ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1992

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 45, № 1-2, 1992 Механика

ЕЩЕ РАЗ О РЕШЕНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

САРКИСЯН В.С.

[illegible]

Sarkisian V.S. Again on solution of one integro-differential singular equations system with Cauchy kernel

[illegible]

Предлагается метод решения одной системы интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в приложениях задач математической физики, гидромеханики, теории теплопроводности.

В теории упругости [1,2], гидромеханики, в теории теплопроводности и в некоторых задачах математической физики можно встретить следующую систему интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(t)\,dt}{t-x}+c_1\int_{-1}^{1}\frac{\psi'(t)\,dt}{t-x}+c_2\pi\varphi'(x)+c_3\pi\psi'(x)=\lambda\varphi(x)$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\psi'(t)\,dt}{t-x}+c_4\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(t)\,dt}{t-x}+c_5\pi\varphi'(x)+c_6\pi\psi'(x)=0 \qquad (1.1)$$

$$|x|<1$$

где c_i $(i=1,\ldots,6)$ и λ некоторые постоянные.

Рассмотрим систему (1.1) при граничных условиях (1.2)

$$\varphi(\pm 1) = 0, \quad \psi(\pm 1) = 0, \quad \int_{-1}^{1}\varphi'(t)\,dt = 0 \tag{2}$$

В монографиях [1,2] решение системы (1) при (2) сведено к совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Однако вопрос о регулярности или квазирегулярности регулярности недостаточно исследован. Идея к возвращению системы (1)-(2) возникла в нашей частной беседе с Э.Х. Григоряном при обсуждении решения этой системы, за что приношу ему свою благодарность.

Следуя Л.Галину [3], умножим второе уравнение системы (1) на N и сложив с первым, получим

$$(1+N)\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(t)\,dt}{t-x} + (c_1+Nc_4)\int_{-1}^{1}\frac{\psi'(t)\,dt}{t-x}$$

$$+ (c_2+Nc_5)\pi\varphi'(x) + (c_3+Nc_6)\pi\psi'(x) = \lambda\varphi(x) \tag{3}$$

$$(|x|<1)$$

Далее требуется, чтобы имело место равенство

$$\frac{1+N}{c_1+Nc_4} = \frac{c_2+Nc_5}{c_3+Nc_6} = \frac{1}{S}$$

для определения N получим уравнение

$$(c_6-c_4c_5)N^2 + (c_6+c_3-c_1c_5-c_2c_4)N + c_3-c_1c_2 = 0 \tag{4}$$

Корни этого уравнения обозначим через $N_1 = N$, $N_2 = \bar N$.
Далее, если для первого из значений корней примем

$$1+N = K, \quad c_1+Nc_4 = KS, \quad c_2+Nc_5 = Q, \quad c_3+Nc_6 = QS$$

тогда вместо (3) будем иметь

$$\int_{-1}^{1}\frac{T(t)\,dt}{t-x} + \frac{\pi Q}{K}T(x) = \frac{\lambda}{K(S-\bar S)}\int_{-1}^{x}[T(t)-\bar T(t)]\,dt \tag{5}$$

Здесь приняты обозначения

$$T(x) = \varphi'(x) + S\psi'(x), \quad \bar T(x) = \varphi'(x) + \bar S\psi'(x)$$

В случае $N_2 = \bar N$, получим

$$\int_{-1}^{1}\frac{\bar T(t)\,dt}{t-x} + \frac{\pi\bar Q}{\bar K}\,\bar T(x) = \frac{1}{\bar K(S-\bar S)}\int_{-1}^{1}[T(t)-\bar T(t)]\,dt \tag{6}$$

Таким образом, система (1) сводится к совместному решению сингулярных интегральных уравнений (5) и (6).

Следуя работам [1,2,4], решение системы сингулярных уравнений (5) и (6) ищем в виде

$$T(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} X_n n^{-1}\hat P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$+ (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} X_0 \tag{7}$$

$$\bar T(x) = (1-x)^{\bar\alpha}(1+x)^{\bar\beta}\sum_{n=1}^{\infty} \bar X_n n^{-1}\hat P_n^{(\bar\alpha,\bar\beta)}(x)$$

$$+ (1-x)^{\bar\alpha}(1+x)^{\bar\beta} \bar X_0 \tag{8}$$

где

$$\frac{1}{2} < \varepsilon < 1, \quad \alpha = \frac{1}{2\pi i}\ln\left(-\frac{\pi K + iQ}{\pi K - iQ}\right), \quad \bar\alpha = \frac{1}{2\pi i}\ln\left(-\frac{\pi\bar K + i\bar Q}{\pi\bar K - i\bar Q}\right)$$

$$\alpha + \beta = -1, \quad \hat P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = h_n^{(\alpha,\beta)} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — многочлен Якоби

$$h_m^{(\alpha,\beta)} = \left(2^{\alpha+\beta+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{m!\,(\alpha+\beta+2m+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)\,\Gamma(\beta+m+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

причем $h_m^{(\alpha,\beta)} \sim m^{\frac{1}{2}}$ при $m \to \infty$

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,\hat P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,\hat P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx = \begin{cases}0, & m \ne n\\ 1, & m = n\end{cases} \tag{9}$$

$$\int_{-1}^{x}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\tilde{P}_{n}^{(\alpha,\beta)}(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{n}(1-x)^{1+\alpha}(1+x)^{1+\beta}\tilde{P}_{n}^{(1+\alpha,1+\beta)}(x) \tag{10}$$

$$\tilde{P}_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x)=0\quad,\quad \tilde{P}_{0}^{(\alpha,\beta)}(x)=\left(-\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Теперь,подставляя (7) и (8) в (5) и (6) и имея в виду формулу [1,2,5],

$$-\pi\, ctg\,\pi\alpha\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\tilde{P}_{n}^{(\alpha,\beta)}(x)+$$

$$+\int_{-1}^{1}(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}\frac{\tilde{P}_{n}^{(\alpha,\beta)}(s)}{s-x}\,ds=$$

$$=-\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\tilde{P}_{n}^{(1+\alpha,1+\beta)}(x)\,,\quad \mathrm{Re}(\alpha,\beta)>-1\;,\qquad |x|<1$$

получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}X_{n}n^{-\varepsilon}\tilde{P}_{n}^{(1+\beta,1+\alpha)}(x)$$

$$=-\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{\lambda}{K(S-\bar{S})}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\varepsilon}\int_{-1}^{x}[(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}\tilde{P}_{n}^{(\alpha,\beta)}X_{n}$$

$$-(1-s)^{\bar{\alpha}}(1+s)^{\bar{\beta}}\tilde{P}_{n}^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}\bar{X}_{n}]\,ds-\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{\lambda}{\bar{K}(S-\bar{S})}$$

$$\times\int_{-1}^{x}[(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}X_{0}-(1-s)^{\bar{\alpha}}(1+s)^{\bar{\beta}}\bar{X}_{0}]\,ds \tag{11}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\bar{X}_{n}n^{-\varepsilon}\tilde{P}_{n}^{(1+\bar{\alpha},1+\bar{\beta})}(x)$$

$$
= -\frac{\sin \pi \bar{\alpha}}{\pi} \; \frac{\lambda}{\bar{K}(S-\bar{S})} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon} \int_{-1}^{x} [(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta} \tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)} X_n
$$

$$
-(1-s)^{\bar{\alpha}}(1+s)^{\bar{\beta}} \tilde{P}_n^{(\bar{\alpha},\bar{\beta})} \bar{X}_n]\, ds - \frac{\sin \pi \bar{\alpha}}{\pi} \; \frac{\lambda}{\bar{K}(S-\bar{S})}
$$

$$
\times \int_{-1}^{x} [(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta} X_0 - (1-s)^{\bar{\alpha}}(1+s)^{\bar{\beta}} \bar{X}_0]\, ds
$$

Далее, имея в виду формулы (9), (10), уравнения (11) можно свести к совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$
X_m + \lambda \frac{\sin(\pi\alpha)\, m^{\varepsilon}}{\pi K(S-\bar{S})} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon} (K_{m,n}^{(1)} X_n - K_{m,n}^{(2)} \bar{X}_n) + f_m^{(1)} = 0
$$

$$
\bar{X}_m + \lambda \frac{\sin(\pi\bar{\alpha})\, m^{\varepsilon}}{\pi \bar{K}(S-\bar{S})} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon} (K_{m,n}^{(3)} X_n - \bar{K}_{m,n}^{(1)} \bar{X}_n) + f_m^{(2)} = 0 \qquad (12)
$$

$$
(m = 1, 2, \ldots)
$$

где

$$
K_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{m-1} \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, \tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, \tilde{P}_{m-1}^{(\beta+2,\alpha+2)}(x)\, dx
$$

$$
K_{m,n}^{(2)} = \frac{1}{m-1} \int_{-1}^{1} (1-x)^{\bar{\alpha}+\beta+2} (1+x)^{\bar{\beta}+\alpha+2} \tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, \tilde{P}_{m-1}^{(\beta+2,\alpha+2)}(x)\, dx
$$

$$
K_{m,n}^{(3)} = \frac{1}{m-1} \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+\bar{\beta}+2} (1+x)^{\beta+\bar{\alpha}+2} \tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, \tilde{P}_{m-1}^{(\bar{\beta}+2,\bar{\alpha}+2)}(x)\, dx
$$

$$
(m = 2, 3, \ldots)
$$

$$
K_{1,n}^{(1)} = -\frac{1}{n} \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, \tilde{P}_{n-1}^{(1+\alpha,1+\beta)}(x)\, dx
$$

$$K^{(2)}_{1,n} = -\frac{1}{n}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\bar\alpha+\beta+2}(1+x)^{\alpha+\bar\beta+2}\,\bar P^{(\bar\alpha+1,\bar\beta+1)}_{m-1}(x)\,dx$$

$$K^{(3)}_{1,n} = -\frac{1}{n}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha+\bar\beta+2}(1+x)^{\bar\alpha+\beta+2}\,\bar P^{(\alpha+1,\beta+1)}_{m-1}(x)\,dx$$

$$f^{(1)}_m = \frac{\lambda}{\pi}\frac{\sin\pi\alpha}{K(\bar\alpha-\bar S)}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x}(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}ds\,(1-x)^{1+\beta}(1+x)^{1+\alpha}$$

$$\times\,\bar P^{(\bar\beta+1,\bar\alpha+1)}_{m-1}(x)\,dx\,X_0 - \bar X_0\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x}(1-s)^{\bar\alpha}(1+s)^{\bar\beta}ds$$

$$\times\,(1-x)^{1+\beta}(1+x)^{1+\alpha}\,\tilde P^{(\beta+1,\alpha+1)}_{m-1}(x)\,dx\,]$$

$$f^{(2)}_m = \frac{\lambda}{\pi}\frac{\sin\pi\bar\alpha}{\bar K(\bar\alpha-\bar\alpha)}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x}(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta}ds\,(1-x)^{1+\bar\beta}(1+x)^{1+\bar\alpha}$$

$$\times\,P^{(\bar\beta+1,\bar\alpha+1)}_{m-1}(x)\,dx\;X_0 - \bar X_0\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x}(1-s)^{\bar\alpha}(1+s)^{\bar\beta}ds$$

$$\times\,(1-x)^{1+\bar\beta}(1+x)^{1+\bar\alpha}\,P^{(\bar\beta+1,\bar\alpha+1)}_{n}(x)\,dx\,]$$

Постоянная X_0 определяется из условии (2) и равна

$$X_0 = -\frac{SP\sin\pi\alpha}{2\pi}$$

Для доказательства квазиполной регулярности совокупности систем (12), заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(m-1)K^{(j)}_{m,n}|^2<\infty \qquad (j=1,2,3)$$

которые следуют из асимтотической формулы Дарбу для многочленов Якоби [1,2,6]

$$\bar P^{(\alpha,\beta)}_n(\cos\theta)=K(\theta)\cos(N\theta+\delta)+O(m^{-1}) \qquad m\to\infty$$

$$K(\theta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\theta)^{-\beta-\frac{1}{2}} \tag{13}$$

$$N=n+\frac{\alpha+\beta+1}{2},\quad \delta=-\frac{\pi}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right),\quad \operatorname{Re}(\alpha,\beta)>-1,\quad 0<\theta<\pi$$

и из неравенства Бесселя.

Тогда в силу неравенства Коши-Буняковского будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon} |(m-1) K_{m,n}^{(j)}| \le \tag{14}$$

$$\le \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} |(m-1) K_{m,n}^{(j)}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (j = 1,2,3)$$

Имея в виду (14) при $m \to \infty$, получим

$$\max \Big[\frac{\lambda}{\pi} \Big|\frac{\sin \pi \alpha}{K(S-\bar{S})}\Big| \frac{m^{\varepsilon}}{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon} |(m-1) K_{m,n}^{(1)}| +$$

$$+ |(m-1) K_{m,n}^{(2)}| \frac{\lambda}{\pi} \Big|\frac{\sin \pi \bar{\alpha}}{K(S-\bar{S})}\Big| \frac{m^{\varepsilon}}{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\varepsilon} |(m-1) K_{m,n}^{(3)}| +$$

$$+ |(m-1) K_{m,n}^{(2)}| \Big] < \frac{c}{m^{1+\varepsilon}} \tag{15}$$

Относительно свободных членов уравнений (12) можно сказать, что они, по крайней мере, ограничены при $m \to \infty$ (это следует из (13) и неравенства Бесселя).

Таким образом, решение системы уравнений (12) надо искать в пространстве ограниченных последовательностей. В таком случае в силу (15) совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (12) будет квазивполне регулярна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. - Ереван: Изд. ЕГУ, 1976. 534 с.*
2. *Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками.- Ереван: Изд. ЕГУ, 1983. 256 с.*
3. *Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.-М.: Наука, 1980. 304 с.*
4. *Григорян Э.Х., Мелтонян Б.А. Об одной задаче для упругой бесконечной пластины, усиленной двумя полубесконечными стрингерами.- Уч. записки ЕГУ, естеств. науки, 1981, 3, с. 45-49.*
5. *Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. - Киев-Одесса; Головное издательское объединение "Выща школа", 1982. 167 с.*
6. *Сеге Г. Ортогональные многочлены.- М.: Физматгиз, 1962.*

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 27.03.1992

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա　　45, № 1-2, 1992　　Механика

ИЗГИБ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

ГРИГОРЯН Э.Х.

Գրիգորյան Է.Խ., Կիսահարթության վրա գտնվող կիսաանվերջ հեծանի ծռումը

E.Ch.Grigorian Bending of semi-infinite beam, lying on elastic half-plane

Ֆուրյեի ընդհանրացված ձևափոխության մեթոդով լուծված է կիսահարթության վրա գտնվող կիսաանվերջ հեծանի ծռման խնդիրը։

На основе метода обобщенного преобразования Фурье решена задача изгиба полубесконечной балки,лежащей на упругой полуплоско.

В работе [1] получено замкнутое решение задачи об изгибе полубесконечной балки на упругой полуплоскости, с помощью предельного перехода в решении соответствующей пространственной задачи (стремления к нулю параметра преобразования Фурье). Эта задача, в частности, рассмотрена также в работах [2,3] замкнутое решение которой получено сведением ее к краевой задаче Карлемана для аналитических функций,в которых показано,чт контактные напряжения (нормальные) при $x \to 0$ имеют порядок $O(x^{-\frac{1}{2}})$, а при $x \to \infty$ $O(x^{-4})$.

В настоящей работе опять рассматривается изгиб полубесконечной балки (цилиндрический изгиб пластинки) на упругой полуплоскости,когда к концу балки приложена сила Q_0 и момент M_0. Исследование ведется, как обычно, без учета касательных контактных напряжений и без учета явления отрыва балки от упругой полуплоскости.

Задача с помощью обобщенного преобразования Фурье сводится к решению функционального уравнения на действительной оси. Дается замкнутое решение этого функционального уравнения.Простая факторизация коэффициента функционального уравнения дает возможность вычислить две произвольные постоянные, которые содержатся в решении функционального уравнения, и, тем самым, получить простые асимптотические формулы для контактных напряжений в окрестности конца и далеких от него точках балки. Из асимптотической формулы, характеризующей поведения контактных напряжений в окрестности конца балки следует, что при $\frac{Q_0}{M_0} = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$, в конце балки, контактное напряжение равно нулю, т.е. особенность исчезает $\left(\lambda = \left(\frac{\mu}{(1-\nu)D}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ (μ, ν - соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала полуплоскости, D - жесткость балки. Кроме того, балка, в точках некоторой окрестности своего конца, при $Q_0/M_0 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$ вдавливается на полуплоскость, а в остальном - растягивает ее. Из асимптотической формулы, характеризующей поведение контактных напряжений при $x \to \infty$, следует, что после некоторого значения x, балка всегда растягивает полуплоскость.

Пусть на границе упругой полуплоскости лежит полубесконечная балка с жесткостью D, к концу которой приложена сила Q_0 и момент M_0. Требуется определить нормальные контактные напряжения, действующие на участке балки с границей полуплоскости. Дифференциальное уравнение равновесия балки имеет вид

$$D\frac{d^4v^{(1)}}{dx^4} = q(x), \qquad (0 < x < \infty) \tag{1}$$

при условии

$$D\frac{dv^{(1)}}{dx}\Big|_{x=0} = X_0, \qquad D\frac{d^2v^{(1)}}{dx^2}\Big|_{x=0} = M_0$$

$$D\frac{d^3v^{(1)}}{dx^3}\Big|_{x=0} = -Q_0 \tag{2}$$

где q(x) - интенсивность нормальных контактных напряжений, $v^{(1)}(x)$ -- вертикальные перемещения точек балки, X_0 - неизвестная постоянная.

Отметим что условия равновесия балки имеют вид

$$\int_0^\infty q(x)\,dx = Q_0, \qquad \int_0^\infty x\,q(x)\,dx = M_0 \tag{3}$$

Для дальнейшего введем класс функций

$$A^{\pm}(x) = \theta(\pm x)\,A(x)$$

$$\bar{A}^{\pm}(\sigma) = F\,[\pm A(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} A^{\pm}(x)\exp(i\sigma x)\,dx$$

$$A^{\pm}(x) = F^{-1}\,[\,\bar{A}^{\pm}(\sigma)\,] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A^{\pm}(\sigma)\exp(-i\sigma x)\,d\sigma$$

где $\theta(x)$ - функция Хевисайда , F - преобразование Фурье, а F^{-1} -обратное преобразование. Кроме того [4] ,

$$\bar{A}^{\pm}(\sigma)\,\bar{B}^{\pm}(\sigma) = \bar{C}^{\pm}(\sigma),\ \text{т. е. } F^{-1}\,[\bar{C}^{\pm}(\sigma)] = \theta(\pm x)\,C(x)$$

После обозначения $V_1(x) = d\,v^{(1)}/dx$, граничную задачу (1), можно записать одним уравнением при $-\infty < x < \infty$ следующего вида:

$$D\frac{d^3V_1^{+}(x)}{dx^3} = q^{+}(x) - Q_0\delta(x) + M_0\delta'(x) + X_0\delta''(x) \qquad (4)$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

Теперь,применив к (4) обобщенное преобразование Фурье, получим

$$i\sigma^3\,\bar{V}_1^{+}(\sigma) = \frac{\bar{q}^{+}(\sigma)}{D} - \frac{Q_0}{D} - i\sigma\frac{M_0}{D} - \frac{\sigma^2 X_0}{D} \qquad (5)$$

С другой стороны,для другой полуплоскости известно [5], что

$$V^{+}(x) + V^{-}(x) = -\frac{1-\nu}{\pi\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q^{+}(s)}{s-x}\,dx \qquad (6)$$

где $V(x) = d\,v/dx$, $v(x,0)$ – вертикальные перемещения граничных точек полуплоскости.Применив к (6) преобразование Фурье, будем иметь

$$\frac{1-\nu}{\mu}\,i\,\mathrm{sgn}\,\sigma\,\bar{q}^{+}(\sigma) = \bar{V}^{+}(\sigma) + \bar{V}^{-}(\sigma) \qquad (7)$$

$$(-\infty < \sigma < \infty)$$

Далее,имея в виду условие контакта

$$V^{+}(x) = V_1^{+}(x)$$

из (5) и (7) получим функциональное уравнение, разрешающее поставленную задачу

$$(\lambda^3 + |\sigma|^3)\,\bar{q}^+(\sigma) + i\sigma^3 \bar{V}^-(\sigma) = \bar{f}(\sigma) \tag{8}$$

где

$$\bar{f}(\sigma) = \lambda^3 Q_0 + \lambda^3\sigma^2 X_0 + i\sigma\lambda^3 M_0\,, \quad \lambda = [\mu/D(1-\nu)]^{\frac{1}{3}}$$

Таким образом, задача свелась к решению функционального уравнения (8), которое будем решать методом, изложенным в [4,6]. Факторизуем $\lambda^3 + |\sigma|^3$, представив ее в виде

$$\lambda^3 + |\sigma|^3 = \bar{K}^+(\sigma)\,\bar{K}^-(\sigma) \tag{9}$$

где

$$\bar{K}^+(\sigma) = (\sigma + i0)^{\frac{3}{2}}\,\bar{G}^+(\sigma)\,, \quad \bar{K}^-(\sigma) = (\sigma - i0)^{\frac{3}{2}}\,\bar{G}^-(\sigma)$$

$$\bar{G}^{\pm}(\sigma) = \exp\bar{\Psi}^{\pm}(\sigma)\,, \qquad \bar{\Psi}^{\pm}(\sigma) = \int_0^{\infty} \Psi(x)\exp(\pm i\sigma x)\,dx$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\lambda^3}{|\sigma|^3}\right)\exp(-i\sigma x)\,d\sigma$$

$$(\sigma \pm i0)^{\frac{3}{2}} = \sigma_+^{\frac{3}{2}} \mp \sigma_-^{\frac{3}{2}}\,, \quad \sigma_+^{\frac{3}{2}} = \theta(\sigma)\,\sigma^{\frac{3}{2}}\,, \quad \sigma_-^{\frac{3}{2}} = \theta(-\sigma)\,|\sigma|^{\frac{3}{2}}$$

Теперь, подставляя факторизованную функцию $\lambda^3 + |\sigma|^3$ из (9) в (8), после некоторых преобразований, придем к уравнению

$$\bar{L}_1^+(\sigma) = \bar{K}^+(\sigma)\,\bar{q}^+(\sigma) = \bar{g}^-(\sigma) = \bar{L}_2^-(\sigma) \quad (-\infty < \sigma < \infty) \tag{10}$$

где

$$\bar{g}^-(\sigma) = [-i\sigma^3 \bar{V}^-(\sigma) + \bar{f}(\sigma)]\cdot[\bar{K}^-(\sigma)]^{-1}$$

Из (10) следует

$$L_1^+(x) = L_2^-(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

которое может иметь место только при [7]

$$L_1^+(x) = L_2^-(x) = a_0\delta(x) + \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_n \delta^{(k)}(x) \tag{11}$$

где $\delta^{(k)}(x)$ - производная функции $\delta(x)$ порядка k , k - любое конечное число. Далее, применив преобразования Фурье к (11), получим

$$\bar{K}^+(\sigma)\bar{q}^+(\sigma) = \bar{g}^-(\sigma) = a_0 + a_1\sigma + \sum_{k=2}^{n} a_k\sigma^k$$

Поскольку $q^+(x)$ и $V^-(x)$ при $x \to \pm 0$ имеют корневую особенность, то отсюда следует, что $\bar{q}^+(\sigma)$ и $\bar{V}^-(\sigma)$ при $|\sigma| \to \infty$ имеют порядок $\bar{q}^+(\sigma) \approx |\sigma|^{-\frac{1}{2}}$, $\bar{V}^-(\sigma) \approx |\sigma|^{-\frac{1}{2}}$. Тогда нетрудно видеть, что $\bar{K}^+(\sigma)\bar{q}^+(\sigma) - \sigma$, $\bar{q}^-(c) - \sigma$ при $\sigma \to \pm\infty$. Тогда из (12) будет следовать, что $a_k = 0$ $(k = 2,3,\dots n)$. Таким образом, искомое $\bar{q}^+(\sigma)$ определится в виде

$$\bar{q}^+(\sigma) = \frac{a_0 + a_1\sigma}{\bar{K}^+(\sigma)} \tag{13}$$

Для определения постоянных a_0 и a_1 заметим, что условия (3) можно записать в виде

$$\bar{q}^+(0) = Q_0\,, \qquad \frac{d\bar{q}^+(\sigma)}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=0} = iM_0 \tag{14}$$

Удовлетворив условиям (14), получим

$$a_0 = Q_0\bar{K}^+(0)\,, \quad a_1 = i\bar{K}^+(0)M_0 + Q_0\frac{d\bar{K}^+(\sigma)}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=0}$$

Теперь приступим к вычислению $\bar{K}^+(0)$ и $\dfrac{d\bar{K}^+(\sigma)}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=0}$

$\bar{K}^+(0)$ и $\dfrac{d\bar{K}^+(\sigma)}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=0}$ можно записать в виде:

$$\bar{K}^+(0) = \exp\left[\bar{\Psi}^+(\sigma) + \frac{3}{2}\ln(\sigma + i0)\right]\bigg|_{\sigma=0}$$

$$\overline{K}^{+}(0)=\exp\left[\overline{\Psi}^{+}(\sigma)+\frac{3}{2}\ln(\sigma+i0)\right]\Big|_{\sigma\to 0}$$

$$\frac{d\overline{K}^{+}(\sigma)}{d\sigma}\Big|_{\sigma\to 0}=\left(\frac{3}{2}\frac{1}{\sigma+i0}+\frac{d\overline{\Psi}^{+}(\sigma)}{d\sigma}\right)\Big|_{\sigma\to 0}\overline{K}^{+}(0)$$

Рассмотрим $\overline{\Psi}^{+}(\sigma)$, выписывая ее в виде

$$\overline{\Psi}^{+}(\sigma)=\int_0^\infty\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\ln\left(1+\frac{\lambda^3}{s^3}\right)\cos(sx)\,ds\cos(\sigma x)\,dx$$

$$+i\int_0^\infty\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\ln(\lambda^3+s^3)\cos(sx)\,ds\sin(\sigma x)\,dx$$

$$-3i\int_0^\infty\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\ln(s)\cos(sx)\,ds\sin(\sigma x)\,dx$$

Так как

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\ln\left(1+\frac{\lambda^3}{s^3}\right)\cos(sx)\,ds\cos(\sigma x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(\lambda^3+|\sigma|^3)-\frac{3}{2}\ln|\sigma|$$

$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\ln(s)\cos(sx)\,ds=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|x|}+A\delta(x)\right)$ – в смысле теории обобщенных функций, где A - произвольная постоянная и, что

$$\int_0^\infty\frac{\sin\sigma x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\,\sigma$$

то

$$\overline{\Psi}^{+}(\sigma)=\frac{1}{2}\ln(\lambda^3+|\sigma|^3)-\frac{3}{2}\ln|\sigma|+3i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sgn}\,\sigma+iT(\sigma)$$

Здесь

$$\tilde{I}(\sigma)=\int_0^\infty I(x)\sin\sigma x\,dx\,, \qquad I(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ln(\lambda^3+s^3)\cos sx\,ds$$

Далее, поскольку $\ln(\lambda^3+s^3)=3\ln\lambda+O(s^3)$ при $s\to 0$, [illegible] следует, что $I(x)\sim x^{-4}$ при $x\to\infty$, а так как при $s\to\infty$ [illegible]

$$\ln(\lambda^3+s^3)=3\ln s+O(s^{-3})$$

то при $x\to 0$ $I(x)=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{|x|}+A\delta(x)\right)+O(x^2\ln|x|)$. Это говорит о том, что $x\,I(x)$ суммируемая функция. Следовательно,

$$\frac{d\tilde{I}(\sigma)}{d\sigma}\Big|_{\sigma=0}=\int_0^\infty I(x)\,x\,dx\,, \qquad \tilde{I}(\sigma)\Big|_{\sigma=0}=0$$

Из вышесказанного следует, что

$$\left(\Psi^+(\sigma)+\frac{3}{2}\ln(\sigma+i0)\right)_{\sigma\to 0}=3i\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\ln\lambda \qquad (15)$$

а

$$\left[\frac{d\Psi^+(\sigma)}{d\sigma}+\frac{3}{2}(\sigma+i0)^{-1}\right]_{\sigma\to 0}=i\frac{d\tilde{I}(\sigma)}{d\sigma}\Big|_{\sigma=0}$$

где

$$\ln(\sigma+i0)=\ln|\sigma|+i\pi\theta(-\sigma)$$

Оказывается, что

$$\left[\frac{d\Psi^+(\sigma)}{d\sigma}+\frac{3}{2}(\sigma+i0)^{-1}\right]_{\sigma\to 0}=-\frac{2i}{\sqrt{3}\lambda} \qquad (16)$$

в чем убедимся в дальнейшем.

С помощью формул (15), и (16) a_0 и a_1 определяются [illegible]

$$a_0=Q_0\lambda\sqrt{\lambda}\exp\left(3i\frac{\pi}{4}\right)\,, \quad a_1=-i\exp\left(3i\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}Q_0 - [illegible]\,\lambda M_0\right)$$

[illegible] Армянской ССР

Теперь приступим к определению асимптотических формул для q(x) при $x \to 0$ и $x \to \infty$. Поэтому, как известно, надо рассматривать разложения $\bar{q}^{+}(\sigma)$ при $|\sigma| \to \infty$ и $|\sigma| \to 0$ соответственно. Для этого, сначала, определим вид функции $d\bar{\Psi}^{+}(\sigma)/d\sigma$, проводя вычисления интеграла

$$\frac{d\bar{\Psi}^{+}(\sigma)}{d\sigma} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\,x\,\Psi(x)\exp(i(\sigma + i0)x)\,dx$$

Нетрудно видеть, что

$$i\,x\,\Psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{ds}\left[\ln\left(1+\frac{\lambda^3}{|s|^3}\right)\right]\exp(-isx)\,ds$$

$$= -\frac{3\lambda^3}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-isx)\,ds}{s(\lambda + |s|^3)}$$

где интеграл при $s \to 0$ понимается в смысле главного значения по Коши. В силу нечетности подынтегрального выражения и замены $sx = 1$, $x\Psi(x)$ можно записать в виде

$$x\Psi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1/x}\int_{0}^{\infty}\frac{3\tau^2\cos t}{\tau^3 + t^3}\,dt\,d\tau$$

Далее, имея в виду, что

$$\frac{3\tau^2}{\tau^3 + t^3} = \frac{1}{(t+\tau)} + \frac{1}{\xi(t - \zeta\tau)} + \frac{1}{\bar{\xi}(t - \bar{\zeta}\tau)}$$

где $\xi = \zeta - 1$, $\zeta = \exp(i\frac{\pi}{3})$, и что

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos t}{t - \zeta\tau}\,dt = \pi\,i\exp(i\zeta\tau) + \int_{0}^{\infty}\frac{\cos t}{t + \zeta\tau}\,dt$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos t}{t - \zeta\tau}\,dt = -\pi\,i\exp(-i\zeta\tau) + \int_{0}^{\infty}\frac{\cos t}{t + \zeta\tau}\,dt$$

будем иметь

$$x\Psi(x)=2-2\cos\left(\lambda\frac{x}{2}\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda x\right)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda x}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{t+\tau}+\frac{1}{\xi(t+\zeta\tau)}+\frac{1}{\bar{\xi}(t+\bar{\zeta}\tau)}\right]\cos t\,dt\,d\tau \qquad (17)$$

Поскольку [8]

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos t}{t+z}\,dt=\int_0^{\infty}\frac{t\exp(-zt)}{t^2+1}\,dt\,, \qquad \operatorname{Re} z>0\,,$$

то формулу (17) можно записать в виде

$$x\Psi(x)=\frac{3}{2}-2\cos\left(\frac{\lambda x}{2}\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda x\right)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\exp(-\lambda xt)-\exp(-\lambda\zeta xt)-\exp(-\lambda\bar{\zeta}xt)}{t^2+1}\,dt$$

Тогда нетрудно видеть, что $d\overline{\Psi}^{+}(\sigma)/d\sigma$ запишется в виде

$$\frac{d\overline{\Psi}^{+}(\sigma)}{d\sigma}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\bar{\xi}}{1+\bar{\xi}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)}-\frac{\zeta}{1-\zeta\left|\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right|}\right)-\frac{3}{2}\frac{1}{\sigma+i0}$$

$$-\frac{i}{\pi\lambda}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{(t^2+1)\left(t-i\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)}-\frac{\bar{\xi}}{(t^2+1)\left(t-i\bar{\xi}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\zeta}{(t^2+1)\left(t-i\zeta\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)}\right]dt$$

Далее,поскольку

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{t^2+1}\frac{dt}{t-y}=\frac{1}{y^2+1}\left(\frac{\pi}{2}(-y)-\ln(-y)\right)\,, \qquad \arg y\neq 0$$

то окончательно получим

$$\frac{d\overline{\Psi}^{+}(\sigma)}{d\sigma} = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\overline{\zeta}}{1+\overline{\zeta}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)} - \frac{\zeta}{1-\zeta\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)}\right] - \frac{3}{2}\frac{1}{\sigma+i0}$$

$$-\frac{i}{\pi\lambda}\left[\frac{i\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right) - \ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)}{1-\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{2}}\right.$$

$$-\frac{i\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2}\overline{\zeta}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right) - \ln\left(\overline{\zeta}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)}{\zeta\left(1-\left(\overline{\zeta}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)^{2}\right)}$$

$$\left.-\frac{i\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2}\zeta\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right) - \ln\left(\zeta\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)}{\overline{\zeta}\left(1-\left(\zeta\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)^{2}\right)}\right] \qquad (18)$$

Теперь, используя формулу (18), определим $\frac{d\overline{\Psi}^{+}(\sigma)}{d\sigma}$ при $|\sigma| < \lambda$

$$\frac{d\overline{\Psi}^{+}(\sigma)}{d\sigma} = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\overline{\zeta}}{1+\overline{\zeta}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)} - \frac{\zeta}{1-\zeta\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)}\right] - \frac{3}{2}\frac{1}{\sigma+i0}$$

$$+\frac{2i}{\pi\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{i\pi}{2} - \ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)\left(\cos\frac{\pi(2n+1)}{3} - \frac{1}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi(2n+1)}{3}\right]\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{2n}$$

$$+\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{2n-1}\left(\cos\frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{2}\right) \qquad (19)$$

и при $|\sigma| > \lambda$

$$\frac{d\overline{\Psi}^{+}(\sigma)}{d\sigma} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\zeta^{1-n} - (-1)^{n}\bar{\zeta}^{1-n}\right)\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{-n}$$

$$-\frac{2i}{\pi\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{i\pi}{2} - \ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)\left[\cos\frac{\pi(2n-1)}{3} - \frac{1}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi(2n-1)}{3}\right]\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{-2n}$$

$$-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{-(2n+1)}\left(\cos\frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{2}\right) \tag{20}$$

Из (19) легко получить, что

$$\left(\frac{d\overline{\Psi}^{+}(\sigma)}{d\sigma} + \frac{3}{2}\frac{1}{\sigma+i0}\right)_{\sigma=0} = -\frac{2i}{\sqrt{3}\lambda}$$

которое было использовано при вычислении a_1.

С помощью формулы (19) определим $\overline{\Psi}^{+}(\sigma)$ при $|\sigma| < \lambda$

$$\overline{\Psi}^{+}(\sigma) = \ln\left[\left(1+\bar{\zeta}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)\left(1-\zeta\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)\right]$$

$$-\frac{3}{2}\ln\frac{\sigma+i0}{\lambda} + \frac{3i\pi}{4} + \bar{\varphi}^{+}(\sigma) \tag{21}$$

где

$$\bar{\varphi}^{+}(\sigma) = \frac{2i}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{2n+1}\left[\left(i\frac{\pi}{2} - \ln\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2n+1}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}(2n+1) - \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}(2n+1)\right]$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{2}}{2n}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{2n}$$

а из (20) определим $\overline{\Psi}^{+}(\sigma)$ при $|\sigma| > \lambda$

$$\overline{\Psi}^{+}(\sigma) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \left(\zeta^{1-n} - (-1)^n \bar{\zeta}^{1-n} \right) \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{1-n}$$

$$+ \frac{3i}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{i\pi}{2} - \ln\left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) - \frac{1}{2n-1} \right) \left(\cos\frac{\pi(2n-1)}{3} - \frac{1}{2} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi(2n-1)}{3} \right] \frac{1}{2n-1} \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{1-2n}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{-2n} \left(\cos\frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{2} \right) \qquad (22)$$

Отметим, что выше имелось в виду, что $\overline{\Psi}^{+}(0) = \frac{3i\pi}{4}$ и, что $\Psi^{+}(0) \to 0$ при $|\sigma| \to \infty$.

Теперь приступим к определению разложения $\bar{q}^{+}(\sigma)$ при $|\sigma| < \lambda$ и $|\sigma| > \lambda$. Подставляя выражения $\overline{\Psi}^{+}(\sigma)$ из (21) и (22) в (13), получим

$$\bar{q}^{+}(\sigma) = \frac{(a_0 + a_1\sigma)\exp\left(-\frac{3i\pi}{4} \right)}{\left(1 + \bar{\zeta}\left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) \right) \left(1 - \zeta\left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) \right)} \left[1 \right.$$

$$\left. - \overline{\varphi}^{+}(\sigma) + \frac{1}{2} \overline{\varphi}^{+2}(\sigma) - \frac{1}{6} \overline{\varphi}^{+3}(\sigma) + \ldots \right] \quad \text{при } |\sigma| < \lambda$$

и

$$\bar{q}^{+}(\sigma) = \frac{(a_0 + a_1\sigma)}{(\sigma + i0)^{\frac{1}{3}}} \left[1 - \overline{\Psi}^{+}(\sigma) + \frac{1}{2} \overline{\Psi}^{+2}(\sigma) - \frac{1}{6} \overline{\Psi}^{+3}(\sigma) + \ldots \right]$$

при $|\sigma| > \lambda$.

Используя эти разложения, получим

$$\bar{q}^{+}(\sigma) = \frac{Q_0}{\pi} i \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{3} \left(i\frac{\pi}{2} - \ln\left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) + \frac{1}{3} \right)$$

$$- \frac{1}{\pi} \left(\frac{Q_0}{\sqrt{3}} + i M_0 \right) \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{4} \left(i\frac{\pi}{2} - \ln\left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) + \frac{1}{3} \right)$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{2}\lambda M_0-\frac{\sqrt{3}}{2}Q_0\right)\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^4\left(i\frac{\pi}{2}-\ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)+\frac{1}{3}\right)$$

$$-\frac{Q_0}{2\pi^2}\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^5\left(i\frac{\pi}{2}-\ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{\pi}\left(\frac{Q_0}{2}\right.$$

$$\left.-\sqrt{3}\lambda M_0\right)i\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^5\left(\frac{i\pi}{2}-\ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)+\frac{1}{3}\right)+\ldots$$

при $|\sigma|<\lambda$

$$\tilde{q}'(\sigma)=-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}Q_0-\lambda M_0\right)i\exp\left(\frac{3i\pi}{4}\right)\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\left(\frac{Q_0}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\lambda M_0\right)\exp\left(\frac{3i\pi}{4}\right)\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{Q_0}{\sqrt{3}}+\lambda M_0\right)i\exp\left(\frac{3i\pi}{4}\right)\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$-\frac{4}{9\sqrt{3}}\left(\frac{5Q_0}{2\sqrt{3}}+\lambda M_0\right)\exp\left(\frac{3i\pi}{4}\right)\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{-\frac{7}{2}}$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{2Q_0}{\sqrt{3}}-\lambda M_0\right)\exp\left(\frac{3i\pi}{4}\right)\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)^{-\frac{7}{2}}\left(\frac{i\pi}{2}\right.$$

$$\left.-\ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)-\frac{1}{3}\right)+\ldots, \qquad (24)$$

при $|\sigma|>\lambda$

Далее, применив к (23) и (24) обратное преобразование Фурье и имея в виду формулы (7),

$$F^{-1}\left[\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^n\left(i\frac{\pi}{2}+\psi(n+1)-\ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)\right)\right]$$

$$=(-i)^n\frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^n}x^{-(n+1)},$$

$$F^{-1}\left[\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^6\left(i\frac{\pi}{2}-\ln\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda}\right)+\frac{1}{3}\right)^2\right]$$

$$=\frac{2\Gamma(7)}{\lambda^6}x^{-7}\left(\psi(7)-\frac{1}{3}-\ln\lambda x\right).$$

$$F^{-1}[(\sigma+i0)^{-\beta-1}]=\frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{2}(1+\beta)\right)}{\Gamma(1+\beta)}x^{\beta}$$

$$F^{-1}[(\sigma+i0)^{-\beta-1}\ln(\sigma+i0)]$$

$$=\frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{2}(1+\beta)\right)}{\Gamma(1+\beta)}x^{\beta}\left(i\frac{\pi}{2}+\Psi(1+\beta)-\ln x\right),$$

где $x>0$, $\beta\neq-1,-2,-3,\dots$, $\Gamma(x)$, $\Psi(x)$ – соответственно известные гамма и пси функции, получим искомые асимптотические формулы

$$\lambda^{-1}q(x)=-\frac{Q_0\Gamma(4)}{\pi}(\lambda x)^{-4}-\frac{\Gamma(5)}{\pi}\left(\frac{Q_0}{\sqrt{3}}+\lambda M_0\right)(\lambda x)^{-5}$$

$$+\frac{\Gamma(6)}{\pi}\left(\frac{Q_0}{2}-\sqrt{3}\lambda M_0\right)(\lambda x)^{-6}$$

$$+\frac{\Gamma(7)}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}Q_0}{2}-\frac{3}{2}\lambda M_0\right)(\lambda x)^{-7} \tag{25}$$

$$-\frac{\Gamma(7)}{\pi^2}Q_0(\lambda x)^{-7}\left(\Psi(7)-\frac{1}{3}-\ln(\lambda x)\right)+O\left(x^{-9}(1+\ln x)\right)$$

при $|x|\to\infty$

$$\lambda^{-1}q(x)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{2Q_0}{\sqrt{3}}-\lambda M_0\right)(\lambda x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})}\left(\frac{Q_0}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\lambda M_0\right)(\lambda x)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{2}{3\Gamma(\frac{5}{2})}\left(\frac{Q_0}{\sqrt{3}}+\lambda M_0\right)(\lambda x)^{\frac{3}{2}}$$

$$+\frac{4}{9\sqrt{3}\Gamma(\frac{7}{2})}\left(\frac{3Q_0}{2\sqrt{3}}+\lambda M_0\right)(\lambda x)^{\frac{5}{2}}$$

$$+\frac{1}{\pi\,\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}\left(\frac{2\,Q_0}{\sqrt{3}}-\lambda M_0\right)(\lambda x)^{\frac{5}{2}}\left(\Psi\left(\frac{7}{2}\right)+\frac{1}{3}-\ln\lambda x\right)$$

$$+O\left(x^{\frac{7}{2}}(1+\ln x)\right) \qquad (26)$$

при $x\to 0$

Как следует из формулы (26), при $Q_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda M_0$ особенность функции $q(x)$ в точке $x=0$ исчезает. Кроме того, при $Q_0\geq\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda M_0$ $q(x)>0$ в некоторой окрестности точки $x=0$, т.е. балка в этой окрестности вдавливается на полуплоскость. Очевидно, что при $Q_0<\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda M_0$ балка растягивает полуплоскость в некоторой окрестности точки $x=0$. Из асимптотической формулы (25) можно сделать заключение, что после некоторого значения x балка всегда растягивает полуплоскость.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г.Я. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно деформируемом основании ПММ.- 1961, т.25, вып.2.*
2. *Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином. ПММ.- 1974, т.38, вып.2.*
3. *Попов Г.Я. Тихоненко Л.Я. Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином.- ПММ, 1975, т.39, вып.6.*
4. *Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве -М.: Наука, 1971.*
5. *Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.- М.: Наука, 1989.*
6. *Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости.-Ученые записки ЕГУ, естеств. науки, 1979, .*
7. *Справочная математическая библиотека Функциональный анализ.- М.: Наука, 1972.*
8. *Справочник по специальным функциям.-М.: Наука, 1979.*

Ереванский Государственный Университет.

Поступила в редакцию 22.05 1992.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 45, № 1-2, 1992 Механика

АНТИПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ

ТОНОЯН В.С., МЕЛКУМЯН Н.С.

Տոնոյան Վ.Ս., Մելքումյան Ն.Ս., Կիսաանվերջ ճաքով առաձգական կիսահարթության հակահարթ կոնտակտի խնդիրը

Tonoian V.S. Melkumian N.S. Anti-plane contact problem for elastic half-plane with semi-infinite crack

Դիտարկված է կիսաանվերջ ուղղահայաց ճաք ունեցող առաձգական իզոտրոպ կիսահարթության կոնտակտի խնդիրը։ Կիսահարթության եզրին կիրառված են երկու կամայական ձևի ունեցող, ճաքի առանցքի նկատմամբ համաչափ տեղադրված հարթ դրոշմներ։

Рассмотрена антиплоская контактная задача для упругой изотропной полуплоскости с вертикальной полубесконечной трещиной. На границе полуплоскости приложены два жестких гладких штампа с основанием произвольной формы, симметрично расположенные относительно оси трещины

Рассматривается антиплоская контактная задача для упругого изотропного полупространства ($x \geq 0$) с вертикальной полубесконечной трещиной ($a < x < \infty$).

На границе полупространства прикреплены два жестких гладких штампа конечных размеров ($0 \leq y \leq b$) с основанием произвольной формы, симметрично расположенные относительно оси трещины. Принимается, что на штампы, на границе полупространства и на берегах трещины действуют силы, приводящие к состоянию антиплоской деформации. Задача решена методом Фурье в перемещениях.

В силу кососимметрии граничных условий достаточно рассматривать только квадрант ($0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$) со смешанными граничными условиями.

Решение задачи ищется в виде суммы интегралов Фурье. Для определения неизвестных плотностей интегралов Фурье получена система парных интегральных уравнений. Парные интегральные уравнения решаются в замкнутом виде методом ортогонализации и полученная система сводится к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода. Доказана разрешимость этого уравнения, в частности, решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Получены формулы для определения перемещений в точках берегов разреза и напряжений вне разреза, выделен коэффициент особенности интенсивности напряжений к критической величине по теории хрупкого разрушения материала, получается выражение, которое определяет распространение трещины и ее устойчивость.

В частном случае, когда длина трещины стремится к нулю, получается антиплоская задача теории упругости для полуплоскости без трещины. В этом случае решение задачи получается в замкнутом виде. В силу кососимметрии достаточно рассматривать только область квадранта при следующих граничных условиях:

$$
\begin{aligned}
&U_z(0,y)=f_1(y) && 0\le y\le b\,, \quad f_1(0)=0\\
&\tau_{zx}(0,y)=f_2(y) && b<y<\infty\\
&U_z(x,0)=0 && 0\le x\le a\\
&\tau_{zy}(x,0)=f_3(x) && a\le x<\infty
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Решение поставленной задачи математически сводится к решению гармонического уравнения относительно функции перемещения $U_z(x,y)$. Решение гармонического уравнения ищется в виде сумм интегралов Фурье:

$$
U_z(x,y)=\int_0^\infty A(\alpha)\exp(-\alpha x)\sin(\alpha y)\,d\alpha
$$

$$
+\int_0^\infty C(\beta)\exp(-\beta x)\sin(\beta x)\,d\beta \qquad (2)
$$

Используя обычные уравнения, связывающие касательные напряжения с перемещением $U_z(x,y)$, получаются

$$
\tau_{zx}=-G\int_0^\infty \alpha A(\alpha)\exp(-\alpha x)\sin(\alpha y)\,d\alpha
$$

$$
+G\int_0^\infty \beta C(\beta)\exp(-\beta y)\cos(\beta x)\,d\beta
$$

$$
\tau_{zy}=-G\int_0^\infty \alpha A(\alpha)\exp(-\alpha x)\cos(\alpha y)\,d\alpha
$$

$$- G \int_0^\infty \beta C(\beta) \exp(-\beta y) \sin(\beta x)\, d\beta \qquad (3)$$

Здесь $A(\alpha)$ и $C(\beta)$ - неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий (1). Удовлетворяя граничным условиям (1), получается следующая система парных интегральных уравнений:

$$\int_0^\infty A(\alpha) \sin(\alpha y)\, d\alpha = f_1(y) \qquad 0 \le y \le b$$

$$\int_0^\infty \alpha A(\alpha) \sin(\alpha y)\, d\alpha \qquad (4)$$

$$= -\frac{1}{G} f_2(y) + \int_0^\infty \beta C(\beta) \exp(-\beta y)\, d\beta \qquad b < y < \infty$$

$$\int_0^\infty C(\beta) \sin(\beta x)\, d\beta = 0 \qquad 0 \le x \le a$$

$$\int_0^\infty \beta C(\beta) \sin(\beta x)\, d\beta$$

$$= -\frac{1}{G} f_3(x) + \int_0^\infty \alpha A(\alpha) \exp(-\alpha x)\, d\alpha \qquad a < x < \infty \qquad (5)$$

Подобные парные интегральные уравнения рассматривались в работах [2-4] и в др.

Используя результаты работы [3] для функции $A(\alpha)$ и $C(\beta)$, получаются следующие выражения из [4] и [5]:

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^b \varphi_1(r) J_0(\alpha r)\, dr + \frac{2}{\pi} \int_b^\infty \varphi_2(r) J_0(\alpha r)\, dr$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \beta C(\beta)\, d\beta \int_b^\infty r K_0(\beta r) J_0(\alpha r)\, dr \qquad (6)$$

$$C(\beta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty t\varphi_3(r)J_0(\beta t)\,dt$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \alpha A(\alpha)\,d\alpha\int_0^\infty tK_0(\alpha t)J_0(\beta t)\,dt \tag{7}$$

где $J_\nu(z)$ -функция Бесселя первого рода с действительными аргументами, $K_i(\beta r)$ функция Макдональда.

$$\varphi_1(r)=\frac{d}{dr}\int_0^r\frac{yf_1(y)}{\sqrt{r^2-y^2}}\,dy$$

$$\varphi_2(r)=-\frac{r}{G}\int_r^\infty\frac{f_2(y)}{\sqrt{y^2-r^2}}\,dy$$

$$\varphi_3(r)=-\frac{1}{G}\int_t^\infty\frac{f_3(x)}{\sqrt{x^2-t^2}}\,dx$$

Исключая функцию $C(\beta)$ из (6) и (7), для определения функции $\alpha A(\alpha)=Q(\alpha)$ получается следующее интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода:

$$Q(\alpha)=\Omega(\alpha)+\int_0^\infty Q(\gamma)K(\gamma,\alpha)\,d\gamma \tag{8}$$

где

$$\Omega(\alpha)=\frac{2}{\pi}\alpha\int_0^b\varphi_1(r)J_0(\alpha r)\,dr+\frac{2}{\pi}\alpha\int_b^\infty\varphi_2(r)J_0(\alpha r)\,dr$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\alpha\int_a^\infty t\varphi_3(t)\,dt\int_b^\infty\frac{rJ_0(\alpha r)}{t^2+r^2}\,dr \tag{9}$$

$$K(\gamma,\alpha)=\frac{4}{\pi^2}\alpha\int\limits_0^\infty tK_0(\gamma t)\,dt\int\limits_0^\infty\frac{rJ_0(\alpha r)}{t^2+r^2}dr \tag{10}$$

Покажем, что интегральное уравнение (8) можно решить методом последовательных приближений [4]. Нетрудно видеть, что:

$$|K(\gamma,\alpha)|<\frac{4}{\pi^2}\alpha\frac{\ln\frac{\gamma}{\alpha}}{\gamma^2-\alpha^2}$$

$$\int\limits_0^\infty|K(\gamma,\alpha)|\,d\gamma<\frac{4}{\pi^2}\alpha\int\limits_0^\infty\frac{\ln\frac{\gamma}{\alpha}}{\gamma^2-\alpha^2}d\gamma=\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{\ln\frac{\gamma}{\alpha}}{\gamma\left(\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\alpha}{\gamma}\right)}d\gamma \tag{11}$$

Перейдем к новым переменным следующим образом: переменную интегрирования γ, заменяя через $\gamma=e^{\eta}$, а переменную (параметр) α, заменяя через $\alpha=e^{\chi}$. После таких преобразований неравенство (11) примет вид:

$$\int\limits_0^\infty|K(\gamma,\alpha)|\,d\gamma<\int\limits_{-\infty}^\infty|K(\eta,\chi)|\,d\eta<\frac{2}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{(\eta-\chi)\,d(\eta-\chi)}{sh(\eta-\chi)}$$

пользуясь значением интеграла

$$\int\limits_0^\infty\frac{\xi\,d\xi}{sh\,\xi}=\frac{\pi^2}{2}$$

получается

$$\int\limits_0^\infty|K(\gamma,\alpha)|\,d\gamma<1$$

Очевидно, что функция $\Omega(\alpha)$ ограничена сверху и стремится к нулю, когда $\alpha\to\infty$.

Решая интегральное уравнение (8) методом последовательных приближений, получается выражение функции $Q(\gamma)$. Далее, по формуле (7) определяется искомая функция $C(\beta)$.

Напряжения и перемещения по известным формулам (2) и (3) будут определены в любой точке полуплоскости. В частности, перемещения берегов разреза ($y=0$) и напряжения вне разреза определяются форм[illegible]

$$U_3(x,0)=\frac{2}{\pi}\int_a^x\frac{t\varphi_3(t)}{\sqrt{x^2-t^2}}\,dt+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Q(\alpha)\,d\alpha\int_a^x\frac{tK_0(\alpha t)}{\sqrt{x^2-t^2}}\,dt \qquad (12)$$

$$(a<x<\infty)$$

$$\tau_{yz}(x,0)=G\int_0^\infty Q(\alpha)\exp(-\alpha x)\,d\alpha$$

$$-\frac{2}{\pi}Gx\frac{\varphi_3(a)}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{2}{\pi}Gx\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^\infty Q(\alpha)K_0(\alpha a)\,d\alpha$$

$$+\frac{2}{\pi}Gx\int_a^x\frac{[\varphi_3(t)]'}{\sqrt{t^2-x^2}}\,dt+\frac{2}{\pi}Gx\int_0^\infty Q(\alpha)\int_a^x\frac{[K_0(\alpha t)]'}{\sqrt{t^2-x^2}}\,dt\,d\alpha \qquad (13)$$

Коэффициент особенности K имеет вид:

$$K=\frac{2}{\pi}Gx\left[\varphi_3(a)-\int_0^\infty Q(\alpha)K_0(\alpha a)\,d\alpha\right]$$

Приравнивая значение коэффициента интенсивности напряжений (14) к критической величине ($K=K_c$) по теории хрупкого разрушения [5], получается выражение, которое определяет распространение трещины и ее устойчивость.

ЛИТЕРАТУРА

1.Новацкий В. Теория упругости.-М.: Мир. 1975. 872 с.

2.Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики.-Л.: Наука, 1977. 220 с.

3.Тоноян В.С. О решении симметричной контактной задачи для полуплоскости с включением.-Изв.АН Арм.ССР,Механика, 1968, т.21, 3,с.3-18.

4.Мелкумян С.А. Контактная задача для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом.-Докл.АН Арм.ССР,1972,т.4,3.

5.Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения.-М.: Наука, 1974. 640 с.

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию 22.11.1991

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 45, № 1-2, 1992 Механика

БЕСКОНТАКТНЫЙ СПОСОБ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКЕ

БАГДАСАРЯН Г. Е., ПИЛИПОСЯН Г. Т.

Բաղդասարյան Գ.Ե., Փիլիփոսյան Գ.Տ. Գերհաղորդիչ սալում պարամետրական և ստիպողական տատանումների գրգռման ոչ-հպումային եղանակ։

Bagdasarian G.E., Piliposian G.T. Non-contact method of excitation of parametric and forced vibrations in superconducting plate

Ցույց է տրված, որ հաստատուն մագնիսական դաշտի միջոցով երկայնական հարմոնիկ ուժի ազդեցության տակ գտնվող մի սալի պարամետրական և նրան ուղեկցող ստիպողական տատանումները կարելի է ոչ-հպումային եղանակով հաղորդել երկրորդ սալին։ Մեկ սալի դեպքում ցույց է տրված, որ գոյություն ունեն մագնիսական դաշտի լարվածության արժեքներ, որոնց գերազանցումը բացառում է պարամետրական ռեզոնանսի առաջացումը։

Показано, что при помощи постоянного магнитного поля параметрические и сопровождающие их вынужденные колебания одной пластинки, на которую действует продольная гармоническая сила, можно бесконтактно сообщить второй пластинке. В случае одной пластинки установлено, что существуют минимальные значения напряженности магнитного поля, превышение которых исключает возможность появления параметрического резонанса

1 Рассмотрим магнитоупругую систему, состоящую из двух параллельных диафрагм между которыми действует постоянное продольное магнитное поле H_0. Магнитные свойства среды, находящейся между диафрагмами, отождествляются со свойствами вакуума (вакуумный слой). Прямоугольная декартовая система координат $x_1 x_2 x_3$ выбрана так, что координатная плоскость $x_1 x_2$ совпадает со срединной плоскостью вакуумного слоя. Начальное магнитное поле $H_0(H_0, 0, 0)$ параллельно координатной линии $0x_1$. Внутренние поверхности диафрагм $x_3 = \pm b$ покрыты тонкими слоями сверхпроводящего сплава, толщины которых намного больше глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник (обычно порядка 10^{-5} см). Части диафрагм $|x_1| \le a$, $|x_2| < \infty$ являются упругими пластинками из различных изотропных материалов (остальные части являются абсолютно жесткими и неподвижными).

Пусть верхняя пластинка подвергается действию равномерно распределенных по сторонам, параллельных оси $0x_2$, сжимающих усилий интенсивностью $P(t) = P_0 + P_1 \cos\theta t$, параллельных оси $0x_1$. Граничные условия на торцах $x_1 = \pm a$ таковы, что пластинки колеблятся по форме цилиндрической поверхности с образующими, параллельными координатной линии $0x_2$. Рассмотрим задачу передачи параметрических колебаний, а также сопровождающих их вынужденных колебаний к нижней пластинке и определим условия резонанса как обычного, так и параметрического типа. В дальнейшем, характеристики, относящиеся к верхней пластинке, будем отмечать индексом -1-, а к нижней - индексом -2-.

Известно, что при помещении сверхпроводящего тела в магнитное поле на тонком поверхностном слое появляются экранирующие токи, препятствующие проникновению магнитного поля внутрь тела. Вследствие этого, на внутренних поверхностях пластинки $x_3 = \pm b$ компоненты тензора напряжений Максвелла претерпевают разрыв. Этим разрывом обусловлено появление поверхностных сил магнитного происхождения, действующих на поверхностях $x_3 = \pm b$. В работах [2,3], используя основные положения гипотезы недеформируемых нормалей, определены указанные силы и получены соответствующие уравнения, описывающие колебания рассматриваемой магнитоупругой системы. Эти уравнения, с учетом влияния конструктивного демпфирования и продольного усилия, представляются следующим образом:

$$D_k \frac{\partial^4 w_k}{\partial x_1^4} + 2\rho_k \delta_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + 2\rho_k \delta_k \varepsilon_k \frac{\partial w_k}{\partial t}$$

$$+ \frac{H_0^2}{16\pi b} \int_{-a}^{a} \left(K \frac{\partial w_{3-k}}{\partial \xi} - \frac{1}{K} \frac{\partial w_k}{\partial \xi} \right) d\xi$$

$$+ \left[\delta_{k1} P(t) - \frac{H_0^2 \delta_k}{4\pi} \right] \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_1^2} = (-1)^{k+1} \frac{H_0^2}{8\pi}, \quad (k = 1, 2) \tag{1.1}$$

Здесь w_k- прогиб, $D_k = 2E_k\delta_k^3 / 3(1- \nu_k^3)$ цилиндрическая жесткость, E_k -модуль упругости, ν_k -коэффициент Пуассона, $2\delta_k$ -толщина, ρ_k-плотность, ε_k –коэффициент линейного затухания материала к -той пластинки, δ_{k1} -символ Кронекера, а функция $K(x_1, \xi)$ через которую выражаются ядра сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (1.1), определяется формулой [2,3]

$$K(x_1, \xi) = th \frac{\pi(\xi - x_1)}{4b} \tag{1.2}$$

К системе уравнений (1.1) в каждом конкретном случае необходимо присоединить обычные однородные условия закрепления краев $x_1 = \pm a$ пластинок. Из (1.1) видно, что благодаря магнитному полю (интегральный член в (1.1)), колебания верхней загруженной пластинки передаются к нижней пластинке, которая свободна от внешних механических нагрузок.

2. Так как уравнения (1.1) и соответствующие граничные условия являются линейными, то решения поставленной задачи можно искать в виде суммы [2,3]

$$w_k(x_1,t) = w_k^{(1)}(x_1) + w_k^{(2)}(x_1,t)$$

где $w_k^{(1)}$ есть решения уравнений

$$D_k \frac{d^4 w_k^{(1)}}{d x_1^4} + \frac{H_0^2}{16\pi b} \int_{-a}^{a} \left(K \frac{d w_{3-k}^{(1)}}{d\xi} - \frac{1}{K} \frac{d w_k^{(1)}}{d\xi} \right) d\xi$$

$$- \frac{H_0^2 \delta_k}{4\pi} \frac{d^2 w_k^{(1)}}{d x_1^2} = (-1)^{k+1} \frac{H_0^2}{8\pi} \tag{2.1}$$

удовлетворяющие тем же граничным условиям при $x_1 = \pm a$, что и w_k, а $w_k^{(2)}$ являются решениями уравнений

$$D_k \frac{\partial^4 w_k^{(2)}}{\partial x_1^4} + 2\rho_k \delta_k \frac{\partial^2 w_k^{(2)}}{\partial t^2} + 2\rho_k \delta_k \varepsilon_k \frac{\partial w_k^{(2)}}{\partial t}$$

$$+ \frac{H_0^2}{16\pi b} \int_{-a}^{a} \left(K \frac{\partial w_{3-k}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{K} \frac{\partial w_k^{(2)}}{\partial \xi} \right) d\xi$$

$$+ \left[\delta_{k1} P(t) - \frac{H_0^2 \delta_k}{4\pi} \right] \frac{\partial^2 w_k^{(2)}}{\partial x_1^2} = - \delta_{k1} P(t) \frac{\partial^2 w_k^{(1)}}{\partial x_1^2} \tag{2.2}$$

при тех же граничных условиях.

Функции $w_k^{(1)}$ представляют решения задач изгиба пластинок под действием магнитного поля при отсутствии механической нагрузки $P(t)$. Эти решения, найденные в [3], представляют интерес при определении прочностных характеристик рассматриваемых пластинок. Здесь они необходимы также для определения (как это видно из (2.2)) функции $w_k^{(2)}$, характеризующие процесс бесконтактной передачи вынужденных и параметрических колебаний верхней пластинки к нижней через зазор между ними при помощи постоянного магнитного поля.

Предполагая, что края пластинок $x_1 = \pm a$ шарнирно оперты, решение системы (2.1), удовлетворяющее указанным условиям, будем искать в виде

$$w_k^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} w_{kn} \sin\lambda_n (x_1 + a) \quad , \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{2a} \tag{2.3}$$

где w_{kn}- неизвестные постоянные,подлежащие определению.

Подставляя (2.3) в (2.1) и используя обычный процесс ортогонализации, после некоторых преобразований приходим к следующей системе неоднородных алгебраических линейных уравнений относительно w_{1m} и w_{2m} :

$$a_{1m}^2 w_{1m} + \sum_{n=1}^{\infty} [b_{mn}^{(1)} w_{1m} - a_{mn}^{(2)} w_{2n}] = c_m^{(1)}$$

$$a_{2m}^2 w_{2m} + \sum_{n=1}^{\infty} [b_{mn}^{(2)} w_{2m} - a_{mn}^{(1)} w_{1n}] = c_m^{(2)} \tag{2.4}$$

где введены следующие обозначения [2,3] :

$$a_{km}^2 = \Omega_{km}^2 + \frac{H_0^2}{8\pi\rho_k} \lambda_m^2 \quad , \qquad \Omega_{km}^2 = \frac{D_k \lambda_m^2}{2\rho_k \delta_k} \quad ,$$

$$a_{mn}^{(k)} = \frac{H_0^2}{32\pi\rho_k\delta_k} a_{mn} \quad , \qquad b_{mn}^{(k)} = \frac{H_0^2}{32\pi\rho_k\delta_k} b_{mn}$$

$$a_{mn} = \frac{\lambda_n}{ab} \iint_{-a}^{a} \cos\lambda_n (\xi + a) \sin\lambda_m (x_1 + a)\, th \frac{\pi(x_1 - \xi)}{4b} \, dx_1 \, d\xi$$

$$b_{mn} = \frac{\lambda_n}{ab} \iint_{-a}^{a} \cos\lambda_n (\xi + a) \sin\lambda_m (x_1 + a)\, cth \frac{\pi(x_1 - \xi)}{4b} \, dx_1 \, d\xi$$

$$c_m^{(k)} = \frac{(-1)^{(k+1)} H_0^2}{16\pi a \rho_k \delta_k} \frac{[1 - (-1)^m]}{\lambda_m} \tag{2.5}$$

$$(k = 1, 2 \; ; \quad m, n = 1, 2, 3 \ldots)$$

В (2.5) Ω_{km} собственные частоты пластинок в отсутствии магнитного поля.

Используя (2.5) и имея в виду,что $|a_{mn}| \leq A, |b_{mn}| \leq B$,где A и B -некоторые постоянные, можно показать квазивполне регулярность системы (2.4) при любом значении величины H_0 . Следовательно, из этой системы методом редукции можно определить последовательные приближения величины $w_k^{(1)}$.

3. Переходим к решению задачи колебаний, основанной на уравнении (2.2). Решение этой системы, удовлетворяющее условиям шарнирного опирания, представим в виде

$$w_k^{(2)}(x_1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{kn}(t) \sin \lambda_n (x_1 + a) \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) и (2.3) в (2.2) и применяя процесс ортогонализации, для определения функций $f_{kn}(t)$ получается следующая бесконечная система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\frac{d^2 f_{1m}}{dt^2} + c_1 \frac{d f_{1m}}{dt} + \theta_{1m}^2 (1 - 2\mu_m \cos \theta t) f_{1m}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [b_{mn}^{(1)} f_{1n} - a_{mn}^{(1)} f_{2n}] = \frac{\Omega_{1m}^2 w_{1m}}{P_m^*} (P_0 + P_1 \cos \theta t)$$

$$\frac{d^2 f_{2m}}{dt^2} + c_2 \frac{d f_{2m}}{dt} + \theta_{2m}^2 f_{2m}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [b_{mn}^{(2)} f_{2n} - a_{mn}^{(2)} f_{1n}] = 0 \tag{3.2}$$

где, помимо (2.5) введены также следующие обозначения:

$$\theta_{1m}^2 = \Omega_{1m}^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_m^*}\right), \qquad P_m^* = D_1 \lambda_m^2$$

$$2\mu_m = \frac{P_1}{P_m^*} \left(1 + \frac{H_0^2 \delta_1}{4\pi P_m^*} - \frac{P_0}{P_m^*}\right)^{-1}, \qquad \theta_{1m}^2 = \Omega_{1m}^2 + \frac{H_0^2 \lambda_m}{8\pi \rho_1} \tag{3.3}$$

В (3.3) θ_{1m} частоты собственных колебаний отдельной верхней пластинки, загруженной постоянной составляющей P_0 продольной силы, P_m^* -критические значения силы P_0 при статической устойчивости верхней пластинки в отсутствии магнитного поля, μ_m -коэффициенты возбуждения.

На основе уравнений (2.4) и (3.2) рассмотрим конкретные задачи, ограничиваясь первыми приближениями ($m=n=1$) в разложениях (2.3) и (3.1).

А. Случай одной пластинки, сжатой продольным усилием $P(t)$. Для этого случая из (2.4),(2.5),(3.2) и (3.3) путем предельного перехода $b \to \infty$ получается следующее уравнение:

$$\frac{d^2 f_{11}}{dt^2} + \varepsilon_1 \frac{d f_{11}}{dt} + \omega_1^2 (1 - 2\mu \cos\theta t) f_{11}$$

$$= \frac{\Omega_{11}^2 w_{11}}{P_1^*} (P_0 + P_1 \cos\theta t) \tag{3.4}$$

где

$$\omega_1^2 = \Omega_{11}^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_1^*}\right) + \frac{H_0^2 \lambda_1^2}{8\pi\rho_1} + b_{11}^{(1)}$$

$$\mu = \mu_1 \omega_1^{-2} \left[\Omega_{11}^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_1^*}\right) + \frac{H_0^2 \lambda_1^2}{8\pi\rho_1}\right]$$

$$w_{11} = \frac{H_0^2}{4\pi^2 \rho_1 \delta_1} \frac{1}{(\alpha_{11}^2 + b_{11}^{(1)})}, \qquad \alpha_{11}^2 = \Omega_{11}^2 + \frac{H_0^2 \lambda_1^2}{8\pi\rho_1}$$

$$b_{11}^{(1)} = \frac{H_0^2}{8\pi a \rho_1 \delta_1} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\sin(\pi u)\cos(\pi v)}{u - v} du\, dv = \frac{H_0^2 \alpha}{8\pi a \rho_1 \delta_1} \tag{3.5}$$

В (3.5) ω_1 первая частота собственных магнитоупругих колебаний рассматриваемой пластинки, сжатой постоянной составляющей P_0 продольного усилия.

Из (3.4) в случае, когда пластинка сжимается статическим усилием P_0, легко найти критическое значение этого усилия, при котором пластинка теряет статическую устойчивость в присутствии продольного магнитного поля

$$P_{0*} = P_1^* \left[1 + \frac{6(1-\nu_1^2) H_0^2}{\pi^3 E_1} \left(\frac{a}{\delta_1}\right)^3 \left(\alpha + \frac{\pi^2 \delta_1}{4a}\right)\right] \tag{3.6}$$

Формула (3.6), имея в виду, что $\alpha = 1.38$ показывает, что наличие продольного магнитного поля может привести к существенному увеличению области статической устойчивости сверхпроводящей пластинки. Например, в случае дюралюминиевой пластинки ($E_1 = 7.3 \cdot 10^{10}\ Па$, $\nu_1 = 0.34$) при $a = 4 \cdot 10^2 \delta_1$ и $H_0 = 3 \cdot 10^3$ э получаем $P_{0*} = 19.88\, P_1^*$.

Общее решения уравнения (3.4) складывается из общего решения однородного уравнения

$$\frac{d^2 f_{11}}{dt^2} + \varepsilon_1 \frac{d f_{11}}{dt} + \omega_1^2 (1 - 2\mu \cos(\theta t)) f_{11} = 0 \tag{3.7}$$

и частного решения уравнения (3.4), характеризующего вынужденные колебания изогнутой пластинки, появляющиеся вследствие магнитного давления $H_0^2/8\pi$ под дейтвием периодическоо продольного усилия $P(t)$.

Уравнение (3.7) имеет периодические коэффициенты и, как известно [4], при некоторых соотношениях между его коэффициентами оно имеет неограниченно возрастающие решения, означающие динамическую неустойчивость рассматриваемой магнитоупругой системы.

Границы первой и второй областей динамической неустойчивости, расположенных соответственно вблизи частот $2\omega_1$ и ω_1, согласно [4], определяются следующими приближенными формулами:
для первой области

$$\theta_*^{\pm} = 2\omega_1 \left[1 \pm \left(\mu^2 - \gamma^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.8}$$

для второй области

$$\theta_*^{\pm} = \omega_1 \left[1 - \mu^2 \pm \left[\mu^4 - \gamma^2\left(1 - \mu^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

где

$$\gamma = \frac{\Omega}{\omega_1}$$

Из (3.8) видно, что пока выражение под внутренним радикалом положительно, то есть пока $\mu > \gamma$, эта формула дает для критической частоты два вещественных значения, соответствующих двум границам первой области неустойчивости. При $H_0 = 0$ указанное условие выражается неравенством [4]

$$\frac{P_t}{P_{1*}} > \frac{2\varepsilon_1}{\Omega_{11}} \left(1 - \frac{P_0}{P_1^*}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.10}$$

а в присутствии магнитного поля, согласно (3.5), вместо (3.10) получается условие

$$\frac{P_t}{P_{1*}} > \frac{2\varepsilon_1}{\Omega_{11}} \left[1 - \frac{P_0}{P_1^*} + \frac{H_0^2\delta_1}{4\pi P_1^*}\left(1 + \frac{4a}{\pi^2}\frac{a}{\delta_1}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.11}$$

Поскольку правая часть неравенства (3.11) является возрастающей функцией напряженности магнитного поля, то начиная с некоторого значения $H_0 = H_{1*}$, где

$$H_{1*}^{2} = \frac{2\pi^3 E_1}{3(1-\nu_1^2)} \left(\frac{\delta_1}{a}\right)^2 \Big(1$$

$$+\frac{4a\alpha}{\pi^2\delta_1}\Big)^{-1} \left[\left(\frac{P_t}{P_1^*}\frac{\Omega_{11}}{2\varepsilon_1}\right)^2 - \left(1-\frac{P_0}{P_1^*}\right)\right] \qquad (3.12)$$

нарушается условие (3.11) и тем самым, исключается возможность появления параметрического резонанса около частоты $2\omega_1$. При $P_0 = 0$, $P_t \Omega_{11} / 2P_1^* \varepsilon_1 = 1.2$ и при данных предыдущего примера из (3.12) получаем $H_{1*} = 4.58 \cdot 10^2$ э .

Аналогичным образом из (3.9) определяем следующее предельное значение H_{2*} напряженности заданного магнитного поля:

$$H_{2*}^{2} = \frac{2\pi^3 E_1}{3(1-\nu_1^2)} \left(\frac{\delta_1}{a}\right)^2 \Big(1$$

$$+\frac{4a\alpha}{\pi^2\delta_1}\Big)^{-1} \left[\left(\frac{P_t}{2P_1^*}\right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{\Omega_{11}}{\varepsilon_1}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(1-\frac{P_0}{P_1^*}\right)\right] \qquad (3.13)$$

превышение которого исключает возможность возбуждения незатухающих колебаний около частоты ω_1.

Таким образом, при наложении магнитного поля и дальнейшем увеличении его напряженности ширина любой области динамической неустойчивости уменьшается и стремится к нулю при определенном значении напряженности заданного магнитного поля. Это значит, что при заданных значениях характеристик рассматриваемой пластинки и параметрической силы существуют минимальные значения H_{1*} напряженности магнитного поля, превышение которых исключает возможность появления параметрического резонанса вблизи определенного значения частоты магнитоупругих колебаний.

Перейдем к исследованию вынужденных колебаний искривленной пластинки на основе уравнения (3.4). Предположим,что имеет место следующее условие:

$$\frac{P_t}{2P_{1*}} < \left(\frac{\varepsilon_1}{\Omega_{11}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1-\frac{P_0}{P_1^*}\right)^{\frac{3}{4}} \qquad (3.14)$$

означающей невозможность возбуждения резонансных колебаний параметрического типа около частоты ω_1. Задавшись целью исследовать колебания системы вблизи $\theta = \omega_1$, решение уравнения (3.4) ищем в виде

$$f_{11}(t) = a_0 + a_1 \sin(\theta t) + a_2 \cos(\theta t) \qquad (3.15)$$

Подстановка (3.15) в уравнение (3.14) приводит после приравнивания свободных членов и коэффициентов при $\sin\theta t$ и $\cos\theta t$ к системе линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно a_0, a_1, a_2.

Определитель этой системы, в силу условия (3.14), отличен от нуля для любого значения величины H_0. Решая эту систему для амплитуды $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ установившихся колебаний (около изогнутого положения равновесия пластинки) получим следующее выражение:

$$A = \frac{P_t P_1^*}{(P_1^* - P_0)^2} \frac{a\beta^2[(\lambda^2 - n^2)^2 + (n\varepsilon)^2]^{\frac{1}{2}}}{\lambda^2(n\varepsilon)^2 + (\lambda^2 - n^2)[\lambda^2(\lambda^2 - n^2) - 2(\mu^0)^2]} \tag{3.16}$$

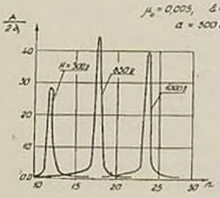
где

$$\lambda^2 = 1 + \frac{\delta_1 H_0^2}{4\pi(P_1^* - P_0)}\left(1 + \frac{4aa}{\pi^2\delta_1}\right)$$

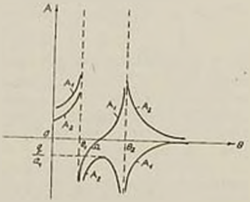
$$\beta^2 = \frac{12(1 - \nu_1^2) H_0^2}{\pi^6 E_1}\left(\frac{a}{\delta_1}\right)^3, \qquad 2\mu^0 = \frac{P_t}{P_1^* - P_0}$$

$$n = \frac{\theta}{\Omega_{11}}\left(\frac{P_1^*}{P_1^* - P_0}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\Omega_{11}}\left(\frac{P_1}{P_1^* - P_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

На основе формулы (3.16) произведены вычисления безразмерной амплитуды вынужденных колебаний дюралюминиевой пластинки в зависимости от безразмерной частоты параметрической силы при различных значениях напряженности магнитного поля.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для расчета принято

$$P_0 = 0\ ,\quad \varepsilon = 0.01\ ,\quad \mu_0 = 0.05\ ,\quad a = 500\,\delta_1 .$$

Результаты подсчета значений $A/2\delta_1$ приведены на фиг.1.

Рассматривая формулу (3.16) и приведенные кривые, замечаем, что:
а) резонанс в вынужденных колебаниях наступает около частоты $\lambda\Omega_{11}$, показывающий, что с увеличением магнитного поля величина резонансной частоты увеличивается;
б) зависимость амплитуды вынужденных колебаний от напряженности магнитного поля имеет экстремальный характер с точкой максимума;
в) при достаточно сильных магнитных полей амплитуда вынужденных колебаний существенно уменьшается;
г) чем больше коэффициент возбуждения μ_0 при соблюдении условии (3.14)), тем сильнее интенсивность резонансных явлений.

Б.Случаи двух одинаковых пластин. Пусть рассматриваемые пластинки имеют одинаковые и геометрические параметры

$$(E_1 = E_2 = E,\ \nu_1 = \nu_{21} = \nu,\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon,\ \rho_1 = \rho_2 = \rho,\ \delta_1 = \delta_2 = h)$$

Для этого случая из (3.2) следует, что колебательный процесс рассматриваемой магнитоупругой пластинки в первом приближении при $P_0 = 0$ описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 f_{11}}{dt^2} + \varepsilon\frac{d f_{11}}{dt} + \Omega^2\left(1 - 2\bar{\mu}\cos(\theta t)\right) f_{11} - a_1 f_{21} = q\cos(\theta t)$$

$$\frac{d^2 f_{21}}{dt^2} + \varepsilon\frac{d f_{21}}{dt} + \Omega^2 f_{21} - a_1 f_{11} = 0 \qquad (3.17)$$

где

$$\Omega^2 = r^2\Omega_{11}^2\ ,\quad \bar{\mu} = \frac{\mu^0}{r^2}\ ,\quad a_1 = \frac{H_0^2}{16\rho h b}\,\alpha_2$$

$$q = \frac{\mu^0 H_0^2}{2\pi^2\rho h}\,\frac{1}{\left(r^2 + a_1\,\Omega_{11}^{-2}\right)}\ ,\qquad r^2 = 1 + \frac{H_0^2 h}{4\pi P_1^*}\left(1 + \frac{2a_1}{\pi}\,\frac{a^2}{bh}\right)$$

$$\alpha_1 = \int_0^1\!\!\int_0^1 \sin(\pi u)\cos(\pi v)\,cth\,\frac{\pi a(u - v)}{2b}\,du\,dv$$

$$a_2 = \int_0^1\int_0^1 \sin(\pi u)\cos(\pi v)\, th\, \frac{\pi a(u-v)}{2b}\, du\, dv \qquad (3.18)$$

Система (3.17) показывает, что благодаря магнитному полю ($a_1 \neq 0$) как параметрические, так и сопутствующие вынужденные колебания верхней пластинки, вызванные действием продольного усилия $P(t)$, бесконтактно передаются к нижней, свободной от механических нагрузок, пластинке. Причем, появление вынужденных колебаний, как и в случае одной пластинки, обусловлено искривлением верхней пластинки под действием магнитного давления $H_0^2/8\pi$.

Из однородной системы, соответствующей (3.17), известным методом [4], находим критические частоты, определяющие границы областей динамической неустойчивости. В частности, для определения границ θ_* главной области параметрического резонанса, получается следующее уравнение:

$$[(r^2 - z)^2 + \psi^2 z - k^2]^2 - (\mu^0)^2 [(r^2 - z)^2 + \psi^2 z] + (2k\psi)^2 z = 0 \qquad (3.19)$$

$$z = \left(\frac{\theta}{2\Omega_{11}}\right)^2, \quad \psi = \frac{\varepsilon}{\Omega_{11}}, \quad k = \frac{a_1}{\Omega_{11}^2}$$

Из уравнения (3.19) в случае консервативной задачи ($\psi = 0$) для границ главной области неустойчивости (для критических частот параметрического резонанса) получимследующие выражения:

$$\frac{\theta_*^{\pm}}{2\Omega_{11}} = \left[r^2 \pm \left(\frac{\mu^0}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{(\mu^0)^2}{4}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (3.20)$$

которые при отсутствии магнитного поля ($k=0$, $r=1$) совпадают с известными выражениями для критических частот классической теории динамической устойчивости ($\theta_{*0} = 2\Omega_{11}(1 \pm \mu^0)^{\frac{1}{2}}$) [4].

Формулы (3.20) показывают, что при наложении магнитного поля и дальнейшем увеличении его напряженности ширина ($\theta_*^+ - \theta_*^-$) области главного параметрического резонанса вначале уменьшается, достигая минимума для определенного значения H_0, после чего начинает неограниченно возрастать. Из (3.20) видно, что при отсутствии нижней пластинки ($k = 0$) величина ($\theta_*^+ - \theta_*^-$) является монотонно убывающей функцией напряженности магнитного поля.

Рассмотрим, наконец, вопросы вынужденных колебаний, предполагая, что система находится вне второй области динамической неустойчивости. Для простоты ограничимся случаем консервативной задачи ($\varepsilon = 0$). Представляя решение системы (3.17) в виде

$$f_{11} = A_1 \cos(\theta t) + B_1, \quad f_{21} = A_2 \cos(\theta t) + B_2$$

для амплитуд установившихся колебаний A_1 (для верхней пластинки) и A_2 (для нижней пластинки) получим выражения

$$A_1 = \frac{\Omega^2 - \theta^2}{(\theta_1^2 - \theta^2)(\theta_2^2 - \theta^2)} q, \quad A_2 = \frac{a_1}{(\theta_1^2 - \theta^2)(\theta_2^2 - \theta^2)} q \tag{3.21}$$

где

$$\theta_i^2 = \Omega_{11}^2 \left[r^2 - \frac{(a^0)^2}{r^2 - k^2 r^{-2}} + (-1)^i \sqrt{k^2 + \left[\frac{(a^0)^2}{r^2 - k^2 r^{-2}} \right]^2} \right]$$

Зависимость A_1 и A_2 от частоты параметрической силы θ показана на фиг.2. Из этой фигуры видно, что с возрастанием θ обе амплитуды монотонно увеличиваются и стремятся к бесконечности при $\theta \to \theta_1$ (наступление первого резонанса). В этой области $(0 \leq \theta < \theta_1)$ обе амплитуды положительны, то есть обе пластинки колеблются в фазе с возмущающей силой. Когда $\theta_1 \leq \theta \leq \Omega$, амплитуды A_1 и A_2 имеют отрицательные значения, то есть обе пластинки колеблются со сдвигом фазы 180^0 относительно возмущающей силы, но еще находятся в одной фазе друг с другом. В интервале $\Omega \leq \theta < \theta_2$ амплитуда A_1 вновь становится положительной, переходя через нуль при $\theta = \Omega$, тогда как A_2 остается отрицательной. Это значит, что в рассматриваемом интервале колебания обеих пластин сдвинуты по фазе на 180^0, причем колебание верхней пластинки находится в одной фазе с возмущающей силой. Наконец, когда θ приближается к частоте θ_2, обе амплитуды неограниченно возрастают и наступают условия второго резонанса. После этого, пластинки продолжают колебаться в различных фазах, но с убывающими амплитудами, и когда θ очень велика, колебания обеих пластин почти исчезают.

Определенное практическое значение имеет тот факт, что $A_1 = 0$ при $\theta = \Omega$. Это означает, что, хотя возмущающая сила действует на верхнюю пластинку, однако, она вызывает колебания только нижней пластинки (если учитывать влияние демпфирования $(\varepsilon \neq 0)$, то будет колебаться также верхняя пластинка с амплитудой колебания нижней пластинки). Амплитуда A_2 колебаний нижней пластинки в этом случае, как видно из (3.18),(3.21) и (3.22), равна $(H_0 \neq 0)$

$$A_2 = -\frac{8\mu_0}{\pi^2} \frac{b}{a_2} \left[1 + \frac{H_0^2 h}{4\pi P_1^2} \left(1 + \frac{2(a_1 + a_2)}{\pi} \frac{a^2}{bh} \right) \right]^{-1} \tag{3.22}$$

Таким образом, при помощи магнитного поля, во-первых, в одной пластинке возбуждаются изгибные вынужденные колебания под действием гармонической продольной силы и, во-вторых, эти колебания бесконтактно передаются ко второй (свободной от механических нагрузок) пластинке. Причем, соответствующим выбором параметров задачи можно достичь того, чтобы, в основном, колебалась только вторая пластинка с регулируемой амплитудой. Это означает также, что свободная от механических нагрузок пластинка выполняет роль динамического гасителя колебаний верхней пластинки. Как видно из (3.23), амплитуда колебаний гасителя достаточно быстро увеличивается с ослаблением связи между пластинками (уменьшении напряженности заданного магнитного поля и увеличение расстояния между пластинками).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред.-М.: Гостехиздат, 1957. 532 с.

2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. -М.: Наука, 1977. 272 с.

3. Багдасарян Г.Е., Пилипосян Г.Т. Изгибные колебания параллельных [illegible] пластин в продольном магнитном поле.- Изв. АН Армении, Механика, 1990, т.43 5, с.3-10.

4. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем.- М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.

5. Багдасарян Г.Е. Бесконтактный способ возбуждения резонансных колебаний в сверхпроводящей пластинке.- Изв. АН Арм.ССР, Механика, т.42, 6, с.3-9.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 9.07.1992

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 45, № 1-2, 1992 Механика

К ОБОСНОВАНИЮ ОДНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

СЕЙРАНЯН С.П.

Սեյրանյան Ս.Պ., Շերտավոր, օրթոտրոպ գլանային թաղանթի տատանումների և կայունության խնդիրների լուծման մի եղանակի հիմնավորման մասին։

Seyranian S.L. On the foundation of one method of solution of stability and vibration problems for layered orthotropic cylindrical shell

Հետազոտվում է ճկուն, շերտավոր, օրթոտրոպ, կլոր գլանային թաղանթի սեփական տատանումները և ստատիկ կայունությունը, սկզբնական մոմենտային առանցքասիմետրիկ հավասարակշիռ վիճակի դեպքում նկարագրող, գծային համասեռ հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգը։

Исследуется бесконечная линейная однородная алгебраическая система уравнений, описывающая собственные колебания и статическую устойчивость гибкой слоистой ортотропной круговой цилиндрической оболочки при моментном начальном осесимметричном состоянии равновесия и шарнирном опирании торцов.

В работах [1-3] решаются задачи о статической устойчивости и собственных колебаниях слоистой ортотропной замкнутой круговой цилиндрической оболочки в предположениях гибкости и моментности начального осесимметричного состояния равновесия и шарнирного опирания торцов. Исходные задачи представлением неизвестных тригонометрическими рядами приводятся к бесконечной однородной системе алгебраических уравнений и детерминантному уравнению. В работах [4-6] граничные условия предполагаются произвольными, а преобразование краевых задач производится с применением методов разделения переменных и конечных разностей. Как отмечено в [3], численный метод, предложенный в [2], эффективен по быстродействию метода в [4,5] в 12 раз.

В настоящей работе обосновывается метод, предложенный в [2,3].

1. Исследуется бесконечная система уравнений [1,3]

$$(V_q - 2S_0 + S_{2q})a_q + \sum_{m=1}^{q-1}(S_{m+q} - S_{q-m})a_m$$

$$+\sum_{m=q+1}^{\infty}(S_{m+q}-S_{m-q})a_m=0\ , \quad q=1,2,\ldots \tag{1.1}$$

Здесь

$$V_q=2Ra_{11}\frac{\Phi_{2qn}(\Phi_{1qn}-P\lambda_q^2-\rho\Omega_n^2)+\left(\Phi_{3qn}-\frac{\lambda_q^2}{R}\right)^2}{\mu_n^2\Phi_{2qn}}$$

$$S_0=f_0$$

$$S_{2q}=\left[1-Ra_{11}\lambda_{2q}^2\left(\frac{P_{11}}{a_{11}}+2\frac{\Phi_{3qn}-\frac{\lambda_q^2}{R}}{\Phi_{2qn}}\right)\right]f_{2q} \tag{1.2}$$

$$S_i=\left[1-Ra_{11}\lambda_i^2\left(\frac{P_{11}}{a_{11}}+\frac{\Phi_{3mn}-\frac{\lambda_m^2}{R}}{\Phi_{2mn}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\Phi_{3qn}-\frac{\lambda_q^2}{R}}{\Phi_{2qn}}\right)\right]f_i\ ,\quad i=q-m\ ,\ q+m\ ,\ m-q$$

где

$$\Phi_{1qn}=(D_{11}-D_{11}^0)\lambda_q^4+(D_{22}-D_{22}^0)\mu_n^4$$

$$+2\,[D_{12}-D_{12}^0+2(D_{66}-D_{66}^0)]\,\lambda_q^2\mu_n^4$$

$$\Phi_{2qn}=a_{11}\lambda_q^4+(a_{66}-2a_{12})\lambda_q^2\mu_n^2+a_{22}\mu_n^4$$

$$\Phi_{3qn}=P_{11}\lambda_q^4+(P_{12}+P_{21}-2P_{66})\lambda_q^2\mu_n^2+P_{22}\mu_n^4$$

$$\lambda_q=\frac{q\pi}{L}\ ,\quad \mu_n=\frac{n}{R} \tag{1.3}$$

L, R - длина и радиус оболочки, P, Ω_n - осевое сжатие и собственная частота колебаний, ρ - погонная плотность вдоль оси оболочки. Константы a_{ik}, P_{ik}, D_{ik}^0 выражаются через известные жесткости C_{ik}, K_{ik}, D_{ik} классической теории слоистых ортотропных оболочек [1,7].

Величины f_k $(k=1,2,\ldots)$ - коэффициенты разложения прогиба на-

чального состояния в промежутке $[0, L]$ в ряд Фурье по косинусам. f_0 -константа.
a_q - коэффициенты разложения вариации прогиба в ряд Фурье по синусам.

В предположениях о скорости сходимости коэффициентов Фурье f_k к нулю

$$|f_k| < \frac{C}{k^{\frac{a}{2}}} \tag{1.4}$$

где C, a -- константы, $C > 0$, $a > 1$, $k = 1, 2, \ldots$ доказывается, что бесконечная система (1.1) преобразуется к эквивалентной системе, бесконечный детерминант которой удовлетворяет условиям Коха [8], откуда следует, что равенство его нулю есть необходимое и достаточное условие существования формы колебаний (при $\Omega_n = 0$ потери устойчивости) оболочки. Более того, решение бесконечной системы может быть получено методом редукции.

2.Условия Коха формулируются для бесконечного определителя матрицы A, представленной в форме

$$A = I + E \tag{2.1}$$

где I - единичная матрица, и требует сходимости рядов

$$\sum_{i=1}^{\infty} |e_{ii}| < \infty \tag{2.2}$$

$$\sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{\infty} |e_{ik}| < \infty \tag{2.3}$$

Преобразуем матрицу (1.1) к форме (2.1) таким образом, чтобы условия Коха выполнялись. С использованием (1.1)-(1.3) определяется порядок величины общего члена последовательности элементов матрицы главной диагонали

$$V_q - 2S_0 + S_{2q} \approx \frac{2R}{\mu_n^2}\lambda_q^4 [a_{11}(D_{11} - D_{11}^0) + P_{11}^2] = \pm G^2 \lambda_q^4 \tag{2.4}$$

при $q \to \infty$,где введено обозначение

$$G^2 = \frac{2R}{\mu_n^2} | a_{11}(D_{11} - D_{11}^0) + P_{11}^2 | \tag{2.5}$$

Далее выполняется деление каждой q-ой строки и m-го столбца на $G\lambda_q^2$ и $\pm G\lambda_m^2$ (знак плюс или минус выбирается, соответственно, (2.4)). Очевидно, такому преобразованию соответствует деление каждого q-го уравнения системы (1.1) на $G\lambda_q^2$ и замена неизвестных a_m на a_m' по формуле $a_m = \pm a_m'/G\lambda_m^2$. В результате выражения e_{qq} элементов главной диагонали и e_{mq}, при $m \neq q$, записываются в виде

$$e_{qq} = \pm\frac{V_q - 2S_0 + S_{2q}}{G^2\lambda_q^4} - 1 = \pm\frac{1}{G^2\lambda_q^4}(V_q - 2S_0 + S_{2q} \mp G^2\lambda_q^4) \qquad (2.6)$$

$$e_{mq} = \pm\frac{S_{m+q} - S_{|m-q|}}{G^2\lambda_m^2\lambda_q^2}\,, \qquad m \neq q \qquad (2.7)$$

3.Введем обозначения

$$A_1 = D_{11} - D_{11}^0\,, \quad A_2 = 2\,[D_{12} - D_{12}^0 + 2\,(D_{66} - D_{66}^0)\,]\,\mu_n^2 - P$$

$$A_3 = (D_{22} - D_{22}^0)\,\mu_n^4 - \rho\,\Omega_n^2 \qquad (3.1)$$

$$B_1 = (a_{66} - 2a_{12})\,\mu_n^2\,, \quad B_2 = a_{22}\,\mu_n^4$$

$$C_1 = (P_{12} + P_{21} - 2P_{66})\,\mu_n^2 - \frac{1}{R}\,, \quad C_2 = P_{22}\,\mu_n^4$$

и покажем существавание конечного предела

$$\lim_{q\to\infty}\frac{1}{\lambda_q^2}(V_q - 2S_0 + S_{2q} \mp G^2\lambda_q^4) < \infty \qquad (3.2)$$

откуда, очевидно, следует выполнение условия Коха (2.2).

Предварительно, с учетом (1.2),(1.3),(2.5),(3.1), определим предел отношения

$$\lim_{q\to\infty}\frac{1}{\lambda_q^2}(V_q \mp G^2\lambda_q^4)$$

$$= \lim_{q\to\infty}\frac{1}{\lambda_q^2}\Big[2Ra_{11}\frac{A_1\lambda_q^4 + A_2\lambda_q^2 + A_3}{\mu_n^2}$$

$$+ \frac{2Ra_{11}}{\mu_n^2}\frac{(P_{11}\lambda_q^4 + C_1\lambda_q^2 + C_2)^2}{a_{11}\lambda_q^4 + B_1\lambda_q^2 + B_2}$$

$$
-\frac{2R\lambda_q^4}{\mu_n^2}\left(a_{11}A_1+P_{11}^2\right)]=\lim_{q\to\infty}\frac{1}{\lambda_q^2}\Big[2Ra_{11}\frac{A_2\lambda_q^2+A_3}{\mu_n^2}
$$

$$
+\frac{\left(2P_{11}C_1-\frac{P_{11}^2}{a_{11}}B_1\right)\lambda_q^6+\left(C_1^2+2C_2P_{11}-\frac{P_{11}^2}{a_{11}}B_2\right)\lambda_q^4}{a_{11}\lambda_q^4+b_1\lambda_q^2+B_2} \tag{3.3}
$$

$$
+\frac{2C_1C_2\lambda_q^2+C_2^2}{a_{11}\lambda_q^4+b_1\lambda_q^2+B_2}\Big]\frac{2Ra_{11}}{\mu_n^2}=\frac{2R}{\mu_n^2}\left(a_{11}A_2+2P_{11}C_1-\frac{P_{11}^2}{a_{11}}B_1\right)<\infty
$$

Далее с использованием (1.2)-(1.4) и (3.1) получаем

$$
\lim_{q\to\infty}\frac{1}{\lambda_q^3}S_{2q}
$$

$$
=\lim_{q\to\infty}\frac{1}{\lambda_q^3}\left[1-4Ra_{11}\lambda_q^2\left(\frac{P_{11}}{a_{11}}+2\frac{P_{11}\lambda_q^4+C_1\lambda_q^2+C_2}{a_{11}\lambda_q^4+B_1\lambda_q^2+B_2}\right)\right]f_{2q}=0 \tag{3.4}
$$

Так как $s_q=f_q$, то из (3.3),(3.4) непосредственно следует (3.2) и следовательно (2.2).

Докажем, что и условие Коха (2.3) выполняется.

Так как из (2.7) следует, что $e_{mq}=e_{qm}$, то запишем

$$
\sum_{\substack{m,q=1\\ m\neq q}}^{\infty}e_{mq}^2=\frac{2}{G^4}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=q+1}^{\infty}\frac{(S_{m+q}-S_{m-q})^2}{\lambda_m^4\lambda_q^4} \tag{3.5}
$$

Оценим $S_{m\pm q}$

$$
|S_{m\pm q}|=\Big|\Big[1-Ra_{11}\lambda_{m\pm q}^2\Big(\frac{P_{11}}{a_{11}}+\frac{P_{11}\lambda_q^4+C_1\lambda_q^2+C_2}{a_{11}\lambda_q^4+B_1\lambda_q^2+B_2}
$$

$$
+\frac{P_{11}\lambda_m^4+C_1\lambda_m^2+C_2}{a_{11}\lambda_m^4+B_1\lambda_m^2+B_2}\Big)\Big]\Big|\,|f_{m\pm q}|\le
$$

$$
\le N\lambda_{m\pm q}^{2-\frac{\alpha}{2}}\le N(\lambda_m+\lambda_q)^2\lambda_{m\pm q}^{-\frac{\alpha}{2}} \tag{3.6}
$$

где Н - положительная константа.

С учетом (3.5),(3.6) имеем

$$\sum_{\substack{m,q=1\\ m\neq q}}^{\infty} c_{mq}^{2} \leq \frac{2}{G^4}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=q+1}^{\infty}\frac{(|S_{m+q}|+|S_{m-q}|)^2}{\lambda_m^4\lambda_q^4} \leq$$

$$\leq \frac{8H^2}{G^4}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=q+1}^{\infty}\frac{(\lambda_m+\lambda_q)^4}{\lambda_m^4\lambda_q^4\lambda_{m-q}^{\alpha}}$$

$$=\frac{8H^2}{G^4}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=q+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{m-q}^{\alpha}}\left(\frac{1}{\lambda_m}+\frac{1}{\lambda_q}\right)^4$$

$$=\frac{8H^2}{G^4}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=q+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{m-q}^{\alpha}}\sum_{i=0}^{4}\frac{C_4^i}{\lambda_m^i\lambda_q^{4-i}} \tag{3.7}$$

Здесь C_4^i -биномиальные коэффициенты.

Меняя порядок суммирования в (3.7) и вводя замену индекса m на индекс j соотношением $m - q = j$, получаем

$$\sum_{\substack{m,q=1\\ m\neq q}}^{\infty} c_{mq}^{2} \leq \frac{8H^2}{G^4}\sum_{i=1}^{4}C_4^i\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^{\alpha}(\lambda_j+\lambda_q)^i}\frac{1}{\lambda_q^{4-i}}$$

$$\leq \frac{8H^2}{G^4}\sum_{i=1}^{4}C_4^i\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_q^4}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^{\alpha}} < \infty \tag{3.8}$$

Таким образом, условия Коха для детерминанта бесконечной системы алгебраических уравнений, эквивалентной системе (1.1), выполняются.

Заметим, что в предположении $\alpha > 2$ аналогичным образом можно обосновать принадлеж-ность определителя к классу нормальных [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белубекян Э.В., Гнуни В.Ц. Устойчивость гибкой слоистой ортотропной цилиндрической оболочки.- Изв. вузов, Машиностроение, 1978, 6, с.13-16.*
2. *Белубекян Э.В. Гнуни В.Ц., Сейранян С.П. Применение метода последовательной безусловной минимизации к решению оптимальных задач устойчивости и колебаний тонкостенных конструкций.- В сб.: Проблемы оптимизации и надежности в строительной механике. Тезисы докл. Всес. конференции. Вильнюс, 1979, с.29-30.*
3. *Сейранян С.П. Оптимизация слоистой композитной цилиндрической оболочки по критерию максимума устойчивости или основной частоты собственных коле-*

баний.-Автореф. дис. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук. Ереван, 1986, 19 с.
4. Гнуни В.Ц., Сейранян С.П. К вопросу оптимизации устойчивости моментного состояния слоистой цилиндрической оболочки.- ЕГУ, межвуз. сб. н. т. Механика, 1981, вып.2, с.55-61.
5. Сейранян С.П. Об оптимальных двухслойных ортотропных цилиндрических оболочках по критерию максимума устойчивости или низшей частоты собственных колебаний.- В сб.: Проблемы оптимизации и надежности в строительной механике. Тезисы докл. Всесоюзной конференции. Вильнюс, 1983. с.65.
6. Джонс Р.М., Хеннеманн Дж.К.Ф. Влияние докритических деформаций на устойчивость слоистых композиционных круговых цилиндрических оболочек.- Ракетная техника и космонавтика, 1980, т.18, 3, с. 135-143.
7. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек.-М.: Наука, 1974.446с.
8. Канторович Л.В. Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа.- Л.: ГИТТЛ, 1949.695 с.

Институт механики АН Армении
Поступила в редакцию 23.04.1992

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 45, №1-2, 1992 Механика

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ В ЖИДКОСТЯХ

БАГДОЕВ А.Г.

Բագդոև Ա.Գ. Ոչ գծային ալիքային փնջերը հեղուկներում

Bagdoev A.G. Non-linear waves beams in fluids

Գազահեղուկ խառնուրդի հավասարումների հիման վրա հետազոտվում է հանդիպակաց շարժվող երկու ոչ գծային ալիքային փնջերի խնդիրը: Հետազոտված է կարճ ալիքների հավասարումը պղպջակներով մագնիսական հեղուկների համար:

На основе уравнений газожидкостной смеси исследована задача двух нелинейных пучков, распространяющихся навстречу друг другу. Исследованы уравнения коротких волн для магнитных жидкостей с пузырьками.

1. Распространение встречных пучков в несжимаемой жидкости с пузырьками газа

Исследуется задача о двух нелинейных пучках, распространяющихся навстречу друг другу. Уравнения газожидкостной смеси имеют следующий вид [9]:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = -\nabla p\ , \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{v}) = 0\ , \quad \rho = \rho_f(1-\beta) \tag{1.1}$$

$$\frac{1-\beta}{\beta P_g} = const\,, \quad P_g R^3 = P_{g0} R_0^3 \quad P_g = P + \rho R \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \frac{4\nu}{R}\rho \frac{\partial R}{\partial t}$$

где газ считается изотермическим, ρ — плотность смеси, p - давление в смеси, $\bar{v}$ - вектор скорости частиц, R - радиус пузырьков, β - их концентрация, P_g - давление в пузырьке, ν - кинематическая вязкость.

Выберем ось x по оси симметрии пучков, совпадающей с нормалью к волнам в точках пересечения с осью пучков, y для осесимметричной задачи будет радиальной координатой. Как и в газовой динамике [1,2], можно ввести характеристические координаты $\xi_{1,2} = t \pm \frac{x}{a_0}$, где t - время, a_0 - невозмущенная скорость звука, $a_0^2 = \frac{P_{g0}}{\beta_0 \rho_0}$. Полагая для компонент скорости по осям x, y и плотности

$$u = u_1(\xi_1, t, y) - u_2(\xi_2, t, y)$$

$$v = v_1(\xi_1, t, y) + v_2(\xi_2, t, y) \tag{1.2}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(\xi_1, t, y) + \rho_2(\xi_2, t, y)$$

и осредняя уравнения (1.1) по ξ_2 и ξ_1 соответственно можно с учетом того, что средние значения функций $\bar{u}_{1,2} = 0$, $\bar{v}_{1,2} = 0$, $\bar{\rho}_{1,2} = 0$, где осреднение проводится по эйконалам $\xi_{1,2}$ [2,8], получить уравнения

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{u_1}{a_0}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} = \frac{a_0}{\rho_0}\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi_1} + \left(\frac{2}{\beta_0} - 3\right)\frac{a_0}{\rho_0^2}\rho_1\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi_1}$$

$$+ \frac{\kappa}{a_0}\frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \xi_1^3} + \frac{4\nu}{3\beta_0 a_0 \rho_0}\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi_1^2}, \quad \kappa = \frac{R_0^2}{3\beta_0\rho_0} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} - \frac{u_2}{a_0}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = \frac{a_0}{\rho_0}\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi_2} + \left(\frac{2}{\beta_0} - 3\right)\frac{a_0}{\rho_0^2}\rho_2\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi_2}$$

$$+ \frac{\kappa}{a_0}\frac{\partial^3 \rho_2}{\partial \xi_2^3} + \frac{4\nu}{3\beta_0 a_0 \rho_0}\frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \xi_2^2}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi_1} = \frac{\rho_0}{a_0}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{\rho_0}{a_0}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{2u_1\rho_0}{a_0^2}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \rho_0\left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{v_1}{y}\right)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi_2} + \frac{\rho_0}{a_0}\frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2\frac{\rho_0}{a_0^2}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \left(\rho_0 + \frac{\rho_0}{a_0}u_2\right)\left(-\frac{1}{a_0}\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{v_2}{y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} = -a_0\frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} = -a_0\frac{\partial u_2}{\partial y} \tag{1.4}$$

Здесь учтено, что в основных порядках

$$\rho_1 \approx \frac{\rho_0}{a_0}u_1, \quad \rho_2 \approx \frac{\rho_0}{a_0}u_2 \tag{1.5}$$

Равенство нулю средних значений искомых величин выполняется для квазимонохроматических волн [4,5], поскольку интегралы по ξ_2 и ξ_1 от экспонент $\exp(i\xi_{2,1}\alpha)$, $\exp(2i\xi_{2,1}\alpha)$ равны нулю,а свободные члены в основных порядках [5] не влияют на уравнения для первой и второй гармоник.

Исключая из (1.3),(1.4),(1.5) $\frac{\partial \rho_{1,2}}{\partial \xi_{1,2}}$ и $\frac{\partial v_{1,2}}{\partial \xi_{1,2}}$, можно получить уравнения коротких волн для встречных пучков, которые оказываются в первом порядке не связанными [2,3,4].

$$\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial \xi_{1,2}\,\partial t} - a_0^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - \frac{1}{\beta_0 a_0}\frac{\partial}{\partial \xi}u_{1,2}\frac{\partial u_{1,2}}{\partial \xi_{1,2}}$$

$$- \frac{2}{3}\frac{\nu}{\beta_0 a_0^2}\frac{\partial^3 u_{1,2}}{\partial \xi_{1,2}^3} - \frac{\kappa}{2 a_0^3}\frac{\partial^4 u_{1,2}}{\partial \xi_{1,2}^4} = 0 \qquad (1.6)$$

Вводя обозначения

$$\Gamma = \frac{1}{\beta_0}, \quad D = \frac{2\nu}{3\beta_0 a_0^2}, \quad \xi_{1,2} = -\tau_{1,2} + \frac{l}{a_0},$$

где $2l$ - расстояние между зеркалами [3], можно получить уравнения

$$\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}\,\partial t} - \frac{1}{2}L(u_{1,2}) = -\frac{1}{H_1}\Gamma\frac{\partial}{\partial \tau_{1,2}}u_{1,2}\frac{\partial u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}}$$

$$+ D\frac{\partial^3 u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}^3} - \frac{\kappa \rho_0}{2H_1^2}\frac{\partial^4 u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}^4} \qquad (1.7)$$

где $H_1 = a_0$, $L = \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ есть поперечный оператор, причем в жидкости дисперсионное уравнение $\alpha_1 = \sqrt{a_0^{-2} - \alpha_2^2}$; α_1, α_2 - компоненты волнового вектора, и в силу того, что вблизи оси пучков $\alpha_2 \approx 0$, $\alpha_1 \approx \frac{1}{H_1}$, можно показать на совпадение уравнений (1.6) и (1.7). Уравнения (1.7) для более общей задачи в магнитной и проводящей жидкости другим более эвристическим методом получены в [3], где имеется неточность в знаке в правой части (1.7) в уравнении для u_2, не влияющая на уравнения модуляций

Как и в [3], можно искать $u_{1,2}$ в виде волн с медленно меняющимися амплитудами и фазами, записать решение в виде глазовых пучков и изучать явление бистабильности в резонаторах. Следует отметить, что представление решения в форме (1.5), то есть в виде суперпозиции волн, предложено в [1,2,8], однако эта запись верна только в нулевом порядке, а в первом порядке $\rho_{1,2}$ выражаются через $u_{1,2}$ с помощью (1.4).

Кроме того, в указанных работах рассмотрена одномерная по x задача. В [3] предположено, что разность фаз при $x = l$ равна нулю, что не увязывается с равенством нулю скорости на оси y.

Следует отметить, что уравнения (1.7) имеют место для произвольной среды, что получается из принципа суперпозиции для нелинейных волн [8] и, как показано далее, для магнитной жидкости будут два собственных вектора, причем в силу их однопараметрического произвола можно полагать $u = u_1 - u_2$.

2. Конкретизация уравнений коротких волн для магнитных жидкостей с пузырями

Чтобы конкретизировать коэффициенты и переменные в уравнении коротких волн (1.8) для магнитной жидкости с пузырьками газа, запишем это уравнение в виде [7-9]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \bar{v} = 0 \ , \ \rho \frac{d\bar{v}}{dt} = -\nabla P + \rho \nabla \left(\frac{H^2}{8\pi} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)$$

$$rot\, \overline{H} - 0 \ , \ \nabla(\mu \overline{H}) = 0 \ , \ \rho = \rho_f (1-\beta)$$

$$\frac{1-\beta}{\beta P_g} = const$$

$$P_g - P - \frac{H^2}{8\pi} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} + \rho R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{4\nu}{R} \rho \frac{dR}{dt} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \qquad (2.1)$$

Здесь газ считается изотермическим, μ - магнитная проницаемость, ρ_f - плотность жидкости, R - радиус пузырька, β - концентрация пузырьков, H - магнитное поле.

Взяв для пучков с осью симметрии x одномерную по x .! постановку задачи, можно получить решение в основном порядке, где ось x направлена по нормали к касательной плоскости к волнам в точке пересечения оси x.

Выберем начальное поле по оси x . Тогда имеем приближенно $H_y = 0$, $H^2 = H_x^2$. Кроме того, (2.1) даст без учета нелинейности, диссипации и дисперсии

$$-\frac{\partial \beta}{\partial t} + (1-\beta) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$(1-\beta) \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$d - \frac{1}{\rho_f} (1-\beta) \left[\frac{\partial^2 \mu}{\partial \beta^2} - \frac{2}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right)^2 \right] \frac{H_0^2}{8\pi} \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{\beta(1-\beta)}{P_g} \left[\frac{\partial P}{\partial x} \right.$$

$$-\frac{\partial^2\mu}{\partial\beta^2}\frac{H_0^2}{8\pi}\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{H_0^2}{4\pi\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)^2\frac{\partial\beta}{\partial x}\Big] \qquad (2.2)$$

Отсюда можно получить

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}=\frac{\rho_f\beta(1-\beta)^2}{P_g}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\beta(1-\beta)}{P_g}(2-\beta)\frac{H_0^2}{8\pi}\frac{\partial\beta}{\partial x}\Big[\frac{\partial^2\mu}{\partial\beta^2}$$

$$-\frac{2}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)^2\Big]-\frac{\partial\beta}{\partial t}+(1-\beta)\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (2.3)$$

$$\frac{\rho_f\beta(1-\beta)}{P_g}=\frac{1}{a_0^2}$$

или

$$-\frac{\partial\beta}{\partial t}+(1-\beta)\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$H_1^2=a_0^2-\frac{2-\beta}{8\pi\rho_f}H_0^2\Big[\frac{\partial^2\mu}{\partial\beta^2}-\frac{2}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)^2\Big]$$

Такое же соотношение получится для нелинейной нормальной скорости волны, где вместо H_1, H_0 стоят c_n, H_n.

Решение уравнений (2.5) можно записать в виде

$$u=u_1(\xi_1)-u_2(\xi_2) \qquad \xi_1=t-\frac{x}{H_1}, \quad \xi_2=t+\frac{x}{H_1}$$

$$\beta'=-\chi\,[u_1(\xi_1)+u_2(\xi_2)] \qquad \chi=\frac{1-\beta}{H_1} \qquad (2.4)$$

Таким образом, решение u, β' записывается через решения $u_{1,2}$ уравнений (1.7).

Поперечный оператор имеет вид [3,4]

$$L(a_{1,2})=\frac{1}{a_1}\frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial y^2}+\frac{k}{y}\frac{\partial u_{1,2}}{\partial y}\right) \qquad (2.5)$$

y -радиальная координата в задаче с осевой симметрией, в которой

$k = 1$, или декартова координата в плоской задаче, в которой $k = 0$; α_1, α_2 - волновой вектор, который в силу того, что ось пучка совпадает с осью x и что волны близки к плоским, имеет координаты

$$\alpha_1 = \frac{1}{H_1}, \ \alpha_2 \approx 0, \ \alpha_1 = \alpha_1(\alpha_2)$$

H_1 - невозмущенная нормальная скорость волны.

Следуя [5,6], можно написать обобщение уравнения совместимости на волнах и получить в нелинейном случае с учетом диссипации и дисперсии значения коэффициентов в (1.7) для волны u_1 (и аналогичные соотношения волны u_2)

$$c_n + v_n = H_1 + (\gamma + 1) v_n + D H_1 \frac{\delta^2 v_n}{\delta v_n} + E H_1^2 \frac{\delta^3 v_n}{\delta v_n}$$

$$\gamma + 1 = 1 + \frac{a_0^2}{H_1^2}(1-\beta_0)\alpha^0 - \frac{1-\beta_0}{2 H_1^2} \frac{H_0^2}{8\pi\rho_1} \Big[\frac{\partial^2 \mu_0}{\partial \beta_0^2}$$

$$- (2-\beta_0) \frac{\partial^3 \mu_0}{\partial \beta_0^3} - \frac{2}{\mu_0} \left(\frac{\partial \mu_0}{\partial \beta_0} \right)^2 + 6(2-\beta_0) \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mu_0}{\partial \beta_0} \frac{\partial^2 \mu_0}{\partial \beta_0^2}$$

$$- (2-\beta_0) \frac{6}{\mu_0^2} \left(\frac{\partial \mu_0}{\partial \beta_0} \right)^3 \Big] \qquad (2.6)$$

$$\Gamma = \gamma + 1, \ \alpha_0 = \frac{1}{\beta_0}, \ D = \frac{2\nu}{3\beta_0(1-\beta_0) H_1}$$

$$E = \frac{k_0^2}{6\beta_0(1-\beta_0) H_1}, \ v_n = u, \ \delta = \frac{\partial}{\partial \xi_{1,2}}$$

Здесь a_0 скорость звука смеси. С учетом того, что $H_{y0} \approx 0$, $H_{z0} = 0$, получится

$$- D_0 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} = H_1 \chi_1 \qquad (2.7)$$

$$D_0 = \chi_1 + \frac{2-\beta_0}{4\pi \mu_0 \rho_l} H_0^2 \left(\frac{\partial \mu_0}{\partial \beta_0} \right)^2$$

$$\chi_1 = a_0^2 - \frac{H_0^2}{8\pi} \frac{2-\beta_0}{\rho_l} \frac{\partial^2 \mu_0}{\partial \beta_0^2} \qquad (2.8)$$

Можно записать (2.4) в виде

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(u - \frac{\beta'}{\chi}\right) \qquad u_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\beta'}{\chi} - u\right)$$

Уравнения (1.8) связывают значения u и β'.
Тогда уравнения (1.7) запишутся в виде

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau_1 \partial t} - \frac{1}{2} L(u_1) = -\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial \tau_1}\left(\Gamma u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \tau_1} - D\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau_1^2} + E\frac{\partial^3 u_1}{\partial \tau_1^3}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau_2 \partial t} - \frac{1}{2} L(u_2) = -\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial \tau_2}\left(\Gamma u_2 \frac{\partial u_2}{\partial \tau_2} - D\frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau_2^2} + E\frac{\partial^3 u_2}{\partial \tau_2^3}\right) \quad (2.9)$$

3. Узкие пучки с медленно-меняющимся амплитудами

Для квазимонохроматических пучков решение уравнения (2.6) можно искать в виде [4]

$$u_{1,2} = \frac{1}{2}[U^{(0)}_{1,2} + U^{(1)}_{1,2}\exp(-\nu_1\alpha^2 t + i\theta_{1,2})$$

$$+ U^{(2)}_{1,2}\exp(-2\nu_1\alpha^2 t + 2i\theta_{1,2}) + к.с. \quad (3.1)$$

Здесь $U^{(0),(1),(2)}_{1,2}$ - амплитуды гармоник, зависящие от

$$\tau'_{1,2} = t + \tau_{1,2} \quad , \quad y \quad , \quad \tau'_{1,2} = (\pm x + l)\frac{1}{H}$$

$\theta_{1,2} = \alpha\tau_{1,2} - \omega t$ фаза с учетом малой частоты ω за счет дисперсии, α - основная частота. Подставляя (3.1) в (2.6) и приравнивая слагаемые при гармониках в силу стационарности пучков, принимая $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \tau'_{1,2}}$, учитывая, что в основных порядках $U^{(0)}$ не влияют на уравнения $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, можно получить уравнения для возмущенной частоты ω, затухания ν_1 в функции от основной частоты и уравнение модуляции для стационарных пучков

$$\omega = -\frac{E}{H_1}\alpha^3 \quad , \quad \nu_1 = \frac{D}{H_1}$$

$$\frac{\partial U^{(1)}_{1,2}}{\partial \tau'_{1,2}}(i\alpha + 2\nu_1\alpha^2 + 3i\omega) - \frac{1}{2}L[U^{(1)}_{1,2}]$$

$$= \frac{\Gamma}{2H_1} a^2 U^{(2)}_{1,2} \bar{U}^{(1)}_{1,2} \exp(-2\nu_1 a^2 t)$$

$$U^{(2)}_{1,2}(4i\nu_1 a^3 - 12 a\omega) + \frac{\partial U^{(2)}_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}}(2ia + 10\nu_1 a^2$$

$$+ 30 i\omega) - \frac{1}{2} L[U^{(2)}_{1,2}] = \frac{\Gamma}{H_1} a^2 U^{(1)2}_{1,2}$$

Пусть $\omega << a$,однако $\omega t >> 1$, где t -характерное время, $t = \frac{x}{H_1}$.Тогда слагаемыми с производными от второй гармоники можно пренебречь и уравнение примет вид

$$U^{(2)}_{1,2} = \frac{\Gamma a}{H_1(4i\nu_1 a^2 - 12\omega)} U^{(1)2}_{1,2}$$

$$\frac{\partial U^{(1)}_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}}(ia + 2\nu_1 a^2 + 3i\omega) - \frac{1}{2a_1}\frac{\partial^2 a_1}{\partial \alpha_2^2}\left[\frac{\partial^2 U^{(1)}_{1,2}}{\partial y^2}\right.$$

$$\left. + \frac{k}{y}\frac{\partial U^{(1)}_{1,2}}{\partial y}\right] = \frac{\Gamma^2 a^3}{8H_1^2(i\nu_1 a^2 - 3\omega)} U^{(1)2}_{1,2} \bar{U}^{(1)}_{1,2} \exp(-2\nu_1 a^2 t)$$

или после подстановки $U^{(1)} = a\exp(i\varphi)$ получим одинаковые по форме уравнения для обоих пучков $\tau = \tau_{1,2}$

$$-a\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\left(1 - \frac{3}{H_1}Ea^2\right) + \frac{\partial a}{\partial\tau}2\nu_1 a - \frac{1}{a a_1}\frac{\partial^2 a_1}{\partial \alpha_2^2}\left[\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\right.$$

$$\left. + \frac{k}{y}\frac{\partial a}{\partial y} - a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] = \kappa_1 a^3 \qquad (3.2)$$

$$\frac{\partial a}{\partial\tau}\left(1 - \frac{3}{H_1}Ea^2\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}2\nu_1 a a - \frac{1}{a a_1}\frac{\partial^2 a_1}{\partial \alpha_2^2}\left[a\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right.$$

$$\left. + a\frac{k}{y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + 2\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] = \kappa_2 a^3 \qquad (3.3)$$

$$\kappa_1 = 3Ea^2\xi \quad , \quad \kappa_2 = -\nu_1 a H_1 \xi$$

$$\xi = \frac{\Gamma^2 a \exp(-2\nu_1 a^2 t)}{8H_1(9E^2 a^4 + \nu_1 a^2 H_1^2)}$$

В предположении малости линейной диссипации и дисперсии при наличии симметричных относительно $x = 0$ граничных условий можно искать решение узких пучков для (3.3) в форме [4 - 6]

$$a = \frac{K}{f(x')} \exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2 f^2}\right), \quad \varphi = \varphi(x') + \frac{1}{2R_0^*} y^2, \quad \bar{\tau} = \sigma\tau' \tag{3.4}$$

$\frac{H_1}{R_0^* \alpha}$ — кривизна волны.

Подставляя (3.4) в (3.3), при граничных условиях

$$\bar{\tau} = 0, f = 1, f' = -\frac{H_1^2}{R_0^*(0)\alpha^2}\lambda - \kappa_2 K^2, \lambda = \frac{1}{\alpha_1 H_1^2}\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2}$$

для безразмерной ширины пучка f и частоты σ, получится

$$-\bar{\tau}_1 = \frac{\sqrt{C' f^2 - \bar{\xi}}}{C'} - \frac{\sqrt{C' - \bar{\xi}}}{C'} \tag{3.5}$$

$$C' = \left[\frac{2H_1^2}{R_0^*(0)}\frac{1}{\alpha^2}\lambda + \kappa_2\frac{K^2}{\alpha}\right]^2 + \bar{\xi}$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) =$$

$$= \frac{A'}{H_1 f_0^2}\left(\bar{\xi}\frac{H_1^2}{C'^2\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{C'^2\alpha^2}{\bar{\xi} H_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} x + \Delta \tag{3.6}$$

где

$$f_0^2 = \frac{\bar{\xi}}{C'}, \quad A' = \frac{1}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left(\frac{2}{y_0^2}\right) - \kappa_1 K^2 < 0$$

$$\bar{\xi} = -\frac{8K^2\lambda\bar{\mu}}{\alpha}\kappa_1 + 16\lambda^2\bar{\mu}^2, \quad \tilde{\mu} = \frac{H_1^2}{\alpha^2 y_0^2}$$

а Δ находится из условия, что при $x = l$ для резонатора суммарная фаза равна нулю [3].

Следуя работе [3], для звуковой волны, имеющей почти линейную поляризацию по оси x ($\bar{v} \parallel x$), можно записать аналогичные соотношения на зеркалах и получить пропускную способность интерферометра [3]

$$P_1 = \frac{|u_1|^2(1-\bar{k})}{|K_0|^2}, \quad P_1 = \left[1 + \frac{4\bar{k}}{(1-\bar{k})^2}\sin^2(\delta + F)\right]^{-1}$$

$$\delta = -\frac{2\alpha l}{H_1}, \quad F(x') = -\frac{\pi}{4}\frac{2 \pm x'}{(1 \pm x')^{\frac{1}{2}}}$$

$$x' = \frac{\kappa_1 K^2}{\alpha\mu|\lambda|}, \quad k = |\kappa_1| \qquad (3.7)$$

Уравнения (3.7) дают неявные значения для x'.

При упрощении (3.6) для $x = -l$ предположено, что зеркала являются конфокальными и имеет место условие резонатора [3]

$$f_0^4 = \bar{\xi}\frac{\sigma^2}{H_1^2}l^2 \quad \text{или}\ C' = 2\bar{\xi}.$$

При больших K_0 левая часть (3.7), являющаяся прямой линией, имеет несколько пересечений с функцией, даваемой правой частью, что приводит к возможным многим амплитудам в интерферометре, приводится к появлению бистабильности [3]. При $\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} > 0$ имеется критическое значение $x' = 1$, при котором достигается фокус.

Для выяснения влияния магнитного поля на явление бистабильности, напишем x' в развернутой форме

$$x' = \frac{\beta_0(1-\beta_0)\chi_0^2}{4\mu_0^3}\left[\xi_1'\sigma^2 + \frac{2-\beta_0}{\mu_l}\left(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)\left(\frac{2}{\mu_0} + 6\frac{2-\beta_0}{\mu_0^2}\right)\xi_1'^2\xi_2'\right]^2$$

где обозначено

$$\frac{a_0}{H_1} = \xi_1', \quad \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0 a_0^2} = \xi_2'$$

$$H_1^2 = a_0^2 + \frac{2-\beta_0}{\mu_0}\,\frac{H_0^2}{4\pi\rho_0}\left(\frac{\partial\mu_0}{\partial\beta_0}\right)^2 \qquad (3.8)$$

Расчеты показывают, что для магнитной жидкости с пузырьками газа ($\beta_0 > 0,3$) при увеличении напряженности внешнего магнитного поля (ξ_2') явление бистабильности усиливается. Таким образом, для осуществления этого явления требуется меньшая мощность начальной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carbonaro P. High frequency waves in quasi-linear inviscid gasdynamics. - J. Appl. Math. and Phys. ZAMP, 1986, v.37, p.43.
2. Канер В.В. Руденко О.В. О распространении волн конечной амплитуды в волноводах. - Вестник МГУ. Сер.физ. 1978, т.19, с.78.
3. Багдоев А.Г. Гургенян А.А. Нелинейное взаимодействие встречных пучков в магнитной жидкости с пузырьками газа. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. - Ереван, 1990, с.107-112.
4. Багдоев А.Г. Петросян Л.Г. Распространение волн в микрополярно электропроводящей жидкости. - Изв. АН АрмССР, 1983, т.36. с.3-16.
5. Багдоев А.Г. Распространение волн в сплошных средах. - Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1981. 307с.
6. Bagdoev A.G., Gurgenian A.A. The determination of parameters of a chemically active magnetogasdynamic medium in the proximity of a wave. - Atti della Acad. della science di Torino, 1976, v. 111.
7. Погосов В.В., Налетова В.А., Шапошникова Г.А. Гидродинамика намагничивающихся жидкостей. В кн.: Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. - М.: 1981, т.16, с.308.
8. Hunter J.K., Keller J.B. Weakly nonlinear high freguency waves. - Comm. pyre Appl. Math., 1983, v.36, p.547-563
9. Ван Вейнгарден. Одномерное течение жидкости с пузырьками газа. - В сб.: Реология суспензий. М.: Мир, 1975, с.68-103.

Институт механики АН Армении
Поступила в редакцию 22.04.1992

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 45, № 1-2, 1992 Механика

ПРОЧНОСТЬ КЛЕЕВЫХ НАХЛЕСТОЧНЫХ СОЕДИНЕНИЙ И ЯВЛЕНИЕ МАЛОНАПРЯЖННОСТИ

ДАВИДЯН Д.Б., ШИРИНЯН Р.А.

Դավիդյան Դ.Բ., Շիրինյան Ռ.Ա., Սոսնձային վերադիր միացումների ամրությունը և թերլարվածության երևույթը։

Davidian D.B. Shirinian R.A. Strength of glued overlap joints and phenomenon of low -stress level

Ֆոտոառաձգականության մեթոդով ուսումնասիրված է լարումների վարքը թիթեղների սոսնձային միացումներում, կախված թիթեղների ծայրերի երկրաչափությունից։ Ցույց է տրված լարումների մեծ կուտակումները փոքրացնելու կամ վերացնելու հնարավորությունը։

Методом фотоупругости изучено поведение напряжений в клеевых нахлесточных соединениях в зависимости от геометрии концов нахлестки. Показано, что в угловых точках нахлестки подбором соответствующих углов соединяемых материалов и клеевого слоя можно устранить или существенно снизить сильные концентрации напряжений.

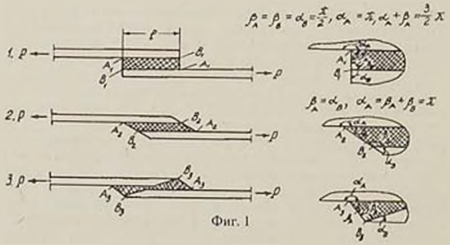
Получение высокопрочных клеевых нахлесточных соединений с помощью хрупких, относительно прочных (жестких) клеев затруднено тем, что на концах нахлестки возникают высокие концентрации напряжений, часто превышающие когезионную и адгезионную прочности клея. Из-за этого на практике вынужденно применяют пластичные клеи, которые значительно снижают общую прочность соединения.

Исследованию напряженно-деформированного состояния клеевых нахлесточных соединений посвящено много теоретических и экспериментальных работ, в числе которых важное место занимают работы Фолькерсена, Голанда-Рейснера, Майлонаса [1] и др. [2]. По теории Фолькерсена вдоль контактной поверхности учитываются только касательные напряжения и полностью игнорируются нормальные раздирающие напряжения. По теории Голанда-Рейснера учитываются также нормальные напряжения от изгиба. В обоих случаях распределение напряжении по толщине клеевого слоя принято постоянным, что и приводит, вероятно, к несоответствию с данными эксперимента. Экспериментами, проведенными Майлонасом методом фотоупругости [1], показана неравномерность распределения напряжений по толщине клеевого слоя на концах нахлестки. С другой стороны, клеевой слой имеет конечную толщину и заканчивается свободной поверхностью раздела между клеем и воздухом и, как показано там же, от формы этой границы за-

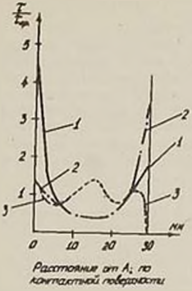
зависит распределение напряжений на концах нахлестки. Предположено также, что нерегулярность форм этой границы является причиной большого разброса прочностных показателей.

Установленное К.С.Чобаняном [3] явление малонапряженности края поверхности соединения в составном теле при действий общей нагрузки (открытие N 102) теоретически раскрывает характер поведения напряжений в угловых точках составного тела в зависимости от механических свойств соединяемых материалов и от геометрии края соединения. Это открытие позволяет целенаправленно изменять поведение напряжений на краях поверхности контакта. Целью настоящей работы является получение высокопрочного клеевого нахлесточного соединения с помощью жестких клеев с использованием явления малонапряженности, где в качестве составляющих материалов представлены клеевой слой и материал нахлестки.

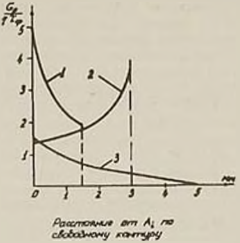
Методика эксперимента. Рассмотрены шесть типов клеевых нахлесточных соединений дюралюминиевых листов, соединенных эпоксидным клеем и отличающихся геометрией концов нахлестки. В настоящей работе приведены три типа соединения, как наиболее характерные (фиг.1). Исследовался характер напряженного состояния нахлестки методом фотоупругости на моделях клеевого слоя и сопоставлялся с результатами испытаний на прочность аналогичных конструкций. Для проведения фотоупругих исследований минимальная толщина клеевого слоя принята 1,5 мм, а остальные размеры соединения подобраны так, чтобы обеспечивались условия подобия расчетной схемы нахлесточного соединения. Разделка поверхностей нахлестки выполнялась по соответствующим шаблонам, а модели для клеевого слоя изготовлялись из оптически чувствительного материала эпоксидного компаунда соответственно форме разделки нахлестки. При склеивании, во избежание внесения начальных напряжений склеивание проводилось без давления. Для всех типов соединений осевое усилие равно $P = 25$ кг, длина и ширина нахлестки соответственно равны $l = 30$ мм, $a = 5$ мм, а общая длина $L = 228$ мм. Фотоупругие исследования проводились на установке КСП-5 методом компенсации. Определялись касательные напряжения по контактным поверхностям нахлестки и нормальные раздирающие напряжения на сво-



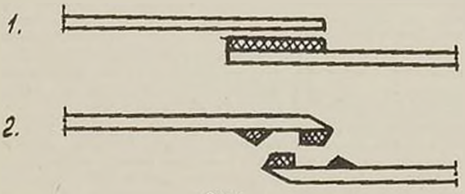
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

бодном контуре. Для анализа поведения касательных и раздирающих напряжений введены коэффициент концентрации касательных напряжении $K_\tau = \tau/\tau_{cp}$ и коэффициент концентрации раздирающих напряжений $K_\sigma = \sigma/(2\tau_{cp})$, где $\tau_{cp} = P/al$.

Типы нахлесточных соединений представлены на фиг. 1 и обозначены номерами: 1-стандартный, 2-со скошенным концом, 3-с переменным сечением клеевого слоя. Поскольку распределение напряжений симметрично относительно центра нахлестки, то эквивалентные угловые точки обозначим одинаковыми буквами с индексами, соответствующими типу нахлестки.

Образцы для испытаний на прочность клеевых дюралюминиевых листов при сдвиге изготовлены по размерам согласно ГОСТ [4], с соответствующей геометрией разделки концов нахлестки.

Для отношения модулей упругости дюралюминия и эпоксидного компаунда, равного 17, из [3] определены области малонапряженности, исходя из которых выбраны формы разделки.

Проведение эксперимента и анализ результатов

1 На кривой 1 фиг.2 представлен график распределения касательных напряжений вдоль контактной поверхности для стандартного образца. На крае нахлестки, в угловой точке A_1, где общий угол дюралюминия и клея составляет $3/2\pi$ и клеевой слой примыкает к растягиваемым элементам под прямым углом, имеет место сильная концентрация напряжений ($K_t = 4.6$), а на другом конце нахлестки, в точке B_1, где общий угол равен π и линия раздела делит его пополам, концентратор находится в разгруженной области и коэффициент концентрации равен $K_t = 1.9$. Середина нахлестки, примерно $2/3l$, не работает.

На кривой 1 фиг.3 приведен график распределения раздирающих напряжений на свободном контуре клеевой прослойки. Как видно из графика, раздирающие напряжения в основном сконцентрированы в угловой точке A_1, где коэффициент концентрации раздирающих напряжений равен $K_\sigma = 4.6$. Напряжения от точки A_1 к точке B_1 сильно убывают и коэффициент концентрации в точке B_1 имеет значение $K\sigma = 1.9$. На кривой 1 фиг.4 из представленной картины разрушения видно, что разрушение носит адгезионный характер и очагом возникновения трещины является точка A_1, где коэффициенты концентрации и касательных и раздирающих напряжений имеют максимальные значения.

2. Второй тип соединения, приведенный на кривой 2 фиг.1, представляет собой нахлестку со скошенными концами. В этом случае клеевой слой в точке примыкания (A_2) к дюралюминиевой основе составляет угол $\beta = 30^0$, где коэффициент концентрации касательных напряжений равен $K_t = 1.4$, который значительно меньше значения этого коэффициента в соответствующей угловой точке образца стандартного типа. На кривой 2 фиг.2 из графика касательных напряжений видно, что на другом конце нахлестки, в точке B_2, где $\alpha = 30^0$, $\alpha + \beta = \pi$, имеет место сильная концентрация напряжений ($K_t = 3.8$). Из анализа графиков следует, что изменение геометрии концов нахлестки существенно сказывается на перераспределении напряжений. В этом случае середина нахлестки также не работает. Раздирающие напряжения для данного типа соединения, график распределения которых представлен кривой на кривой 2 фиг.3, имеют максимальные значения в точке B_2 ($K\sigma = 3.8$). Из приведенной картины разрушения (рис. 2 фиг.4.) видно, что разрушение хрупкое и носит когезионный характер. Разрушение начинается в точке B_2 и вызвано, в основном, раздирающими напряжениями.

3. Третий тип соединений (рис. 3 фиг.1) представляет собой нахлестку с переменным сечением клеевого слоя. В данном случае, в угловой точке A_3, где клеевой слой примыкает к дюралюминию под углом $\beta = 40^0$, коэффициент концентрации касательных напряжений относительно невелик и равен $K_t = 1.5$. На кривой 3 фиг.2 из представленного графика распределения касательных напряжений видно, что несмотря на наличие в угловой точке A_3 относительно слабого концентратора и конструктивно внесенного в середину нахлестки слабого внутреннего концентратора ($K_t = 1.4$), распределение касательных напряжений по всей

поверхности контакта близко к равномерному, причем в восприятии передаваемого усилия активно участвует середина нахлестки. Напряжения в точке B_3 согласно условию малонапряженности равны нулю. Из графика (кривая 3 фиг.3) видно, что максимальное раздирающее напряжение достигается в точке A_3 ($K_\sigma = 1.5$).

В нижепредставленной таблице приведены результаты прочностных испытаний и вариационные коэффициенты соединений указанных типов.

N	Тип соединения	Прочность в МПа	Вариационный коэф.
1	Стандартный	7.3	13.8
2	Скошенный	13.1	28.3
3	С переменным сеч. кл. слоя	20.4	11.2

3. Из таблицы видно, что прочности рассмотренных соединений хорошо согласуются с общим характером распределения напряжений (фиг.2 и 3) и теоретически полученным поведением напряжений в угловых точках [3]

Выводы

1. Стандартный тип образца (первый тип), применяемый для испытания прочности клеев при сдвиге [4], непригоден для жестких клеев, так как касательные напряжения распределены неравномерно и доминирующими напряжениями при разрушении являются раздирающие напряжения.

2. Используя явление малонапряженности, подбором соответствующих комбинаций углов на краях нахлестки можно снизить или вовсе устранить сильные концентрации напряжений.

3. Из рассмотренных типов соединений наилучшей конструкцией нахлесточного клеевого соединения из жестких клеев является третий тип соединения, в котором касательные напряжения распределены более равномерно и прочность которого превышает прочность стандартного образца почти в три раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адгезия, клеи, цементы, припои. Под редакцией Н.Дебройна и Р.Гувинка.- Пер.с англ.. Изд-во иностр., М., 1954. 584 с.

2. Баркер Р.М., Хетт Ф. Расчет клеевых соединений в конструкциях летательных аппаратов Ракетная техника и космонавтика. Пер. с англ., т.2, N 12, с. 60-65 (1973).

3. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах.- Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.

4 Кардашов Д.А. Синтетические клеи.-М.: Химия, 1976. 504 с.

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию 25.05.1991