на три функции, соответствующие каждому из уравнений.

Из условия (1.7) и (1.2), как следствие, вытекают

$$F_{2n}(z) = F_{3n}(z) = 0, \quad k=1,2 \quad (2.9)$$

$$F_{1n}(0) = F_{2n}(0), \quad F_{1n}(0) = F_{3n}(0) = 0$$

Используя соотношения (2.9), нетрудно показать, что напряжения σ_{xx} и σ_{yy} самоуравновешены, то есть удовлетворяют следующим условиям:

$$\int \sigma_{xx} dz = 0, \quad \int \sigma_{yy} dz = 0, \quad \int \sigma_{xy} dz = 0 \quad (2.10)$$

Более того, для каждого слоя имеет место равенство

$$\int_{\Sigma} \gamma d\gamma = 0 \quad (2.10)$$

В справедливости равенств (2.10), (2.11) можно убедиться, если непосредственно вычислить эти интегралы и учесть (2.9). Соотношения (2.10), (2.11) справедливы также при произвольном количестве слоев.

Аналогичным образом строится погранслой вблизи торца $x=a$.

Если отсчитывать от торца $x=0$, данные $\varphi_j^{(0)}$ этого погранслоя получаются из приведенного заменой t на $t_1 = (a-x)/h$.

3. К уравнению (2.3) можно применить теорию определения асимптотических корней уравнений типа квазиполиномов [2, 10]. Расположение этих корней практически определяются только несколькими членами характеристического уравнения. Асимптотические корни определяются по формулам

$$2\gamma_n^{(0)} = 1/2(1+m) \operatorname{ctg} \varphi_j \{ (2n-1/2)\pi + \arg Z_j \} + i n (2+n Z_j^{-1} \operatorname{ctg} \varphi_j) \quad (j=1,2,3) \quad (3.1)$$

Уравнение (2.3) в первом квадранте имеет три ветви асимптотических корней, соответствующие трем значениям Z_j и $\operatorname{ctg} \varphi_j$. При этом асимптотика зависит от m . При исследовании первого корня $2\gamma_1^{(0)}$ с $\operatorname{Re} \gamma_1^{(0)} > 0$ надо следить за первым корнем каждой ветви, поскольку при разных параметрах наименьший корень принадлежит различным ветвям. Приведем окончательные значения γ_j и $\operatorname{ctg} \varphi_j$.

$$a) m > 1$$

$$\operatorname{ctg} \varphi_1 = 2, \quad Z_{1,2} = \pm \sqrt{1-E_0} \quad (3.2)$$

$$\operatorname{ctg} \varphi_2 = 1/m, \quad Z_3 = i(2m(1+mE_0))$$

Где $\arg Z_1 = 0$, $\arg Z_2 = \pi$, $\arg Z_3 = \pi/2$ и будем иметь

$$2\gamma_1^{(0)} = (1+m)/2 \{ (4n-1)\pi + 2 \ln \{ (1+n)^{-1} \sqrt{1+E_0} \} \} \quad (3.3)$$

$$2\gamma_2^{(0)} = (1+m)/2 \{ (4n+1)\pi + 2 \ln \{ (1+n)^{-1} \sqrt{1-E_0} \} \}$$

$$2\gamma_3^{(0)} = (1+m)/2m \{ (2n-1/2)\pi + \ln(4-n(1+mE_0)) \}$$

Обозначим через $\operatorname{Re}(2\gamma_1)$ наименьшее значение $\operatorname{Re}(2\gamma_n^{(0)})$.

Из (3.3) получаем

$$\operatorname{Re}(2\gamma_1) = \operatorname{Re}(2\gamma_2) \approx 3\pi/4(1+m) \quad (3.4)$$

Заметим также, что при $m \rightarrow \infty$ $\operatorname{Re}(2\gamma_1) = 3\pi/4$.

а при $m=1$ $\operatorname{Re}(2\gamma_1) = 3\pi/2$.

$$b) m < 1$$

$$\operatorname{ctg} \varphi_1 = 2/m, \quad Z_{1,2} = \pm \sqrt{1+1/E_0} \quad (3.5)$$

$$\operatorname{ctg} \varphi_2 = 1, \quad Z_3 = iE_0 m (2(1+mE_0))$$

$$\begin{aligned} \arg Z_1 &= 0, \quad \arg Z_2 = \pi, \quad \arg Z_3 = \pi/2 \\ 2\sigma_n^{(1)} &= (1+m)/2m] + (4n-1)\pi + 2\ln(4\pi n) \sqrt{1+1/E_0} i] \\ 2\sigma_n^{(2)} &= (1-m)/2m] + (4n-1)\pi + 2\ln(4\pi n \sqrt{1+1/E_0}) i] \\ 2\sigma_n^{(3)} &= (1+m)/2] + (2n-1/2)\pi - i\ln(4\pi n(1+1/mE_0)) i] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь $\operatorname{Re}(2\sigma_1) = \operatorname{Re}(2\sigma_2^{(1)}) \approx 3\pi/4(1-m)$
 При $m \rightarrow 1$, $\operatorname{Re}(2\sigma_1) = 3\pi/2$, $m \rightarrow 0$, $\operatorname{Re}(2\sigma_1) = 3\pi/4$
 и $m \rightarrow 1$ (3.7)

Уравнение (2.4) превращается в уравнение

$$(\sin 2z + 2z)(\sin z + z)(\sin z - z) = 0 \quad (3.8)$$

корни которого не зависят от l . Здесь также имеем три ветви асимптотических корней. Трансцендентные уравнения (3.8) хорошо исследованы. В работе [2] приведены асимптотические формулы для определения этих корней. Пользуясь этими формулами, будем иметь

$$\begin{aligned} 2\sigma_n^{(1)} &= + (2n-1/2)\pi + i\ln(4\pi n) \\ 2\sigma_n^{(2)} &= + 2(2n-1/2)\pi + i2\ln(4\pi n) \\ 2\sigma_n^{(3)} &= + 2(2n-1/2)\pi + i2\ln(4\pi n) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь $\operatorname{Re}(2\sigma_1) = \operatorname{Re}(2\sigma_2^{(1)}) \approx 3\pi/2$

4. Рассмотрим вопрос сопряжения внутреннего и типа пограничных решений. Условия самоуравновешенности (2.10), (2.11) позволяют определить неизвестные постоянные в решении внутренней задачи [3] и пограничной при заданных на торцах условиях первой краевой задачи теории упругости.

Пусть на торце $x=0$ заданы значения напряжений

$$\sigma_{xx} = \varphi_1(z), \quad \sigma_{xy} = \varphi_2(z) \quad (4.1)$$

Учитывая, что при $z=0$ проецирует себя пограничный, соответствующий этому торцу, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(0)} + \sigma_{xx}^{(1)} + \sigma_{xx}^{(2)} + \dots = \varphi_1(z) \\ \sigma_{xy}^{(0)} + \sigma_{xy}^{(1)} + \sigma_{xy}^{(2)} + \dots = \varphi_2(z) \end{aligned} \quad (4.2)$$

где вторые слагаемые задаются решением внутренней задачи [3]

Условия (4.2) будут непротиворечивыми, если $\nu = -2$. Тогда условия (4.2) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(0)} + \sigma_{xx}^{(1)} + \sigma_{xx}^{(2)} + \dots = \varphi_1(x=0) \\ \sigma_{xy}^{(0)} + \sigma_{xy}^{(1)} + \sigma_{xy}^{(2)} + \dots = \varphi_2(x=0) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Правые части (4.3) должны удовлетворять условиям (2.10) и



(2.11), откуда находим следующие значения произвольных постоянных внутренней задачи [3]

$$\begin{aligned} E_1^{(0)} C_1^{(0)} &= \frac{1}{2k_0} \left[|z_1^{(0)}| - z_1^{(0)}(\xi=0) \right] d; \\ DC_1^{(0)} &= 1 \int_0^{\xi_1} z_1^{(0)}(\xi=0) d\xi - 4 \int_0^{\xi_1} z_1^{(0)}(\xi=0) d\xi - 4 \int_0^{\xi_1} \varphi_1^{(0)}(\xi) d\xi; \\ DC_2^{(0)} &= -2 \int_0^{\xi_1} (\varphi_1^{(0)}(\xi) - z_1^{(0)}(\xi=0)) d\xi; \\ DC_3^{(0)} &= 2 \int_0^{\xi_1} (\varphi_1^{(0)}(\xi) - z_1^{(0)}(\xi=0)) d\xi - \\ &- 4 \int_0^{\xi_1} \varphi_1^{(0)}(\xi) d\xi + 4 \int_0^{\xi_1} z_1^{(0)}(\xi=0) d\xi - 4 \int_0^{\xi_1} z_1^{(0)}(\xi=0) d\xi. \end{aligned}$$

$D = 1/3(E_1^{(0)} C_1^{(0)} - 1/2 DC_2^{(0)})$ — жесткость при изгибе, $\xi = x/a$ — безразмерная координата.

Перемещения будут определены с точностью жесткости смещения. На условии отсутствия жесткого смещения определяются постоянные $C_1^{(0)}$, $C_2^{(0)}$ и $C_3^{(0)}$. Остаются неопределенными постоянные решения пограничной $A_1^{(0)}$. Они определяются из условия (4.3), правые части которых после определения постоянных $C_i^{(0)}$ внутренней задачи — известные функции. Для определения $A_1^{(0)}$ можно применять различные приближенные методы, и частности, метод коллокации или метод Третьяка.

В заключении автор благодарит Маловина Л. А. за постоянное внимание и интерес к работе.

THE BOUNDARY LAYER OF A TWO LAYER BEAM WITH SLIP

VI. M. BACDASARIAN, A. M. KHACHATRIAN

ԵՐԿՇԵՐՏ ՀԵՏԱՆԻ ՈՒԼՇՄԱՆԱՅԻՆ ՀԵՐՏԻ ՄՈՒՈՒՂ,
ՀԵՐՏԻՆԻ ՄԻՋԵՂ ՈՒԼՇՄԻ ԱՌԿԱՑՈՒԹՅԱՆ

Յ. Մ. ԲԱԿԴԱՍԱՐՅԱՆ, Ա. Մ. ԿԽԱՏՐՅԱՆ

Ամփոփում

Քննարկված է սահմանային շերտի տիպի լուծումների մարման բր-նույթը՝ կախված ինդրի երկրաչափական և ֆիզիկական պարամետրերից: Բնութագրիչ հավասարման կոմպլեքս արմատների որոշման համար գտնված են սահմանային լուծումներ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Азимова Л. А., Хачатрян А. М. Асимптотически малые напряженно-деформированного состояния анизотропной слоистой балки — Изв. АН АрмССР, Механика, 1985, т. 39, №2, с. 3—14.
2. Хачатрян А. М. О пограничном слое слоистой балки — Изв. АН АрмССР, Механика, 1987, т. 40, №2, с. 19—25.
3. Багдадянц Ю. М., Хачатрян А. М. К определению напряженно-деформированного состояния анизотропной двухслойной балки с прокатным профилем — В сб. «Актуальные проблемы неоднородной механики» Материалы Всесоюзного семинара Ереван, 1991, 390 с.
4. Азимова Л. А. К определению напряженно-деформированного состояния двуслойной полосы и о справедливости гипотезы Вильера. Тр. XIII Всесоюзного симпозиума по теории пластин и оболочек, Таллин, 1984, с. 13—18.
5. Азимова Л. А., Товатиан Л. Б. Об асимптотическом решении смешанной краевой задачи для двухслойной термоупругой полосы — В сб. «Актуальные проблемы неоднородной механики» Материалы Всесоюзного семинара Ереван, 1991, 390 с.
6. Азимова Л. А. О пограничном ортоангарном слое — Изв. АН АрмССР, Механика, 1973, т. 26, №2, с. 27—33.
7. Голдштейн М. И. Напряженное состояние пограничного слоя для слоистых пластин — Тр. VII Всесоюзного симпозиума по теории оболочек и пластин, М. Наука, 1970, с. 639—643.
8. Кидомцев Н. Г. Крестовый эффект в трехслойной пластине. Изв. Северо-Кавказского центра высшей школы, Сер. естеств. наук, 1973, №4, с. 35—37.
9. Лавинский С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М. Наука, 1977, 116 с.
10. Личини Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М. ИЛ, 1961, 248 с.

Получено в печать
М. Армения

Поступила в редакцию
19.03.1993

ИЗГИБ ДВУХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ БАЛОК, ЛЕЖАЩИХ НА ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

ГРИГОРЯН Э. А.

В работе рассматривается задача об изгибе двух полубесконечных балок, лежащих на упругой полуплоскости, когда на концах балок приложены силы и моменты. Как обычно, исследование ведется без учета контактных напряжений и без учета явления отрыва балок от упругой полуплоскости. Задача сводится к решению функциональных уравнений Винера-Хопфа, не допускающих замкнутого решения, а затем к квазивполне регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, относительно вычетов преобразованных Фурье четной и нечетной частей интенсивности контактных нормальных напряжений.

Пусть на границе упругой полуплоскости лежат две полубесконечные балки с жесткостью D , к концам которых приложены силы $Q^{(-a)}$, $Q^{(a)}$ и моменты $M^{(-a)}$, $M^{(a)}$. Наша цель определить контактные нормальные напряжения, действующие на участках контакта балок с границей полуплоскости.

Отметим, что решение поставленной задачи можно было бы получить методом, предложенным в [1] при решении задачи рассматриваемого рода, при котором контактные напряжения можно выразить через деформации промежуточного интервала между балками, а деформацию определить из сингулярного интегрального уравнения первого рода, которое можно сводить с помощью ортогональных многочленов Чебышева к квазивполне регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Однако, мы будем пользоваться методом, предложенным в [2, 3], который дает возможность свести задачу к квазивполне регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно вычетов преобразованных Фурье четной и нечетной частей интенсивности контактных напряжений и, тем самым, определить контактные напряжения непосредственно. При этом ядра бесконечных систем и интенсивность контактных напряжений имеют простую структуру.

Дифференциальные уравнения балок имеют вид:

$$D \frac{d^4 v^{(0)}}{dx^4} = q(x), \quad -\infty < x < -a,$$

при условии

$$D \frac{dv^{(0)}}{dx} \Big|_{x=-a-0} = X^{(-a)}, \quad D \frac{d^2 v^{(0)}}{dx^2} \Big|_{x=-a-0} = M^{(-a)}, \quad D \frac{d^2 v^{(1)}}{dx^2} \Big|_{x=-a-0} = Q^{(-a)},$$

$$\frac{dv^{(1)}}{dx} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty,$$

и

$$D \frac{d^2 v^{(2)}}{dx^2} = q(x), \quad -a < x < \infty,$$

при условии

$$D \frac{dv^{(1)}}{dx} \Big|_{x=-a+0} = X^{(a)}, \quad D \frac{d^2 v^{(1)}}{dx^2} \Big|_{x=-a+0} = M^{(a)}, \quad D \frac{dv^{(2)}}{dx} \Big|_{x=-a+0} = -Q^{(a)},$$

$$\frac{dv^{(1)}}{dx} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty,$$

где $v^{(1)}(x)$ — вертикальные перемещения точек балок, $X^{(a)}$ — неизвестные постоянные, $q(x)$ — интенсивность контактных напряжений.

Введем функцию

$$V(x) = H(-x-a) \frac{dv^{(1)}}{dx} + H(x-a) \frac{dv^{(1)}}{dx}, \quad (-\infty < x < \infty)$$

Тогда уравнения равновесия балок с концевыми условиями можно записать одним уравнением

$$D \frac{d^2 V}{dx^2} = q_0(x) - X^{(-a)} \delta'(x+a) + X^{(a)} \delta'(x-a) -$$

$$- M^{(-a)} \delta'(x+a) - M^{(a)} \delta'(x-a) - Q^{(-a)} \delta(x+a) - Q^{(a)} \delta(x-a) \quad (1)$$

где $q_0(x) = H(-x-a)q(x) + H(x-a)q(x)$, $\delta(x)$ — функция Дирака.

Не останавливаясь на подробностях, отметим, что решение уравнения (1) имеет вид

$$V(x) = \frac{1}{4D} \int_{-\infty}^{\infty} (x-s)|x-s|q_0(s)ds -$$

$$- \frac{1}{4D} [Q^{(-a)}(x+a)|x+a| + Q^{(a)}(x-a)|x-a| + 2M^{(-a)}|x+a| +$$

$$+ 2M^{(a)}|x-a| + 2X^{(-a)}\operatorname{sgn}(x+a) - 2X^{(a)}\operatorname{sgn}(x-a)] \quad (2)$$

С другой стороны известно, что [4]

$$V(x) + [\psi(x-a) - \psi(x+a)] \frac{\partial \psi(x,0)}{\partial x} = - \frac{(1-\nu)}{\mu\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(s)}{s-x} ds \quad (3)$$

где $\psi(x,0)$ — вертикальные перемещения граничных точек полуплоскости, ν , μ — соответственно коэффициент Пуассона и модуль сдвига материала полуплоскости.

Выше (3) имелось в виду условие контакта

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} = V(x) \quad (|x| > a)$$

Отметим, что условия равновесия балки ($|x| > a$) имеют вид

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} q_0(s) ds &= Q^{(+)} + Q^{(-)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} s q_0(s) ds &= M^{(+)} - M^{(-)} + a(Q^{(+)} - Q^{(-)}) \end{aligned} \quad (4)$$

Далее $q_0(x)$ и $\partial v(x, 0)/\partial x$ представим в виде суммы своих четных и нечетных частей, то есть

$$q_0(x) = q_0^{(1)}(x) + q_0^{(2)}(x), \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} = W_1(x) + W_2(x)$$

где

$$\begin{aligned} q_0^{(i)}(x) &= [H(x-a) + H(-x-a)] q_i(x) \quad (i=1, 2) \\ q_1(-x) &= -q_1(x), \quad q_2(-x) = q_2(x) \\ W_1(-x) &= -W_1(x), \quad W_2(-x) = W_2(x) \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3), и отделяя четные и нечетные части, после учета условия $V(x) = 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, при $0 < x < \infty$ получим

$$\frac{1-\nu}{\mu\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{s-x} - \frac{1}{s+x} \right) q_1^+(s) ds = -V_2^+(x) - W_2^-(x) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu}{\mu\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{s-x} - \frac{1}{s+x} \right) q_2^+(s) ds &= -V_1^+(x) - W_1^-(x) \\ (0 < x < \infty) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} q_k^-(x) &= H(x-a) q_k(x), \quad W_k^-(x) = H(a-x) W_k(x) \\ V_k^-(x) &= H(x-a) V_k(x), \quad (k=1, 2) \\ V_k(x) &= -\frac{1}{2D} \int_a^{\infty} (s-x)^2 H(s-x) q_k(s) ds, \quad (a < x < \infty) \end{aligned}$$

Заметим, как это следует из (4), что

$$\int_a^{\infty} q_1(s) ds = \frac{Q^{(+)} - Q^{(-)}}{2}$$

$$\int_a^{\infty} s q_1(s) ds = a \frac{Q^{(a)} - Q^{(-a)}}{2} + \frac{M^{(a)} - M^{(-a)}}{2} \quad (7)$$

$$\int_a^{\infty} q_2(s) ds = \frac{Q^{(a)} + Q^{(-a)}}{2}, \quad \int_a^{\infty} s q_2(s) ds = a \frac{Q^{(a)} + Q^{(-a)}}{2} + \frac{M^{(a)} + M^{(-a)}}{2} \quad (8)$$

Теперь в (6) сделаем замену переменных $x = ae^v$, $s = ae^u$, получим

$$\frac{1-v}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1-e^{v-u}} + \frac{1}{1+e^{v-u}} \right) P_1^+(u) du = \\ = -H(v) V_1(ae^v) - W_1^-(ae^v), \quad (9)$$

$$\frac{1-v}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1-e^{v-u}} - \frac{1}{1+e^{v-u}} \right) P_2^+(u) du = \\ = -H(v) V_2(ae^v) - W_2^-(ae^v)$$

где

$$P_k^+(u) = q_k^+(ae^u) = H(u) q_k(ae^u) \\ W_k^-(ae^v) = H(-v) W_k^+(ae^v) \quad (k=1,2)$$

Далее, применив к (9) преобразования Фурье, при этом имея в виду теорему о свертке, после некоторых преобразований получим

$$\operatorname{cth} \frac{\pi z}{2} \bar{P}_1^+(z) + i \frac{\bar{P}_1^+(-3i)}{z(z-i)(z-2i)} = \bar{g}_1^+(z) \quad (10)$$

$$\operatorname{th} \frac{\pi z}{2} \bar{P}_2^+(z) + i \frac{\bar{P}_2^+(-3i)}{z(z-i)(z-2i)} = \bar{g}_1^+(z) \quad (11)$$

где

$$\bar{g}_k^+(z) = -\frac{i\pi}{1-v} \bar{W}_k^+(z) - i \frac{P_k^+(-3i)}{z} + \frac{P_k^+(-2i)}{z-i} - \\ - \frac{P_k^+(-i)}{z-2i}, \quad v = \frac{\pi \alpha^2}{D(1-\alpha)}, \quad (k=1,2)$$

Функции $P_k^+(u)$, $W_k^+(u)$ являются преобразованиями Фурье функций $P_k(u)$, $W_k(u)$ соответственно. Причем $P_k^+(z)$ регулярна при $\operatorname{Im} z > -1$, $\bar{W}_k^+(z)$ — при $\operatorname{Im} z < 0$. Кроме того, как известно [5], $P_k(u) \sim u^{-\frac{1}{2}}$ при $u \rightarrow +0$, $W_k(u) \sim |u|^{-\frac{1}{2}}$ при $u \rightarrow 0$. Отсюда следует, что $P_k^+(u) \sim z^{-\frac{1}{2}}$, $\bar{g}_k^+(z) \sim z^{-\frac{1}{2}}$ при $|z| \rightarrow \infty$ в своих областях регулярности.

Заметим, что условия (7), (8) можно записать в виде

$$\bar{P}_1^+(-i) = \frac{Q^{(a)} - Q^{(-a)}}{2}, \quad \bar{P}_1^+(-2i) = a \frac{Q^{(a)} - Q^{(-a)}}{2} + \frac{M^{(a)} - M^{(-a)}}{2} \quad (12)$$

$$\bar{P}_2^+(-i) = \frac{Q^{(a)} + Q^{(-a)}}{2}, \quad \bar{P}_2^+(-2i) = a \frac{Q^{(a)} + Q^{(-a)}}{2} - \frac{M^{(a)} + M^{(-a)}}{2} \quad (13)$$

Таким образом, задача свелась к решению функционального уравнения (10) при условии (12), и уравнения (11) — при условии (13).

Для определенности рассмотрим функциональное уравнение (10) при условии (12). Исследуем аналитические свойства функции $\bar{P}_1^+(z)$. Для этого вспомним, что $P^+(z)$ регулярна при $\text{Im} z > -1$, а $\bar{g}_2^-(a)$ при $\text{Im} z < 0$, и заметим, что левая и правая части равенства (10) являются аналитическими продолжениями друг друга. Теперь рассмотрим аналитическое продолжение функции $\bar{P}_1^+(z)$ в дополнении области $\text{Im} z > -1$ и с помощью уравнения (10) выявим ее свойства. Поскольку $\bar{P}_1^+(-i)$ и $\bar{g}_2^+(-i)$ конечны, то, как следует из (10), конечна и $\bar{P}_1^+(-4i)$. Из конечности $\bar{P}_1^+(-2i)$ и $\bar{g}_2^+(-2i)$ следует, что $z = -5i$ является простым полюсом для $\bar{P}_1^+(z)$ (здесь под $\bar{P}_1^+(z)$ понимается ее аналитическое продолжение). Так как $\bar{P}_1^+(-3i)$ и $\bar{g}_2^+(-3i)$ конечны, то конечна и $\bar{P}_1^+(-6i)$ (10). Так как $\bar{P}_1^+(-4i)$ и $\bar{g}_2^+(-4i)$ конечны, то отсюда следует (10), что $z = -7i$ может быть простым полюсом для аналитического продолжения функции $\bar{P}_1^+(z)$. Так продолжая, мы убедимся, что полюсами аналитического продолжения функций $\bar{P}_1^+(z)$ могут быть только точки $z = -i(2n+3)$ ($n=1, 2, \dots$) и притом простые.

Теперь приступим к решению функционального уравнения (10) при условии (12) с помощью метода Винера-Хопфа [6], предполагая $\bar{P}_1^+(z-3i)$ известным. Для этого факторизуем $\sinh \frac{z-3i}{2}$, представив ее в виде

$$\sinh \frac{z-3i}{2} = \bar{K}^+(z) \bar{K}^-(z) \quad (14)$$

где

$$\bar{K}^+(z) = \sqrt{2} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{ia}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{ia}{2}\right)}, \quad \bar{K}^-(z) = \frac{\sqrt{2}}{z} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{ia}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{ia}{2}\right)}$$

$\Gamma(z)$ — известная гамма-функция.

Очевидно, что $\bar{K}^+(z)$ регулярна при $\text{Im} z > -1$ и там не имеет нулей, а $\bar{K}^-(z)$ регулярна при $\text{Im} z < 0$ и там не имеет нулей. Кроме

того, $K^+(z) \sim z^2$ при $|z| \rightarrow \infty$ в своей области регулярности, а $\bar{K}^-(z) \sim z^{-\frac{1}{2}}$ при $\operatorname{Im} z < 0$ и $|z| \rightarrow \infty$.

Имея в виду (14), уравнение (10) запишем в виде

$$\bar{K}^-(z) \bar{P}_1^+(z) = \frac{P_1^-(z-3i)}{z(z-i)(z-2i)\bar{K}^-(z)} = \frac{\bar{g}_1^-(z)}{\bar{K}^-(z)} \\ (-1 < \operatorname{Im} z < 0)$$

Далее

$$\frac{\bar{P}_1^+(z-3i)}{z(z-i)(z-2i)\bar{K}^-(z)} = \bar{\Phi}_1(z) = \bar{\Phi}_1^+(z) + \bar{\Phi}_1^-(z)$$

где

$$\bar{\Phi}_1^+(z) = \int_0^{\infty} \Phi_1(u) e^{izu} du, \quad \bar{\Phi}_1^-(z) = \int_{-\infty}^0 \Phi_1(u) e^{izu} du$$

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \bar{\Phi}_1^-(z) e^{-izu} dz, \quad -1 < \varepsilon < 0,$$

$\bar{\Phi}_1^+(z)$ — регулярна при $\operatorname{Im} z > -1$, а $\bar{\Phi}_1^-(z)$ — при $\operatorname{Im} z < 0$. Кроме того, поскольку $\Phi_1(u)$ и $d\Phi_1(u)/du$ ограничены при $u \rightarrow 0$, то отсюда следует, что $\bar{\Phi}_1^+(z) = \frac{i}{z} \bar{\Phi}_1(0) + O(z^{-2})$ при $|z| \rightarrow \infty$ в своих областях регулярности. Нетрудно видеть, что аналитическое продолжение функции $\bar{\Phi}_1^-(z)$ при $\operatorname{Im} z < -1$ имеет полюса только в точках $z = -2in$ ($n = 1, 2, \dots$) и притом простые. Отсюда следует, что $\bar{\Phi}_1^+(z)$ можно представить в виде разложения по простейшим дробям

$$\bar{\Phi}_1^+(z) = \frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_1^{(2n+3)}}{n(n+1)(2n+1)(z+2in)\bar{K}^-(2in)} \quad (15)$$

где

$$A_1^{(2n+3)} = \operatorname{Res}_{z=-i(2n+3)} \bar{P}_1^+(z) = \operatorname{Res}_{z=-2in} \bar{P}_1^+(z-3i), \quad n=1, 2, \dots$$

Следовательно, можно записать

$$\bar{K}^-(z) \bar{P}_1^+(z) + i \bar{\Phi}_1^+(z) = \bar{g}_1^-(z) [\bar{K}^-(z)]^{-1-i} \bar{\Phi}_1^-(z) \quad (16)$$

Имея в виду асимптотические свойства функций $\bar{K}^-(z)$, $\bar{P}_1^+(z)$, $\bar{g}_1^-(z)$, $\bar{\Phi}_1^-(z)$, о чем говорилось выше, в силу теоремы об аналити-

ческом продолжении и теоремы Лиувилля, будем иметь (16)

$$\overline{P}_1^+(z) + i \frac{\overline{\phi}_1(z)}{\overline{K}_1^+(z)} = \frac{a_0}{\overline{K}^-(z)} \quad (17)$$

$$\frac{\overline{K}_2^-(z)}{\overline{K}^-(z)} - i \overline{\phi}_1^-(z) = a_0$$

Постоянная a_0 определяется от первого из условий (12).

Далее будем останавливаться на исследовании $\overline{P}_1^+(z)$.

Так как $z = -i(2n+3) (n=1,2,\dots)$ являются простыми полюсами функции $\overline{P}_1^+(z)$, то из (15) и (17) получим

$$A_{-1}^{(2n+3)} + \frac{1}{4\pi} \overline{K}^-(-i(2m+3)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{-1}^{(2n+3)}}{n(n+1)(2n+1) \left(m + \frac{3}{2} - n\right) \overline{K}^-(-2in)} =$$

$$= \frac{2}{\pi} a_0 \overline{K}^-(-i(2m+3)), \quad m=1,2,\dots$$

Поскольку

$$A_{-1}^{(3)} = -\frac{12i}{\pi} \overline{P}_1^+(-2i)$$

которое легко получить из (10), то бесконечную систему (18) можно записать в виде

$$\beta_m^{(3)} + \frac{1}{8} \beta_m^{(3)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\gamma_n^{(3)}}{n(n+1)(2n+1) \left(m + \frac{3}{2} - n\right)} =$$

$$= a_0 \beta_m^{(3)} - i \frac{g_m^{(1)} Y_1^{(1)}}{2i(2m+1)}, \quad m=2,3,\dots$$

где

$$\beta_m^{(1)} = \frac{1}{\pi} \frac{2m+1}{m(m+1)} \frac{\Gamma^2\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(m)} (3_m^{(1)} \sim O(1); \quad m \rightarrow \infty)$$

$$Y_1^{(1)} = \frac{A_{-1}^{(2n+3)}}{\overline{K}^-(-2in)}, \quad Y_1^{(1)} = -\frac{48\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\lambda\pi} \overline{P}_1^+(-2i)$$

Итак, решение функционального уравнения (10) с условиями (12) свелось к решению квазиполноregularной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (19). Квазиполная regularность системы (19) следует из равенства

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1) \left| n-m-\frac{3}{2} \right|} = 2f_m \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} f_m = & \frac{1}{2m+3} \left[2\psi(m+2) + \psi\left(m+\frac{3}{2}\right) - \psi(1) - 2\psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \\ & + \frac{1}{2m+5} \left[2\psi(m+3) + \psi\left(m+\frac{3}{2}\right) - 2\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi(2) \right] - \\ & - \frac{1}{m+2} \left[2\psi\left(m+\frac{5}{2}\right) + \psi\left(m+\frac{1}{2}\right) - \frac{4m}{2m+1} - 3\psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] - \\ & - \frac{1}{6(2m+1)}, \end{aligned}$$

$\psi(z)$ — функция пси, для которой имеет место асимптотическая формула [7]

$$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^3} + \dots (|z| \rightarrow \infty, |\arg z| < \pi) \quad (21)$$

С помощью (21) легко убедиться, что $f_m \sim \frac{1}{m}$ при $m \rightarrow \infty$, чем и утверждается квазиполная регулярность системы (19) при любом конечном λ .

Равенство (20) можно получить, если использовать следующее [8]:

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^{\infty} \frac{1}{(k+a)(k+b)} &= \frac{1}{b-a} [\psi(n+a+1) - \psi(a) - \psi(n+b+1) + \psi(b)] \\ \sum_{k=a}^{\infty} \frac{1}{(k+a)(k-b)} &= \frac{1}{b-a} [\psi(b) - \psi(a)] \end{aligned}$$

После определения $Y_n^{(1)}$ из (19), $q_1(ax)$ будет даваться в следующих видах:

$$\begin{aligned} q_1(ax) = & -\frac{48P_1(-2i)}{\pi i} x^{-3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(n) Y_n^{(1)}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} x^{-(2n+3)} \\ a_1(ax) = & a_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} \right) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n) (Y_n^{(1)} - a_0 \beta_n^{(1)})}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} x^{-(2n+3)} \\ & (x > 0, \quad 1 < x < \infty) \end{aligned}$$

Теперь приступим к исследованию (11), (13). Опять аналогичны-

ми рассуждениями, как это было сделано выше, можно утверждать, что полюсами функции $\bar{p}_2^+(x)$ могут быть только точки $x = -2i(n+1)$, $n=1,2$ и притом простые. Это дает возможность в дальнейшем после применения к функциональному уравнению (11) метода Винера-Хопфа, ее решение свести к решению квазилинейно регулярной бесконечной системы алгебраических уравнений

$$Y_m^{(2)} + \frac{i}{4} \beta_m^{(2)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Y_n^{(2)}}{n(2n-1)(2n+1) \left(m + \frac{3}{2} - n \right)} =$$

$$= -\frac{i}{6} \beta_m^{(2)} \left[\frac{Y_1^{(2)}}{2m+1} + \frac{Y_2^{(2)}}{10(2m-1)} \right], \quad m=3,4,\dots \quad (22)$$

где

$$A_{-1}^{(2m+2)} K(-i(2m-1)) = Y_m^{(2)}, \quad A_{-1}^{(2m+2)} = \operatorname{Res}_{n=-i(2m+2)} \bar{p}_2^+(x), \quad m=1,2,\dots$$

$$\beta_m^{(2)} = \frac{2}{\pi} \frac{2m+1}{m(2m-1)} \frac{\Gamma^2\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(m)}, \quad Y_1^{(2)} = \frac{6}{i} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \bar{p}_2^+(-i)$$

а постоянная $Y_1^{(2)}$ определяется от второго из условий (13).

Квазилинейная регулярность системы (22) следует из равенства

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)(2n+1) \left| m + \frac{3}{2} - n \right|} = f_m^{(2)}$$

где

$$f_m^{(2)} = \frac{1}{2(m+1)} \left[2\Psi\left(m + \frac{3}{2}\right) + \Psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - 2 - 3\Psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2(m+2)} \left[2\Psi\left(m + \frac{5}{2}\right) + \Psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - 3\Psi\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{8}{3} \right] -$$

$$- \frac{2}{2m+3} \left[2\Psi(m-2) + \Psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \Psi(2) - 2\Psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] - \frac{1}{15(2m+1)}$$

поскольку $\beta_n^{(2)} \sim O(1)$ при $n \rightarrow \infty$, а $f_m^{(2)} \sim \frac{1}{m}$ при $m \rightarrow \infty$.

После определения $Y_n^{(2)}$, $q_2(ax)$ определится в виде

$$q_2(ax) = -\frac{12\Gamma_2^2(-i)}{\pi^2} x^{-4} \sqrt{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1(n) Y_n^{(2)}}{\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)} x^{-i(n-1)} \quad (23)$$

$$(x > 0, \quad 1 < x < \infty)$$

Далее представим $q_2(ax)$ в виде с выделенной в точке $x=1$ присущей ей особенности. Для этого заметим, что $P_2(z) = \Phi_2(0) \frac{1}{z} + O(z^{-2})$ при $|z| \rightarrow \infty$ в своей области регулярности,

где

$$\Phi_2(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{P_2^-(z-1)}{z(z-1)(z-2)} dz = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n^{(2)}}{n(4n^2-1)}$$

Тогда нетрудно видеть (23), что $q_2(ax)$ можно представить в искомом виде

$$q_2(ax) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Phi_2(0) \left| \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 1 - \frac{1}{2x^2} \right| + \\ + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{i \Phi_2(0)}{\pi} \frac{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)} - \frac{\Gamma(n) Y_n^{(2)}}{\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)} \right] x^{-2n-1} \\ (1 < x < \infty)$$

BENDING OF TWO SEMI-INFINITE BEAMS, LAYING ON A BOUNDARY OF ELASTIC HALF-PLANE

E. KIL. GRIDORIAN

ԱՌՈՋԻԱԿԱՆ ԿՐԱՆԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՆՁՐԻՆ ԿՐՂԱԾ ԵՐԿՈՐ ԿՐԱՆԱՆՎԵՐՁ ՀՆՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻՈՒՄԸ

Է. Կ. ԳՐԻԳՐԻԱՆ

Ա Վ Փ Ո Վ Ո Ւ Մ

Գիտարկվում է կիսահարթության եզրին զրգամ էրկու կիսասանկերը հե-
ծանների ծովան խնդիրը, երբ հեծանների մասերին կիրառված են ուժ և
մոմենտ: Շփումը և պոկումը հաշվի չի առնվում: Խնդիրը բերվում է Վի-
ներ-Հոֆֆի հավասարման, այնուհետև, րվադիլիովին ռեպուլչար դժային
հանրահաշվական հավասարումների համակարգի, որոնց անհայտները նոր-
մալ լարումների ֆուրյեի ձևափոխության մեղացքներն են:

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э. Х. Об одном эффективном методе решения одного класса смешанных задач теории упругости.—Уч. записки ЕГУ, естеств. науки, 1979, № 2.
2. Григорян Э. Х. Об одном подходе к решению задач для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение, выходящее на границу полуплоскости.—Междуз. сб. науч. трудов Механика. Ер. изд. ЕГУ, 1987, № 6.
3. Григорян Э. Х. О решении контактной задачи для упругой полуплоскости, граница которой усилена двумя полубесконечными накладками.—Междуз. сб. науч. трудов, Механика. Ер. изд. ЕГУ, 1991, № 3.
4. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.—М.: Наука, 1989.
5. Попов Г. Я. Тихоненко Л. Я. Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином. ПММ, 1974, 38, вып. 2.
6. Набл Б. Метод Винсера-Хопфа.—М.: ИЛ, 1962.
7. Справочник по специальным функциям.—М.: Наука, 1979.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды.—М.: Наука, 1981.

Ереванский университет

Поступила в редакцию
11.06.1992

УДК 539.3:534.1

К УСТОЙЧИВОСТИ МОДУЛЯЦИОННЫХ ВОЛН В
ТЕРМОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ

БАГДОЕВ А. Г., МОВСИСЯН Л. А.

Изучается устойчивость квазимонохроматической волны цилиндрического изгиба в нелинейно упругой пластинке в связанной подлге термоупругости. Задача решается в рамках классической теории.

Получено уравнение модуляции.

Эффект связности по сути приводит к явлениям типа вязкости.

Получено, что возможна устойчивость и для «мягких» материалов при определенных условиях.

Изучается устойчивость квазимонохроматической волны цилиндрического изгиба в нелинейно упругой пластинке [1] в связанной задаче термоупругости [2].

Для упругой и вязкоупругой задач подобный анализ сделан в [3-5] и др.

Эффект связности по сути приводит к явлениям типа вязкости [5].

В рамках классической теории пластин для нелинейно упругого материала [1] с учетом температурных напряжений [2] и уравнения теплопроводности в форме [6], при условии, что температуры одинаковые на внешних плоскостях пластинки, связанная система уравнений теплопроводности и изгибных колебаний имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left(\frac{12\alpha}{h^2} - \frac{6k}{\rho h c_p} \right) T - \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \nu_1 (1 + \nu_1) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Здесь, в основном, сохранены обычные обозначения величины для пластины и [2, 6], отметим только, что для нелинейного коэффициента имеем [4]

$$D_1 = \frac{4}{45} \gamma_1 \Delta^2 \frac{(1-\nu_1)^2}{(1-\nu_1)^2}$$

Решение (1.1) будем искать в виде

$$T = b_1 e^{i\tau} + \bar{b}_1 e^{-i\tau}, \quad w = a_1 e^{i\tau} + \bar{a}_1 e^{-i\tau} \quad (1.2)$$

$$\tau = \alpha x - \omega t$$

которое дает следующее дисперсионное соотношение:

$$\left(x^2 - \frac{\omega h}{D} \omega^2 + D_2 a_1 \bar{a}_1 x^2\right)(x_1 - i\omega) - i\alpha_1(1 + \nu)x_1 \omega^2 = 0 \quad (1.3)$$

где

$$x_1 = \frac{12\kappa}{h^2} + \frac{6k}{\rho h c_p}, \quad D_2 = 3D_1 e^{2-i}$$

а ω_2 — минимальная часть линейной частоты $\omega_0 = \omega_1 + i\omega_2$.

Дифференциальное уравнение, соответствующее (1.3), имеет вид

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\omega h}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + D_2 a_1 \bar{a}_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(x_1 + \frac{\partial}{\partial t}\right)W + x_1(1 + \nu)x_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad (1.4)$$

где

$$W = a_1 e^{i\psi}$$

Уравнение модуляции получим из (1.4), записывая W в виде $W = A(x, t) \exp[i(x - \omega_0 t)]$ и удерживая производные от медленно изменяющейся амплитуды A до второго порядка включительно. Тогда получится следующее уравнение модуляции:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \left(\frac{d\omega_1}{dz} + i\alpha_1 \omega_1\right) \frac{\partial A}{\partial x} - \left(\frac{i}{2} \frac{d^2 \omega_1}{dz^2} + x_1 \omega_1\right) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + (i\alpha_2 - x_4) A |A|^2 = 0 \quad (1.5)$$

При выводе (1.5) учтено, что $\frac{\partial}{\partial t} \approx -\frac{d\omega_1}{dz} \frac{\partial}{\partial x}$ [7], где для малой "диссипации" (ω_2) имеем

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{D}{\rho h} x^2 \left(1 - \frac{2\omega_2}{x_1}\right), \quad \frac{2\omega_2}{x_1} = \frac{D\alpha_1(1 + \nu)x_1 x^4}{D\alpha^4 + \rho h x_1} \\ x_1 &= -\frac{2}{\alpha(1 + \beta^2)}, \quad x_2 = \frac{1 + 3\beta^2}{2^2(1 + \beta^2)}, \quad x_3 = \frac{1}{2} D_2 \omega_1 \alpha^4 \\ x_4 &= \frac{D_2 \omega_1 \alpha^4 (\beta^2 - 1)}{2(1 + \beta^2)}, \quad \beta = \frac{\omega_2}{x_1} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Полагая в (1.5) $A = ae^{i\varphi}$ и отделяя действительную и мнимую части, можно получить систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{d\omega_1}{dz} \frac{\partial a}{\partial x} - \alpha_1 \omega_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \alpha_2 \omega_2 \left[\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \right. \\ \left. - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_1}{dz^2} \left(2 \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - x_4 a^3 = 0 \\ a \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{d\omega_1}{dz} a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x_1 \omega_1 \frac{\partial a}{\partial x} - x_2 \omega_1 \left(2 \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \right. \\ \left. + a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_1}{dz^2} \left[\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] + \alpha_2 a^3 = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для исследования на устойчивость следует полагать

$$a = a_0(t) + a'(x, t), \quad \varphi = \varphi_0(t) + \varphi'(x, t) \quad (1.8)$$

Подставляя (1.8) в (1.7), для невозмущенной задачи получим

$$\frac{da_0}{dt} = \gamma_4 a_0^3, \quad \frac{d\varphi_0}{dt} = -\gamma_3 a_0^2 \quad (1.9)$$

а если решение возмущенной задачи в линейном приближении искать в виде

$$a' = F \exp[i(Kx - \Omega t)], \quad \varphi' = \Phi \exp[i(Kx - \Omega t)] \quad (1.10)$$

для Ω получим уравнение

$$z^3 - 3\gamma_4 a_0^2 z - \gamma_1(z_1 - 2\gamma_3 a_0^2) = 0 \quad (1.11)$$

где

$$z = -i\Omega + iK \frac{d\omega_1}{dz} + \gamma_2 \omega_2 K^2 \quad (1.12)$$

$$z_1 = \frac{1}{2} K^2 \frac{d^2 \omega_1}{dz^2} + i\gamma_1 \omega_1 K$$

Условие устойчивости волн модуляции будет $\Omega_2 \leq 0$, $\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$.

Анализ (1.11) приводит к следующему выводу: имеется устойчивость:

I случай — при $\gamma_2 < 0$ ($\gamma_3 < 0$, $\gamma_4 < 0$), когда

$$\omega_2 \gamma_1 K^2 + \frac{3}{2} |\gamma_4| a_0^2 \geq \frac{\omega_2 \gamma_1 \left(K^2 \frac{d^2 \omega_1}{dz^2} + 2|\gamma_3| a_0^2 K^2 \right)}{2 \sqrt{\left(\frac{1}{2} K^2 \frac{d^2 \omega_1}{dz^2} \right)^2 + \gamma_3 a_0^2 K^2 \frac{d^2 \omega_1}{dz^2}}} \quad (1.13)$$

если $\left(\frac{1}{2} K^2 \frac{d^2 \omega_1}{dz^2} \right)^2 > |\gamma_3| a_0^2 K^2 \frac{d^2 \omega_1}{dz^2}$ и

$$\omega_2 \gamma_1 K^2 + \frac{3}{2} |\gamma_4| a_0^2 \geq \sqrt{-\left(\frac{1}{2} K^2 \frac{d^2 \omega_1}{dz^2} \right)^2} |\gamma_3| a_0^2 K^2 \frac{d^2 \omega_1}{dz^2} \quad (1.14)$$

если $\left(\frac{1}{2} K^2 \frac{d^2 \omega_1}{dz^2} \right)^2 < |\gamma_3| a_0^2 K^2 \frac{d^2 \omega_1}{dz^2}$

II случай — при $\gamma_2 > 0$ устойчивость будет, если

$$\omega_1 \gamma_1 K^2 \geq \frac{3}{2} \gamma_4 a_0^2 + \quad (1.15)$$

$$+ \frac{\omega_2 \gamma_1 \left(K^2 \frac{d^2 \omega_1}{dz^2} + 2\gamma_3 a_0^2 K^2 \right)}{2 \sqrt{\left(\frac{1}{2} K^2 \frac{d^2 \omega_1}{dz^2} \right)^2 + \gamma_3 a_0^2 K^2 \frac{d^2 \omega_1}{dz^2}}}$$

Но учитывая, что K — малая величина, последнее неравенство трудно достижимо.

Условия (1.13) — (1.15) получают более обозримый вид, если довольствоваться адиабатическим приближением. Как известно, для пластины модуляционная волна устойчива при $\gamma_2 > 0$ и неустойчива при $\gamma_2 < 0$ [4]. Здесь в адиабатическом приближении при $\gamma_2 < 0$ устойчивость будет, когда

$$\omega_2 \gamma_2 K^2 + \frac{3}{2} \gamma_2 \gamma_2^2 \geq K a_0 \sqrt{\frac{d^2 \omega_1}{d x^2}} |\gamma_3| \quad (1.16)$$

и при $\gamma_2 > 0$, когда

$$\omega_2 \gamma_2 K^2 \geq \frac{3}{2} \gamma_2 a_0^2 + a_0 \sqrt{\frac{\omega_2 \gamma_2}{\gamma_2 \frac{d^2 \omega_1}{d x^2}}} \quad (1.17)$$

Для несвязанной задачи $\omega_2 = \gamma_3 = 0$ и условие устойчивости (1.16) и (1.17) превращается в $(d^2 \omega_1 / d x^2) \gamma_2 > 0$ [7].

В полученных выводах интересно то, что если для несвязанной задачи ($\gamma_1 = \gamma_3 = 0$) в зависимости от знака γ_2 имеем устойчивость или неустойчивость, то теперь неустойчивость может превратиться в устойчивость и наоборот.

ABOUT STABILITY OF MODULATION WAVES IN THERMOELASTIC PLATE

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

ՋԵՐԵՄԻԱԿԱՆԱՆ ՍԵՆՏԻՄ ՄՈԴՈՒԼԱՅԻՐՆ ԱԼԻԲՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՅՈՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍԻԱՆ

Ա Վ Մ Ս Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկվում է ալ գծային առաձգական սալում միաշափ ալիքների տարածումը և նրա մոդուլացիոն կախումությունը, երբ հաշվի է առնվում ջերմային էֆեկտները: Վերջինս բերում է մածուցիկության նման երևույթի: Ստացվում է, որ «փափուկ» նյութերի համար էլ ննարավոր է կախումություն:

ЛИТЕРАТУРА

1. Каудерер Г. Нелинейная механика. — М. ИЛ, 1961. 777 с.
2. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. — М.: Мир, 1970. 256 с.
3. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. Квазимонохроматические волны изгиба в нелинейноупругих пластинках. — Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 4, с. 169—176.
4. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. Некоторые вопросы распространения квазимонохроматических волн в пластинках и оболочках. — Тр. XII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Ереван, 1980, т. 1, с. 106—112.
5. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. К вопросу распространения нелинейных волн в вязкоупругой пластине. — Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1988, т. 36, № 2, с. 3—4.
6. Болотин В. В. Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла. — ИММ, 1960, т. 24, вып. 2, с. 361—363.
7. Уилед Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. 622 с.

Институт механики АН Армении

Получила в редакцию
24.07. 1992

О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЕЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ

ГАСИАРЯН А. Г., ХАЧАТРИАН А. А.

Рассматривается вынужденное продольное колебание стержней с переменными поперечными сечениями. Решены два примера с различными законами изменения площадей поперечных сечений стержней. Показано, что при продольном возмущении стержней переменного поперечного сечения происходит такое движение части стержня, что говорить о периоде колебания не приходится.

Стержень переменного поперечного сечения, совершающий свободные продольные колебания, описывается следующим дифференциальным уравнением и частных производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{F'(x)}{F(x)} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

Здесь $u(x, t)$ — продольное перемещение точки стержня с координатой x и момент времени t ; $F(x)$ — площадь поперечного сечения стержня

$$a = \sqrt{E/\rho} \quad (2)$$

E, ρ — модуль упругости и плотность материала стержня.

Для решения конкретных примеров к уравнению (1) присоединяются необходимые граничные и начальные условия.

Ниже приводятся решения двух конкретных примеров, отличающихся друг от друга лишь законами изменения площадей поперечных сечений стержней. В обоих случаях рассматриваются свободные продольные колебания стержня длины l , один конец которого ($x=0$) закреплен, а другой ($x=l$) свободен. Пусть стержень растянут продольной силой P , приложенной к свободному концу, и в момент времени $t=0$ при внезапном освобождении совершает колебательное движение.

1. В качестве первого примера рассмотрим случай, когда

$$F(x) = F_0 \exp\left(-\frac{x}{l} \ln k\right) \quad (1.1)$$

где k есть отношение площадей закрепленного конца к свободному.

В этом случае нетрудно найти, что

$$u(x, 0) = \frac{Pl}{E F_0 \ln k} \left(\exp\left(\frac{x}{l} \ln k\right) - 1 \right) \quad (1.2)$$

и при этом для данной задачи будем иметь следующие граничные и начальные условия:

$$\begin{aligned} 1) \text{ при } x=0 \quad u=0 & \quad 3) \text{ при } t=0 \quad u = \frac{P_0}{EF_0 \ln k} \left(\exp\left(\frac{x}{l} \ln k\right) - 1 \right) \\ 2) \text{ при } x=l \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \quad 4) \text{ при } t=\infty \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

В силу (1.1) уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\ln k}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.4)$$

Методом разделения переменных ($u(x,t) = X(x)T(t)$) из (1.4) получим

$$\frac{a^2}{X} \left(X'' - \frac{\ln k}{l} X' \right) - \frac{T''}{T} = -\omega^2 \quad (1.5)$$

или

$$\begin{cases} T'' + \omega^2 T = 0 \\ X'' - \frac{\ln k}{l} X' + \frac{\omega^2}{a^2} X = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Общее решение этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} T &= A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ X &= \exp\left(\frac{x}{l} \ln \sqrt{k}\right) \left(C \sin \frac{\xi x}{l} + D \cos \frac{\xi x}{l} \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\xi = \sqrt{\frac{a^2 \omega^2}{a^2} - \ln^2 \sqrt{k}} \quad (1.8)$$

В силу условий 1) и 4) из (1.3) имеем $B = D = 0$ и частное решение уравнения (1.4) принимает вид

$$u(x,t) = A \exp\left(\frac{x}{l} \ln \sqrt{k}\right) \sin \frac{\xi x}{l} \cos \omega t$$

При удовлетворении второго условия (1.3) приходим к следующему трансцендентному уравнению $\tan \xi = -\xi / \ln \sqrt{k}$ относительно ξ . Это уравнение имеет неограниченное количество положительных и отрицательных корней. Интересующие нас положительные корни находятся в следующих интервалах:

$$(2n-1) \frac{\pi}{2} < \xi_n < n\pi \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1.9)$$

но расположены они гораздо ближе к левому краю и при больших значениях n практически не отличаются от левого значения (1.9).

Таким образом, общее решение уравнения (1.4) представится в виде

$$u(x,t) = \exp\left(\frac{x}{l} \ln \sqrt{k}\right) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\xi_n x}{l} \cos \omega_n t \quad (1.10)$$

где

$$\omega_n = \frac{a}{l} \sqrt{\xi_n^2 + \ln^2 \sqrt{k}} \quad (1.11)$$

и ξ_n есть положительные корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \xi_n = -\xi_n / \ln \sqrt{k} \quad (1.12)$$

Удовлетворив теперь третьему условию (1.3), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\xi_n x}{l} = \frac{2Pl}{EF_0 \ln \sqrt{k}} \operatorname{sh} \frac{x \ln \sqrt{k}}{l} \quad (1.13)$$

Для определения величин A_n следует учесть, что функции $\sin \frac{\xi_n x}{l}$ ортогональны в интервале $(0, l)$, то есть

$$\int_0^l \sin \frac{\xi_n x}{l} \sin \frac{\xi_m x}{l} dx = \begin{cases} \left(1 - \frac{\sin 2\xi_n}{2\xi_n}\right) \frac{l}{2} & \text{при } m=n \\ 0 & \text{при } m \neq n \end{cases} \quad (1.14)$$

После определения величин A_n и некоторых преобразований решение рассматриваемой задачи можно представить в виде

$$u(x,t) = \frac{2Pl \sqrt{k}}{EF_0} \exp\left(\frac{x}{l} \ln \sqrt{k}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \xi_n}{\ln \sqrt{k} + \ln^2 \sqrt{k} + \xi_n^2} \sin \frac{\xi_n x}{l} \cos \omega_n t \quad (1.15)$$

Принимая здесь $k=1$, получим известное решение рассмотренной задачи для стержня постоянного поперечного сечения [1]

$$u(x,t) = \frac{8Pl}{E F_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \sin \frac{2n-1}{2l} \pi x \cos \frac{2n-1}{2l} \pi a t \quad (1.16)$$

2. В качестве второго примера рассмотрим случай, когда

$$F(x) = F_0 \cos^2 \frac{\pi x}{l}, \quad x = \arg \cos \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (2.1)$$

где, как и в первом примере, $k > 1$ есть отношение площадей закрепленного конца к свободному

В силу (2.1) уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2x}{l} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

Граничные и начальные условия 1), 2) и 4) в (1.3) остаются те же, а начальное условие 3), естественно, заменяется следующим:

$$u(x, 0) = \frac{Pl}{\pi EF_0} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{l} \quad (2.3)$$

После разделения переменных из (2.2) получим

$$\begin{cases} T'' + \Omega T = 0 \\ X'' - \frac{2\pi}{l} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{l} X' + \frac{\Omega^2}{a^2} X = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Второе уравнение (2.4) можно представить в виде

$$\left(X \cos \frac{\pi x}{l} \right)' + \frac{\eta^2}{\pi} X \cos \frac{\pi x}{l} = 0, \quad \eta^2 = \frac{\Omega^2 l^2}{a^2} + \pi^2 \quad (2.5)$$

и поэтому общие решения уравнений (2.4) имеют вид

$$T = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t \quad (2.6)$$

$$X = \left(C \sin \frac{\pi x}{l} + D \cos \frac{\pi x}{l} \right) \left| \cos \frac{\pi x}{l} \right|$$

Поступая аналогично первому примеру и удовлетворив условиям 1), 2) и 4) в (1.3) для общего решения уравнения (2.2), получим

$$u(x, t) = \frac{l}{\cos \frac{\pi x}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\eta_n x}{l} \cos \Omega_n t \quad (2.7)$$

где

$$\Omega_n = \frac{a}{l} \sqrt{\eta_n^2 - \pi^2} \quad (2.8)$$

и η_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \eta_n = -\eta_n (\pi)^{\frac{1}{2}} \sqrt{k-1} \quad (2.9)$$

Удовлетворив теперь начальному условию (2.3), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\eta_n x}{l} = \frac{Pl}{\pi EF_0} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (2.10)$$

Пользуясь тем, что функции $\sin \frac{\eta_n x}{l}$ ортогональны в интервале $(0, l)$, после определения величин C_n и некоторых преобразований, решение рассматриваемой задачи представим в виде

$$u(x, t) = \frac{2Pl \sqrt{k}}{EF_0 \cos \frac{\pi x}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\eta_n^2 + \pi^2(k-1)] \sin \eta_n}{(\eta_n^2 - \pi^2) \{ \pi \sqrt{k-1} + \pi^2(k-1) + \eta_n^2 \}^2} \sin \frac{\eta_n x}{l} \cos \Omega_n t \quad (2.11)$$

Здесь также, принимая $k=1$ ($\alpha=0$), получим указанное вышеизвестное решение (1.16).

3. Ниже приведем значения первых нескольких корней ξ_n и γ_n трансцендентных уравнений (1.12) и (2.9), а также соответствующие им значения $\omega_n l/a$ и $\Omega_n l/a$, для двух значений k : $k=2$ (табл. 1) и $k=10$ (табл. 2).

Табл. 1

n	ξ_n	$\omega_n l/a$	γ_n	$\Omega_n l/a$
1	1.7647	1.7984	1.9531	1.7882
2	4.7846	4.7971	4.8722	4.8085
3	7.8870	7.8955	7.9525	7.9136
4	11.0250	11.0301	11.0665	11.0386
5	14.1616	14.1658	14.1925	14.1708
6	17.2988	17.3023	17.3240	17.3062

Табл. 2.

n	ξ_n	$\omega_n l/a$	γ_n	$\Omega_n l/a$
1	2.0769	2.3747	2.5450	2.2174
2	4.9413	5.0737	5.3255	5.1769
3	7.9970	8.0794	8.2781	8.1833
4	11.0990	11.1586	11.3154	11.2462
5	14.2181	14.2646	14.3919	14.3376
6	17.3451	17.3833	17.4898	17.4451

Рассматривая полученные решения (1.15) и (2.11), нетрудно заметить, что они принципиально отличаются от соответствующего решения (1.16), полученного для стержня постоянного поперечного сечения.

Дело в том, что перемещения точек стержня постоянного поперечного сечения в аналогичных задачах происходят синхронно и с определенным периодом времени. А именно, как видно из (1.16), в момент времени $t=t_0=l/a$, когда упругая волна пробегает всю длину стержня, перемещения всех точек стержня обращаются в нуль. С этого момента все сечения стержня продолжают свое движение в сторону отрицательных перемещений и в момент времени $t=2t_0$, когда упругая волна от конца $x=0$ доходит до конца $x=l$, принимают свои наиболее сжатые положения и т. д. Таким образом, здесь происходит четкое колебательное движение с периодом колебания, равным $4t_0 = 4l/a$.

Отметим, что указанная синхронность движения частиц имеет место также и для стержней постоянного поперечного сечения, изготовленных из разномодульного материала [2].

Приведем значение перемещения концевое сечения $x=l$ в момент $t=l/a$ для первого примера

$$u(l, l/a) = \frac{2Plk}{EF_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n^2 \cos \frac{\pi n l}{a}}{(\ln^2 \sqrt{k} - \varepsilon_n^2)(\ln^2 k + \ln^2 \sqrt{k} + \varepsilon_n^2)} \quad (3.1)$$

Здесь нетрудно установить, что для практически допустимых значений k , $\varepsilon_n/l/a$, аналогично ε_n , удовлетворяет неравенству (1.9). Следовательно, ряд в (3.1) является знакопеременным с монотонно убывающими по величине членами и так как первый член отрицателен, то и вся сумма ряда будет меньше нуля, то есть $u(l, l/a) < 0$. Это говорит о том, что концевое сечение $x=l$ приходит к своему нулевому положению раньше, чем упругая волна проходит всю длину стержня. Если удастся нам найти время прихода концевого сечения к своему нулевому положению, то все равно очевидно, что другие сечения за это время не придут к своим нулевым положениям.

Анализ показывает, что аналогичное явление имеет место и в другом примере.

Из приведенного выше заключаем, что для стержней переменного поперечного сечения отсутствует синхронность движения частиц. Хотя перемещение любого сечения в любой момент времени можно определить полученными выше формулами, однако говорить здесь о периоде колебания не приходится.

ON THE LONGITUDINAL VIBRATIONS OF BEAMS WITH VARIABLE TRANSVERSE SECTIONS

A. E. GASPARIAN, A. A. KHACHATRIAN

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԷՆԴԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՆԵՐՈՎ ՉՈՂԵՐԻ
ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ե. ԳԱՍՊԱՐԻԱՆ, Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐԻԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Գրության հիմնական կտրվածքով ձողերի երկայնական ազատ տատանումների խնդիրը։ Ուրված են երկու դեպքերի համար լուծումներ, որոնք տարրերվում են մեկը մյուսից բնդայնական կտրվածքների փոփոխության օրինաչափությամբ։ Ձույք է տրված, որ փոփոխական կտրվածքի դեպքում տատանումները անկանոն բնույթ են կրում և տատանման պարբերությունը պարզապես բացակայում է։

ЛИТЕРАТУРА

1. Талмонский С. П. Колебания в инженерном деле.—М.: Физматгиз, 1959. 440 с.
2. Хачатрян А. А. О продольных колебаниях прismaticеских стержней, изготовленных из разномодульного материала.—Инж. журнал АН АрмССР, №5, 1967.

Институт Механики
АН Армянской

Поступила в редакцию
20.08.1972

УДК 531.3662-60

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАНИЯМИ
КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ

СААКЯՆ Լ. Տ.

Рассматривается задача об оптимальном управлении осесимметричными колебаниями круглой пластинки при помощи внешних сил, распределенных по всей ее площади. Предполагается, что пластинка зажата по контуру, и ее динамический прогиб мал по сравнению с толщиной.

Решение задачи строится в виде ряда по собственным функциям однородной задачи и сводится к бесконечной системе моментных равенств, решаемых в пространстве $L_2(0, T)$.

Определяется вид управляющей функции при условии минимума энергии управляющего воздействия и рассматриваются условия сходимости рассмотренных рядов.

§ 1. Пусть на пластинку, которая зажата по контуру, действует внешняя нагрузка, распределенная по всей ее площади с плотностью $f(t, r)$. Предположим, что динамический прогиб $W(t, r)$ мал по сравнению с толщиной h , а толщина, в свою очередь, мала по сравнению с радиусом $r=a$ пластинки. Тогда прогиб произвольной точки пластинки определится путем решения неоднородного дифференциального уравнения упругой поверхности [1]

$$\Delta^2 W + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = f(t, r), \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \quad (1.1)$$

при соответствующих однородных граничных

$$W(t, r) \Big|_{r=a} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.2)$$

и заданных начальных условиях

$$W(t, r) \Big|_{t=0} = \varphi(r), \quad \frac{\partial W}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(r), \quad 0 \leq r \leq a \quad (1.3)$$

В (1.1) $\Delta^2 = D \nabla^2 / h$, $D = \frac{ER^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость, $\nu = \text{const}$ — плотность.

В задаче о собственных колебаниях круглой пластинки ($f(t, r) = 0$) при условиях (1.2), (1.3) решение определяется методом Фурье [1, 2]

$$W(t, r) = F(t) \cdot R(r)$$

где $F(t)$ и $R(r)$ удовлетворяют уравнениям:

$$F + b^2 F = 0; \quad \Delta \Delta R - \gamma R = 0, \quad |R(0)| < \infty, \quad R(a) = 0, \quad \left. \frac{dR}{dr} \right|_{r=a} = 0$$

Собственные функции данной краевой задачи имеют следующий вид:

$$R_m(r) = J_0(\gamma_m) \cdot J_0\left(\frac{r}{a} \gamma_m\right) - J_0(\gamma_m) \cdot J_0\left(\frac{r}{a} \gamma_m\right), \quad m=1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Собственные числа $\gamma_m = (\gamma_m a)^2$ являются корнями трансцендентного уравнения

$$R_m(a) = J_0(\gamma_m) \cdot J_0(\gamma_m) - J_0(\gamma_m) \cdot J_0(\gamma_m) = 0, \quad m=1, 2, \dots$$

Функции (1.4) ортогональны в области $(0, a); (0, 2\pi)$ с весом r и имеют следующую норму:

$$\|R_m(r)\|^2 = \int_0^a \int_0^{2\pi} |R_m(r)|^2 r dr d\varphi = 2\pi^2 J_0^2(\gamma_m) \cdot J_0^2(\gamma_m)$$

Таким образом, система функций $\{R_m(r)/\|R_m\|\}_{m=1}^\infty$ представляет собой ортонормальную систему собственных функций для бигармонического оператора в пространстве L_2 с условиями (1.2) на границе контура.

§2. Решение уравнения (1.1) будем искать в форме ряда

$$W(t, r) = \sum_{m=1}^\infty W_m(t) \frac{R_m(r)}{\|R_m\|}, \quad W_m(t) = \frac{1}{\|R_m\|} \int_0^a W(t, r) R_m(r) r dr \quad (2.1)$$

Подставляя решение (2.1) в уравнение (1.1), умножая последнее на $r R_m(r)/\|R_m\|$ и интегрируя по r от нуля до a , получим для определения функций $W_m(t)$ следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{W}_m + b^2 \gamma_m W_m = \frac{1}{\|R_m\|} \int_0^a f(t, r) R_m(r) r dr = u_m(t), \quad m=1, 2, \dots \quad (2.2)$$

с начальными условиями

$$\dot{W}_m = W'_m(0) = \frac{1}{\|R_m\|} \int_0^a \dot{\varphi}(r) R_m(r) r dr, \quad W_m = W_m(0) = \frac{1}{\|R_m\|} \int_0^a \varphi(r) R_m(r) r dr \quad (2.3)$$

Предполагается, что функция $f(t, r) \in L_2((0, T) \times (0, a))$ и допускает разложение

$$f(t, r) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) \frac{R_m(r)}{[R_m]}, \quad t \in [0, T] \quad (2.4)$$

Задача. Определить внешнюю нагрузку $f(t, r)$ так, чтобы при некотором конечном $t=T>0$, пластинку из заданного начального состояния (1.3) перевести в состояние

$$W(T, r) = 0, \quad W_t(T, r) = 0 \quad (2.5)$$

с соблюдением граничных условий (1.2), минимизировав при этом функционал

$$\int_0^T \int_0^a |f(t, r)|^2 r dr dt = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^T u_m^2(t) dt = \sum_{m=1}^{\infty} J_m(u_m) \quad (2.6)$$

имеющий смысл энергии управляющего воздействия. Так как минимизация функционала (2.6) эквивалентна минимизации каждого из функционалов J_m , $m=1, 2, \dots$, то для определения функций $W_m(t)$ приходим к следующей задаче оптимального управления в пространстве $L_2(0, T)$.

Заданы уравнения движения (2.2), отрезок времени $[0, T]$, начальное состояние (2.3) и конечное состояние

$$W_m(T) = 0, \quad W_m'(T) = 0 \quad (2.7)$$

фазового вектора (W_m, W_m') . Выбран функционал

$$J_m = \int_0^T u_m^2(t) dt = \|u_m\|^2 \quad (2.8)$$

оценивающий управление и имеющий смысл нормы элемента $u_m \in L_2(0, T)$. Среди возможных управлений $u_m(t)$ требуется найти оптимальное управление $u_m^0(t)$, переводящее систему из состояния (2.3) в состояние (2.7) и имеющее минимальную норму [3].

§ 3. Общее решение уравнения (2.2), (2.3) имеет вид

$$W_m(t) = \bar{\gamma}_m \cos \mu_m t + \frac{1}{\mu_m} \bar{\gamma}_m \sin \mu_m t + \frac{1}{\mu_m} \int_0^t u_m(\tau) \sin \mu_m(t-\tau) d\tau \quad (3.1)$$

где $\mu_m = \left(\frac{h}{a} \gamma_m\right)^2$, $m=1, 2, \dots$. Условия (2.7) приводят к следующим

моментным равенствам:

$$\int_0^T u_m(\tau) \sin \mu_m \tau d\tau = \mu_m \bar{\gamma}_m, \quad \int_0^T u_m(\tau) \cos \mu_m \tau d\tau = -\bar{\gamma}_m, \quad m=1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Оптимальное управление, решающее задачу (3.2), (2.8), имеет следующий вид [3]:

$$u_m^0(t) = \frac{1}{T^2 - \left(\frac{\sin^2 \mu_m T}{\mu_m}\right)^2} \left[\left(2\gamma_m \frac{\sin^2 \mu_m T}{\mu_m} + 2\mu_m T \cdot \varphi_m + \varphi_m \sin 2\mu_m T \right) \sin \mu_m t - \right. \\ \left. + \left(\varphi_m \frac{\sin 2\mu_m T}{\mu_m} - 2\varphi_m \sin^2 \mu_m T - 2T\varphi_m \right) \cos \mu_m t \right] \quad (3.3)$$

Выясним теперь условия равномерной сходимости следующих рядов:

$$W(t, r) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(t) \frac{R_m(r)}{\|R_m\|}, \quad \bar{W}_1(t, r) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{W}_m(t) \frac{R_m(r)}{\|R_m\|}, \\ W_{12} = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(t) \frac{R_m(r)}{\|R_m\|} \quad (3.4)$$

$$\Delta \Delta W = \frac{1}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) \frac{R_m(r)}{\|R_m\|}, \quad f(t, r) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) \frac{R_m(r)}{\|R_m\|}$$

Для коэффициентов при $R_m(r)/\|R_m\|$ в рядах (3.4) справедливы следующие оценки:

$$|W_m(t)| < N_1(|\varphi_m| + \frac{1}{\gamma_m} |\varphi_m|), \quad |\bar{W}_m(t)| < N_2(\gamma_m^2 |\varphi_m| + |\varphi_m|) \\ |\bar{W}_m(t)| < N_2(\gamma_m^2 |\varphi_m| + \gamma_m |\varphi_m|), \quad |\gamma_m \bar{W}_m(t)| < N_1(\gamma_m^2 |\varphi_m| + \gamma_m |\varphi_m|) \quad (3.5) \\ |u_m(t)| < N_3(\gamma_m^2 |\varphi_m| + |\varphi_m|), \quad N_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, 4}$$

При больших значениях r для функций $J_0(r)$ и $I_0(r)$ справедливы неравенства [4]:

$$M_1 \leq |J_0(r)\sqrt{r}| \leq M_2, \quad M_1 \leq \sqrt{r} \cdot e^r \cdot I_0(r) \leq M_2 \\ |J_0\left(\frac{r}{a} \gamma_m\right)| \leq \frac{M_2 \sqrt{a}}{\sqrt{r}} \frac{1}{\sqrt{\gamma_m}}, \quad |J_0(\gamma_m)| \geq \frac{M_1}{\sqrt{\gamma_m}} \quad (3.6)$$

$$\left| I_0\left(\frac{r}{a} \gamma_m\right) \right| \leq \frac{M_2 \sqrt{a}}{\sqrt{r}} \frac{e^{\frac{r}{a} \gamma_m}}{\sqrt{\gamma_m}}, \quad I_0(\gamma_m) \geq \frac{M_1}{\sqrt{\gamma_m}} e^{\gamma_m}, \quad M_1, M_2 = \text{const}$$

Оценим теперь $|R_m(r)/\|R_m\|$ при $r \in (0, a]$ и $|R_m(0)/\|R_m\|$:

$$\frac{|R_m(r)|}{\|R_m\|} = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \left| \frac{J_0\left(\frac{r}{a} \gamma_m\right)}{J_0(\gamma_m)} - \frac{I_0\left(\frac{r}{a} \gamma_m\right)}{I_0(\gamma_m)} \right| \leq \frac{(\sqrt{r})^{-1}}{\sqrt{2a\pi}} \left(\frac{M_2}{M_1} + \frac{M_2}{M_1} \right) = \frac{M}{\sqrt{r}} \quad (3.7)$$

$$\frac{|R_m(0)|}{\|R_m\|} = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \left| \frac{1}{J_0(\gamma_m)} - \frac{1}{I_0(\gamma_m)} \right| \leq \frac{\sqrt{\gamma_m}}{a\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_1 e^{\gamma_m}} \right) = N \cdot \sqrt{\gamma_m}$$

Следовательно, как это следует из (3.5), (3.7), сходимость мажорантных рядов

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{m=1}^{\infty} (\nu_m^2 |\varphi_m| + \nu_m^2 |\psi_m|), \quad r \in (0, a] \quad (3.7)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\sqrt{\nu_m} (\nu_m^2 |\varphi_m| + \nu_m^2 |\psi_m|)), \quad (r=0)$$

обеспечит равномерную сходимость рядов (3.4).

Выясним условия, которым должны удовлетворять функции $\varphi(r)$ и $\psi(r)$, чтобы их соответствующие коэффициенты разложения φ_m и ψ_m имели порядок по отношению к ν_m необходимый для сходимости рядов (3.8).

Пусть производные функции $\varphi(r)$ до пятого порядка включительно непрерывны, а шестая производная кусочно-непрерывна, кроме того

$$|\varphi_{1\alpha}(0)| = \left| \frac{1}{r^{5-\alpha}} \frac{d^5 \varphi}{dr^5} \right|_{r=0} < k_1 = \text{const}, \quad \alpha = \overline{1,5}$$

а функция $\sqrt{r} \varphi_{1\alpha}(r)$ абсолютно интегрируема при $\alpha = \overline{1,5}$. Тогда нетрудно показать, что для φ_m справедлива оценка

$$|\varphi_m| < \frac{c_1}{\nu_m^6} + \frac{c_2}{\nu_m^6} \sum_{\alpha=1}^5 \int_0^a |\sqrt{r} \varphi_{1\alpha}(r)| dr < \frac{c}{\nu_m^6} \quad (3.9)$$

Аналогично, пусть производные функции $\psi(r)$ до третьего порядка включительно непрерывны, а четвертая производная кусочно-непрерывна, кроме того,

$$|\psi_{1\beta}(0)| = \left| \frac{1}{r^{3-\beta}} \frac{d^3 \psi}{dr^3} \right|_{r=0} < k_2 = \text{const}, \quad \beta = \overline{1,3}$$

а функция $\sqrt{r} \psi_{1\beta}(r)$ абсолютно интегрируема при $\beta = \overline{1,3}$. Тогда для ψ_{km} справедлива оценка

$$|\psi_m| < \frac{d^2 M}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\nu_m^4} \sum_{\beta=1}^3 \int_0^a |\sqrt{r} \psi_{1\beta}(r)| dr < \frac{d}{\nu_m^4} \quad (3.10)$$

Полученные оценки (3.9), (3.10) позволяют построить для (3.8) следующие мажорантные ряды

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} (\nu_m^2 |\varphi_m| + \nu_m^2 |\psi_m|) < \frac{c+d}{\sqrt{r}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_m^6}, \quad r \in (0, a]$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\sqrt{\nu_m} (\nu_m^2 |\varphi_m| + \nu_m^2 |\psi_m|)) < (c+d) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_m^2}, \quad r=0$$

сходимость которых обеспечит равномерную сходимость рядов (3.4).

ABOUT OPTIMAL CONTROL OF VIBRATIONS OF ROUND PLATE

L. S. SAHAKYAN

Դիտարկված է ամրացված հզրերով կլոր սալի անանցրադիմադրիկ առանձնումների Սպտիմալ ղեկավարման խնդիրը նրա վերին մակերևույթի վրա բաշխված արտաքին ուժերի միջոցով: Խնդրի լուծումը կառուցված է շարքի տեսքով համասեռ խնդրի սեփական ֆունկցիաների օգնությամբ: Ուղղված է օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունը ստացված յուրաքանչյուր նախասարման համար 1,2 դասում:

Ուսումնասիրված է գույամեկուսված հարցեր:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Անիզոտրոպնե ինժեկցիա* —М. Гостехиздат, 1947
2. *Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.*—М. Наука, 1977
3. *Красовский Н. Н. Теория управления движением.*—М.: Наука, 1968
4. *Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций.* ч. 1.—М. Изд. ИЛ, 1949

Երևանский политехнический институт:

Поступила в редакцию
20.06.1991

УДК 539.3

ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ МАГНИТОУПРУГОСТИ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ АНИЗОТРОПНЫХ ТОНКИХ ОБЛОЧЕК

ՏԱՐԿԻՍՅԱՆ Տ. Օ.

В данной работе рассматриваем проблему построения двумерной теории магнитоупругости анизотропных оболочек методом гипотез и представляем основную часть общей двумерной теории магнитоупругости анизотропных тонких оболочек.

1. Рассмотрим анизотропную оболочку постоянной толщины $2d$ как трехмерное, упругое, электропроводящее, немагнитное тело и отнесем его к принятой в теории оболочек триортогональной неподвижной системе координат.

Пусть оболочка находится во внешнем магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{B}_0 = (B_{01}, B_{02}, B_{03})$ и что она находится в среде, электропроводящие свойства которой отождествляются со свойствами вакуума.

Будем исходить из основных уравнений линейной теории магнитоупругости для трехмерной анизотропной немагнитной среды. Эти уравнения составляют три группы уравнений и имеют вид:

первая группа уравнений—дифференциальные уравнения теории упругости анизотропного тела, которые можем записать так.

Векторное уравнение движения оболочки с учетом массовых пондеромоторных сил [1]

$$\frac{\partial H_1 \vec{\varepsilon}_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2 \vec{\varepsilon}_2}{\partial \beta} + \frac{\partial H_3 \vec{\varepsilon}_3}{\partial \gamma} + H_1 H_2 \left(-\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \vec{F} \right) = 0, \quad (1.1)$$

где $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3$ —векторы упругих напряжений, соответственно, на площадках, нормали которых проходят вдоль линий x, β и γ ; $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ —вектор перемещения точек оболочки; ρ —плотность материала оболочки, $\vec{F}$ —вектор объемных сил электромагнитного происхождения (пондеромоторные силы)

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}_0, \quad (1.2)$$

$\vec{j}$ —вектор плотности электрического тока проводимости.

Считаем, что рассматриваемое сплошное упругое тело испытывает малые деформации и подчиняется обобщенному закону Гука [2], когда в каждой точке тела имеется плоскость упругой симметрии (число независимых упругих постоянных a_{11} —тринадцать).

В первой же группе уравнений, кроме уравнений движения (1.1),

обобщенного закона Гаука [2] следует присоединять уравнения, связывающие составляющие тензора деформации с компонентами вектора перемещений [2].

Вторая группа уравнений—уравнения электродинамики в области движущейся оболочки, которую запишем так:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, & \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho_e, & \operatorname{div} \vec{h} = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

где $\vec{E}$ —вектор напряженности возбужденного в оболочке электрического поля; $\vec{h}$ —вектор напряженности возбужденного в оболочке магнитного поля; ρ_e —объемная плотность электрических зарядов.

Плотность электрического тока проводимости $\vec{j}$ определяется законом Ома [3] следующим образом (в случае, когда имеется плоскость симметрии для физических свойств материала оболочки):

$$\vec{j} = \hat{\varepsilon} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{B}_0 \right) \quad (1.4)$$

где $\hat{\varepsilon}$ —тензор электрической проводимости материала оболочки

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Отметим, что на основе уравнений (1.3) электрический ток проводимости будет удовлетворять уравнению

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (1.6)$$

Третья группа уравнений—уравнения электродинамики во внешней от оболочки области (вакууме)

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{h}^{(e)} = 0, & \operatorname{rot} \vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{h}^{(e)} = 0, & \operatorname{div} \vec{E}^{(e)} = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

где $\vec{E}^{(e)}$ и $\vec{h}^{(e)}$ —соответственно, векторы индуцированных электрических и магнитных полей в окружающей оболочку области (вакууме).

К системе уравнений (1.1)—(1.7), определяющих поведение движущейся упругой оболочки в заданном магнитном поле, должны быть присоединены механические и электродинамические граничные условия на поверхности оболочки, начальные условия и условия на бесконечности [1, 3].

2. Основной предпосылкой для построения теории магнитоупруго-

сти анизотропных тонких оболочек является гипотезы магнитоупругости тонких тел, которые формируем так:

а) нормальный к срединной поверхности прямолинейный элемент оболочки после деформации остается прямолинейным, нормальным к деформированной срединной поверхности и сохраняет свою длину. Нормальными напряжениями σ_z на площадках, параллельных срединной поверхности, можем пренебречь;

б) тангенциальные компоненты вектора напряженности возбуждаемого электрического поля и нормальная компонента вектора напряженности возбуждаемого магнитного поля по толщине оболочки остаются неизменными;

в) нормальной компонентой j_z электрического тока проводимости можем пренебрегать;

г) для определения электромагнитного поля в окружающем оболочку пространстве (бесконечное трехмерное пространство с исключением области тонкой оболочки) трехмерную область, занимаемую тонкой оболочкой, можем представлять как математический разрез по срединной поверхности оболочки, по которому будут течь поверхностные токи электропроводимости, представляющие собой усредненные токи по толщине оболочки.

Допущения (а) по сути дела сводятся к классической гипотезе о неизменяемости нормального элемента (гипотезе Кирхгофа-Лява).

Гипотезы (б) впервые были сформулированы в работе [1], которые определяют поведение по толщине оболочки величин, характеризующие электромагнитное поле в тонкой области оболочки.

Гипотезы группы (а) и (б), которые в [1] были названы гипотезами магнитоупругости тонких тел, полностью не решают проблемы сведения трехмерной проблемы магнитоупругости (1.1)–(1.7) к двумерной [1, 4–6]. Указанный недостаток стал причиной для различного рода допущений [1, 7] относительно процесса электромагнитного поля в окружающем оболочку пространстве, не базирующихся на тонкостенности самой оболочки.

Гипотезы групп (в) и (г) представляют собой те дополнительные гипотезы к группам гипотез (а) и (б), которые базируются на тонкостенности самой оболочки, и которые решают полностью проблему приведения трехмерной теории магнитоупругости к общей двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек.

В работах [4–6], базируясь на асимптотическом методе интегрирования всех трех групп уравнений трехмерной магнитоупругости, для изотропного случая, а в работах [4, 8, 9]—для ортотропного случая, математически были обоснованы все группы гипотез (а)–(г) и этим путем впервые построена общая двумерная теория магнитоупругости тонких изотропных и ортотропных оболочек.

Отметим, что гипотеза (в) общепринята в теории электромагнетизма в тонкой трехмерной материальной среде [10, 11].

В отличие от монографии [1], здесь гипотезами магнитоупругости

тонких оболочек будут названы совместно все изложенные группы гипотез (а), (б), (в) и (г).

В настоящей работе на основе гипотез (а)—(г) будем излагать основные положения общей двумерной теории магнитоупругости анизотропных тонких оболочек.

Пользуясь гипотезой группы (а), по известным формулам [2] определяем: распределение по толщине оболочки компонентов вектора перемещений; составляющие тензора деформированного напряженного состояния; усредненные по толщине оболочки усилия и моменты; уравнения, связывающие компоненты тензора деформированного состояния срединной поверхности оболочки через компоненты перемещений точек срединной поверхности, уравнения неразрывности и соотношения упругости теории тонких оболочек.

На основе гипотезы (в) будем иметь следующее приближенное равенство

$$J_i = 0 \quad (2.1)$$

Пользуясь выражениями (1.4), (1.5), из (2.1) легко определяем E_i :

$$E_i = -\frac{1}{c} \left[B_{03} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \right) - B_{02} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \right) \right] \quad (2.2)$$

где θ_1 и θ_2 — углы поворота нормали к срединной поверхности оболочки [2].

Гипотезы группы (б) аналитически представляем следующими приближенными выражениями [1]:

$$E_i = E_{i0}(x, y, t), \quad E_j = E_{j0}(x, y, t), \quad h_i = h_{i0}(x, y, t) \quad (2.3)$$

Тангенциальные компоненты вектора плотности электрического тока проводимости определяем на основе формул (1.4), (1.5), (2.3):

$$\begin{aligned} j_0 = \sigma_{11} & \left\{ E_{00} + \frac{1}{c} \left[B_{07} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \right) - B_{03} \frac{\partial w}{\partial t} \right] \right\} + \\ & + \sigma_{12} \left\{ E_{20} + \frac{1}{c} \left[B_{02} \frac{\partial w}{\partial t} - B_{07} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \right) \right] \right\} \\ i_2 = \sigma_{21} & \left\{ E_{00} + \frac{1}{c} \left[B_{07} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \right) - B_{03} \frac{\partial w}{\partial t} \right] \right\} + \\ & + \sigma_{22} \left\{ E_{20} + \frac{1}{c} \left[B_{02} \frac{\partial w}{\partial t} - B_{07} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Тангенциальные компоненты вектора напряженности возбужденного в оболочке магнитного поля будем определять на основе первого векторного уравнения (1.3) с учетом (2.4), (2.3) (здесь последовательно пренебрегаем величинами порядка h/R_i , $i=1,2$ относительно единицы, выражающей условие тонкостенности оболочки):

$$h_z = h_{z0}(\alpha, \beta, t) + \frac{4\pi}{c} \gamma \left\{ z_{21} \left[E_{z0} + \frac{1}{c} \left(B_{0z} \frac{\partial v}{\partial t} - B_{0y} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] + \right. \\ \left. + z_{12} \left[E_{y0} + \frac{1}{c} \left(B_{0x} \frac{\partial w}{\partial t} - B_{0z} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] \right\} + \frac{4\pi}{c} \frac{\gamma^2}{2} \left(z_{21} B_{0z} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - z_{12} B_{0z} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \quad (2.5)$$

$$h_y = h_{y0}(\alpha, \beta, t) + \frac{4\pi}{c} \gamma \left\{ z_{11} \left[E_{z0} + \frac{1}{c} \left(B_{0z} \frac{\partial v}{\partial t} - B_{0y} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] + \right. \\ \left. + z_{22} \left[E_{y0} + \frac{1}{c} \left(B_{0x} \frac{\partial w}{\partial t} - B_{0z} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] \right\} - \frac{4\pi}{c} \frac{\gamma^2}{2} \left(z_{11} B_{0z} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - z_{12} B_{0z} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$$

Объемная плотность электрического заряда получим из третьего уравнения (1.3) при помощи выражений и формул (2.3), (2.2):

$$\rho_e = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial E_{y0}}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial E_{z0}}{\partial \beta} - \frac{1}{c} B_{0y} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{c} B_{0z} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \quad (2.6)$$

Из третьего скалярного уравнения второго векторного уравнения системы (1.3) можем получить также следующее уравнение:

$$\frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} (B E_{z0}) - \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} (A E_{y0}) = - \frac{1}{c} \frac{\partial h_{z0}}{\partial t} \quad (2.7)$$

Итак, на основе гипотез магнитоупругости тонких тел по приведенным формулам определяются все механические и электродинамические переменные в области тонкой оболочки.

На основе формул (2.4) можем определить компоненты осредненного (поверхностного) электрического тока проводимости по срединной поверхности оболочки.

$$j_{z0} = \gamma_{11} \left[E_{z0} + \frac{1}{c} \left(B_{0z} \frac{\partial v}{\partial t} - B_{0y} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] + \gamma_{12} \left[E_{y0} + \frac{1}{c} \left(B_{0x} \frac{\partial w}{\partial t} - B_{0z} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] \quad (2.8)$$

$$j_{y0} = \gamma_{21} \left[E_{z0} + \frac{1}{c} \left(B_{0z} \frac{\partial v}{\partial t} - B_{0y} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] + \gamma_{22} \left[E_{y0} + \frac{1}{c} \left(B_{0x} \frac{\partial w}{\partial t} - B_{0z} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right]$$

где γ_{11} , $\gamma_{12} = \gamma_{21}$, γ_{22} представляют собой коэффициенты поверхностной электропроводимости срединной поверхности оболочки и определяются выражениями

$$\gamma_{ij} = 2h\sigma_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.9)$$

И, наконец, легко прийти к выводу, что поверхностный электрический ток проводимости $\vec{j} = \{j_{z0}, j_{y0}, 0\}$ будет удовлетворять уравнению

$$\text{div}_s \vec{j} = 0 \quad (2.10)$$

где div_s — двумерный оператор дивергенции по срединной поверхности оболочки.

Если с помощью четырех сечений, нормальных к координатной поверхности оболочки, выделим малый криволинейный прямоугольник, стороны которого совпадают с координатными линиями $\gamma = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, тогда из условия равенства нулю главного вектора и главного момента всех сил (на основе принципа Даламбера), действующих на указанный элемент срединной поверхности оболочки, получим уравнения движения элемента оболочки

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} \frac{\partial B T_1}{\partial x} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} T_2 + \frac{1}{AB} \frac{\partial A S_{12}}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} S_{22} + \frac{N_1}{R_1} = \\ = -X - \frac{1}{c} B_{01} j_{\beta 0} + \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{1}{AB} \frac{\partial A T_2}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 + \frac{1}{AB} \frac{\partial B S_{12}}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} S_{22} + \frac{N_2}{R_2} = \\ = -Y + \frac{1}{c} B_{02} j_{x 0} + \rho_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ - \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) + \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial B N_1}{\partial x} + \frac{\partial A N_2}{\partial \beta} \right) = -Z - \frac{1}{c} (B_{03} j_{x 0} - B_{02} j_{\beta 0}) + \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{1}{AB} \frac{\partial B M_1}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A H_{12}}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} H_{22} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} M_2 - N_1 = 0 \\ \frac{1}{AB} \frac{\partial A M_2}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B H_{12}}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} H_{22} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 - N_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

где X, Y, Z — компоненты приведенных внешних заданных сил, приложенных к срединной поверхности оболочки; $\rho_1 = 2hr$ — поверхностная плотность материала срединной поверхности оболочки.

Теперь для внешней от оболочки области (в вакууме) мы будем иметь систему дифференциальных уравнений (1.7), где на основе гипотезы (г) следует учесть, что по срединной поверхности оболочки текут поверхностные электрические токи проводимости $\vec{j} = (j_{x0}, j_{\beta 0}, 0)$, компоненты которого определяются выражениями (2.8).

Определяющие уравнения электромагнитного поля при указанных обстоятельствах можем представить следующим образом:

$$\text{rot} \vec{h}^{(e)} = \frac{4\pi}{c} \delta(\gamma) \cdot \delta(x, \beta \in \Omega) \vec{j}, \quad \text{rot} \vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t} \quad (2.12)$$

$$\text{div} \vec{h}^{(e)} = 0, \quad \text{div} \vec{E}^{(e)} = 0,$$

где $\delta(\gamma)$ — дельта-функция Дирака; $\delta(x, \beta \in \Omega)$ — двумерная функция Хевисайда; Ω — область срединной поверхности оболочки.

Для системы уравнений (2.12), которая должна выполняться во

всем трехмерном пространстве R_3 , необходимо присоединить условия на бесконечности и нулевые начальные условия для компонентов векторов электромагнитного поля.

Система уравнений (2.12) представляет собой дифференциальные уравнения в частных производных с сингулярными коэффициентами типа дельта функции. Эта та наиболее простая система уравнений, которую можно было бы заменить второй — (1.3) и третьей — (1.7) системой уравнений трехмерной магнитоупругости на основе группы гипотез (а), (б), (в) и (г). Итак, задача целостного определения электромагнитного поля и в области трехмерной оболочки и в окружающем ее пространстве приведена к решению системы уравнения (2.12) с коэффициентами типа дельта-функций и что эту систему уравнений необходимо рассматривать во всем трехмерном пространстве R_3 . Система уравнений (2.12) будет представлять упрощенную, но не двумерную, математическую модель для описания магнитоупругого процесса в тонкой оболочке.

Полученные качественные результаты позволяют окончательно решить проблему приведения трехмерной проблемы магнитоупругости (1.1) — (1.7) к двумерной и построить общую двумерную теорию магнитоупругости анизотропных тонких оболочек.

Если взять оператор ротации из обеих частей второго уравнения из (2.12) и использовать первое уравнение из этой же системы, на основе фундаментального решения для векторного уравнения Лапласа во всем трехмерном пространстве, решение векторного уравнения (2.12) можем представить в виде следующего интегрального равенства:

$$\vec{E}^{(e)}(P) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{1}{R_{PQ}} \vec{J}(Q, t) d\Omega, \quad Q \in \Omega, \quad P \in R_3^{(e)} \quad (2.13)$$

где $-\frac{1}{4\pi R_{PQ}}$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа; R_{PQ} — трехмерное расстояние между точкой $Q \in \Omega$ и произвольной точкой P трехмерного пространства.

В силу непрерывности поверхностного потенциала простого слоя [12] можем, во-первых, в интегральном равенстве положить $P \in R_3^{(e)}$ (бесконечная двумерная область, содержащая срединную поверхность оболочки Ω) и далее изменить точку P только по срединной поверхности Ω , имея в виду, что при этом граничные условия электродинамики с учетом (2.3) позволяют написать

$$E_t^{(e)} = E_{en}, \quad E_n^{(e)} = E_{ex} \quad (2.14)$$

И тогда из (2.13) будем иметь интегральные равенства для величин $E_{en}(P, t)$ и $E_{ex}(P, t)$. Если теперь при помощи выражений (2.8) $E_{en}(P, t)$ и $E_{ex}(P, t)$ определяем с помощью $\vec{J}_{\perp \Omega}$ и $\vec{J}_{\parallel \Omega}$, тогда после некоторых преобразований, относительно компонентов электрической

поверхностной токи проводимости приходим к следующим интегро-дифференциальным уравнениям:

$$j_{z0}(P, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{j_{z0}(Q, t) [\gamma_{11} \vec{e}_1(P) \vec{e}_1(Q) + \gamma_{12} \vec{e}_2(P) \vec{e}_1(Q)] d\Omega}{R_{PQ}} - \\ - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{j_{z0}(Q, t) [\gamma_{12} \vec{e}_1(P) \vec{e}_2(Q) + \gamma_{22} \vec{e}_2(Q) \vec{e}_2(P)] d\Omega}{R_{PQ}} + \\ + \frac{1}{c} \gamma_{11} \left(B_{01} \frac{\partial v(P, t)}{\partial t} - B_{02} \frac{\partial w(P, t)}{\partial t} \right) + \frac{1}{c} \gamma_{12} \left(B_{02} \frac{\partial w(P, t)}{\partial t} - B_{01} \frac{\partial u(P, t)}{\partial t} \right) \\ P \in \Omega \quad (2.15)$$

$$j_{z0}(P, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{j_{z0}(Q, t) [\gamma_{11} \vec{e}_1(P) \vec{e}_1(Q) + \gamma_{12} \vec{e}_1(Q) \vec{e}_2(P)] d\Omega}{R_{PQ}} - \\ - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{j_{z0}(Q, t) [\gamma_{12} \vec{e}_1(P) \vec{e}_2(Q) + \gamma_{22} \vec{e}_2(Q) \vec{e}_2(P)] d\Omega}{R_{PQ}} + \\ + \frac{1}{c} \gamma_{12} \left(B_{01} \frac{\partial v(P, t)}{\partial t} - B_{02} \frac{\partial w(P, t)}{\partial t} \right) + \frac{1}{c} \gamma_{22} \left(B_{02} \frac{\partial w(P, t)}{\partial t} - B_{01} \frac{\partial u(P, t)}{\partial t} \right) \\ P \in \Omega$$

Таким образом, проблема приведения трехмерной теории магнитоупругости к двумерной теории анизотропных тонких оболочек полностью решена и в лице уравнений (2.11), и (2.15) (которым следует присоединить соотношения упругости и уравнения, связывающие компоненты тангенциальной и изгибной деформации, выражающиеся через компоненты перемещения срединной поверхности оболочки [2]) построена общая теория двумерной магнитоупругости анизотропных тонких оболочек.

В работе построено вариационное уравнение, получено уравнение баланса энергии и доказана теорема единственности в двумерной теории магнитоупругости анизотропных тонких оболочек. Ввиду ограниченности статьи эти результаты здесь не приводятся [13—18].

Из вариационного уравнения можем получить приведенные выше основные уравнения теории магнитоупругости анизотропных тонких оболочек, канонические граничные условия теории тонких оболочек [2], а также следующие граничные условия для компонентов поверхностного электрического тока проводимости [15]

$$j_{z0}(\alpha, \beta, t)|_r = 0, \quad j_{z0}(\alpha, \beta, t)|_r = 0 \quad (2.16)$$

Если нам удастся решить разрешающую систему общей двумерной теории магнитоупругости анизотропных тонких оболочек, этим самым определим компоненты перемещений u , v , w срединной поверх-

ности оболочки, компоненты индуцированного электрического тока проводимости $J_{\alpha\beta}$ и $J_{F\beta}$ в области срединной поверхности оболочки. Имея значения указанных основных величин, характеризующих задачу, далее по соответствующим формулам легко можем определить компоненты деформированного состояния срединной поверхности оболочки, распределение перемещений, деформаций и напряжений, компоненты векторов индуцированного электромагнитного поля как в области трехмерной оболочки, так и в окружающем его пространстве.

3. В некоторых случаях изменяемости по времени индуцированного в оболочке магнитного поля, можем получить уравнения двумерной теории магнитоупругости анизотропных тонких оболочек (упрощенную систему), минуя задачу (2.12).

Упрощение разрешающей системы уравнений общей двумерной теории магнитоупругости анизотропных тонких оболочек основывается на том допущении, что величиной $\frac{\partial h_{30}}{\partial t}$ в уравнении (2.7) в определенных случаях можем пренебречь.

Следует отметить, что это допущение уже давно принято в теории электромагнитного поля для тонких пластин и оболочек [10].

Итак, принимая указанное допущение, уравнение (2.7) принимает вид

$$\frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} (BE_{30}) - \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} (AE_{30}) = 0 \quad (3.1)$$

Следующее уравнение, которое присоединим к уравнению (3.1), это уравнение (2.10), которое имеет вид

$$\frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} (Bj_{30}) + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} (Aj_{30}) = 0 \quad (3.2)$$

Вихревой поверхностный ток $(j_{30}, j_{3\alpha})$, возбуждаемый в срединной поверхности, будем характеризовать функцией тока F [10, 11]

$$j_{30} = -\frac{1}{B} \frac{\partial F}{\partial \alpha}, \quad j_{3\alpha} = \frac{1}{A} \frac{\partial F}{\partial \beta} \quad (3.3)$$

Если компоненты поверхностной плотности электрического тока будут определяться через функции тока по формулам (3.3), тогда уравнение (3.2) тождественно удовлетворим, а уравнение (3.1) приводим к следующему разрешающему относительно функции виду

$$\begin{aligned} & \gamma_{11} \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right) + 2\gamma_{12} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} + \gamma_{22} \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial F}{\partial \beta} \right) = \\ & = \frac{1}{c} \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[B \left(B_{0\alpha} \frac{\partial w}{\partial t} - B_{0\beta} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \beta} \left[A \left(B_{0\beta} \frac{\partial v}{\partial t} - B_{0\alpha} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\gamma_{11} = \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}, \quad \gamma_{12} = \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}, \quad \gamma_{22} = \frac{\gamma_{22}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} \quad (3.5)$$

Уравнения (2.11), (3.5), (3.3), на основании принятого выше допущения, будут представлять разрешающую систему уравнений общей двумерной теории магнитоупругости анизотропных тонких оболочек.

На основании граничных условий (2.16) из (3.3) легко получим, что на граничащем контуре Γ срединной поверхности оболочки Ω , функция тока будет постоянной. Но, так как постоянное значение функции F не влияет на величину поверхностного тока (см. (3.3)), следовательно, на контуре Γ можем поставить следующее граничное условие:

$$F(z, \theta, t) = 0 \quad (3.6)$$

FOUNDATIONS OF A GENERAL THEORY OF MAGNETOELASTICITY OF ELECTROCONDUCTING THIN ANISOTROPIC SHELLS

S. O. SARKISIAN

ԷԼԵԿՏՐԱԿՆՈՐԻԻԶ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ԲԱՐԱԿ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ
ՄԱԳՆԻՍՏԱՌԱԳԻԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՏԵՍԻՍԹԻՅԱՆ, ՀԻՄՈՒՆԻՔՆԵՐԸ

Ս. Օ. ՍԱՐԿԻՍԻԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Մ

Տվյալ աշխատանքում դիտարկվում է հիպոթեզների մեթոդով անիզոտրոպ թաղանթների մագնիսաառաձգականության երկչափ տեսության կառուցման խնդիրը և ներկայացվում է անիզոտրոպ բարակ թաղանթների մագնիսաառաձգականության ընդհանուր երկչափ տեսության հիմունքները:

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин — М. Наука, 1977. 272 с.
2. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. — М. Наука, 1974. 115 с.
3. Гузь А. И., Михорг Ф. Г. Акустоэлектромагнитоупругость. Механика сплошных сред и элементов конструкций. — Киев. Наукова думка, 1988. 286 с.
4. Саркисян С. О. Магнитоупругость, проводящих тонких оболочек и пластин. Докторская диссертация. — Казань. Казанский гос. ун-т, 1986. 405 с.
5. Саркисян С. О. К построению в целом двумерной теории колебаний проводящих тонких оболочек методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1985, т. 38, № 6, с. 21—34.
6. Саркисян С. О. Построение асимптотической двумерной теории магнитоупругости.

- проводящих тонких оболочек, находящихся в неоднородном и нестационарном магнитном поле // Нап. АН Арм. ССР. Механика, 1989, т. 42, № 5, с. 25—34.
7. Багдасарян Г. Е. О приведении трехмерной задачи магнитоупругости тонких пластин к двумерной // Уч. зап. Ереванск. ун-та, ест. науки. 1977, № 2, с. 43—48.
 8. Саркисян С. О. К построению в целом двумерной теории колебаний тонкой анизотропной оболочки. методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости // В кн. Материалы второй Всесоюз. конф. «Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов». —Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984, т. 3, с. 130—135.
 9. Саркисян С. О. Построение асимптотической двумерной теории магнитоупругости ортотропных тонких оболочек, находящихся в неоднородном и нестационарном магнитном поле // Механика. Межвуз. сб. науч. трудов.—Ереван, 1991. Изд-во ЕГУ, № 9, с. 25—36.
 10. Цейтлин Л. А. Вихревые токи в тонких пластинах и оболочках // Журнал технической физики. 1969, т. 39, вып. 10, с. 1733—1741.
 11. Астахов В. И., Грудский И. М. Расчет низкочастотных вихревых токов в тонкостенном параллелепипеде // Изв. высших учеб. заведений. Электромеханика. 1989, № 2, с. 5—14.
 12. Тихонов А. И., Самарский А. А. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1972. 736 с.
 13. Саркисян С. О. Вариационное уравнение магнитоупругости проводящих тонких оболочек // Доклады АН Арм. ССР. 1989, т. 89, № 4, с. 181—186.
 14. Саркисян С. О. Уравнение энергии и теорема единственности в магнитоупругости тонких оболочек // Учен. зап. Ереванск. ун-та, естеств. науки.—1985, т. 2, с. 41—46.
 15. Саркисян С. О. Уравнение энергии и теорема единственности в магнитоупругости ортотропных тонких оболочек. Механика // Меж-вуз. сб. науч. трудов—Ереван. Изд-во ЕГУ, 1989, вып. 7, с. 36—61.
 16. Саркисян С. О. Уравнение энергии, теорема единственности и взаимности в двумерной теории магнитоупругости ортотропно упругих и ортотропно проводящих тонких оболочек. Шестой Всесоюз. съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов.—Ташкент: 1986, с. 357.
 17. Саркисян С. О. Теорема взаимности в магнитоупругости тонких оболочек. Механика // Межвуз. сб. науч. трудов—Ереван: Изд-во ЕГУ, 1987, вып. 6, с. 102—110.
 18. Саркисян С. О. Теорема взаимности в магнитоупругости тонких ортотропных оболочек // Докл. АН Арм. ССР. 1987, т. 85, № 3, с. 112—116.

Дзенишаканский политехнический институт

Поступила в редакцию
12.07.1991

ОБ АЛЬТЕРНАТИВНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО
РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА

ГРИГОРЯН Ш. А., ОГЛЕСЯН Г. Г.

Одно из стационарных решений уравнения Кортевега-де Вриза описывает поведение периодической волны в диспергирующей среде. В случае, когда величина параметра нелинейности стремится к единице, периодическая волна преобразовывается в солитон. В данной работе получено ее представление через бесконечную сумму убывающих по амплитуде солитонов в случае, когда величина параметра лежит в интервале $(0,1)$.

1. **Постановка задачи.** Широко известно [1,2], что в газожидкостной смеси без учета ее диссипативных свойств, а также в мелкой воде и плазме распространение слабых ударных волн описывается уравнением Кортевега-де Вриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь α , γ — коэффициенты нелинейности и дисперсии, характеризуемые физико-механическими свойствами среды.

Если решение уравнения (1.1) искать в виде стационарных волн $u = u(\xi)$, $\xi = x - Vt$, где V — скорость фронты волны, то после двукратного интегрирования приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению, правая часть которого представляет собой кубический полином от искомой функции u . Это уравнение интерпретируется [1,2] как уравнение ангармонического осциллятора, описывающего периодическое движение между смежными вещественными нулями кубического полинома. Если полином имеет три вещественных корня $b_1 > b_2 > b_3$, то интегрирование уравнения приводит к ограниченному стационарному решению

$$u(\xi) = b_2 + (b_1 - b_2) \operatorname{ch}^2 \left(\sqrt{\frac{\alpha}{12\gamma}} (b_1 - b_2) \xi, k \right) = \\ = b_2 + \frac{b_1 - b_2}{k^2} \operatorname{dn}^2 \left(\sqrt{\frac{\alpha}{12\gamma}} (b_1 - b_2) \frac{\xi}{k}, k \right) \quad (1.2)$$

которое описывает поведение периодической (кнопдальной) волны с периодом T . Здесь параметр k представляет собой меру (уровень) нелинейности волны, определяемый формулой

$$k^2 = \frac{b_1 - b_2}{b_1 - b_3}, \quad 0 < k < 1, \quad T = 2K(k) \sqrt{\frac{12\gamma}{\alpha(b_1 - b_3)}}$$

В предельном случае, когда $b_1 \rightarrow b_2$, имеем $k \rightarrow 1$. Когда $\operatorname{sn}(z, k) \rightarrow \operatorname{sech} z$ и решение (1.2) асимптотически переходят в решение

$$u(\xi) = b_1 + (b_1 - b_2) \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{\pi}{12\epsilon}} (b_1 - b_2) \xi \right] \quad (1.3)$$

описывающее поведение уединенной волны (солитона). Таким образом, кноидальная волна при $k \rightarrow 1$ преобразуется в солитон с амплитудой $a = b_1 - b_2$.

В общем случае, когда $0 < k < 1$, актуальной становится постановка задачи о представлении решения (1.2) через сумму решений солитонного типа (1.3).

2. Для разрешения поставленной задачи воспользуемся формулой разложения функции $\operatorname{dn}^2(z, k)$ в ряд по параметру Якоби q [3]

$$\operatorname{dn}^2(z, k) = \frac{E(k)}{K(k)} + \frac{2\pi^2}{K^2(k)} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \cos \left(\frac{\pi z}{K} n \right) \\ q = \exp \left[-\pi \frac{K'(k)}{K(k)} \right], \quad K'(k) = K(k_1), \quad k_1 = \sqrt{1 - k^2} \quad (2.1)$$

Здесь $E(k)$ и $K(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Разложение справедливо при выполнении условия,

$$\left| \operatorname{Im} \frac{\pi z}{K(k)} \right| < \operatorname{Re}(-\ln q)$$

которое для вещественных z выполняется всегда. Представим предложенное разложение в виде

$$\operatorname{dn}^2(z, k) = \frac{E(k)}{K(k)} + \frac{\pi^2}{K^2(k)} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\cos \left[n\pi \frac{z}{K(k)} \right]}{\operatorname{sh} \left[n\pi \frac{K'(k)}{K(k)} \right]} = \\ = \frac{E}{K} + \frac{\pi^2}{2K^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \frac{\exp(i\pi n z / K)}{\operatorname{sh}(\pi n K' / K)}, \quad z = \sqrt{\frac{\pi b}{6\gamma}} \xi$$

Для получения всего спектра необходимо включить в ряд значение функции при $n=0$. Вычисляя по правилу Лопиталя, имеем

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\exp(i\pi n z / K)}{\operatorname{sh}(\pi n K' / K)} = \frac{K(k)}{\pi K'(k)} \quad (2.2)$$

Тогда предыдущее представление разложения можно записать как

$$\operatorname{dn}^2(z, k) = \frac{E}{K} - \frac{\pi}{2KK'} + \frac{\pi^2}{2K^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n), \quad n = 2\pi n \quad (2.3)$$

где функция $f(2\pi n)$ определена следующим образом:

$$f(2\pi n) = \begin{cases} K/(2\pi K') & n=0 \\ \frac{2\pi n \exp[i(2\pi n)(z/2K)]}{2\pi \operatorname{sh}[(2\pi n)(K'/2K)]} & n \neq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Используя известное [4] соотношение Лежандра для эллиптических интегралов, разложение (2.3) можно представить в виде

$$\operatorname{dn}^2(z, k) = 1 - \frac{E(k_1)}{K(k_1)} + \frac{\pi^2}{2K^2(k)} \sum_{n=1}^{\infty} f(2\pi n) \quad (2.5)$$

Если $f(2\pi n)$ представляет собой такую непрерывную и непрерывно-дифференцируемую функцию от n , что ряды

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n + t), \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(2\pi n + t); \quad f' = \frac{df}{dn} \quad (2.6)$$

сходятся абсолютно и равномерно для всех значений t из интервала $[0, 2\pi]$, то можно использовать формулу суммирования Пуассона [5], а именно: первый ряд из (2.6) представить в этом интервале в виде сходящегося ряда Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(\tau) e^{-im\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(m) \quad (2.7)$$

Вспоминая определение (2.4) функции $f(2\pi n)$ и вычисляя интеграл в формуле (2.7), получим [6]

$$\begin{aligned} F(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \exp\{i(z/2K(k))\tau\}}{\operatorname{sh}[(K(k_1)/2K(k))\tau]} \exp(-im\tau) d\tau = \\ &= -\frac{K^2(k)}{K^2(k_1)} \operatorname{sech}^2 \left| \frac{\pi}{2K(k_1)} (z - mK(k)) \right| \end{aligned}$$

Тогда, согласно представлению разложения (2.5), решение (1.3) периодической волны перепишется в виде

$$\begin{aligned} u(z) &= b_1 + \frac{2b}{1-k_1^2} \left| 1 - \frac{E(k_1)}{K(k_1)} \right| + \\ &+ \frac{b}{1-k_1^2} \frac{\pi^2}{2K^2(k_1)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left| \frac{\pi}{2} \frac{z - 2mK(k)}{K(k_1)} \right| \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для правомерности использования формулы Пуассона (2.7) необходимо доказать, что $f(2\pi n)$ является непрерывной и непрерывно-дифференцируемой функцией, а ряды (2.6) абсолютно и равномерно сходятся. Доказательства ввиду громоздкости выкладки не приводятся.

Решение (2.8) можно записать в несколько иной форме

$$\begin{aligned} u(z) &= u(k) - \frac{b}{k^2} \frac{\pi}{K(k)K(k_1)} + \frac{b}{k^2} \frac{\pi}{2K^2(k_1)} \left| \operatorname{sech}^2 Bz + \right. \\ &+ \left. \sum_{m=1}^{\infty} [\operatorname{sech}^2 B(z - mT) + \operatorname{sech}^2 B(z + mT)] \right| \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь $u(k)$ — среднее значение, определяемое как

$$u(k) = b_2 + \frac{2b}{k^2} \frac{E(k)}{K(k)}, \quad B = \frac{1}{k} \frac{\pi}{2K(k_1)} \left(\frac{2b}{6\gamma} \right)^{1/2}$$

Такое определение $u(k)$ совпадает с выражением, полученным в [2]. В предельном случае, когда $k \rightarrow 1$ ($k_1 \rightarrow 0$), из решения (2.9) получаем

$$u(\xi) = b_2 + 2b \operatorname{sech}^2 B\xi$$

то есть, как и следовало ожидать, приходим к предельному решению (1.3).

Ввиду того, что, независимо от переменной ξ и параметра k

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \operatorname{sech}^2 B(\xi - mT) \rightarrow 0$$

в решении (2.9) можно ограничиться рассмотрением суммы сколь угодно большого числа N волн. Отметим, что представление стационарного решения уравнения КдВ через бесконечную сумму солитонных решений, в принципе, предложено в [8].

Известно [7], что только при распространении несущего некую информацию импульса в виде солитона она переносится на большие расстояния без искажения и без заметного затухания ее интенсивности. Полученная (2.9) форма записи решения (1.2) дает возможность проследить за поведением периодической волны как возможного носителя такой информации.

В заключение отметим, что, когда $k \ll 1$, разложение (2.1) дает возможность представить периодическое решение (1.3) в виде

$$u(\xi) = u(k) + b \left[\cos \kappa \xi + \frac{k^2}{8} \cos 2\kappa \xi + \frac{3k^4}{256} \cos 3\kappa \xi + O(k^6) \right]$$

Здесь κ — волновое число, связь которого с амплитудой и параметром k определяется соотношением

$$\frac{1}{\kappa^2} = \frac{3\gamma}{2ab} k^2 \left(1 + \frac{k^2}{2} + \frac{11}{32} k^4 \right) + O(k^6)$$

Первые два члена в приведенных разложениях получены в [2].

ON THE ALTERNATIVE PRESENTATION OF PERIODIC SOLUTION OF KORTEVEG-DE VRIES EQUATION

SH. H. GRIGORIAN, G. G. OHANIAN

ԿՈՐՏԵՎԵԳ-ՎԵՐ ԳՐԻԳ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՊԵՐԻՈԴԻԿԱՆ
ԼՈՐԻՄՈՆ ՄԵԿ ԱՅԼ ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Շ. Հ. ԳՐԻԳՐԻԱՆ, Գ. Գ. ՕՀԱՆԻԱՆ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Մ.

Կորտեվեգ-դե Վրիգի հավասարման պարբերական լուծումների մեկը նր-

կարողում է պարբերական ալիքի տարածումը դիսպերսիվ միջավայրում: Երբ այդ ալիքի ոչ զծայնության չափը բնութագրող պարամետրը ձգտում է մեկի, ապա պարբերական ալիքը վերածվում է սոլիտոնի: Տվյալ աշխատանքում երբ վերահիշյալ պարամետրը պատկանում է $(0,1)$ միջակայքին, գտնված է պարբերական ալիքի ներկայացումը անվերջ թվով սոլիտոնների բազմության դոմարի տեսքով, որոնք դասավորված են բառ սմպլիսոտիզայի մեծության նվազմամբ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Икоряков В. Е., Покусая В. Г., Шрейбер И. Р. Распространение волн в твёрдых и жидких средах.—Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1983. 237 с.
2. Карман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах.—М.: Наука, 1973. 176 с.
3. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции.—М.: Наука, 1981. 800 с.
4. Абрамовиц М. и Стиган И. Справочник по специальным функциям. Пер. с англ.—М.: Наука, 1979. 832 с.
5. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. Пер. с англ.—М.: Гостехтеориздат, 1951. 175 с.
6. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы.—М.: Наука, 1986. 800 с.
7. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. Пер. с англ.—М.: Мир, 1983. 136 с.
8. Whitham G. B. Comments on periodic waves and solutions // JMA J. Appl. Math. 1984, № 32, P. 353—366.

Институт математики АН Армении
Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию
30.05.1991