

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ ПРОCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1993

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ В НЕСТАЦИОНАРНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Вагдасарян Г.Է., Плявпосян Г.Т.

Բաղդասարյան Գ.Է., Փիլիփոսյան Գ.Տ. Ոչ ստացիոնար ճազնիսական դաշտում զերիադրողիչ ուղղանկյուն սալի տատանումների մաթեմատիկական մոդելավորումը և հետազոտությունը

Ստացված են ոչ ստացիոնար երկայնական ճազնիսական դաշտում ուղղանկյուն զերիադրողիչ սալի վարքը նկարագրող հավասարումները և եզրային ապամանները: Հետազոտված է ներդաշնակ փոփոխական ճազնիսական դաշտում պարամետրական ռեզոնանսային տատանումների զրոգծան հնարավորությունը: Հետազոտված է զերիադրողիչ սալի լայնական տատանումների իսահակականության վրա հաստատուն ճազնիսական դաշտի ազդեցությունը:

Bagdasarian G.E., Philiposian G.T. Mathematical modeling and investigation of super-conductive rectangular plate vibrations in magnetic field.

Получены уравнение и граничные условия, описывающие поведение сверхпроводящих прямоугольных пластин в нестационарном продольном магнитном поле. На основе решения сформулированной краевой задачи установлена возможность возбуждения резонансных колебаний параметрического типа при помощи периодического во времени магнитного поля и исследованы влияния постоянного магнитного поля на частоты поперечных колебаний сверхпроводящей пластинки.

В работе [1], исходя из основных положений работы [2], предложен асимптотический метод исследования магнитоупругих колебаний идеально проводящих прямоугольных пластин в стационарном магнитном поле. Применением указанного метода и гипотезы Кирхгофа в данной работе получены уравнение и граничные условия, описывающие поведение сверхпроводящих прямоугольных пластин в нестационарном продольном магнитном поле. На основе решения сформулированной краевой задачи установлена возможность возбуждения резонансных колебаний параметрического типа при помощи периодического во времени магнитного поля и исследованы влияния постоянного магнитного поля на частоты поперечных колебаний сверхпроводящей пластинки. Проведен численный анализ зависимости ширины областей динамической неустойчивости от величины амплитуды нестационарного магнитного поля, а также зависимости частоты изгибных колебаний от величины напряженности внешнего постоянного магнитного поля.

1. Пусть упругая изотропная сверхпроводящая прямоугольная пластинка постоянной толщины $2h$ отнесена к декартовой системе координат $x_1x_2x_3$ так, чтобы срединная плоскость недеформированной пластинки совпадала с координатной плоскостью x_1x_2 . Пластинка, края которой неподвижны в своей

плоскости, колеблется во внешнем нестационарном продольном магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{H}_1(H_{01}(t), H_{02}(t), 0)$. Магнитные свойства среды, окружающей пластинку, отождествляются со свойствами вакуума.

Известно, [3] что при помещении сверхпроводящего тела в магнитном поле на тонком поверхностном слое появляются экранирующие токи, препятствующие прониканию магнитного поля внутрь тела. Вследствие этого, на поверхности пластинки тангенциальные компоненты магнитного поля (следовательно, и компоненты тензора напряжений Максвелла) претерпевают разрыв. Этим разрывом обусловлено появление поверхностных сил \vec{q} магнитного происхождения, определяемые формулой [3]

$$\vec{q} = \vec{n} \vec{T} \quad (1.1)$$

где \vec{n} - единичный вектор внешней нормали к деформируемой поверхности пластинки, T - тензор напряжений Максвелла

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} (H_i H_k - \frac{\delta_{ik}}{2} H_m H_m) \quad (1.2)$$

В (1.2) \vec{H} - вектор напряженности магнитного поля в вакууме, который складывается из вектора напряженности магнитного поля \vec{H}_0 , возникающего вследствие помещения недеформируемой пластинки в заданное магнитное поле \vec{H}_0 и вектора напряженности индуцированного магнитного поля \vec{h} , обусловленного деформацией пластинки ($\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$). В силу изложенного, вектор \vec{H}_0 в квазистатическом приближении определяется из решения следующей задачи магнитостатики:

найти решение уравнений Максвелла

$$\text{rot } \vec{H}_0 = 0, \quad \text{div } \vec{H}_0 = 0 \quad (1.3)$$

во внешней области (вне тела пластинки), удовлетворяющее условию

$$\vec{H}_0 \vec{n}_0 = 0 \quad \text{при } (x_1, x_2, x_3) \in S_0 \quad (1.4)$$

на поверхности S_0 недеформируемой пластинки и условию

$$\vec{H}_0 = \vec{H}^0 \quad \text{при } |\vec{r}| \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

на бесконечности.

Часть магнитного давления, действующего на боковой поверхности пластинки, вследствие неподвижности ее краев в своей пластинке, не влияет на напряженно-деформированное состояние пластинки. Поэтому для дальнейшего необходимо иметь значения \vec{q} (следовательно, и значения \vec{H}^0) лишь на лицевых поверхностях пластинки. Определение \vec{H}^0 на основе решения краевой задачи (1.3)-(1.5) для пластин конечных размеров связано с серьезными математическими трудностями. Решение этой задачи в случае пластинки-полосы, когда края пластинки контактируются со сверхпроводящими абсолютно жесткими и неподвижными диафрагмами, получено в работе [4] и показано, что величина \vec{H}^0 , вне некоторого достаточно узкого пограничного слоя, практически совпадает с величиной \vec{H}_0 , являющейся решением (1.3)-(1.5) в случае бесконечной пластинки. Опираясь на приведенные соображения, при определении магнитного давления \vec{q} на лицевых поверхностях, пластинку будем считать бесконечной, то есть при определении величины \vec{q} на поверхностях $x_3 = \pm h$ будем принимать $\vec{H}^0 = \vec{H}_0$. Отметим также, что объемные силы магнитного происхождения в пластинке не возникают, так как магнитное поле не проникает в толщу пластинки. Следовательно, влияние магнитного поля на колебание

сверхпроводящей пластинки осуществляется только при помощи поверхностных сил \vec{q} магнитного происхождения.

Колесания рассматриваемой пластинки под действием магнитного давления \vec{q} будем исследовать на основе теории малых упругих деформаций, принимая гипотезу недеформируемых нормалей. Тогда уравнение колебания пластинки можно представить в следующем виде [5]:

$$D\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - h \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma_{23}^+ + \sigma_{23}^-) \right] = \sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^- \quad (1.6)$$

Здесь w - прогиб, $D = 2Eh^3 / (1 - \nu^2)$ - цилиндрическая жесткость, E - модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона материала пластинки, σ_{13} , σ_{23} , σ_{33} - упругие напряжения. Знаками "+" и "-" здесь и в дальнейшем отмечены значения соответствующих величин на лицевых поверхностях $x_3 = \pm h$ пластинки.

Отметим, что вследствие неподвижности краев пластинки в своей плоскости, в уравнение (1.6) не входят члены типа $T_i \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}$, учитывающие влияния продольных сжимающих усилий T_1 и T_2 магнитного происхождения, действующих на краях пластинки и возникающих за счет разрыва тангенциальных компонент магнитного поля на боковой поверхности пластинки.

Входящие в уравнение (1.6) неизвестные величины σ_{ij}^{\pm} ($i = 1, 2, 3$) определяем, используя условия на поверхностях $x_3 = \pm h$. В силу того, что магнитное поле во внутренней области отсутствует, указанные условия, согласно (1.1), запишутся в виде [4,5]

$$\sigma_{ij} n_j = T_{ij} n_j \quad (1.7)$$

Из (1.7), с учетом (1.2) (в котором $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$, $|\vec{h}| \ll |\vec{H}_0|$) и малости деформаций, после линеаризации имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^+ &= \frac{H_{01}}{4\pi} h_3^+, & \sigma_{23}^+ &= \frac{H_{02}}{4\pi} h_3^+, \\ \sigma_{33}^+ &= -\frac{H_{01}^2 + H_{02}^2}{8\pi} - \frac{H_{01} h_1^+ + H_{02} h_2^+}{4\pi} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Рассматривая систему уравнения (1.6), (1.8), замечаем, что она не замкнута. В нее, кроме изгиба, w пластинки, входят неизвестные граничные значения h_i^{\pm} ($i = 1, 2, 3$) компонент индуцированного в окружающей среде магнитного поля \vec{h} . Их определяем, решая уравнение

$$\text{rot } \vec{h} = 0, \quad \text{div } \vec{h} = 0 \quad (1.9)$$

во внешней области с граничным условием

$$(\vec{H}_0 + \vec{h}) \vec{n} + 0, \quad (x_1, x_2, x_3) \in S \quad (1.10)$$

на поверхности S пластинки и условием затухания магнитных возмущений на бесконечности ($h = 0$ при $|\vec{r}| = \infty$). Заметим, что (1.10) является условием непроникновения магнитного поля внутрь пластинки.

Опираясь на те же соображения, что и при определении магнитного поля \vec{H}_0 недеформированной пластинки, здесь также, при решении задачи (1.9)-(1.10), пластинку будем считать бесконечной. тогда введем потенциальную функцию φ посредством

$$\vec{h} = \nabla\varphi \quad (1.11)$$

задача определения индуцированного магнитного поля \vec{h} , согласно (1.9)-(1.11), после линеаризации сводится к решению следующих задач Неймана в полупространствах $|x_3| > h$:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right|_{x_3 = \pm h} = H_{01} \frac{\partial w}{\partial x_1} + H_{02} \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad (1.12)$$

Решения задач (1.12), исчезающие на бесконечности, имеют вид

$$\varphi = \pm \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} (H_{01} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + H_{02} \frac{\partial w}{\partial \xi_2}) \frac{d\xi_1 d\xi_2}{[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 \pm h)^2]^{3/2}} \quad (1.13)$$

где верхний знак берется при $x_3 < -h$, а нижний - при $x_3 > h$.

Принимая прогиб бесконечной пластинки в виде $w(x_1, x_2, t) = w_0(t) \exp[i(k_1 x_1 + k_2 x_2)]$ где k_1 и k_2 волновые числа, из (1.11)-(1.13) для h_l^{\pm} находим выражения

$$h_l^{\pm} = \frac{1}{k} \frac{\partial h_3^{\pm}}{\partial x_l}, \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad (l = 1, 2)$$

$$h_3^+ = h_3^- = H_{01}(t) \frac{\partial w}{\partial x_1} + H_{02}(t) \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad (1.14)$$

Подставляя (1.14) в (1.8), определяем неизвестные величины $\sigma_{E_3}^{\pm}$, а с их помощью из (1.6) получаем следующее уравнение магнитоупругих косбаний сверхпроводящей пластинки в продольном нестационарном магнитном поле:

$$D\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1 + kh}{2\mu k} [H_{01}^2(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2H_{01}(t)H_{02}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + H_{02}^2(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}] = 0 \quad (1.15)$$

в которое входят неизвестные волновые числа k_1 и k_2 . К уравнению (1.15) в каждой конкретной задаче необходимо присоединить условия закрепления краев пластинки.

На основе уравнения (1.15) рассмотрим вопросы влияния постоянного магнитного поля на частоты колебания пластинки и возможность возбуждения резонансных колебаний параметрического типа при помощи периодического во времени магнитного поля.

2. Рассмотрим магнитоупругие колебания прямоугольной в плане сверхпроводящей пластинки со сторонами a_1 и a_2 в продольном магнитном поле $\vec{H}_0(H_0, 0, 0)$, где $H_0 = \text{const}$.

Уравнение колебаний пластинки (1.15) для рассматриваемого случая имеет вид

$$D\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad \gamma = \frac{1 + kh}{2\mu k} H_0^2 \quad (2.1)$$

которое совпадает с уравнением магнитоупругих колебаний идеально проводящих пластин в случае продольного магнитного поля [1]

Подстановкой $w(x_1, x_2, t) = W(x_1, x_2) \exp(i\omega t)$, где ω -частота магнито-

упругих колебаний, уравнение (2.1) приводится к виду

$$D\Delta^2 W - \gamma \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} - 2\rho h \omega^2 W = 0 \quad (2.2)$$

в котором, как и в (2.1), входят неизвестные волновые числа k_1 и k_2 . Эти величины и частоты магнитоупругих колебаний ω можно найти путем применения асимптотического метода, развитого в работах [1,2,6]

Уравнение (2.2) указанным асимптотическим методом решено в работах [1,6] и получена следующая формула для определения частоты магнитоупругих колебаний:

$$\omega^2 = \frac{D}{2\rho h} \left[(k_1^2 + k_2^2)^2 + \frac{k_1^2 H_0^2}{2\pi D} \left(h + \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \right) \right] \quad (2.3)$$

Кроме формулы (2.3) в указанных работах получены также трансцендентные уравнения относительно k_1 и k_2 . Эти уравнения, в отличие от формулы (2.3), различны для различных граничных условий и форм колебаний. Не вдаваясь в подробности, приведем [6] окончательные трансцендентные уравнения, определяющие величины k_1 и k_2 , при следующих условиях закрепления краев пластинки.

1) Пластика жестко зашкреплена по контуру. Тогда, в зависимости от симметрии (по отношению координатных осей α_1 и α_2) форм магнитоупругих колебаний для определения k_1 и k_2 получены следующие уравнения:

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha_1 k_1}{2} = -(1 + \alpha + 2\beta_1^2)^{-1/2}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha_2 k_2}{2} = -(1 + 2\beta_2^2)^{-1/2} \quad (2.4)$$

для симметричных в обеих формах колебаний, и

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_1 k_1}{2} = (1 + \alpha + 2\beta_1^2)^{-1/2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha_2 k_2}{2} = (1 + 2\beta_2^2)^{-1/2} \quad (2.5)$$

для антисимметричных в обоих направлениях форм колебаний.

В (2.4), (2.5) приняты обозначения

$$\alpha = \frac{H_0^2 (1 + \sqrt{k_1^2 + k_2^2})}{2\pi D k_1^2 \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, \quad \beta_1 = \frac{k_2}{k_1}, \quad \beta_2 = \frac{k_1}{k_2} \quad (2.6)$$

Для остальных смешанных форм колебаний уравнения относительно k_1 и k_2 получаются из приведенных, комбинируя соответствующим образом одно из уравнений (2.4) с другим (2.5).

2) Пластика шарнирно закреплена по контуру. В этом случае для k_1 и k_2 получены выражения

$$k_1 = \frac{m\pi}{a_1}, \quad k_2 = \frac{n\pi}{a_2} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.7)$$

3) Пластика упруго закреплена по контуру. Для этого случая волновые числа k_1 и k_2 являются решениями следующих уравнений:

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha_1 k_1}{2} = -\left[\sqrt{1 + \alpha + 2\beta_1^2} + \frac{2Dk_1}{\delta} \left(1 + \frac{\alpha}{2} + \beta_1^2 \right) \right]^{-1},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha_2 k_2}{2} = -\left[\sqrt{1 + 2\beta_2^2} + \frac{2Dk_1}{\delta} (1 + \beta_2^2) \right]^{-1} \quad (2.8)$$

для симметричных форм колебаний, и

$$\operatorname{tg} \frac{a_1 k_1}{2} = [\sqrt{1 + \alpha + 2\beta\zeta} + \frac{2Dk_1}{\delta} (1 + \frac{\alpha}{2} + \beta\zeta)]^{-1},$$

$$\operatorname{tg} \frac{a_2 k_2}{2} = [\sqrt{1 + 2\beta\zeta} + \frac{2Dk_1}{\delta} (1 + \beta\zeta)]^{-1} \quad (2.9)$$

для антисимметричных форм колебаний.

В уравнениях (2.8) и (2.9) δ - коэффициент жесткости упругого защемления. При $\delta = \infty$ эти уравнения совпадают с уравнениями (2.4) и (2.5) для защемленной пластинки, а при $\delta = 0$ из них получаются решения (2.7) для шарнирно опертой пластинки.

Соответствующим образом комбинируя приведенные уравнения (2.4)-(2.9), можно получить уравнения относительно волновых чисел k_1 и k_2 для других видов опорного закрепления. Например, если края $x_1 = 0$ и $x_1 = a_1$ жестко защемлены, а края $x_2 = 0$ и $x_2 = a_2$ шарнирно оперты, то в случае симметричных колебаний из (2.4) и (2.5) имеем

$$\operatorname{ctg} \frac{a_1 k_1}{2} = -(1 + \alpha + 2\beta\zeta)^{-1/2}, \quad k_2 = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Из (2.4)-(2.9) видно, что величины волновых чисел k_1 и k_2 зависят от напряженности внешнего магнитного поля. Как показана в работе [1], указанная зависимость является существенной в случае тонких пластинок и имеет более ощутимое влияние на частоты низших форм колебаний.

Таким образом, для каждого типа колебаний имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными волновыми числами k_1 и k_2 . Находя эти величины, по формуле (2.3) определяем соответствующую частоту магнитоупругих колебаний.

На основе формулы (2.3) и уравнений (2.4)-(2.7) произведены численные расчеты первых трех ($n = 1, 2, 3$) относительных расчет ω_m / ω_{om} магнитоупругих колебаний удлиненной пластинки ($a_2 = \infty$), совершающей колебания по цилиндрической поверхности ($k_2 = 0$) с образующими параллельными оси α_2 . Здесь ω_{om} - частоты собственных колебаний в отсутствие магнитного поля, найденные асимптотическим методом [2]. Для расчета принято $E = 7,3 \cdot 10^{11}$ дин/см², $\nu = 0,34$ (дюралюминиевая пластинка), $H_0 = 10^4$ ч. Результаты численных решений приведены в таблице, где данные над чертой относятся к случаю шарнирно опертой по сторонам $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ пластинки, а под чертой к защемленной пластинке.

Рассматривая таблицу, замечаем, что наличие магнитного поля может привести к существенному увеличению частот низших форм колебаний и это влияние намного усиливается с уменьшением относительной толщины пластинки. Легко заметить также, что чем выше форма колебаний и чем жестче закреплены края пластинки, тем меньше влияние магнитного поля.

Переходим к рассмотрению поведения сверхпроводящей прямоугольной пластинки в нестационарном магнитном поле, вектор напряженности которого направлен по оси α_1 , то есть при $H_{02}(t) = 0$. В этом случае уравнение колебания пластинки, согласно (1.15), имеет вид

$$D\Delta^2 w + 2\mu h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1 + kh}{2\mu k} H_{01}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \quad (3.1)$$

Волновые числа k_1 и k_2 , входящие в уравнение (3.1), в зависимости от типа граничных условий на контуре пластинки, будем определять из уравнений (2.4)-(2.9), полученных в предыдущем пункте при рассмотрении магнитоупругих колебаний в постоянном продольном магнитном поле.

Т А Б Л И Ц А

	$2h/a_1 = 10^{-1}$			$2h/a_1 = 0,5 \times 10^{-2}$		
	$r=0,5$	$r=1,0$	$r=3,0$	$r=0,5$	$r=1,0$	$r=3,0$
$m=1$	1,69 1,16	2,91 1,57	8,26 4,23	3,99 2,01	7,79 3,65	23,2 10,46
$m=2$	1,11 1,04	1,39 1,17	3,07 1,95	1,67 1,33	2,91 2,03	8,26 5,73
$m=3$	1,03 1,02	1,13 1,16	1,87 1,36	1,25 1,12	1,79 1,46	4,57 3,20

На основе (3.1) рассмотрим колебания шарнирно опертой по всему контуру прямоугольной пластинки. Тогда, согласно (2.7), для волновых чисел k_1 и k_2 имеем: $k_1 = m\pi/a_1$, $k_2 = n\pi/a_2$ ($m, n = 1, 2, 3, \dots$). Представляя решение рассматриваемой задачи в виде

$$w = f_{mn}(t) \sin(\lambda_m x_1) \sin(\nu_n x_2), \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a_1}, \quad \nu_n = \frac{n\pi}{a_2}$$

удовлетворим известным условиям шарнирного опирания, а из уравнения (3.1), для определения неизвестных функций $f_{mn}(t)$, получим следующие линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами:

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \omega_{mn} [1 + a_{mn}(t)] f_{mn} = 0 \quad (3.2)$$

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D}{2\rho h} (\lambda_m^2 + \nu_n^2)^2$$

$$a_{mn}(t) = \frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + \nu_n^2)^2} \left[h + \frac{1}{\sqrt{\lambda_m^2 + \nu_n^2}} \right] \frac{H_0^2(t)}{2\tau D} = \gamma_{mn} H_0^2(t)$$

где ω_{mn} - частоты собственных колебаний пластинки в отсутствии магнитного поля.

Для выявления влияния нестационарности магнитного поля на колебания пластинки рассмотрим случай периодического во времени магнитного поля: $H_0(t) = H_0 + H_1 \cos(\theta t)$. Тогда уравнения (3.2) примут вид:

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \Omega_{mn}^2 (1 + \mu_{mn}^{(1)} \cos(\theta t) + \mu_{mn}^{(2)} \cos(2\theta t)) f_{mn} = 0 \quad (3.3)$$

где

$$\Omega_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 \left[1 + (H_0^2 + \frac{1}{2} H_1^2) \gamma_{mn} \right]$$

$$\mu_{mn}^{(1)} = \frac{H_0 H_1 \gamma_{mn}}{1 + (H_0^2 + \frac{1}{2} H_1^2) \gamma_{mn}}$$

$$\mu_{mn}^{(2)} = \frac{H_1^2 \gamma_{mn}}{4 \left[1 + (H_0^2 + \frac{1}{2} H_1^2) \gamma_{mn} \right]} \quad (3.4)$$

В (3.4) Ω_{mn} - частоты поперечных магнитоупругих колебаний пластинки, $\mu_{mn}^{(1)}$ и $\mu_{mn}^{(2)}$ - коэффициент возбуждения, причем $\mu_{mn}^{(1)} < 1$ и $\mu_{mn}^{(2)} < 1$.

Каждое уравнение (3.3) имеет периодические коэффициенты и, как известно [1] при некоторых соотношениях между его коэффициентами оно имеет не-

ограниченно возрастающие во времени решения, означающие динамическую неустойчивость рассматриваемой магнитоупругой системы. Таким образом, присутствие периодического во времени магнитного поля может привести к возбуждению резонансных колебаний параметрического типа в сверхпроводящей пластинке с достаточно широкими областями неустойчивости (фиг.1).

Границы областей динамической неустойчивости θ_* , расположенных вблизи частот $2\Omega_{mn}$ и Ω_{mnp} согласно [7] определяются следующими формулами: для области, расположенной около частоты

$$\theta_{\mp}^{\pm} = 2\omega_{mn} \left[1 + (H_0^2 + \frac{1}{2} H_1^2) \gamma_{mn} \pm H_0 H_1 \gamma_{mn} \right]^{1/2} \quad (3.5)$$

для области, расположенной около частоты

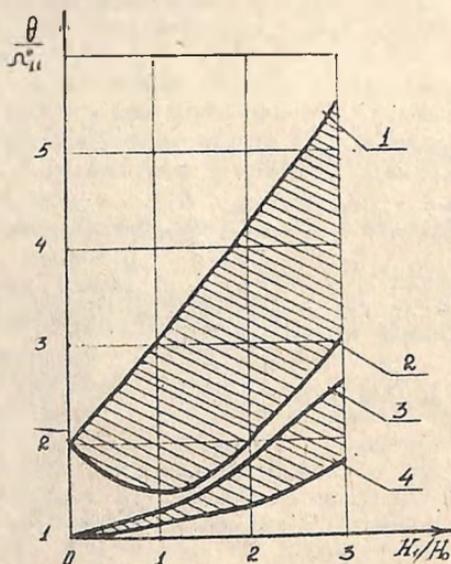
$$\theta_{\mp}^{\pm} = \omega_{mn} \left[1 + (H_0^2 + \frac{1}{2} H_1^2) \gamma_{mn} \pm \frac{1}{4} H_1^2 \gamma_{mn} \right]^{1/2} \quad (3.6)$$

На фиг.1 (где Ω_{01} - первая частота магнитоупругих колебаний квадратной пластинки в постоянном продольном магнитном поле \vec{H}_0) показаны области динамической неустойчивости для квадратной ($a_1 = a_2 = a$) дюралюминиевой пластинки при $m = n = 1$, $H_0 = 2 \times 10^3$ э, $a/2h = 5 \times 10^2$. Кривые 1 и 2 построены по уравнению (3.5), а кривые 3 и 4 - по уравнению (3.6). Из формул (3.5), (3.6) и построенной на их основе фигуры следует, что:

а) при любом $H_1 \neq 0$ возможно появление параметрического резонанса (при $H_1 = 0$, как и следовало ожидать, параметрический резонанс невозможен);

б) ширины $(\theta_+^{\pm} - \theta_-^{\pm})$ обеих областей неустойчивости являются возрастающими функциями амплитуды H_1 нестационарной части внешнего магнитного поля;

в) при фиксированном H_1 ширина области (3.5) является монотонно возрастающей, а ширина области (3.6) - монотонно убывающей функцией постоянной составляющей H_0 заданного магнитного поля, причем когда $H_0 = 0$, то возбуждение параметрического резонанса вблизи частот $2\Omega_{mn}$ невозможно.



фиг. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г. Е. Применение асимптотического метода В. В. Болотина для исследования магнитоупругих колебаний идеально проводящих прямоугольных пластин. - Проблемы машиностроения, 1986, вып. 25, с. 63-68.
2. Болотин В. В. Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинки. - Инженерный сборник, 1961, т. 31, с. 3-14.

3. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. *Электродинамика сплошных сред.* - М.: Наука, 1982. 620 с.
 4. Багдасарян Г. Е. *Бесконтактный способ возбуждения резонансных колебаний в сверхпроводящей пластинке.* - Изв. АН Арм. ССР, *Механика*, 1989, т. 42, № 6, с. 3-9.
 5. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. *Магнитопуп уагьт րոնիկ սալոնեկ և ևլաստին.* - М.: Наука, 1977, 272 с.
 6. Багдасарян Г. Е. *Колебания прямоугольной проводящей пластинки в продольном магнитном поле.* - Изв. АН Арм. ССР, *Механика*, 1987, т. 40, № 3, с. 11-18.
 7. Болотин В. В. *Динамическая устойчивость упругих систем.* - М.: Гостехиздат, 1956, 600 с.
- Ереванский университет. Поступила в редакцию 09.07.1992

Ереванский Государственный Университет
Поступила в редакцию 09.07.1992

К УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВОЙ АРКИ ПОД ШТАМПОМ

Մովսեսյան Լ. Ա.

Սովորության Լ. Ա. Շրջանաձև կամարի կայունության ճաշիճ դրոշմի դեպքում

Ուսումնասիրվում է ազատ ինքնավար կամարի կայունությունը, երբ որոշի ժրգորով փորձանքով կենտրոնացված ուժի տակ Գաջվի 1 ասեմված ընդլայնական սահորը կայունության իսկանակարունճնորուն ասեկա է ճաշնական սահոր ուժը կորստիկանան ուժը սեղազիսա է կախված կամարի կորություննից և կամարի իսկան անկյուննից

Movsesyan L.A. On stability of round arch under a stamp

Исучается устоячивость свободно опертой круговой арки под сосредоточенной силой, передаваемой на нос через жесткий штамп. Учигывается поперечный сдвиг. Получена критическая сила в зависимости от радиуса кривизны и угла контакта штампа.

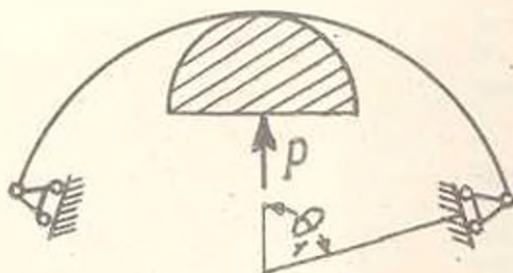
В [1] показано, что шарнирно опертая арка (бесконечная панель) теряет устоячивость при внутренних нагрузках, если учесть, что начальное напряженно-

деформированное состояние моментное (что и есть на самом деле) и уравнения этого состояния решаются точно. В моментной постановке начального состояния исследуется и настоящая задача с учетом начальной перерезывающей силы в уравнениях устоячивости. Подобная задача для упругого и вязкоупругого кольца рассмотрена в [2], но задача не доведена до числовых результатов.

По известной причине [3] учигывается поперечный сдвиг принимается гипотеза недеформируемой прямой.

1. Пусть имеется круговая арка с шарнирно-опертыми краями. В центре ее с внутренней (вогнутой) стороны расположен симметричный штамп и сосредоточенная сила приложена по оси симметрии штампа (фиг.1).

Предполагается, что под штампом возникает только нормальное давление



фиг. 1.

(трение отсутствует).

Тогда продольная и поперечная силы, а также изгибающий момент определяются следующим образом [1]

$$\begin{aligned} T^0 &= C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + R \int_0^{\theta} q(\psi) \sin(\theta - \psi) d\psi \\ N^0 &= C_1 \sin \theta - C_2 \cos \theta - R \int_0^{\theta} q(\psi) \cos(\theta - \psi) d\psi \\ M^0 &= -R [C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + R \int_0^{\theta} q(\psi) \sin(\theta - \psi) d\psi] + C_3 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где C_1 - постоянные интегрирования, а q - неизвестное нормальное давление под штампом.

Из условий $N^0 = 0$ при $\theta = 0$ (условие симметрии) и $T^0 = 0, M^0 = 0$ при $\theta = \theta_1$, получаем:

$$C_2 = C_3 = 0, C_1 = -\frac{R}{\cos \theta_1} \int_0^{\theta_1} q(\psi) \sin(\theta_1 - \psi) d\psi \quad (1.2)$$

Соотношения упругости, которые имеют вид

$$N^0 = k^2 G R (\psi_0 + \frac{dw_0}{R d\theta}), M^0 = EJ \frac{d^2 \psi_0}{R d\theta^2} \quad (1.3)$$

(здесь k^2 - константа, характеризующий закон изменения сдвигающего напряжения по толщине арки), дают возможность определить ψ_0 и w_0 . Если через $R_1(\theta)$ обозначить радиус кривизмы штампа, то изменение кривизмы арки под штампом выразится через R и R_1 следующим образом:

$$\frac{1}{R^2} \frac{d^2 w_0}{d\theta^2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \quad (1.4)$$

Давление $q(\theta)$ определяется на основании (1.1)-(1.4) из следующего уравнения:

$$C_1 \cos \theta + R \int_0^{\theta} q(\psi) \sin(\theta - \psi) d\psi \cdot \gamma = Q(\theta) \quad (1.5)$$

$$\text{где } Q = \frac{EJ}{R} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right), \gamma = \frac{R}{\alpha^2}, \alpha^2 = \frac{k^2 GFR^2}{EJ}.$$

Решением уравнения (1.5) будет

$$\gamma q = C_1 \operatorname{ch}(\alpha \theta) - Q(\theta) - \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} \int_0^{\theta} Q(\psi) \operatorname{sh}(\alpha(\theta - \psi)) d\psi \quad (1.6)$$

При получении (1.7) принимаем $1 - \frac{1}{\alpha^2} = 1$.

Неизвестный интервал контакта $[-\theta_0, \theta_0]$ определяется из условия

$$P = 2R \int_0^{\theta_0} q(\psi) \cos \psi d\psi \quad (1.7)$$

2. Для рассмотрения задачи устойчивости удобнее вместо θ выбрать новую координату $\tau = \theta_1 - \theta$. Уравнениями устойчивости в перемещениях будут:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{dw}{dt} + c^2 \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \frac{R}{EF} N^0 \frac{d\psi}{dt} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + w + c^2 \frac{d^3 \psi}{dt^3} + \frac{R}{EF} T^0 \frac{d\psi}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = c^2 \left(\psi + \frac{1}{R} \frac{dw}{dt} \right), \quad c^2 = \frac{I}{FR^2} \quad (2.1)$$

На основании предыдущего начальные силы T^0 и N^0 определяются:

$$N^0 = -\frac{dT^0}{d\theta}, \quad T^0 = \begin{cases} C_1 \cos \theta + R \int_0^\theta \varphi \sin(\theta - \varphi) d\varphi, & 0 \leq \theta \leq \theta_0 \\ C_1 \cos \theta, & \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \end{cases} \quad (2.2)$$

Перейдя в (2.2) от θ к ζ представим их к виду рядов:

$$T^0 = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(\lambda_m \zeta), \quad N^0 = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sin(\lambda_m \zeta), \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{l} \quad (2.3)$$

Решение (2.1) также ищем в виде рядов:

$$w = \sum_{l=1}^{\infty} f_l^{(1)} \sin(\lambda_l \zeta), \quad v = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^{(2)} \cos(\lambda_l \zeta), \quad \psi = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^{(3)} \cos(\lambda_l \zeta) \quad (2.4)$$

удовлетворяющим граничным условиям шарнирного опирания. Тогда для $f_l^{(i)}$ получим алгебраическую однородную систему [1]. Из условия разрешимости этой системы получим значение критической силы (минимальное собственное значение матрицы системы).

Для выяснения изменения критической силы от радиуса кривизны штампа и интервала его контакта, в качестве примера рассмотрена арка углом раствора $\pi/2$ ($\theta_1 = \pi/4$) под круговым штампом ($R_1 = const$).

Ниже приведена таблица для относительной критической силы с указанием относительного радиуса (R/R_1) и угла контакта, при которых достигается данная критическая сила ($\bar{P}_{kp} = P_{kp} R^2 / EI$)

ТАБЛИЦА

\bar{P}_{kp}	20.82	26.05	26.89	27.81
R/R_1	115	75	50	40
θ_0	5°	10°	15°	20°

Как видно из таблицы, с уменьшением радиуса штампа критическая сила уменьшается и в пределе должна быть получена задача устойчивости при сосредоточенной силе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л. А. К устойчивости цилиндрической круговой панели. - Изв. АН Арм. ССР. Математика, 1984, т. 37, № 1, с. 16-22.

2. Мовсисян Л. А. Упругая и вязкоупругая устойчивость кругового кольца под штампами. - *Механика (межуз. сб. науч. тр.)*, Ереван, 1986, вып. 4, с. 36-42.

3. Григорян Э. М., Толкачев В. Н. Контактные задачи теории пластичности оболочек. - М.: Машинное строительство, 1980, 415 с.

Институт механики АН Армении
Поступила в редакцию 7.07.1992



$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^a \int_0^b \left[D_1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu_2 D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right. \\
 &\quad \left. + D_2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_0 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy dt \\
 T &= \frac{h\nu}{2g} \int_0^T \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dx dy dt \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

Количество энергии, затраченное на формирование управляющего воздействия $f(t, x, y)$, можно охарактеризовать (оценить) функционалом

$$J = \int_0^T \int_0^a \int_0^b [f(t, x, y)]^2 dx dy dt \quad (1.4)$$

Пусть усилия $f(t, x, y)$ сообщают в момент $t=0$ следующие прогибы и скорости:

$$W(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial W(t, x, y)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x, y) \quad (1.5)$$

Задача 1.1. Требуется определить внешнюю нагрузку $f(t, x, y)$ так, чтобы при некотором конечном $t=T > 0$ пластинку из заданного начального состояния (1.5) перевести в состояние

$$W(T, x, y) = 0, \quad \frac{\partial W(t, x, y)}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0 \quad (1.6)$$

с соблюдением граничных условий (1.2), минимизируя при этом функционал (1.3)-(1.4)

$$H = T + V + J \quad (1.7)$$

характеризующий полную энергию системы.

Вводя независимую переменную τ по формуле $\tau = t\sqrt{\frac{g}{h\nu}}$ и сохраняя за новой переменной старое обозначение, уравнение (1.1) приведем к виду:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \Delta \Delta W = f(t, x, y), \quad \Delta \Delta = D_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2D_2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (1.8)$$

В случае, когда $f(t, x, y) = 0$ собственные числа и собственные функции краевой задачи (1.8), (1.2) известны

$$\lambda_{km}^2 = \pi^4 \left(D_1 \frac{k^4}{a^4} + 2D_2 \frac{k^2 m^2}{a^2 b^2} + D_2 \frac{m^4}{b^4} \right),$$

$$\theta_{km}(x, y) = \sin \left(\frac{k\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{m\pi}{b} y \right), \quad k, m = 1, 2, 3, \dots$$

Эта система собственных функций является полной в пространстве $L_2((0, a) \times (0, b))$.

Исходя из граничных условий (1.2), решение уравнения (1.8), а также задачи 1.1 целесообразно искать в виде

$$W(t, x, y) = \sum_{k, m=1}^{\infty} W_{km}(t) \sin \left(\frac{k\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{m\pi}{b} y \right)$$

$$W_{km}(t) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b w(t, x, y) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dx dy$$

$$f(t, x, y) = \sum_{k,m=1}^{\infty} u_{km}(t) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

$$u_{km}(t) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(t, x, y) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dx dy \quad (1.9)$$

Подставив теперь разложение (1.9) в уравнение (1.8), для неизвестных коэффициентов $W_{km}(t)$ и $u_{km}(t)$ получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 W_{km}}{dt^2} + \lambda_{km}^2 W_{km} = u_{km}, \quad k, m = 1, 2, 3, \dots \quad (1.10)$$

Из начальных условий (1.5) следует, что

$$W_{km}(0) = \varphi_{km}, \quad \frac{dW_{km}}{dt}(0) = \psi_{km}$$

$$\varphi_{km} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \varphi(x, y) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dx dy$$

$$\psi_{km} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \psi(x, y) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dx dy, \quad k, m = 1, 2, 3, \dots \quad (1.11)$$

Условия (1.6), с учетом полноты системы собственных функций, приводятся к следующим равенствам:

$$W_{km}(T) = 0, \quad \frac{dW_{km}}{dt}(T) = 0, \quad k, m = 1, 2, 3, \dots \quad (1.12)$$

Подставив теперь в (1.7) разложения (1.9), получим

$$\begin{aligned} H = T + V + J &= \frac{ab}{8} \sum_{k,m=1}^{\infty} \int_0^{T_0} [(\frac{dW_{km}}{dt})^2 + \lambda_{km}^2 W_{km}^2 + u_{km}^2] dt \\ &= \frac{ab}{8} \sum_{k,m=1}^{\infty} H_{km} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Возможность почленного дифференцирования и интегрирования рассмотренных рядов будет установлена ниже. Ввиду того, что каждое уравнение системы (1.10) не зависит от других уравнений этой системы, а функционал

$$H_{km} = \int_0^{T_0} [(\frac{dW_{km}}{dt})^2 + \lambda_{km}^2 W_{km}^2 + u_{km}^2] dt \geq 0 \quad (1.14)$$

зависит только от управления $u_{km}(t)$, то минимизация функционала (1.13) эквивалента минимизации каждого из независимых функционалов (1.14). Таким образом, задача 1.1 приводится к задаче оптимального управления системой (1.10), (1.14) с начальными и конечными условиями (1.11), (1.12) в пространстве $L_2(0, T_0)$.

2. Поскольку задача оптимального управления системой (1.10), (1.14) в пространстве $L_2(0, T_0)$ неразрешима, то заменим ее эквивалентной вариационной задачей.

Подставим выражение (1.10) для $w_{km}(t)$ в функционал

$$\begin{aligned}
 H_{km} &= \int_0^{T_0} \left[\left(\frac{dW_{km}}{dt} \right)^2 + \lambda_{km}^2 W_{km}^2 + \mu_{km}^2 \right] dt \\
 &= \int_0^{T_0} F_{km}(W_{km}, \frac{dW_{km}}{dt}, \frac{d^2W_{km}}{dt^2}) dt
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

и вместо соответствующей задачи оптимального управления рассмотрим задачу на экстремум функционала (2.1) при следующих закрепленных граничных условиях:

$$\begin{aligned}
 W_{km}(0) &= \psi_{km}, \quad \frac{dW_{km}(0)}{dt} = \psi'_{km}, \\
 W_{km}(T_0) &= 0, \quad \frac{dW_{km}(T_0)}{dt} = 0
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Необходимое условие экстремума приводит к уравнению Эйлера-Пуассона (2.1 с.345)

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{dF_{km}}{dW_{km}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{dF_{km}}{d\dot{W}_{km}} \right) + \frac{dF_{km}}{dW_{km}} &= 0 \\
 W_{km} + (2\lambda_{km}^2 - 1)W_{km} + \lambda_{km}^2(\lambda_{km}^2 + 1)W_{km} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

а его интегральные кривые являются экстремалиями рассматриваемой вариационной задачи (2.1), (2.2).

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
 \theta(\nu, E, G, a, b, h) &= \\
 &= \frac{\epsilon(1 - \nu_1 \nu_2)}{k^2 k^4 \left[\epsilon_1 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu_2^2}{2^2 b^2} \right) + \frac{4\epsilon_2(1 - \nu_1 \nu_2)}{d^2 k^2} + \epsilon_2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\nu_1^2}{2^2 k^2} \right) \right]}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Пусть параметры, характеризующие пластинку, таковы, что $\theta(\nu, E, G, a, b, h) < 1$. Тогда корни характеристического уравнения, соответствующей (2.3), будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \mu_{km} &= \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - 2\lambda_{km}^2} + 2\lambda_{km} \sqrt{\lambda_{km}^2 + 1} \right) \\
 &\pm i \sqrt{-1 + 2\lambda_{km}^2 + 2\lambda_{km} \sqrt{\lambda_{km}^2 + 1}} = \pm \frac{1}{2} (\alpha_{km} \pm i\beta_{km})
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Очевидно, что $\frac{\alpha_{km}}{\beta_{km}} < 1$, а $\lim_{k, m \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{km}}{\beta_{km}} = 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{1 - 2x^2} + 2x\sqrt{x^2 + 1}$ при $x \in \mathbb{R}^+$. Для всех $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) > 0$, а $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sqrt{2}$, то есть функция $f(x)$ в \mathbb{R}^+ монотонно возрастая, стремится к пределу $\sqrt{2}$, $1 \leq f(x) < \sqrt{2}$. Теперь нетрудно заметить, что при $x \neq 0$, $x = \lambda_{km}$, $f(\lambda_{km}) = \alpha_{km}$, то есть $\lim_{k, m \rightarrow \infty} \alpha_{km} = \sqrt{2}$, $1 < \alpha_{km} < \sqrt{2}$, при любых $k, m = 1, 2, 3, \dots$

Общее решение уравнения (2.3) имеет вид:

$$W_{km}(t) = \exp(\alpha_{km} t) \left(c_{km}^{(k,m)} \cos(\beta_{km} t) + c_{km}^{(k,m)} \sin(\beta_{km} t) \right)$$

$$+ \exp(-\alpha_{km}t) (c_3^{(k,m)} \cos(\beta_{km}t) + c_4^{(k,m)} \sin(\beta_{km}t)) \quad (2.6)$$

где $c_j^{(k,m)}$, $(j = \overline{1,4})$ определяются из граничных условий (2.2).

Вычислим определитель системы линейных неоднородных алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять постоянные $c_j^{(k,m)}$.

$$\Delta_{km} = 2(\operatorname{ch}(2T_0 \alpha_{km}) - 1) - \frac{\alpha_{km}^2}{\beta_{km}^2} \sin^2(\beta_{km} T_0) - \frac{\alpha_{km}}{\beta_{km}} \sin(2\beta_{km} T_0) \exp(-2\alpha_{km} T_0) \quad (2.7)$$

Покажем, что всегда можно добиться, чтобы $\Delta_{km} \neq 0$ для любых $k, m = \overline{1, +\infty}$. Для этого оценим выражение (2.7):

$$\Delta_{km} > \bar{\Delta}_{km} = 2(\operatorname{ch}(2T_0 \alpha_{km}) - 1) - 2 \left(\frac{\alpha_{km}}{\beta_{km}} + 2 \frac{\alpha_{km}^2}{\beta_{km}^2} \right)$$

Последовательность $\{\bar{\Delta}_{km}\}_{k,m=1}^{\infty}$ является монотонно-возрастающей ограниченной сверху, а

$$\lim_{k,m \rightarrow \infty} \bar{\Delta}_{km} = 2(\operatorname{ch}(2\sqrt{2} T_0) - 1) > 0$$

Теперь, если выполнено условие $\bar{\Delta}_{11} \geq 0$, то очевидно, что $\Delta_{km} \neq 0$ для любых $k, m = \overline{1, +\infty}$ а если нет, то потребуем его выполнения

$$\operatorname{ch}(2T_0 \alpha_{11}) \geq 1 + \frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}} + 2 \frac{\alpha_{11}^2}{\beta_{11}^2} \quad (2.8)$$

Условию (2.8) всегда можно удовлетворить соответствующим выбором времени управления T_0 .

Итак,

$$c_1^{(k,m)} = - \left[(1 - \exp(-2\alpha_{km} T_0)) \beta_{km}^2 + 2\alpha_{km}^2 \sin^2(\beta_{km} T_0) + \alpha_{km} \beta_{km} \sin(2\beta_{km} T_0) \right] \frac{\psi_{km}}{\beta_{km}^2 \Delta_{km}} - 2\alpha_{km} \sin^2(\beta_{km} T_0) \frac{\psi_{km}}{\beta_{km} \Delta_{km}},$$

$$c_2^{(k,m)} = - \left[\alpha_{km}^2 \sin(2\beta_{km} T_0) - \alpha_{km} \beta_{km} \exp(-2\alpha_{km} T_0) + \alpha_{km} \beta_{km} \cos(2\beta_{km} T_0) \right] \frac{\psi_{km}}{\beta_{km}^2 \Delta_{km}},$$

$$+ \left[\alpha_{km} \sin(2\beta_{km} T_0) - \beta_{km} (1 - \exp(-2\alpha_{km} T_0)) \right] \frac{\psi_{km}}{\beta_{km}^2 \Delta_{km}},$$

$$c_3^{(k,m)} = \varphi_{km} - c_1^{(k,m)},$$

$$c_4^{(k,m)} = \frac{1}{\beta_{km}} \left[\alpha_{km} \varphi_{km} + \psi_{km} - 2\alpha_{km} c_1^{(k,m)} - \beta_{km} c_2^{(k,m)} \right] \quad (2.9)$$

$$W_{km}(t) = \left[(\exp(\alpha_{km}t) - \exp(-\alpha_{km}t)) \cos(\beta_{km}t) - 2 \frac{\alpha_{km}}{\beta_{km}} \sin(\beta_{km}t) \exp(-\alpha_{km}t) \right] c_1^{(k,m)} + \varphi_{km} \exp(-\alpha_{km}t) \cos(\beta_{km}t) + \left[(\exp(\alpha_{km}t) - \exp(-\alpha_{km}t)) \sin(\beta_{km}t) \right] c_2^{(k,m)}$$

$$+ \frac{\alpha_{km} \gamma_{km} + \psi_{km}}{\beta_{km}} \exp(-\alpha_{km} t) \sin(\beta_{km} t) \quad (2.10)$$

Таким образом, функция (2.10) является экстремалью задачи (2.1), (2.2).

Для проверки достаточных условий минимума функционала (2.1) составим уравнение Якоби и функцию Вейерштрасса (2) с.375). Вычислим вторую вариацию функционала (2.1)

$$\begin{aligned} \delta^2 H_{km} &= \int_0^{T_0} \Phi(h_{km}, \dot{h}_{km}, h'_{km}) dt = \\ &= 2 \int_0^{T_0} [\lambda_{km}^2 (1 + \lambda_{km}^2) h_{km}^2 + 2\lambda_{km}^2 h_{km} h'_{km} + h_{km}^2 + h'^2_{km}] dt \end{aligned}$$

составим уравнение Якоби

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h_{km}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{h}_{km}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \Phi}{\partial h'_{km}} = 0$$

или

$$h''_{km} + (2\lambda_{km}^2 - 1) h'_{km} + \lambda_{km}^2 (\lambda_{km}^2 + 1) h_{km} = 0 \quad (2.11)$$

Общее решение уравнения (2.11) имеет тот же вид (2.6), однако постоянные интегрирования будут определяться из следующих начальных и граничных условий:

$$h_{km}(0) = 0, \quad h_{km}(0) = 1, \quad h'_{km}(0) = 0, \quad h_{km}(T_0) = 0.$$

Из первых трех условий имеем:

$$d^{(km)} + d^{(km)} = 0, \quad \alpha_{km} d^{(km)} + \beta_{km} d^{(km)} = \frac{1}{2}.$$

$$(d^{(km)} - d^{(km)}) \alpha_{km} \beta_{km} = 0 \quad (2.12)$$

Общее решение уравнения (2.11), с учетом (2.12) будет

$$\begin{aligned} h_{km}(t) &= 2d^{(km)} \operatorname{ch}(\alpha_{km} t) + \alpha \alpha (\beta_{km} t) \left[\operatorname{sh}(\alpha_{km} t) \frac{\alpha_{km}}{\beta_{km}} \operatorname{ch}(\beta_{km} t) \right] \\ &+ \frac{1}{\beta_{km}} \operatorname{ch}(\alpha_{km} t) \sin(\beta_{km} t) \end{aligned}$$

где $d^{(km)}$ определяется из условия $h_{km}(T_0) = 0$ и имеет вид

$$d^{(km)} = \frac{\alpha (\beta_{km} T_0)}{2 [\alpha_{km} \operatorname{ch}(\beta_{km} T_0) \beta_{km} \operatorname{sh}(\alpha_{km} T_0)]}$$

Если функция $h_{km}(t)$ обращается в нуль где-то между нулем и T_0 , то для определения $d^{(km)}$ в качестве T_0 нужно взять именно это значение, а вместо времени управления значение $T_0 - \varepsilon$, где ε - достаточно малое положительное число.

Таким образом, если параметр T_0 выбран согласно указанным условиям, то для всех $t \in [0, T_0 - \varepsilon]$ будет выполнено усиленное условие Якоби.

Для составления функции Вейерштрасса функционал (2.1) представим в виде:

$$H_{km} = \int_0^{T_0} [x_{1km}^2(\lambda_{km}^1 + \lambda_{km}^2) + 2\lambda_{km}^2 x_{1km} x_{2km} + x_{2km}^2 + \dot{x}_{2km}^2] dt \quad (2.13)$$

где $x_{1km} = W_{km}$, $x_{2km} = \dot{x}_{1km}$. Так как переменные x_{1km}, x_{2km} связаны дифференциальной связью $x_{2km} = \dot{x}_{1km}$, то в переменных x_{1km}, x_{2km} мы имеем вариационную задачу на условный экстремум, поэтому вместо функционала (2.13) рассмотрим функционал

$$H_{km}^* = \int_0^{T_0} [x_{1km}^2(\lambda_{km}^1 + \lambda_{km}^2) + 2\lambda_{km}^2 x_{1km} x_{2km} + x_{2km}^2 + \dot{x}_{2km}^2 + \mu(t)(\dot{x}_{1km} - x_{2km})] dt = \int_0^{T_0} F^*(t, x_{1km}, x_{2km}, \dot{x}_{1km}, \dot{x}_{2km}) dt$$

Теперь составим функцию Вейерштрасса:

$$E(t, x_{1km}, x_{2km}, \dot{x}_{1km}, \dot{x}_{2km}, p, q) = (t, x_{1km}) \cdot Q(t, x_{1km}) - F^*(t, x_{1km}, x_{2km}, p, q) + (t, x_{1km}) \cdot Q(t, x_{1km}) - (x_{1km} - p) F_p^* + F^*(t, x_{1km}, x_{2km}, \dot{x}_{1km}, \dot{x}_{2km}) - (x_{2km} - q) F_q^* = (x_{2km} - q)^2 \geq 0$$

Следовательно, во всех точках (t, x_{1km}, x_{2km}) и для произвольных $\dot{x}_{1km}, \dot{x}_{2km}$, $E \geq 0$, то есть выполнены достаточные условия сильного минимума.

Таким образом, функция (2.10) доставляет сильный минимум функционалу (2.1).

3. Рассмотрим вопрос о равномерной сходимости ряда (1.9). Для этого достаточно рассмотреть равномерную сходимость следующих рядов:

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} W_{km}^2(t), \quad \sum_{k,m=1}^{\infty} u_{km}^2(t) \quad (3.1)$$

Из (2.9), (2.10) следует

$$|c_1^{(k,m)}| \leq \frac{2}{\Delta_0} (2|\varphi_{km}| + |\psi_{km}|),$$

$$|c_2^{(k,m)}| \leq \frac{1}{\Delta_0} (3|\varphi_{km}| + 2|\psi_{km}|),$$

$$|W_{km}(t)| \leq \frac{1}{\Delta_0} (14ch(\alpha_{km}T_0) + 2\Delta_0 + 8) |\varphi_{km}| + \frac{1}{\Delta_0} (8ch(\alpha_{km}T_0) + \Delta_0 + 4) |\psi_{km}|$$

где $\Delta_0 = \min_{k,m} \Delta_{km}$. Учитывая ограниченность Δ_0 , будем иметь

$$|W_{km}(t)| \leq M(|\varphi_{km}| + |\psi_{km}|), \quad M = \text{const.}$$

Для $u_{km}(t)$ имеем

$$u_{km}(t) = W_{km}(t) + \lambda_{km}(t)^2 W_{km}(t) = (\lambda_{km}^2 + \alpha_{km}^2 - \beta_{km}^2) W_{km}(t)$$

$$-2\lambda_{km}\beta_{km} \left[\exp(\alpha_{km}t) (c_1^{(k,m)} \sin(\beta_{km}t) - c_2^{(k,m)} \cos(\beta_{km}t)) \right]$$

$$+ \exp(-\alpha_{km}t) (-c_{km}^{(k,m)} \sin(\beta_{km}t) + c_{km}^{(k,m)} \cos(\beta_{km}t))]$$

$$|u_{km}(t)| \leq [\lambda_{km}^2 + (\alpha_{km} + \beta_{km})^2] |W_{km}(t)|$$

или учитывая, что λ_{km}^2 и $(\alpha_{km} + \beta_{km})^2$ имеют одинаковый порядок относительно k, m , получим

$$|u_{km}(t)| \leq N \lambda_{km}^2 (|\varphi_{km}| + |\psi_{km}|), \quad N = \text{const}$$

Теперь, для равномерной сходимости рядов (3.1) достаточно, чтобы сходились ряды

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} \lambda_{km}^2 \varphi_{km}^2, \quad \sum_{k,m=1}^{\infty} \lambda_{km}^2 \psi_{km}^2 \quad (3.2)$$

для чего, естественно, предположить

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \in L_2, \quad \frac{\partial^4 \dot{w}}{\partial x^2 \partial y^2} \in L_2, \quad \alpha = \overline{0,4} \quad (3.3)$$

Тогда из условий (3.3) следует как сходимость рядов ([3] с.144)

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} (k + \alpha_m \alpha_{km})^2, \quad \sum_{k,m=1}^{\infty} (k + \alpha_m \alpha_{km})^2, \quad \alpha = \overline{0,4}$$

так и сходимость рядов (3.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. - ОГИЗ, М.: Гостехиздат, 1947.
2. Гноспский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. - М.: Наука, 1969.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функционального анализа. М.: Наука,

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 20.06.1991

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СЖАТОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА (КМ) ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПРОЧНОСТЬ И ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Դնյուկ Բ. Բ.

Գնուցի Կ.Կ Կոմպոզիցիոն նյութից օպտիմալ սեղմված սալի ճախագծումը սեփական տատանումների հաճախության և ամրության վրա սահմանափակումների դեպքում

Օտևմված է տրոցոնազույն քաշի սալ, կարգաւ սեղմող ուժի և սեփական տատանումների առաջին հաճախականության արժեքներից: Յույ՞ է տոմված, որ կոմպոզիցիոն նյութից սեղմված սալի ռաճար կան սեղմող ուժի երեք տիրույթներ՝ ըստ որոնց կարելի է դնել սահմանափակումներ առաջին հաճախականության վրա, առաջին հաճախականության և ամրության վրա միաճամանակ ամրության վրա: Օտևմված են այդ տիրույթները և դրանք համապատասխան սալերի հաստությունները:

Գնուկ Բ.Բ. Projecting of optimal compressed plate from composite material with restrictions on solidity and free vibrations frequency

В работе находится пластинка наименьшего веса в зависимости от значений сжимающего пластинку усилия и первой частоты собственных колебаний. Показывается, что для сжатой пластинки, изготовленной из монослоса ортотропного композиционного материала существуют три области изменения сжимающего усилия, где соответственно могут быть активными ограничения на первую частоту, одновременно на первую частоту и прочность, на прочность. Найдены границы этих областей и соответствующие им наименьшие толщины.

1. Пусть прямоугольная пластинка размерами a, b, h отнесена к прямоугольной системе координат $Oxyz$. Пластинка изготовлена из монослоса ортотропного композиционного материала, уложенных поочередно под углами $\pm\varphi$ осн Ox и в срединной плоскости ($z=0$) сжата усилием $T_{xx}^0 = -P$.

Частоты собственных колебаний шарнирно опертой по краям ортотропной пластинки определяются формулой [1-4]

$$\Omega_{mn} = \omega_{mn} \sqrt{1 - \frac{P}{P_{mn}^*}} \tag{1.1}$$

где

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{K_{mn}}{\rho h}}, \quad P_{mn}^* = \frac{K_{mn}}{\lambda_{mn}^2} \tag{1.2}$$

соответственно частота собственных колебаний свободной от усилия пластинки, P_{mn}^* - критическое значение усилия T_{xx}^0

$$K_{mn} = D_{11}\lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda_m^2\mu_n^2 + D_{22}\mu_n^4.$$

$$D_k = B_k \frac{h^3}{12} \quad (1.3)$$

$$B_{11} = B_{11}^0 \cos^4 \varphi + 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + B_{22}^0 \sin^4 \varphi$$

$$B_{22} = B_{11}^0 \sin^4 \varphi + 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + B_{22}^0 \cos^4 \varphi$$

$$B_{12} = B_{12}^0 + [B_{11}^0 + B_{22}^0 - 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0)] \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$$

$$B_{66} = B_{66}^0 + [B_{11}^0 + B_{22}^0 - 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0)] \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \quad (1.4)$$

B_k^0 - характеристики упругости монослоя ортотропного КМ.

Из формулы (1.1) при заданных значениях P и $\Omega_{mn} = \Omega$ для определения толщины пластинки получается уравнение

$$h_{mn}^3 - A_{mn} \Omega^2 h_{mn} - F_{mn} P = 0 \quad (1.5)$$

где

$$A_{mn} = \frac{12D}{B_{11}\lambda_m^4 + 2(B_{12} + 2B_{66})\lambda_m^2\mu_n^2 + B_{22}\mu_n^4}.$$

$$F_{mn} = \frac{12\lambda_m^2}{B_{11}\lambda_m^4 + 2(B_{12} + 2B_{66})\lambda_m^2\mu_n^2 + B_{22}\mu_n^4}.$$

Уравнением (1.5), допускающим единственное положительное решение, определяется толщина h_{mn} при которой частота колебаний пластинки по форме

$$\sin(\lambda_m x) \sin(\mu_n y)$$

принимает заданное значение Ω при данном P .

Для приложений представляет интерес обеспечение данного уровня первой (наименьшей) частоты собственных колебаний. Таким образом, если задано, что

$$\min_{m,l} \Omega_{mn} = \Omega$$

то необходимо найти наибольшее по m и l решение уравнения (1.5), то есть найти

$$h_{\text{д.н.}} = \max_{m,l} h_{mn}(m,l,P,\Omega)$$

2. Рассмотрим теперь вопрос определения необходимой толщины сжатой пластинки, исходя из условия прочности.

Если пластинка сжата усилием $T_{xx}^0 = -P$ в своей плоскости, то для деформаций в главных геометрических направлениях получается:

$$\epsilon_{xx} = -\frac{B_{22}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2} \frac{P}{h}, \quad \epsilon_{yy} = -\frac{B_{11}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2} \frac{P}{h}, \quad \epsilon_{xy} = 0 \quad (2.1)$$

По деформациям (2.1) можно определить напряжения в монослоях пластинки

$$\sigma_{xx} = -\frac{P}{h}, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = L \frac{P}{h} \quad (2.2)$$

где

$$L = \frac{B_{16}B_{22} - B_{26}B_{12}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}$$

$$B_{16} = -0,5 [B_{22} \sin^2 \varphi - B_{11} \cos^2 \varphi + (B_{12} + 2B_{66}) \cos(2\varphi)] \sin(2\varphi)$$

$$B_{26} = -0,5 [B_{22} \cos^2 \varphi - B_{11} \sin^2 \varphi - (B_{12} + 2B_{66}) \cos(2\varphi)] \sin(2\varphi) \quad (2.3)$$

Имея значения напряжений в монослоях по главным геометрическим направлениям, по формулам поворота можно определить напряжения по главным физическим направлениям монослоя

$$\sigma_{11} = \frac{P}{h} (\cos^2 \varphi + L \sin 2\varphi)$$

$$\sigma_{22} = \frac{P}{h} (\sin^2 \varphi - L \sin 2\varphi)$$

$$\sigma_{12} = \frac{P}{h} \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi - L \cos 2\varphi \right) \quad (2.4)$$

которые должны удовлетворять условию прочности для монослоя [5]

$$\frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_{B1}^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{B2}^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{B1}^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{\tau_{B0}^2} \leq 1 \quad (2.5)$$

Из условия (2.5) при (2.2), (2.4) получается

$$A(\varphi) = \frac{P}{\sigma_{B1}} A(\varphi) \quad (2.6)$$

где

$$A(\varphi) = \left[(\cos^2 \varphi + L \sin 2\varphi) (\cos 2\varphi + L \sin 2\varphi) + \frac{\sigma_{B1}^2}{\sigma_{B2}^2} (\sin^2 \varphi - L \sin 2\varphi)^2 + \frac{\sigma_{B1}^2}{\tau_{B0}^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi - L \cos 2\varphi \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.7)$$

Естественно, нахождение угла φ_{np} при котором достигается наименьшее значение $A(\varphi)$, что приводит к определению структуры пластинки наименьшего веса при ограничениях на прочность. В рассмотренном выше случае одностороннего сжатия очевидно, что наименьшее значение функции (2.7) $A(\varphi) = 1$ достигается при $\varphi = 0$ и

$$\varphi_{np}^0 = 0, \quad h_{np}^0 = \frac{P}{\sigma_{B1}} \quad (2.8)$$

3. Представляет интерес проектирование сжатой пластинки, обладающей заданной первой частотой собственных колебаний при ограничении на прочность. Предварительно рассматривается случай длинной пластинки, когда можно предположить, что потеря устойчивости происходит по цилиндрической поверхности. В этом случае $n = 0$ и

$$h_0^0 = \min_{\varphi} h_0 = \min_{\varphi} \max_m h_m(m, P, \Omega, \varphi) \quad (3.1)$$

достигается при $m = 1$, $\varphi = 0$. В рассмотренном частном случае наименьшие значения h_0^0 и h_{np}^0 достигаются при одном и том же угле $\varphi = 0$ и из (1.5) и (2.8) получается

$$\bar{P} = \bar{h}^3 - \bar{\Omega}^2 \bar{h}, \quad P = \bar{h} \bar{\sigma}_{B1} \quad (3.2)$$

где

$$\bar{h} = 100 \frac{h}{a}, \quad \bar{\Omega}^2 = \frac{12 \cdot 10^4 \rho a^2}{\pi^2 B \eta_1} \Omega^2,$$

$$\bar{P} = \frac{12 \cdot 10^4}{\pi^2 B \eta_1 a} P, \quad \bar{\sigma}_{B1} = \frac{12 \cdot 10^4}{\pi^2 B \eta_1} \sigma_{B1}$$

Расчетная толщина оптимальной пластинки показана на фиг.1.

Необходимо отметить, что при $\bar{\Omega} = 0$ находится толщина пластинки, обеспечивающая ее устойчивость. С увеличением заданного уровня первой частоты собственных колебаний увеличиваются необходимые значения толщины пластинки и соответственно увеличивается зона активности ограничения на первую частоту, увеличивается также запас устойчивости.

Переходим к рассмотрению случая конечной пластинки. В этом случае ситуация усложняется тем, что $\bar{h} \bar{\Omega}$ и h_{np} могут достигаться при различных значениях угла укладки монослоев φ . Причем, как и в предыдущем случае, $\bar{h} \bar{\Omega}$ достигается при $\varphi = \varphi_{np} = 0$. В этом случае для пластинки из данного материала при заданном отношении сторон $\lambda = a/b$ необходимо определить

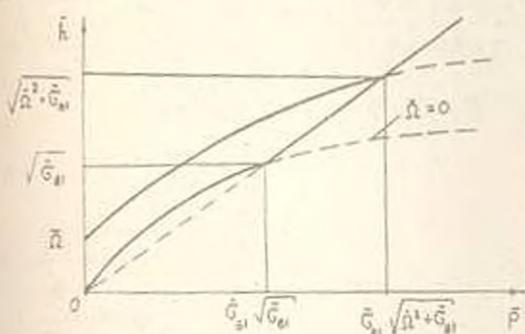


Рис.1

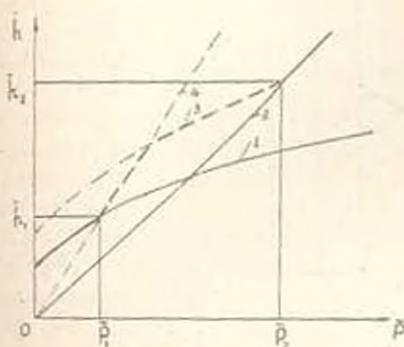


Рис.2

$\bar{h} \bar{\Omega}$. Пусть $\bar{h} \bar{\Omega}$ достигается при $\varphi = \varphi \delta$. Тогда, если $\varphi \delta \neq \varphi_{np}$, то имеет место картина, приведенная на фиг.2.

Кривые 1, 3 определяют соответственно расчетные толщины пластинки при $\varphi = \varphi \delta$ и $\varphi = \varphi_{np} = 0$ при заданном уровне первой частоты собственных колебаний пластинки, сжатой усилием P . Прямые 2, 4 соответствуют расчетным толщинам сжатой усилием P пластинки, определенных из условия прочности при $\varphi = \varphi_{np} = 0$ и $\varphi = \varphi \delta$. Очевидно, что в отрезке $[0, P_1]$ расчетная толщина определяется кривой 1 и равняется

$$\bar{h} \bar{\Omega} = \min_{\varphi} \bar{h} \bar{\Omega} = \min_{\varphi} \max_{m} \bar{h} \bar{\Omega}_m$$

и оптимальным углом укладки монослоев является угол $\varphi = \varphi \delta$. При $P > P_2$ расчетная толщина определяется прямой 2 и равняется

$$\bar{h}_p = \bar{h}_{np}^0 = \frac{\bar{P}}{\sigma_{B1}} \quad (3.4)$$

и оптимальным углом является $\varphi = \varphi_{np}^0 = 0$.

Представляет интерес нахождение значений усилий \bar{P}_1 и \bar{P}_2 , то есть зоны активности ограничений на частоту и на прочность \bar{P}_1 и \bar{P}_2 соответственно определяются из условий

$$\begin{aligned} \bar{h}_d &= \bar{h}_d(\varphi) = \bar{h}_{np}(\varphi) \\ \bar{h}_{np}^0 &= \bar{h}_d(\varphi_{np}^0) = \bar{h}_{np}(\varphi_{np}^0) \end{aligned} \quad (3.5)$$

В области усилий $\bar{P}_1 < \bar{P} < \bar{P}_2$ в зависимости от угла укладки монослоев активным могут быть как ограниченные на частоту, так и на прочность.

В этой области можно выбирать гарантированную толщину по прямой 4 до ее пересечения с кривой 3, а далее, с увеличением \bar{P} , по кривой 3. Однако, в области $\bar{P} \in (\bar{P}_1, \bar{P}_2)$ можно задаться целью найти угол φ , при котором для заданного $\bar{P} \in (\bar{P}_1, \bar{P}_2)$

$$\bar{h}_d(\varphi) = \bar{h}_{np}(\varphi) \quad (3.6)$$

В качестве примера рассмотрим квадратную пластинку ($\lambda = 1$), изготовленную из монослоев ортотропного КМ с характеристиками

$$B_{22}^0 = 0,62 B_{11}^0, \quad B_{12}^0 = 0,12 B_{11}^0, \quad B_{66}^0 = 0,16 B_{11}^0,$$

$$G_{B1} = 190 \times 10^{-4} B_{11}^0, \quad \sigma_{B2} = 77 \times 10^{-4} B_{11}^0, \quad \tau_{B0} = 50 \times 10^{-4} B_{11}^0$$

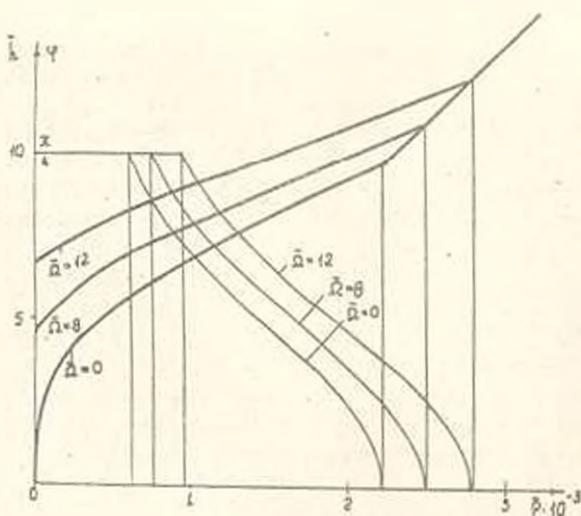


Рис. 3

При этих данных на фиг. 3 приводятся зависимости \bar{h} (жирные линии) и φ (тонкие) в зависимости от параметра нагрузки \bar{P} для различных $\bar{\Omega}$ причем, при $\bar{\Omega} = 0$ получается расчетная толщина и оптимальный угол при ограничениях на устойчивость и прочность. Следует указать важное свойство \bar{h}_p в области $\bar{P}_1 < \bar{P} < \bar{P}_2$. В этой области, как это видно из фиг. 3 и из расчетов для других значений $\bar{\Omega}$, можно

\bar{h}_p аппроксимировать линейной функцией от \bar{P} . В табл. I

приводятся значения \bar{P}_1 , \bar{P}_2 и соответствующих \bar{h}_1 , \bar{h}_2 для различных $\bar{\Omega}$.

Таблица 1

Ω	F_1	K_1	P_2	K_2
0	608	5,72	2196	9,58
2	619	5,83	2215	9,66
4,5	663	6,25	2291	9,99
8	769	7,25	2484	10,83
10	847	7,98	2632	11,48
12	933	8,79	2802	12,22

Как видно из табл.1, с увеличением заданного значения первой частоты собственных колебаний Ω увеличиваются соответствующие значения F_1 и K_1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. *Общая теория анизотропных оболочек*. - М.: Наука, 1974. 446 с.
2. Алфутов Н. А., Зинovieв П. А., Попов Б. Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. - М.: Машиностроение, 1984. 263 с.
3. Болотин В. В. *Динамическая устойчивость упругих систем*. - М.-Л.: ГИИТТЛ, 1956. 600 с.
4. Висильев В. В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. - М.: Машиностроение, 1988. 269 с.
5. Малмейстер А. К., Тачуж В. П., Тетерс Г. А. *Сопротивление полимерных композиционных материалов*. - Рига: Зинатне, 1980. 57 с.

Институт механики АН Армении
Поступила в редакцию 14.07.1989

$D_{11} = B_{11}h^3/12$ - цилиндрическая жесткость полосы, а B_{11} и B_{55} выражаются через упругие постоянные материала по известным формулам [1]

Теория же [2] позволяет условие $u_x = 0$ удовлетворить во всех точках заземленного сечения полосы, в силу чего она приводит к одному решению

$$w_2 = -\frac{qx(l-x)}{24D_{11}} \left[x(l-x) + \frac{3B_{11}h^2}{2B_{55}} \right] \quad (1.3)$$

$$M_2 = -\frac{ql}{12} [6x^2 - 6lx + l^2] \quad (1.4)$$

б) Сторона полосы $x = 0$ заземлена, а сторона $x = l$ свободна и несет нагрузку интенсивности Q . Из [1] имеем

$$w_1 = \frac{Qx}{6D_{11}} \left[x(3l-x) + \frac{1}{2} \frac{B_{11}h^2}{B_{55}} \left(\frac{3}{2} - \frac{2x}{h} \right) \right] \quad (1.5)$$

Решение же по теории [2] имеет вид

$$w_2 = \frac{Qx}{6D_{11}} \left[x(3l-x) + \frac{3}{4} \frac{B_{11}h^2}{B_{55}} \right] \quad (1.6)$$

в) Полоса шарнирно оперта вдоль длинных сторон и несет равномерно распределенную нагрузку интенсивности q . В этом случае к единственному решению приводит и теория [1]

$$w_1 = -\frac{qx}{24D_{11}} \left[x^3 - 2lx^2 + l^3 + \frac{6}{5} \frac{B_{11}h^2}{B_{55}} (l-x) \right] \quad (1.7)$$

Решение теории [2] имеет вид

$$w_2 = -\frac{qx}{24D_{11}} \left[x^3 - 2lx^2 + l^3 + \frac{3}{2} \frac{B_{11}h^2}{B_{55}} (l-x) \right] \quad (1.8)$$

Отметим, что для случаев б) и в) не имеет смысла привести выражения изгибающего момента, поскольку из-за статической определенности задач они по обеим теориям совпадают.

Решения (1.1)-(1.8) приводят к следующим заключениям:

1. Поправки к классическим значениям прогибов теории [1], полученные при удовлетворении условиям заделки $u_x = 0$ в точках срединной плоскости полосы $z_0 = 0$, совпадают с соответствующими поправками теории [2]. В остальных же случаях поправки теории [2] получаются незначительно большими.

2. Теория [1] при статической неопределенности задачи (случай а) приводит к ничтожно малым поправкам изгибающего момента. Причем эти поправки в зависимости от положения точек закрепления (значения z_0) имеют разные знаки: при $z_0 > h\sqrt{3/20}$ они положительны, при $z_0 < h\sqrt{3/20}$ отрицательны, а при $z_0 = h\sqrt{3/20}$ превращаются в нуль.

Теория же [2] для изгибающего момента полосы поправок не дает. Очевидно, что появление незначительных поправок неустойчивого знака для изгибающего момента по теории [1] является следствием того, что в рамках этой теории выражения основных напряжений пластинки содержат члены, кубические по поперечной координате z .

Таким образом, для рассмотренных полос постоянной толщины решения задач по двум уточненным теориям [1] и [2] в количественном смысле существенно не отличаются друг от друга.

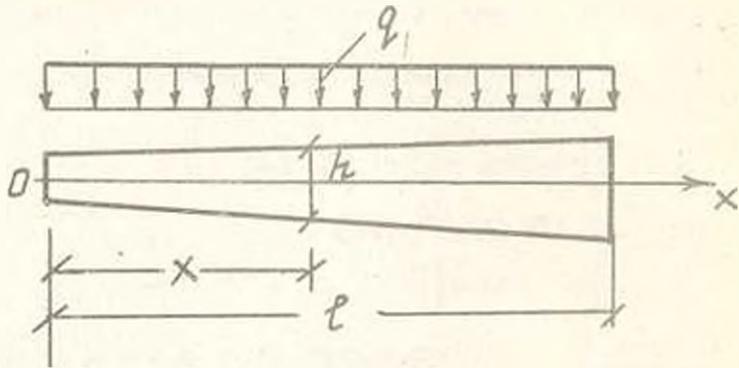
И. Рассмотрим ортогонную полосу ширины L , толщина которой h вдоль длины постоянна, а по ширине меняется линейно (фиг.1). Полоса несет равномерно распределенную нагрузку интенсивности q , приведенной к единице

площади срединной плоскости.

Пусть

$$h = h_0 + h_1 x \quad (2.1)$$

где h_0 и h_1 - постоянные. Полагая, что условия крепления сторон $x=0$, $x=l$ по длине не меняются, можно считать, что все расчетные величины от продольной координаты x не зависят и полоса деформируется по цилиндрической поверхности.



Фиг.1.

Переходим к безразмерным величинам:

$$h = h_0 t, \quad u = h_0 \bar{u}, \quad v = h_0 \bar{v}, \quad w = h_0 \bar{w}, \quad q = B_{11} \bar{q},$$

$$\varphi = B_{11} \bar{\varphi}, \quad \psi_1 = B_{11} \bar{\psi}_1, \quad \varphi_2 = \frac{B_{11}}{h_0} \bar{\varphi}_2, \quad \psi_2 = \frac{B_{11}}{h_0} \bar{\psi}_2,$$

$$\varphi_3 = \frac{B_{11}}{h_0} \bar{\varphi}_3, \quad \psi_3 = \frac{B_{11}}{h_0} \bar{\psi}_3, \quad T_x = B_{11} h_0 \bar{T}_x, \quad T_y = B_{11} h_0 \bar{T}_y,$$

$$S = B_{11} h_0 \bar{S}, \quad N_x = B_{11} h_0 \bar{N}_x, \quad N_y = B_{11} h_0 \bar{N}_y,$$

$$M_x = B_{11} h_0^2 \bar{M}_x, \quad M_y = B_{11} h_0^2 \bar{M}_y, \quad H = B_{11} h_0^2 \bar{H} \quad (2.2)$$

Здесь t - безразмерная координата, w - прогиб, u, v - тангенциальные перемещения срединной плоскости, T_x, T_y, S, N_x, N_y и M_x, M_y, H - внутренние усилия и моменты полосы. Черточкой наверху обозначены безразмерные значения соответствующих величин.

На основе уточненной теории пластинок переменной толщины [2] с учетом обозначений (2.2) для плоской задачи и задачи изгиба полосы имеем:

а) плоская задача

$$\frac{d}{dt} \left(t \frac{d\bar{u}}{dt} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(t \frac{d\bar{v}}{dt} \right) = 0 \quad (2.3)$$

$$\bar{\varphi}_2 = \frac{h_1^2}{t} \frac{d\bar{u}}{dt}, \quad \psi_2 = \frac{B_{66} h_1^2}{B_{11} t} \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (2.4)$$

$$\bar{T}_x = h_1 t \frac{d\bar{u}}{dt}, \quad \bar{T}_y = \frac{B_{11}}{B_{11}} \bar{T}_y, \quad \bar{S} = \frac{B_{66} h_1 t}{B_{11}} \frac{d\bar{v}}{dt} \quad (2.5)$$

б) задача изгиба

$$t \frac{d\bar{\varphi}}{dt} + 2\bar{\varphi} = -\frac{3\bar{q}}{2h_1}$$

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d^2 \bar{w}}{dt^2} \right) - \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{1}{h_1} \left(r^2 \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \right) + \frac{8\bar{\varphi}}{h_1^3} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\bar{\psi}_1}{dt} \right) - \frac{8B_{44}}{B_{66}} \frac{1}{h_1^3} \bar{\psi}_1 = 0$$

$$\bar{\varphi} = -\frac{1}{r^2} \left[4\bar{\psi}_1 + h_1^3 r \left(h_1 \frac{d^2 \bar{w}}{dt^2} - \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \right) \right]$$

$$\bar{\psi}_3 = -\frac{1}{r^2} \left(4\bar{\psi}_1 + h_1^3 r \frac{B_{66}}{B_{44}} \frac{d\bar{\psi}_1}{dt} \right)$$

$$\bar{N}_x = \frac{t}{12} (12\bar{\varphi} + r^2 \bar{\psi}_3), \quad \bar{N}_y = \frac{t}{12} (12\bar{\psi}_1 + r^2 \bar{\psi}_3)$$

$$\bar{M}_x = -\frac{h_1 r^3}{12} \left(h_1 \frac{d^2 \bar{w}}{dt^2} - \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \right), \quad \bar{M}_y = \frac{B_{12}}{B_{11}} \bar{M}_x,$$

$$\bar{H} = \frac{B_{66}}{12B_{44}} h_1 r^3 \frac{d\bar{\psi}_1}{dt}$$

Решения этих задач имеют вид:

а) плоская задача

$$\bar{u} = C_1 \ln t + C_2, \quad \bar{v} = C_3 \ln t + C_4$$

$$\bar{\varphi}_2 = h_1^3 \frac{C_1}{r^2}, \quad \bar{\psi}_2 = \frac{B_{66} h_1^3 C_3}{B_{11} r^2}, \quad \bar{T}_x = h_1 C_1,$$

$$\bar{T}_y = \frac{B_{12}}{B_{11}} h_1 C_1, \quad \bar{S} = \frac{B_{66}}{B_{11}} h_1 C_3$$

б) задача изгиба

$$\bar{\varphi} = C_5 \frac{1}{r^2} - \frac{3\bar{q}}{4h_1}$$

$$\bar{w} = \frac{6\bar{q}}{h_1^3} r (\ln t - 1) + \frac{C_5}{h_1} \left(\frac{4}{h_1^3} - \frac{B_{11}}{B_{55}} \right) \frac{1}{t} + C_6 \ln t + C_7 t + C_8$$

$$\bar{\psi}_1 = C_9 r^{n_1} + C_{10} r^{n_2}, \quad n_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{32B_{44}}{h_1 B_{11}}}$$

$$\bar{\varphi}_3 = \frac{1}{r^2} \left(\frac{C_6 h_1^3}{t} - 12 \frac{C_5}{r^2} - \frac{3\bar{q}}{h_1} \right)$$

$$\bar{\psi}_3 = C_9 \left(\frac{B_{66} h_1^3 n_1 - 4}{B_{44}} \right) r^{n_1 + 2} + C_{10} \left(\frac{B_{66} h_1^3 n_2 - 4}{B_{44}} \right) r^{n_2 + 2}$$

$$\bar{M}_x = \frac{h_1 r^2}{12} \left(\frac{8C_5}{h_1^3 r^2} + \frac{6\bar{q}}{h_1^3} - \frac{C_6 h_1}{t} \right), \quad \bar{M}_y = \frac{B_{12}}{B_{11}} \bar{M}_x,$$

$$\bar{H} = \frac{B_{66} h_1}{12B_{44}} (C_9 n_1 r^{n_1 + 2} + C_{10} n_2 r^{n_2 + 2})$$

Постоянные интегрирования C_i подлежат определению из граничных

на краях полосы $x=0, x=l$.

3. Пусть полоса жестко заделана вдоль сторон $x=0, x=l$. Граничные условия в этом случае принимают вид:

$$\text{при } t_1 = 1 \text{ и } t_1 = 1 + \frac{h_1 l}{h_0}$$

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{v} = 0 \quad (3.1)$$

$$\bar{w} = 0, \quad -h_1 \frac{d\bar{w}}{dt} + \frac{B_{11}}{B_{55}} \bar{\varphi} = 0, \quad \bar{\psi}_1 = 0 \quad (3.2)$$

С учетом (3.1) и (2.13) нетрудно убедиться, что в данном случае плоская задача имеет тривиальное решение

$$\bar{u} = \bar{v} = 0, \quad \bar{\varphi}_2 = \bar{\psi}_2 = 0, \quad \bar{T}_x = \bar{T}_y = \bar{S} = 0 \quad (3.3)$$

Удовлетворив последним условиям (3.2) с учетом (2.17), находим

$$C_9 + C_{10} = 0$$

$$C_9 t_1^2 + C_{10} t_1^2 = 0 \quad (3.4)$$

Поскольку определитель этой системы отличен от нуля, то

$$C_9 = C_{10} = 0 \quad (3.5)$$

Следовательно,

$$\psi_1 = 0 \quad (3.6)$$

С учетом (2.15) и (2.16) первые два условия (3.2) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{4}{h_1^2 t_i} C_5 - \frac{h_1}{t_i} C_6 - h_1 C_7 &= \frac{\bar{q}}{h_1} \left(\frac{6 \ln t_i}{h_1^2} + \frac{3 B_{11}}{4 B_{55}} \right), \\ \frac{1}{h_1 t_i} \left(\frac{4}{h_1^2} - \frac{B_{11}}{B_{55}} \right) C_5 + \ln t_i C_6 + t_i C_7 + C_8 &= \frac{6 \bar{q}}{h_1^2} t_i (1 - \ln t_i), \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Это и есть система алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования $C_5 - C_8$.

С целью сравнения приведем решение рассматриваемой задачи еще и в рамках классической теории пластинок, не учитывающей влияния поперечных сдвигов. Эти решения имеют вид:

$$\bar{u}^0 = \bar{v}^0 = 0 \quad (3.8)$$

$$\bar{w}^0 = \frac{6 \bar{q}}{h_1^3} t (\ln t - 1) + \frac{12 C_9^0}{h_1^3} \ln t - \frac{6 C_9^0}{h_1^3} \frac{1}{t} + C_9^0 t + C_9^0$$

$$\bar{M}_x^0 = -\frac{6 \bar{q} t^2}{2 h_1^3} + C_9^0 t + C_9^0 \quad (3.9)$$

Постоянные интегрирования C_9^0 определяются из граничных условий, которые приводятся к системе

$$\frac{12}{h_1^3 t_i} C_9^0 + \frac{6}{h_1^3 t_i^2} C_9^0 + C_9^0 = -\frac{6 \bar{q}}{h_1^3} \ln t_i$$

$$\frac{12}{h_1^3} \ln r_1 C_1^0 - \frac{6}{h_1^2 r_1} C_2^0 + r_1 C_3^0 + C_4^0 = \frac{6\sigma}{h_1} r_1 (1 - \ln r_1), \quad (i=1, 2) \quad (3.10)$$

4. Пусть

$$h_0/l = 0,05, \quad \bar{\nu} = 10^3 \quad (4.1)$$

Будем рассматривать случай ортотропной и изотропной полос, защемленных вдоль длинных сторон. Для материала ортотропной полосы положим:

$$\begin{aligned} E_2 = 0,5E_1, \quad E_3 = 0,2E_1, \quad \nu_{12} = 0,3, \quad \nu_{23} = 0,5\nu_{12}, \\ \nu_{31} = 0,5\nu_{12}, \quad G_{12} = 0,2E_1, \quad G_{13} = 0,1E_1, \quad G_{21} = 0,2E_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Пусть материал изотропной полосы характеризуется модулем упругости E и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$

Пользуясь общеизвестными формулами [1] вычислим отношение B_{11}/B_{55} . Для рассмотренных случаев оно принимает значение:

$$\begin{aligned} \text{для ортотропной полосы} - 12,195 \\ \text{для изотропной} - 2,857 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Таблица 2

Классическая теория

h_1	$\bar{M}_1 \times 10^3$	\bar{x}_M	$\bar{M}_2 \times 10^3$	$\bar{M}_3 \times 10^3$	\bar{x}_w	w_{\max}
0,05	-21,18	0,43	16,05	-48,60	0,43	1,64
0,10	-15,66	0,39	15,16	-58,63	0,38	0,78
0,15	-12,46	0,37	14,36	-69,98	0,35	0,45
0,20	-10,36	0,34	13,66	-71,75	0,33	0,29
0,25	-8,85	0,33	13,04	-81,90	0,31	0,20

Уточненная теория (изотропная полоса)

h_1	$\bar{M}_1 \times 10^3$	\bar{x}_M	$\bar{M}_2 \times 10^3$	$\bar{M}_3 \times 10^3$	\bar{x}_w	w_{\max}
0,05	-21,23	0,43	16,06	-48,49	0,43	1,77
0,10	-15,73	0,39	15,20	-58,41	0,37	0,89
0,15	-12,56	0,37	14,44	-65,58	0,35	0,54
0,20	-10,48	0,35	13,80	-71,10	0,33	0,37
0,25	-9,01	0,33	13,26	-73,88	0,31	0,27

Уточненная теория (ортотропная полоса)

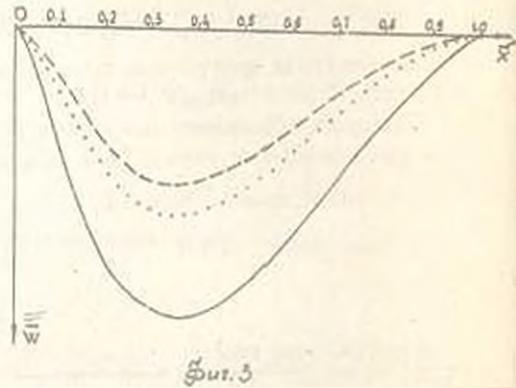
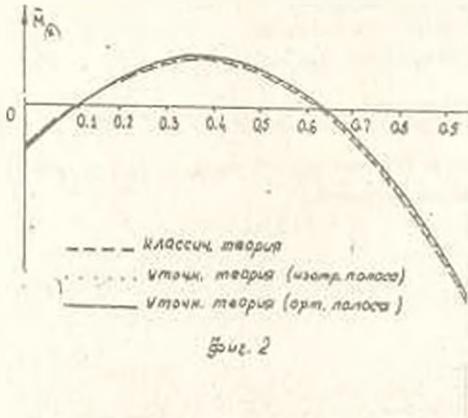
h_1	$\bar{M}_1 \times 10^3$	\bar{x}_M	$\bar{M}_2 \times 10^3$	$\bar{M}_3 \times 10^3$	\bar{x}_w	w_{\max}
0,05	-21,35	0,43	16,10	-48,26	0,42	2,56
0,10	-15,93	0,39	15,31	-57,83	0,38	1,26
0,15	-12,83	0,37	14,66	-64,52	0,35	0,85
0,20	-10,81	0,35	14,16	-70,78	0,32	0,63
0,25	-9,38	0,34	13,77	-73,28	0,31	0,49

В табл.2 представлены безразмерные значения некоторых расчетных величин изотропной и ортотропной полос различных переменных толщин, полученные на основе классической и уточненной теории пластинок. При этом через \bar{M}_1 и \bar{M}_3 обозначены опорные моменты, а через \bar{M}_2 экстремум изгибающего момента, который возникает в сечении с координатой \bar{x}_M . Как и следовало ожидать, наибольший изгибающий момент получается на толстом краю полосы.

$$\bar{x} = 1.$$

В последнем столбце табл.2 приведены безразмерные значения максимального прогиба \bar{w}_{max} получаемых в сечениях полосы \bar{x}_m . На фиг.2 и 3 построены графики изгибающих моментов и прогибов полосы при $h_1 = 0,15$.

Из этих графиков видно, что изгибающие моменты полосы по классической и уточненной теориям, как и следовало ожидать, практически совпадают. Поправка, вносимая уточненной теорией, заметна лишь для прогибов полосы.



В зависимости от характера анизотропии она может оказаться весьма существенной. Например, поправка к максимальному значению прогибов изотропной полосы составляет примерно 20% а для рассматриваемой ортотропной полосы она доходит до 85%.

Таблица 3 $\tau_x / B_{11} \times 10^3$

z/h	$\bar{x} = 0$	$\bar{x} = 0$	$\bar{x} = 0,367$	$\bar{x} = 0,373$	$\bar{x} = 1$	$\bar{x} = 1$
	изотр.	ортотр.	изотр.	ортотр.	изотр.	ортотр.
0	13,85	14,01	-0,73	-0,77	-3,82	-3,81
0,05	13,66	13,81	-0,70	-0,75	-3,80	-3,79
0,10	13,07	13,22	-0,64	-0,68	-3,74	-3,73
0,15	12,09	12,23	-0,53	-0,57	-3,64	-3,63
0,20	10,73	10,84	-0,37	-0,41	-3,51	-3,49
0,25	08,97	09,06	-0,18	-0,21	-3,33	-3,31
0,30	06,83	06,89	0,07	0,04	-3,11	-3,09
0,35	04,29	04,32	0,35	0,33	-2,85	-2,83
0,40	01,37	01,35	0,68	0,66	-2,56	-2,53
0,45	-01,95	-02,01	1,06	1,04	-2,22	-2,19
0,50	-05,65	-05,77	1,47	1,47	-1,84	-1,81

Таблица 4 $\sigma_{\max}/\tau_{\max}$

h_1	изотр.	ортотр.
0,05	8,67	8,78
0,06	8,22	8,25
0,07	7,76	7,79
0,08	7,35	7,39
0,09	6,99	7,03
0,10	6,67	6,67
0,11	6,37	6,42
0,12	6,11	6,15
0,13	5,87	5,91
0,14	5,65	5,70
0,15	5,44	5,49
0,16	5,25	5,31
0,17	5,08	5,13
0,18	4,92	4,97
0,19	4,77	4,82
0,20	4,62	4,68
0,21	4,49	4,55
0,22	4,37	4,43
0,23	4,25	4,31
0,24	4,14	4,20
0,25	4,04	4,10

В табл.3 приведены значения безразмерного касательного напряжения $\tau_{\max} = \tau_{\max}/\delta_{11}$ в опорных сечениях $\bar{x} = 0, \bar{x} = 1$ и в сечении максималь

В табл.4 представлены отношения максимальных значений нормальных значений нормального и касательного напряжения. Оба эти напряжения свои наибольшие значения принимают в тонком сечении полосы $\bar{x} = 0$. Причем, наибольшее нормальное напряжение получается в крайних точках, а наибольшее касательное напряжение - в середине этого сечения. Как видно из данных табл.4, с увеличением толщины (параметра h_1) отношение $\sigma_{\max}/\tau_{\max}$ убывает. В рассмотренных пределах изменения h_1 оно доходит до 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1987. - 360 с.
2. Киракосян Р. М. Обобщенной теории анизотропных пластин переменной толщины. - Изв. АН РА. Механика, 1991. т. 44, №3.

Институт механики АН Армении
Поступила в редакцию 8.07.1992

О ТЕПЛОМ МЕХАНИЗМЕ ДИССИПАЦИИ В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ
СМЕСИ ПРИ КВАЗИИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ГАЗА В
ПУЗЫРЬКАХ

Օղանյան Գ. Գ.

Օղանյան Գ. Գ. Գազահեղուկ խառնուրդում ցրման ջերմային մեխանիզմի մասին, պոպուլյակներում գազի գրեթե իզոթերմ վարքի դեպքում

Արտածված է Բուսսիեսկու տիպի հավասարում, որում ապրոնակվում են ջերմափոխանակության և մասնիկների հալման ցրումը նկարագրող անդամներ նույնպես է ալիքի էվոլյուցիան նկարագրող հավասարումը:

Oghanyan G.G. On thermal dissipation mechanism of gaso-liquid mixture with quasi-isothermic behaviour of the gas in bubbles

В настоящей работе получено линейное уравнение типа Буссинески, содержащего в себе понятия двух различных волновых операторов, члены, характеризующие диссипацию за счет вязкости и теплообмена. Выделение из него уравнения, описывающего эволюцию распространяющейся лишь в одном направлении волны, приводит его к полному совпадению с линейной частью соответствующего нелинейного уравнения из [7]. Тем самым, доказывающей обоснованность использованного в [7] метода коротких волн для применения его к исследованию волновых процессов в газожидкостной смеси.

Влияние тепловых эффектов на волновую динамику пузырьковых систем исследовано в рамках механики сплошной среды в [1-3]. В этих работах методом численного моделирования впервые показано, что в ряде случаев главным механизмом диссипации может явиться межфазный теплообмен газовых пузырьков с окружающей их жидкостью. При этом кинетическая энергия жидкости, проходя стадию преобразования в тепловую энергию газа, необратимо рассеивается обратно в жидкость. Подтверждением выводов работ [1-3] служат результаты экспериментальных исследований, приведенных в [4]. За основу принята модель односкоростной двухтемпературной газожидкостной смеси со схемой эффективной вязкости [5,6]. В рамках той же модели, но без принятой схемы, в [7] выведены нелинейные эволюционные уравнения, описывающие квазиизотермический и квазиадиабатический режимы распространения волны слабой интенсивности. В каждом из этих промежуточных режимов получена аналитическая зависимость тепловой составляющей коэффициента от физических параметров смеси.

Показано, что при распространении звукового сигнала его высокочастотная часть, называемая предвестником [5,6], распространяется с скоростью, близкой по величине к скорости звука в чистой жидкости. За предвестником следует распространяющаяся с изотермической скоростью звука в смеси основная часть сигнала, которая соответствует низким частотам.

1. Исходные уравнения. Систему одномерных уравнений, описывающую течение односкоростной монодисперсной газожидкостной смеси с учетом эффектов вязкости, межфазного теплообмена и сжимаемости жидкости, возьмем в виде [5-7]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{4}{3}\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_1 \beta \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] \quad (1.2)$$

$$P_2 - P = (1-\varphi) \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + (1-\varphi) \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4}{R} \mu \frac{dR}{dt} \quad (1.3)$$

$$\frac{\rho \beta}{\rho_1 (1-\beta)} = \text{const}, \quad \rho_2 R^3 = \text{const}, \quad P_2 = c_{v2} (\gamma - 1) \rho_2 T_2 \quad (1.4)$$

$$\rho = \rho_1 (1-\beta) + \rho \beta, \quad P = P_1 (1-\beta) + P \beta \quad (1.5)$$

$$\frac{dP_2}{dt} + \frac{3\gamma P_2}{R} \frac{dR}{dt} + \frac{3(\gamma-1)k_2 Nu}{2R^2} (T_2 - T_0) = 0 \quad (1.6)$$

$$\rho_1 T_0 \frac{ds_1}{dt} = \frac{4}{3} \frac{\mu}{1-\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{12\beta}{R^2} \mu \left(\frac{dR}{dt} \right)^2, \quad T_1 = T_0$$

$$\varphi = \frac{1}{1-\beta} (1,1\beta^{1/3} - \beta), \quad \varphi_2 = \frac{1}{1-\beta} (1,5\beta^{1/3} - 1,3\beta) \quad (1.7)$$

Здесь индексы 1 и 2 отнесены соответственно к параметрам жидкой и газовой фаз, а параметры, характеризующие течение смеси в целом, индексов не имеют; β - объемное газосодержание, R - радиус пузырька, T - температура, γ - показатель адиабаты газа, c_{v2} - удельная теплоемкость при постоянном объеме, k_2 - коэффициент теплопроводности, Nu - число Нуссельта, остальные обозначения общеприняты. В принятой модели смеси предполагается, что, ввиду подвляющего превосходства массы и величины теплоемкости жидкости над соответствующими параметрами газовой фазы, а также отсутствия внешних источников тепла, температура несущей жидкости не меняется ($T_1 = T_0 = \text{const}$).

Предположим, что величины избыточных параметров течения малы ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon a_0 u', \quad P = P_0 (1 + \varepsilon P'), \quad P_1 = P_0 (1 + \varepsilon P_1') \\ \rho &= \rho_0 (1 + \varepsilon \rho'), \quad \rho_i = \rho_0 (1 + \varepsilon \rho_i'), \quad \beta = \beta_0 (1 + \varepsilon \beta'), \\ R &= R_0 (1 + \varepsilon R'), \quad T_2 = T_0 (1 + \varepsilon T'), \quad s_1 = s_{10} (1 + \varepsilon s_1') \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь индекс 0 отнесен к невозмущенному состоянию, являющимся состоянием покоя, ε - малый безразмерный параметр, a - скорость звука в смеси. Линеаризуя уравнение (1.7), находим, что в этом приближении $s_1' = 0$. Более точная оценка указывает, что $s_1' \sim \varepsilon^2$. Тогда, разлагая функцию $P_1 = P_1(\rho_1, s_1)$ в ряд Тейлора в окрестности состояния локального термодинамического равновесия жидкой фазы и ограничиваясь линейными членами, будем иметь

$$P_1' = \frac{\rho_{10} a_{10}^2}{P_0} \rho_1', \quad a_{10}^2 = \left(\frac{\partial P_1}{\partial \rho_1} \right)_0$$

Комбинируя последнюю формулу с линейными соотношениями, получаемы и, согласно (1.8), из алгебраических соотношений (1.4) и (1.5), находим

$$P' = (1 - \beta_0) P_1' + \beta_0 P_2', \quad \rho' = (1 - \beta_0) \rho_1' + \beta_0 \rho_2', \quad \rho_2' = -3R',$$

$$P_2' = T' - 3R', \quad \rho' = \frac{P_0}{\rho_{10} a_{10}^2} (P' - \beta_0 T') - 3\beta_0 \left(1 - \frac{P_0}{\rho_{10} a_{10}^2} \right) R' \quad (1.9)$$

2. Определяющие уравнения. Примем, что избыточная температура является величиной первого порядка малости в сравнении с величинами возмущений остальных параметров течения, то есть $T' \ll T$. Тем самым подчеркивается, что исследуется режим, в котором термодинамическое поведение газа в пузырьках хотя и близко к изотермическому, однако не совпадает с ним. Исследование, проведенное в [8] показало, что для характеристики межфазного теплообмена удобно ввести в рассмотрение безразмерное число Пекле

$$Pe = \frac{2R_0^2}{\lambda_2} \omega_{tr}, \quad \lambda_2 = \frac{k_2}{c_{p2} \rho_2}, \quad \omega_{tr} = \frac{1}{R_0} \left(\frac{3P_0}{\rho_{10}} \right)^{1/2}$$

где ω_{tr} - изотермическая резонансная частота Миннаерта, λ_2 - коэффициент теплопроводности. При этом в исследуемом режиме имеет место оценка

$$Pe \ll Nu \ll 1 \quad (2.1)$$

Линейризуя уравнение (1.6) и используя четвертое соотношение из (1.9), получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} + 3(\gamma - 1) \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{3\gamma M_0}{Pe} \omega_{tr} T = 0 \quad (2.2)$$

Здесь и далее штрихи над возмущениями параметров течения опускаются. Линейризация уравнения Рэлея-Лэмба и последующее его комбинирование с третьим соотношением из (1.9) дает

$$P = T - 3R - \frac{3(1 - \beta_0)}{\omega_{tr}^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - \frac{4\mu}{P_0} \frac{\partial R}{\partial t} \quad (2.3)$$

Линейризуя уравнения (1.1) и (1.2), приходим к системе, которая путем исключения возмущения скорости сводится к одному уравнению. Исключая в этом промежуточном уравнении избыточную плотность посредством последнего соотношения из (1.9), будем иметь

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{4\mu}{3\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) [P - \beta_0 T - 3\beta_0 \left(1 - \frac{\rho_{10} a_{10}^2}{P_0} \right) R] - \frac{\rho_{10} a_{10}^2}{\rho_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 \quad (2.4)$$

Замкнутая система уравнений (2.2)-(2.4) полностью описывает волновое движение газожидкостной смеси с учетом эффектов вязкости и межфазного теплообмена. Она отличается от системы, исследуемой в [6] где принята схема течения смеси с эффективной вязкостью. Решение системы будем искать в виде бегущих волн, которые определяются волновым числом k и частотой ω

$$P = P_0 \exp [i(kx - \omega t)], \quad T = T_0 \exp [i(kx - \omega t)], \quad R = R_0 \exp [i(kx - \omega t)]$$

Из условия существования ненулевых решений для системы однородных уравнений относительно амплитуд P_* , R_* , T_* и учета оценки (2.1), характеризующей исследуемый волновой режим, находим

$$\begin{aligned} \omega^2 - a_0^2 k^2 - \frac{1-\beta_0}{\omega^2} \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \omega^2 \left(\omega^2 - \frac{\rho_{10} a_{10}^2}{\rho_0} k^2 \right) - \left(\frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \right. \\ \left. + \frac{Pe}{Nu} \frac{1}{3\omega} \frac{a_0^2}{\nu} \right) \omega^3 + \left[\frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_0} \left(1 + \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_0} \right) + \frac{Pe}{Nu} \frac{a_0^2}{3\omega} \right] \omega k^2 \\ \left. + \frac{Pe}{Nu} \frac{1}{3\omega} \frac{1-\beta_0}{\omega^2} \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \omega^3 \left(\omega^2 - \frac{\rho_{10} a_{10}^2}{\rho_0} k^2 \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

При выводе уравнения использованы определения изотермической a_0 и адиабатической a_0 скоростей звука в невозмущенной смеси [7,9]

$$\frac{1}{a_0^2} = \frac{(1-\beta_0)\rho_0}{\rho_{10} a_{10}^2} + \frac{\beta_0 \rho_0}{P_0}, \quad \frac{1}{a_0^2} = \frac{(1-\beta_0)\rho_0}{\rho_{10} a_{10}^2} + \frac{\beta_0 \rho_0}{\gamma P_0}$$

Если учесть, что величинам k и ω соответствуют операторы $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial t$, то из дисперсионного уравнения (2.5) можно восстановить уравнение, описывающее изменение избыточного давления

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1-\beta_0}{\omega^2} \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\rho_{10} a_{10}^2}{\rho_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) + (\alpha_l + \alpha_r) \frac{\partial^3 P}{\partial t^3} \\ - (\delta_l + \delta_r) \frac{\partial^3 P}{\partial t \partial x^2} + \nu_T \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\rho_{10} a_{10}^2}{\rho_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\alpha_l = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_{10} a_{10}^2}, \quad \alpha_r = \frac{Pe}{Nu} \frac{1}{3\omega} \frac{a_0^2}{\nu}, \quad \delta_l = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_0} \left(1 + \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_0} \right),$$

$$\delta_r = \frac{Pe}{Nu} \frac{a_0^2}{3\omega \nu}, \quad \nu_T = \frac{Pe}{Nu} \frac{1}{3\omega} \frac{1-\beta_0}{\omega^2} \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_{10} a_{10}^2}$$

$$\frac{a_0^2}{\rho_0} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\beta_0 \rho_0 a_0^2}{P_0} = \frac{1}{\gamma} \left[1 + (\gamma-1) \frac{(1-\beta_0)\rho_0 a_0^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \right]$$

Учет оценки (2.1) при выводе уравнения (2.5) фиктивно означает, что взаимным воздействием друг на друга эффектов вязкости и дисперсии с эффектом теплообмена пренебрегается, поскольку такой учет приводит к появлению в уравнениях (2.5) и (2.6) слагаемых более высокого порядка малости, чем выписанные.

Полученное уравнение, называемое двухволновым [5] в отсутствие эффектов теплообмена ($Pe \rightarrow 0$) и вязкости полностью исследовано в [5,6]. Оно описывает поведение волн давления, распространяющихся вдоль положительной и отрицательной полуосей Ox . Чтобы иметь представления о порядках величин коэффициентов α_k , α_l , δ_l и δ_r в реальных смесях, при вычислении которых использованы некоторые результаты из [8]. Видно, что величины δ_l и α_l не только сравнимы, но могут и превосходить значения δ_r и α_r на порядок и больше. А этот факт означает, что для указанных диапазонов размеров пузырьков главным механизмом диссипации является межфазный теплообмен. В случае мелких пузырьков (для смеси вода-воздух $R_0 < 1 \times 10^6$ м, для смеси вода-гелий

$R_0 < 7 \times 10^6$ м) будем иметь практически изотермический режим, в котором теплообмена практически нет. В случае пузырьков умеренно больших размеров волновой режим будет квазиадиабатическим, при этом опять будет иметь место интенсивный теплообмен, который и станет главным механизмом диссипации. Еще большее увеличение размеров пузырьков приводит практически к адиабатическому режиму, при котором теплообмен практически отсутствует. Для двух последних режимов предлагаемая теория уже неприменима и для их описания нужна другая теория, изложение которой будет дано в последующей работе.

Таблица I

$$P_0 = 0,1 \text{ МПа}; \beta_0 = 0,01; a_0 = 100 \text{ м/с}; a_{10} = 1500 \text{ м/с};$$

$$\delta_l = 1,36 \times 10^{-4} \text{ м/с}; \alpha_l = 6 \times 10^{-11} \text{ с}.$$

Водо-воздушная смесь			Водо-гелиевая смесь		
$R_0, \text{ м}$	$\delta_T, \text{ м/с}$	$\alpha_T, \text{ с}$	$R_0, \text{ м}$	$\delta_T, \text{ м/с}$	$\alpha_T, \text{ с}$
3×10^6	$2,62 \times 10^{-4}$	$1,34 \times 10^{-8}$	1×10^5	$3,74 \times 10^{-4}$	$2,2 \times 10^{-8}$
5×10^6	$7,17 \times 10^{-4}$	$5,11 \times 10^{-8}$	3×10^5	$3,24 \times 10^{-3}$	$1,91 \times 10^{-7}$
6×10^6	$1,04 \times 10^{-3}$	$7,34 \times 10^{-8}$	4×10^5	$5,73 \times 10^{-3}$	$3,37 \times 10^{-7}$
7×10^6	$1,41 \times 10^{-3}$	$9,98 \times 10^{-8}$	5×10^5	$8,72 \times 10^{-3}$	$5,25 \times 10^{-7}$

Если в уравнении (2.5) пренебречь последним слагаемым в сравнении с четвертым и пятым, то приходим к ограничению

$$\omega < \frac{a_0}{a_0} \omega_r \sqrt{\frac{\gamma}{1-\beta_0}} \approx \omega_r \sqrt{\frac{1}{1-\beta_0}} = \omega_r^*$$

на величину частот реализуемых волн. Отметим, что в отсутствие теплообмена (при квазиизотермическом режиме $Pe = 0$) такого ограничения нет. Таким образом, распространение сравнительно длинных волн с частотами, меньшими, чем приведенная изотермическая ω_{in}^* можно описать следующим укороченным, а не полным уравнением (2.6):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + (a_l + a_T) \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} - (\delta_l + \delta_T) \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2} + \frac{1}{\omega_r^2} \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_0 a_{10}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\rho_{10} a_{10}^2}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (2.7)$$

Наличие волновых операторов разных порядков в уравнениях (2.6) и (2.7) свидетельствуют об иерархии распространения волн. Согласно теории Уизема [9] первые звуковые системы, называемые в нашем случае предвестниками [5,6] распространяются со скоростью, близкой к величине скорости звука в жидкости. Основная часть сигнала отстает и движется с изотермической скоростью звука в смеси. Поскольку основное движение описывается волновым оператором низшего порядка, постольку в окрестности фронта волны можно считать выполненным равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} = \pm a_0 \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.8)$$

которые в отсутствие диссипации и дисперсии являются точными. Совершив

факторизацию уравнения (2.7) посредством связи (2.8), взятой с нижним знаком, получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} + a_D \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\omega_p^2} \frac{a_1^2}{2} \left(1 - \frac{\rho_0 a_1^2}{\rho_{10} a_{10}^2}\right) \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} - \frac{\delta^*}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

$$\delta^* = \delta_I + \delta_T - (\alpha_T + \alpha_I) a_1^2$$

Данное уравнение описывает распространение вдоль отрицательной оси ox волны давления и полностью совпадает с линейной частью записанного в размерных переменных нелинейного эволюционного уравнения Бюргерса-де Вриза, выведенного в [7] методом коротких волн. Тем самым доказана обоснованность и корректность применения метода коротких волн в исследовании волнового движения газожидкостной смеси. Отсюда можно сделать заключение о том, что уравнение БКДВ описывает распространение таких длинноволновых звуковых сигналов, величины частот которых меньше ω_p^* . Заметим, что использование связи (2.8) для объединения диссипативных слагаемых уравнения (2.7) приводит к уравнению, изотермический вариант которого ($\alpha_T = \delta_T = 0$) впервые получен и исследован в [5].

Для волн, величины частот которых одного порядка с приведенной изотермической $\omega = \omega_p^*$, необходимо исходить от полного уравнения (2.6), факторизация которого приводит к эволюционному уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial t} + a_D \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\omega_p^2} \frac{a_1^2}{2} \left(1 - \frac{\rho_0 a_1^2}{\rho_{10} a_{10}^2}\right) \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} - \frac{\delta^*}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

$$- \frac{Pe}{Nu} \frac{1}{\gamma \omega_p} \frac{a_1^4}{\omega_p^2} \left(1 - \frac{\rho_0 a_1^2}{\rho_{10} a_{10}^2}\right) \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} = 0$$

Подчеркнем, что использование связи (2.8) в диссипативных и иных слагаемых уравнений (2.6) и (2.7) правомерно лишь в случае, когда влияние диссипации и дисперсии на эволюцию волны мало, означающее, что на расстояниях порядка длины волны и в течении времени порядка ее периода профиль волны должен деформироваться мало и ее амплитуда должна затухать слабо.

3. Зависимость фазовой скорости от частоты. Выше были кратко изложены некоторые выводы теории Унзега об иерархии волн. К аналогичным выводам можно прийти иным путем - при исследовании частотной зависимости фазовой скорости. Поскольку дисперсионное уравнение (2.5) является комплексным, примем, что частота ω является действительной, а волновое число k комплексной величиной: $k = k_1 + ik_2$

Тогда искомое решение в виде бегущей волны запишется в виде

$$P = P_0 \exp(-k_2 x) \exp[i(k_1 x - \omega t)], \quad k_2 > 0$$

то есть фактически принимается закон экспоненциального затухания амплитуды волны по пространственной координате. По определению, фазовая скорость является скоростью распространения фазы волны, поэтому

$$\frac{1}{c_{ph}} \equiv \frac{k_1}{\omega} = \frac{\text{Re}(k)}{\text{Re}(\omega)} \equiv \text{Re} \left(\frac{k}{\omega} \right)$$

Из дисперсионного уравнения (2.5) находим

$$a_1^2 \frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1 - bz^2 - i\alpha z + \nu bz^3}{1 - z^2 - i\alpha(\delta - \nu z^2)} \equiv (f + ig)^2 \quad (3.1)$$

$$\text{где } \alpha = (\alpha_l + \alpha_T) \omega_{\tau}^*, \delta = \frac{\delta_l + \delta_T}{a_b} \omega_{\tau}^*, z = \frac{\omega}{\omega_{\tau}^*},$$

$$v = \frac{\rho_e}{\lambda \mu \gamma \sqrt{1 - \gamma_0}} = \frac{v_T}{b} \omega_{\tau}^*, \quad b = \frac{\rho_0 a_b^2}{\rho_{10} a_{10}}$$

Нетрудно убедиться, что $a_b^2 / c_{ph}^2 = f^2$. Отделяя в уравнении (3.1) действительную и мнимую части и находя функции f и g , получим

$$\frac{a_b^2}{c_{ph}^2} = \frac{1(1-z^2)(1-bz^2) + z^2(\alpha v b z^2)(\delta - v z^2)}{(1-z^2) + z^2(\delta - v z^2)}$$

$$z \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \left[\frac{z(\delta - v z^2)(1 - b z^2) - z(1 - z^2)(\alpha v b z^2)}{(1 - z^2)(1 - b z^2) - z^2(\alpha v b z^2)(\delta - v z^2)} \right]^2} \right\} \quad (3.2)$$

В случае укороченного (без последнего слагаемого) варианта дисперсионного уравнения (2.5), которому соответствует дифференциальное уравнение (2.7), будем иметь аналогичную зависимость с $v \equiv 0$. Если же исходить от уравнения (2.6), предварительно объединив диссипативные слагаемые, то для фазовой скорости будем иметь приближенную зависимость

$$\frac{a_b^2}{c_{ph}^2} = \frac{(1-z^2)(1-bz^2)}{2[(1-z^2) + z^2(\delta - \alpha)^2]} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{z^2(\delta - \alpha)^2}{(1-z^2)^2}} \right\} \quad (3.3)$$

Именно формула (3.3), но без учета эффекта межфазного теплообмена ($\alpha_T = \delta_T = 0$), исследовалась в [5]. Перейдем к анализу полученных формул.

При $z \rightarrow 0$ ($\omega \rightarrow 0$) будем иметь $c_{ph} \rightarrow a_b$, означающее, что изотермическая скорость звука в смеси является скоростью распространения предельно низкочастотного сигнала. Известно [5, 6] что в отсутствие эффектов диссипации при $z \rightarrow 1$ происходит вырождение бегущей волны в стоячую, поскольку $c_{ph} \rightarrow 0$. Из формулы (3.2) при $z \rightarrow 1$ следует значение

$$\frac{1}{c_{ph}} = \frac{1}{2a_b} \frac{\alpha v b}{\delta - v} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{1-b}{\alpha v b} \right)^2} \right]$$

откуда видно, что даже в отсутствие вязкости ($\alpha_l = \delta_l = 0$) вырождение устраняется ($c_{ph} \neq 0$) за счет наличия теплообмена при этом, согласно определениям коэффициентов $\alpha v b > 0$, $\delta - v > 0$.

Если же $z \rightarrow z_{\sigma}$ ($\omega \rightarrow \omega_{\sigma}$), где

$$z_{\sigma} = \sqrt{b} = \sqrt{\frac{\rho_{10}}{\rho_0} \frac{a_{10}}{a_b}}, \quad \omega_{\sigma} = \omega_b^* \sqrt{\frac{\rho_{10}}{\rho_0} \frac{a_{10}}{a_b}}$$

то в формуле (3.2) возникает особенность, поскольку $c_{ph} \rightarrow \infty$. Так как в этом случае, формально, $k \rightarrow 0$, то длина гармонической волны стремится к бесконечности. Эта особенность устраняется в точной формуле (3.2).

При $z \rightarrow \infty$ ($\omega \rightarrow \infty$) будем иметь значение

$$c_{ph} = a_{10} \sqrt{\frac{\rho_{10}}{\rho_0}}$$

означающее, что скорость распространения предельно высокочастотного звукового сигнала почти совпадает со скоростью звука в жидкости.

Аналогичное исследование можно провести и для коэффициента затухания k_2 , зависимость которого от переменной $z = \omega / \omega_{\tau}^*$ определяется формулой

$$k_2 = \frac{\omega}{a_D} g(z) = z g(z) \frac{\omega_F^2}{a_D}$$

Здесь функция $g(z)$ находится из уравнения (3.1) и имеет вид

$$g(z) = \pm \frac{c_M}{2a_D} \frac{z(1-bz^2)(\delta-vz^2) - \alpha(1-z^2)(\alpha+vbz^2)}{(1-z^2)^2 + z^2(\delta-vz^2)^2}$$

На фиг.1 выявленные зависимости, выражаемые формулой (3.2), схематично представлены в виде сплошных кривых, а формулой (3.3) - пунктирами.

В заключение отметим, что известны [5,10] попытки согласования результатов экспериментов [11] с числовыми данными, вытекающими из формулы (3.3). Сама постановка вопроса является некорректной, поскольку, согласно исходным данным из [11] в силу выбора размеров пузырьков режим распространения сигнала является квазиадиабатическим. Именно потому результаты теории и эксперимента дают лишь качественное совпадение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш. Структура ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа. - Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, №6, с.30-41.
2. Нигматулин Р.И., Ивандеев А.И., Нигматулин Б.И., Милашенко Б.И. Нестационарные волновые процессы в газо- и парожидкостных смесях. - Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, с.80-90.
3. Губайдуллин А.А., Ивандеев А.И., Нигматулин Р.И. Исследование нестационарных ударных волн в газо- и парожидкостных смесях пузырьковой структуры. - ПМТФ, 1978, №2, с.78-86.
4. Кузнецов В.В., Накоряков В.Е., Покусеев Б.Г., Шрейбер И.Р. Экспериментальное исследование распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа. - Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1977, с.32-44.
5. Накоряков В.Е., Покусеев Б.Г., Шрейбер И.Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. - Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1983, 283с.
6. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.2. - М.: Наука, 1987. 360с.
7. Оганян Г.Г. Об уравнениях нелинейной акустики газожидкостных сред. - Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1988, т.41, №3, с.25-36.
8. Оганян Г.Г. Освободных малых колебаниях газового пузырька в несжимаемой жидкости. Изв. АН Армении. Механика, 1991, т.44, №1, с.41-47.
9. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. - М.: Мир, 1977. 622с. 10. Wijngaarden L. Van. One dimensional flow of liquids containing small gas bubbles. - Ann. Rev. Fluid Mech., 1972, v.4, p.369-396. Русск. пер. - Реология суспензий. М.: Мир, 1975, с.68-103.
11. Fox F.E., Curley S.R., Larson G.S. Phase velocity and absorption measurements in water containing air bubbles. - J. Acoust. Soc. Amer., 1955, v.27, no.7, p.534-539.

Институт механики АН Армении
Поступила в редакцию 3.08.1992

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (1.1)$$

дополненную материальными уравнениями

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (1.2)$$

где \vec{H} - вектор напряженности магнитного поля; \vec{E} - вектор напряженности электрического поля; \vec{B} - вектор индукции магнитного поля; \vec{D} - вектор электрической индукции; \vec{j} - вектор плотности токов проводимости; ρ - объемная плотность электрических зарядов; ϵ - диэлектрическая проницаемость; μ - магнитная проницаемость; γ - удельная электрическая проводимость.

Можно показать, что при анализе процессов в устройствах обработки металлических изделий можно пренебречь плотностью токов смещения $\partial \vec{D} / \partial t$. Система уравнений (1.1) упрощается также вследствие отсутствия в индукторной системе объемных электрических зарядов ($\rho = 0$).

При исследовании осесимметричных индукторных систем решение системы уравнений (1.1), (1.2) осуществляется в терминах векторного магнитного потенциала A , который вводится соотношением

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (1.3)$$

и имеет одну окружную составляющую $\vec{A}(r, z, t)$.

Из уравнений (1.1)-(1.3) с учетом сделанных упрощений можно получить уравнение в частных производных, описывающее пространственное и временное распределение электромагнитного поля

$$\gamma \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} r A \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \gamma E_0 \quad (1.4)$$

где E_0 - напряженность стороннего электрического поля, создаваемого генератором установки.

Уравнение (1.4) решается при следующих граничных условиях: $\partial A / \partial z = 0$ в плоскости симметрии; $A = 0$ при $r = 0$, на достаточно удаленной от индуктора границе Γ (фиг.1)

$$\frac{\partial A}{\partial n} = \alpha_A (A - A_0)$$

где n - нормаль к границе Γ ; α_A - штрафной множитель; A_0 - заданное распределение векторного магнитного потенциала вдоль границы Γ . В качестве последнего может быть использовано, например, известное аналитическое решение для соленоида на достаточно больших расстояниях от его центра [6]. Такие смягченные граничные условия принимать предпочтительнее, чем полагать $A = 0$ или использовать точно вычисленные значения A_0 . Следует отметить, что влияние погрешности граничных условий на удаленной границе незначительно.

Уравнение (1.4) с приведенными выше граничными условиями решается МКЭ при использовании простейшего элемента в виде произвольного четырехугольника с узлами в вершинах с пятилинейной аппроксимацией потенциальной функции [5].

Решение уравнения (1.4) является необходимым условием локального экстремума функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_V \left[\frac{1}{\mu r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r A \right)^2 + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 + 2\gamma A \frac{\partial A}{\partial t} - 2\gamma A E_0 \right] r ds + \int_L \alpha_A \left(\frac{A}{2} - A_0 \right) r dL \quad (1.5)$$

в произвольный момент времени.

Применяя к функционалу (1.5) известную процедуру МКЭ [5], получаем систему разрешающих уравнений для одних элементов, из которых формируем систему для всей расчетной области. При этом для решения нестационарной задачи электродинамики используется неявная конечно-разностная схема Крэнка-Николсона

$$\frac{\partial A(t + \Delta t)}{\partial t} = [A(t + \Delta t) - A(t)] \frac{2}{\Delta t} - \frac{\partial A(t)}{\partial t} \quad (1.6)$$

где Δt - величина шага по времени.

Неявная конечно-разностная схема (1.6) является абсолютно устойчивой и обеспечивает квадратичный закон изменения решения в пределах временного шага.

Полученная система разрешающих уравнений в общем случае является существенно нелинейной, так как магнитная проницаемость μ ферромагнитных материалов зависит от напряженности магнитного поля H . При выполнении численных расчетов реализована кусочно-линейная аппроксимация основной кривой намагничивания $B(H)$, обеспечивающая требуемую точность описания магнитных свойств материалов. Для учета зависимости магнитной проницаемости от температуры используется аппроксимация:

$$\mu(H, T) = \mu_0 + \mu(H) - \mu_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_k} \right)^m \right], \quad T \leq T_k,$$

$$\mu = \mu_0, \quad T \geq T_k$$

где μ_0 - магнитная проницаемость вакуума, T_k - температура точки Кюри ферромагнетика, $m = 2,4$

Для решения нелинейной задачи электродинамики используется эффективный итерационный процесс, заключающийся в уточнении магнитной проницаемости в каждом узле интегрирования. Для ускорения сходимости итерационного процесса n -е приближение для магнитной проницаемости представляется в виде

$$\frac{1}{\mu_n} = \frac{1}{\mu_{n-1}} \alpha + \frac{H_{n-1}}{B_{n-1}} (1 - \alpha) \quad (1.7)$$

где α - коэффициент демпфирования итерационного процесса. Выполненные численные эксперименты показали, что оптимальная величина коэффициента α в формуле (1.7) находится в пределах 0,5-0,75. Указанный итерационный процесс выполняется на каждом временном шаге нелинейной нестационарной задачи электродинамики.

Рассмотрим процесс контактной точечной сварки с использованием сварочной машины переменного тока [4]. Расчетная область для задачи моделирования электрического поля представляет собой сплошное неоднородное цилиндрическое пространство (фиг.2), включающее электрод 1, деталь 2, диэлектрические под области (воздух) 3, под области контакта электрод-деталь 5.

Задача расчета электрического поля сводится к получению пространственного распределения амплитудного значения потенциала $U(r, z)$.

Из уравнения непрерывности

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = 0$$

с учетом соотношений

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}, \quad \vec{E} = -\nabla U$$

легко получить уравнение, описывающее распределение $U(r,z)$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \gamma \right) + \frac{1}{r} \gamma \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) должно быть решено при следующих граничных условиях (фиг.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r_1} = 0, \\ U \Big|_{r_2} = U_m \Big|_{r_2}, \quad U \Big|_{r_3} = \frac{1}{2} U_m \Big|_{r_3} \end{aligned} \quad (1.9)$$

где U_m - амплитудное значение разности потенциалов между электродами.

Решение уравнения (1.8) с граничными условиями (1.9) является необходимым условием локального экстремума функционала

$$J_1 = \frac{1}{2} \int \int_S \left[\gamma \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \gamma \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz \quad (1.10)$$

Применяя к функционалу (1.10) процедуру МКЭ [5] получаем систему разрешающих уравнений для одного элемента и формируем систему для всей расчетной области.

2. Исследование тепловых процессов

Распределение температуры в рассматриваемых рабочих узлах электротехнологического оборудования описывается нестационарным уравнением теплопроводности

$$\varphi \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k_r \frac{\partial T}{\partial r} + r k_{rz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{rz} \frac{\partial T}{\partial r} + k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q \quad (2.1)$$

где c - объемная теплоемкость материала; ρ - плотность; k_r, k_z, k_{rz} - компоненты тензора теплопроводности анизотропного материала; Q - мощность внутренних источников тепла.

Пространственное и, в общем случае, временное распределение величины Q определяется по результатам расчета электрических и магнитных полей.

После расчета распределения электромагнитного поля в индукторной системе определяется плотность тока в проводящих подобластях конструкции:

$$\delta(t) = \gamma \left(E_0(t) - \frac{\partial A}{\partial t} \right) \quad - \text{ в индукторе}$$

$$\delta(t) = -\gamma \frac{\partial A}{\partial t} \quad - \text{ в заготовке} \quad (2.2)$$

Далее определяется величина

$$Q = \frac{1}{\gamma} \delta^2 \quad (2.3)$$

в каждом узле проводящих подобластей на всех временных шагах нестационарной задачи электродинамики.

При моделировании процесса обработки заготовки серией коротких затухающих импульсов магнитного поля вычисляется усредненная по периоду следования импульсов $T_{им}$ величина

$$Q_{\varphi} = \frac{1}{T_{им}} \int_0^{T_{им}} Q dt \quad (2.4)$$

При исследовании процесса контактной сварки после решения уравнения

(1.8) рассчитываются распределения величин

$$\delta = \gamma \vec{E}, \quad \vec{E} = -\nabla U \quad Q_m = \frac{1}{\gamma} \delta^2 \quad (2.5)$$

где Q_m — максимальная мощность внутренних источников тепла. Усредняя величину

$$Q(r, z, t) = Q_m(r, z) \sin^2(\omega t + \beta)$$

по периоду колебаний $T = 2\pi/\omega$, получаем величину

$$Q_{\text{ср}} = \frac{1}{2} Q_m \quad (2.6)$$

которая подставляется в уравнение (2.1).

Обработываемые изделия, индукторы и электроды находятся в сложных условиях теплообмена. Уравнение (2.1) в общем случае должно быть решено с граничными условиями 1-го, 2-го или 3-го рода и с учетом теплообмена излучением по закону Стефана-Больцмана. Красная задача сводится к линейаризованному функциональному уравнению [7], которое решается в соответствии с процедурой МКЭ [5,7]

3. Задача термоупругопластичности

Задача термоупругопластичности решается с учетом геометрической нелинейности и истории нагружения на той же конечно-элементной сетке, что и задача теплопроводности. В общем случае, рассматриваются анизотропные объекты сложной конфигурации с учетом объемного и поверхностного силового, а также температурного нагружения.

Для определения напряженно-деформированного состояния в конце шага используется линейаризованное вариационное уравнение Лагранжа в приращениях

$$\int_S (\Delta \sigma^{\alpha\beta} \delta \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} + {}^{(1)}\sigma^{\alpha\beta} \delta \Delta \gamma_{\alpha\beta} - \Delta P^{\alpha} \delta \Delta u_{\alpha}) r dS - \int_L \Delta P^{\alpha} \delta \Delta u_{\alpha} r dL + \int_S ({}^{(1)}\sigma^{\alpha\beta} \delta \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} - {}^{(1)}P^{\alpha} \delta \Delta u_{\alpha}) r dS - \int_L ({}^{(1)}P^{\alpha} \delta \Delta u_{\alpha}) r dL = 0 \quad (3.1)$$

где S, L — площадь меридионального сечения и его граница в исходном (недеформированном) состоянии S_0 ; ${}^{(1)}\sigma^{\alpha\beta}$, $\Delta \sigma_{\alpha\beta}$ — компоненты полного тензора и тензора приращений напряжений Пiola, отнесенные к размерам объемного элемента до деформаций; ${}^{(1)}P^{\alpha}$, ΔP^{α} — компоненты объемной нагрузки в начале шага (состояние S_1) и на шаге приращения, ${}^{(1)}P^{\alpha}$, ΔP^{α} — компоненты поверхностной нагрузки в состоянии S_1 и на шаге приращения; Δu_{α} — компоненты приращения перемещений.

Повд сторонние силы, необходимые для решения уравнения (3.1), рассчитываются по формулам

$$\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2, \quad \vec{T}_1 = \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{N}, \quad \vec{T}_2 = \frac{1}{\mu_0} [(\vec{j} \cdot \vec{N}) \vec{B} + \vec{T}_1 \text{rad} \vec{B}], \quad \vec{T} = \vec{B} \cdot \mu_0 \vec{H} \quad (3.2)$$

При решении уравнения (3.1) параметры начала шага считаются известными. Физические соотношения предполагают представление тензора приращений деформаций в виде суммы приращений упругой, температурной и пластической деформаций:

$$\Delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^e + \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^t + \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^p \quad (3.3)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij} = {}^{(2)}A_{ijkl} \Delta \sigma^{km} + \Delta A_{ijkl} {}^{(1)}\sigma^{km} \quad (3.4)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij} = {}^{(2)}\alpha_i {}^{(2)}\gamma_j - {}^{(1)}\alpha_i {}^{(1)}\gamma_j, \quad \Delta \varepsilon_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j \quad (3.5)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_{ij}} \right)^2 \left(\frac{1}{E_1^2} - \frac{1}{E_2^2} \right) {}^{(1)}\sigma_{ij} {}^{(1)}\sigma_{km} \Delta \sigma^{km} + \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_{ij}} \left(\frac{1}{E_1^2} - \frac{1}{E_2^2} \right) ({}^{(1)}\sigma_{ij} - {}^{(2)}\sigma_{ij}) \quad (3.6)$$

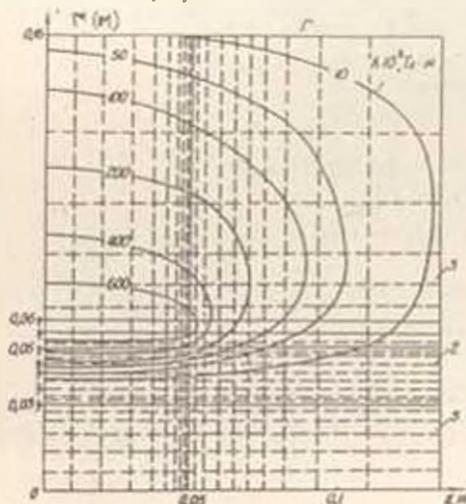
где $\Delta A_{ijkl} = {}^{(2)}A_{ijkl} - {}^{(1)}A_{ijkl}$ приращение коэффициента закона Гука вследствие изменения температуры на шаг; $E_1^{(2)}, E_2^{(2)}$ модуль Юнга и касательный модуль к диаграмме деформирования изотропного материала в начале шага при температуре α_1, γ_T ; коэффициенты линейного температурного расширения; S_{ij} дивизор напряжений; σ_{ij} интенсивность напряжений; σ_T предел текучести, соответствующий началу шага. Лямбда верхние индексы в круглых скобках 1 и 2 означают, что величина относится к началу и к концу временного шага соответственно.

При решении задачи используется теория типа течения с изотропным упрочнением [7] в соответствии с которой приращения компонент пластической деформации вычисляются по формуле (3.6). Данная теория удовлетворительно описывает поведение материала при деформациях до нескольких процентов в случае активного нагружения и упругой разгрузки.

Применяя процедуру МКЭ к управлению (3.1) с учетом (3.3)-(3.6), получаем систему алгебраических уравнений, решение которой определяет значение вектора приращений смещений Δu_i на временном шаге. Результирующее решение получается накоплением величин $\Delta u_i, \Delta \sigma^k, \Delta \varepsilon_{ij}$ от шага к шагу. Перемещения вычисляются в узлах конечных элементов, а деформации и напряжения - в центрах конечных элементов, где они имеют наибольшую точность.

4. Алгоритм анализа связанных физико-механических полей

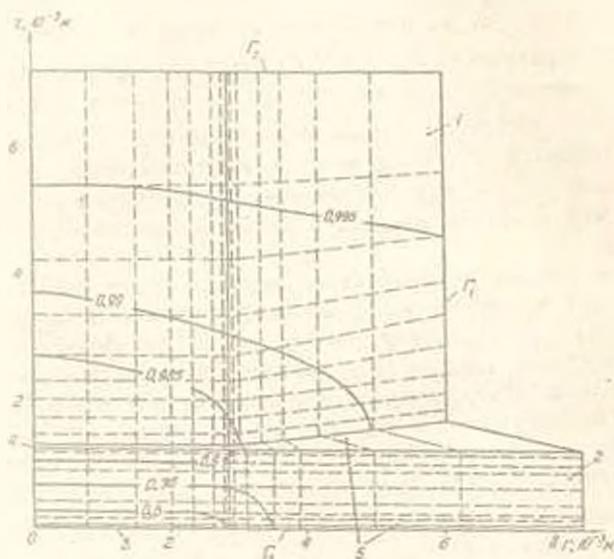
Для решения связанной задачи реализован специальный итерационный процесс, заключающийся в многократном расчете магнитного (электрического), температурного и механического полей. При этом, на каждой итерации функционал (1.5) или (1.10) минимизируется с учетом распределения температуры, полученного на предыдущей итерации. Это позволяет учесть влияние температурного поля на магнитное (электрическое) поле путем учета температурной зависимости электрофизических свойств материалов.



фиг. 1

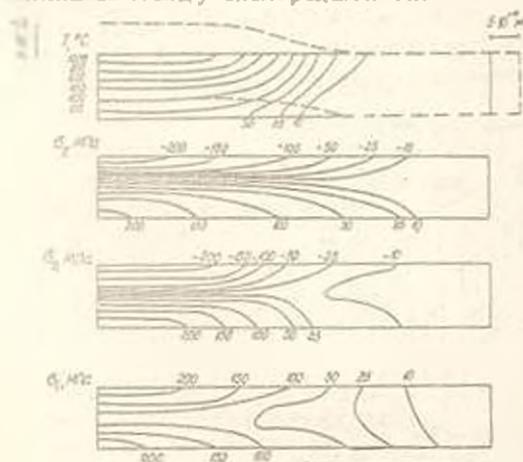
Описание методики решения задач механики электромагнитных сплошных сред реализована в виде программного комплекса на ЭВМ Единой серии. Выявлено исследование ряда реальных технологических процессов. Некоторые из полученных результатов можно проиллюстрировать фиг.1-4.

На фиг.1 представлена индукторная система установки для термической обработки металлов серией затухающих синусоидальных импульсов магнитного поля, представлена разбивка на конечные элементы. Индуктор 1 выполнен из меди, заготовка 2 - из стали 12Х18Н10Т. Сила тока в индукторе - 111,6 кА, частота модуляции - 8 кГц. На фиг.1 показаны изолинии векторного магнитного потенциала в момент времени 37,5 мкс.



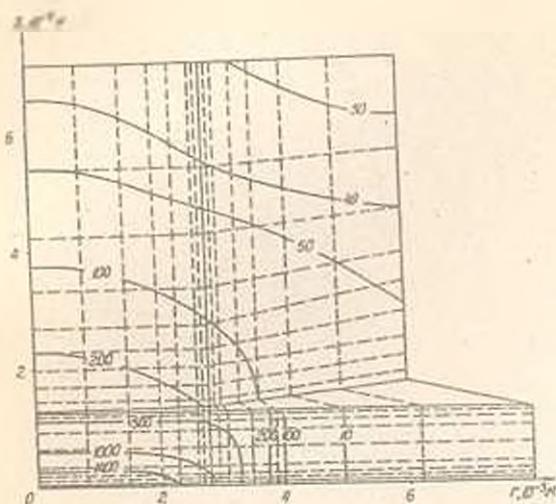
фиг. 2

На фиг.2 показана расчетная область задачи о точечной сварке, разбивка на конечные элементы и изолинии амплитудного значения потенциала Φ . Индуктор 1 изготовлен из меди, деталь 2 - из стали 12Х12Н10Т. Разность потенциалов между электродами 1В.



фиг.3

На фиг.3 представлены изотермы, линии равного уровня напряжений в заготовке, а также деформированное состояние последней через 9 с после начала обработки.



Фиг.4 иллюстрирует изотермы для момента выключения сварочного тока (0,128 с.).

Разработанные методики и программное обеспечение позволяют определять рациональные режимы ведения технологических процессов и конструктивные решения оборудования без использования дорогостоящего натурального эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кувалдин А. Б. Индукционный нагрев ферромагнитной стали. - М.: Энергоатомиздат, 1986. 200 с.
2. Белый И. В., Фертик С. М., Хименко И. Т. Справочник по магнитоимпульсной обработке металлов. - Харьков: Вицашкола, 1977. 168 с.
3. Капленко И. В., Матвейчук В. А. Индукционная технология соединений деталей и машин // Первый Всесоюзный Съезд технологов-машинистров: Тезисы докладов. - М.: Внешторгиздат, 1989, с. 69.
4. Технологии и оборудование контактной сварки / Под редакцией Б. Д. Орлова. - М.: Машиностроение, 1975. 536 с.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975. 541 с.
6. Шнейерсон Г. А. Поля переходных процессов в аппаратуре сверхсиловых токов. - Л.: Энергия, 1981. 200 с. 7. Подгорный А. Н., Гонтаровский П. П., Киркач Б. Н. и др. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. - Киев: Наукова думка, 1989. 232 с.

Институт проблем машиностроения АН Украины
Поступила в редакцию 21.04.1992 г.