

ՁԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

Том 92 № 2

1991

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Կ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. բեկնածու (պատ. ֆաբրուդար), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ՐԱՔԱՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՆԼՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ րդբ. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Գ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ րդբ. անդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Գ. Մ. ՍԵՂՐԱԿՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Մ. Լ. ՏՆՐՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Ր. ՏԱՆԱՐՉՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН Армении, А. Т. БАБАЯН, академик АН Армении, А. А. ГАБРИЕЛЯН, академик АН Армении, В. О. КАЗАРЯН, академик АН Армении (зам. отв. редактора), В. Г. МХИТАРЯН, чл. корр. АН Армении, Г. С. СААКЯН, академик АН Армении, Д. М. СЕДРАКЯН, академик АН Армении (отв. редактор), А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН Армении, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, академик АН Армении, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик АН Армении.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Մ Ա Թ Ե Մ Ա Տ Ի Կ Ա

Ա. Հ. Կարապետյան—Ռադիալ խողովակաձև տիրոջթևերում հոլոմորֆ ֆունկցիաների ինտեգրալ ներկայացումներ	51
Ռ. Մ. Մուսայելյան—Անվերջ բազմանկյունների պոլոթյունը երկչափ փոփոխական բացասական կորոթյան շափերում	57
Յ. Ա. Իսախանյան—Վեկտորական դաշտերի բացարձակ անընդհատության որոշ հատկության մասին	63
Է. Ա. Դանիելյան, Գ. Ս. Մավսեսյան, Կ. Ռ. Թաքալյան—Կարաթեոդորիի թևերեմի ընդհանրացումը	69

Ա Ռ Ա Չ Գ Ա Կ Ա Ն Ի Թ Յ Ա Ն Տ Ն Ս Ո Ւ Թ Յ Ի Ն

Ն. Ա. Աղայովյան, Ա. Բ. Թովմասյան—Անիզոտրոպ շերմաառաձգական շերտի խորը եզրային խնդրի մասին	76
--	----

Ն Ի Կ Ր Ա Բ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Մ. Ա. Սաքյան—Մեզոտետիսի կենտրոնական սեկտորի կեղևի բաղմացիկլային ուֆտառաչաքման զոնաներ և օֆիոլիտագոյացում	81
--	----

Կ Ն Ն Դ Ա Ն Ա Բ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Յու. Ռ. Խանրեկյան, Ե. Վ. Գորդեևա—Նոր սեռ <i>Fineoppia khosrovica</i> gen. nov. sp. nov. և երկու նոր տեսակ <i>Medioppia Trilobata</i> sp. nov. և <i>Epimerella rubeni</i> sp. nov. Oppilidae Grandjean, 1954 ընտանիքից Հայաստանում (Acariformes, Oribatei)	86
---	----

Մ Ի Ջ Ա Տ Ա Բ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Գ. Ո. Առաքելյան — <i>Diplorhoptum</i> Mayr (Hymenoptera, Formicidae) սեռի մրջյունների նոր տեսակ Հայաստանից	93
--	----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- А. О. Каранетян—Интегральные представления голоморфных функций в радиальных трубчатых областях 51
- Р. Ц. Мисаелян—Существование бесконечных многоугольников в двумерной метрике переменной отрицательной кривизны 57
- Ф. А. Таталян—Об одном свойстве абсолютной непрерывности векторных полей 63
- Э. А. Дачилян, Г. С. Моесисян, К. Р. Таталян—Обобщение теоремы Кватертеодори 69

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- Л. А. Агаджян, А. Б. Товмасын—О смешанной краевой задаче для анизотропной термоупругой полосы 76

ГЕОЛОГИЯ

- М. А. Сатянц—Зоны полициклического рифтогенеза и офiolитогенез центрального сектора Мезотетиса 81

ЗООЛОГИЯ

- Ю. Р. Ханбекян, Е. В. Гордеева — Новый род *Fineorpia khosrovica* gen. nov., sp. nov. и два новых вида *Mediorpia trilobata* sp. nov. и *Epimerella rubeni* sp. nov. семейства *Opriidae* Grandjean, 1954 в Армении (Acariformes, Oribatei) 85

ЭНТОМОЛОГИЯ

- Г. Р. Аракелян — Новый вид муравьев рода *Diplorhoptrum* Mayr (Hymenoptera, Formicidae) из Армении 93

C O N T E N T S

MATHEMATICS

- A. H. Karapettan* — Integral representations of holomorphic functions in the radial tube domains 51
- R. Ts. Musaellian* — The existence of infinite polygons in two-dimensional metrics of negative curvature 57
- F. A. Tatallan* — On a property of absolute continuity of vector fields 63
- E. A. Daniellian, G. S. Monstian, K. R. Tatallan* — A generalization of Caratheodory's theorem 69

THEORY OF ELASTICITY

- L. A. Aghalovian, A. B. Tovmasian* — On mixed boundary problem for anisotropic thermoelastic strip 76

GEOLOGY

- M. A. Satian* — The zones of polycyclic riftogenesis and ophioliteogenesis of central part of Mesotethys 81

ZOOLOGY

- Yu. R. Khanbekian, E. W. Gordeeva* — A new genus *Fincoppia khosrovica* gen. nov., sp. nov. and two new species *Medioppia trilobata* sp. nov. and *Epimrella rubeni* sp. nov. of Opplidae Grandjean families, 1954 in Armenia (Acariformes, Oribatei) 86

ENTOMOLOGY

- G. R. Arakelian* — New ant of the genus *Diplorhoptrum* Mayr (Hymenoptera, Formicidae) from Armenia 93

Сдано в набор 8. 08. 1991. Подписано к печати 25. 10. 1991

Формат 70×108¹/₁₆. Бумага № 1, сыктывкарская. Высокая печать. Печ. лист 3,0
Усл. печ. л. 4,2. Усл. кр. отт. 4,2. Учет. изд. л. 3,06. Тираж 455. Заказ № 230.

Издат. № 7934. Цена 1 р. 10 к.

Адр ред : 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г, II эт., к. 1, тел. 27-92-38.

Издательство Академии наук Армении, 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук Армении, 375019, Ереван.

пр. Маршала Баграмяна, 24.

УДК 517.547

А. О. Карапетян

Интегральные представления голоморфных функций в радиальных
 трубчатых областях*

(Представлено академиком АН Армении М. М. Джрбашяном 16/XI 1990)

1. Известная теорема Н. Винера и Р. Пэли ⁽²⁾ утверждает, что класс H^2 в правой полуплоскости $|z: \operatorname{Re} z > 0|$ допускает параметрическое интегральное представление

$$f(z) = \int_0^{+\infty} F(t) \cdot e^{-zt} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (1)$$

с произвольной функцией $F(t) \in L^2(0, +\infty)$.

Этот классический результат в свое время инициировал многочисленные исследования, продолжающиеся и по настоящее время. С. Бохнер ⁽³⁾ установил аналог теоремы Винера—Пэли для голоморфных функций многих комплексных переменных. В работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна ⁽⁴⁾, а также в гл. VII монографии М. М. Джрбашяна ⁽⁵⁾ для весовых классов Харди в угловых областях были установлены существенно новые (и более общие, чем (1)) интегральные представления посредством ядер типа Миттаг-Леффлера

$$E_\nu(z, \rho) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Gamma(\nu + k/\rho).$$

Принципиальное значение имела работа С. Г. Гиндикина ⁽⁶⁾, где в качестве многомерного аналога полуплоскости рассматривались области Зигеля. В этой работе впервые была поставлена и решена следующая общая задача: получить параметрические интегральные представления типа Винера—Пэли (и на их основе построить воспроизводящие ядра) для классов голоморфных в областях Зигеля функций, квадратично интегрируемых по всей области определения. За дальнейшими результатами в этом направлении отсылаем к работам ⁽⁷⁻⁹⁾.

* За развернутым наложением результатов настоящей заметки отсылаем к работе ⁽¹⁾.

2. Всюду дальше пространство \mathbb{R}^n отождествляется с вполне вещественным подпространством в \mathbb{C}^n . Для произвольного $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ положим $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) \in \mathbb{C}^n$ и $z' = (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$, так что $z = (z', z_n)$. Для произвольных $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ полагаем

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \cdot \bar{w}_k. \quad (2)$$

Далее, сформулируем ряд свойств, которыми может обладать или не обладать произвольная непрерывная положительная функция $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0, +\infty)$:

$$(I) \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\ln \varphi(\tau)}{\tau} = 0; \quad (II) \overline{\lim}_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\ln \varphi(\tau)}{\tau} \leq 0, \quad (III) \underline{\lim}_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\ln \varphi(\tau)}{\tau} > 0;$$

$$(IV) \varphi(\tau) \in L^1(0, R), \quad \forall R > 0; \quad (V) \varphi(2\tau) \leq \text{const} \cdot \varphi(\tau), \quad \tau \in (0, +\infty).$$

Кроме того, положим

$$\varphi^*(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in (-\infty, +\infty). \quad (3)$$

Если V — некоторый открытый выпуклый конус (сокращенно ОКВ) в \mathbb{R}^n и $\gamma(y) > 0$, $y \in V$ — произвольная непрерывная функция, то полагаем

$$\gamma_V^*(t) = \int_V e^{-\langle t, y \rangle} \cdot \gamma(y) dy, \quad t \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

При этом для $p, s \in (0, +\infty)$ обозначим через $H_{s, \gamma}^p(T_V)$ пространство голоморфных в трубчатой области $T_V = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n: x \in \mathbb{R}^n, y \in V\}$ функций $f(z) \equiv f(x + iy)$, для которых

$$M_{s, \gamma}^p(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_V \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x + iy)|^p dx \right\}^s \cdot \gamma(y) dy < +\infty. \quad (5)$$

Далее, если V — ОКВ в \mathbb{R}^n , то функцию $\rho(y)$, $y \in V$, (вообще говоря, комплекснозначную) назовем однородной, если: $\rho(\alpha y) = \alpha \cdot \rho(y)$, $y \in V$, $\alpha \in (0, +\infty)$. Напомним также, что сопряженным конусом, согласно общепринятому определению, называется множество

$$V^* = \{v \in \mathbb{R}^n: \langle v, y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in V\}. \quad (6)$$

Внутренность сопряженного конуса обозначается через $\text{Int } V^*$.

Наконец, преобразование Фурье некоторой функции $g(x)$,

$x \in \mathbb{R}^n$, договоримся обозначать через \hat{g} .

3. Справедлива следующая теорема типа Винера—Пэли:

Теорема 1. Пусть V — острый (т. е. $\text{Int } V^* \neq \emptyset$) ОВК в \mathbb{R}^n , $\varphi(y)$, $y \in V$ — однородная непрерывная положительная функция, $\tau(z)$, $z \in (0, +\infty)$ — непрерывная положительная функция, обладающая свойством (III), и $\gamma = \varphi \circ \tau$. Тогда каждая функция f из класса $H_{s,\gamma}^p(T_V)$ ($1 \leq p \leq 2$, $0 < s < +\infty$) допускает интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{V^*} F(t) \cdot e^{i(z,t)} dt, \quad z \in T_V^*. \quad (7)$$

где:

1°. При $p = 1$ функция $F(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, непрерывна, обращается в нуль на $\mathbb{R}^n \setminus V^*$ и такова, что

$$\sup_{t \in V^*} \{ |F(t)|^2 \cdot \tau_V^*(s \cdot t) \} < \frac{M_{s,1}^1(f)}{(2\pi)^{n/2-s}} < +\infty. \quad (8)$$

2°. При $1 < p < 2$ функция $F(t)$, $t \in V^*$, измерима и удовлетворяет условию

$$\int_V \left\{ \int_{V^*} |F(t)|^q \cdot e^{-q \cdot \tau_V^*(t)} dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \tau(y) dy < \\ < \frac{M_{s,1}^p(f)}{(2\pi)^{n/2-s(2-p)}} < +\infty \quad (q = 1/(p-1)). \quad (9)$$

При этом для п. в. $y \in V$:

$$f_y(t) = \begin{cases} F(t) \cdot e^{-i(y,t)}, & t \in V^*, \\ 0, & t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*, \end{cases} \quad (10)$$

где $f_y(x) \equiv f(x + iy)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, при $p = 2$ интегральное представление (7) класса $H_{s,1}^p(T_V)$ является параметрическим и в (9) имеем равенство (т. е. выполняется равенство Парсеваля).

4. Назовем ОВК $V \subset \mathbb{R}^n$ ($n > 1$) специальным, если

1) $V \subset \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^n : y_n > 0\}$;

2) $e_n = (0, \dots, 0, 1) \in V$.

С каждым специальным ОВК $V \subset \mathbb{R}^n$ ассоциируются следующие непрерывные функции:

$$\sigma_V(y') \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ \sigma \in \mathbb{R} : (y', \sigma) \in V \}, \quad y' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad (11)$$

$$\tau_V(y) \stackrel{\text{def}}{=} y_n - \tau_V(y'), \quad y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (12)$$

Интерес к функции τ_V обусловлен тем, что $V = \{y \in \mathbb{R}^n : \tau_V(y) > 0\}$ и, кроме того, $\tau_V(y) \approx \text{dist}(y, \partial V)$, $y \in V$. Если V — специальный ОВК в \mathbb{R}^n , то положим

$$\Pi_V = \{y' \in \mathbb{R}^{n-1} : (y', 1) \in V\}. \quad (13)$$

Определение. Специальный ОВК $V \subset \mathbb{R}^n$ назовем нормальным, если: $\sigma_V(y') > 0, \forall y' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\} \iff$ область Π_V ограничена.

Всюду дальше V будет обозначать нормальный специальный ОВК в \mathbb{R}^n . При этом целесообразно введение интеграла

$$I_V(a) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\sigma_V(x) - \langle x, a \rangle} dx, \quad a \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad (14)$$

а также рассмотреть множества $A_V = \{a \in \mathbb{R}^{n-1} : I_V(a) < +\infty\}$.

Теорема 2. Пусть $U = \text{Int } V^*$, тогда:

1°. U суть нормальный специальный ОВК в \mathbb{R}^n .

2°. $\Pi_U = \text{Int } A_V = \{a \in \mathbb{R}^{n-1} : \min_{|\zeta|=1} [\sigma_V(\zeta) + \langle \zeta, a \rangle] > 0\}$.

3°. Интеграл $I_V(a)$ определяет в области Π_U непрерывную положительную функцию.

4°. При произвольном $t \in \mathbb{R}^{n-1}$ справедлива формула:

$$\sigma_U(t) = \max_{|\zeta|=1} \left\{ -\frac{\langle \zeta, t \rangle}{\sigma_V(\zeta)} \right\} = -\min_{|\zeta|=1} \left\{ \frac{\langle \zeta, t \rangle}{\sigma_V(\zeta)} \right\}. \quad (15)$$

5. Справедлив следующий основной результат:

Теорема 3. Пусть V — нормальный специальный ОВК в \mathbb{R}^n , $U = \text{Int } V^*$, $\varphi(\tau), \tau \in (0, +\infty)$ — непрерывная положительная функция, обладающая свойствами (I) и (IV), $\gamma = \varphi \circ \sigma_V$ и ядро $\Phi(z, w)$ определено по формуле

$$\Phi(z, w) = 2^{2-n} \int_{\Pi_U} \frac{da}{I_V(a)} \int_0^{+\infty} \frac{r^{2n-2}}{\varphi^*(2r)} \cdot e^{ir \langle z - \bar{w}, (a, 1) \rangle} dr, \quad z, w \in T_V. \quad (16)$$

Допустим также, что $1 < p < 2$ и число s удовлетворяет одному из следующих условий:

(а) $1/p \leq s \leq 2/p$;

(б) $1/p \leq s \leq 1/(p-1)$, но при этом φ обладает также свойством (V). Тогда каждая функция $f \in H_{s,1}^p(T_V)$ допускает интегральное представление вида

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T_V} f(w) \cdot \Phi(z, w) \cdot \gamma(v) du dv, \quad z \in T_V (w = u + iv). \quad (17)$$

Замечание 1. В важном частном случае $\varphi(\tau) = \tau^\alpha, \tau \in (0, +\infty)$ ($\alpha > -1$), формула (16) для ядра $\Phi(z, w)$ заметно упрощается и принимает вид

$$\Phi(z, w) = 2^{n+a} \frac{\Gamma(2n+a)}{\Gamma(1+a)} \int_{i!_V} \frac{da}{\Gamma_V(a)} \frac{1}{|i(\bar{w}-z), (a, 1)|^{2n+a}}, \quad (18)$$

$$z, w \in T_V.$$

Замечание 2. Если $\varphi(\cdot) = \tau^\alpha$, $\alpha \in (0, +\infty)$ ($\alpha > -1$) и при этом $n = 1$, то с учетом (18) интегральное представление (17) принимает вид

$$f(z) = \frac{2^\alpha (\alpha + 1)}{\pi} \int_{\text{Im } w > 0} f(w) \frac{v^\alpha}{|i(\bar{w}-z)|^{2+\alpha}} dudv, \quad (19)$$

$$\text{Im } z > 0 \quad (w = u + iv).$$

В работе М. М. Джрбашяна и А. Э. Джрбашяна ⁽¹⁰⁾ принципиально иным методом (не опирающимся на технику преобразования Фурье—Планшереля) интегральное представление (19) было установлено для голоморфных в полуплоскости $\Pi_+ = \{w \in \mathbb{C} : \text{Im } w > 0\}$ функций из весовых пространств $L^p(\Pi_+; v^\alpha dudv)$, $\alpha > -1$, причем при $1 \leq p < +\infty$, а не только для $1 \leq p \leq 2$.

Замечание 3. При $n \geq 1$, $p = 2$, $\alpha = 1$ и $\varphi(\cdot) \equiv 1$, $\alpha \in (0, +\infty)$, теоремы 1 и 3 вытекают из более общих результатов § 5 работы ⁽⁶⁾ С. Г. Гиндикина.

В заключение выражаю благодарность академику АН Армении М. М. Джрбашяну за постановку задач и постоянное внимание к данной работе.

Институт математики
Академии наук Армении

Ա. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Ինտեգրալ խողովակաձև տիրույթներում հոլոմորֆ ֆունկցիաների ինտեգրալ ներկայացումներ

Ներկայացված հոդվածում նախ և առաջ ուսումնասիրվում են \mathbb{R}^n տարածությունում ընկած այսպես կոչված նորմալ հատուկ կոնները, որոնք, ըստ էության, տարրերվում են սովորական սուր կոներից միայն իրենց հատուկ դասավորվածությամբ \mathbb{R}^n -ում: Այդ տեսակի V կոների հետ որոշակիորեն կապնվում է այնպիսի մի անընհատ $\tau_V(y)$, $y \in \mathbb{R}^n$, ֆունկցիա, որ $V = \{y \in \mathbb{R}^n : \tau_V(y) > 0\}$ և, բացի այդ, $\tau_V(y) = \text{dist}(y, \partial V)$, $y \in V$: Աշխատանքում դիտարկվում են $T_V = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n : x \in \mathbb{R}^n, y \in V\}$ խողովակաձև տիրույթում

$$\int_V \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x + iy)|^p dx \right\}^\alpha \cdot \varphi(\tau_V(y)) dy < +\infty$$

պայմանին բազարարող $f(z) \equiv f(x + iy)$ հոլոմորֆ ֆունկցիաների դասերը: Այստեղ $1 \leq p \leq 2$, $0 < s < +\infty$ և $\varphi(z)$ -ն, $z \in (0, +\infty)$, կամայական դրական անընդհապ ֆունկցիա է: Ինելով որոշակի պայմաններ φ ֆունկցիայի և S պարամետրի վրա, նշված դասերի համար հաստատվում են Պելի-Վիեների տիպի ինտեգրալ ներկայացումներ, ինչպես նաև կառուցվում են $\Phi(z, \omega)$, $z, \omega \in T_V$, վերաբառադրող կորիզներ, որոնք հոլոմորֆ են ըստ z -ի և անտիհոլոմորֆ՝ ըստ ω -ի:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. О. Карапетян, Рукоп. деп. в АрмНИИИТИ 26. 11. 90, № 49—Ар 90, Ереван, 40с. 1990. ² R. Paley, N. Wiener, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 19, Amer. Math. Soc., N. Y., 1934. ³ S. Bochner, Ann. Math., v. 45, № 4, с. 686—707 (1914). ⁴ М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян, ДАН СССР, т. 120, № 3, с. 457—460 (1958). ⁵ М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Изд. Наука, М., 1966. ⁶ С. Г. Гиндикин, УМН, т. 19, № 4, с. 3—92 (1964). ⁷ М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян, ДАН СССР, т. 283, № 5, с. 1054—1057 (1985). ⁸ А. О. Карапетян, Некоторые вопросы интегральных представлений в многомерном комплексном анализе, Канд. дисс., Ереван, 1987. ⁹ А. О. Карапетян, Изв. АН Армении, Матем., т. 25, № 4, с. 315—333 (1990). ¹⁰ М. М. Джрбашян, А. Э. Джрбашян, ДАН СССР, т. 285, № 3, с. 547—550 (1985).

УДК 514.17

Р. Ц. Мусаелян

Существование бесконечных многоугольников в двумерной метрике
переменной отрицательной кривизны

(Представлено академиком АН Армении М. М. Джрбашяном 11/XII 1990)

В работе рассматривается существование в E^2 некоторых классов выпуклых* некомпактных областей на двумерных многообразиях переменной отрицательной гауссовой кривизны. Рассматриваемые некомпактные множества называются бесконечными многоугольниками (БМ). На плоскостях Лобачевского (на многообразиях постоянной отрицательной кривизны) существование таких областей известно. Дадим определение БМ.

Определение 1. *Выпуклое множество, состоящее из пересечения конечного или счетного множества полуплоскостей**, границы которых не имеют общих точек, называется бесконечным многоугольником.*

Граница полученного таким образом множества состоит из полных геодезических линий, которые назовем сторонами БМ. Две стороны называются соседними, если они параллельны (точное понятие параллельности будет определено ниже, кратко—это геодезические линии, сходящиеся на абсолюте).

Из множества всех БМ, у каждого из которых любая сторона имеет две соседние, выделим два множества, которые будем, как и в работе (1), обозначать M_1 и M_2 .

Определение 2. *Множество M_1 состоит из БМ, для каждого из которых можно указать отвечающий ему орицикл*** O в заданной метрике такой, что нижняя грань длин ортогональных проекций сторон этого многоугольника на указанный орицикл положительна.*

* Область D в метрике переменной отрицательной кривизны называется выпуклой, если отрезок геодезической, соединяющий любые две точки, принадлежащие D , целиком содержится в D .

** Часть полной метрики, ограниченную геодезической, будем называть полуплоскостью.

*** Это понятие будет определено ниже.

Определение 3. Множество M_2 состоит из БМ, для каждого из которых точная нижняя грань длин ортогональных проекций сторон рассматриваемого многоугольника на данную сторону БМ положительна.

Будем рассматривать метрику, заданную посредством линейного элемента

$$ds^2 = dx^2 + B^2(x, y) dy^2. \quad (1)$$

Пусть метрика (1) кривизны $K(x, y) < 0$ задана на всей плоскости xOy .

Справедлива следующая теорема.

Основная теорема. В метрике* (1) существуют БМ, принадлежащие классам M_1 и M_2 .

Дадим описание некоторых понятий, которые необходимы в дальнейшем.

Пусть a — заданная геодезическая линия в метрике (1). Фиксированная точка $N_0 \in a$ разбивает a на два луча** a^+ и a^- . Пусть N — произвольная точка луча a^+ , находящаяся от N_0 на расстоянии s . Рассмотрим открытый геодезический круг $\omega_{0,s}$ — радиуса s с центром в точке N . Граница $\omega_{0,s}^*$ этого круга представляет собой геодезическую окружность, которая проходит через точку N_0 , ортогональную лучу a^+ .

Определение 4. Объединение $\Omega = \cup \omega_{0,s}$ называется орикругом с центральным лучом a^+ (см. (3)).

Определение 5. Граница Ω^* орикруга Ω называется орициклом.

Определение 6. Луч a_N^+ с началом в точке N_0 называется параллельным лучом для луча a^+ , проведенным из точки $N_0 \in \Omega$, если существует последовательность отрезков $N_n p(s_n)$, где $p(s_n) \in a^+$, $N_n \in \Omega$, $N_n \rightarrow N_0$, $s_n \rightarrow \infty$, которая сходится к a_N^+ .

В работе (3) доказываются свойства, относящиеся к орикругу и орициклу.

Далее будем пользоваться работой (4) А. Д. Александрова. В упомянутой работе предполагается, что линейный элемент задан в замкнутой области, граница которой имеет конечную длину — «периметр области».

* Для простоты рассмотрено существование БМ в метрике (1). Можно доказать существование БМ в полных двумерных метрических пространствах отрицательной кривизны. При этом отрицательность кривизны метрического пространства определяется так: для каждого его геодезического треугольника отрезок средней линии меньше половины основания (см. (2)).

** Г. Буземан (2) определяет луч с началом в точке P как половину геодезической линии, проходящей через точку P .

Определение 7. Будем говорить, что в области D кривизна меньше или равна κ ($\geq \kappa$), если для всякого геодезического треугольника, лежащего в D , отношение его дефекта^{*} $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ к площади меньше или равно κ ($\geq \kappa$).

В работе (4) приводится следующая лемма

Лемма 1. Если в треугольнике T кривизна не превосходит $\kappa < 0$, то углы этого треугольника не больше, чем соответствующие углы треугольника T_0 со сторонами той же длины на плоскости Лобачевского кривизны κ^{**} . И если хотя бы один угол треугольника T равен соответствующему углу треугольника T_0 , то треугольники T и T_0 изометричны (далее треугольник T_0 будет называться «соответствующим» T).

Эта лемма имеет место (см. (5)) и в том случае, когда в треугольнике T имеется непрерывная гауссова кривизна. В дальнейшем лемму 1 будем рассматривать для случая гауссовой кривизны.

Для доказательства основной теоремы нам необходимы некоторые вспомогательные утверждения, которые мы здесь приведем без доказательства.

Пусть l_1 и l_2 — две ортогональные геодезические линии в метрике (1) и $l_1 \cap l_2 = A$. Ориентируем прямые l_1 и l_2 так, чтобы при повороте l_1^+ против часовой стрелки на 90° совпала с l_2^+ , где началом лучей l_1^+ и l_2^+ берется точка A . Предположим, что геодезическая γ_1 параллельна l_1^+ и $\gamma_1 \cap l_2^+ = R$. Обозначим длину отрезка $AR = z$, угол^{***} $\angle AR\gamma_1^+ = \alpha(z)$, где γ_1^+ — луч геодезической γ_1 с началом в точке $R \in l_2^+$ и такой, что γ_1^+ параллельна l_1^+ . Пусть в замкнутой области $D_z = \{l_1^+ AR\gamma_1^+\}$ с границей $\partial D_z = l_1^+ \cup AR \cup \gamma_1^+$ кривизна метрики (1) ограничена сверху константой κ_0 , где $\kappa_0 < 0$.

Пусть $\Pi_{\kappa_0}(z)$ — функция Лобачевского для плоскости, кривизна которой равна κ_0 .

Справедливо утверждение:

Теорема 1. При сформулированных условиях в области D_z справедливо неравенство

$$\alpha(z) \leq \Pi_{\kappa_0}(z). \quad (2)$$

При сформулированных выше условиях справедлива следующая

Теорема 2. Функция $\alpha(z)$, приведенная в теореме 1, монотонно убывает.

Далее для любых двух геодезических линий справедлива

* А. Д. Александров называет его (см. (4)) сферическим избытком.

** В работе (4) евклидова плоскость считается частным случаем плоскости Лобачевского.

*** Понятие угла понимается обычным образом (см. (2)).

Теорема 3. Для произвольных геодезических h_1 и h_2 существует такая точка $O_1 \in h_1$, что луч h_{12}^+ , проходящий через эту точку параллельно h_2^+ , составляет с лучом h_1^+ неострый угол.

То есть $\angle h_1^+ O_1 h_{12}^+ \geq \frac{\pi}{2}$.

Теорема 4. Пусть h_1 и h_2 — произвольные геодезические в метрике (1), $O_1 \in h_1^+$ — отвечающая теореме 3 точка, Ω_1^* — орицикл с центральным лучом h_1^+ , проходящий через точку O_1 . Пусть точка O_2 принадлежит „верхней“^{***} части орицикла Ω_1^* . Тогда, если из точки O_1 и O_2 проведены лучи h_{12}^+ , h_1^+ и h_{22}^+ параллельно соответственно h_2^+ , h_1^+ и h_2^+ , то $\angle h_1^+ O_1 h_{12}^+ = \angle h_{21}^+ O_2 h_{22}^+$.

Следствие 1. Пусть Ω^* орицикл с центральным лучом l^+ и $l^+ \cap \Omega^* = p$. Пусть точки $p_1, p_2 \in \Omega^*$ находятся в одной полуплоскости определенными l , длина дуги pp_1 орицикла Ω^* меньше длины дуги pp_2 , q_1^+, q_2^+ — центральные лучи орицикла, проходящие через p_1 и p_2 соответственно. Тогда $\angle c_2 p_2 q_2^+ < \angle c_1 p_1 q_1^+$, где $p_i c_i, i=1, 2$, — отрезки геодезических, проходящих через точки $p_i, i=1, 2$ и ортогональны l^+ .

Теорема 5. Пусть h_1^+, h_2^+, Ω_1^* и $O_1 = \Omega_1^* \cap h_1$ определены как в теореме 4. Тогда существует (притом единственный) орицикл с центральным лучом h_2^+ , который касается^{**} орицикла Ω_1^* .

Из этой теоремы вытекает очень важное следствие:

Следствие 2. Для любых геодезических h_1 и h_2 существует единственная геодезическая h_3 , которая параллельна выбранным лучам на прямых h_1 и h_2 .

Доказательство основной теоремы. Сначала приведем доказательство существования произвольных бесконечных многоугольников в метрике (1).

1) Пусть Γ — произвольная кривая (геодезическая линия или регулярная кривая с ограниченной геодезической кривизной) в метрике (1). Кривая Γ разбивает метрику на две части, которые назовем полуплоскостями. Возьмем произвольное разбиение кривой Γ с помощью точек $\xi_i \in \Gamma$, где $i \in I$, а J — множество, вообще говоря, не счетное. В каждой точке $\xi_i \in \Gamma$ проведем геодезическую, ортогональ-

* Часть орицикла Ω_1^* , которая расположена в ту же сторону от h_1 , что и h_2^+ , назовем „верхней“ частью

** Будем говорить, что два орицикла касаются в точке M , если в этой точке существует единственная опорная геодезическая. Здесь под опорной геодезической понимается следующая опорной геодезической кривой L называется геодезическая, содержащая по меньшей мере одну точку кривой L , но не разделяющая никаких двух ее точек (см. (3)).

ную Γ , которую обозначим h_i . Из теории дифференциальных уравнений следует, что геодезические $h_i, i \in J$ определяются однозначно (дифференциальное уравнение геодезических — уравнение второго порядка). Геодезические h_i и $h_j, i, j \in J$ назовем ближайшими, если между точками $\xi_i, \xi_j \in \Gamma$ нет других точек разбиения. Из свойства функции $\bar{v}(x, y)$ следует, что в указанной полуплоскости, определяемой кривой Γ , не могут быть и параллельные и расходящиеся геодезические пары $h_{i'}, h_{j'},$ где $i', j' \in J$.

Согласно следствию 2, для ближайших геодезических $h_i, h_j, i, j \in J$, вообще говоря, в обеих полуплоскостях кривой Γ существуют так называемые общие параллельные $\delta_{ij}^1, \delta_{ij}^2, \delta_{ij}^3, i, j \in J, \alpha = 1, 2$, параллельные h_i и h_j . Здесь индекс $\alpha = 1, 2$ показывает принадлежность прямых δ_{ij}^α верхней или нижней полуплоскостям, порожденным кривой Γ соответственно. Множество, граница которого состоит из полных геодезических $\delta_{ij}^\alpha, i, j \in J, \alpha = 1, 2$, очевидно, будет той выпуклой областью, о которой говорится в определении бесконечных многоугольников.

2) Докажем, что существуют бесконечные многоугольники, принадлежащие классам M_1 и M_2 .

Пусть множество J конечное или счетное и разбиение Γ точками $\xi_i \in \Gamma, i \in J$ такое, что нижняя грань длины дуг $\xi_i \xi_j$ больше нуля. Здесь $\xi_i = h_i \cap \Gamma, \xi_j = h_j \cap \Gamma$, а h_i и h_j ближайшие геодезические. Очевидно, $\xi_i \xi_j$ есть проекция геодезической $\delta_{ij}^\alpha, i, j \in J, \alpha = 1, 2$ на кривую Γ . Построение многоугольников БМ, принадлежащих к классу M_1 и классу M_2 , очевидно.

Из этой теоремы и из понятия БМ, введенного в начале работы, следует несколько замечаний.

З а м е ч а н и е 1. *Существуют БМ, для которых не каждая сторона имеет соседнюю.*

Примерами таких многоугольников могут служить многоугольники, содержащиеся в полуплоскости.

З а м е ч а н и е 2. *Существуют БМ, любая сторона которых не имеет соседнюю.*

З а м е ч а н и е 3. *Любой БМ с конечным числом сторон принадлежит к классу M_1 и классу M_2 одновременно.*

З а м е ч а н и е 4. *Множества M_1 и M_2 различные, т. е. имеются БМ $\in M_1$ и не принадлежащие M_2 , и наоборот.*

Степанакертский филиал
Ереванского политехнического института

Անվերջ բազմանկյունների գոյությունը երկչափ փոփոխական բազասական կուրվյալի շափերում

Այս աշխատանքում դիտարկվում է փոփոխական կորույթուն

$$ds^2 = dx^2 + B^2(x, y) dy^2 \quad (1)$$

որոշ ոչ կամպակտ ուռուցիկ տիրույթների գոյությունը էվկլիդեսյան եռաչափ տարածություններում՝ E^3 -ում: Դիտարկվող տիրույթները աշխատանքում կոչվում են անվերջ բազմանկյուններ: Անվերջ բազմանկյունները երկչափ հաստատուն բազասական կորույթյան բազմաձևություններում (Հորաշևեթի հարթություններում) միշտ գոյություն ունեն: Հողվածում բերվում են մի շարք օժանդակ թեորեմներ (առանց ապացույցների), որոնք անհրաժեշտ են աշխատանքի հիմնական թեորեմի ապացուցման համար: Այդ թեորեմների ապացույցը բերվում է հողվածում, ձևակերպվում է այսպես:

Հիմնական թեորեմ: (1) շափում գոյություն ունեն անվերջ բազմանկյուններ պատկանող M_1 և M_2 դասերին:

Նշենք, որ հողվածում արվում է M_1 և M_2 դասերի սահմանումները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 Э. Г. Позняк. Мат. сб., т. 102, № 1, с. 3—12 (1977). 2 Г. Буземан. Геометрия геодезических, Мир, М., 1962. 3 Е. В. Шиким. Изометрические погружения в E^3 некомпактных областей неположительной кривизны. Докт. дис., М., 1976. 4 А. Д. Александров, ДАН СССР, т. 47, № с. 239—242 (1945). 5 Э. Карган. Геометрия римановых пространств. ОНТИ НКТП СССР, М., 1936.

УДК 517.51

Ф. А. Талалаян

Об одном свойстве абсолютной непрерывности векторных полей

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. А. Талалаяном 17/XII 1990)

В (1,2) введены и изучены понятия обобщенно абсолютной непрерывности по Каратеодори и обобщенно абсолютной непрерывности по Витали для функций многих переменных. В настоящей работе мы рассматриваем векторные поля, обобщенно абсолютно непрерывные в заданной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. С помощью результатов работ (1) и (2) доказывается, что указанные векторные поля обладают в рассматриваемой области Ω слабой дивергенцией и при этом для почти всех сегментов $J \subset \Omega$ имеет место формула Гаусса—Грина. Здесь «для почти всех сегментов $J \subset \Omega$ » означает следующее: для всех сегментов $J \subset \Omega$, вершины которых принадлежат заданному множеству полной меры в Ω .

Всюду в дальнейшем будем пользоваться обозначениями (2), а также введем еще одно. Если n, k, i_1, \dots, i_k — целые, $\varpi_1, \dots, \varpi_k$ — действительные числа, причем $n > 1, 1 < k \leq n-1, 1 < i_1 < \dots < i_k \leq n$ и $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то через $(x)_{\varpi_1, \dots, \varpi_k}^{i_1, \dots, i_k}$ мы обозначим точку из \mathbb{R}^n , полученную из x заменой каждой координаты x_{i_j} на $\varpi_j, j = 1, \dots, k$.

Наконец, в следующем определении и далее, символом $\int_{\partial J} G$ обозначен поверхностный интеграл от векторного поля G по границе ∂J сегмента J .

Определение. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n, n > 1$, и $G = (G_1, \dots, G_n)$ — векторное поле в Ω . G называется обобщенно абсолютно непрерывным в Ω , если существует множество $E \subset \Omega$ с $\mu_n(\Omega \setminus E) = 0$, обладающее следующим свойством: для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что каково бы ни было конечное семейство $\{J_k: k = 1, \dots, l\}$ попарно неперекрывающихся n -мерных сегментов $J_k \subset \Omega$, с вершинами из E и с суммой мер

$$\sum_{k=1}^l \mu_n(J_k) < \delta,$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^l \left| \int_{\partial J_k} \mathbf{G} \right| < \varepsilon.$$

\mathbf{G} называется локально обобщенно абсолютно непрерывным в Ω , если \mathbf{G} обобщенно абсолютно непрерывно в каждой ограниченной области Ω_0 с замыканием $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$.

Имеет место следующая

Теорема. Пусть векторное поле $\mathbf{G} = (G_1, \dots, G_n)$ локально интегрируемо и локально обобщенно абсолютно непрерывно в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Тогда \mathbf{G} обладает слабой дивергенцией $\operatorname{div} \mathbf{G} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, причем для почти всех сегментов $J \subset \Omega$ выполняется равенство

$$\int_{\partial J} \mathbf{G} = \int_J \operatorname{div} \mathbf{G} d\mu_n. \quad (1)$$

В том случае, когда \mathbf{G} обобщенно абсолютно непрерывно в Ω , $\operatorname{div} \mathbf{G} \in L^1(\Omega)$.

Для удобства мы разобьем доказательство данной теоремы на следующие четыре шага.

(а) Для любого замкнутого n -мерного сегмента $J \subset \Omega$ существуют функция $f_J \in L^1(J)$ и множество $M_J \subset \Omega$ с $\mu_n(J \setminus M_J) = 0$ такие, что для каждого сегмента $J' \subset J$ с вершинами из M_J имеет место равенство

$$\int_{\partial J'} \mathbf{G} = \int_{J'} f_J d\mu_n. \quad (2)$$

(б) Существуют единственная функция $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ и множество $M \subset \Omega$ с $\mu_n(\Omega \setminus M) = 0$ такие, что для каждого замкнутого n -мерного сегмента $J \subset \Omega$ с вершинами из M имеет место равенство

$$\int_{\partial J} \mathbf{G} = \int_J f d\mu_n. \quad (3)$$

(в) Если \mathbf{G} обобщенно абсолютно непрерывно в Ω , то $f \in L^1(\Omega)$.

(г) f есть слабая дивергенция \mathbf{G} в Ω .

Доказательство (а). Пусть задан сегмент $J \subset \Omega$ и s есть его вершина с минимальными координатами. Определим на J функцию F следующим образом:

$$F(x) = \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} \int_{r^l([s, x])} G_l((w)_{x_l}) d\mu_{n-1}(r^l(w)), \quad w \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Тогда рассматривая произвольный сегмент $J = [a, b] \subset I$ с $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$ и полагая для каждой его вершины v , $\tau(v) = \{l: v_l = b_l\}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\partial J} G &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{r^i(J)} G_i((w)_{b_i}^l) d\mu_{n-1}^l(r^i(w)) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \int_{r^i(J)} G_i((w)_{a_i}^l) d\mu_{n-1}^l(r^i(w)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \times \\ &\times \sum_{\substack{1 \leq k_1, \dots, k_l \leq n \\ k_1, \dots, k_l \neq i}} \int_{r^l\left(\left[c, (b)_{a_{k_1}, \dots, a_{k_l}}^{k_1, \dots, k_l} \right]\right)} G_i((w)_{b_i}^l) d\mu_{n-1}^l(r^l(w)) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \sum_{\substack{1 \leq k_1, \dots, k_l \leq n \\ k_1, \dots, k_l \neq i}} \int_{r^l\left(\left[c, (b)_{a_{k_1}, \dots, a_{k_l}}^{k_1, \dots, k_l} \right]\right)} G_i((w)_{a_i}^l) d\mu_{n-1}^l(r^l(w)) = \\ &= \sum_v \left[\sum_{l \in \tau(v)} (-1)^{l-1+q(v,a)} \int_{r^l([c,v])} G_i((w)_{b_i}^l) d\mu_{n-1}^l(r^l(w)) + \right. \\ &\left. + \sum_{l \in \tau(v)} (-1)^{l+q(v,a)+1} \int_{r^l([c,v])} G_i((w)_{a_i}^l) d\mu_{n-1}^l(r^l(w)) \right] = \\ &= \sum_v (-1)^{q(v,a)} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{r^i([c,v])} G_i((w)_{v_i}^l) d\mu_{n-1}^l(r^i(w)) = \\ &= \sum_v s(v; J) F(v) = \Delta_n(F; J). \end{aligned}$$

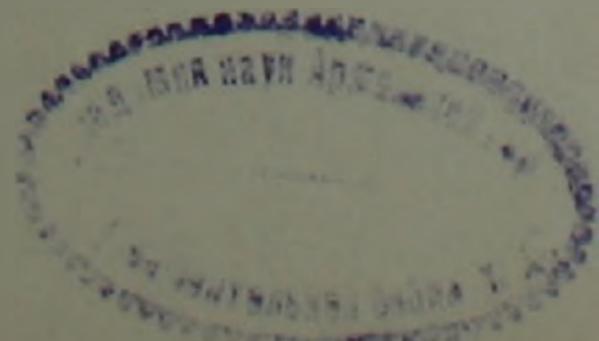
Таким образом доказано равенство

$$\int_{\partial J} G = \Delta_n(F; J) \tag{5}$$

для каждого сегмента J , содержащегося в I .
 В силу условия теоремы в равенстве (5) функция F обобщенно абсолютно непрерывна по Витали на I . Теперь существование f_l и M_l следует из теоремы 1 работы (2) при $\Omega = I$.

Доказательство (б). Представим Ω в виде

$$\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k, \tag{6}$$



где каждое Q_k есть замкнутый n -мерный двоичный куб, причем различные Q_k не перекрываются и каждое компактное подмножество Ω покрывается объединением конечного числа кубов Q_k . Пусть для каждого k f_{Q_k} и $M_{Q_k} \subset \text{Int}(Q_k)$ построены согласно (5). Положим

$$f(x) = f_{Q_k}(x) \quad \text{при } x \in Q_k. \quad (7)$$

Возьмем множество $E \subset \Omega$ с $\mu_n(\Omega \setminus E) = 0$ так, чтобы для каждой ограниченной области Ω_0 с замыканием $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ множество $\Omega_0 \cap E$ удовлетворяло условию обобщенно абсолютной непрерывности в Ω_0 векторного поля G . Удалив из $E \cap (\cup Q_k)$ подходящее множество нулевой меры, можно построить множество M такое, что

$$M \subset E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_{Q_k} \right), \quad \mu_n(\Omega \setminus M) = 0 \quad (8)$$

$$\text{и } M_i^t = \emptyset \quad \text{или} \quad \mu_{n-1}(\Omega_i^t \setminus M_i^t) = 0 \quad (9)$$

для каждого $i = 1, \dots, n$ и действительного числа t .

Построенные f и M удовлетворяют утверждению (6). Очевидно, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ и $\mu_n(\Omega \setminus M) = 0$. Проверим равенство (3). Пусть $J \subset \Omega$ — замкнутый n -мерный сегмент с вершинами из M . Для каждого $\delta > 0$, выбирая m настолько большим, чтобы

$$J \subset \bigcup_{k=1}^m Q_k,$$

и воспользовавшись условиями (8) и (9), сегмент J можно представить в виде конечного объединения попарно неперекрывающихся сегментов

$$J = \left(\bigcup_{i=1}^p J'_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^q J''_i \right) \quad (10)$$

так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) каждый сегмент J'_i содержится в некотором кубе Q_k , $k \leq m$, и его вершины принадлежат соответствующему множеству M_{Q_k} ;

2) вершины каждого сегмента J'_i принадлежат множеству E и

$$\sum_{i=1}^p \mu_n(J'_i) < \delta. \quad (11)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы оно удовлетворяло условию локальной обобщенно абсолютной непрерывности в Ω векторного поля G и чтобы при $A \subset J$ и $\mu_n(A) < \delta$ выполнялось неравенство

$$\left| \int_A f d\mu_n \right| < \varepsilon. \quad (12)$$

Для выбранного $\delta > 0$, построив разложение (10), в силу (2), (7)–(12) будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial J} \mathbf{G} - \int_I f d\mu_n \right| &\leq \left| \sum_{l=1}^p \int_{\partial J_l} \mathbf{G} - \sum_{l=1}^p \int_{J_l} f d\mu_n \right| + \\ &+ \left| \sum_{l=1}^q \int_{\partial J_l^*} \mathbf{G} \right| + \left| \int_{\cup J_l^*} f d\mu_n \right| \leq 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (13)$$

В силу произвольности ε из (13) получим (3).

Доказательство (в). Пусть область Ω ограничена и векторное поле \mathbf{G} обобщенно абсолютно непрерывно в Ω . Представим Ω в виде объединения счетного числа попарно неперекрывающихся сегментов с вершинами из M :

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k.$$

Положим

$$\Omega_m = \bigcup_{k=1}^m J_k; \quad m = 1, 2, \dots$$

Имеем

$$\left| \int_{\Omega_q} f d\mu_n - \int_{\Omega_p} f d\mu_n \right| = \left| \sum_{k=p+1}^q \int_{J_k} f d\mu_n \right| = \left| \sum_{k=p+1}^q \int_{\partial J_k} \mathbf{G} \right|. \quad (14)$$

Так как $\mu_n(\Omega_p) \rightarrow \mu_n(\Omega)$ при $p \rightarrow \infty$, то из (14) следует, что предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m} f d\mu_n$$

существует и конечен для любой последовательности областей Ω_m указанного вида. Отсюда следует интегрируемость f на Ω .

Доказательство (г). Требуется доказать равенство

$$\int \mathbf{G} \nabla \varphi d\mu_n = - \int f \varphi \mu_n, \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega) \quad (15)$$

Здесь мы следуем рассуждениям (3). Пусть Ω' — ограниченная область, содержащая носитель φ с замыканием $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. Возьмем некоторую положительную функцию $\rho \in C_0^{\infty}$ с носителем, содержащимся в единичном шаре, для которой

$$\int \rho d\mu_n = 1$$

и для каждого положительного $t < \text{dist}(\bar{\Omega}', \partial\Omega)$ положим

$$\rho_t(x) = \frac{1}{t^n} \rho\left(\frac{x}{t}\right).$$

Далее, определим f_i и G_i на Ω' следующим образом:

$$f_i = f * \rho_i; \quad G_i = (G_1 * \rho_i, \dots, G_n * \rho_i).$$

В силу (3) и теоремы Фубини для каждого замкнутого сегмента $J \subset \Omega'$ с вершинами из M имеем

$$\begin{aligned} \int_J f_i d\mu_n &= \int_J \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \rho_i(y) d\mu_n(y) \right) d\mu_n(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{J-y} f d\mu_n \right) \rho_i(y) d\mu_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\partial(J-y)} G \right) \rho_i(y) d\mu_n(y). \end{aligned} \quad (16)$$

С другой стороны, применяя формулу Гаусса—Грина и теорему Фубини, получим

$$\int_J \operatorname{div} G_i d\mu_n = \int_J G_i = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\partial(J-y)} G \right) \rho_i(y) d\mu_n(y). \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует, что для каждого сегмента $J \subset \Omega'$

$$\int_J \operatorname{div} G_i d\mu_n = \int_J f_i d\mu_n,$$

откуда

$$\operatorname{div} G_i = f_i \text{ в } \Omega'. \quad (18)$$

Теперь из (18) и теоремы Фубини следует

$$\begin{aligned} \int f \varphi d\mu_n &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int f_i \varphi d\mu_n = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int \operatorname{div} G_i \varphi d\mu_n = \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int G_i \nabla \varphi d\mu_n = - \int G \nabla \varphi d\mu_n. \end{aligned}$$

Институт прикладных проблем физики
Академии наук Армении

Յ. Ա. ՔԱՎԱՅԱՆ

Վեկտորական դաշտերի բացարձակ անընդհատության որոշ
հատկության մասին

Դիտարկված են որոշակի ընդհանրացված իմաստով բացարձակ անընդ-
հատ վեկտորական դաշտեր n -չափանի տիրույթներում: Ստացված է, որ
նշված դաշտերը ունեն թույլ դիվերգենցիաներ, և որ նրանք բավարարում են
Գաուս-Գրինի բանաձևին համարյա բոլոր սեգմենտների համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 А. А. Талалян, Ф. А. Талалян, Изв. АН АрмССР, Мат., т. 24, № 1, с. 3—21 (1989)
2 Ф. А. Талалян, Изв. АН АрмССР, Мат., т. 26, № 2 (1991). 3 Г. Bagby,
W. P. Ziemer, Trans. Amer. Math. Soc., v. 191, p. 129—148 (1974)

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Э. А. Даниелян, Г. С. Мовсисян, К. Р. Таталян

Обобщение теоремы Каратеодори

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. А. Талаляном 20/XII 1990)

1. *Теорема о представлении.* Пусть X — локально-выпуклое пространство, M — выпуклое компактное подмножество X . Тогда M имеет хотя бы одну крайнюю точку ((¹), с. 85).

Понятие крайней точки может быть обобщено.

Определение 1. Точка $x \in M$ называется k -крайней точкой множества M , $k \geq 1$, если не существуют аффинно-независимые точки x_1, \dots, x_{k+1} из M и положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ такие, что

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1} = 1, \quad x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+1}. \quad (1)$$

Иными словами, x — k -крайняя точка M , если не существует принадлежащего M k -мерного симплекса, для которого x — внутренняя точка.

Если $E_k M$ — множество k -крайних точек, то по определению $E_1 M$ — множество крайних точек M .

Цель настоящей заметки — доказать теорему о представлении k -крайних точек.

Пусть $s > 1$ и $n_1 \geq 1, \dots, n_s \geq 1$ такие целые числа, что $n_1 + \dots + n_s = k$.

Теорема 1. Пусть M — выпуклое компактное множество локально-выпуклого пространства. Для любой точки $x \in E_k M$, $k > 1$, найдутся попарно-различные точки $x_1 \in E_{n_1} M, \dots, x_s \in E_{n_s} M$ и неотрицательные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ такие, что $\lambda_1 + \dots + \lambda_s = 1$ и

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_s x_s.$$

Сформулируем следствие этой теоремы. Именно, любая точка $x \in E_k M$, $k > 1$, представима в виде выпуклой комбинации не более чем k крайних точек M .

Следствие даже в \mathbb{R}^n уточняет теорему Каратеодори ((²), с. 169).
 Теорема Каратеодора. Пусть S — замкнутое ограниченное выпуклое множество в \mathbb{R}^n . Любая точка $x \in S$ ($x \in \partial S$) пред-

ставима в виде выпуклой линейной комбинации не более чем $n+1$ (не более чем n) крайних точек S .

Для сравнения последнего факта и его уточнения полезна

Лемма 1. Пусть S — замкнутое ограниченное выпуклое множество в R^n . Тогда:

$$1. \partial S = E_n S.$$

$$2. \text{Int } S = E_{n+1} S \setminus E_n S.$$

Доказательство. Пусть $x \in \partial S$. Если $x \notin E_n S$, то существует n -мерный симплекс, целиком лежащий в S и содержащий x как внутреннюю точку, т. е. $x \in \text{Int } S$. Итак, $\partial S \subset E_n S$.

Пусть $x \in E_n S$. Покажем $x \in \partial S$. Допустим $x \in \text{Int } S$, т. е. существует n -мерный шар с центром в точке x , целиком лежащий в S . Без ограничения общности положим $x = O = (0, 0, \dots, 0)$. Точки шара

$$x_1 = (0, 0, \dots, r), \dots, x_n = (r, 0, \dots, 0), \quad x_{n+1} = \left(-\frac{r}{\sqrt{n}}, \dots, -\frac{r}{\sqrt{n}} \right)$$

радиуса r аффинно-независимы.

Действительно, аффинное представление точки O ($a_1 + \dots + a_{n+1} = 0$)

$$O = a_1 x_1 + \dots + a_{n+1} x_{n+1}, \quad (2)$$

записанное в координатной форме

$$\left(\left(a_n - \frac{a_{n+1}}{\sqrt{n}} \right) r, \left(a_{n-1} - \frac{a_{n+1}}{\sqrt{n}} \right) r, \dots, \left(a_1 - \frac{a_{n+1}}{\sqrt{n}} \right) r \right) = O, \quad (3)$$

приводит к равенствам $a_1 = \dots = a_{n+1} = 0$.

Выпуклое линейное представление (2) точки O , согласно (3), дает

$$a_1 = \dots + a_{n+1} = 1, \quad a_1 = \dots = a_n = \frac{a_{n+1}}{\sqrt{n}},$$

откуда

$$a_1 = \dots = a_n = \frac{1}{n + \sqrt{n}}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1 + \sqrt{n}}.$$

Для точки O найдено представление (2) с положительными коэффициентами, где x_1, \dots, x_{n+1} из S аффинно-независимы, т. е. $x \notin E_n S$. Итак, $E_n S \subset \partial S$.

2. Поскольку в R^n любые $n+2$ точки аффинно-зависимы, то $S = E_{n+1} S$. Тогда пункт 1 леммы 1 влечет пункт 2 леммы 1.

Преимущество теоремы 1 перед теоремой Каратеодори иллюстрируется примером.

Пример. Пусть S — n -мерный шар в R^n . По определению k -крайней точки

$$E_1 S = \dots = E_n S = \partial S, \quad E_{n+1} S = S.$$

Непосредственно видно, что $x \in \partial S$, будучи крайней точкой, сама себя представляет, а $x \in \text{Int } S$ представляется выпуклой линейной

комбинацией двух крайних точек. Это заключение вытекает из теоремы 1, но не из теоремы Каратеодори.

2. *Свойства k -крайних точек.* Начнем с замечания. $x \in E_k M$, $k \geq 1$, означает существование аффинно-независимых точек x_1, \dots, x_{k+1} из ∂M и положительных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ таких, что выполнено (1).

Действительно, пусть выполнено (1) с точками x_1, \dots, x_{k+1} из M . Если, например, $x_1 \in \partial M$, то из-за $x \neq x_1$ через точки x и x_1 проходит единственная прямая. Пусть y_1 точка пересечения этой прямой с ∂M такая, что x_1 — внутренняя точка отрезка с концами x и y_1 . Тогда найдется $\alpha \in (0, 1)$ такое, что $x_1 = \alpha x + (1 - \alpha)y_1$. Подставив значение x_1 в (1), получим представление $x = (1 - \alpha\lambda_1)^{-1} (\lambda_1(1 - \alpha) \times \lambda y_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+1})$ с положительными коэффициентами, сумма которых равна единице, а точки y_1, x_2, \dots, x_{k+1} аффинно-независимы, $y_1 \in \partial M$.

Приведем три свойства k -крайних точек.

Свойство 1. $E_1 M \subseteq E_2 M \subseteq \dots$ (4)

Действительно, пусть (4) не имеет места. Найдутся $k \geq 1$ и $x \in E_k M$ такие, что $x \notin E_{k+1} M$. Тогда существуют аффинно-независимые точки y_1, \dots, y_{k+2} из M и положительные числа μ_1, \dots, μ_{k+2} такие, что $\mu_1 + \dots + \mu_{k+2} = 1$ и $x = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_{k+2} y_{k+2}$. Полагая $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_k = \mu_k, \lambda_{k+1} = 1 - \mu_1 - \dots - \mu_k, x_{k+1} = \lambda_{k+1}^{-1} \mu_{k+1} y_{k+1} + \lambda_{k+1}^{-1} \mu_{k+2} y_{k+2}$ приходим к представлению (1). При этом $x_{k+1} \in M$ из-за выпуклости M , а точки x_1, \dots, x_{k+1} аффинно-независимы. Следовательно $x \in E_{k+1} M$.

Свойство 2. Если $M \setminus E_k M \neq \emptyset$ для некоторого $k \geq 1$, то $E_k M \subseteq \partial M$.

Действительно, пусть существует $y \in E_k M$ такое, что $y \in \text{Int} M$. Для точки $x \in M \setminus E_k M$ имеет место (1), где $x_1, \dots, x_{k+1} \in \partial M$, причем x отлично от y, x_1, \dots, x_{k+1} . Проведем прямую через точки x и y и выберем ту ее точку пересечения z с ∂M , при которой y — внутренняя точка отрезка с концами x и z . Тогда найдется $\beta \in (0, 1)$ такое, что

$$y = \beta x + (1 - \beta)z, \quad z \in \partial M. \quad (5)$$

Проведем прямые через точки z и x_1, \dots, x_{k+1} и возьмем точки

$$z_l = \beta x_l + (1 - \beta)z, \quad l = \overline{1, k+1}. \quad (6)$$

на этих прямых. Точки z_1, \dots, z_{k+1} аффинно-независимы, поскольку таковы точки x_1, \dots, x_{k+1} . Из (1), (5), (6) выводим $y = \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_{k+1} z_{k+1}$, откуда следует $y \in E_k M$.

Пусть $x \in E_k M \setminus E_{k-1} M$. Это, в частности, означает, что существуют аффинно-независимые точки y_1, \dots, y_k из M и положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ такие, что $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1, x = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_k y_k$.

В приложении доказывается важное

Свойство 3. Пусть

$$V = V(y_1, \dots, y_k) \stackrel{\text{def}}{=} \{z: z = a_1 y_1 + \dots + a_k y_k, a_1 + \dots + a_k = 1\}$$

Тогда

$$E_n(M \cap V) \subset E_n M \quad n = \overline{1, k-1}. \quad (7)$$

С помощью свойства 3 устанавливается теорема о представлении которую достаточно доказать при $s = 2$.

Действительно, пусть теорема имеет место при $s = 2$. Тогда для точки $x \in E_k M$ существует представление $x = \mu_1 x_1 + (1 - \mu_1) y_1$, где $\mu_1 \in [0, 1]$, $x_1 \in E_n M$, $y_1 \in E_{k-n} M$; для y_1 — представление $y_1 = \mu_2 x_2 + (1 - \mu_2) y_2$, где $\mu_2 \in [0, 1]$, $x_2 \in E_n M$, $y_2 \in E_{k-n_1-n_2} M$ и т. д.; для y_{s-2} — представление $y_{s-2} = \mu_{s-1} x_{s-1} + (1 - \mu_{s-1}) y_{s-1}$, где $\mu_{s-1} \in E_{n_{s-1}} M$, $y_{s-1} \in E_n M$. Полагая $x_s = y_{s-1}$ и

$$\lambda_i = \mu_i \cdot \prod_{j=1}^{i-1} (1 - \mu_j), \quad i = \overline{1, s-1}, \quad \lambda_s = \prod_{j=1}^{s-1} (1 - \mu_j),$$

приходим к утверждению теоремы.

Для точки $x \in E_k M$ случай $x \in E_1 M$ тривиален, поскольку в теореме такое x представляется через самого себя (см. свойство 1).

Остальные случаи при $s = 2$ сводятся к утверждению.

Для любой точки $x \in E_k M \setminus E_{k-1} M$, $k > 1$, и любого n , $1 \leq n < k$, найдутся $\lambda \in (0, 1)$, $x_1 \in E_n M$, $x_2 \in E_{k-n} M$ такие, что

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2. \quad (8)$$

Действительно, случай $x \in E_k M$, $k > 1$, для которого существует s , $1 < s < k$, такое, что $x \in E_{s-1} M$, $x \in E_s M$, очевидно, сводится к нашему утверждению.

Приступим к доказательству утверждения.

Так как $x \notin E_{k-1} M$, то существуют аффинно-независимые точки y_1, \dots, y_k из ∂M и положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ такие, что $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ и

$$x = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_k y_k. \quad (9)$$

Представление (8) для точки x строим следующим образом. Полагая $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, рассмотрим точки

$$x_1 = \lambda^{-1} (\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n), \quad x_2 = (1 - \lambda)^{-1} (\lambda_{n+1} y_{n+1} + \dots + \lambda_k y_k),$$

откуда следует (8) с $\lambda \in (0, 1)$. Далее

$$x_1 \in \text{Int}(M \cap V(y_1, \dots, y_n)), \quad x_2 \in \text{Int}(M \cap V(y_{n+1}, \dots, y_k)).$$

Следовательно

$$x_1 \in E_n(M \cap V(y_1, \dots, y_n)), \quad x_2 \in E_{k-n}(M \cap V(y_{n+1}, \dots, y_k))$$

и по свойству 3 имеем $x_1 \in E_n M$, $x_2 \in E_{k-n} M$.

Приложение. Доказательству свойства 3 предположим две леммы.

Лемма 2. Пусть для $x \in E_k M$ имеет место (9). Тогда любой n -мерный симплекс, $1 \leq n < k$, с вершинами M , содержащий x как внутреннюю точку, целиком лежит в $V(y_1, \dots, y_n)$.

Доказательство. Для точки $x \in E_k M$ найдутся $\beta \in (0, 1)$, $x', x'' \in M$ такие, что

$$x = \beta x' + (1 - \beta) x'', \quad (10)$$

поскольку $x \in E_{k-1} M$ и, как следствие, $x \in E_1 M$.

Представления типа (10) можно получить из (9) так, как это делается в конце 2.

Случай $n = 2$ означает, что в любом представлении (10) точки $x', x'' \in V$.

Из этого утверждения следует лемма 2.

Действительно, пусть для $x \in E_k M$ и некоторого n , $1 < n \leq k$, имеет место представление

$$x = \mu_1 z_1 + \dots + \mu_n z_n,$$

где точки z_1, \dots, z_n из M аффинно-независимы, положительные числа μ_1, \dots, μ_n таковы, что $\mu_1 + \dots + \mu_n = 1$.

Покажем, например, что $z_1 \in V$. Полагая $\beta = \mu_1$, $x' = z_1$, $x'' = (1 - \beta)^{-1} (\mu_2 z_2 + \dots + \mu_n z_n)$, приходим к условиям случая $n = 2$.

Перед доказательством случая $n = 2$ сделаем два замечания.

Замечание 1. Представления (9) и (10) эквивалентны представлению: при всех $t \in [0, 1]$

$$x = t\beta x' - (1 - t)(\lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_k y_k) = t(1 - \beta) x'' + (1 - t)\lambda_1 y_1. \quad (11)$$

Замечание 2. Пусть имеют место (9) и (10), причем $x' \in V$. Тогда существуют a_1^0, \dots, a_k^0 такие, что $a_1^0 + \dots + a_k^0 = 1$ и $x' = a_1^0 y_1 + \dots + a_k^0 y_k$. Согласно (9) и (10)

$$x'' = \frac{\lambda_1 - \beta a_1^0}{1 - \beta} y_1 + \dots + \frac{\lambda_k - \beta a_k^0}{1 - \beta} y_k \in V,$$

поскольку

$$(1 - \beta)^{-1} (\lambda_1 - \beta a_1^0 + \dots + \lambda_k - \beta a_k^0) = 1.$$

Таким образом, либо $x', x'' \in V$, либо $x', x'' \in M \setminus V$.

Доказательство случая $n = 2$ введем от противного. Пусть $x', x'' \in M \setminus V$. Тогда точки

$$x', y_1, \dots, y_n \quad \text{аффинно-независимы,} \quad (12)$$

$$x', x'', y_1, \dots, y_n \quad \text{аффинно-зависимы.}$$

Первое утверждение есть следствие включения $x' \in M \setminus V$, второе получается приравниванием правых частей (9) и (10).

Покажем существование такого $\gamma_0 \in (0, 1]$, что точки

$$x', \gamma_0 x'' + (1 - \gamma_0) y_1, y_2, \dots, y_k \text{ аффинно-независимы.} \quad (13)$$

Действительно, пусть при всех $\gamma \in (0, 1]$ точки

$$x', \gamma x'' + (1 - \gamma) y_1, y_2, \dots, y_k \text{ аффинно-зависимы.} \quad (14)$$

Аффинная оболочка точек x', y_1, \dots, y_k замкнута, а при $\gamma \rightarrow 0$ в (14) приходим к аффинной зависимости точек x', y_1, \dots, y_k , что противоречит (12). Итак, имеет место (13).

Выберем t в представлении (11) и найдем такое θ , чтобы выполнялось равенство

$$t(1 - \beta)x'' + (1 - t)\lambda_1 y_1 = \theta \gamma_0 x'' + \theta(1 - \gamma_0) y_1. \quad (15)$$

Имеем

$$t = \frac{\lambda_1 \gamma_0}{\lambda_1 \gamma_0 + (1 - \beta)(1 - \gamma_0)}, \quad \theta = \frac{\lambda_1 (1 - \beta)}{\lambda_1 \gamma_0 + (1 - \beta)(1 - \gamma_0)}. \quad (16)$$

Легко установить: $\min(\lambda_1, 1 - \beta) \leq \theta \leq \max(\lambda_1, 1 - \beta)$. Отсюда и из $\gamma_0, \beta \in (0, 1)$ следует $t, \theta \in (0, 1)$.

Из (11) и (15) находим представление

$$x = t\beta x' + \theta(\gamma_0 x'' + (1 - \gamma_0) y_1) + (1 - t)\lambda_2 y_2 + \dots + (1 - t)\lambda_k y_k$$

точки x через $k + 1$ аффинно-независимых точек (13) с положительными коэффициентами. В силу $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ и (16) сумма этих коэффициентов равна единице. Пришли к противоречию с тем, что $x \in E_k M$.

Лемма 3. Пусть для $x \in E_k M$ имеет место (9). Любой n -мерный симплекс, $1 < n \leq k$, с вершинами из M , содержащий точку $y \in M \cap V(y_1, \dots, y_k)$ как внутреннюю точку, целиком лежит в $V(y_1, \dots, y_k)$.

Доказательство. Случай $n = 2$ означает: в любом представлении точки $y \in M \cap V$

$$y = \varepsilon y' + (1 - \varepsilon) y'', \quad \varepsilon \in (0, 1), \quad y', y'' \in M \quad (17)$$

точки $y', y'' \in V$.

Из этого утверждения следует лемма 3. Действительно, пусть для $y \in M \cap V$ имеет место представление $y = \mu_1 z_1 + \dots + \mu_n z_n$, где $z_1, \dots, z_n \in M$ и аффинно-независимы, а положительные числа μ_1, \dots, μ_n таковы, что $\mu_1 + \dots + \mu_n = 1$.

Полагая $\varepsilon = \mu_1$, $y' = z_1$, $y'' = (1 - \varepsilon)^{-1} (\mu_2 z_2 + \dots + \mu_n z_n)$, из утверждения в случае $n = 2$ получаем $z_1 \in V$ и т. д.

Замечание 3. Так как $y \in V$, то для y существует аффинное представление через точки y_1, \dots, y_k . Используя это представление в (17), аналогично замечанию 2 получаем, что в любом представлении точки $y \in M \cap V$ типа (17), либо $y', y'' \in V$, либо $y', y'' \in M \setminus V$.

Доказательство случая $n = 2$ ведем от противного. Пусть в представлении (17) $y', y'' \in M \setminus V$ и $y \neq x$. Через точки x и y проведем прямую и обозначим через u ту ее точку пересечения с границей симплекса с вершинами y_1, \dots, y_k , при которой x есть внутренняя точка отрезка с концами y и u . Тогда существует представление

$$x = \delta y + (1 - \delta)u, \quad \delta \in (0, 1).$$

Точки $x' = \delta y' + (1 - \delta)u$ и $x'' = \delta y'' + (1 - \delta)u$ принадлежат множеству $M \setminus V$, так как в противном случае точки $y' = \delta^{-1}x' - (1 - \delta)\delta^{-1}u$ и $y'' = \delta^{-1}x'' - (1 - \delta)\delta^{-1}u$ принадлежали бы множеству $M \cap V$. Для x с представлением (9) налицо новое представление $x = \delta x' + (1 - \delta)x''$, где $\delta \in (0, 1)$ и $x', x'' \in M \setminus V$. Последнее противоречит утверждению леммы 2 при $n = 2$, согласно которому $x', x'' \in V$. Следовательно, $y', y'' \in V$.

Доказательство свойства 3 основано на лемме 3. Допустим, свойство 3 не имеет места.

Итак, точки y_1, \dots, y_k из M аффинно-независимы; имеется точка $y \in M \cap V(y_1, \dots, y_k)$, которая при некотором n , $1 < n < k$, принадлежит $E_n(M \cap V(y_1, \dots, y_k))$, но $y \notin E_n M$. Так как $y \in E_n M$, то существует n -мерный симплекс с вершинами z_1, \dots, z_{n+1} из M , содержащий y как внутреннюю точку. В силу леммы 3 точки $z_1, \dots, z_{n+1} \in V$. Следовательно, имеется n -мерный симплекс с вершинами z_1, \dots, z_{n+1} из $M \cap V$, содержащий y как внутреннюю точку. Последнее эквивалентно включению $y \in E_n(M \cap V)$. Полученное противоречие доказывает свойство 3.

Ереванский государственный университет

Է. Ա. ԳԱՆԻԵԼՅԱՆ, Գ. Ս. ԿՈՎՍԵՍՅԱՆ, Կ. Ի. ԽԱԲԱՅԱՆ

Կարգաբեռնողի քննության ընդհանրացումը

Հոկալ ուղղակի տարածության կոմպակտ M ենթարազմութիան համար մտցվում է K -ծայրակետի գաղափարը, որն ընդհանրացնում է ծայրակետի գաղափարը: Ապացուցված է M բազմութիան k ծայրակետը, $k > 1$, ներկայացվում է M -ի ոչ ավելի քան k հատ ծայրակետերի ուղղակի գծային կոմբինացիայի տեսքով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 У. Рудин. Функциональный анализ, Мир, М., 1975. 2 Р. Рокафеллар. Выпуклый анализ, Мир, М., 1973.

УДК 539.3.01

Л. А. Агаловян, А. Б. Товмасян

О смешанной краевой задаче для анизотропной термоупругой полосы

(Представлено чл.-корр. АН Армении Б. Л. Абрамяном 18/XII 1990)

Краевые задачи теории упругости для полосы являются сингулярно возмущенными. В работе (1) найдена асимптотика напряжений и перемещений в случае первой краевой задачи (на продольных краях заданы напряжения) и предложен эффективный асимптотический метод определения всех искомым величин, установлена связь с теорией балок Бернулли—Кулона—Эйлера, а также с принципом Сен-Венана. Асимптотический метод оказался эффективным также при решении второй и третьей краевых задач как для однослойной, так и для многослойных полос (2, 3). При этом была доказана неприменимость гипотезы плоских сечений для решения этого класса задач. Установленная для искомым величин асимптотика оказалась принципиально отличной от асимптотики тех же величин в первой краевой задаче. Тем же методом решены соответствующие пространственные краевые задачи для анизотропных пластин и оболочек (4, 5).

В данной работе получено асимптотическое решение смешанных термоупругих задач для анизотропной полосы, возникающих, в частности, при рассмотрении взаимодействия фундамента сооружения с основанием. Считается, что на одной из продольных кромок полосы заданы нормальная компонента вектора перемещения и касательное напряжение, моделирующее, например, трение, а на другой—условия первой или смешанных краевых задач. На полосу действуют объемные силы, в качестве которых могут выступать вес фундамента и приведенные сейсмические силы. Считается, что полоса может быть подвергнута температурным воздействиям, изменение температурного поля по ширине полосы является произвольной, но известной функцией.

1. Требуется найти решение плоской задачи термоупругости в области $\Omega = \{(x, y): x \in [0, a], |y| \leq h, h \ll a\}$.

На лицевых кромках $y = \pm h$ заданы условия

$$v(-h) = \varepsilon^{-1} v^-(x), \quad \sigma_{xy}(-h) = \sigma_{xy}^-(x), \quad (\varepsilon = h/a) \quad (1.1)$$

$$\sigma_y(h) = \varepsilon^{-1} \sigma_y^+(x), \quad \sigma_{xy}(h) = \sigma_{xy}^+(x). \quad (1.2)$$

На полосу действуют заданные объемные силы с компонентами $F_x(x, y)$, $F_y(x, y)$ и температурные воздействия, изменение температурного поля $\theta(x, y) = T - T_0$ считается известной функцией. На торцах $x = 0$, а будем считать, что заданы статические, кинематические или смешанные краевые условия теории упругости. Чтобы решить поставленную краевую задачу, в уравнениях и соотношениях термоупругости перейдем к безразмерным переменным $\xi = x/a$, $\zeta = y/h$ и в качестве искомым величин выберем напряжения и безразмерные перемещения $U = u/a$, $V = v/a$. В результате получаем следующую сингулярно возмущенную малым параметром ε систему:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \zeta} + a F_x = 0;$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial \tau}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \xi} + a F_y = 0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{16} \tau_{xy} + a_{11} \theta; \quad (1.3)$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} = a_{22} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{26} \tau_{xy} + a_{22} \theta;$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} = a_{36} \sigma_x + a_{36} \sigma_y + a_{36} \tau_{xy} + a_{32} \theta,$$

где a_{ij} — упругие коэффициенты податливости, a_{ib} — коэффициенты теплового расширения.

Решение системы (1.3) складывается из решения внутренней задачи (проникающее решение) и пограничного слоя (6). Проникающее напряженно-деформированное состояние отыщем в виде

$$Q = \varepsilon^{q_1+s} Q^{(s)}, \quad s = \overline{0, N}, \quad (1.4)$$

где Q — любое из напряжений и перемещений, q_1 — целые числа, которые должны быть такими, чтобы получить непротиворечивую систему относительно $Q^{(s)}$. Эта цель достигается лишь при

$$q = -1 \text{ для } (\sigma_x, \sigma_y, U, V), \quad q = 0 \text{ для } \sigma_{xy}. \quad (1.5)$$

Вклад объемных сил и температурных воздействий в общее напряженное состояние будет соизмеримым со вкладом поверхностных сил, если

$$F_x = \varepsilon^{-1+s} a^{-1} F_x^{(s)}(\xi, \zeta), \quad F_y = \varepsilon^{-2+s} a^{-1} F_y^{(s)}, \quad (1.6)$$

$$\theta = \varepsilon^{-1+s} \theta^{(s)}, \quad s = \overline{0, N}.$$

Укажем, что найденная асимптотика (1.5) принципиально отличается от асимптотик напряжений и смещений по классической теории балок и второй краевой задачи, установленных в (1-3).

Подставив (1.4) в (1.3), с учетом (1.5), (1.6) получим систему относительно $Q^{(s)}$, решив которую, получим:

$$V^{(s)} = v^{(s)}(\xi) + v^{*(s)}(\xi, \zeta), \quad U^{(s)} = u^{(s)}(\xi) + u^{*(s)}(\xi, \zeta);$$

$$\sigma_y^{(s)} = \sigma_{y0}^{(s)}(\xi) + \sigma_y^{*(s)}(\xi, \zeta); \quad \sigma_x^{(s)} = \frac{1}{a_{11}} \frac{du^{(s)}}{d\xi} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \sigma_{x0}^{(s)} + \sigma_x^{*(s)}(\xi, \zeta); \quad (1.7)$$

$$\sigma_{xy}^{(s)} = -\frac{1}{a_{11}} \frac{d^2 u^{(s)}}{d\xi^2} \zeta + \frac{a_{12}}{a_{11}} \sigma_{yv}^{(s)} \zeta + \sigma_{xy0}^{(s)}(\xi) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, \zeta).$$

где:

$$v^{*(s)} = \int_0^\zeta (a_{22} \sigma_y^{(s-1)} + a_{12} \sigma_x^{(s-1)} + a_{20} \sigma_{xy}^{(s-2)} + a_{22} \theta^{(s-1)}) d\zeta;$$

$$u^{*(s)} = \int_0^\zeta \left(a_{10} \sigma_x^{(s-1)} + a_{20} \sigma_y^{(s-1)} + a_{00} \sigma_{xy}^{(s-2)} + a_{22} \theta^{(s-1)} - \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) d\zeta;$$

$$\sigma_y^{*(s)} = -\int_0^\zeta \left(F_y^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-2)}}{\partial \xi} \right) d\zeta, \quad \sigma_{xy}^{*(s)} = -\int_0^\zeta \left(F_x^{(s)} + \frac{\partial \sigma_x^{*(s)}}{\partial \xi} \right) d\zeta; \quad (1.8)$$

$$\sigma_x^{*(s)} = \frac{1}{a_{11}} \left(\frac{du^{*(s)}}{d\xi} - a_{12} \sigma_y^{*(s)} - a_{10} \sigma_{xy}^{(s-1)} - a_{11} \theta^{(s)} \right).$$

В (1.7) неизвестными являются функции $\sigma_{xy0}^{(s)}$, $\sigma_{y0}^{(s)}$, $u^{(s)}$, $v^{(s)}$, которые определяются из условий (1.1), (1.2) или из аналогичных смешанных условий. Условиям (1.1), (1.2) соответствуют

$$v^{(s)}(\xi) = v^{-(s)}/a - v^{*(s)}(\xi, -1); \quad \sigma_{y0}^{(s)}(\xi) = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(s)}(\xi, 1);$$

$$\sigma_{xy0}^{(s)} = \frac{1}{2} [\sigma_{xy}^{-(s)} + \sigma_{xy}^{+(s)} - \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, -1) - \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, 1)];$$

$$\frac{1}{a_{11}} \frac{d^2 u^{(s)}}{d\xi^2} = R^{(s)} \quad \text{или} \quad \frac{1}{a_{11}} u^{(s)} = \int_0^\xi \int_0^\xi R^{(s)} d\xi d\xi + C_1^{(s)} \xi + C_2^{(s)}; \quad (1.9)$$

$$R^{(s)} = \frac{1}{2} (\sigma_{xy}^{-(s)} - \sigma_{xy}^{+(s)}) - \frac{1}{2} (\sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, -1) - \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, 1)) +$$

$$+ \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{d}{d\xi} (\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(s)}(\xi, 1));$$

$$\sigma_{xy}^{\pm(0)} = \sigma_{xy}^{\pm}, \quad \sigma_y^{+(0)} = \sigma_y^+, \quad v^{-(0)} = v^-;$$

$$\sigma_{xy}^{\pm(s)} = \sigma_y^{+(s)} = v^{-(s)} = 0; \quad s \neq 0.$$

Таким образом, формулами (1.4) — (1.9) полностью определяются величины внутреннего напряженного состояния. При полиномиальном

нагружении это решение становится точным решением для бесконечной полосы.

Решение (1.4) — (1.9) содержит две произвольные постоянные, которые должны быть определены из условий при $x=0$, а. Если ограничиться только решением внутренней задачи, эти условия могут быть удовлетворены лишь интегрально. Для поточечного их удовлетворения необходимо построить также решение типа пограничного слоя. Погран-слой строится как в (7).

2. В качестве иллюстрации полученных результатов приведем решение внутренней задачи весомой ортотропной полосы, которое соответствует условиям

$$\begin{aligned} \sigma_y(h) = -p^+ = \text{const}, \quad \sigma_{xy}(h) = \tau^+ = \text{const}, \\ \sigma_{xy}(-h) = \tau^- = \text{const}, \quad v(-h) = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Имеем $F_x = 0$, $F_y = -\rho g$. Итерация обрывается на втором приближении. В результате имеем решение:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\tau^- - \tau^+) \frac{x}{2h} + \frac{a_{12}}{a_{11}} \left[p^+ + \rho gh \left(1 - \frac{y}{h} \right) \right] + C_1; \\ \sigma_y &= \rho g (y - h) - p^+; \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{2} (\tau^- + \tau^+) - (\tau^- - \tau^+) \frac{y}{2h}; \\ u &= a_{11} (\tau^- - \tau^+) \frac{x^2}{4h} + \frac{1}{2} a_{66} \left[(\tau^- + \tau^+) y - (\tau^- - \tau^+) \frac{y^2}{2h} \right] + \\ &\quad + a_{11} (C_1 x + a C_2); \\ v &= \frac{a_{11} a_{12} - a_{12}^2}{a_{11}} (y + h) \left[\frac{1}{2} \rho g (y - h) - (p^+ + \rho gh) \right] + \\ &\quad + a_{12} (y + h) \left[C_1 + (\tau^- - \tau^+) \frac{x}{2h} \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В (2.2) постоянная интегрирования C_2 характеризует жесткое смещение, которое можно исключить, закрепив, например, центр тяжести сечения $x = 0$ ($U(x = 0, y = 0) = 0$, тогда $C_2 = 0$). Для определения же C_1 должно быть задано при $x = 0$ значение усилия, что обосновывается свойством погранслоя, или перемещение. Если

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_x dy = T^0 \quad \text{при } x = 0, \quad (2.3)$$

то

$$C_1 = \frac{T^0}{2h} - \frac{a_{12}}{a_{11}} (p^+ + \rho gh). \quad (2.4)$$

Из формул (1.4) — (1.9) можно получить замкнутые решения и для других случаев полиномиального нагружения полосы.

Институт механики
Академии наук Армении

Լ. Ա. ԱԴԱԼՈՎՅԱՆ, Ա. Ք. ԹՈՎՄԱՍՅԱՆ

Անիզոտրոպ շերտաառածգական շերտի խառը եզրային խնդրի մասին

Առածգականության տեսության եզրային խնդիրները շերտի համար հանդիսանում են սինգուլյար գրգռված: Առաջին և երկրորդ եզրային խնդիրների համար (1,2) աշխատանքներում առաջարկված է լուծման արդյունավետ ասիմպտոտիկ եղանակ և կապ է հաստատված ինչպես հեծանների դասական տեսության, այնպես էլ Սեն-Վենանի սկզբունքի հետ: Ներկա աշխատանքում որոշված է խառը եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը: Խնդիրը, մասնավորապես, մոդելավորում է առածգական հիմքի փոխազդեցությունը հիմնատակի հետ, երբ հաշվի է առնվում շփումը:

Ցույց է տրված, որ լարումների և տեղափոխումների ասիմպտոտիկ վարքը սկզբունքորեն տարբերվում է համապատասխան մեծությունների վարքից՝ ըստ հեծանների դասական տեսության:

Արտածված է հավասարում տանգենցիալ տեղափոխման նկատմամբ, որի լուծումով արտահայտվում են մյուս մեծությունները:

Ցույց է տրված, որ լայն դասի դեպքերի համար կարելի է ստանալ փակ լուծումներ, մի դեպքի համար բերվում է այդ լուծումը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 Л. А. Агаляян, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 30, № 5 (1977). 2 Л. А. Агаляян, Межвуз. сб. «Механика», изд. ЕГУ, вып. 2, 1982. 3 Л. А. Агаляян, Тр. XIII Всесоюзн. конф. по теории пластин и оболочек, Таллин, 1983. 4 Л. А. Агаляян, Р. С. Геворкян, ПММ, т. 50, вып. 2 (1986). 5 Л. А. Агаляян, Р. С. Геворкян, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 42, № 3 (1989). 6 А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, Наука, М., 1973. 7 Л. А. Агаляян, Межвуз. сб. «Механика», изд. ЕГУ, вып. 3, 1984.

ГЕОЛОГИЯ

УДК 551.24.05 551.7

М. А. Сатян

Зоны полициклического рифтогенеза и офиолитогенез
центрального сектора Мезотетиса

(Представлено академиком АН Армении А. А. Габриеляном 21/XII 1990)

Породы мезозойской офиолитовой ассоциации Мезотетиса слагают узкие и протяженные на тысячи километров зоны. В пределах Закавказья, помимо ранее известной Севанской (Севано-Акеринской), выявлены еще Вединская и Запгеzurская офиолитовые зоны (1-3). Происхождение и структурная позиция офиолитов широко дискутируются. Альтернативной гипотезе океанического происхождения и покровного размещения на континентальном обрамлении (4) является разработанная в 70-х г. применительно к области Мезотетис гипотеза внутриконтинентального офиолитогенеза (1, 5). Ее сущность — в ограниченном рифтогенезе до разрыва континентальной коры и проявлении мантийного диапиризма и базальтоидного вулканизма в обстановке внутриконтинентального рифтогенеза (офиолитовые трог). В этой схеме деформация офиолитового выполнения и возникновения чешуйчато-надвиговых структур параавтохтонного размещения на тектоническом подложье вблизи корневых зон связывается с региональной компресией. Современная позиция пород офиолитовой ассоциации в виде протяженных узких зон, как видно, в целом маркирует протяженность мезозойских офиолитовых трогов. Схема внутриконтинентального рифтогенеза удовлетворительно соответствует данным геологии сопредельных частей Передней Азии (3, 6-9), вместе с тем обнаруживается существенное их отличие от состава и структуры офиолитов «перипаравийского» шва и области центрального Средиземноморья (10-12) — главных зон развития офиолитовых крупных покровов.

Подчеркнем особенности геологии офиолитовых зон Закавказья и сопредельных пространств Передней Азии:

— Наличие двух возрастных интервалов развития кремнисто-вулканогенных толщ офиолитовой серии: позднеюрского-неокомского и альб-раннеконьякского, пространственная сопряженность их с выходами базит-ультрабазитового комплекса, с тектоническими между ними соотношениями в составе чешуйчато-надвиговых структур, местами

преобразованных в тектонический меланж; преобладание среди средне-меловых продуктов вулканизма субщелочных и щелочных базальтов, в верхах разреза появление трахиандезитов, трахитов и дацитов, напротив, более широкое развитие в позднеюрской-неокомской толще толеитов типа СОХ, но в атипичной для СОХ ассоциации с субщелочными и щелочными базальтами (¹³, ¹⁴).

—латеральные, вкрест простирания офиолитовых зон и вдоль них, вариации соотношений главных типов пород офиолитовой ассоциации, при очевидном преобладании в краевых разрезах зон менее глубоководных, а местами и достоверно мелководных вулканических и осадочных пород, с весьма малым развитием протрузий ультрабазитов;

—своеобразие офиолитовых разрезов каждой зоны—Севанской и Вединской—по соотношению объемов и сериальности вулканических продуктов, индексу эксплозивности, по размерам тел базит-ультрабазитового комплекса и соотношению внутри него ультрабазитов и габброидов, по парагенезам вулканических пород с силицитами, микрито-выми известняками (¹, ³, ¹⁵).

—низкий уровень регионального метаморфизма стратифицированных пород офиолитовой ассоциации: глубинный эпигенез, реже начальные ступени зеленосланцевого метаморфизма; слабое проявление в приразломных зонах глаукофанового метаморфизма, возраст которого постратнеконьякский и относится к этапу формирования надофиолитового чехла;

—в промежутках между офиолитовыми зонами по геолого-геофизическим данным развитие протяженных зон континентально-корового строения (Анкаван-Мегринская, Урц-Джюльфинская) с сокращенными в мощности и в целом осадочными типами разрезов позднего мезозоя (¹, ³). Особенности сейсмического разреза коры в офиолитовых зонах (¹).

Доказательством неоднократного в мезозое рифтогенеза континентальной коры служат также следующие новые данные. Это обнаружение в офиолитовом разрезе Севанской зоны фрагментов радиоляритово-известняковой толщи позднего триаса, включающих относительно глубоководные известняки с *Halobia nigra* Mois, содержащие вулканомиктовую примесь—эти отложения коррелируются с позднетриасовыми щелочными базальтами, известняками и радиоляритами в составе аякарского меланжа (¹⁶), а также с радиоляритово-вулканогенной толщей на севере центральной Анатолии (⁶); радиологические датировки (U/Pb по цирконам) диоритов офиолитовой серии Севанского хребта поздней юрой (162—160 млн. лет).

В Вединской зоне выявлены тектонические блоки позднеюрской-неокомской кремнисто-известняково-базальтовой толщи (щелочные высокститанистые базальты внутриплитовой обстановки) в составе позднемелового офиолитового меланжа хр. Ерах (¹⁷), здесь же обнаружены трубки взрыва, выполненные позднемеловыми туфами, сходными с лампроитовой серией, характерные для зон активизации краевых частей платформы. На западе зоны, в низовьях р. Ахурян параметрической

скважиной вскрыт разрез толентон, залегающих над мощным разрезом габбро офиолитовой серии, позднеюрского (?) возраста (18).

Отметим также обнаружение в офиолитовых разрезах редких блоков пород древнего метаморфического комплекса и платформенных известняков девона-перми, олистолитов кристаллических известняков с остатками кораллов неокома-поздней юры (не содержащих офиолитокластическую примесь), а также флишеидных глинисто-песчаных пород альб-сеномана. В совокупности это фрагменты континентальной и субконтинентальной коры, к которой относятся шельф офиолитовых трогов и поднятия и отмели, разобщавшие кулисовидно сочлененные частные впадины офиолитовых трогов.

Гораздо значительнее в разрезах позднемеловой офиолитовой ассоциации представлены, как отмечалось, тектонические блоки кремнисто-карбонатно-вулканогенной и кремнисто-вулканогенной толщ позднеюрского-неокомского возраста; последняя принадлежит офиолитовой серии и маркирует фрагменты пространственного совмещения, в известной мере, наследованного развития, разновозрастных офиолитовых трогов.

Итак, в офиолитовых зонах региона присутствуют вулканические и осадочные породы разных этапов рифтогенеза континентальной коры и новообразованной коры океанического типа. В Севанской зоне, наряду с кремнисто-вулканогенными толщами и ультрабазитовым комплексом позднеюрского-неокомского и среднемелового этапов, это образования предшествующего позднетриасового этапа рифтогенеза; в Вединской зоне предшествующей позднемезозойскому рифтогенезу является внутриплитово-рифтогенная щелочно-базальтовая толща лейаса долины Аракса, выступающая от с. Неграм до с. Азнаберд (19).

Этапы рифтогенеза и новообразования коры океанического типа сменяются, как видно, этапами компрессии и воссоздания коры континентального типа. Таков последовавший за позднеюрскими рифтогенезами этап относительной кратонизации в апте-раннем альбе (2), таковы же проявившиеся по всему Тетису сенонские движения (среднеземноморская фаза). Батские движения в конце средней юры в сопредельной Сомхето-Карабахской зоне выразились в формировании угленосных и наземно-вулканогенных толщ. Их корреляция с разрезами зон полициклического рифтогенеза, однако, остается наименее ясной.

Итак, чередование этапов растяжения и сжатия составляет главную особенность тектонического развития рассматриваемых зон. Геодинамическая обстановка такой контрастной последовательности движений вероятно была обусловлена прерывисто-непрерывным сближением Аравийской плиты со Скифской (юг Европейской плиты), возникновением в промежуточных плитах и их краях зон растяжения и сдвига, в сочетании с автономным проявлением мантийного диапиризма, как расклинивающего фактора, на фоне повышенной разогретости верхней мантии позднего мезозоя центрального сектора Мезотетиса.

В завершение подчеркнем значение зоны полициклического рифтогенеза—структур наивысшей иерархии региона по глубине своего заложения (связь с мантией) и масштабности, включающих большинство эпицентров катастрофических землетрясений, в тектоническом и сейсмотектоническом районировании (1, 2).

Институт геологических наук
Академии наук Армении

Մ. Ա. ՍԱԹՅԱՆ

ԿԵՂԻՒ ԲԱԳՄԱՅԻԿՅԱՅԻՆ ՌԻՖՏԱՌԱՋԱԳՄԱՆ ԳՈՆԱՆԵՔ Ե ՄԼՂՈՒՆԱՐԻՍԻ ԿԵՆՏՐՈՆԱԿԱՆ ԱԵԿՏՈՐԻ ՕՖԻՈՂԻՏԱԳՈՅԱԳՈՒՄ

Մշակված է ներքամաբային օֆիոլիտառաջացման վարկածը, որը ենթադրում է սահմանափակ ռիֆտագոյացում, մայրցամաքային կեղևի խզում, պատյանի դիապիրիզմ և բազալտային հրաբխականության առկայություն (1—3): Մինչ այժմ ուսումնասիրությունները ցույց են տվել, որ գոյություն ունեն վերին յուրա-ստորին կավճի և ալբ-վերին կավճի հասակի օֆիոլիտային հատվածքներ:

Հստ երկրաբանական-երկրաֆիզիկական տվյալների, օֆիոլիտային գոտիների միջանկյալ տարածքներում հանդես են գալիս մայրցամաքային-երկրակեղևային կառուցվածք ունեցող ձգված գոտիներ (Բազում-Կապանի, Հանքավան-Մեղրի, Ուրց-Ջուլֆա) ուղ մեղոզոյի, հիմնականում նստվածքային կտրվածքների սահմանափակ հզորություններով:

Մեղոզոյան մայրցամաքային կեղևի բազմակի ռիֆտագոյացումը հաստատվում է Սևանի գոտում վերջերս հայտնագործված ուղ տրիասի ռադիոլյարիտ-կրաքարային շերտախմբով:

Վեղու գոտում հայտնաբերված են ուղ յուրա-նեոկոմի կայծքարային-կրաքարային-բազալտային շերտախմբի տեկտոնական բեկորներ, որոնք առավել հստակ են անջատվում Երասի լեռնաշղթայի ուղ կավճի օֆիոլիտային մեյանժի կազմում:

Բազմափուլային ռիֆտառաջացման կառույցներն որպես ամենախորքային ստրուկտուրաներ՝ կապված պատյանի հետ, կարևորագույն նշանակություն են ստանում տեկտոնական և սեյսմատեկտոնական շրջանցման պարագայում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 М. А. Сатуян, Позднемеловой литогенез офиолитовых зон Армянской ССР (Малый Кавказ), Изд. АН АрмССР, Ереван, 1979.
- 2 А. Т. Асланян, М. А. Сатуян Изв. АН Арм ССР, Науки о Земле, т. 30, № 4—5, с. 13—26 (1977).
- 3 М. А. Сатуян, Офиолитовые прилибы Мезотетиса, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1984.
- 4 А. Л. Книппер, Океаническая кора в структуре Альпийской складчатой зоны юга Европы, западной части Азии и Кубы, Наука, М., 1975.
- 5 А. Т. Асланян, М. А. Сатуян, Тектонические условия становления офиолитовых зон, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1987.
- 6 R. Brinkmann, Geology of Turkey, Stuttgart, 1976.
- 7 E. Ilhan, in: Geology and History of Turkey Stuttgart, 1976.
- 8 И. Штеклин, Тр. 27-го МГК, Тектоника Азии, т. 5 М., 1984.
- 9 М. Davoudzadeh, Geol. Surv. Iran, Report, № 14 (1972).
- 10 В. Г. Казьмин,

- Л. Э. Риху, И. М. Сборщиков, в кн.: История океана Тетис. М., с. 39—58, 1987.
- 11 E. Abbe, V. Bertolotti, G. Principi, *Ophioliti*, v. 9, № 3, p. 245—278 (1984).
- 12 L. Vecchiava, G. Piccardo, G. Serri, *Ophioliti*, v. 4, № 1, p. 314—331 (1979). 13 G. Zakariadze, A. Knipper, A. Sobolev *et al.*, *Ophioliti*, № 3, p. 439—466 (1983). 14 О. П. Цамерян, Г. С. Закариадзе, А. В. Соболев, *Геодимия*, № 8, с. 1140—1157 (1988). 15 С. Б. Абовян, Мафит-ультрамафитовые интрузивные комплексы офиолитовых поясов Армянской ССР, Ереван, Изд. АН АрмССР, 1991. 16 U. Çarip, P. Floyd, *Ophioliti*, v. 10, № 1, p. 3—18 (1985). 17 М. А. Сатян, А. В. Варданян, Б. В. Бойнагрян, Изв. АН АрмССР. Науки о Земле, т. 42, № 6, с. 3—10 (1989). 18 В. А. Агамалян, Э. Н. Кургиян, Изв. АН АрмССР, Науки о Земле, т. 42, № 3, с. 13—19 (1989). 19 Ю. В. Карякин, Геодинамика формирования вулканических комплексов Малого Кавказа. М. Наука, 1989. 20 А. В. Варданян, П. Л. Мурадян, М. А. Сатян, Изв. АН АрмССР. Науки о Земле, т. 42, № 3, с. 13—19 (1989).

УДК 595.42

Ю. Р. Ханбегян, Е. В. Гордеева

Новый род *Fineorppia khosrovica* gen nov., sp. nov.
и два новых вида *Medioppia trilobata* sp. nov. и *Epimerella gubeni* sp. nov. семейства *Oppiidae* Grandjean, 1954 в Армении
(Acariformes, Oribatei)

(Представлено академиком АН Армении С. О. Мовсесяном 4/1 1990)

Семейство *Oppiidae* является одним из основных элементов орибатифауны Армении. На сегодняшний день в республике обнаружено более 40 видов клещей этого семейства.

Описываемый новый для науки род *Fineorppia khosrovica* gen. nov. на территории Армении не редок. Он обнаружен в Хосровском заповеднике (Арагатский р-н), в окрестностях пос. Лернапат (Гугярский р-н), пос. Цахкадзор (Разданский р-н) и пос. Хидзореск (Горисский р-н). *Epimerella gubeni* sp. nov. встречается значительно реже; этот вид найден в Хосровском заповеднике и в окрестностях г. Артик. *Medioppia trilobata* sp. nov. обнаружен только в окрестностях с. Лернапат и только в одной почвенной пробе.

Род *Fineorppia* gen. nov.

Типовой вид *Fineorppia khosrovica* sp. nov.

В ростральной части продорзума, более гладкой, чем основная поверхность, находится сложной формы углубление или перфорация. Край рострума направлен вниз и имеет два зубца. Кресты на продорзуме слабо лировидные. Имеются субламеллы с ростральными щетинками на концах. На сильно склеротизированном основании продорзума расположены 1—2 пары слабее склеротизированных участков. Ботридии бокаловидные, с отростком сзади. Трихоботрии гребневидные. Имеются короткие наружные кресты нотогастра, их концы располагаются напротив отростков ботридий. Щетинка t_a на переднем крае нотогастра короче остальных нотохет. Все нотогастральные щетинки простые, гладкие, длинные. Нотохет 10 пар, генитальных щетинок 5 пар, агенитальных 1 пара и аданальных 3 пары. Поры ia_1 в апоанальной позиции.

По наличию коротких крест нотогастра, форме костул, числу нотохет и генитальных щетинок новый род близок к роду *Oxuorppia*, но

отличается от этого рода формой роострума и наличием перфорации на рооструме, наличием склеротизированных полосок, прикрывающих хоксы ног, и расположением заднекрайних щетинок нотогастра. От родов *Coriporria*, *Ascorria*, *Striatopria* (см. (1, 2)) отличается формой нотогастральных щетинок, наличием латеральных склеротизированных полосок на вентральном щите и формой роострума. Роду присвоено название *Fineorria* (от английского слова fine) за особую элегантность и красоту его представителей.

Fineorria khosrovica sp. nov. (рис. 1а, б, в).

Голотип-самец, Армения, Араратский р-н, Хосровский заповедник, опад акации 24.06.86. Паратипы: 12 самцов и 15 самок вместе с голотипом. Голотип в коллекции Института зоологии АН Армении.

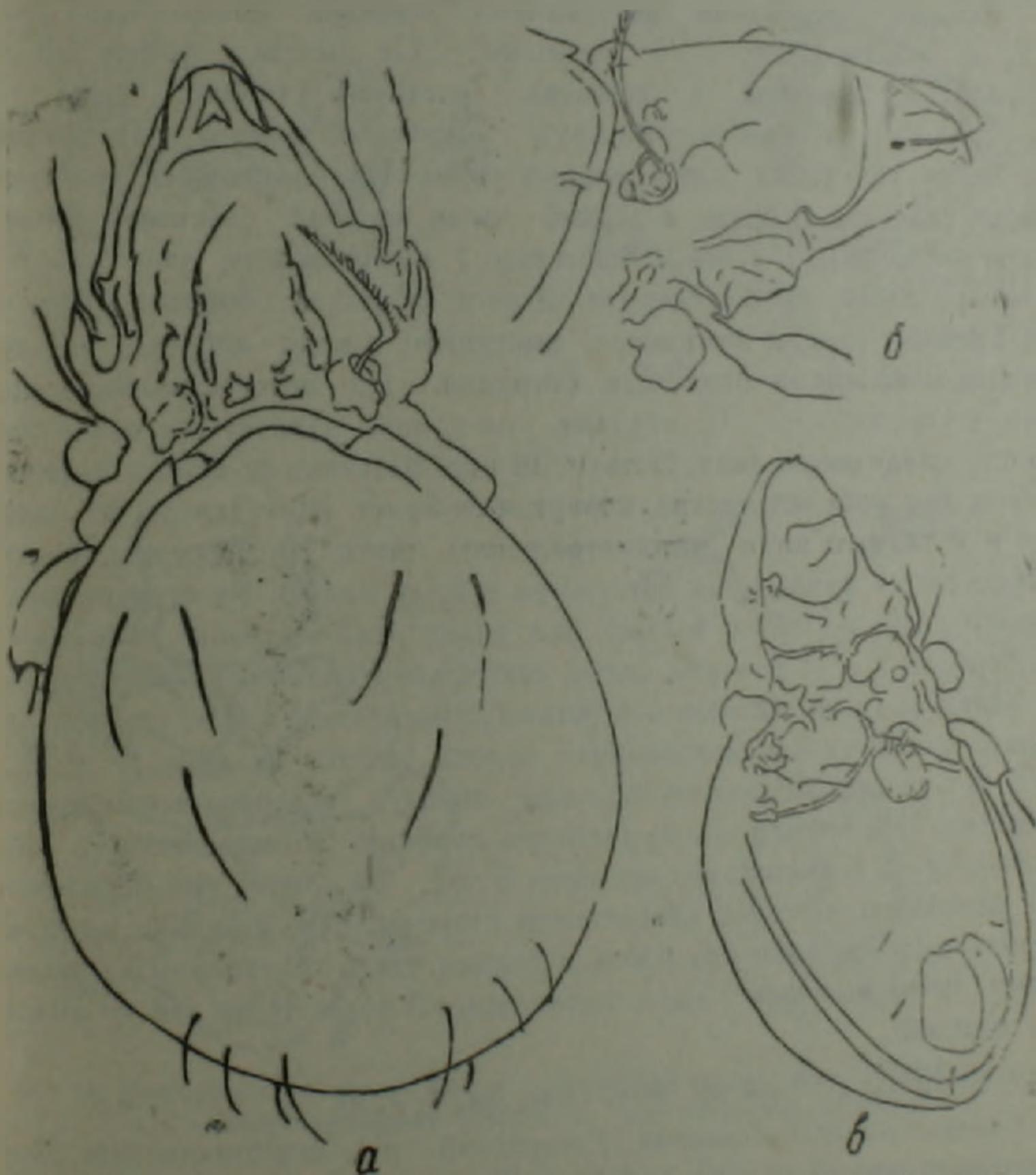


Рис. 1 *Fineorria khosrovica* gen. nov., sp. nov. а — дорсальная сторона; б — продорзум сбоку; в — вентральная сторона

Клещи коричневые, с гладким нотогастром, размерами 507,6 мк × 272,6 мк. Глубокие, лировидные костулы на продорзуме отходят от внут-

ренных сторон ботридий. Основание продорзума сильно склеротизировано, а в средней части его расположены 2 слабее склеротизированных участка. Ламеллярные щетинки располагаются на концах костул, по длине почти равны длине костул и больше расстояния между их основаниями. Интерламеллярные щетинки сидят на костулах с внутренней стороны ботридий. Ботридии с отростком на заднем крае, высокие, бокаловидные. Трихоботрии длинные, гребневидные, со слегка расширенной и заостренной на конце головкой. Интерламеллярные и экзоботридиальные щетинки вдвое короче и тоньше ламеллярных. Латеральнее ботридий, вдоль продорзума к роstrуму тянутся два склеротизированных гребня, на концах которых располагаются роstrальные щетинки. Роstrальные щетинки вдвое длиннее и толще ламеллярных. От уровня основания роstrальных щетинок поверхность продорзума склеротизирована сильнее. От места прикрепления роstrальных щетинок к вершине роstrума тянутся два грубых сходящихся гребня. Роstrум, округлый сверху, на самом деле имеет два зубца, направленных вниз. На поверхности роstrума имеется сквозная прорезь, в задней части которой отчетливо виден склеротизированный зубец. Педстекты I прилегающие, чешуевидные. Потогастр слегка сужен спереди. Дорсосягальная борозда стетлиная. Внешние кристы потогастра выступают в виде коротких зубцов, противопоставленных отросткам ботридий. Все потогастральные щетинки, кроме щетинок $1a$, длинные, их концы заходят за основания щетинок следующего ряда. Нотохет 10 пар. Щетинки $1a$ короткие, сидят на переднем крае потогастра, концами от крист. Щетинки ps_1 располагаются у заднего края потогастрального щита. Щетинки ps_2 , ps_3 , g_3 располагаются вдоль края потогастра в одну линию. Расстояние между щетинками ps_2 вдвое больше, чем длина этих щетинок. Эпимеральные борозды I и II развиты слабо, сеюгальная сильно склеротизирована. Балка над генитальным отверстием относительно слабо склеротизирована. Сильносклеротизированная полоса тянется от кокс IV к коксам I, в области сеюгальной борозды образуя с вентральным щитом отверстия. Все эпимеральные щетинки длинные. Эпимеральная формула 2—1—2—3. Генитальных щетинок 5 пар, по длине они не меньше всех остальных щетинок вентральной стороны. Три передние щетинки располагаются в один ряд вдоль передней части генитальных крышек. Агенитальных щетинок 1 пара, аданальных 3 пары. Поры iad по анальной позиции.

Mediopria trilobata sp. nov. (рис. 2a, б, в, г)

Голотип—самка, Армения, Гугаркский р-н, окрестности пос. Лернапат, лиственный лес, опад, 2/IX 1989. Паратипы: 2 самки и 1 самец вместе с голотипом. Голотип в коллекции Института зоологии АН Армении.

Светло-коричневые клещи с гладкими покровами, размерами 275,42 μ × 150,40 μ . Роstrум с тремя округлыми зубцами—средний

несколько больше боковых. Ростральные щетинки расположены недалеко от неглубоких прорезей, слегка расходящиеся, тонко опушены. Ламеллярные щетинки тонкие, в три раза короче расстояния между их основаниями, располагаются на продорзуме. Интерламеллярные щетинки тонкие, вдвое длиннее ламеллярных, располагаются на продольных туберкулах. Имеются слабо выраженные костулы, их проксимальные участки наклонны, отходят от внутренних сторон ботридий. Дистальные участки костул почти параллельны продольной оси тела, не

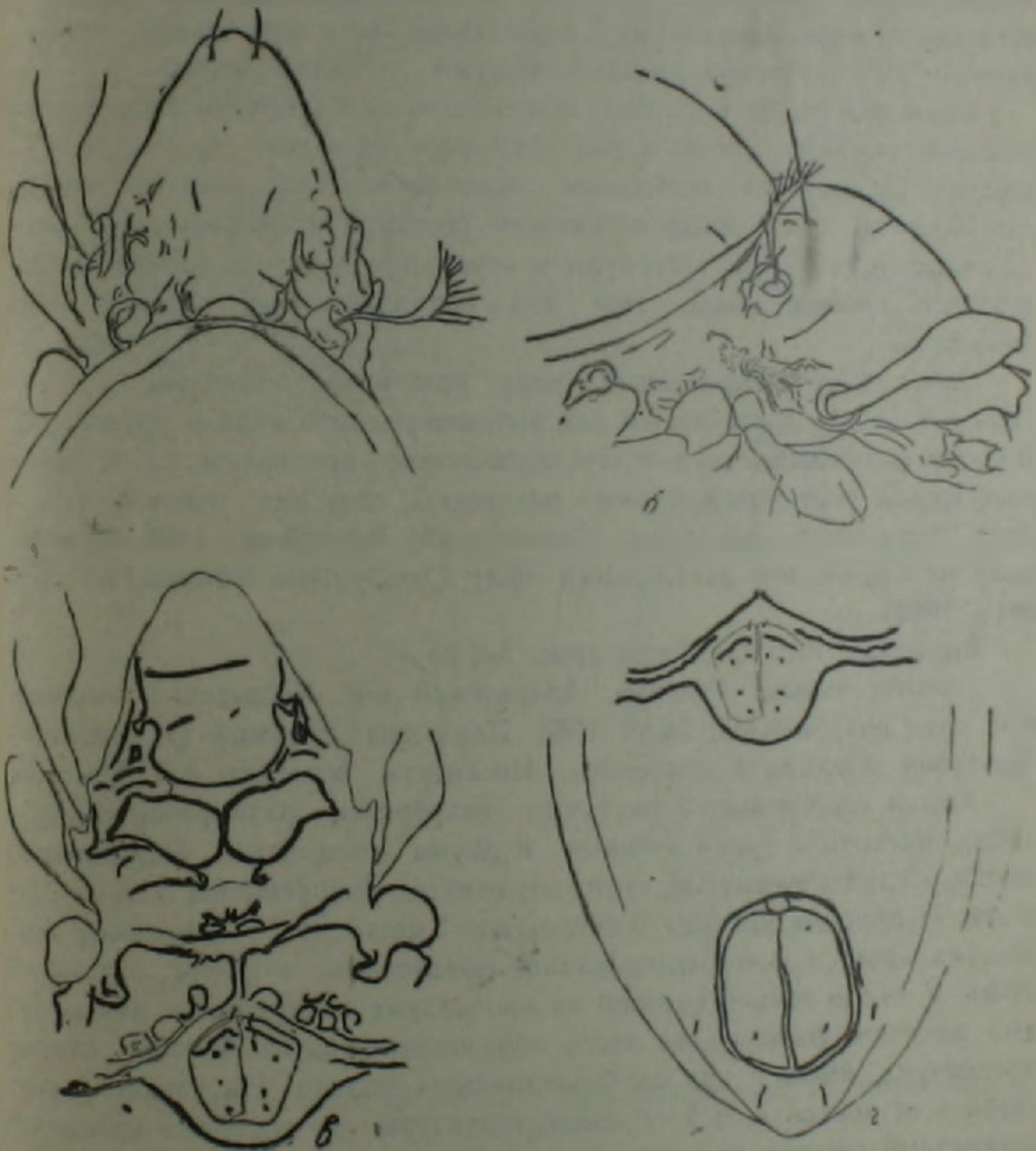


Рис 2. *Meliorpia trilobata* sp. по . а — продорзум сверху; б — продорзум сбоку; в — кокостеральная область; г — аногенитальная область.

соединяются с проксимальными участками. Костулы доходят до середины продорзума. Латеральное костул на продорзуме имеется несколько слабо склеротизированных участков неправильной формы. Ботридии с отростком на заднем крае, бокаловидные. Латеральное ботридий на небольших бугорках располагаются длинные экзоботридиальные щетинки.

тинки. Их длина больше длины ростральных щетинок. Трихоботрии гребневидные, слегка расширенная в основании и в средней части и чуть заостренная на конце. Головка по длине равна ножке. Наиболее длинные щетинки располагаются в основании головки и по длине втрое больше ее толщины. Педотекты I почти параллельны оси тела. Кресты широко овального нотогастра сверху не видны. Они слегка различимы сбоку. Нотохет: 10 пар. Все нотохеты короткие, щетинки Ia приближены к переднему краю нотогастра, той же длины, что и все нотохеты. Эпимеральная формула 2—1—2—3. Генитальных щетинок 6 пар, агенитальных 1 пара, аданальных 3 пары. Пору iad в аданальной позиции. Эпимеры IV с пологими редкими зубцами, дисцидий острый.

Mediopria trilobata sp. nov. отнесена нами к роду *Mediopria*, хотя согласно диагнозу Subias'a род *Mediopria* не имеет костул на продорзуме. Однако по остальным признакам, как хетотаксическим ($n=10$, $g=6$), так и морфологическим (рострум с зубцами, педотекты параллельны оси тела, туберкулы в основании оси тела имеются, трихоботрии гребневидные), этот вид подпадает под диагноз рода *Mediopria*.

Слабо склеротизированные, едва намеченные костулы не могут быть признаком, достаточным для выделения этого вида в другой род. По всем морфологическим и хетотаксическим признакам, за исключением формы роострума и формы педотект I, этот вид очень близок к виду *Stenopriella gomozovae* Gordecva & Karppinen, 1988, описанному из Крыма, и к кавказскому виду *Stenopriella zakhvatkini* (Кулиев, 1962).

Erlmerella rubeni sp. nov. (рис. 3а, б)

Голотип — самец, Армения, Араратский р-н, Хосровский заповедник, опад под акацией, 24/VI 1986. Паратипы: 2 самца (?) вместе с голотипом. Голотип в коллекции Института зоологии АН Армении.

Клещи коричневые, с гладкими покровами, размерами $493,5\mu \times 244,4\mu$. Роострум с тремя зубцами и двумя прорезями. Роостральные щетинки слегка изогнутые, густо опушенные, прикреплены позади прорезей. Настоящие костулы отсутствуют. Вместо них в основании продорзума имеется склеротизированное образование в форме латинской буквы V, около концов которой на продорзуме прикреплены ламеллярные щетинки. Латеральнее этого образования, вдоль боковых сторон продорзума, имеется два слабонеразличимых валика. На середине расстояния от концов этой V-образной структуры до роострума находится поперечный, слегка изогнутый вперед валик, отделяющий переднюю часть предорзума от центральной. Ламеллярные щетинки длиннее роостральных и равны по длине интерламеллярным и экзоботридиальным щетинкам. Все эти хеты густо опушены. Ботридии высокие, бокаловидные, с очень маленьким отростком сзади. Трихоботрии гребневидные, с очень слабо расширенной головкой. На боковых сторонах продорзума имеется несколько слабо склеротизированных участков неправильной формы. Гистеросома бочковидная, передний край сильно сужен и заострен спере-

ди. Нотогастральных щетинок 10 пар. Все они, кроме щетинки 1а, тонкие, длинные, отчетливо опушенные. Заднекрайние щетинки не намного короче остальных щетинок нотогастра. Щетинки 1а на переднем крае спинного щита очень короткие. Срединная связка между эпимерами II и сеюгальными отсутствует, между сеюгальными и IV—слабосклеротизирована. Имеется добавочная связка между сеюгальными и IV эпимерами. Дисцидий острый, со щетинкой на конце. Генитальных щетинок 5 пар, агенитальных 1 пара и аданальных—3 пары. Пору iad в аданальной позиции.

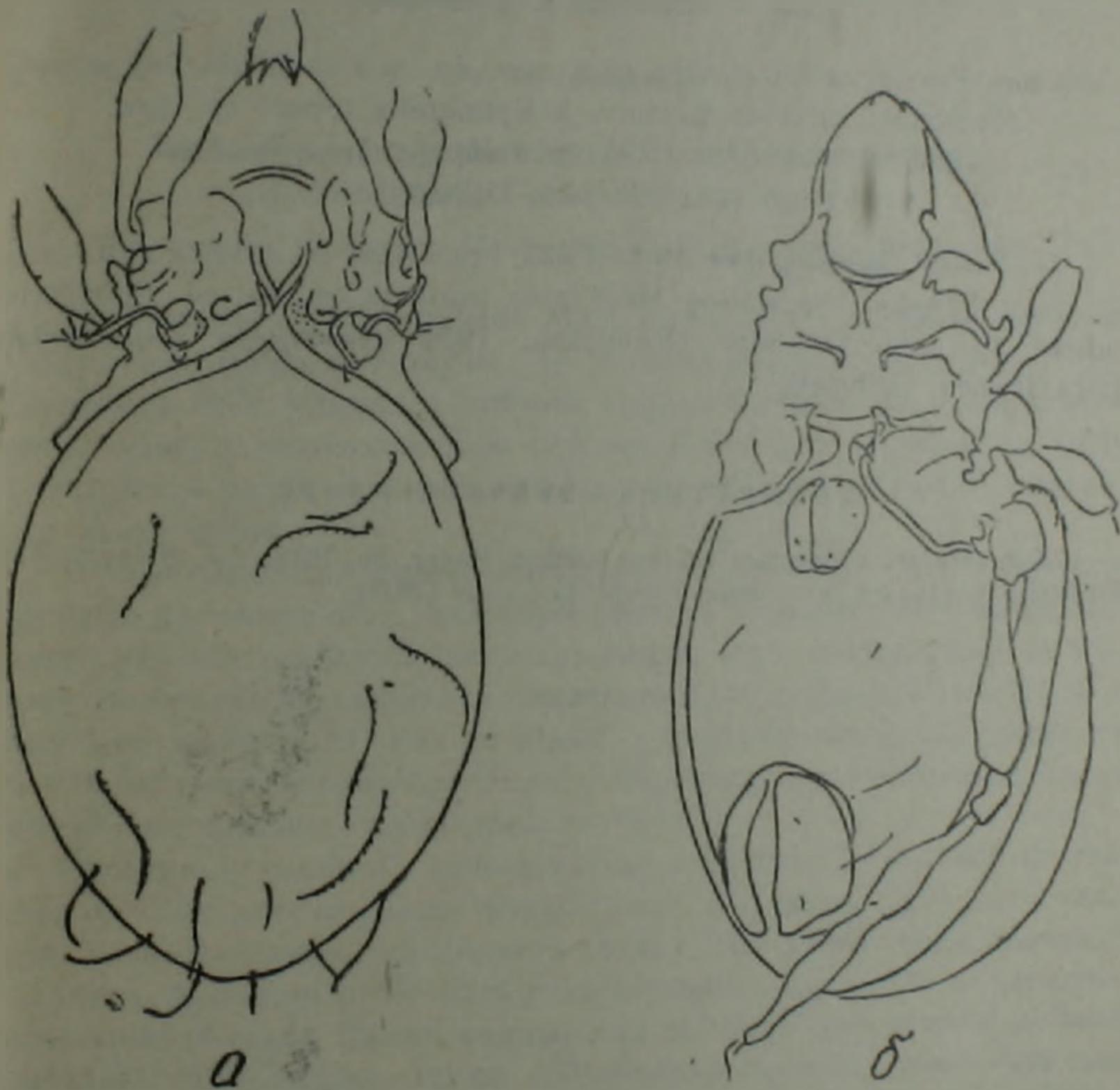


Рис. 3. *Epimerella rubeni* sp. nov. а — дорсальная сторона; д — вентральная сторона

Новый вид близок к виду *Epimerella smirnovi* и *E. smirnovi* var. *longisetosa*. Отличается от первого из них более развитой V-образной структурой на нотогастре, концы которой доходят до ламеллярных щетинок, присутствием поперечного ребрышка на середине продорзума, большей длиной экзоботридиальных и интерламеллярных щетинок, большей длиной заднекрайних щетинок и другими мелкими признаками. От *E. smirnovi* var. *longisetosa* отличается формой рострума.

отсутствием поперечного ребра на продорзуме, формой и размерами V-образной структуры в основании продорзума отсутствием склеротизированных связей между эпимерами I и II и II и сеюгальной.

Институт зоологии
Академии наук Армении
Институт почвоведения и фотосинтеза
Академии наук СССР

ՅՈՒ. Ռ. ԿԱՆՔԻՅԱՆ, Ե. Վ. ԳՈՐԴԵՆՎԱ

Նոր սեռ *Fineoppia khosrovica* gen. nov. sp. nov. և երկու նոր տեսակ
Medioppia trilobata sp. nov. և *Epimerella rubeni* sp. nov.
Opplidae Grandjean, 1954 ընտանիքից Հայաստանում
(Acariformes, Oribatei)

Հոդվածում նկարագրված են նոր սեռ *Fineoppia khosrovica* gen. nov.,
sp. nov. և երկու նոր տեսակ *Medioppia trilobata* sp. nov. և *Epimerella*
rubeni sp. nov. Opplidae Grandjean, 1954 ընտանիքից Հայաստանից
(Acariformes, Oribatei);

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ

¹ Определитель обитающих в почве клещей, Наука, М., 1975. ² J. Bilogh, Acta
Zoologica Academiae Scientiarum Hungaricae, v. 29 (1953).

УДК 595.796

Г. Р. Аракелян

Новый вид муравьев рода *Diplochoritum* Mayr
(Hymenoptera, Formicidae) из Армении

(Представлено академиком АН Армении С. О. Мовсесяном 20.XII 1990)

Система рода *Diplochoritum* Mayr нуждается в коренной ревизии. В настоящее время для фауны СССР такая ревизия проведена Г. М. Длусским и А. Г. Радченко, любезно предоставившим нам возможность ознакомиться с рукописью этой работы. В ней для территории СССР приводится 6 видов и установлена синонимия многочисленных описанных ранее форм.

В ходе обработки нашего материала из Армении был обнаружен один вид, не вошедший в указанную ревизию и оказавшийся новым для науки. Это подтвердилось после сравнения его с материалами (в том числе типовыми) из коллекции Зоологического музея МГУ (Москва) и Института зоологии АН УССР (Киев), а также на основании проработки литературных источников по роду *Diplochoritum* Республики Армении и сопредельных территорий (1-15).

Промеры и индексы, используемые в работе: ДГ—длина головы спереди, ШГ—максимальная ширина головы спереди, ДС—длина скапуса, ДГл—максимальный диаметр глаза, ДМ—длина груди, измеренная сбоку по диагонали от края метастернальных лопасти до передне-верхнего края груди (самки, самцы) или до места сочленения с головой (рабочие), ВМ—высота груди, ДСк—длина скутума, ШСк—ширина скутума; ШГ=ДГ:ШГ, ИГл=ДГ:ДГл, ИС=ДГ:ДС, ИСк=ДСк:ШСк, ИМ=ДМ:ВМ. При описании самок в скобках даются промеры и индексы голотипа.

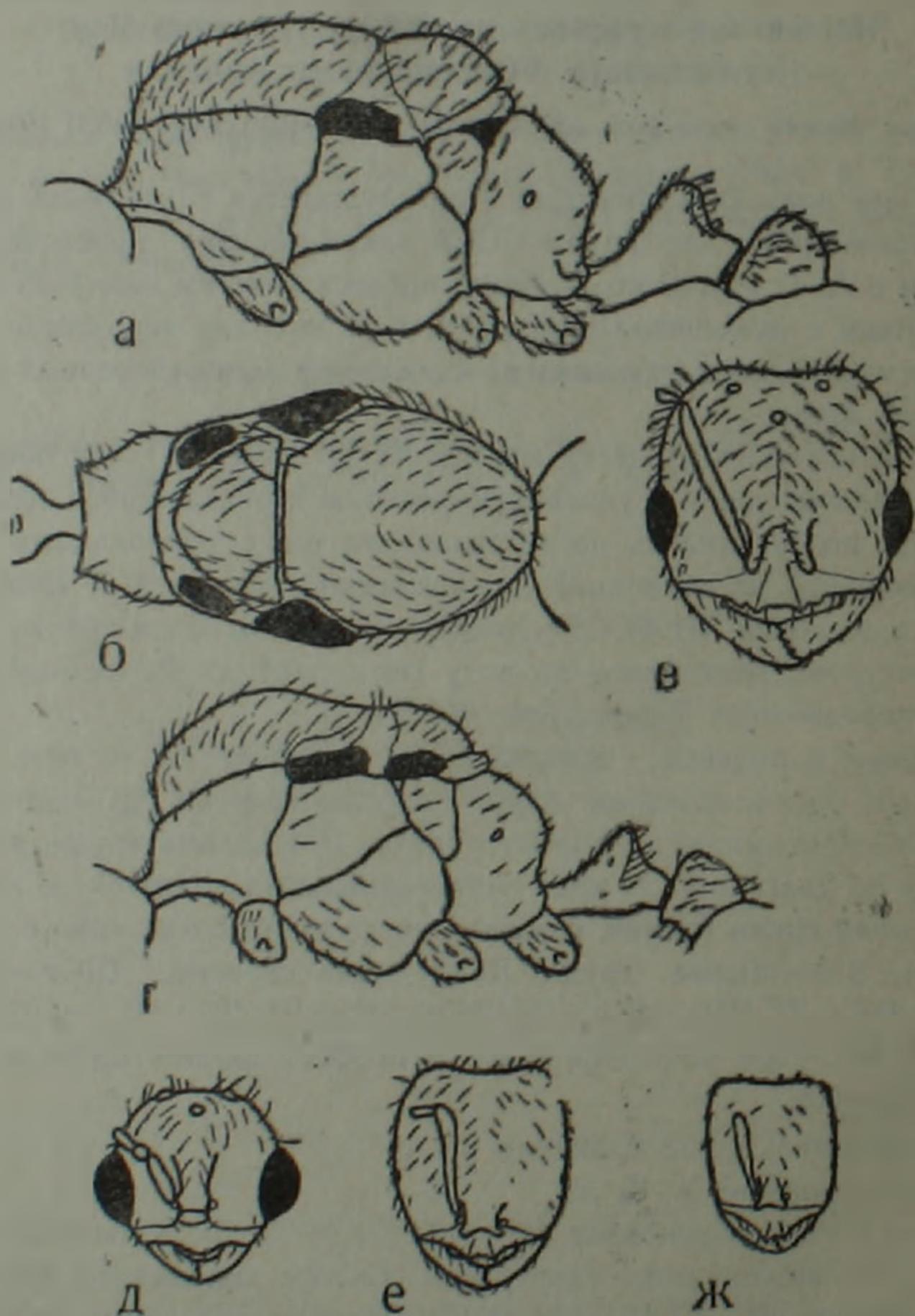
Diplochoritum juliae Arakellian sp. n.

Самки (рисунок, а, б, в)

Голова слегка удлинённая, ШГ=1,02—1,06 (1,03). Затылочный край слабо вогнут, задние углы закруглены. Скапус доходит до уровня темениных глазков, ИС=1,41—1,51 (1,47). Наличник с двумя нерезкими, расходящимися киями. Передний край наличника с двумя средними зубчиками (выемка между ними почти отсутствует) и двумя маленькими

ми дополнительными боковыми зубчиками. Грудь высокая, $ИМ = 1,59—1,65$ (1,60). Пропедеум в профиль угловатый, со слабо намеченными бугорками. Скутум сравнительно широкий, $ИСк = 1,12—1,19$ (1,19). Петиолюс с голстой, закругленной на вершине чешуйкой. Постпетиолюс округленный, несколько ниже петиолюса. Тело большей частью гладкое, блестящее. Слабая поверхностная скульптура заметна на боках головы, на лбу, вокруг усиковых впадин, на пропедеуме и на члениках стебелька. Многочисленные отстоящие волоски разбросаны по всему телу. Окраска желто-коричневая, усики и конечности светлее.

Размеры: $ДГ = 0,71—0,77$ (0,74), $ШГ = 0,70—0,74$ (0,72), $ДС = 0,49—0,53$ (0,50), $ДМ = 1,40—1,47$ (1,44) мм.



Diplorhoptum juliae Arakellan sp. n. а—самка (голотип), грудь и стебелек в профиль; б—то же грудь сверху; в—то же, голова спереди; г—самец грудь и стебелек в профиль; д—то же, голова спереди; е—крупный рабочий, голова спереди; ж—малый рабочий, голова спереди

Самец (рисунок, г, д)

Голова слегка поперечная ($ИГ=0,97$), с немного выпуклым затылочным краем и широко закругленными задними углами. Глаза средних размеров ($ИГл=2,18$). Скапус длиннее двух первых члеников жгутика усика ($ИС=3,18$). Грудь сравнительно высокая ($ИГ=1,45$). Проподеум в профиль с намеченными бугорками. Скутум широкий ($ИСк=1,16$). Петнолюс с слегка вогнутой передней поверхностью и немного суженной к вершине чешуйкой. Высота постпетнолюса почти равна высоте петнолюса. Тело блестящее. Лоб, мезоплевры, бока скутума, верх скутеллюма и брюшко гладкие. Остальная поверхность тела покрыта слабой поверхностной скульптурой. Отстоящее опушение хорошо развито, волоски расположены на всей поверхности тела. Окраска темнокоричневая, усики и ноги светло-коричневые.

Размеры: $ДГ=0,49$, $ШГ=0,50$, $ДС=0,15$, $ДМ=1,26$ мм.

Рабочие (рисунок е, ж)

У крупных рабочих голова с выпуклыми боковыми сторонами ($ИГ=1,11-1,17$), у мелких—с почти параллельными боками ($ИГ=1,22-1,28$). Затылочный край слегка вогнут, задние углы закруглены. Наличник с двумя киями и двумя зубчиками, его передний край не вогнут. Грудь с явственным мезопроподоальным вдавлением. Проподеум в профиль закруглен. Цилиндрическая часть петнолюса не длинная, чешуйка толстая, на вершине округленная. Тело блестящее, гладкое. Длинные, отстоящие волоски имеются на всем теле. Окраска охристо-желтая, голова и брюшко часто темнее. Мелкие рабочие обычно светлее крупных.

Размеры: крупные рабочие— $ДГ=0,55-0,57$, $ШГ=0,49-0,50$, $ДМ=0,57-0,62$ мм; мелкие рабочие— $ДГ=0,46-0,48$, $ШГ=0,36-0,38$, $ДМ=0,45-0,49$ мм.

Материал: 1 ♀ (голотип)—Республика Армения, Разданский р-н, окрестности с. Арзакан, 30.08.1988 г., № 535—88 (Г. Аракелян); 17 ♀ ♀, 1 ♂, 98 рабочих (паразиты) из того же гнезда. Материал хранится в Институте зоологии АН Армении (Ереван), в Зоологическом музее МГУ (Москва) и в Институте зоологии АН УССР (Киев).

Экология. Гнездо под камнем, на поляне дубового леса на высоте 1750 м над ур. м. В гнезде вместе с рабочими было много крылатых самок и один самец.

Дифференциальный диагноз. Самки и самец *D. juliae* sp. n. хорошо отличаются от самок и самцов *D. fugax* (Latreille) и *D. deserticolum* (Ruzsky) меньшей длиной груди ($ДМ$ самок *D. fugax* и *D. deserticolum* не менее 1,6, самцов—1,45 мм), от самок *D. nitidum* Dlussky et Radtschenko угловатым профилем проподоума (самец *D. nitidum* неизвестен); от самок *D. ilinei* (Santschi) отличается формой головы и проподоума, от самцов—меньшими глазами (у самцов *D. ilinei* $ИГл=1,85-1,89$). Крупные рабочие отличаются от всех вышеупомянутых видов (кроме *D. fugax*), более выпуклыми боками головы.

Описанный нами вид следует отнести к группе *D. orbula*, куда входят виды с мелкими самками, длина груди которых не более 1,5 мм.

Автор считает своим долгом выразить благодарность Г. М. Длусскому и А. Г. Радченко за оказанную помощь при выполнении данной работы.

Институт зоологии
Академии наук Армении

Գ. Ի. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

Diplorhoptrium Mayr (Hymenoptera, Formicidae)
սեռի մրջյունների նոր տեսակ Հայաստանից

Հոդվածում նկարագրված է մրջյունների նոր տեսակ՝ *Diplorhoptrium juliae* Arakelian sp. n. Այն գտնվել է Հրազդանի շրջանի Արզական գյուղի մոտակայքում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ К. В. Арнольди, Тр. ЗИН, т. 7, вып. 3, с. 206—262 (1948). ² К. В. Арнольди, Г. М. Длусский, в кн.: Определитель насекомых европейской части СССР, т. 3, ч. 1, Наука, Л., с. 519—556, 1978. ³ Т. И. Жижилашвили, Сообщ. АН ГССР, т. 33, № 3, с. 663—666 (1964). ⁴ Т. И. Жижилашвили, Сообщ. АН ГССР, т. 34, № 3, с. 651—657 (1964). ⁵ Т. И. Жижилашвили, Материалы к фауне Грузии, вып. 1, с. 59—77 (1966). ⁶ Т. И. Жижилашвили, Материалы к фауне Грузии, вып. 2, с. 50—70 (1967). ⁷ Т. И. Жижилашвили, Материалы к фауне Грузии, вып. 4, с. 191—241 (1974). ⁸ Н. В. Насонов, Изв. Об-ва любителей естествознания, антропологии, этнографии, т. 18, вып. 1, с. 1—78 (1889). ⁹ М. Д. Рузский, Муравьи России, Казань (1905). ¹⁰ D. Agosti, C. Collingwood, Bull. Soc. Ent. Suisse, v. 60, p. 51—62 (1957). ¹¹ N. Arac, Istanbul Univ. Fen Fak. Mec. Seri B, 41 (1—4), p. 115—115 (1976). ¹² H. Dorsithorphe, Ann. Mag. Nat. Hist. London, v. 3, p. 1057—1067 (1911). ¹³ A. Forel, Ann. Mus. Zool. Acad. Sci. (St. Petersburg), v. 8, p. 368—385 (1903). ¹⁴ W. Kirauaew, Konowia, Bd. 5, Heft 2, p. 161—169 (1926). ¹⁵ F. Santschi, Rev. Suisse Zool., v. 41, 36, p. 565—592 (1934).