ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

Том 92 № 3
1991

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. քարտուղար), Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱԲԱՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ թղթ. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Գ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ թղթ. անդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Դ. Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՖԱՆԱՐՋՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН Армении, А. Т. БАБАЯН, академик АН Армении, А. А. ГАБРИЕЛЯН, академик АН Армении, В. О. КАЗАРЯН, академик АН Армении (зам. отв. редактора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН Армении, Г. С. СААКЯН, академик АН Армении, Д. М. СЕДРАКЯН, академик АН Армении (отв. редактор), А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН Армении, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, академик АН Армении, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик АН Армении.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ ЕРЕВАН

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ա. Հ. Կարապետյան—*Ինտեգրալ ներկայացումներ իրենց հիմքում գծորեն-համասեռ կոներ ունեցող խողովակաձև տիրույթներում* 99

Ն. Վ. Գրիգորյան—*Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ոչ լրիվ համակարգերի փակույթին պատկանող ֆունկցիաների անալիտիկ շարունակության և ներկայացման մասին* . 105

Է. Ա. Միրզախանյան—*Տիրույթի ինվարիանտության Բրաուերի դասական թեորեմի մի անվերջչափանի ընդհանրացման մասին* 111

Է. Ա. Դանիելյան, Գ. Ս. Մովսիսյան—*Չեբիշևի էքստրեմալ խնդրի մասին բաշխումների ուռուցիկ դասերի վրա* 115

Ս. Ս. Ղազարյան—*Մուլտիպլիկատիվ լրացում Օրլիչի տարածություններում* . 121

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Հ. Հ. Գալստյան—*Գրաֆի մինիմալ գերիշխող բազմության նկատմամբ ինվարիանտ ենթագրաֆի գտնելու մի ալգորիթմի մասին* 125

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Լ. Գ. Պետրոսյան—*Կլոր գլանային խողովակում հեղուկի շարժման մասին Գրոմեկայի խնդրի ոչ սիմետրիկ մոդելը* 128

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Վ. Ս. Տոնոյան, Ս. Ա. Մելքումյան—*Ուղղաձիգ, վերջավոր ճեղքով օրթոտրոպ կիսահարթության համար համաչափ կոնտակտային խնդիրը* 133

ԲԻՈՔԻՄԻԱ

Ի. Ա. Զաքարյան—*Էկզոգեն ԴՆԹ-ի տրանսլոկացիայի և կաթնասունների բջիջների ձևափոխման մեխանիզմի վերաբերյալ* 138

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

А. О. Карапетян—Интегральные представления в трубчатых областях над аффинно-однородными конусами 99

Н. В. Григорян—Об аналитическом продолжении и представлении функций, принадлежащих замыканиям неполных систем типа Миттаг-Леффлера 105

Э. А. Мирзаханян—Об одном бесконечномерном обобщении классической теоремы Брауэра об инвариантности области 111

Э. А. Даниелян, Г. С. Мовсисян—О Чебышевской экстремальной задаче на выпуклых классах распределений 115

С. С. Казарян—Мультипликативное дополнение в пространствах Орлича 121

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

О. А. Галстян—Об одном алгоритме нахождения подграфа, инвариантного относительно минимальных множеств заданного графа 125

МЕХАНИКА

Л. Г. Петросян—Несимметричная модель задачи Громеки о движении жидкости в круглой цилиндрической трубе 128

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Тоноян, С. А. Мелкумян—Симметричная контактная задача для ортотропной полуплоскости с вертикальным конечным разрезом . . . 133

БИОХИМИЯ

Р. А. Захарян—К механизму транслокации экзогенной ДНК и трансформации клеток млекопитающих 138

CONTENTS

MATHEMATICS

A. H. Karapetian — Integral representations in the tube domains over affine-homogeneous cones 99

N. V. Grigorian — On the analytic continuity and representations of functions from the closure of nondense systems of the Mittag—Leffler type 105

E. A. Mirzuchanian — On an infinite-dimensional generalisation of Bro-wer's classical theorem on invariancy of the field 111

E. A. Danielian, G. S. Movsisian — On Chebyshev's extremal problem for convex classes of distributions 115

S. S. Kazarian — The multiplicative completion in the Orlicz spaces . . 121

APPLIED MATHEMATICS

H. H. Galstian — On an algorithm for finding a subgraph, invariating relatively to minimal dominating sets of the given graph 125

MECHANICS

L. G. Petrossian — Non-symmetrical model for fluid flow Gromeka problem in a circular cylindric tube 128

THEORY OF ELASTICITY

V. S. Tonoyan, S. A. Melkumian — Symmetrical contact prob'em for orthotrope halfplane with vertical finite crack 133

BIOCHEMISTRY

R. A. Zakharian — On the mechanism of translocation of exogenic DNA and transformation of mammalian cells 138

ISSN 0321—1339. Доклады Академии наук Армении. 1991. Т. 92, № 3, с. 97—144.

Сдано в набор 23. 10. 1991. Подписано к печати 3. 03. 1992
Формат $70 \times 108^1/_{16}$. Бумага № 1, сыктывкарская. Высокая печать. Печ. лист 3,0.
Усл. печ. л. 4,2. Усл. кр. отт. 4,2. Учет. изд. л. 2,9. Тираж 455. Заказ № 279.
Издат. № 7959. Цена 1 р. 10 к.
Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г, II эт., к. 1, т. 27-92-38.

Издательство Академии наук Армении, 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.
Типография Издательства Академии наук Армении, 375019, Ереван,
пр. Маршала Баграмяна, 24.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 1991 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.547

А. О. Карапетян

Интегральные представления в трубчатых областях над афинно-однородными конусами*

(Представлено академиком АН Армении М. М. Джрбашяном 16/XI 1990)

1. Классическая теорема Винера—Пэли ([2]) утверждает, что формулой вида

$$f(z)=\int\limits_0^{+\infty}F(t)\cdot e^{-zt}dt,\qquad \operatorname{Re}z>0,\tag{1}$$

где функция $F(t)\in L^2(0,+\infty)$ произвольна, задается параметрическое интегральное представление пространства Харди H^2 в правой полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Re}z>0\}$. Этот результат в силу своей важности стал объектом дальнейших обобщений в исследованиях многих авторов. Так, С. Бохнер ([3]) установил многомерный аналог теоремы Винера—Пэли для пространств Харди H^2 в радиальных трубчатых областях. Далее, в работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна ([4]), а также в гл. VII монографии М. М. Джрбашяна ([5]) были получены существенно новые интегральные представления типа (1) в угловых областях произвольного раствора. Важное значение имела работа С. Г. Гиндикина ([6]), в которой впервые была поставлена и решена задача получения интегральных представлений типа Винера—Пэли (и построения на их основе воспроизводящих ядер) для классов голоморфных в областях Зигеля $D\subset\mathbf{C}^{n+m}$ ($n\geqslant 1$, $m\geqslant 0$) функций, квадратично интегрируемых по всей области D. Там же было показано, что полученные формулы для воспроизводящих ядер существенно упрощаются в случае так называемых афинно-однородных областей Зигеля $D\subset\mathbf{C}^{n+m}$ ($n\geqslant 1$, $m\geqslant 0$).

2. Вкратце опишем некоторые основные понятия, разработанные в работе ([6]). Острый (т. е. не содержащий целиком ни одной прямой) открытый выпуклый конус (ОВК) $V\subset\mathbf{R}^n$ называется афинно-однородным, если группа линейных преобразований пространства $\mathbf{R}^n$, сохра-

---

* За развернутым изложением результатов настоящей заметки отсылаем к работе ([1]).

няющих конус V, действует транзитивно в V. С каждым таким конусом V специальным образом ассоциируются натуральное число $l \leqslant n$ (ранг конуса V) и l-компонентные векторы $N = N(V)$, $M = M(V)$. Далее, оказывается, что

$$V = \{y \in \mathbf{R}^n : \chi_m(y) > 0 \quad (1 \leqslant m \leqslant l)\}, \tag{2}$$

где χ_m $(1 \leqslant m \leqslant l)$ суть дробно-рациональные функции, канонически ассоциированные с V. Для произвольного $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_l) \in \mathbf{C}^l$ полагается

$$y^\rho \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{m=1}^{l} [\chi_m(y)]^{\rho_m}, \qquad y \in V. \tag{3}$$

Конус V естественным образом порождает скалярное произведение $[\cdot, \cdot]$ в $\mathbf{R}^n$ и меру $d\nu(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, кратную мере Лебега dx. При этом полагается

$$V^* = \{v \in \mathbf{R}^n : \quad [v, y] \geqslant 0, \quad \forall y \in V\}. \tag{4}$$

Оказывается, $\operatorname{Int} V^*$ также является афинно-однородным острым ОВК того же ранга l. Если через χ_m^* $(1 \leqslant m \leqslant l)$ обозначить функции, задающие $\operatorname{Int} V^*$ (в смысле (2)), то для произвольного $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_l) \in \mathbf{C}^l$ естественно положить

$$(\lambda)_*^\rho = \prod_{m=1}^{l} [\chi_m^*(\lambda)]^{\rho_m}, \qquad \lambda \in \operatorname{Int} V^*. \tag{5}$$

Наконец, для $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_l) \in \mathbf{C}^l$ полагаем $\rho^* = (\rho_l, \dots, \rho_1) \in \mathbf{C}^l$.

3. Всюду дальше V обозначает афинно-однородный острый ОВК ранга l в $\mathbf{R}^n$, $N = N(V) = (N_1, \dots, N_l)$, $M = M(V) = (M_1, \dots, M_l)$. Кроме того, a priori будем предполагать, что заданы некоторые непрерывные положительные функции $\varphi_m(\tau)$, $\tau \in (0, +\infty)$, $1 \leqslant m \leqslant l$. При этом полагаем $\tilde{\varphi}_m(\tau) = \varphi_m(\tau) \cdot \tau^{N_m/2}$, $\tau \in (0, +\infty)$, $1 \leqslant m \leqslant l$. Кроме того,

$$\gamma(y) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{m=1}^{l} \varphi_m(\chi_m(y)), \qquad y \in V, \tag{6}$$

$$\gamma_V^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_V e^{-[t, y]} \cdot \gamma(y)\, d\nu(y), \qquad t \in \mathbf{R}^n. \tag{7}$$

Затем при $0 < p$, $s < +\infty$ через $H^p_{s,\gamma}(T_V)$ обозначается пространство тех голоморфных в трубчатой области $T_V = \{z = x + iy \in \mathbf{C}^n : x \in \mathbf{R}^n,\ y \in V\}$ функций $f(z) \equiv f(x + iy)$, для которых

$$M^p_{s,\gamma}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_V \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} |f(x + iy)|^p \, d\nu(x) \right\}^s \cdot \gamma(y)\, d\nu(y) < +\infty. \tag{8}$$

Далее, сформулируем ряд свойств, которыми может обладать или не обладать некоторая непрерывная положительная функция $\varphi(\tau)$, $\tau\in(0, +\infty)$:

(I) $\lim\limits_{\tau\to+\infty}\dfrac{\ln\varphi(\tau)}{\tau}=0$; (II) $\overline{\lim\limits_{\tau\to+\infty}}\dfrac{\ln\varphi(\tau)}{\tau}\leqslant 0$; (III) $\underline{\lim\limits_{\tau\to+\infty}}\dfrac{\ln\varphi(\tau)}{\tau}\geqslant 0$;

(IV) $\varphi(\tau)\in L^1(0, R)$, $\forall R>0$; (V) $\varphi(2\cdot\tau)\leqslant\mathrm{const}\cdot\varphi(\tau)$, $\tau\in(0, +\infty)$. Кроме того, полагается

$$\varphi^*(t)\equiv\int\limits_0^{\infty}e^{-t\cdot\tau}\cdot\varphi(\tau)\,d\tau,\quad t\in(-\infty, +\infty). \tag{9}$$

Наконец, преобразование Фурье некоторой функции $g(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$, определяется как

$$\widehat{g}(t)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbf{R}^n}g(x)\cdot e^{-i\langle t,x\rangle}d\nu(x),\quad t\in\mathbf{R}^n. \tag{10}$$

4. Справедливы следующие предложения;

Предложение 1.1°. *Имеет место тождество*:

$$\gamma_V^*(t)\equiv\pi^{\frac{n-l}{2}}\cdot(t)_*^{-M\cdot 2}\prod_{m=1}^{l}\overline{\varphi}_m^*(\chi_{l-m+1}^*(t)),\quad t\in\mathrm{Int}\,V^*. \tag{11}$$

2°. *Если функции* φ_m $(1\leqslant m\leqslant l)$ *обладают свойством* (III), *то*

$$\gamma_V^*(t)\equiv+\infty,\quad t\in\mathbf{R}^n\setminus V^*. \tag{12}$$

3°. *Если функции* $\overline{\varphi}_m$ $(1\leqslant m\leqslant l)$ *обладают свойствами* (II) *и* (IV), *то функция* $\gamma_V^*(t)$ *непрерывна в конусе* $\mathrm{Int}\,V^*$ *и при этом* $0<\gamma_V^*(t)<+\infty$, $t\in\mathrm{Int}\,V^*$.

Предложение 2. *Если функции* $\overline{\varphi}_m$ $(1\leqslant m\leqslant l)$ *обладают свойствами* (II) *и* (IV), $\lambda\in V$ *и* $\delta\in(0, +\infty)$, $\alpha\in[0, +\infty)$, *то функция*

$$\eta(t)\equiv\frac{e^{-\langle\lambda,t\rangle}}{[\gamma_V^*(\delta\cdot t)]^{\alpha}},\quad t\in\mathrm{Int}\,V^*, \tag{13}$$

принадлежит всем пространствам $L^p(\mathrm{Int}\,V^*)$, $0<p<+\infty$.

Перейдем к формулировке основных результатов.

Теорема 1. *Пусть функции* $\overline{\varphi}_m$ $(1\leqslant m\leqslant l)$ *обладают свойством* (III) *и* $1\leqslant p\leqslant 2$, $0<s<+\infty$. *Тогда каждая функция* $f\in H^p_{s,\gamma}(T_V)$ *допускает интегральное представление вида*

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{V^*}F(t)\cdot e^{i\langle z,t\rangle}d\nu(t),\quad z\in T_V, \tag{14}$$

где:

1°. *При* $p = 1$ *функция* $F(t)$, $t \in \mathbf{R}^n$, *непрерывна, обращается в нуль на* $\mathbf{R}^n \setminus V^*$, *и такова, что*

$$\sup_{t \in V^*} \{|F(t)|^p \cdot \gamma_V^*(s \cdot t)\} \leqslant \frac{M_{s,\gamma}^1(f)}{(2\pi)^{n/2 \cdot s}} < +\infty. \tag{15}$$

2°. *При* $1 < p \leqslant 2$ *функция* $F(t)$, $t \in V^*$, *измерима и удовлетворяет условию*

$$\int_V \left\{ \int_{V^*} |F(t)|^q \cdot e^{-q(y,t)} \, d\nu(t) \right\}^{s(p-1)} \cdot \gamma(y) \, d\nu(y) \leqslant \frac{M_{s,\gamma}^p(f)}{(2\pi)^{n/2 \cdot s(2-p)}} < +\infty \tag{17}$$

$$(q = p/(p-1)).$$

При этом для п. в. $y \in V$ *имеем*

$$\widehat{f}_y(t) = \begin{cases} F(t) \cdot e^{-(y,t)}, & t \in V^*, \\ 0, & t \in \mathbf{R}^n \setminus V^*, \end{cases} \tag{17}$$

где $f_y(x) \equiv f(x + iy)$, $x \in \mathbf{R}^n$. *Кроме того, при* $p = 2$ *интегральное представление* (14) *класса* $H_{s,\gamma}^p(T_V)$ *является к тому же параметрическим и в* (16) *имеет место равенство (т. е. выполняется равенство Персеваля).*

Теорема 2. *Пусть функции* $\widetilde{\varphi}_m$ $(1 \leqslant m \leqslant l)$ *обладают свойствами* (I) *и* (IV) *и ядро* $\Phi(z, w)$ *определено по формуле*

$$\Phi(z, w) = \int_{\operatorname{Int} V^*} \frac{e^{i(z-\bar{w},t)}}{\gamma_V^*(2 \cdot t)} \, d\nu(t), \quad z, w \in T_V. \tag{18}$$

Допустим также, что $1 \leqslant p \leqslant 2$ *и число* s *удовлетворяет одному из следующих условий:*

(а) $1/p \leqslant s \leqslant 2/p$;

(б) $1/p \leqslant s \leqslant 1/(p-1)$, *но функции* $\widetilde{\varphi}_m$ $(1 \leqslant m \leqslant l)$ *обладают также свойством* (V).

Тогда каждая функция $f \in H_{s,\gamma}^p(T_V)$ *допускает интегральное представление*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T_V} f(w) \cdot \Phi(z, w) \cdot \gamma(v) \, d\nu(u) \, d\nu(v), \quad z \in T_V, \tag{19}$$

$$(w = u + iv).$$

Замечание 1. Можно показать, что из (18) вытекает (по крайней мере, формально) следующая формула:

$$\Phi(z, w) = \mathrm{const} \cdot \left(\frac{z - \bar{w}}{2i}\right)^{-\frac{N}{2}} \cdot \prod_{m=1}^{l} \Psi_m^*\left(\chi_{l-m+1}\left(\frac{z - \bar{w}}{2i}\right)\right), \tag{18'}$$

$$z, w \in T_V,$$

где

$$\Psi_m(\tau) = \tau^{M_{l-m+1}} \cdot [\tilde{\varphi}^*_{l-m+1}(\tau)]^{-1}, \quad \tau \in (0, +\infty). \tag{20}$$

Поскольку в силу условий теоремы 2 функции Ψ^*_m $(1 \leqslant m \leqslant l)$ допускают аналитическое продолжение с полуоси $(0, +\infty)$ в полуплоскость $\{w: \operatorname{Re} w > 0\}$, то, например, в предположении $\operatorname{Re} \chi_m(z) > 0$, $\operatorname{Re} z \in V$ $(1 \leqslant m \leqslant l)$, формула (18') действительно верна. Однако автору не ясно, насколько правомерно такое предположение. Из работы ([6]) нам известно лишь, что $\chi_m(z) \neq 0$, $\operatorname{Re} z \in V$ $(1 \leqslant m \leqslant l)$.

Замечание 2. При $n \geqslant 1$, $p = 2$, $s = 1$ и $\varphi_m(\tau) \equiv 1$, $\tau \in (0, +\infty)$ $(1 \leqslant m \leqslant l)$, теоремы 1 и 2 вытекают из более общих результатов § 5 работы ([6]) С. Г. Гиндикина.

Замечание 3. В работе М. М. Джрбашяна и А. Э. Джрбашяна ([7]) теорема 2 установлена при $n = l = 1$, $s = 1$ и $\varphi_1(\tau) = \tau^{\alpha}$, $\tau \in (0, +\infty)$ $(\alpha > -1)$, но уже при всех $p \in [1, +\infty)$, а не только при $1 \leqslant p < 2$.

Замечание 4. В случае, когда φ_m $(1 \leqslant m \leqslant l)$ суть согласованные друг с другом степенные функции, а конус $V \subset \mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ к тому же самосопряженный, теорема 2 вытекает из одного результата, сформулированного в работе ([8]) Койфмана и Рохберга.

В заключение выражаю благодарность академику АН Армении М. М. Джрбашяну за постановку задач и постоянное внимание к настоящей работе и профессору С. Г. Гиндикину за ценные советы и полезные обсуждения в ходе выполнения работы.

Институт математики Академии наук Армении

Ա. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Ինտեգրալ ներկայացումներ իրենց հիմքում գծորեն-համասեռ կոներ ունեցող խողովակաձև տիրույթներում

Հոդվածում դիտարկվում են $\mathbf{R}^n$ *տարածությունում գտնվող* $l > 1$ *կարգի գծորեն-համասեռ սուր կոներ։ Ինչպես հայտնի է, այդպիսի* V *կոները ունեն*

$$V = \{y \in \mathbf{R}^n: \ \chi_m(y) > 0 \ \ (1 \leqslant m \leqslant l)\}$$

տեսք, որտեղ χ_m $(1 \leqslant m \leqslant l)$ *կոտորակա-ռացիոնալ ֆունկցիաները կանոնավոր կերպով կապված են* V*-ի հետ։ Աշխատանքում ուսումնասիրվում են* $T_V = \{z = x + iy \in \mathbf{C}^n: \ x \in \mathbf{R}^n, \ y \in V\}$ *խողովակաձև տիրույթում*

$$\int_V \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} |f(x+iy)|^p dx \right\}^s \cdot \prod_{m=1}^{l} \varphi_m(\chi_m(y)) dy < +\infty$$

պայմանին բավարարող $f(z) = f(x+iy)$ *հոլոմորֆ ֆունկցիաների դասերը։ Այստեղ* $1 \leqslant p < 2$, $0 < s < +\infty$ *և* $\varphi_m(\tau)$*-ները,* $\tau \in (0, +\infty)$ $(1 \leqslant m \leqslant l)$ *կամայական դրական անընդհատ ֆունկցիաներ են։ Ելնելով որոշակի պայ-*

մաններ φ_m ($1 \leqslant m \leqslant l$) ֆունկցիաների և S պարամետրի վրա, նշված դասերի համար հաստատվում են Պելի—Վիների տիպի ինտեգրալ ներկայացումներ՝ ինչպես նաև կառուցվում են $\Phi(z, w)$, $z, w \in T_V$, վերարտադրող կորիզներ, որոնք հոլոմորֆ են ըստ z-ի և անտիհոլոմորֆ՝ ըստ w-ի։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. О. Карапетян*, Рукопись деп. в АрмНИИНТИ 16. 11. 90, № 48Ар 90, Ереван, 42 с., 1990. [2] *R. Paley, N. Wiener*, Fourier Transforms in the Complex Domain, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 19. Amer. Math. Soc., N. Y., 1934. [3] *S. Bochner*, Math. Ann., v. 45, № 4, p. 686—707 (1944). [4] *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян*, ДАН СССР, т. 120, № 3, с. 457—460 (1958). [5] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966. [6] *С. Г. Гиндикин*, УМН, т. 19, № 4, с. 3—92 (1964). [7] *М. М. Джрбашян, А. Э. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 285, № 3, с. 547—557 (1985). [8] *R. Coifman, R. Rochberg*, Astérisque, v. 77, p. 11—66 (1980).

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 1991 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

И. В. Григорян

Об аналитическом продолжении и представлении функций, принадлежащих замыканиям неполных систем типа Миттаг—Леффлера

(Представлено академиком АН Армении М. М. Джрбашяном 20/XI 1990)

1. В данной заметке приведены формулировки некоторых результатов об эффективном аналитическом продолжении функций, принадлежащих замыканиям в $L_{2,\omega}(0, +\infty)$, $-1<\omega<1$,

$$\left(f(x)\in L_{2,\omega}(0, +\infty) \Leftrightarrow \|f\|_{L_{2,\omega}(0,+\infty)} = \left(\int_0^{+\infty}|f(x)|^2 x^{\omega}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty\right)$$

линейных оболочек неполных систем, порожденных функцией типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/\Gamma(\mu + n\rho^{-1}), \quad z\in C,$$

(как известно ([1]), при любом конечном $\rho > 1/2$ и при любом μ из комплексной плоскости C $E_\rho(z;\mu)$ является целой функцией порядка ρ и типа 1, причем $E_1(z;1) = \exp(z)$).

2. Мы будем рассматривать системы вида (3), введенные М. М. Джрбашяном ([2]), установившим следующий результат

Теорема (М. М. Джрбашян). *Пусть*

$$1/2<\alpha<+\infty,\ (1/\rho)+(1/\alpha)=2,\ -1<\omega<1,\ \mu=(1+\omega+\rho)/(2\rho), \tag{1}$$

$$\{\lambda_k\}_1^{\infty}\subset\Delta(\alpha)=\{z\in C: |\arg z|<\pi/(2\alpha),\quad 0<|z|<+\infty\}, \tag{2}$$

а s_k — кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$. Тогда для полноты в $L_{2,\omega}(0, +\infty)$ системы типа Миттаг—Леффлера

$$\{E_\rho^{(s_k-1)}(-\lambda_k x;\mu)\,x^{s_k-1}\}_1^{\infty} \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|\lambda_k|^{2\alpha})^{-1}\,\mathrm{Re}\,\lambda_k^{\alpha}. \tag{4}$$

Отметим, что эта теорема является существенным обобщением известной теоремы Мюнца—Саса ([3]), дающей критерий полноты в $L_2(0,+\infty)$ системы экспонент и переходит в него в специальном случае, когда $\alpha=\rho=\mu=1$, $\omega=0$ и $\lambda_j\neq\lambda_m$ при $j\neq m$.

3. Если система экспонент $\{e^{-\lambda_j x}\}_1^\infty$ ($\mathrm{Re}\,\lambda_j>0$, $\lambda_j\neq\lambda_m$ при $j\neq m$) не полна в $L_2(0,+\infty)$, то она порождает некоторое собственное подпространство в $L_2(0,+\infty)$. Описание этого подпространства в случае, когда λ_k вещественны, дано Шварцем ([4]) и А. Ф. Леонтьевым ([5]), а свойства этого подпространства в зависимости от последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ изучены Кусисом ([6]) и Лаксом ([7]).

М. М. Джрбашян ([8, 9]) выявил полную внутреннюю характеристику замыкания в $L_2(0,+\infty)$ линейной оболочки неполной системы $\{e^{-\lambda_k x}x^{s_k-1}\}_1^\infty$ ($\mathrm{Re}\,\lambda_k>0$). Более того, если

$$|\arg\lambda_k|<\frac{\pi}{2}\beta\quad(0<\beta<1),\qquad\sum_{k=1}^\infty|\lambda_k|^{-1}<+\infty,$$

им были установлены качественно новые результаты об аналитическом продолжении в угловую область $|\arg z|<\frac{\pi}{2}(1-\beta)$ функций, принадлежащих замыканию в $L_2(0,+\infty)$ линейной оболочки системы $\{e^{-\lambda_k x}x^{s_k-1}\}_1^\infty$, и разложения в ряды по системам обобщенных экспонент продолженных функций.

С. А. Акопян и И. О. Хачатрян ([10]) обобщили результат М. М. Джрбашяна и дали полную внутреннюю характеристику замыкания в $L_{2,\omega}(0,+\infty)$ линейной оболочки неполной системы (3). Кроме того при условии $\{\lambda_k\}_1^\infty\subset\Delta(\beta)$ $(\beta>\alpha)$ и дополнительном условии $|\lambda_{k+1}|/|\lambda_k|>q>1$ в работе ([10]) ими было установлено, что аппроксимируемая функция аналитически продолжается в угловую область $\Delta(\varkappa)$ $(1/\varkappa=(1/\alpha)-(1/\beta))$ и продолженная функция в $\Delta(\varkappa)$ разлагается в ряд по системе $\{E_\rho(-\lambda_k z;\mu)\}_1^\infty$.

4. Для формулировки основной теоремы данной заметки приведем необходимый подготовительный материал.

Нам потребуются две системы функций, введенные в работе В. М. Мартиросяна ([11]) — система рациональных функций $\{R_k(z)\}_1^\infty$ и биортогональная с ней на границе $\partial\Delta(\rho)$ области $\Delta(\rho)$ система функций $\{Z_k(z)\}_1^\infty$. Эти системы определяются следующим образом.

Пусть выполнены условия (1), (2) и пусть $\nu=(\alpha+\omega-1)/2$. Тогда $R_k(z)$ — это *сумма главных частей* лорановских разложений функций* $G_k(z)=\Phi_k[\varphi(z)](-z)^\nu$, $z\in\Delta^*(\rho)=\mathbb{C}\setminus\overline{\Delta(\rho)}$ в окрестностях

* Всюду рассматриваются главные ветви соответствующих степенных функций.

всех ее отличных друг от друга полюсов, расположенных в точках $z = -\lambda_k$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, где

$$\Phi_k(w) = \sqrt{\frac{\operatorname{Im}\mu_k}{\pi}}\,\frac{1}{w-\mu_k}\prod_{j=1}^{k}\frac{w-\mu_j}{w-\overline{\mu}_j} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

$$\mu_k = i\lambda_k^{\rho} \ (k = 1, 2, \ldots), \quad \varphi(z) = -i(-z)^{\rho} \ (z \in \Delta^*(\rho)), \tag{6}$$

(об истории возникновения системы (5) см. в ([12])), а $\chi_k(z)$ — это голоморфная в $\Delta^*(\rho)$ функция

$$\chi_k(z) = \overline{\Phi_k[\overline{\varphi(z)}]}\ \varphi'(z)(-z)^{\gamma}.$$

5. Введем в рассмотрение две новые системы функций $\{E_k(x)\}_1^{\infty}$ и $\{\widehat{\chi}_k(x)\}_1^{\infty}$. А именно, при условиях (1) и (2) для всех k $(k = 1, 2, \ldots)$ положим

$$E_k(x) = \frac{x^{1-\mu\rho}}{2\pi\rho}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\tau x^{\rho}}-1}{i\tau}R_k\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}\operatorname{sign}\tau}|\tau|^{\frac{1}{\rho}}\right)\times$$

$$\times\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}\operatorname{sign}\tau}|\tau|^{\frac{1}{\rho}}\right)^{1-\mu\rho}d\tau,$$

$$\widehat{\chi}_k(x) = \frac{x^{\rho(\mu-1)}}{i\rho}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\tau x^{\rho}}-1}{-i\tau}\chi_k\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}\operatorname{sign}\tau}|\tau|^{\frac{1}{\rho}}\right)\times$$

$$\times\left(e^{i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\tau}|\tau|\right)^{\mu-1}d\tau.$$

Отметим, что функция $E_k(x)$ определена всюду на полуоси $(0, +\infty)$, а $\widehat{\chi}_k(x)$ — почти всюду на $(0, +\infty)$, и отметим некоторые свойства этих функций.

Лемма 1. *Системы* $\{E_k(x)\}_1^{\infty}$ и $\{\widehat{\chi}_k(x)\}_1^{\infty}$ *биортогональны на* $(0, +\infty)$:

$$\int_0^{+\infty}E_j(x)\widehat{\chi}_m(x)\,dx = \begin{cases}1, & j = m,\\ 0, & j \neq m.\end{cases} \quad (j, m = 1, 2, \ldots)$$

Лемма 2. *При всех n $(n = 1, 2, \ldots)$ линейные оболочки систем* $\{E_k(x)\}_1^{n}$ и $\{E_{\rho}^{(s_k-1)}(-\lambda_k x; \mu)x^{s_k-1}\}_1^{n}$ *совпадают.*

Таким образом, при каждом k $(k = 1, 2; \ldots)$ функция $E_k(x)$ является линейной комбинацией функций системы (3).

Опираясь на результаты работы ([11]), легко доказать, что система $\{E_k(x)\}_1^{\infty}$ является базисом Рисса замыкания в $L_{2,\omega}(0, +\infty)$ линейной оболочки системы (3). В частности, если ряд (4) расходится, то $\{E_k(x)\}_1^\infty$ есть базис Рисса пространства $L_{2,\omega}(0, +\infty)$.

6. Для формулировки главного результата заметки нам нужно еще ввести два класса функций.

Пусть

$$1/2 < \alpha \leqslant 1, \quad (1/\alpha) + (1/\rho) = 2, \quad -1 < \omega < 1 \ (\omega \neq 1 - \alpha),$$
$$\mu = (1 + \omega + \rho)/(2\rho), \tag{7}$$

$$|\arg \lambda_k| < \pi/(2\varkappa) \quad (k = 1, 2, \ldots), \qquad \frac{1}{\alpha} - 1 \leqslant \frac{1}{2\varkappa} < \frac{1}{2\alpha} \tag{8}$$

и пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{-\min(\varkappa,\, 1-\omega)} < +\infty. \tag{9}$$

В предположениях (7), (8), (9) обозначим через $M^{*}_{2,\omega}\{\lambda_k\}$ замыкание в $L_{2,\omega}(0, +\infty)$ линейной оболочки системы (3). Отметим, что из (9) вытекает сходимость ряда (4), поэтому $M^{*}_{2,\omega}\{\lambda_k\}$ является собственным подпространством пространства $L_{2,\omega}(0, +\infty)$.

Обозначим еще через $N^{*}_{2,\omega}\{\lambda_k\}$ класс функций $f(z)$, голоморфных в угловой области $\Delta(\eta)$, $\frac{1}{\eta} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\varkappa}$, и представимых там в качестве суммы ряда

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k E_k(z), \quad z \in \Delta(\eta),$$

где $\{b_k\}_1^\infty$ — некоторая последовательность комплексных чисел (зависящая от $f(z)$), удовлетворяющая лишь условию $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 < +\infty$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *В условиях* (7)—(9) *имеем*:

1°. *Каждая функция* $f(x)$, *принадлежащая классу* $M^{*}_{2,\omega}\{\lambda_k\}$, *после изменения ее значений на множестве нулевой меры аналитически продолжается в угловую область* $\Delta(\eta)$, $1/\eta = (1/\alpha) - (1/\varkappa)$. *При этом в каждом угловом секторе*

$$S_{\eta_1}(\delta) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{2\eta_1},\ \delta < |z| < +\infty \right\}$$

$$\left(0 < \delta < +\infty,\ 0 < \frac{1}{\eta_1} < \frac{1}{\eta} \right)$$

выполняется оценка

$$|f(z)| \leqslant A(\delta, \eta_1) \|f\|_{L_{2,\omega}(0,+\infty)} |z|^{\mu(1-\rho)}, \quad z \in S_{\eta_1}(\delta), \tag{10}$$

где постоянная $A(\delta, \eta_1) > 0$ *не зависит от* z *и* $f(z)$.

2°. *Классы* $M^{*}_{2,\omega}\{\lambda_k\}$ *и* $N^{*}_{2,\omega}\{\lambda_k\}$ *совпадают*.

3°. Каждая функция $f(z) \in M^{*}_{2,\omega}\{\lambda_k\} = N^{*}_{2,\omega}\{\lambda_k\}$ единственным образом разлагается в ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) E_k(z), \qquad b_k(f) = \int_0^{+\infty} f(x) \overline{\gamma_k(x)}\, dx, \tag{11}$$

абсолютно и равномерно сходящийся внутри $S(\eta_1)$.

4°. Если $\delta > 0$, $0 < 1/\eta_0 < 1/\eta_1$, то существует постоянная $C(\delta; \eta_0) > 0$, не зависящая от n, z и $f(z)$ такая, что

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n-1} b_k(f) E_k(z) \right| \leq$$

$$\leq C(\delta, \eta_0) \|f\|_{L_{2,\omega}(0,+\infty)} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |\lambda_k|^{-2\min(\rho,1-\omega)} \right\}^{\frac{1}{2}} r^{\mu(1-\omega)}, \tag{12}$$

$$1 \leq n < +\infty, \quad z \in S_{\eta_0}(\delta) \quad (r = |z|).$$

Таким образом, при $\mu > 1$ отрезки ряда (11) равномерно аппроксимируют функцию $f(z)$ на каждом угловом секторе $S_{\eta_0}(\delta)$ с касанием порядка $r^{\mu(1-\omega)}$ в бесконечности.

Отметим, что в специальном случае, когда $\alpha = \rho = \mu = 1$ и $\omega = 0$, утверждения сформулированной теоремы переходят в соответствующие результаты, установленные М. М. Джрбашяном в работе ([8, 9]) для обобщенных систем экспонент. Но следует заметить, что в указанном случае в работах ([8, 9]) вместо (10) и (12) были установлены более сильные оценки, обеспечивающие экспоненциальное убывание в бесконечности для их правильных частей.

Автор благодарен В. М. Мартиросяну за полезные обсуждения.

Ереванский государственный университет

Ն. Վ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Միտտագ—Լեֆլերի տիպի ոչ լրիվ համակարգերի փակույթին պատկանող ֆունկցիաների անալիտիկ շարունակության և ներկայացման մասին

Աշխատանքում ստացված են արդյունքներ $L_{2,\omega}(0, +\infty)$ տարածություններում $(-1 \leq \omega < 1)$ Միտտագ—Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաներով ծնված ոչ լրիվ

$$\{E_\rho^{(s_k-1)}(-\lambda_k x; \mu)\, x^{s_k-1}\}_1^\infty \quad \left(\rho \geq 1; \;\; \mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}\right)$$

համակարգի փակույթին պատկանող ֆունկցիաների անալիտիկ շարունակության և ներկայացման մասին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Наука, М., 1966. [2] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 219, № 6, с. 1302—1305 (1974). [3] *Н. Винер, Р. Пэли*, Преобразование Фурье в комплексной области Наука М., 1964. [4] *L. Schwartz*, Etude des sommes d'exponentialles. Actualites scientifiques et industrielles, Paris, 1959. [5] *А. Ф. Леонтьев*, ДАН СССР, т. 72, № 4, с. 621—624 (1950). [6] *P. Koosis*, Comm. Pure Appl. Math., v. 10, № 4, p. 583—615 (1957). [7] *P. D. Lax*, Comm. Pure Appl, Math., v. 10, № 4, p. 617—622 (1957). [8] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 141, № 3 с. 539—542 (1961). [9] *М. М. Джрбашян*, Мат. сб. т. 114 (156), № 1, с. 3—84 (1981). [10] *С. А. Акопян, И. О. Хачатрян*, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 40, № 1 с. 95—111. (1976). [11] *Б. М. Мартиросян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 22, № 6, с. 585—606 (1987). [12] *М. М. Джрбашян*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 14, № 6, с. 446—493 (1979).

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 1991 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 515.1

Э. А. Мирзаханян

Об одном бесконечномерном обобщении классической теоремы Брауэра об инвариантности области

(Представлено чл.-корр. АН Армении В. С. Захаряном 27/XII 1990)

В статье приводятся некоторые бесконечномерные обобщения (теоремы 1,5) теоремы Борсука о нечетности топологической степени нечетного отображения [1] и теоремы Брауэра об инвариантности области [2]. Эти конечномерные классические теоремы перестают быть справедливыми в бесконечномерных пространствах в классе всех непрерывных отображений подмножеств этих пространств. Вместе с тем оказывается, что справедливы некоторые бесконечномерные аналоги упомянутых выше теорем в действительном гильбертовом пространстве H, если рассматривать, однако, лишь отображения, принадлежащие одному допустимому классу K непрерывных отображений подмножеств пространства H.

Определение и ряд основных свойств класса K приведены в [3,4].

Определение 1. *Пусть G — открытое подмножество гильбертова пространства H и $f: G \to H$ — непрерывное отображение. Будем говорить, что отображение f в точке $x_0 \in G$ принадлежит классу K, если выполнено следующее условие: для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют окрестность $U \subset G$ точки x_0 в H, конечномерное подпространство $L \subset H$ и действительное число λ такие, что если $x, y \in U$ и вектор $x - y$ ортогонален подпространству L, то выполнено соотношение*

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|.$$

Будем говорить, что отображение $f: G \to H$ принадлежит классу K на G, если в каждой точке $x_0 \in G$ принадлежит классу K.

Фигурирующее в приведенном определении действительное число λ можно выбрать так, чтобы оно определялось только точкой x_0 и было пригодно для любого числа $\varepsilon > 0$. Получающаяся таким образом действительная функция $\lambda(x) = \lambda_f(x)$, заданная на G, непрерывна и единственна [3], она называется терминальной производной отображения f.

Пусть теперь M — произвольное подмножество пространства H и $f: M \to H$ — непрерывное отображение. Будем говорить, что отображение f принадлежит классу K, если существуют открытое в H подмножество $G \supset M$ и непрерывное отображение $g: G \to H$ такое, что $g \in K$ и $g(x) = f(x)$ для каждой точки $x \in M$.

Отображения, принадлежащие классу K, обладают рядом удачных свойств. В частности, эти отображения локально (т. е. в окрестности каждой точки x_0) напоминают по своим свойствам отображения вида $\lambda I + A$, где I — тождественный оператор H, A — вполне непрерывный оператор, а λ — действительное число, которое, однако, зависит от точки x_0.

С помощью распространения идеи Лере и Шаудера на класс K, построена ([1]) топологическая степень отображений $f: G \to H$, принадлежащих некоторому подклассу класса K. А именно: если G — открытое подмножество пространства H, $f: G \to H$ — отображение, принадлежащее классу K, а $b \in f(G)$ — такая точка, что прообраз $X = f^{-1}(b)$ компактен и терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f на X отлична от нуля, то определено некоторое целое число $\deg(f, G, b)$, называемое степенью отображения f в точке b.

В дальнейшем отображения, принадлежащие классу K, мы будем называть K-отображениями.

Теорема 1. *Пусть G — открытое подмножество гильбертова пространства H, содержащее нулевую точку O и симметричное относительно O. Пусть, далее, $f: G \to H$ — нечетное (т. е. $f(-x) = -f(x)$) K-отображение, удовлетворяющее следующему условию:*

c) прообраз $x = f^{-1}(O)$ точки O компактен и на нем терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f отлична от нуля. Тогда определена степень $\deg(f, G, 0)$ отображения f в точке O, и она нечетна.

Теорема 2. *Пусть G — открытое подмножество пространства H, симметричное относительно нулевой точки O и такое, что $O \notin \overline{G}$. Пусть, далее, $f: G \to H$ — нечетное K-отображение, обладающее тем свойством, что прообраз $x = f^{-1}(O)$ непуст, компактен и терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f на всем X отлична от нуля. Тогда степень $\deg(f, G, O)$ отображения f в точке O четна.*

Теорема 3. *Пусть G — открытое подмножество пространства H, симметричное относительно нулевой точки O и такое, что $O \in G$. Пусть, далее, $f: G \to H$ — нечетное K-отображение. Тогда, если прообраз $X = f^{-1}(O)$ компактен и терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f на X отлична от нуля, то для любого линейного подпространства $H^{(1)}$ коразмерности 1 пространства H имеет место условие*

$$f(G) \cap (H \setminus H^{(1)}) \neq \varnothing.$$

Теорема 4. *Пусть G — открытое подмножество пространства H, симметричное относительно точки O и такое, что $O \in G$. Пусть, далее, $f: G \to H$ — K-отображение, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) $f^{-1}(O) = \{O\}$;

2) *терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f в точке O отлична от нуля;*

3) *для любой точки $x \neq 0$ векторы $f(x)$ и $f(-x)$ направлены неодинаково, т. е. $\frac{f(x)}{\|f(x)\|} \neq \frac{f(-x)}{\|f(-x)\|}$. Тогда степень $\deg(f, G, O)$ определена и нечетна.*

Лемма. *Пусть M — подмножество гильбертова пространства H и $f: M \to H$ — некоторое K-отображение. Пусть, далее, для точки $x_0 \in M$ выполнены следующие условия:*

1) *точка x_0 является внутренней точкой M относительно H;*

2) *отображение f инъективно в некоторой окрестности U точки x_0 относительно H;*

3) *значение терминальной производной $\lambda_f(x)$ отображения f в точке x_0 отлично от нуля.*

Тогда $f(x_0)$ является внутренней точкой $f(M)$ относительно H.

Из леммы непосредственно следует следующее бесконечномерное обобщение классической теоремы Брауэра об инвариантности области ([3]).

Теорема 5. (о K-инвариантности области). *Пусть G — открытое подмножество гильбертова пространства H и $f: G \to H$ локально инъективное, в частности, инъективное K-отображение, обладающее тем свойством, что терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f в каждой точке $x \in G$ отлична от нуля. Тогда $f(G)$ является открытым подмножеством пространства H.*

Замечание. *В теореме 5 принадлежность отображения f к классу K существенна.*

В самом деле, пусть H — сепарабельное гильбертово пространство и $\{e_n\}$ — некоторый ортонормированный базис пространства H, а $T: H \to H$ линейный ограниченный оператор, задаваемый по формуле: $T(e_n) = e_{n+1}$, т. е. для любой точки $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots x_n e_n + \cdots$ пространства H $T(x) = x_1 e_2 + x_2 e_3 + \cdots + x_n e_{n+1} + \cdots$. Оператор T не принадлежит классу K и гомеоморфно отображает пространство H на неоткрытое в H линейное подпространство $H^{(1)}$ коразмерности 1.

Определение 2. *Гомеоморфизм $f: X \simeq Y$ между подмножествами X и Y гильбертова пространства H называется K-гомеоморфизмом, если отображение f и обратное отображение $f^{-1}: Y \to X$ являются K-отображениями.*

Теорема 6. *Пусть $f: X \simeq Y$ — K-гомеоморфизм. Тогда образ $f(x_0)$ внутренней точки x_0 множества X является внутренней точкой множества Y, а образ $f(x_0)$ граничной точки x_0 множес-*

Академия наук

ства X является граничной точкой множества Y, в частности, если X открыто в H, то и множество Y открыто в H.

Ереванский государственный университет

Է. Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ

Տիրույթի ինվարիանտության Բրաուէրի դասական թեորեմի մի անվերջչափանի ընդհանրացման մասին

Հայտնի է, որ տոպոլոգիայի մի շարք դասական թեորեմներ դադարում են ճիշտ լինելուց անվերջչափանի տարածություններում։

Հոդվածում բերված են Բորսուկին և Բրաուէրին պատկանող այդպիսի թեորեմների անվերջչափանի ընդհանրացումներ H իրական հիլբերտյան տարածության համար։ Բերենք այդ ընդհանրացումներից մեկի ձևակերպումը.

Թ ե ո ր ե մ (տիրույթի K-ինվարիանտության մասին)։ Դիցուք G-ն H տարածության բաց բազմություն է և $f: G \to H$ լոկալ ինյեկտիվ, մասնավորապես ինյեկտիվ K-արտապատկերում, որի $\lambda(x)$ թերմինալ ածանցյալը G-ին պատկանող յուրաքանչյուր x կետում տարբեր է զրոյից։ Այդ դեպքում $f(G)$ բազմությունը հանդիսանում է H տարածության բաց բազմություն։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. Ниренберг.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. Мир, М., 1977. [2] *А. Дольд.* Лекции по алгебраической топологии, Мир, М., 1976. [3] *Э. А. Мирзаханян.* Уч. зап. ЕГУ, № 3, 1990. [4] *Э. А. Мирзаханян*, Уч. зап. ЕГУ, № 1, 1991.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 92 1991 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Э. А. Даниелян, Г. С. Мовсисян

О чебышевской экстремальной задаче на выпуклых классах распределений

(Представлено академиком АН Армении Р. В. Амбарцумяном 29/XII 1990)

1. Экстремальная задача. Пусть F — замкнутый относительно слабой сходимости выпуклый класс функций распределения (ФР) на $[a, b]$, где $-\infty < a < b < +\infty$;

$$u_1(t), \dots, u_n(t), u_{n+1}(t), \quad n \geqslant 1, - \tag{1}$$

система непрерывных на $[a, b]$ линейно независимых функций $\vec{c}_k = (c_1, \dots, c_k)$, $\vec{u}_k(t) = (u_1(t), \dots, u_k(t))$, $k = \overline{1, n+1}$, где c_k — действительные числа;

$$M_k(F) = \left\{\vec{c}_k : \vec{c}_k = \int_a^b \vec{u}_k d\sigma, \ \sigma \in F\right\} -$$

моментные пространства;

$$F(\vec{c}_k) = \left\{\sigma : \vec{c}_k = \int_a^b \vec{u}_k d\sigma, \ \sigma \in F\right\}.$$

Введенные множества обладают свойствами:

а) при любом $\vec{c}_k \in M_k(F)$ множество $F(\vec{c}_k)$ замкнуто в смысле слабой сходимости и выпукло;

б) множество $M_k(F)$ ограничено замкнуто и выпукло в R^k.

Чебышевская задача. Для каждого $\vec{c}_n \in M_n(F)$ найти

$$c' = \inf_{\sigma \in F(\vec{c}_n)} \int_a^b u_{n+1} d\sigma \quad \text{и} \quad c'' = \sup_{\sigma \in F(\vec{c}_n)} \int_a^b u_{n+1} d\sigma.$$

Из свойств а) и б) следует *достижимость* в задаче. Именно:

Для каждого $\vec{c}_n \in M_n(F)$ в классе $F(\vec{c}_n)$ существуют ФР, доставляющие в классе $F(\vec{c}_n)$ минимум и максимум функционалу

$$\int_a^b u_{n+1}\, d\sigma. \qquad (2)$$

Действительно, выберем $\sigma_i \in F(\vec{c}_n)$, $i \geq 1$, такие, что $c_{(i)} = \int u_{n+1} d\sigma_i \to c'$. Так как $(\vec{c}_n, c_{(i)}) \in M_{n+1}(F)$ при всех $i \geq 1$ и $(\vec{c}_n, c_{(i)}) \to (\vec{c}_n, c')$, то из-за замкнутости $M_{n+1}(F)$ имеем $(\vec{c}_n, c') \in M_{n+1}(F)$. Аналогично $(\vec{c}_n, c'') \in M_{n+1}(F)$, откуда следует достижимость.

В наших условиях содержится также информация о ФР, доставляющих экстремумы функционалу (2).

Пример. В классе F_0 всех ФР на $[a, b]$, где $-\infty < a < b < +\infty$, имеет место уточнение теоремы Каратеодори—Рисса (см. ([1])), приводящее к утверждению.

Для любого $\vec{c}_n \in M_n(F_0)$ в классе $F_0(\vec{c}_n)$ существуют ступенчатые ФР с не более чем $n+1$ скачками, доставляющие в классе $F_0(\vec{c}_n)$ минимум и максимум функционалу (2).

Это утверждение формируется в терминах k-крайних точек*.

Пусть $E_k F$, $k \geq 1$ — множество k-крайних точек класса F; $D_k F$ — множество выпуклых линейных комбинаций не более чем $k-1$-крайних точек F.

Для класса F_0 нетрудно показать:

1) $E_1 F_0$ — множество одноступенчатых на $[a, b]$ ФР;

2) при всех $k \geq 1$ $E_k F_0 = D_k F_0$.

Цель настоящей заметки—доказать теорему 1, согласующуюся с утверждением для класса F_0.

Теорема 1. *Для любого $\vec{c}_n \in M_n(F)$ в классе $F(\vec{c}_n)$ существуют ФР из $E_{n+1} F$, доставляющие в классе $F(\vec{c}_n)$ минимум и максимум функционалу* (2).

Доказательство объединяет несколько соображений.

1. Пусть $L_1[a, b]$—пространство абсолютно интегрируемых на $[a, b]$ непрерывных слева функций с нормой

$$\|f\| = \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

---

* Определение k-крайней точки дано в приложении

Пространство $L_1\,[a, b]$ локально-выпукло и содержит любой замкнутый класс ФР F.

Так как для ФР сходимости слабые и по норме L_1 эквивалентны (см. ([2])), то F—компактное множество локально-выпуклого пространства*.

2. Отображение

$$\int\limits_a^b \vec{u}_{n+1}\, d\sigma, \quad \sigma \in F,$$

является непрерывным аффинным отображением. Оно переводит компактное множество F локально-выпуклого пространства в компактное множество $M_{n+1}(F)$ в пространстве R^{n+1}.

3. В силу выпуклости класса F имеют место включения

$$(\vec{c}_n,\ c') \in \partial M_{n+1}(F), \qquad (\vec{c}_n,\ c'') \in \partial M_{n+1}(F).$$

Остается применить следствие 2 приложения.

2. Класс B_L. Теорема 1 допускает максимальное усиление в случае

$$E_1F = E_2F = \cdots = E_{n+1}F. \tag{3}$$

Следствие 1. Пусть имеет место (3). Тогда для любого $\vec{c}_n \in M_n(F)$ в классе $F(\vec{c}_n)$ существуют ФР из E_1F, доставляющие в классе $F(\vec{c}_n)$ минимум и максимум функционалу (2).

Примером замкнутого выпуклого класса ФР, удовлетворяющего условию (3), является класс B_L ФР на $[a, b]$, $-\infty < b < +\infty$.

Именно, $\sigma \in B_L$ тогда и только тогда, когда для всех $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$

$$\sigma(t_2) - \sigma(t_1) \leqslant L\,(t_2 - t_1), \qquad L \geqslant (b-a)^{-1}.$$

Для описания множества E_1B_L заметим, что ФР из B_L абсолютно непрерывны: $\rho \in P_L$, где P_L — класс плотностей B_L тогда и только тогда, когда $0 \leqslant \rho \leqslant L$ и

$$\int\limits_a^b \rho(t)\, dt = 1.$$

Если $\sigma \in E_1B_L$, то $\rho \in E_1P_L$ из-за выпуклости P_L и обратно.

Замечание 1. Представления

$$\begin{cases} m\,\{t \in [a, b]:\ \rho(t) = L\} = L^{-1} \\ m\,\{t \in [a, b]:\ \rho(t) = 0\} = b - a - L^{-1} \end{cases} \tag{4}$$

для $\rho \in P_L$, где m — мера Лебега в R_1, эквивалентны.

---

* Отсюда и из свойства 1 из ([3]) следует существование k-крайних точек F при любом $k \geqslant 1$.

Если $\rho \in P_L$ и не имеет вида (4), то $m\{t \in [a, b]: 0 < \rho(t) < L\} > 0$. По свойству непрерывности меры для множеств

$$S_n = \left\{t \in [a, b]: \frac{1}{n} \leqslant \rho(t) \leqslant L - \frac{1}{n}\right\}, \qquad n \geqslant 1,$$

найдется k такое, что $m(S_k) > 0$. Выберем множества S_+ и S_- так, чтобы

$$S_+ \cap S_- = \varnothing, \quad S_+ \cup S_- = S_k, \quad m(S_+) = m(S_-).$$

Определим плотности ρ_+ и ρ_- на $[a, b]$; $\rho_+ = \rho_- = \rho$ на $[a, b] \setminus S_k$; $\rho_\pm = \rho \pm h$ на S_+; $\rho_\pm = \rho \mp h$ на S_-. По построению $\rho_+, \rho_- \in P_L$ и $\rho = \frac{1}{2}(\rho_+ + \rho_-)$, т. е. $\rho \overline{\in} E_1 P_L$.

Итак, если $\rho \in P_L$, но не представимо в виде (4), то $\rho \overline{\in} E_1 P_L$.

Лемма 1. *Для того, чтобы $\rho \in E_1 P_L$, необходимо и достаточно выполнение* (4).

Доказательство необходимости содержится в замечании 1. Пусть ρ из P_L представимо в виде (4). Для доказательства $\rho \in E_1 P_L$ допустим противное, т. е. найдутся $\rho_1, \rho_2 \in P_L$,

$$m\{t \in [a, b]: \rho_1(t) \neq \rho_2(t)\} > 0, \tag{5}$$

и $\lambda \in (0, 1)$ такие, что $\rho = \lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2$ почти всюду по мере m.

Поскольку $0 \leqslant \rho_1 \leqslant L$, $0 \leqslant \rho_2 \leqslant L$, то равенства

$$\rho_1(t) = \rho_2(t) = L \quad \text{и} \quad \rho_1(t) = \rho_2(t) = 0$$

имеют место почти всюду на множествах $\{t \in [a, b]: \rho(t) = L\}$ и $\{t \in [a, b]: \rho(t) = 0\}$ соответственно.

Поэтому, согласно (4),

$0 \leqslant m\{t \in [a, b]: \rho_1(t) \neq \rho_2(t)\} \leqslant m\{t \in [a, b]: 0 < \rho(t) < L\} = 0$,

что противоречит (5).

Лемма 2. *Для класса B_L имеют место равенства* (3).

Доказательство. Согласно замечанию 1, $\sigma_0 \overline{\in} E_1 B_L$ означает существование множества $A \subset [a, b]$ и чисел $0 < p < q < L$ таких, что $m(A) > 0$ и $0 < p \leqslant \rho_0(t) \leqslant q < L$ при всех $t \in A$.

Выберем непересекающиеся множества $A_1, \ldots, A_{n+1}$ такие, что

$$A = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i, \quad m(A_1) = \cdots = m(A_{n+1}).$$

Построим ФР $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1}$ с плотностями $\rho_1, \ldots, \rho_{n+1}$ следующим образом. $\rho_j = \rho_0$ на $[a, b] \setminus (A_j \cup A_{j+1})$; $\rho_j = \rho_0 + h$ на A_j, $\rho_j = \rho_0 - h$ на A_{j+1}, где $j = \overline{1, n+1}$, $h < \min(p, L - p)$ и $A_{n+2} = A_1$. Здесь ρ_0 есть плотность ФР σ_0.

Нетрудно проверить, что $\rho_j \in P_L$ при всех $j = \overline{1, n+1}$, Покажем, что $\rho_1, \ldots, \rho_{n+1}$ аффинно-независимы. Пусть на $]a, b[$

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n+1} = 0 \quad \text{и} \quad \alpha_1\rho_1 + \cdots + \alpha_{n+1}\rho_{n+1} = 0. \tag{6}$$

На множестве A_j (6) переходит в равенство $(\alpha_j - \alpha_{j-1})\,h = 0$, откуда следует $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n+1} = 0$.

Далее, легко установить

$$\rho_0 = (n+1)^{-1}(\rho_1 + \cdots + \rho_{n+1}) \quad \text{на } [a, b],$$

т. е. $\sigma_0 \bar{\in} E_n B_L$. Следовательно, если $\sigma_0 \in E_n B_L$ при некотором $n > 1$, то $\sigma_0 \in E_1 B_L$. Обратное включение следует из свойства 1 из ([3]).

Приложение. Пусть X — локально-выпуклое пространство, M — выпуклое компактное подмножество X, что обеспечивает наличие крайних точек в M (см. ([4]), с. 85).

Определение (см. ([1])). Точка $x \in M$ называется k-крайней точкой множества M, если не существуют аффинно-независимые точки $x_1, \ldots, x_{k+1}$ из M и положительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ такие, что

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k+1} = 1, \quad x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{k+1} x_{k+1}. \tag{7}$$

Если $E_k M$ — множество k-крайних точек M, то $E_1 M$ — множество крайних точек M.

Пусть $\mathrm{F}: X \to Y$ непрерывное линейное отображение локально-выпуклого пространства X на локально выпуклое пространство Y; M — компактное выпуклое множество в X; $M' = \mathrm{F}(M)$.

Теорема 2. *Для любой точки $y \in E_k M'$, $k \geq 1$, найдется точка $x \in E_k M$ такая, что $y = \mathrm{F}(x)$.*

Доказательство. Замкнутое выпуклое подмножество

$$\mathrm{F}^{-1}(y) = \{x \in M: \mathrm{F}(x) = y\}$$

компактного множества M компактно и содержит хотя бы одну крайнюю точку, т. е. множество $E_1 \mathrm{F}^{-1}(y)$ не пусто.

Покажем

$$E_1 \mathrm{F}^{-1}(y) \subset E_k M.$$

Допустим противное. Именно, пусть для точки $x \in E_1 \mathrm{F}^{-1}(y)$ существуют аффинно-независимые точки $x_1, \ldots, x_{k+1}$ из M и положительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ такие, что имеет место (7). Тогда

$$y = \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{k+1} x_{k+1}) = \lambda_1 \mathrm{F}(x_1) + \cdots + \lambda_{k+1} \mathrm{F}(x_{k+1}), \tag{8}$$

где, в силу $x_1, \ldots, x_{k+1} \in M$, точки $\mathrm{F}(x_1), \ldots, \mathrm{F}(x_{k+1})$ принадлежат M'.

Так как $y \in E_k M'$, то в представлении (8) для y точки $\mathrm{F}(x_1), \ldots$ $\ldots, \mathrm{F}(x_{k+1})$ из M' аффинно-зависимы. Следовательно, найдутся не все равные нулю числа $\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}$ такие, что $\beta_1 + \cdots + \beta_{k+1} = 0$ и $\beta_1 \mathrm{F}(x_1) + \cdots + \beta_{k+1} \mathrm{F}(x_{n+1}) = 0$, откуда выводим

$$F(\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{k+1} x_{k+1}) = 0, \quad \beta_0 + \cdots + \beta_{k+1} = 0 \tag{9}$$

Равенства (8) и (9) эквивалентны представлениям: при всех вещественных t

$$y = F((\lambda_1 - t\beta_1) x_1 + \cdots + (\lambda_{k+1} - t\beta_{k+1}) x_{k+1}) = 0, \tag{10}$$

где, очевидно, $(\lambda_1 - t\beta_1) + \cdots + (\lambda_{k+1} - t\beta_{k+1}) = 1$.

Вообще говоря, точки $(\lambda_1 - t\beta_1) x_1 + \cdots + (\lambda_{k+1} - t\beta_{k+1}) x_{k+1}$ могут не принадлежать M. Но для всех тех t, которые удовлетворяют неравенствам $0 < |t| < \lambda/\beta$ где

$$\lambda = \min(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}) > 0 \quad \text{и} \quad \beta = \max(|\beta_1|, \ldots, |\beta_{k+1}|) > 0,$$

эти точки принадлежат M. Действительно, поскольку $\lambda_j - t\beta_j > 0$ для таких t и всех $j = \overline{1, k+1}$, то эти точки являются внутренними точками k-мерного симплекса с вершинами $x_1, \ldots, x_{k+1}$ из M.

Выберем t из условия $0 < t_0 < \lambda/\beta$. Тогда точки $x' = (\lambda_1 - t_0\beta_1) x_1 + \cdots + (\lambda_{k+1} - t_0\beta_{k+1}) x_{k+1}$ и $x'' = (\lambda_1 + t_0\beta_1) x_1 + \cdots + (\lambda_{k+1} + t_0\beta_{k+1}) x_{k+1}$ принадлежат M и удовлетворяют (10). $y = F(x')$ и $y = F(x'')$, следовательно, $x', x'' \in F^{-1}(y)$. Далее, поскольку $x = \frac{1}{2}(x' + x'')$, то $x \in E_k F^{-1}(y)$.

Таким образом, мы доказали, что существует $x \in E_k M$ такое, что $x \in F^{-1}(y)$.

В частности, если Y совпадает с R^n, то в силу леммы 1 из ([3]),

$$E_{n+1} M' = M', \qquad E_n M' = \partial M'$$

и из теоремы 2 выводится

Следствие 2. Если $Y = R^n$, то

$$M' = F(E_{n+1} M), \qquad \partial M' \in F(E_n M).$$

Ереванский государственный университет

Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Գ. Ս. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Չեբիշևի էքստրեմալ խնդրի մասին բաշխումների ուռուցիկ դասերի վրա

Ապացուցված է, որ բաշխման ֆունկցիաների ուռուցիկ, թույլ զուգամիտության իմաստով փակ դասերի վրա Չեբիշևի էքստրեմալ խնդրում, $n \geq 1$ տրված ընդհանրացված մոմենտների դեպքում էքստրեմումները հասանելի են դասի $(n+1)$-ծայրակետերի վրա։ Արդյունքը ճշգրտված է Լիպշիցի պայմանին բավարարող բաշխման ֆունկցիաների դասի համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Э. А. Даниелян, Г. С. Мовсисян*, ДАН АрмССР, т. 89, № 3, (1989). 2 *В. Р. Макукян*, Межвуз. сб. научн. трудов. Сер. математика, № 7, Ереван, ЕГУ, 1989. 3 *Э. А. Даниелян, Г. С. Мовсисян, К. Р. Татлян*, ДАН Армении, 92, № 2, (1991). 4 *У. Рудин*, Функциональный анализ, Мир, М. 1975.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 92 1991 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

С. С. Казарян

Мультипликативное дополнение в пространствах Орлича

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. А. Талаляном 22/I 1991)

В работах К. С. Казаряна ([1-3]) были изучены вопросы мультипликативного дополнения до базиса в L^p, $1 \leq p < \infty$, неполных ортонормированных систем. В настоящей заметке анонсируются теоремы, обобщающие основные результаты приведенных работ для пространств Орлича.

Сперва дадим определения понятий ([1, 4]), которые понадобятся для сформулирования результатов.

Функция $\Phi(t)$ называется функцией Юнга, если она допускает представление

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \varphi(\tau)\, d\tau,$$

где $\varphi(\tau)$ — положительная при $\tau > 0$, непрерывная справа при $\tau \geq 0$, неубывающая функция, удовлетворяющая условиям $\varphi(0) = 0$ и $\lim\limits_{\tau\to\infty} \varphi(\tau) = +\infty$.

Дополнительная к $\Phi(t)$ функция $\Psi(t)$ определяется следующим образом:

$$\Psi(t) = \int_0^{|t|} \varphi^{-1}(\tau)\, d\tau,$$

где $\varphi^{-1}(\tau) = \sup\{s : \varphi(s) \leq \tau\}$.

Будем говорить, что $\Phi(t)$ удовлетворяет Δ_2 условию, если $\Phi(2t) < B\Phi(t)$. Это условие эквивалентно более общему условию $\Phi(At) < B\Phi(t)$, $A > 1$.

Определение 1. *Скажем, что система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определенных на измеримом множестве E, $\mu(E) > 0$, имеет свойство (A) на измеримом множестве F, $F \subset E$, $\mu(F) > 0$, если существует положительное число α такое, что для любого натураль-*

ного числа N_1 *найдется такое натуральное число* N_2, *что имеет место равенство*

$$\mu\left(\sum_{k=N_1}^{N_2} E_k\right) = \mu(F),$$

где $E_k = \{x : |\varphi_k(x)| \geqslant \alpha\} \cap F$.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi(t)$ — *некоторая функция Юнга и* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *ортонормированная система ограниченных функций, полная в* $L^1(E)$, *которая содержит равномерно ограниченную подсистему* $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, *обладающую свойством* (*A*) *на множестве* E. *Тогда для любого натурального числа* N *и для произвольной измеримой функции* $M(x)$ *система* $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ *не является базисом в пространстве Орлича* $L^{\Phi}(E)$.

Из теоремы 1 получается

Следствие 1. *Пусть* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *система Уолша, или тригонометрическая система* $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. *Тогда, если удалить из* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *конечное число функций, то какова бы ни была измеримая функция* $M(x)$, *система, полученная умножением оставшихся функций на* $M(x)$, *не будет базисом ни в одном из пространств Орлича* L^{Φ}.

При доказательстве следующей теоремы были использованы определения понятий нижнего и верхнего индексов функции Юнга, а также свойства следующей функции:

$$\underline{S}_{\Phi}(\lambda) = \inf_{t>0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)}.$$

Сведения об этих понятиях даны в работах [5–7].

Теорема 2. *Пусть функция Юнга* $\Phi(t)$ *и дополнительная к ней функция* $\Psi(t)$ *удовлетворяют* Δ_2 *условию. Допустим, что для интервалов Хаара* $\Delta_k^{(i_k)}$ $(\Delta_0^{(i_0)} \supset \Delta_1^{(i_1)} \supset \cdots \supset \Delta_k^{(i_k)} \supset \cdots)$, *где* $|\Delta_k^{(i_k)}| = 2^{-k}$, *функция* $\varpi(x)$ *удовлетворяет условиям*

$$[\varpi(x)]^{-1} \overline{\in} L^{\Psi}_{\Delta_k^{(i_k)}}; \qquad [\varpi(x)]^{-1} \in L^{\Psi}_{C\Delta_k^{(i_k)}},$$

причем $C\Delta_k^{(i_k)} = [0, 1] \setminus \Delta_k^{(i_k)}$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *Существует число* $D_{\Phi} > 0$ *такое, что*

$$\frac{1}{|\Delta_k^{(i_k)}|} \|\chi_{\Delta_k^{(i_k)}} \varpi\|_{L^{\Phi}_*} \left\| \frac{\chi_{C\Delta_k^{(i_k)}}}{\xi\varpi} \right\|_{L^{\Psi}_*} < D_{\Phi}$$

и для каждого интервала Хаара Δ, *который не совпадает ни с одним из* $\Delta_k^{(i_k)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, *имеем*

$$\frac{1}{|\Delta|}\,\|\chi_\Delta w\|_{L_\xi^\Phi}\left\|\frac{\chi_\Delta}{\xi w}\right\|_{L_\xi^\Psi}\leqslant D_\Phi,$$

где $\xi>0$ произвольное положительное число.

(б) Существует некоторая константа $C_\Phi>0$ такая, что для произвольного числа $\xi>0$

$$\|S_m(f,x)\|_{L_\xi^\Phi(0,1)}<C_\Phi\|f\|_{L_\xi^\Phi(0,1)},$$

где $S_m(f,x)=\sum_{k=2}^{m}c_k w(x)\chi_k(x)$ и $c_k=\int\limits_0^1 f(t)\varphi_k(t)\,dt$; $\{\varphi_k(x)\}_{k=2}^{\infty}$ — система функций, сопряженная к $\{w(x)\chi_k(x)\}_{k=2}^{\infty}$, а $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — система Хаара.

(в) Существует некоторая константа $C'_\Phi>0$ такая, что

$$\int\limits_0^1\Phi(S_m(f,x))\,dx\leqslant C'_\Phi\int\limits_0^1\Phi(f(x))\,dx.$$

Аналог этой теоремы доказывается и в том случае, когда из системы Хаара отбрасывается конечное число функций.

Теорема 3. *Пусть функция Юнга*[*] $\Phi(t)$ *и дополнительная к ней функция* $\Psi(t)$ *удовлетворяют* Δ_2 *условию. Пусть* $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *система Хаара и для интервалов Хаара*

$$\Delta_k^{(i_k)}\quad(\Delta_0^{(i_0)}\supset\Delta_1^{(i_1)}\supset\cdots\supset\Delta_k^{(i_k)}\supset\cdots),$$

где $|\Delta_k^{(i_k)}|=2^{-k}$, *функция* $w(x)$ *удовлетворяет условиям*

$$|w(x)|^{-1}\in L^{\Psi}_{\Delta_k^{(i_k)}};\qquad|w(x)|^{-1}\in L^{\Psi}_{C\Delta_k^{(i_k)}},$$

причем $C\Delta_k^{(i_k)}=[0,1]\setminus\Delta_k^{(i_k)}$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(а) *Система* $\{w(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ *является базисом в пространстве Орлича* L^Φ.

(б) *Система* $\{w(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ *является безусловным базисом в пространстве Орлича* L^Φ.

Институт математики Академии наук Армении

Ս. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Մուլտիպլիկատիվ լրացում Օրլիչի տարածությունում

Օրլիչի L^Φ տարածությանը պատկանող $w(x)$ ֆունկցիայի համար գտնվել են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որի դեպքում Հաարի սիստեմից վեր-

չավոր թվով ֆունկցիաներ դուրս գցելուց հետո, մնացած ֆունկցիաների բազմությունը բազմապատկելով այդ ֆունկցիայով, ստանում ենք բազիս և ոչ պայմանական բազիս։ Նշված է, որ որոշակի պայմանների բավարարող օրթոնորմալ համակարգերի համար հնարավոր չէ այդ ճանապարհով բազիս ստանալ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] К. С. Казарян. ДАН АрмССР, т. 52, № 4, с. 203—209 (1976). [2] *К. С. Казарян.* Analysis Math., v. 4, № 1, p. 37—52 (1978). [3] *K. S. Kazarian*, Studia Math., v. 71, p. 227—249 (1982). [4] *М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий.* Выпуклые функции и пространства Орлича, Физматгиз, М., 1958. [5] *W. Matusjewska, W. Orlicj*, Bull. Acad. Polon Sci., v. 8, № 7, p. 439—443 (1960). [6] *J. Gustasvon, J. Peetre*, Studia Math., v. 60, p. 33—59 (1977). [7] *С. С. Казарян.* Изв. АН АрмССР, Математика, т. 22, № 4, с. 358—377 (1987).

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 92 1991 № 3

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519

О. А. Галстян

Об одном алгоритме нахождения подграфа инвариантного относительно минимальных доминирующих множеств заданного графа

(Представлено академиком АН Армении Р. Р. Варшамовым 11/X 1990)

Рассмотрим граф $G=(V, E)$, где V — множество вершин, E — множество ребер. Обозначим через $V(u)$ множество всех вершин v, для которых $d(u, v) \leq 1$, где $d(u, v)$ — расстояние между вершинами u и v, а через $G_{u,v}$ — граф, полученный из G добавлением ребра, связывающего несмежные вершины u и v [1].

Пусть $U \subseteq V$ — доминирующее множество графа G [2], т. е. $V=\bigcup_{u \in U} V(u)$. Обозначим через $\Pi(G)$ множество всех доминирующих множеств, а через $M(G)$ — множество всех минимальных доминирующих множеств графа G.

Вершину $u \in V$ назовем регулярной, если существует вершина $v \in V$, $v \neq u$ такая, что $V(v) \subseteq V(u)$ [2]; вершину v назовем вершиной регулярности для u [1]. Обозначим через $R(u)$ множество всех вершин регулярности для вершины u в графе G.

Вершины u и v в графе G назовем эквивалентными относительно доминирующих множеств, если $\Pi(G)=\Pi(G')$, где G' — граф, полученный из G переобозначением вершин u и v [1]. В работе [1] сформулировано следующее утверждение.

Теорема. *Несмежные вершины u и v графа G являются эквивалентными относительно доминирующих множеств тогда и только тогда, когда $V(u) \setminus \{u\} = V(v) \setminus \{v\}$. Смежные вершины u и v графа G являются эквивалентными относительно доминирующих множеств тогда и только тогда, когда $V(u)=V(v)$ или для любой вершины $w \in V(u) \setminus V(v)$ выполняется $R_{G_{w,v}}(w) \subseteq V(u)$ и для любой вершины $w \in V(v) \setminus V(v)$ выполняется $R_{G_{w,u}}(w) \subseteq V(v)$.*

Легко заметить, что эквивалентность вершин графа относительно доминирующих множеств является отношением эквивалентности и множество V вершин графа G разбивается на классы эквивалентности $V_1, V_2, \ldots, V_p$.

В этой работе для заданного графа G дается описание структуры подграфов, порожденных классами эквивалентности вершин относительно доминирующих множеств; кроме того, предложен алгоритм для нахождения подграфа G' графа G, удовлетворяющего условию $M(G')\subseteq M(G)$.

Обозначим через $G(m, n)$ множество графов $G(m, n)=\{G=(V, E)/|V|=m$ и для любой вершины $v\in V$ $\deg_G v\geqslant n\}$, где $\deg_G v$ — степень вершины v в графе G, т. е. если $G\in G(m, n)$, то степень любой вершины в графе G не меньше числа n. В частности, при $n=m-1$ $G(m, m-1)$ состоит из одного m-вершинного полного графа. В дальнейшем $G(m, m-1)$ будем отождествлять с m-вершинным полным графом.

Через $\overline{G}(m, m-1)$ обозначим дополнение графа $G(m, m-1)$, т. е. $\overline{G}(m, m-1)$ есть m-вершинный пустой граф, а через $G(U)$, где $U\subseteq V$ – подграф графа G, порожденный множеством вершин U.

Пусть $\{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$ — множество классов эквивалентности графа G относительно доминирующих множеств и $k\in\{1, 2, \ldots, p\}$.

Теорема 1. *Если* $|V_k|=m\geqslant 2$, *то*

$$G(V_k)\in G(m, m-2)\cup\{\overline{G}(m, m-1)\}.$$

Сформулируем предварительно два утверждения, в справедливости которых нетрудно убедиться и которые используются при доказательстве теоремы 1.

Пусть $T(G)$ — множество всех тупиковых* доминирующих множеств графа G.

Утверждение 1. *Если в графе G вершины u и v не смежные, то существует множество $U\in T(G)$ такое, что $\{u, v\}\subseteq U$.*

Утверждение 2. *Если в графе G вершины u и v эквивалентны относительно доминирующих множеств и множество $U\in T(G)$ удовлетворяет условиям $u\in U$, $v\notin U$, то имеет место*

$$(U\setminus\{u\})\cup\{v\}\in T(G).$$

Вернемся к доказательству теоремы 1. Пусть $|V_k|=m$, то, что подграф $G(V_k)$ графа G может совпадать с графом $\overline{G}(m, m-1)$, следует из вышеприведенной теоремы.

Докажем, что если $G(V_k)\neq\overline{G}(m, m-1)$, то любая вершина $v\in V_k$ удовлетворяет условию $\deg_{G(V_k)}v\geqslant m-2$. Предположим обратное. Пусть существует вершина $u\in V_k$ такая, что $\deg_{G(V_k)}u<m-2$, т. е. существует $\{v, w\}\subseteq V_k$ такое, что $\langle u, w\rangle\notin E$, $\langle u, v\rangle\notin E$. Поскольку $G(V_k)\neq G(m, m-1)$, то из указанной теоремы следует, что существует вершина $z\in V_k$ такая, что z смежна со всеми вершинами множества $\{a, v, w\}$. Из утверждения 1 следует, что суще-

---

* $U\in\Pi(G)$ называется тупиковым, если не существует множества $U'\subset U$ такого, что $U'\in\Pi(G)$.

ствует $U \in T(G)$ такое, что $\{u, v\} \subseteq U$. Так как $\{u, v, w\} \subseteq V_k$, то и вершина $w \in U$. Рассмотрим множество $U' = (U \setminus \{w\}) \cup \{z\}$. Так как $\{z, w\} \subseteq V_k$, то по утверждению 2 получаем, что $U' \in T(G)$. Однако легко заметить, что $U' \setminus \{v\} \in \Pi(G)$ и, следовательно, $U' \notin T(G)$. Полученное противоречие доказывает теорему 1.

Исходя из классов $V_1, V_2, \ldots, V_p$ дадим алгоритм для построения графа G', инвариантного относительно минимальных доминирующих множеств заданного графа G. Обозначим через R_k, $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, множество $R_k = \{v / V'(v) \subseteq V_k\}$.

Из множества вершин V графа G выделим подмножество V' согласно следующему нижеизлагаемому алгоритму:

шаг 0. $V' := \varnothing$ (пустое множество);

шаг К. $(1 \leqslant k \leqslant p)$. Если $|V_k| = 1$, то $V' := V' \cup V_k$.

Если $G(V_k) = G(m, m-1)$ и $R_k \neq \varnothing$, где $m = |V_k|$, из множества R_k выбираем одну произвольную вершину v и $V' := V' \cup \{v\}$.

Если $G(V_k) = G(m, m-1)$ и $R_k = \varnothing$, то $V' := V' \cup V_k$.

Если $|V_k| = m$ и $G(V_k) \in G(m, m-2)$, $G(V_k) \neq G(m, m-1)$, то из множества V_k выбираем все вершины u, для которых $\deg_{G(V_k)} u = m-1$, а также две любые несмежные вершины и добавляем их к множеству V'.

Если $G(V_k) = \bar{G}(m, m-1)$ и $m \geqslant 3$, то из V_k выбираем три произвольные вершины u, v, w и $V' := V' \cup \{u, v, w\}$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *$M(G') \subseteq M(G)$, где $G' = G(V')$.*

Ереванский государственный университет

Հ. Հ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ

Գրաֆի մինիմալ գերիշխող բազմության նկատմամբ ինվարիանտ ենթագրաֆի գտնելու մի ալգորիթմի մասին

Աշխատանքում տրվում է G գրաֆի գագաթների բազմության տրոհումը գերիշխող բազմությունների նկատմամբ համարժեքության դասերի և այդ դասերով ծնված ենթագրաֆների կառուցվածքային նկարագիրը։ Նկարագրվում է նաև ալգորիթմ, որը G գրաֆի համար գտնում է մինիմալ գերիշխող բազմության նկատմամբ ինվարիանտ G' ենթագրաֆը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Г. Ц. Акопян, О. А. Галстян*, в кн.: Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях. Тезисы докл. IV Всесоюзн. совещания, Новосибирск, 1949. 2 *М. Гэри, Д. Джонсон*, Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Мир, М., 1982. 3 *Г. Ц. Акопян, О. А. Галстян*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 14, № 2 (1979).

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 1991 № 3

МЕХАНИКА

УДК 532.516

Л. Г. Петросян

Несимметричная модель задачи Громеки о движении жидкости в круглой цилиндрической трубе

(Представлено чл.-корр. АН Армении Г. Е. Багдасаряном 11/XII 1990)

Рассмотрим неустановившееся течение вязкой несимметричной жидкости в неограниченной круглой трубе радиуса R. Будем считать жидкость несжимаемой ($\rho = \text{const}$). Полагая, что во все время движения скорости жидких частиц направлены параллельно оси трубы z, будем иметь $v_r = v_\varphi = 0$. Тогда из уравнения неразрывности найдем, что $v_z = w$ не зависит от z.

Решение этой задачи было дано в работе И. С. Громеки [1]. Указанное решение было основано на классической теории континуума. Однако классическая точка зрения налагает сильные ограничения на пределы, в которых континуальное описание макроскопического поведения может успешно отражать тонкую структуру материала. Накопившиеся факты свидетельствуют о том, что классическая теория континуума Навье—Стокса не может точно предсказать поведение некоторого класса жидкостей и особенно течений через тонкие капилляры и узкие зазоры, так как не содержит механизма для объяснения наблюдаемых новых физических явлений. Такая потеря точности возможна в случаях, когда характерный размер системы (радиус трубы) сравним с характерной материальной длиной вещества, значение которой обусловлено средним размером молекул или зерен, содержащихся в среде [2].

Это обстоятельство (совместно с другими недостатками классической теории континуума) привело исследователей к разработке теории несимметрических жидкостей.

Все более очевидно, что разработанные в последнее время положения теории структурных жидкостей могут успешно описывать неньютоновские поведения реальных жидкостей. К настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных этой тематике, о чем достаточно полно изложено в работе [2]. В этой теории введены два независимых кинематических векторных поля, одно из которых представлиет поступательные движения частиц жид кости, а другое — угловые или вращательные движения частиц, характеризующие внутренние степени свободы, соответствующие им моментные напряжения [2]. Характерным отличием теории структурных сред с несимметричным тензором напряжений является присутствие масштабных параметров. Эти жидкости реагируют на микровращательные движения и спиновую инерцию, поэтому могут воспринимать распределенные поверхностные и массовые пары сил.

В настоящей работе применена теория континуума с несимметричным тензором напряжений к решению задачи неустановившегося движения несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе.

Общая система уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости с несимметричным тензором напряжений имеет вид [2, 3]

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + 2\nu\nabla\cdot(\nabla\vec{v})^{d} + \nu_r\nabla\times[2\vec{\omega} - \nabla\times\vec{v}] + \vec{f}, \tag{2}$$

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 2\nu_r(\nabla\times\vec{v} - 2\vec{\omega}) + c_0\nabla\nabla\cdot\vec{\omega} + 2c_d\nabla\cdot(\nabla\vec{\omega})^{d} + 2c_a\nabla\cdot(\nabla\vec{\omega})^{a} + \vec{c}. \tag{3}$$

Здесь ρ — массовая плотность, p — давление, I — скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы, $\vec{v}$ — вектор скорости точки, $\vec{\omega}$ — вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, ν — кинематическая ньютоновская вязкость, ν_r — кинематическая вращательная вязкость, c_0, c_d, c_a — коэффициенты моментной вязкости, $d(\ldots)/dt$ — полная производная по времени, ∇ — пространственный градиент, $(\nabla\vec{v})^{d}$ и $(\nabla\vec{\omega})^{d}$ — симметричные части соответствующих диад, $(\nabla\vec{v})^{a}$ и $(\nabla\vec{\omega})^{a}$ — антисимметричные диады, $\vec{f}$ — вектор массовой силы, $\vec{c}$ — вектор массового момента.

Если пренебречь массовыми силами и массовыми моментами, то уравнения поступательного движения и вращательного движении представляются в виде

$$r\frac{\partial w}{\partial t} = (\nu + \nu_r)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + 2\nu_r\frac{\partial}{\partial r}(r\omega) - \frac{r}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{4}$$

$$I\frac{\partial\omega}{\partial t} = (c_a + c_d)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{\omega}{r}\right) - 2\nu_r\frac{\partial w}{\partial r} - 4\nu_r\omega \tag{5}$$

$$(v_z = w(r, t), \qquad \omega_\varphi = \omega(r, t)).$$

Из (4) следует, что $\partial p/\partial z$ не зависит от z и может быть только функцией времени t. Мы будем рассматривать случай, когда жидкость в начальный момент $t = 0$ находится в покое, а установившийся в этот момент перепад давления $\partial p/\partial z = \mathrm{const}$.

Предполагаем, что жидкость прилипает к границам трубы при $r=R$, тогда начальные и граничные условия будут:

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad t=0 \qquad && w=0, \quad \omega=0 \\ &\text{при} \quad r=R \quad (t>0) \quad && w=0, \quad \omega=0. \end{aligned} \tag{6}$$

Согласно идее работы ([4]) инерционные члены в уравнениях движения (4) и (5) заменим приближенными выражениями, т. е. dw/dt и $d\omega/dt$ заменим их средними по радиусу значениями*

$$\varphi(t)=\frac{1}{R}\int_0^R \frac{\partial w}{\partial t}\,dr, \qquad \psi(t)=\frac{1}{R}\int_0^R \frac{\partial \omega}{\partial t}\,dr. \tag{8}$$

Общие решения уравнений (4) и (5) с учетом (7) и (8) при начальных и граничных условиях (6) имеют вид**

$$\omega=-\left[r^{*}-\frac{I_1(\lambda r^{*})}{I_1(\lambda)}\right]\left[\frac{R}{4\nu\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{R}{4\nu}\varphi(t)\right], \tag{9}$$

$$w=\left(1-r^{*2}+\frac{2\nu_r}{\nu+\nu_r}\frac{1}{\lambda}\frac{I_0(\lambda r^{*})-I_0(\lambda)}{I_1(\lambda)}\right)\left[w_0-\frac{R^2}{4\nu}\varphi(t)\right], \tag{10}$$

где

$$w_0=-\frac{R^2}{4\nu\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \qquad r^{*}=\frac{r}{R}, \qquad \lambda=kR,$$

$$k=\left(\frac{\nu}{\nu+\nu_r}\frac{\nu_r}{c_c+c_d}\right)^{1/2}, \qquad \varphi(t)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\exp\left(-\frac{6\nu}{\alpha R^2}t\right),$$

$$\alpha=1+\frac{3\nu_r}{\nu+\nu_r}\frac{1}{\lambda}\frac{1}{I_1(\lambda)}\left[I_0(\lambda)+\frac{1}{R}\int_0^R I_0(kr)\,dr\right]. \tag{11}$$

Здесь w_0—максимальная по сечению скорость на оси трубы в классическом течении Пуазейля, $I(\ldots)$—модифицированные цилиндрические (бесселевые) функции первого рода.

Подставив из (11) значение $\varphi(t)$ в (10), получаем

$$w^{*}=\frac{w}{w_0}=\left[1-r^{*2}+\frac{2\mu_r}{\mu+\mu_r}\frac{1}{\lambda}\frac{I_0(\lambda r^{*})-I_0(\lambda)}{I_1(\lambda)}\right]\left(1-e^{-6t_1}\right), \tag{12}$$

где

$$\mu_r=\rho\nu_r, \quad \mu=\rho\nu.$$

Здесь $t_1=\dfrac{\pi t}{\rho R^2}$ — критерий Фурье.

Решение (12) переходит в классическое при $\mu_r=0$, и (9) дает $\omega=0$, а (11) — $\alpha=1$ ([5]).

---

* Оценки степени точности идеи осреднения, приведенные в работе ([4]), показали ее практическую приемлемость ([5, 6]).

** Осреднение вращательного ускорения, вызванное проекцией псевдовектора ω, произведено по диаметру трубы. Это дает $\psi(t)=0$.

Воспользовавшись формулой (12), вычислим расход

$$Q^* = \frac{Q}{Q_0} = \left\{1 - \frac{8\mu_r}{\mu + \mu_r}\frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{\lambda}{2}\frac{I_0(\lambda)}{I_1(\lambda)} - 1\right]\right\}(1 - e^{-6t_1}), \qquad (13)$$

где
$$Q_0 = -\frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{dp}{dz}.$$

Здесь Q_0 — расход жидкости в классическом течении Гагена—Пуазейля

В пределе при $t = \infty$ решения (12) и (13) переходят в решения стационарной задачи [2].

Профили скоростей для различных значений μ_r/μ (при $\lambda = 1$) показаны на рис. 1, 2.

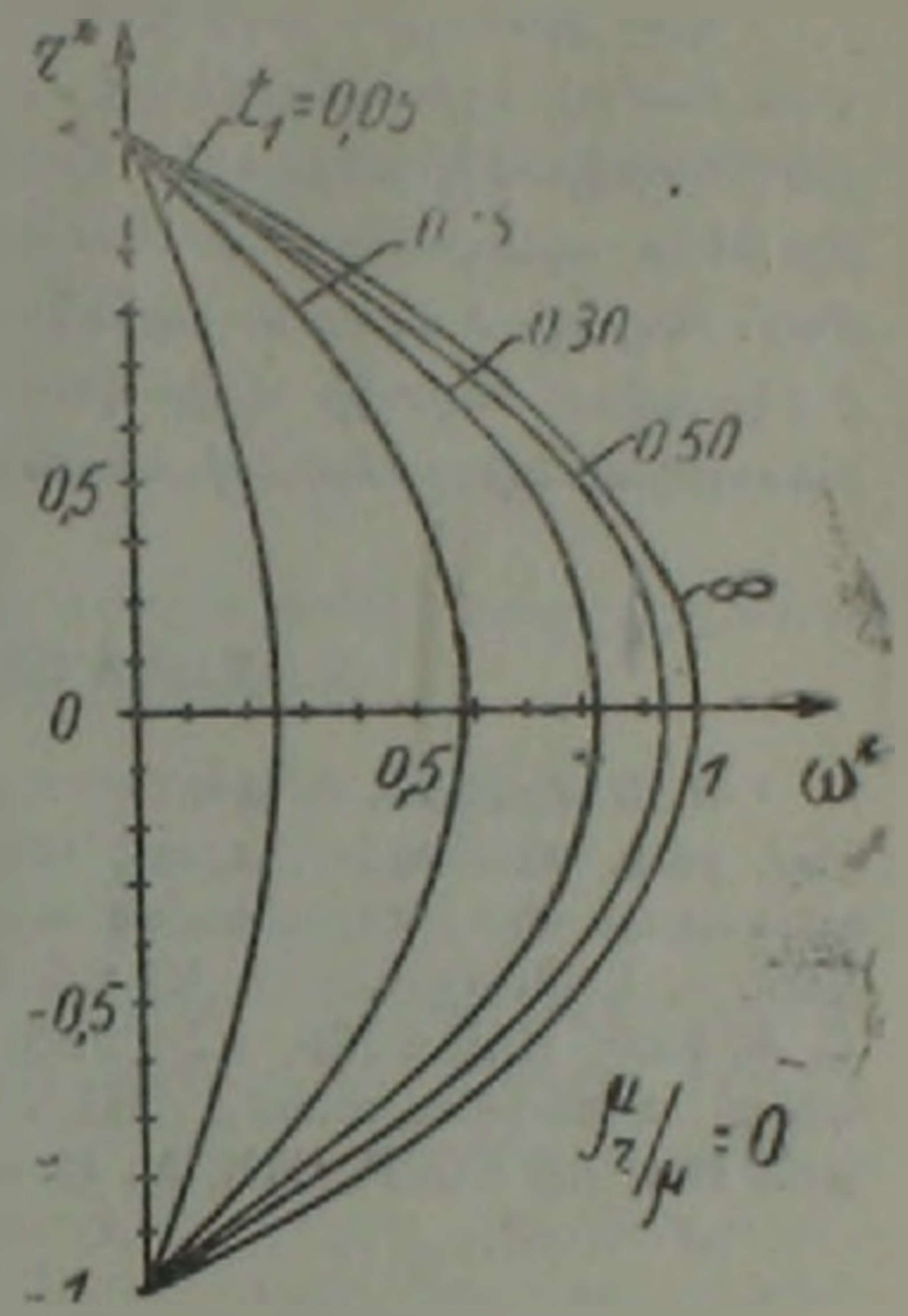
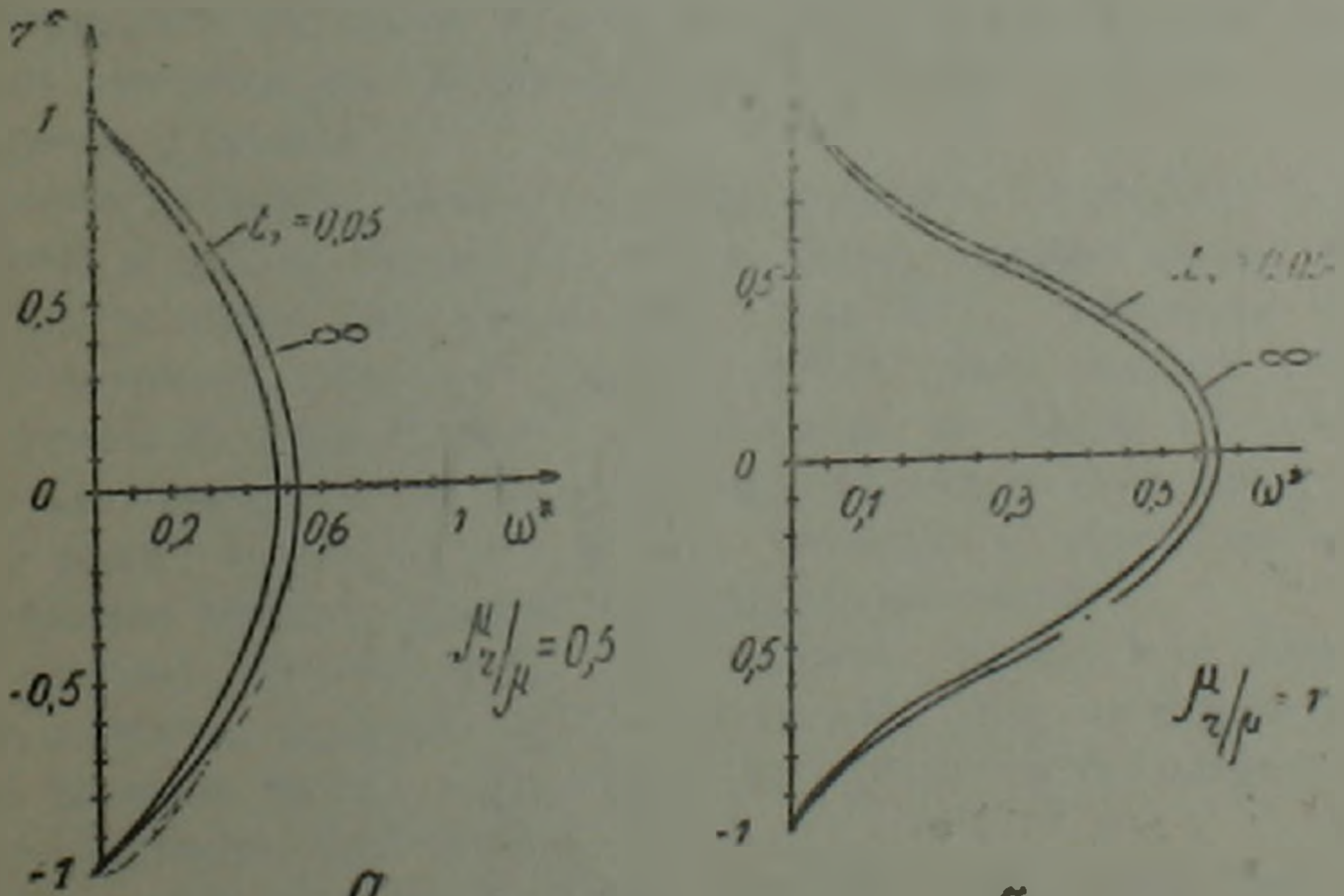


Рис. 1. Профили скоростей для разных моментов времени при $\mu_r/\mu = 0$



а   *б*

Рис. 2. Профили скоростей для моментов времени $t_1 = 0{,}05$; ∞ при: *а*) $\mu_r/\mu = 0{,}5$; *б*) $\mu_r/\mu = 1$

Как видно из приведенных графиков, с увеличением значений μ_r/μ уменьшается время установления стационарного режима течения.

Ереванский государственный университет

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Կլոր գլանային խողովակում հեղուկի շարժման մասին Գրոմեկայի խնդրի ոչ սիմետրիկ մոդելը

Կլոր գլանային խողովակում չհաստատված հոսքի մասին խնդրի լուծման համար օգտագործված է ոչ սիմետրիկ լարման տենզորով կառուցվածքային հեղուկի մեխանիկայի մոդելը։ Ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ արագության և մասնիկի պտտման անկյունային արագության համար։ Պարզված է, որ ստացիոնար հոսքի հաստատման ժամանակը փոքրանում է (կախված հեղուկի միկրոկառուցվածքից), նյուտոնյան հեղուկի դասական տեսության արդյունքների համեմատությամբ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. С. Громека.* К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках. Изд. унив. типографии, Казань, 1882. [2] *Л. Г. Петросян.* Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений. Изд-во ЕГУ, 1984. [3] *Нгуен Ван Дьеп, А. Т. Листров.* Изв. АН СССР, МЖГ, № 5, с. 132—136, 1967. [4] *Н. А. Слезкин, С. М. Тарг.* ДАН СССР, т. 54, № 3, с. 205—208 (1946). [5] *С. М. Тарг.* Основные задачи теории ламинарных течений. ГИТТЛ, М.—Л., 1951. [6] *А. А. Аббасов, А. Х. Мирзаджанзаде.* Изв. АН СССР, ОТН, № 12, с. 122—124, 1955.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 92 1991 № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

В. С. Тоноян, С. А. Мелкумян

Симметричная контактная задача для ортотропной полуплоскости с вертикальным конечным разрезом

(Представлено чл.-корр. АН Армении Б. Л. Абрамяном 17/XII 1990)

В работе рассматривается плоская контактная задача для упругой, ортотропной полуплоскости ($x \geq 0$) с вертикальным конечным разрезом ($0<x<b$), начиная с горизонтальной границы ($x=0$). На конечном участке границы ($-a<z<a$) полуплоскости приложен жесткий штамп с основанием произвольной гладкой формы, симметрично расположенный относительно оси разреза ($z=0$). Предполагается, что трение между штампом и полуплоскостью отсутствует. Для простоты принимается также, что граница полуплоскости вне штампа свободна от внешних напряжений, а в разрезе действует только нормальное давление.

Рассматривается плоское деформированное состояние ($-\infty<y<\infty$), и задача решается в перемещениях методом Фурье. Решение представлено в виде суммы интегралов Фурье. Отыскание произвольных функций интегрирования в конечном счете сводится к решению системы из двух «парных» интегральных уравнений. Эта система в свою очередь сводится к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода. Показано, что решение последнего уравнения может быть найдено методом последовательных приближений.

В частных случаях, когда длина разреза стремится к нулю или к бесконечности, показано, что соответственно получается контактная задача плоской теории упругости для полуплоскости без разреза и для четвертьплоскости (квадранта).

Другой частный случай, когда полуплоскость изотропная, рассматривался в ранних работах авторов.

Так как задача симметрична относительно оси $z=0$, то можно ограничиться рассмотрением только четверти плоскости ($0<x<\infty$, $0<z<\infty$).

Граничные условия для четверти плоскости имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&\tau_{zx}(0,\ z)=0; \quad 0<z<\infty; \quad \tau_{xz}(x,\ 0)=0 \quad 0<x<\infty;\\
&U_x(0,\ z)=f_1(z) \quad 0<z\leqslant a; \quad \sigma_x(0,\ z)=0 \quad a<z<\infty; \qquad (1)\\
&\sigma_z(x,\ 0)=f_2(x) \quad 0<x<b; \quad U_z(x,\ 0)=0 \quad b\leqslant x<\infty;
\end{aligned}
$$

Решение задачи ищем в виде суммы интегралов Фурье:

$$
\begin{aligned}
U_x(x,\ z) &= \frac{1}{c_{11}}\int_0^\infty \alpha\overline{U}(\alpha,\ z)\sin\alpha x\,d\alpha + \frac{1}{c_{11}}\int_0^\infty \beta\overline{U}(\beta,\ x)\sin\beta z\,d\beta;\\
U_z(x,\ z) &= \frac{1}{c_{44}}\int_0^\infty \alpha\overline{W}(\alpha,\ z)\cos\alpha x\,d\alpha + \frac{1}{c_{44}}\int_0^\infty \beta\overline{W}(\beta,\ x)\cos\beta z\,d\beta;
\end{aligned} \qquad (2)
$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{U}(\alpha,\ z)=\sum_{k=1}^{2}\Delta_1(t_k)A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z}, \quad \overline{U}(\beta,\ x)=\sum_{k=1}^{2}\Delta_1(t_k)/t_k\,B_k(\beta)e^{-\frac{\beta}{t_k}x},\\
&\overline{W}(\alpha,\ z)=\sum_{k=1}^{2}\Delta_2(t_k)A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z}, \quad \overline{W}(\beta,\ x)=\sum_{k=1}^{2}\Delta_2(t_k)B_k(\beta)e^{-\frac{\beta}{t_k}x}
\end{aligned} \qquad (3)
$$

Здесь $A_k(\alpha)$ и $B_k(\alpha)$ — неизвестные функции интегрирования, которые нужно определить из условий (1), а плотности, входящие в (3), определяются по формулам:

$$
\Delta_1(t_k)=\left(\frac{c_{13}}{c_{44}}+1\right)\cdot t_k; \qquad \Delta_2(t_k)=1-\frac{c_{44}}{c_{11}}t_k^2. \qquad (4)
$$

Из решения биквадратного уравнения

$$
\frac{c_{33}}{c_{11}}t^4+\left(\frac{c_{13}^2}{c_{44}c_{11}}+2\frac{c_{13}}{c_{11}}-\frac{c_{13}}{c_{44}}\right)t^2+1=0 \qquad (5)
$$

определяется t_k.

Здесь c_{11}, c_{13}, c_{33} и c_{44} — модули упругости материала.

Используя основные соотношения теории упругости ([1]) для исследуемой среды и (2), (3), можно все компоненты тензора напряжений выразить через $A_k(\alpha)$ и $B_k(\alpha)$:

$$
\begin{aligned}
\sigma_x(x,\ z) &= \int_0^\infty \alpha^2\overline{\sigma}_x(\alpha,\ z)\cos\alpha x\,d\alpha - \int_0^\infty \beta^2\overline{\sigma}_x(\beta,\ z)\sin\beta z\,d\beta;\\
\sigma_z(x,\ z) &= \int_0^\infty \alpha^2\overline{\sigma}_z(\alpha,\ z)\cos\alpha x\,d\alpha - \int_0^\infty \beta^2\overline{\sigma}_z(\beta,\ x)\sin\beta z\,d\beta; \qquad (6)\\
\tau_{zx}(x,\ z) &= -\int_0^\infty \alpha^2\overline{\tau}_{zx}(\alpha,\ z)\sin\alpha x\,d\alpha + \int_0^\infty \beta^2\overline{\tau}_{zx}(\beta,\ x)\cos\beta z\,d\beta.
\end{aligned}
$$

где

$$\bar{\sigma}_x(\alpha, z) = \sum_{k=1}^{2} \left| \Delta_1(t_k) - \frac{c_{13}}{c_{44}} \Delta_2(t_k) \cdot t_k \right| A_k(\alpha) e^{-\alpha t_k z};$$

$$\bar{\sigma}_x(\beta, x) = \sum_{k=1}^{2} \left| \frac{\Delta_1(t_k)}{t_k^3} + \frac{c_{13}}{c_{44}} \Delta_2(t_k) \right| B_k(\beta) e^{-\frac{\beta}{t_k} x};$$

$$\bar{\sigma}_z(\alpha, z) = \sum_{k=1}^{2} \left| \frac{c_{13}}{c_{11}} \Delta_1(t_k) - \frac{c_{33}}{c_{44}} \Delta_2(t_k) \cdot t_k \right| A_k(\alpha) e^{-\alpha t_k z};$$

$$\bar{\sigma}_z(\beta, x) = \sum_{k=1}^{2} \left| \frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\Delta_1(t_k)}{t_k^2} + \frac{c_{33}}{c_{44}} \Delta_2(t_k) \right| B_k(\beta) e^{-\frac{\beta}{t_k} x}; \tag{7}$$

$$\bar{\tau}_{zx}(\alpha, z) = \sum_{k=1}^{2} \left| \frac{c_{44}}{c_{11}} \Delta_1(t_k) \cdot t_k + \Delta_2(t_k) \right| A_k(\alpha) e^{-\alpha t_k z};$$

$$\bar{\tau}_{zx}(\beta, x) = \sum_{k=1}^{2} \left| \frac{c_{44}}{c_{11}} \frac{\Delta_1(t_k)}{t_k^2} - \frac{\Delta_2(t_k)}{t_k} \right| B_k(\beta) e^{-\frac{\beta}{t_k} x}.$$

Удовлетворяя граничным условиям, получаем (²)

$$B_k(\beta) = C_k B_1(\beta) \qquad A_k(\alpha) = a_k A_1(\alpha) + \varphi_k(\alpha)$$

$$\begin{cases} \int\limits_0^\infty \beta B_1(\beta) \sin \beta z \, d\beta = \frac{c_{11}}{m_{11}} f_1(z) & 0 < z \leqslant a \\ \int\limits_0^\infty \beta^2 B_1(\beta) \sin \beta z \, d\beta = \frac{1}{m_{12}} \sum\limits_{k=1}^{2} a_{2k} \int\limits_0^\infty \alpha^2 A_k(\alpha) e^{-\alpha t_k z} d\alpha & a < z < \infty \end{cases}$$

$$\int\limits_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha = \frac{1}{n_{11}} f_2(x) - \frac{2}{\pi} \frac{a_{11}}{a_{12} n_{11}} \sum_{j=1}^{2} b_{1j} C_j t_j^3 \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty \alpha \cos \alpha x \, d\alpha \int\limits_0^\infty \frac{\beta^2 B_1(\beta)}{t_j^2 \alpha^2 + \beta^2} d\beta \tag{8}$$

$$\int\limits_0^\infty \alpha A_1(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha = -\frac{1}{n_{12}} \sum_{j=1}^{2} \Delta_2(t_j) C_j \int\limits_0^\infty \beta B_1(\beta) e^{-\frac{\beta}{t_j} x} d\beta -$$

$$-\frac{1}{\pi} \frac{\Delta_2(t_2)}{n_{12} a_{12}} \sum_{j=1}^{2} b_{1j} C_j \int\limits_0^\infty \beta^2 B_1(\beta) e^{-\frac{\beta}{t_j} x}.$$

Здесь

$$C_1 = 1; \quad C_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}; \quad b_{1k} = \frac{c_{44}}{c_{11}} \frac{\Delta_1(t_k)}{t_k^2} - \frac{\Delta_2(t_k)}{t_k}; \tag{9}$$

$$d_1 = 1; \quad d_2 = \frac{b_{11}}{b_{12}}; \quad a_{1k} = \frac{c_{44}}{c_{11}} \Delta_1(t_k) \cdot t_k + \Delta_2(t_k);$$

$$\varphi_1(\alpha) = 0; \quad \varphi_2(\alpha) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{a_{12}} \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{2} b_{1j} C_j t_j^2 \int_0^\infty \frac{\beta^2 B_1(\beta)}{t_j^2 \alpha^2 + \beta^2} d\beta;$$

$$m_{11} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\Delta_1(t_k) C_k}{t_k^2}; \qquad m_{12} = \sum_{k=1}^{2} b_{2k} \cdot C_k; \tag{9}$$

$$a_{2k} = \Delta_1(t_k) - \frac{c_{13}}{c_{44}} \Delta_2(t_k) \cdot t_k; \qquad a_{3k} = \frac{c_{13}}{c_{11}} \Delta_1(t_k) - \frac{c_{33}}{c_{44}} \Delta_2(t_k) \cdot t_k;$$

$$n_{11} = \sum_{k=1}^{2} a_{3k} \alpha_k; \qquad n_{12} = \sum_{k=1}^{2} \Delta_2(t_k) \cdot \alpha_k.$$

Подобные системы „парных“ уравнений рассматривались в работах [3, 4] и др.

Используя результаты [3], из (8) получаем:

$$B_1(\beta) = \frac{2}{\pi\beta} \int_0^\infty \varphi_1(r) J_0(\beta r)\, dr + \frac{2}{\pi\beta} \int_a^\infty r F(r) J_0(\beta r)\, dr;$$

$$A_1(\alpha) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha} \int_0^b t \varphi_2(t) J_0(\alpha t)\, dt - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{n_{12}} \sum_{j=1}^{2} \frac{\Delta_2(t_j)}{t_j} C_j \int_0^\infty \beta^2 B_1(\beta)\, d\beta \times$$

$$\times \int_b^\infty t K_0\left(\frac{\beta}{t_j} t\right) J_0(\alpha t)\, dt - \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta_2(t_2)}{n_{12} a_{12}} \sum_{j=1}^{2} b_{1j} C_j \frac{1}{t_j} \times \tag{10}$$

$$\times \int_0^\infty \beta^3 B_1(\beta)\, d\beta \int_0^\infty t K_0\left(\frac{\beta}{t_j} t\right) J_0(\alpha t)\, dt,$$

где

$$\varphi_1(r) = \frac{c_{11}}{m_{11}} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{z f_1(z)}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz; \qquad \varphi_2(t) = \frac{1}{n_{11}} \int_0^t \frac{f_2(x)\, dx}{\sqrt{t^2 - x^2}};$$

$$F(r) = \frac{1}{m_{12}} \sum_{k=1}^{2} a_{2k} \int_0^\infty \alpha^2 A_k(\alpha) K_0(\alpha t_k r)\, d\alpha; \tag{11}$$

$J_i(x)$ — функции Бесселя первого рода с действительным аргументом; $K_j(y)$ — функции Макдональда.

Исключая теперь $A_1(\alpha)$ из соотношений (10) и (11), для определения функции $\beta B_1(\beta) = B(\beta)$ получаем интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода:

$$B(\beta) = \Omega(\beta) + \int_0^\infty B(\gamma) K(\gamma, \beta)\, d\gamma. \tag{12}$$

Показано, что решение уравнения (12) может быть найдено методом последовательных приближений. Решая интегральное уравнение (12) методом последовательных приближений, получаем выражение функции $B(\beta)$. Далее, по формулам $B_1(\beta) = \frac{B(\beta)}{\beta}$ (10), (8), (11), (7), (6), (4)—(2) последовательно можно определить все искомые величины поставленной задачи.

Институт механики Академии наук Армении

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, Ս. Ա. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ

Ուղղաձիգ, վերջավոր ճեղքով օրթոտրոպ կիսահարթության համար համաչափ կոնտակտային խնդիր

Դիտարկվում է հորիզոնական եզրից սկսած վերջավոր երկարության ճեղք ունեցող առաձգական, օրթոտրոպ կիսահարթության համաչափ կոնտակտային խնդիրը։ Կիսահարթության եզրին ճնշում է ճեղքի առանցքի նկատմամբ համաչափ դասավորված կամայական ողորկ հիմքով կոշտ դրոշմը։ Ենթադրվում է, որ շփումը դրոշմի և կիսահարթության միջև բացակայում է։ Պարզության համար ընդունված է, որ կիսահարթության եզրը՝ դրոշմից դուրս ազատ է արտաքին լարումներից, ինչպես նաև ճեղքի եզրերում ազդում են միայն նորմալ լարումներ։ Դիտարկվում է հարթ դեֆորմացիոն վիճակ և խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի մեթոդով։

Խնդրի լուծումը բերվում է «զույգ» ինտեգրալ հավասարումներից բաղկացած երկու հավասարումների համակարգի, որի լուծումը հանգում է Ֆրեդհոլմի տիպի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։

Ցույց է տրված, որ վերջին հավասարումը կարելի է լուծել հաջորդական մոտավորությունների եղանակով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Р. Кристенсен.* Введение в механику композитов, Мир, М., 1982. 2 *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик,* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука, М., 1971. 3 *С. А. Мелкумян,* ДАН АрмССР, т. 54, № 2, с. 87—93 (1972). 4 *Я. С. Уфлянд,* Метод парных уравнений в задачах математической физики, Наука, Л.,

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 1991 № 3

БИОХИМИЯ

УДК 577.1

Р. А. Захарян

К механизму транслокации экзогенной ДНК и трансформации клеток млекопитающих

(Представлено чл.-корр. АН Армении К. Г. Карагезяном 20/VII 1990)

По данным ряда авторов транзиторную экспрессию в 1—10% трансформированных клеток можно обнаружить в течение 48—72 ч ([1, 2]). Часть ДНК, проникшей в клетку, разрушается лизосомальными ферментами прежде, чем достигает ядра, где она может реплицироваться и транскрибироваться.

Ранее нами было показано, что перенос нуклеиновых кислот в клетки сопряжен с повышением в клетке уровня цАМФ, фосфорилированием белков плазматической мембраны, увеличением входа внеклеточного Ca^{2+}, активацией фосфолипазы A_2 и накоплением в плазматической мембране лизолецитинов и ненасыщенных жирных кислот ([3-5]). Последние обладают мембранолитическими свойствами и, можно полагать, могут способствовать кластеризации внутримембранных белков, структурным перестройкам липидного матрикса вокруг сорбированных на мембране молекул ДНК, РНК и формированию эндоцитарных везикул.

В данной работе было изучено влияние лизолецитинов на процесс трансфекции Fischer Rat—I кеток ДНК вируса полиомы и трансформации гепатоцитов мышей автономно реплицирующимся в гепатоцитах плазмидной ДНК pPyI.

В экспериментах использовали Fischer Rat—I клетки, культивируемые в среде MEM, модифицированной Дульбеко, содержащей 10% телячьей сыворотки. ДНК вируса полиомы в форме Са-преципитата ([6]) от 10 до 100 нгр добавляли на поверхность клеток (5×10^5) с минимальным содержанием питательной среды. Через 6 ч инкубации при 37°С питательную среду заменяли на новую и культуру клеток инкубировали в течение 24 ч. После обработки трипсином клетки пересевали в чашки Петри со средой, содержащей 0,33% агара (в/объем). Подсчет трансформированных клеток-колоний проводили через 3 недели.

В экспериментах по трансформации использовали также гепатоциты новорожденных мышей, полученные, как описано в работе ([7]), культивируемые в среде Hams F-12, содержащей 15% телячьей сыворотки. Лизолецитины (Sigma type I) добавляли к клеткам в концентрации от 0,05 до 0,2мг/мл ([8]).

Плазмидная ДНК pPyl ([9]) любезно представлена П. Сориано и К. Николау (Франция), сконструирована на основе Hinc II-Bam HI фрагмента ДНК вируса полиомы, содержащего «раннюю» область генома, участок, обеспечивающий репликацию, фрагмент-усилитель и часть «позднего» гена, сцепленного с Hind III/Bam HI фрагментом ДНК плазмиды pML 2, производной от ДНК плазмиды pBR 322, лишенной участка, ингибирующего репликацию-размножение вектора в клетках эукариот.

Репликация ДНК pPyl в E. col dam+ HB101 сопровождается метилированием аденина в участке узнавания последовательности ГАТЦ эндонуклеазой MboI, что делает последовательность ГАТЦ устойчивой к рестрикции

Однако, когда pPyl после трансфекции размножается в эукариотической клетке, участок ГАТЦ не метилируется и ДНК может быть разрезана ферментом MboI на фрагменты, обычно получаемые от действия фермента Sau-3a (изошизомера MboI), способного разрезать последовательность ГАТЦ, содержащей CH_3-аденин.

Наличие и интенсивность низкомолекулярных фрагментов ДНК pPyl, гидролизованной ферментом MboI, обнаруживали ДНК-блот гибридизацией по методу, описанному в работе ([10]), что позволяло одновременно оценить уровень репликации и отличить вновь реплицированные молекулы от тех, которые были использованы для трансформации и присутствовали в клетке.

ДНК pPyl выделяли из клеток (5×10^5), трансформированных 300 нгр ДНК-Са-преципитата, по методу Хирта ([11]).

Плазмидная ДНК pPyl (5 мг/мл) была инкапсулирована в липосомы, содержащие фосфатидилхолин, фосфатидилсерин и холестерол (4:1:5), в обратимой фазе эвапорации, липид-ДНК эмульсия была получена за счет интенсивного смешивания вместо обычно применяемого ультразвука ([12]). Липосомы, содержащие ДНК pPyl, были обработаны ДНКазой I, очищены и выделены гель-хроматографией через Сефарозу-4В. На 5×10^5 клеток добавляли липосомы в концентрации 30нМ/мл, содержащие соответственно ДНК 300 нг.

Изучено было также влияние Са-преципитата низкомолекулярной РНК из дрожжей (Sacharomyces cerevisae) на процесс трансформации плазмидной ДНК pPyl в составе липосом.

За 30 мин до добавления липосом клетки обрабатывали 75мкг/мл Са-РНК-ой. Через 6 ч инкубации с липосомами клетки обрабатывали 20%-ным глицерином 1,5 мин ([1]). Через 48 ч взращивания клетки замораживали, из них выделяли ДНК по методу Хирта. Арахидоновую кислоту и индометацин использовали в концентрациях 15 нМ, 0,05 мМ соответственно.

Предварительно было установлено (табл. 1.), что концентрация лизолецитинов 0,15-0,2мг/мл питательной среды является оптимальной для проведения трансформации Rat-I клеток; более высокие концентрации лизолецитинов вызывали отторжение части клеток с поверхности чашек Петри.

Таблица 1

Влияние различных концентраций лизолецитина на трансформацию Rat-I клеток ДНК вируса полиомы (100 нг)

Препарат	Частота трансформации ×10 / мг/мл лизолецитина		
ДНК-Са-преципитат	0,8 / 0	0,8 / 0	1,0 / 0
ДНК-Са преципитат и лизолецитин	1,2 / 0,05	1,8 / 0,1	2,6 / 0,2

Примечание. Каждая цифра—средняя величина от трех экспериментов.

Лизолецитины (0,2 мг/мл) добавляли к клеткам одновременно с ДНК-Са-преципитатом, через 6 ч инкубации при 37°С среду заменяли на новую и далее поступали, как описано в материалах и методах. Подсчет трансформированных колоний показал, что лизолецитины стимулировали процесс трансформации Rat-I клеток, увеличивая его частоту в 3 раза (табл. 2).

Таблица 2

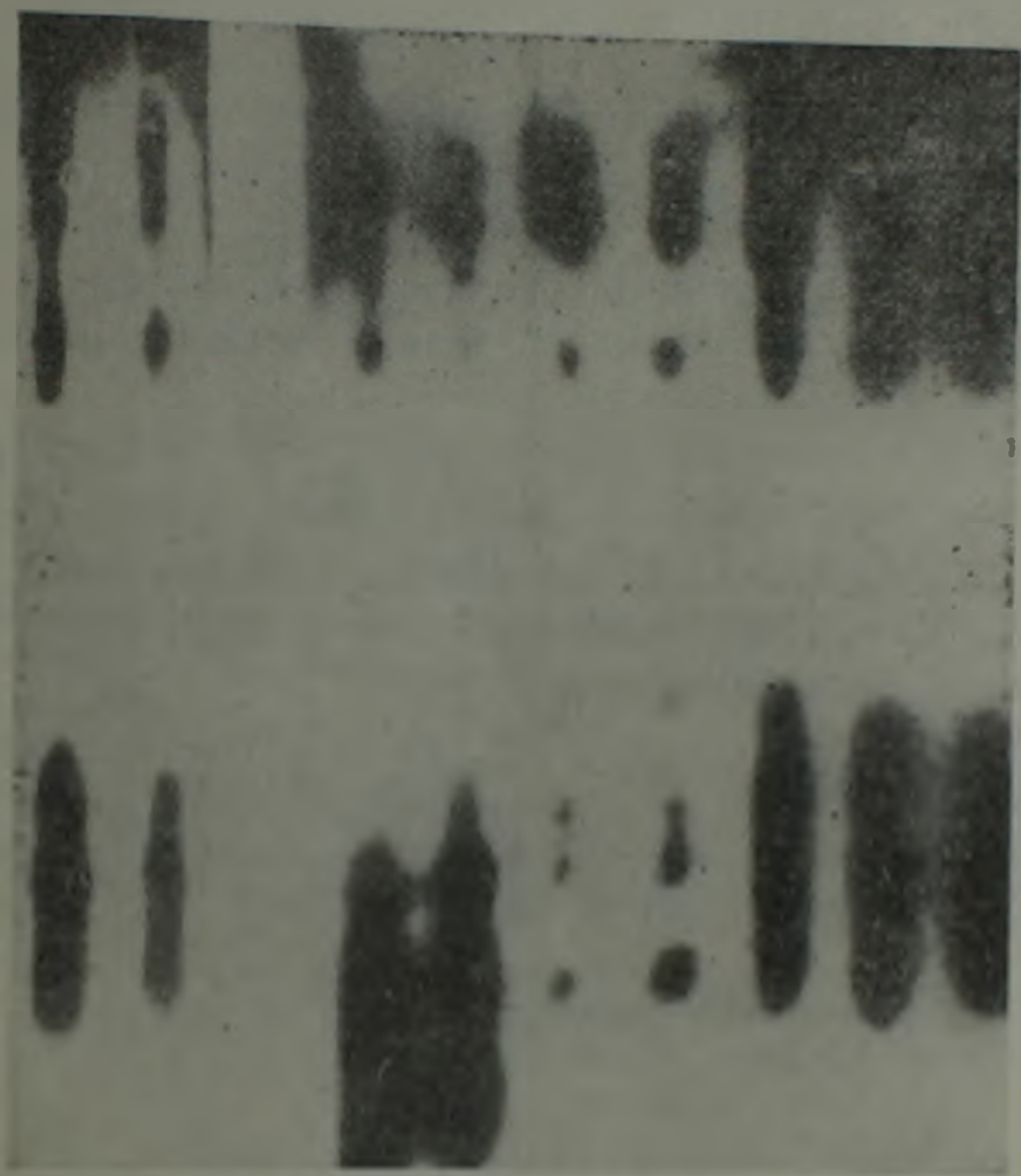
Влияние лизолецитина на трансформацию Rat-I клеток ДНК вируса полиомы

Препарат	Частота трансформации ×10⁴ / нг ДНК		
ДНК-Са-преципитат	0,2 / 10	0,5 / 50	0,8 / 100
ДНК-Са-преципитат и лизолецитин	0,6 / 10	1,8 / 50	2,8 / 100

Примечание. Каждая цифра средняя величина от трех экспериментов.

В следующей серии экспериментов по трансформации гепатоцитов был использован реплицирующийся в мышиных клетках вектор pPyI. ДНК, выделенная по методу Хирта из 5×10^5 клеток, трансформированных 300 нг ДНК pPyI в составе липосом или Са-преципитата в присутствии лизолецитина или Са-РНК, была гидролизована ферментом MboI. Продукты гидролиза идентифицировали ДНК-блот гибридизацией ([10]) после разделения электрофорезом в 0,6-ном агарозном геле (рисунок).

Как следует из рисунка, лизолецитины существенно стимулировали перенос ДНК pPyI в клетки гепатоцитов как в составе липосом, так и форме Са-преципитата (негидролизованная эндонуклеазой MboI ДНК pPyI). Вместе с тем в клетках, обработанных лизолецитином, обнаруживается относительно высокий уровень реплицирующихся молекул ДНК pPyI (низкомолекулярные фрагменты ДНК pPyI, гидролизованной MboI).



Электрофорез в 0,6%-ном агарозном геле и ДНК-блот гибридизационный анализ фрагментов ДНК pPyI, выделенной из трансформированных Rat-I клеток и гидролизованной эндонуклеазой MboI. Справа налево: *1*, *2*, *3* — ДНК pPyI из клеток, трансформированных липосомами в присутствии Са—РНК; трансформированных липосомами и Са-преципитатом ДНК в присутствии лизолецитина, соответственно; *4*, *5* — ДНК pPyI из клеток, трансформированных Са-преципитатом ДНК и липосомами соответственно; *6*, *7* — ДНК pPyI из клеток, трансформированных липосомами в присутствии арахидоновой кислоты; *8*, *9* — ДНК pPyI из клеток, трансформированных липосомами в присутствии 0,05 мМ индометацина; арахидоновой кислоты, соответственно

Известно, что лизолецитины обладают детергентными свойствами, ингибируют активность лизосомальных ферментов и, по-видимому, в наших экспериментах повышают число клеток, в которых трансформирующая ДНК успешно достигает ядерной мембраны и проникает в ядра гепатоцитов.

Обработка Са-РНК гепатоцитов также стимулировала перенос в составе липосом ДНК pPyI, по-видимому, за счет повышения в плазматической мембране уровня лизолецитинов и ненасыщенных жирных кислот.

Ранее полученные нами данные показали, что процесс ДНК опосредованной трансформации клеток сопряжен с активацией фосфолипазы A_2 и образованием в клетке лизофосфолипидов и ненасыщенных жирных кислот [13], в том числе и арахидоновой кислоты, оказывающей известное стимулирующее влияние на синтез хромосомальной ДНК в клетках с активной циклооксигеназной системой превращения арахидоновой кислоты.

Как следует из рисунка (6, 7) экзогенная арахидоновая кислота существенно стимулировала репликацию рекомбинантной ДНК pPyI в гепатоцитах, а добавление индометацина (8, 9) ингибитора циклооксигеназного пути превращения арахидоновой кислоты в простагландины и тромбоксаны заметно подавляло репликацию ДНК pPyI, выделенной во фракции Хирта.

Полученные данные свидетельствуют, что лизолецитины способствуют переносу биополимеров ДНК в клетки ядра эукариот, и их образование при переносе ДНК в клетку, на наш взгляд, может быть одним из факторов, способствующих процессу эндоцитоза нуклеиновых кислот в клетку и транслокации в ядро.

Образование арахидоновой кислоты в процессе переноса ДНК через плазматическую мембрану эукариотических клеток [13] следует рассматривать в качестве возможного фактора, способствующего репликации трансформирующей ДНК.

Институт экспериментальной биологии
Академии наук Армении

Ռ. Ա. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

Էկզոգեն ԴՆԹ-ի տրանսլոկացիայի և կաթնասունների բջիջների ձևափոխման մեխանիզմի վերաբերյալ

Ստացված են տվյալներ, որոնք հաստատում են, որ լիզոլեցիտինները արագացնում են ֆիբրոբլաստների ձևափոխման պրոցեսը։

Էկզոգեն ԴՆԹ-ի (լիպոսոմներ և Ca^{2+}-պրեցիպիտատ) ազդեցության ներքո լիզոլեցիտինների ֆիզիոլոգիական դերը կայանում է նրանում, որ նրանք ճնշում են լիզոսոմային ֆերմենտների ակտիվությունը և ապահովում են բջիջների էնդոցիտոզի և ձևափոխման պրոցեսները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *C. Gorman, B. H. Howard*, Nucl. Acid Res. v. 11, № 21. p. 7621—7648 (1983). [2] *M. Schaefer-Ridder, Y. Wang, P. H. Hofschneider*, Science, v. 215, p 16 —168 (1982). [3] *Р. А. Захарян, Г. Е. Бычков, С. С. Дадаян*, и др., Нейрохимия, т. 5, № 3, с. 239—217 (1986). [4] *K. G. Karagues an, R. A. Zakharian, K. A. Bakunts e. a.* In Abst. „Neurochemical Aspects of phospholipid Metabolism", Guiseppe Porcelati Foundation

International Meeting, May 26—28, Perygia, Italy, 1988. [5] *R. A. Zakharian, K. G. Karaguezyan, S. S. Ovakimian e. a.*, in Abst. ISF—IOCS world Congress, Sempt. 26—31, Tokyo, Japan, 1988. [6] *M. Wigler, A. Pellicer, S. Silverstein e. a.*, Cell. v. 14, p. 725—731 (1978). [7] *P. O. Seglen*, Meth. Cell. Biol., v. 13, p. 29—83 (1976). [8] *M. Miller, J. Castellot, A. Pardee*, Biochemistry, v. 17, p. 1073—1080 (1978). [9] *P. K. Nandi, A. Legrand, C. Nicolau*, J. Biol. Chem., v. 261, № 35, p. 16722—16726 (1986). [10] *P. Soriano, J. Legrand, H. Spanjer e. a.*, Proc. Natl. Acad. Sci USA, v. 80, p. 7128—7131 (1983). [11] *B. Hirt*, J. Mol. Biol., v. 26, p. 365—369 (1967). [12] *F. Jr. Szoka, D. Papahadjopoulos*, Proc. Natl. Acad. Sci USA, v. 75, p. 4194—4198 (1978). [13] *Р. А. Захарян, Л. А. Рухкян*, ДАН СССР, т. 302, № 6, с. 1498—1500 (1988).