ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

Том 92 · № 1

1991

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ ЕРЕВАН

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

MATHEMATICS

APPLIED MATHEMATICS

MECHANICS

ENTOMOLOGY

ISSN 0321—1339 Доклады Академии наук Армении. 1991. Т. 92, № 1, с. 1—48.

Сдано в набор 8. 08. 1991. Подписано к печати 3. 10. 1991
Формат 70×108¹/₁₆. Бумага № 1, сыктывкарская. Высокая печать. Печ. лист 3,0.
Усл. печ. л. 4,2. Усл. кр. отт. 4,2. Учет. изд. л. 3,18. Тираж 455. Заказ № 230.
Издат. № 7930. Цена 1 р. 10 к.

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г, II эт., к. 1, тел. 27-92-38.

Издательство Академии наук Армении, 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.
Типография Издательства Академии наук Армении, 375019, Ереван,
пр. Маршала Баграмяна, 24.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 92 1991 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.43+513.88

В. А. Сендеров, В. А. Хацкевич

Новые результаты по теории нормированных F_*-пространств и линейных операторов в этих пространствах

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. Б. Нерсесяном 19/IX 1990)

Работа продолжает исследования ([1–11]). Терминология и обозначения будут совпадать с введенными в ([1–6, 12])*.

1. Теорема 1.1. *Пусть* $L = L_+ \dotplus L_-$ — *банахово* F_**-пространство,* $0 < \min\{\dim L_+, \dim L_-\} < \infty$. *Для того чтобы любое дефинитное подпространство пространства* L *было равномерно дефинитным, необходимо и достаточно, чтобы* L *было рефлексивным.*

Доказательство получается с помощью теоремы 1′ ([10]) и теоремы Джеймса (([15]), гл. 1, теорема 3).

Определение 1.1. Нормированное пространство N назовем пространством с условием (Д), если для любого функционала $f \in N^*$ существует вектор $x_0 \in N$, $\|x_0\| = 1$ такой, что $f(x_0) = \|f\|$.

Как следует из ([16]), уже в сепарабельном случае существуют неполные пространства с условием (Д).

2. Лемма 2.1. *Пусть* $f \in D^*_-$. *Тогда существует*

$$L_+ \in \mathfrak{M}_{++} : f(L_+) = \{0\}.$$

С помощью этой леммы и ([6]) доказывается

Теорема 2.1 (ср. ([15]), теорема 3.5). *Пусть ограниченный оператор* $A(D_A = N)$ *таков, что* $AL_+ \in \mathfrak{M}_+$ *для всех* $L_+ \in \mathfrak{M}_{++}$. *Тогда* A — *двусторонний плюс-оператор.*

Следствие 2.1 (ср. ([12]), теорема 3.6). *Пусть ограниченный плюс-оператор* A *в* N *с полным* N_+ *задан на всем* N *и таков, что:* $AL^0_+ \in \mathfrak{M}_+$ *для некоторого* $L^0_+ \in \mathfrak{M}_+$; A *не аннулирует положительных векторов;* P_+AP_- — *вполне непрерывный оператор. Тогда* A — *двусторонний плюс-оператор*.

Доказательство можно получить с помощью модификации доказательства теоремы 3.6 ([12]).

---

* По техническим причинам готическая буква „эф" заменена F; готическая „бэ" — L; готическая „пэ" — D; готическая „эн" — N; готическая „дэ" — D; готическая „ха" — λ; готическая рукописная „дэ" — Δ.

Лемма 2.2 *Пусть* $\mathbf{N}_-$ *— пространство с условием* (Д), $f \in \mathbf{D}^*_-$. *Тогда существует* $L_+ \in \mathfrak{M}_+ : f(L_+) = \{0\}$.

С помощью ослабления условий теоремы 3.7 ([12]) удается усилить ее результаты.

Теорема 2.2 (ср. ([12]), теорема 3.7). *Пусть* $\mathbf{N}_+$ *— рефлексивное пространство,* $\mathbf{N}_-$ *— пространство с условием* (Д); A *— ограниченный оператор,* $D_A = N$; $\overline{AL_+} \in \mathfrak{M}_+$ *для всех* $L_+ \in \mathfrak{M}_+$: $A(\mathbf{N}_+ \setminus \{0\}) \subseteq \mathbf{D}_{++}$. *Тогда* A *— полустрогий вместе с сопряженным оператором и* $\overline{A^* L^*_+} \in \mathfrak{M}^*_+$ *для всех* $L^*_+ \in \mathfrak{M}^*_+$.

Доказательство получается с помощью леммы 2.2 ([13, 17]).

Следствие 2.2 (ср. ([12]), теорема 3.8). *Пусть* $\mathbf{N}_+$ *— рефлексивное пространство,* $\mathbf{N}_-$ *— пространство с условием* (Д); A *— ограниченный плюс-оператор,* $D_A = \mathbf{N}$;

a) $AL^0_+ \in \mathfrak{M}_+$ *для некоторого* $L^0_+ \in \mathfrak{M}_+$;

b) $A(\mathbf{N}_+ \setminus \{0\}) \subseteq \mathbf{D}_{++}$;

c) P_+AP_- *— вполне непрерывный оператор*;

d) A *не аннулирует векторов из* $\mathbf{D}_{--}$.

Тогда справедливо заключение теоремы 2.2.

Доказательство можно получить с помощью модификации доказательства теоремы 3.8 ([12]).

Определение 2.1. Ограниченный полустрогий оператор A с $D_A = \mathbf{N}$ назовем двояко полустрогим, если $A^*\mathbf{D}^*_{++} \subseteq \mathbf{D}^*_{++}$.

Следующее предложение является частичным обращением теоремы 2.2.

Теорема 2.3. *Пусть* $\mathbf{L}$ *— полное пространство,* A *— двояко полустрогий оператор. Тогда выполнены условия a) и b) теоремы 2.2.*

Замечание. Условие двоякой полустрогости в теореме 2.3 можно заменить следующими условиями:

$$A(\mathbf{N}_+ \setminus \{0\}) \subseteq \mathbf{D}_{++}; \qquad A^*(\mathbf{N}^*_+ \setminus \{0\}) \subseteq \mathbf{D}^*_{++}.$$

3. В этом пункте $\mathbf{N} = \mathbf{N}_+ \dotplus \mathbf{N}_-$ — нормированное F_p-пространство, $p > 1$ (если нет специальной оговорки). $\mathbf{N}^*$ естественно превращается в F_q-пространство, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (([12]), определение 3.6). Будем рассматривать операторы, определенные на всем пространстве $\mathbf{N}$.

Определение 3.1. Строгий оператор A называется двоякострогим, если он ограничен и оператор A^* также строг.

Изучим условия двоякострогости строгих операторов.

В ([13]) доказано:

Предложение 3.1. *Для того чтобы оператор A в F_p-пространстве $\mathbf{N}$ с полным $\mathbf{N}_+$ был двоякострогим, необходимо выполнение условия $P_+AP_+\mathbf{N}_+ = \mathbf{N}_+$.*

В случае гильбертова F_2-пространства X условие $P_+AP_+X_+ = X_+$ является также и достаточным для двоякострогости строгого оператора A. Это нетрудно вывести из результатов ([1, 12]). В общем случае нормированного F_p-пространства $\mathbf{N}$ это не так. Контрпримером (уже при $p=2$) может служить пример из ([18]). Авторам неизвестно, является ли рассматриваемое условие достаточным в случае полноты пространства $\mathbf{N}_-$. Изучим ситуации, в которых это так.

Предложение 3.2. *Пусть $\mathbf{N}_+$ полно, оператор Δ таков, что $F_p(\Delta x) \geqslant \alpha F_p(x)$ для всех $x \in \mathbf{N}$ $(\alpha > 0)$, $P_+\Delta P_+\mathbf{N}_+^{\cdot} = \mathbf{N}_+$. Тогда оператор Δ ограничен, $F_q(\Delta^* y) \geqslant \beta F_q(y)$ для всех $y \in \mathbf{N}^*$, где $\beta^{\frac{1}{q}} = \alpha^{\frac{1}{p}}$.*

Доказательство получается с помощью теоремы 1 ([13]).

Замечание 3.1. Существуют трехмерное F_p-пространство $(p > 1)$ и двоякострогий оператор A в нем, не коллинеарный F_p-несжимающему. Нетрудно показать, что этими свойствами обладают пространство и оператор A примера 4.3 ([12]). Для этого оператора и его сопряженного

$$\mu_p^{\frac{1}{p}}(A) = \mu_q^{\frac{1}{q}}(A^*).$$

Рассмотрим еще одну ситуацию, в которой строгий оператор оказывается двоякострогим.

Определение 3.2. Оператор A называется фокусирующим, если

$$AD_+ \subseteq D_+^{\gamma} \equiv \{x : \|x_-\| \leqslant (1-\gamma)\|x_+\|, \quad \text{где} \quad 0 < \gamma \leqslant 1\}.$$

Фокусирующие операторы изучались, в частности, в ([14, 19]).

Лемма 3.1. *Пусть $\nu > 0$, $\mathbf{N}_-$ полно; A — строгий оператор, $P_+AP_+\mathbf{N}_+ = \mathbf{N}_+$. Тогда A ограничен,*

$$\|P_+^* A^* f\| \geqslant \delta\|P_+^* f\|, \quad \text{где} \quad f \in D_+^*, \quad \delta > 0. \tag{3.1}$$

Доказательство леммы опирается, в частности, на теорему 2.2 ([12]).

(Замечание 3.2. Аналогично лемме 3.1 доказывается

Предложение. *Пусть $\nu > 0$, A — ограниченный фокусирующий оператор, $P_+AP_+\mathbf{N}_+ = \mathbf{N}_+$. Тогда справедливо неравенство (3.1), в котором можно положить $\delta = \gamma$*).

Теорема 3.1. *Пусть $\mathbf{N}$ — рефлексивное F_p-пространство, $p > 1$; A — строгий фокусирующий оператор. Тогда следующие условия эквивалентны: 1) $P_+AP_+\mathbf{N}_+ = \mathbf{N}_+$; 2) $AL_+ \in \mathfrak{M}_+$ для всех $L_+ \in \mathfrak{M}_+$; 3) A^* — строгий фокусирующий оператор в банаховом F_q-пространстве $\mathbf{N}^*$.*

Доказательство теоремы опирается на модификацию теоремы 3.2 ([12]), предложение 3.1, ([14]) и лемму 3.1.

4. Рассмотрим оператор B такой, что $P_+ D_B \subseteq D_B$. Относительно разложения $D_B = (\mathbf{N}_- \cap D_B) \dotplus (\mathbf{N}_- \cap D_B)$ представим B операторной матрицей:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Будем рассматривать B_{11} как оператор на $\mathbf{N}_+ \cap D_B$ и т. д.

Теорема 4.1. *Пусть B_{12} — ограниченный оператор,*

$$\|P_+ Bx\| \geq \delta \|x\|, \quad \text{где } x \in \mathbf{D}_+ \cap D_B, \quad \delta > 0. \tag{4.1}$$

Тогда $\operatorname{Ker} B_{11} = \{0\}$, оператор $B_{11}^{-1} B_{12}$ ограничен и $\|B_{11}^{-1} B_{12}\| < 1$.

Следствие. *Пусть $\mathbf{N}$ есть F_+-пространство, $\nu > 0$; $\mathbf{N}_+$ полно; A — строгий оператор, $\mathbf{N}_+ \subseteq D_A$, $P_+ A P_+ \mathbf{N}_+ = \mathbf{N}_+$. Тогда* $\|A_{11}^{-1} A_{12}\| < 1$.

Теорема 4.2. *Пусть A удовлетворяет условиям леммы 3.1. Тогда* $\|A_{21} A_{11}^{-1}\| < 1$.

Доказательство опирается на теорему 4.1.

Ленинградский финансово-экономический институт

Վ. Ա. ՍԵՆԴԵՐՈՎ, Վ. Ա. ԽԱՑԿԵՎԻՉ

Նոր արդյունքներ նորմավորված F_+-տարածությունների և այդ տարածություններում գործող գծային օպերատորների տեսությունում

Դիտարկված են +-օպերատորներ գործող F_+ տարածություններում։ Ստացված են արդյունքներ +-օպերատորների տեսության, ինչպես նաև F_+ տարածությունների երկրաչափության մասին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян*, Мат. исследования, Кишинев т. 1, № 1 (1966). [2] *F. F. Bonsall*, Quart. J. Math. Oxford (2). 6 (1955). [3] *М. Л. Бродский*, УМН т. 14, № 1 (85) (1959). [4] *И. С. Иохвидов*, ДАН СССР, т. 169, № 2 (1966). [5] *И. С. Иохвидов*. ДАН СССР, т. 169, № 3 (1966). [6] *И. С. Иохвидов*, Изв. АН МССР, т. I (1968). [7] *Л. С. Понтрягин*, Изв. АН СССР, Сер. мат., т. 8 (1944). [8] *Ю. П. Гинзбург* Науч. зап. Одесск. пед. ин-та, т. 25, № 2 (1961). [9] *В. А. Сендеров, В. А. Хацкевич*, УМН, т. 34 № 5 (1979) [10] *В. А. Сендеров, В. А. Хацкевич*, ДАН АрмССР, т. 74, № 1, (1982) [11] *В. А. Сендеров В. А. Хацкевич*, Деп. ВИНИТИ, № 3618—80, 1980. [12] *В. А. Сендеров, В. А. Хацкевич*, Мат. исследования. Кишинев, РИО АН МССР т. 8, № 3 (29) (1973). [13] *Е. И. Иохвидов, В. А. Сендеров*, Тр. НИИ мат. Воронеж. ун-та, вып. 5 (1972). [14] *В. А. Хацкевич*, ДАН АрмССР, т. 79, № 3 (1984). [15] *Дж. Дистель*. Геометрия банаховых пространств, Высшая школа, Киев, 1980. [16] *James C. Robert* Isr. J Math., v. 9, № 4 (1971). [17] *В. А. Хацкевич* Изв. вузов. Математика, № 6, 1973. [18] *Т. Я. Азизов, В. А. Сендеров*, Сб. тр. аспирантов мат. фак. Воронеж. ун-та, вып. 2 1971. [19] *В. А. Хацкевич*, Мат. заметки, т. 30, № 5 (1981).

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 1991 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.547

А. О. Карапетян

Интегральные представления и приближения функций в трубчатых областях над полиэдрами

(Представлено академиком АН Армении М. М. Джрбашяном 16/XI 1990)

1. Как известно, класс Харди $H^2\{\mathrm{Re}\, z>0\}$ состоит из голоморфных в правой полуплоскости функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<x<+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+iy)|^2 dy\right\}<+\infty. \tag{1}$$

Классический результат Н. Винера и Р. Пэли [1] утверждает, что $H^2\{\mathrm{Re}\, z>0\}$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление вида

$$f(z)=\int_0^{+\infty} e^{-zt}\cdot\varphi(t)\,dt, \quad \mathrm{Re}\, z>0, \tag{2}$$

где функция $\varphi(t)\in L^2(0,+\infty)$ произвольна.

В дальнейшем в работах ряда авторов были получены различные обобщения этого результата, не выходящие, однако, за рамки идей и методов монографии [1]. А между тем в исследованиях М. М. Джрбашяна, подытоженных в его монографии [2], была развита теория гармонического анализа и интегральных преобразований в комплексной области, и на ее основе в работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [3] и в самой монографии [2] были получены существенно новые интегральные представления типа Винера—Пэли посредством ядер Миттаг-Леффлера $E_\rho(z;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k/\Gamma(\mu+k/\rho)$.

В теории функций многих комплексных переменных также проводились исследования с целью получения если не обобщений, то хотя бы многомерных аналогов теоремы Винера—Пэли (см. работу С. Бохнера [4]). В этой связи примечательна работа С. Г. Гиндикина [5], где впервые была поставлена и решена задача несколько иного рода: получить параметрические интегральные представления типа Винера—Пэли (и на их основе построить воспроизводящие ядра) для классов голоморфных в областях Зигеля $D \subset \mathbf{C}^{n+m}$ ($n \geqslant 1$, $m \geqslant 0$) функций, квадратично интегрируемых по всей области D.

2. Введем некоторые необходимые в дальнейшем обозначения. Произвольное $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ может быть записано как $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = x + iy$, где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ и $z_k = x_k + iy_k$ ($1 \leqslant k \leqslant n$). Если $z = (z_1, \ldots, z_n) = x + iy \in \mathbf{C}^n$, то полагаем $\bar{z} = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n) = x - iy \in \mathbf{C}^n$.

Скалярное произведение в $\mathbf{C}^n$ вводится стандартным образом:

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \bar{w}_k, \tag{3}$$

где $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$, $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbf{C}^n$.

Далее, пространство $\mathbf{R}^n$ будет отождествляться с вполне вещественным подпространством в $\mathbf{C}^n$.

Пусть B — область в $\mathbf{R}^n$ и $\gamma(y) > 0$, $y \in B$ — произвольная непрерывная функция. При $0 < p$, $s < +\infty$ через $H^p_{s,\gamma}(T_B)$ обозначим пространство всех голоморфных в трубчатой области $T_B = \{z = x + iy \in \mathbf{C}^n : x \in \mathbf{R}^n,\ y \in B\}$ функций $f(z) \equiv f(x+iy)$ с конечной „нормой"

$$M^p_{s,\gamma}(f) \overset{\text{def}}{=\!=} \int\limits_B \left\{ \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(x+iy)|^p\, dx \right\}^s \cdot \gamma(y)\, dy < +\infty. \tag{4}$$

Замечание 1. При $\gamma(y) \equiv 1$, $y \in B$, пространства $H^p_{s,\gamma}(T_B)$ и „нормы" $M^p_{s,\gamma}(f)$ будут обозначаться соответственно через $H^p_s(T_B)$ и $M^p_s(f)$.

В работах Т. Г. Генчева [6], М. М. Джрбашяна и В. М. Мартиросяна [7] содержатся разнообразные результаты, относящиеся к интегральным представлениям типа Винера—Пэли для классов типа $H^p_s(T_B)$. Случай, когда весовая функция $\gamma(y) \equiv 1$, $y \in B$, рассмотрен с различных точек зрения в работах [8, 9], а также в некоторых других работах автора, находящихся пока в печати.

3. Всюду дальше P будет обозначать открытый полиэдр (т. е. выпуклый многогранник без учета границы) в пространстве $\mathbf{R}^n$. И пусть $\{a_m\}_1^M$ суть множество всех вершин полиэдра P. Нетрудно заметить, что справедливо представление вида

$$P = \bigcap_{m=1}^{M} Y_m,$$

где Y_m ($1 \leqslant m \leqslant M$) являются многогранными углами в пространстве $\mathbf{R}^n$ с вершинами в точках a_m. Полагая затем $V_m = Y_m - a_m$ ($1 \leqslant m \leqslant M$), отметим, что и V_m ($1 \leqslant m \leqslant M$) являются многогранными углами в $\mathbf{R}^n$, но уже с вершинами в начале координат.

Определение. Однозначно определяемую полиэдром $P \subset \mathbf{R}^n$ совокупность $(a_m, V_m)_1^M$ назовем набором конструктивных данных для P.

Далее, при $1 \leqslant m \leqslant M$ положим

$$V_m^* = \{v \in \mathbf{R}^n : \langle v, y \rangle \geqslant 0, \ \forall y \in V_m\}. \tag{5}$$

В работе установлен следующий вспомогательный, но весьма важный факт:

Теорема 1. *Пусть P — полиэдр в $\mathbf{R}^n$ с набором конструктивных данных $(a_m, V_m)_1^M$. Тогда:*

1°. *Множества* $\operatorname{Int} V_m^*$, $1 \leqslant m \leqslant M$, *попарно не пересекаются*

2°. $\mathbf{R}^n = \bigcup\limits_{m=1}^{M} V_m^*$.

Замечание 2. В работе Л. Р. Волевича и С. Г. Гиндикина ([10]) также рассматривались определенные разбиения пространства $\mathbf{R}^n$, ассоциированные с определенными полиэдрами, однако в связи с задачами совершенно иного рода..

Сформулированный результат является эффективным средством при установлении ряда важных оценок, которые в конечном счете приводят к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть P — полиэдр в $\mathbf{R}^n$, $\gamma(y)$, $y \in P$ — произвольная непрерывная положительная функция класса $L^1(P)$ и ядро $\Phi(z, w)$ определено по формуле*

$$\Phi(z, w) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{e^{i\langle z-\bar{w}, t\rangle}}{\gamma_P^*(2t)}\, dt, \quad z, w \in T_P, \tag{6}$$

где

$$\gamma_P^*(t) = \int\limits_P e^{-\langle t, y\rangle} \gamma(y)\, dy, \quad t \in \mathbf{R}^n. \tag{7}$$

Тогда $\Phi(z, w)$ голоморфно по z, антиголоморфно по w, и любая функция f класса $H^p_{s;\gamma}(T_P)$, где $1 \leqslant p \leqslant 2$, $1/p \leqslant s < +\infty$, допускает интегральное представление вида

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T_P} f(w)\, \Phi(z, w) \cdot \gamma(v)\, du\, dv, \quad z \in T_P \ (w = u + iv), \tag{8}$$

причем интеграл справа абсолютно сходится при всех $z \in T_P$.

4. Пусть вновь P — полиэдр в $\mathbf{R}^n$ с набором конструктивных данных $(a_m, V_m)_1^M$, и при этом, как обычно, $Y_m = a_m + V_m$ $(1 \leqslant m \leqslant M)$. Нетрудно проверить, что если $0 < p < +\infty$, $0 < s < +\infty$ и функции $f_m \in H_s^p(T_{Y_m})$ $(1 \leqslant m \leqslant M)$, то функция

$$f(z) = \sum\nolimits_1^M f_m(z), \quad z \in T_P, \tag{9}$$

принадлежит классу $H_s^p(T_P)$. Возникает естественный вопрос: всякая ли функция $f\in H_s^p(T_P)$ допускает разложение вида (9) с функциями $f_m\in H_s^p(T_{Y_m})$, $1\leq m\leq M$? Мы устанавливаем, что при $p=2$, $0<s<+\infty$ это „почти" так. Более точно, справедлив следующий результат:

Теорема 3. *Пусть $P\subset\mathbb{R}^n$ — полиэдр с набором конструктивных данных $(a_m, V_m)_1^M$, $Y_m=a_m+V_m$ $(1\leq m\leq M)$ и $0<s<+\infty$. Если функция $f\in H_s^2(T_P)$, то для любого $\varepsilon>0$ существуют функции $f_m\in H_s^2(T_{Y_m})$ $(1\leq m\leq M)$, такие, что*

$$M_s^2(f-\sum_1^M f_m)=\int\limits_P\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x+iy)-\sum_1^M f_m(x+iy)|^2dx\right]^s dy<\varepsilon. \quad (10)$$

Замечание 3. Теорема 3 является многомерным аналогом следующего результата (см. например, работу ([11])): пусть $-\infty<a<b<+\infty$, тогда любую функцию $f\in H_1^2[a<\operatorname{Im}z<b]$ со сколь угодно большой точностью можно приблизить по „норме" пространства $H_1^2[a<\operatorname{Im}z<b]$ суммой вида f_1+f_2, где $f_1\in H_1^2[a<\operatorname{Im}z<+\infty]$ и $f_2\in H_1^2[-\infty<\operatorname{Im}z<b]$.

5. Напомним, что если B — область в $\mathbb{R}^n$ и $0<p<+\infty$, то $H^p(T_B)$ обозначает пространство Харди голоморфных в трубчатой области $T_B\subset\mathbb{C}^n$ функций $f(z)=f(x+iy)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{y\in B}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x+iy)|^p dx\right]<+\infty. \quad (11)$$

На основании теоремы 1 может быть установлена

Теорема 4. *Пусть P — полиэдр в $\mathbb{R}^n$ с набором конструктивных данных $(a_m, V_m)_1^M$ и $Y_m=a_m+V_m$ $(1\leq m\leq M)$. Тогда пространство $H^2(T_P)$ совпадает с классом функций f, представимых в виде*

$$f(z)=\sum_1^M f_m(z),\quad z\in T_P, \quad (12)$$

где $f_m\in H^2(T_{Y_m})$, $1\leq m\leq M$.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить академика АН Армении М. М. Джрбашяна за постановку задач и полезные обсуждения и профессора С. Г. Гиндикина за ценные замечания.

Институт математики
Академии наук Армении

Ա. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Հոլոմորֆ ֆունկցիաների ինտեգրալ ներկայացումներ և մոտարկումներ իրենց հիմքում ուռուցիկ բազմանիստ ունեցող խողովակաձև տիրույթներում

Դիցուք $1 \le p \le 2$, $0 \le s < +\infty$, B-ն որևէ տիրույթ է $\mathbb{R}^n$ տարածությունում և $\gamma(y)>0$, $y \in B$, կամայական դրական անընդհատ ֆունկցիա է։ Նշանակենք $H^p_{s,\gamma}(T_B)$-ով $T_B = \{z = x+iy \in \mathbb{C}^n,\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in B\}$ խողովակաձև տիրույթում հոլոմորֆ այն $f(z) = f(x+iy)$ ֆունկցիաների դասը, որոնց համար վերջավոր է

$$M^p_{s,\gamma}(f) = \int_B \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|^p dx \right\}^s \gamma(y) dy$$

մեծությունը։ Երբ $\gamma(y) \equiv 1$, $y \in B$, այդ դասերը նշանակվում են ուղղակի $H^p_s(T_B)$-ով։ Հոդվածում դիտարկվում են $H^p_{s,\gamma}(T_P)$ դասերը, որտեղ P-ն ուռուցիկ բազմանիստ է $\mathbb{R}^n$-ում, իսկ $\gamma(y) \in L^1(P)$։ Այդ դասերի համար կառուցվում են $\Phi(z, w)$, $z, w \in T_P$, վերարտադրող կորիզներ՝ հոլոմորֆ ըստ z-ի և անտիհոլոմորֆ ըստ w-ի։ Բացի այդ, ապացուցվում է, որ $\sum_1^M f_m$ տեսքի գումարները, որտեղ $f_m \in H^2_s(T_{Y_m})$ $(1 \le m \le M)$, խիտ են $H^2_\gamma(T_P)$ տարածությունում ըստ այդ տարածության համապատասխան նորմի։ Այստեղ Y_m-երը $(1 \le m \le M)$ այն բազմանիստ անկյուններն են $\mathbb{R}^n$-ում, որոնք ծնում են P բազմանիստը, այսինքն՝ $P = \bigcap_{m=1}^{M} Y_m$։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. Paley, N. Wiener*, Fourier Transforms in the Complex Domain, Amer. Math. Soc. N. Y., 1934. [2] *M. M. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966. [3] *M. M. Джрбашян, А. Е. Аветисян*, ДАН СССР, т. 120, № 3, с. 457—460 (1958). [4] *S. Bochner*, Math. Ann., v. 45, №, с. 686—707 (1944). [5] *С. Г. Гиндикин*, УМН, 19, № 4, с. 3—92 (1964). [6] *T. G. Genchev*, Докл. Болг. АН, т. 37, с. 717—720 (1984). [7] *M. M. Джрбашян, В. М. Мартиросян*, ДАН СССР, т. 283, № 5, с. 1054—1057 (1985). [8] *А. О. Карапетян*, Некоторые вопросы интегральных представлений в многомерном комплексном анализе, Канд. дисс., Ереван, 1987. [9] *А. О. Карапетян*, Изв. АН Армении, Матем., 25, № 4, с. 315—333 (1990). [10] *Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин*, Тр. Москов. мат. о-ва, т. 48, с. 211—262 (1985). [11] *M. Skwarczyński*, Math. Proc. Camb. Phil. Society, v. 102, с. 121—129 (1987).

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 1991 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

С. С. Степанян

О свойствах тейлоровских коэффициентов функций класса $H_p(\alpha)$

(Представлено академиком АН Армении М. М. Джрбашяном 26/XI 1990)

В монографиях, посвященных классам аналитических в единичном круге функций, важное место занимает введенный М. М. Джрбашяном ([1, 2]) класс $H_p(\alpha)$ $(p>0, \alpha>-1)$, который является естественным обобщением известного класса H_p, введенного Риссом и Харди.

Целью настоящей работы является получение с помощью тейлоровских коэффициентов необходимых, достаточных условий принадлежности функций

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad |z|<1 \tag{1}$$

к классу $H_p(\alpha)$.

Аналогичные результаты для функций класса H_p получены Юнгом-Хаусдорфом ([3]), Харди и Литтлвудом ([4]).

Докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Если функция* (1) *принадлежит классу* $H_p(\alpha)$ $(1\le p<2, \alpha>-1)$, *то сходится следующий ряд*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^{\frac{p}{p-1}}}{n^{\frac{1+\alpha}{p-1}}} < +\infty. \tag{2}$$

Теорему докажем для двух случаев:

а) $1<p<2$, б) $p=2$.

Пусть $f(z)\in H_p(\alpha)$ $(1<p<2, \alpha>-1)$. Зафиксировав число ρ, $0<\rho<1$, вместо функции (1) рассмотрим функцию $f(\rho z)\in H_p$ $(p>0)$, относительно которой, применяя теорему Юнга–Хаусдорфа, можно написать

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^{\frac{p}{p-1}} \rho^{\frac{np}{p-1}}\right]^{p-1} \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^p d\theta, \quad 1<p<2. \tag{3}$$

Умножив обе части неравенства (3) на выражение $(1-\rho^2)^\alpha$ и проинтегрировав в промежутке $[0,\ 1-\varepsilon]$, где $0<\varepsilon<1$, $\alpha>-1$, получим

$$\int_0^{1-\varepsilon}\left[\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^{\frac{p}{p-1}}\rho^{\frac{np}{p-1}}(1-\rho^2)^{\frac{\alpha}{p-1}}\right]^{p-1}\rho\, d\rho \le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{1-\varepsilon}\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,|f(\rho e^{i\theta})|^p\rho\, d\rho\, d\theta. \qquad (4)$$

Учитывая, что $f(z)\in H_p(\alpha)$ $(1<p<2,\ \alpha>-1)$, перейдем к пределу в неравенстве (4) при $\varepsilon\to 0$. Получим

$$\int_0^1\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[|a_n|^p x^{\frac{np}{2}}(1-x)^\alpha\right]^{\frac{1}{p-1}}\right\}^{p-1}dx\le C_{p,\alpha}, \qquad (5)$$

где $x=\rho^2$, $1<p<2$, $\alpha>-1$

$$C_{p,\alpha}=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\,|f(\rho e^{i\theta})|^p\rho\, d\rho\, d\theta. \qquad (6)$$

Принимая во внимание неравенство 201 ([5]) и предполагая $k=\frac{1}{p-1}$, $0<p-1<1$, $f_n(x)=|a_n|^p x^{\frac{np}{2}}(1-x)^\alpha$, из неравенства (5) имеем, что

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^1|a_n|^p x^{\frac{np}{2}}(1-x)^\alpha dx\right]^{\frac{1}{p-1}}\right\}^{p-1}\le C_{p,\alpha}. \qquad (7)$$

Воспользовавшись интегралами Эйлера, можем написать, что

$$\int_0^1 x^{\frac{np}{2}}(1-x)^\alpha dx=B\left(\frac{np}{2}+1,\ 1+\alpha\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{np}{2}+1\right)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{np}{2}+\alpha+2\right)}. \qquad (8)$$

Учитывая асимптотическое разложение функции Γ ([6], с. 124) и применяя соотношения (7) и (8), будем иметь, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^{\frac{p}{p-1}}}{n^{\frac{1+\alpha}{p-1}}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^{\frac{p}{p-1}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{np}{2}+1\right)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{np}{2}+\alpha+2\right)}\right]^{\frac{1}{p-1}}$$

одновременно сходятся.

Доказательство теоремы при $p=2$ следует из следующего разложения ([2]):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1+n)}{\Gamma(\alpha+2+n)}|a_n|^2 = \frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{\alpha}|f(\rho e^{i\theta})|^2 \rho\, d\rho\, d\theta. \qquad (9)$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если для функции* (1) *ряд* (2) *сходится, то* $f(z)\in H_p(\alpha)$ $(2<p<\infty,\ \alpha>-1)$.

Для доказательства теоремы снова фиксируем ρ, $0<\rho<1$, и, применяя теорему Юнга—Хаусдорфа в случае, когда $p>2$, можем написать

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{i\theta})|^p\, d\theta \leqslant \left\{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^{\frac{p}{p-1}}\rho^{\frac{np}{p-1}}\right\}^{p-1}. \qquad (10)$$

Из неравенства (10) получим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{1-\varepsilon}\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{\alpha}|f(\rho e^{i\theta})|^p \rho\, d\rho\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{1-\varepsilon}\left|\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^{\frac{p}{p-1}}x^{\frac{np}{2(p-1)}}(1-x)^{\frac{\alpha}{p-1}}\right|^{p-1}dx. \qquad (11)$$

Используя неравенство 200 ([5]) при $k=p-1>1$, заключаем, что

$$\left\{\int_0^1\left|\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^{\frac{p}{p-1}}x^{\frac{np}{2(p-1)}}(1-x)^{\frac{\alpha}{p-1}}\right|^{p-1}dx\right\}^{\frac{1}{p-1}} <$$

$$< \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_0^1\left||a_n|^p x^{\frac{np}{2}}(1-x)^{\alpha}\right|dx\right\}^{\frac{1}{p-1}}. \qquad (12)$$

Из соотношения (8) вытекает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_0^1\left||a_n|^p x^{\frac{np}{2}}(1-x)^{\alpha}\right|dx\right\}^{\frac{1}{p-1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^{\frac{p}{p-1}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{np}{2}+1\right)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{np}{2}+2+\alpha\right)}\right]^{\frac{1}{p-1}}. \qquad (13)$$

Перейдем к пределу в неравенстве (11), когда $\varepsilon\to 0$. Учитывая соотношения (12) и (13), получим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{\alpha}\,|f(\rho e^{i\theta})|^p\,\rho\,d\rho\,d\theta \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^{\frac{p}{p-1}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{np}{2}+1\right)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{np}{2}+2+\alpha\right)}\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Ряд (2) будет сходиться одновременно с рядом, полученным в правой части последнего неравенства. Таким образом, теорема доказана для случая $2<p<\infty$.

Теорема 3. *Если функция* (1) *принадлежит классу* $H_p(\alpha)$ $(0<p\le 2,\ \alpha>-1)$, *то сходится следующий ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^p}{n^{\alpha+3-p}}<+\infty. \tag{14}$$

Теорема 4. *Чтобы функция* (1) *принадлежала классу* $H_p(\alpha)$ $(2\le p<\infty,\ \alpha>-1)$, *достаточно, чтобы сходился ряд* (14).

Доказательства этих теорем проводятся по той же схеме, что и доказательства теорем 1 и 2.

Отметим только, что при доказательстве теоремы 3 мы воспользуемся теоремой 6·2 ([4]), а при доказательстве теоремы 4 надо воспользоваться теоремой 6·3 ([4]).

Армянский педагогический институт им. Х. Абовяна

Ս. Օ. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

$H_p(\alpha)$ դասի ֆունկցիաների Թեյլորյան գործակիցների հատկությունների մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից մտցված $H_p(\alpha)$ ($p>0$, $\alpha>-1$) դասի ֆունկցիաների Թեյլորյան գործակիցների որոշ հատկություններ։ Թեյլորյան գործակիցների միջոցով տրված են միավոր շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների $H_p(\alpha)$ դասին պատկանելու անհրաժեշտ, բավարար, ինչպես նաև, անհրաժեշտ ու բավարար պայմանների մասին։

Ապացուցված են մի շարք թեորեմներ, որոնք հանդիսանում են Ռիսի-Խարդիի H_p դասին ֆունկցիաների պատկանելության վերաբերյալ Յունգի-Հաուսդորֆի, Խարդի-Լիթլվուդի դասական թեորեմների անալոգները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, ДАН АрмССР, т. 3, № 1, с. 3—9 (1945). [2] *М. М. Джрбашян*, Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР, вып. 2, с. 3—48, (1948). [3] *И. И. Привалов*, Граничные свойства аналитических функций. М.—Л., 1950. [4] *Duren*, Theory of H^p spaces, 1970, New York and London. [5] *Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Полиа*, Неравенства, М., 1934. [6] *А. О. Гельфонд*, Исчисление конечных разностей, Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1959.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 1991 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.55

А. В. Арутюнян

О характеристике анизотропных пространств голоморфных в полидиске функций в терминах производных

(Представлено академиком АН Армении М. М. Джрбашяном 27/XI 1990)

1°. Пусть U^n — единичный полидиск n-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{T}^n$ — его остов. Символом S обозначим множество измеримых неотрицательных на $(0, 1)$ функций ω, для которых существуют положительные числа m_ω, M_ω, q_ω, причем m_ω, $q_\omega \in (0, 1)$, такие, что $m_\omega \leq \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq M_\omega$ при всех $r \in (0, 1)$, $\lambda \in [q_\omega, 1]$. Функции типа S изучены в [1]. Пусть $\omega_j \in S$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через $L^p(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ класс измеримых по Лебегу в U^n функций f, для которых

$$\|f\|_{L^p(\omega_1, \ldots, \omega_n)} = \left(\int_{U^n} |f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)|^p \omega_1(1-|\zeta_1|) \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \omega_n(1-|\zeta_n|)\, dm_{2n}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\right)^{1/p} < +\infty,$$

$m_{2n}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ — $2n$-мерная мера Лебега на U^n.

Далее, через $H^p(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ обозначим класс голоморфных в U^n функций f, для которых $f \in L^p(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, в котором вводится аналогичная норма. Отметим, что при $n = 1$, $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$ эти пространства впервые были введены и изучены в работах М. М. Джрбашяна [2] и [3]. В работе существенную роль играют интегральные представления этих классов, найденные в работах [2, 3].

Цель настоящей заметки — дать полную характеристику пространства $H^p(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ в терминах производных.

В работе [4] установлена следующая

Теорема А. *Пусть* $1 \leq p < +\infty$. *Тогда* $f \in H^p(1, 1)$ *тогда и только тогда, когда функции*

$$(1-|z_1|^2)\frac{\partial f(z_1, 0)}{\partial z_1}; \qquad (1-|z_2|^2)\frac{\partial f(0, z_2)}{\partial z_2},$$

$$(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)\frac{\partial^2 f(z_1, z_2)}{\partial z_1 \partial z_2}$$

принадлежат L^p.

Отметим, что в работе ([4]) установлен также аналог этой теоремы и для случая шара в C^n. Фактически мы обобщаем теорему A по двум направлениям. Во-первых, докажем, что теорема верна для любого $0<p<+\infty$.

Во-вторых, берем производные любого порядка и рассматриваем анизотропные пространства $H^p(\omega_1, \ldots, \omega_n)$.

2°. Для формулировки основного результата заметки возьмем мультииндекс $k=(k_1, \ldots, k_m)$, $k_i \geqslant 1$, $i=1, 2, \ldots, n$. Введем теперь следующие обозначения. Пусть s_j неотрицательное целое число, $1 \leqslant j \leqslant n$, r_j целое число, удовлетворяющее условию $-2^{s_j} \leqslant r_j \leqslant 2^{s_j}-1$.

$$\Delta_{s_j, r_j} \overset{\text{def}}{=} \left\{ z_j;\ 1-\frac{1}{2^{s_j}} \leqslant |z_j| < 1-\frac{1}{2^{s_j+1}};\right.$$

$$\left.\frac{\pi r_j}{2^{s_j}} \leqslant \arg z_j < \frac{\pi(r_j+1)}{2^{s_j}}\right\};$$

$$\Delta_{s_1 \ldots s_n, r_1 \ldots r_n} = \Delta_{s, r} = \Delta_{s_1, r_1} \times \ldots \times \Delta_{s_n, r_n}.$$

Подобные свойства $\Delta_{s,r}$ приведены в ([5]). Введем в рассмотрение также функцию $\chi_\tau(z) = \dfrac{1}{(1-|z_i|)^{1/pq}}$, где $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $z=(z_1, \ldots, z_n) \in U^n$. Основным результатом заметки является

Теорема. *Пусть f голоморфная в U^n функция, $0<p<+\infty$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *функция f принадлежит классу $H^p(\omega_1, \ldots, \omega_n)$;*

2) *каждая функция из последовательности*

$$(1-|z_i|^2)^{k_i}\frac{\partial^{k_i} f(0, \ldots, 0, z_i, 0, \ldots, 0)}{\partial z_i^{k_i}} \qquad i=1, 2, \ldots, n,$$

$$(1-|z_i|^2)^{k_i}(1-|z_j|^2)^{k_j}\frac{\partial^{k_i+k_j} f(0, \ldots, 0, z_i, 0, \ldots, z_j, 0, \ldots, 0)}{\partial z_i^{k_i}\partial z_j^{k_j}} \qquad (1)$$

$$1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n.$$

. . . .

$$(1-|z_1|^2)^{k_1}\ldots(1-|z_n|^2)^{k_n}\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f(z_1, \ldots, z_n)}{\partial z_1^{k_1}\ldots\partial z_n^{k_n}}$$

принадлежит $L^p(\omega_1, \ldots, \omega_n)$.

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если* $f \in H^p(\omega_1, \dots, \omega_n)$, *то функция* $f(z_1, \dots, z_l, 0, \dots, 0)$ *принадлежит классу* $H^p(\omega_1, \dots, \omega_l)$, $l = 1, 2, \dots, n$, *при этом имеет место оценка*

$$\|f(z_1, \dots, z_l, 0, \dots, 0)\|_{H^p(\omega_1, \dots, \omega_l)} \leqslant \mathrm{const}\, \|f\|_{H^p(\omega_1, \dots, \omega_n)}.$$

Доказательство. Используя субгармоничность функции $|f(z_1, \dots, z_n)|^p$, получаем

$$|f(z_1, \dots, z_l, 0, \dots, 0)|^p \leqslant \int\limits_{T^{n-l+1}} |f(z_1, \dots, z_l, \rho_{l+1}\xi_{l+1}, \dots, \rho_n\xi_n)|^p \times$$

$$\times\, dm_{n-l+1}(\xi_{l+1}, \dots, \xi_n) \tag{2}$$

$$\rho_j > 0, \quad j = l+1, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

Умножим обе части этого неравенства на $\rho_{l+1}\omega_{l+1}(1-\rho_{l+1}) \dots \rho_n\omega_n(1-\rho_n)$ и положим $z_i = \rho_i\xi_i$, $i = l+1, \dots, n$. Теперь, проинтегрировав неравенство (2), будем иметь

$$\mathrm{const}\, |f(z_1, \dots, z_l, 0, \dots, 0)|^p \leqslant \int\limits_{U^{n-l+1}} |f(z_1, \dots, z_n)|^p \times$$

$$\times\, \omega_{l+1}(1-|z_{l+1}|) \dots \omega_n(1-|z_n|)\, dm_{2(n-l+1)}(z_{l+1}, \dots z_n).$$

Умножим обе части полученного неравенства на $\omega_1(1-|z_1|) \dots \omega_l(1-|z_l|)$ и проинтегрируем. В итоге получим

$$\int\limits_{U^l} |f(z_1, \dots, z_l, 0, \dots, 0)|^p \omega_1(1-|z_1|) \dots \omega_l(1-|z_l|)\, dm_{2l}(z_1, \dots, z_l) \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \int\limits_{U^n} |f(z_1, \dots, z_n)|^p \omega_1(1-|z_1|) \dots \omega_n(1-|z_n|)\, dm_{2n}(z_1, \dots, z_n) \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\, \|f\|_{H^p(\omega_1, \dots, \omega_n)}.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем для $m = (m_1, \dots, m_n) \in Z_+^n$ обозначим через

$$D_m = (\xi, z) = \frac{m+1}{\pi^n} \frac{(1-|\xi|^2)^m}{(1-\bar{\xi}z)^{m+2}} =$$

$$= \frac{(m_1+1) \dots (m_n+1)}{\pi^n} \frac{(1-|\xi_1|^2)^{m_1} \dots (1-|\xi_n|^2)^{m_n}}{(1-\bar{\xi}_1 z_1)^{m_1+2} \dots (1-\bar{\xi}_n z_n)^{m_n+2}}$$

многомерное ядро М. М. Джрбашяна (см. [2, 3]).

$$\delta_m(\xi, z) = \frac{\left(1-(1-\bar{\xi}_1 z_1)^{m_1+1}\right)\ldots\left(1-(1-\bar{\xi}_n z_n)^{m_n+1}\right)}{\bar{\xi}_1 \ldots \bar{\xi}_n},$$

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad z = z_1, \ldots, z_n) \in U^n.$$

Пусть $F(z_1, \ldots, z_n)$ голоморфная в U^n функция. Тогда по теореме М. М. Джрбашяна (см. [2, 3]) она допускает следующее представление

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \int\limits_{U^n} D_m(\xi, z) F(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, dm_{2n}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \qquad (3)$$

Будем предполагать, что m_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ достаточно большие числа. Имеет место следующее утверждение

Лемма 2. *Если*

$$(1-|z_1|^2)^{k_1} \ldots (1-|z_l|^2)^{k_l} \frac{\partial^l F(z_1, \ldots, z_l, 0, \ldots, 0)}{\partial z_1 \ldots \partial z_l} \in L^p(\omega_1, \ldots, \omega_l)$$

$k_i \geqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, l$, $0 < p < +\infty$, *то функция*

$$G(z_1, \ldots, z_l) = (1-|z_1|^2)^{k_1-1} \ldots (1-|z_l|^2)^{k_l-1} \int\limits_{U^l} \frac{(1-|\xi|^2)^m}{(1-\bar{\xi}z)^{m+1}} \times$$

$$\times\, \delta_m(\xi, z) \frac{\partial^l F(\xi_1, \ldots, \xi_l, 0, \ldots, 0)}{\partial \xi_1 \ldots \partial \xi_l}\, dm_{2l}(\xi_1, \ldots, \xi_l)$$

тоже принадлежит классу $L^p(\omega_1, \ldots, \omega_l)$, $l = 1, 2, \ldots, n$. *При этом*

$$\|G\|_{L^p(\omega_1, \ldots, \omega_l)} \leqslant \mathrm{const} \left\| (1-|z_1|^2)^{k_1} \ldots (1-|z_l|^2)^{k_l} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial^l F(z_1, \ldots, z_l, 0, \ldots, 0)}{\partial z_1, \ldots, \partial z_l} \right\|_{L^p(\omega_1, \ldots, \omega_l)}.$$

Лемма 3. *Если* $(1-|z_i|^2)^{k_i} \dfrac{\partial F(0, \ldots, 0, z_i, 0, \ldots, 0)}{\partial z_i} \in L^p(\omega_i)$,

$i = 1, 2, \ldots, n$, $0 < p < +\infty$, *то* $(1-|z_i|^2)^{k_i-1} F(0, \ldots, 0, z_i, 0, \ldots, 0)$ *тоже принадлежит* $L^p(\omega_i)$. *При этом справедлива оценка*

$$\|(1-|z_i|^2)^{k_i-1} F(0, \ldots, 0, z_i, 0, \ldots, 0)\|_{L^p(\omega_i)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \left\| (1-|z_i|^2)^{k_i} \frac{\partial F(0, \ldots, 0, z_i, 0, \ldots, 0)}{\partial z_i} \right\|_{L^p(\omega_i)}.$$

Теперь, используя леммы 1–3, наметим ход доказательства теоремы. Сначала докажем импликацию $1) \Rightarrow 2)$. Для этого достаточно доказать, что функция

$$(1-|z_1|^2)^{k_1}\dots(1-|z_l|^2)^{k_l}\,\frac{\partial^{k_1+\dots+k_l} f(z_1,\dots,z_l,0,\dots,0)}{\partial z_1^{k_1}\dots\partial z_l^{k_l}}$$

принадлежит классу $L^p(\omega_1,\dots,\omega_l)$, $l=1,2,\dots,n$. Действительно, любую функцию из совокупности (1) можно переписать в указанном виде, изменяя нумерацию переменных.

Используя (3), получим

$$f(z_1,\dots,z_l,0,\dots,0)=\frac{m+1}{n^l}\int\limits_{U^l}\frac{(1-|\xi|^2)^m}{(1-\xi z)^{m+2}}\times$$

$$\times f(\xi_1,\dots,\xi_l,0,\dots,0)\,dm_{2l}(\xi_1,\dots,\xi_l),$$

дифференцируя указанное равенство, будем иметь

$$\frac{\partial^{k_1+\dots+k_l} f(z_1,\dots,z_l,0,\dots,0)}{\partial z_1^{k_1}\dots\partial z_l^{k_l}}=$$

$$=C(m,\pi,k)\int\limits_{U^l}\frac{(1-|\xi|^2)^m}{(1-\bar\xi z)^{m+k+2}}\,f(\xi_1,\dots,\xi_l,0,\dots,0)\,dm_{2l}(\xi_1,\dots,\xi_l).$$

Сначала предположим, что $0<p\leqslant 1$. Тогда

$$\int\limits_{U^l}(1-|z_1|^2)^{k_1p}\dots(1-|z_l|^2)^{k_lp}\left|\frac{\partial^{k_1+\dots+k_l} f(z_1,\dots,z_l,0,\dots,0)}{\partial z_1^{k_1}\dots\partial z_l^{k_l}}\right|^p\times$$

$$\times\omega_1(1-|z_1|)\dots\omega_l(1-|z_l|)\,dm_{2l}(z_1,\dots,z_l)\leqslant$$

$$\leqslant\text{const}\sum_{s_1\dots s_l=0}^{\infty}\ \sum_{r_1=-2^{s_1}}^{2^{s_1}-1}\dots\sum_{r_l=-2^{s_l}}^{2^{s_l}-1}\ \max_{\xi\in\bar\Delta_{s,r}}\times$$

$$\times\left\{(1-|\xi_1|^2)^{m_1p}\dots(1-|\xi_l|^2)^{m_lp}\left|\frac{\partial^{k_1+\dots+k_l} f(\xi_1,\dots,\xi_l,0,\dots,0)}{\partial\xi_1^{k_1}\dots\partial\xi_l^{k_l}}\right|^p\times\right.$$

$$\times\int\limits_{U^l}\omega_1(1-|z_1|)\dots\omega_l(1-|z_l|)(1-|z_1|^2)^{k_1p}\dots(1-|z_l|^2)^{k_lp}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Delta_{s,r}}\frac{dm_{2l}(\xi_1,\dots,\xi_l)}{|1-\bar\xi z|^{m+k+l}}\right)^p dm_{2l}(z_1,\dots,z_l).$$

Положим

$$J_{s,r} = \int\limits_{U^l} \omega_1(1-|z_1|) \dots \omega_l(1-|z_l|)(1-|z_1|)^{k_1 p} \dots (1-|z_l|^2)^{k_l p} \times$$

$$\times \Big(\int\limits_{\Delta_{s,r}} \frac{dm_{2l}(\xi_1, \dots, \xi_l)}{|1-\bar{\xi} z|^{m+k+2}} \Big)^p dm_{2l}(\xi_1, \dots, \xi_l),$$

тогда, учитывая лемму 2 из (⁵), получим оценку

$$J_{s,r} \leqslant \frac{\omega_1(1-\rho_{s_1+1}) \dots \omega_l(1-\rho_{s_l+1})}{(1-\rho_{s_1+1})^{m_1 p-2} \dots (1-\rho_{s_l+1})^{m_l p+2}};$$

$$|\xi_i| = \rho_i; \quad \rho_{s_i} \leqslant \rho_i \leqslant \rho_{s_i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

Теперь, используя лемму 4 из (⁵), получим

$$\int\limits_{U^l} (1-|z_1|^2)^{k_1 p} \dots (1-|z_l|^2)^{k_l p} \left| \frac{\partial^{k_1+\dots+k_l} f(z_1, \dots, z_l, 0, \dots, 0)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_l^{k_l}} \right|^p \times$$

$$\omega_1(1-|z_1|) \dots \omega_l(1-|z_l|)\, dm_{2l}(z_1, \dots, z_l) \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \sum_{s_1 \dots s_l = 0}^{\infty} \sum_{r_1} \dots \sum_{r_l} \max_{\xi \in \bar{\Delta}_{s,r}} \{(1-|\xi_1|^2)^2 \dots (1-|\xi_l|^2)^2 \times$$

$$\times \omega_1(1-|\xi_1|) \dots \omega_l(1-|\xi_l|) |f(\xi_1, \dots, \xi_l, 0, \dots, 0)|^p\} \times$$

$$< \text{const} \int\limits_{U^l} |f(\xi_1, \dots, \xi_l, 0, \dots, 0)|^p \omega_1(1-|\xi_1|) \dots \omega_l(1-|\xi_l|) \times$$

$$\times dm_{2l}(\xi_1, \dots, \xi_l) \leqslant \text{const} \|f\|^p_{H^p(\omega_1, \dots, \omega_n)} < +\infty$$

последняя оценка вытекает из леммы 1. Перейдем теперь к случаю $p > 1$. Имея в виду, что γ удовлетворяет условиям леммы 2 из (⁵), применив неравенство Гельдера, получим

$$\left| \frac{\partial^{k_1+\dots+k_l} f(z_1, \dots, z_l, 0, \dots, 0)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_l^{k_l}} \right|^p \leqslant \int\limits_{U^l} \frac{|D_{m+k}(\xi, z)|}{\gamma_1^p(\xi)} \times$$

$$\times \frac{1}{(1-|\xi|^2)^\cdot} |f(\xi_1, \dots, \xi_l, 0, \dots, 0)|^p dm_{2l}(\xi_1, \dots, \xi_l) \times$$

$$\times \left(\int_{U^l} |D_{m+k}(\xi, z)| \chi_\gamma^q(\xi)\, dm_{2l}(\xi_1, \dots, \xi_l) \right)^{p/q} <$$

$$< \chi_\gamma^p(z) \int_{U^l} \frac{|D_{m+k}(\xi, z)| \cdot |f(\xi_1, \dots, \xi_l, 0, \dots, 0)|^p}{\chi_\gamma^p(\xi) \qquad (1-|\xi|^2)^k}\, dm_{2l}(\xi_1, \dots, \xi_l).$$

Здесь мы снова воспользовались леммой 2 из ([5]). Умножим обе части полученного неравенства на $(1-|z_1|^2)^{k_1 p} \dots (1-|z_l|^2)^{k_l p}\, \omega_1(1-|z_1|) \dots \omega_l(1-|z_l|)$ и проинтегрируем. В итоге получим

$$\left\| (1-|z_1|^2)^{k_1} \dots (1-|z_l|^2)^{k_l} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_l} f(z_1, \dots, z_l, 0, \dots, 0)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_l^{k_l}} \right\|_{L^p(\omega_1, \dots, \omega_l)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \| f(z_1, \dots, z_l, 0, \dots, 0) \|_{H^p(\omega_1, \dots, \omega_l)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \| f \|_{H^p(\omega_1, \dots, \omega_n)} < +\infty.$$

2) $\Rightarrow$ 1)

Пусть все функции из (1) принадлежат классу $L^p(\omega_1, \dots, \omega_n)$. Обозначим

$$F(z_1, \dots, z_n) = \frac{\partial^{k_1 - 1 + \dots + k_n - 1} f(z_1, \dots, z_n)}{\partial z_1^{k_1 - 1} \dots \partial z_n^{k_n - 1}}.$$

Имеем

$$\frac{\partial^n F(z_1, \dots, z_n)}{\partial z_1, \dots, \partial z_n} = \int_{U^n} D_m(\xi, z) \frac{\partial^n F(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\partial \xi_1, \dots, \partial \xi_n}\, dm_{2n}(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Проинтегрировав необходимое число раз, получим

$$F(z_1, \dots, z_n) = F(0, \dots, 0) + F(z_1, 0, \dots, 0) + F(0, z_2, 0, \dots, 0) + \dots +$$

$$+ F(0, \dots, 0, z_{n-1}, z_n) + F(z_1, z_2, 0, \dots, 0) +$$

$$+ F(z_1, 0, z_3, 0, \dots, 0) + \dots + F(0, \dots, 0, z_{n-1}, z_n) + \dots +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{\pi^n} \int_{U^n} \frac{(1-|\xi|^2)^m}{(1-\xi z)^{m+1}} \tilde{c}_m(\xi, z) \frac{\partial^n F(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\partial \xi_1, \dots, \xi_n}\, dm_{2n}(\zeta_1, \dots, \xi_n).$$

С помощью леммы 3 и метода математической индукции (относительно переменных) устанавливается, что функция

$$(1-|z_1|^2)^{k_1-1}\dots(1-|z_n|^2)^{k_n-1}F(z_1,\dots,z_n)$$

принадлежит классу $L^p(\omega_1,\dots,\omega_n)$. Далее, продолжая снижение порядка дифференцирования и используя интегральное представление (3), получим, что

$$f(z_1,\dots,z_n)=f(0,\dots,0)+f(z_1,0,\dots,0)+\dots+f(0,\dots,0,z_n)+$$
$$+f(z_1,z_2,0,\dots,0)+f(z_1,0,z_3,0,\dots,0)+\dots+$$
$$+f(0,\dots,0,z_{n-1},z_n)+\dots+\frac{(-1)^n}{\pi^n}\int\limits_{U^n}\frac{(1-|\xi|^2)^m}{(1-\bar{\xi}z)^{m+1}}\delta_m(\xi,z)\times$$
$$\times\frac{\partial^n f(\xi_1,\dots,\xi_n)}{\partial\xi_1\dots\partial\xi_n}dm_{2n}(\xi_1,\dots,\xi_n).$$

Отсюда получаем, что $f(z_1,\dots,z_n)\in H^p(\omega_1,\dots,\omega_n)$.

Теорема доказана.

Работа выполнена под руководством Ф. А. Шамояна.

Институт математики
Академии наук Армении

Ա. Գ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Բազմաշրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների անիզոտրոպ տարածությունների բնութագրումը ածանցյալների տերմիններով

Աշխատանքում տրվում է $H^p(\omega_1,\dots,\omega_n)$ կշռային անիզոտրոպ տարածությունների լրիվ բնութագրումը ածանցյալների տերմիններով: Ապացուցվում է, որ f ֆունկցիան $H^p(\omega_1,\dots,\omega_n)$ դասից է, այն և միայն այն ժամանակ, երբ (1) հաջորդականության ֆունկցիաները պատկանում են $L^p(\omega_1,\dots,\omega_n)$ դասին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Е. Сенета*, Правильно изменяющиеся функции, Наука, М., 1985. 2 *М. М. Джрбашян*, ДАН АрмССР, т. 3, № 1, с. 3—9 (1945). 3 *М. М. Джрбашян*, Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР. Вып. 2, с. 3—30 (1918). 4 *[illegible] Zhu*, [illegible] of the A[illegible] math. soc., v. [illegible], № 1, p. 253—2[illegible]7 (19[illegible]8). 5 *Ф. А. Шамоян*, Сибирский мат. журнал, т. 31, № 2, с. 195—215 (1990).

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 1991 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Э. А. Даниелян, В. Р. Манукян, К. Р. Татаян

Неравенство Маркова на индексационных классах

(Представлено чл.-корр. АН Армении Ю. Г. Шукуряном 30/XI 1990)

1. Экстремальная задача

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций распределения (ФР) на $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$; $\Omega(t)$ — $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируемая функция на $[a, b]$, причем $\Omega^{(k)}(t) > 0$ для $t \in [a, b]$ и $k = \overline{0, n+1}$; $c_1, \ldots, c_n$ — вещественные константы; $\xi \in [a, b]$.

Экстремальная задача. Найти супремум и инфимум интеграла

$$\int_a^\xi \Omega(t)\, d\sigma(t)$$

на множестве $\mathfrak{M}(c)$ $(c = (c_1, \ldots, c_n))$ ФР из $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих ограничениям

$$F_i(\sigma) \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \int_a^b t^i\, d\sigma(t) = c_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для классов $\mathfrak{M}_0$ — всех ФР на $[a, b]$ и B_L — ФР на $[a, b]$, удовлетворяющих условию $(\sigma(y) - \sigma(x))/(y - x) \leq L$, $-\infty < x < y < \infty$, задача решена в ([1]).

Важность решения экстремальных задач на разных классах ФР обоснована, например, в ([2-4]).

Задача при $\xi = b$ решена в ([5]) для мажоризационных классов. Анализ задачи на мажоризационных классах в общем случае наталкивается на трудности. Выход мы видим в рассмотрении классов с иной структурой—индексационных классов ФР.

Ниже предполагается, что $\mathfrak{M}$ — индексационный с дефектом n класс ФР на $[a, b]$*.

---

* Определение индексационного с дефектом n класса ФР на $[a, b]$ приведено в ([6]). Индексационными являются многие важные классы ФР, например $\mathfrak{M}_0$, B_L, класс унимодальных ФР на $[a, b]$ и др.

Обозначим ($k \geq 1$, $A \subset \mathfrak{M}$, $\sigma \in \mathfrak{M}$): I_k^+ (I_k^-) — множество всех ФР из $\mathfrak{M}$, имеющих индекс k^+ (k^-); $\vec{F}_k(\sigma) = (F_1(\sigma), \dots, F_k(\sigma))$; $\vec{F}_k(\mathfrak{M}) = \{\vec{F}_k(\sigma) : \sigma \in \mathfrak{M}\}$ — пространство моментов порядка k;

$\tilde{I}_k^{\pm} = (\bigcup_{i=1}^{k} I_i^{\pm}) \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} I_i^{\mp}$; $I_k = I_k^+ \cup I_k^-$; $A(\vec{c}) = A \cap \mathfrak{M}(\vec{c})$, $\vec{c} \in \vec{F}_k(\mathfrak{M})$.

Основной результат работы содержится в утверждении.

Теорема. *Пусть* $\vec{c} \in \vec{F}_n(\mathfrak{M})$, $\xi \in [a, b]$. *Тогда*

$$1.\quad \sup_{\sigma \in \mathfrak{M}(\vec{c})} \int_a^{\xi} \Omega(t)\, d\sigma(t) = \sup_{\sigma \in \tilde{I}_{n+2}^{+}(\vec{c})} \int_a^{\xi} \Omega(t)\, d\sigma(t)$$

$$2.\quad \inf_{\sigma \in \mathfrak{M}(\vec{c})} \int_a^{\xi-} \Omega(t)\, d\sigma(t) = \inf_{\sigma \in \tilde{I}_{n+2}^{-}(\vec{c})} \int_a^{\xi-} \Omega(t)\, d\sigma(t)$$

$$3.\quad \sup_{\sigma \in \mathfrak{M}(\vec{c})} \int_a^{\xi+} \Omega(t)\, d\sigma(t) = \max_{\sigma \in \tilde{I}_{n+2}^{+}(\vec{c})} \int_a^{\xi+} \Omega(t)\, d\sigma(t)$$

$$4.\quad \inf_{\sigma \in \mathfrak{M}(\vec{c})} \int_a^{\xi} \Omega(t)\, d\sigma(t) = \min_{\sigma \in \tilde{I}_{n+2}^{-}(\vec{c})} \int_a^{\xi} \Omega(t)\, d\sigma(t).$$

2. Свойства отображения $\int_a^{\xi} \Omega\, d\sigma$

Нам понадобятся два факта из ([6])

1. Для любого $\vec{c} \in \vec{F}_n(\mathfrak{M})$ существуют и единственны ФР $\sigma_{\vec{c}}^{+} \in I_{n+1}^{+}(\vec{c})$ и $\sigma_{\vec{c}}^{-} \in I_{n+1}^{-}(\vec{c})$.

2. Если $\sigma_{\vec{c}}^{+} = \sigma_{\vec{c}}^{-}$, то множество $\mathfrak{M}(\vec{c})$ одноэлементно. Если $\sigma_{\vec{c}}^{+} \neq \sigma_{\vec{c}}^{-}$, то существуют непрерывные, однопараметрические семейства $\{\eta_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$* и $\{\rho_\beta : \beta \in [0, 1]\}$ ФР такие, что $\eta_0 = \rho_0 = \sigma_{\vec{c}}^{-}$, $\eta_1 = \rho_1 = \sigma_{\vec{c}}^{+}$, $\eta_\alpha \in I_{n+2}^{+}(\vec{c})$ для $\alpha \in (0, 1)$ и $\rho_\beta \in I_{n+2}^{-}(\vec{c})$ для $\beta \in (0, 1)$.

---

* Т. е. $\eta_{\alpha_1} \neq \eta_{\alpha_2}$ при $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и $\eta_{\alpha_n} \Rightarrow \eta_{\alpha_0}$ при $\alpha_n \to \alpha_0$ (значок $\Rightarrow$ означает слабую сходимость).

Пусть

$$\sigma^{+}_{c} \neq \sigma^{-}_{c} \quad \text{и} \quad J_{\sigma}(\xi) = \int_{a}^{\xi} \Omega(t)\, d\sigma(t),$$

где $\sigma \in \mathfrak{M}$, $\xi \in [a, b]$.

Функции J_{σ} непрерывны слева на $[a, b]$ и $J_{\sigma}(a) = 0$ для всех $\sigma \in \mathfrak{M}$. Так как $\Omega(t) > 0$ при $t \in [a, b]$, то $J_{\sigma}(\xi)$ не убывают по ξ.

Далее, из $\sigma_k \Rightarrow \sigma$ при $k \to \infty$ следует $J_{\sigma_k} \Rightarrow J_{\sigma}$. Следовательно, семейства распределений $\{J_{\tau_{1\alpha}} : \alpha \in [0, 1]\}$ и $\{J_{\rho_{\beta}} : \beta \in [0, 1]\}$ непрерывны.

Определение 1. *Функция f имеет на $[a, b]$ m строгих перемен знака, если существуют множества $B_0(f) < \ldots < B_m(f)$* из $[a, b]$ такие, что $(-1)^i f(x) > 0$ (или $(-1)^{i+1} f(x) > 0$) при $x \in B_i(f)$, $i = \overline{0, m}$ и $f(x) = 0$ при $x \in [a, b] \setminus \bigcup_{i=0}^{m} B_i(f)$.*

Лемма 1. *Для любого распределения $J_{\tau_{1\alpha}}$ ($J_{\rho_{\beta}}$) и для любого J_{μ}, $\mu \in \mathfrak{M}(\vec{c})$, функция $J_{\mu} - J_{\tau_{1\alpha}}$ ($J_{\mu} - J_{\rho_{\beta}}$) имеет либо $n+1$, либо $n+2$ строгих перемен знака на $[a, b]$.*

Доказательство. Предположим, что функция $J_{\mu} - J_{\tau_{1\alpha}}$ имеет более $n+2$ строгих перемен знака. Тогда существуют $a < x_0 < < x_1 < \ldots < x_{n+3} \leqslant b$ такие, что $(-1)^i [J_{\mu}(x_i) - J_{\tau_{1\alpha}}(x_i)] > 0$, $i = = \overline{0, n+3}$. Кроме того, $J_{\mu}(a) = J_{\tau_{1\alpha}}(a) = 0$. Следовательно, существуют точки $y_0 \in [a, x_0)$, $y_1 \in [x_0, x_1)$, $\ldots$, $y_{n+3} \in [x_{n+2}, x_{n+3})$ такие, что функция $(-1)^i [\mu(t) - \tau_{1\alpha}(t)]$ возрастает в точке y_i, $i = \overline{0, n+3}$, что противоречит условию $\tau_{1\alpha} \in I_{n+2}(\vec{c})$.

Равенство $\vec{F}_n(\sigma) = \vec{c}$ запишем в виде

$$\int_{a}^{b+} u_i(t)\, dJ_{\sigma}(t) = c_i, \quad i = \overline{0, n},$$

где $u_i(t) = \dfrac{t^i}{\Omega(t)}$, $i = \overline{0, n}$, $c_0 = 1$.

Очевидно, что последовательности $u_0, \ldots, u_k$, $k = \overline{0, n}$, образуют T_+-системы на $[a, b]$. Из условия $\Omega^{(k)}(t) > 0$ для $t \in [a, b]$ и $k = \overline{0, n}$ следует (см. [7], с. 52—54), что последовательности $-u'_0, \ldots, -u'_k$, $k = \overline{0, n}$, также образуют T_+-системы. Следовательно, выполнены условия мажоризационной теоремы (см. [8], с. 149) и функция $J_{\mu} - J_{\tau_{1\alpha}}$ не может иметь менее $n+1$ строгих перемен знака.

Лемма 1 доказана.

* Под $X < Y$ ($X, Y \subset R^1$) понимаем $x < y$ для всех $x \in X$, $y \in Y$.

Пусть функция $f(t)$ имеет k строгих перемен знака на $[a, b]$. Наряду с множествами $B_i(f)$ строгого знакопостоянства рассмотрим множества $P_0(f) = (-\infty, \inf B_1(f)]$, $P_i(f) = [\sup B_i(f), \inf B_{i+1}(f)]$, $i = \overline{1, k-1}$, $P_k(f) = [\sup B_{k-1}(f), +\infty)$.

Зафиксируем ФР $\sigma \in \mathfrak{M}(c)$. Рассмотрим два класса функций $\{\Delta_\alpha = f_\sigma - f_{\gamma_\alpha} : \alpha \in [0, 1]\}$ и $\{\delta_\beta = f_\sigma - f_{\rho_\beta} : \beta \in [0, 1]\}$.

Число α (число β) назовем: параметром первого типа, если функция Δ_α (δ_β) имеет $n+2$ строгих перемен знака (в этом случае на последнем множестве строгого знакопостоянства функция Δ_α (δ_β) отрицательна (положительна)); параметром второго типа, если функция Δ_α (δ_β) имеет $n+1$ строгих перемен знака, причем на последнем множестве строгого знакопостоянства она отрицательна; параметром третьего типа, если функция Δ_α (δ_β) имеет $n+1$ строгих перемен знака, причем на последнем множестве строгого знакопостоянства она положительна.

Каждому $\alpha \in [0, 1]$ ($\beta \in [0, 1]$) сопоставим набор из $n+3$ множеств $X_0(\alpha), \ldots, X_{n+2}(\alpha)$ ($Y_0(\beta), \ldots, Y_{n+2}(\beta)$) следующим образом. Если α (β) есть:

1. параметр первого типа, то

$$X_i(\alpha) = P_i(\Delta_\alpha),\ i = \overline{0, n+2}\ (Y_i(\beta) = P_i(\delta_\beta),\ i = \overline{0, n+2});$$

2. параметр второго типа, то

$$X_i(\alpha) = P_{i-1}(\Delta_\alpha),\ i = \overline{1, n+2},\quad X_0(\alpha) = (-\infty, \inf B_0(\Delta_\alpha)],$$

$$(Y_i(\beta) = P_i(\delta_\beta),\ i = \overline{0, n+1},\quad Y_{n+2}(\beta) = [\sup B_{n+1}(\delta_\beta), +\infty));$$

3. параметр третьего типа, то

$$X_i(\alpha) = P_i(\Delta_\alpha)\quad i = \overline{0, n+1},\quad X_{n+2}(\alpha) = [\sup B_{n+1}(\Delta_\alpha), +\infty)$$

$$(Y_i(\beta) = P_{i-1}(\delta_\beta),\ i = \overline{1, n+2},\quad Y_0(\beta) = (-\infty, \inf B_0(\delta_\beta)]).$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} &(-1)^{n-i} \Delta_\alpha(t) \leqslant 0 \text{ при } t \in \operatorname{Int} X_i(\alpha),\ i = \overline{0, n+2}, \\ &(-1)^{n-i} \delta_\beta(t) \geqslant 0 \text{ при } t \in \operatorname{Int} Y_i(\beta),\ i = \overline{0, n+2}. \end{aligned} \tag{1}$$

При этом ни для какого i не существует интервала X, для которого выполнено строгое включение $X \supset \operatorname{Int} X_i(\alpha)$ и $(-1)^{n-i} \Delta_\alpha(t) \leqslant 0$ при $t \in X$. Ни для какого i не существует интервала $Y \supset \operatorname{Int} Y_i(\beta)$ и $(-1)^{n-i} \delta_\beta(t) \geqslant 0$ при $t \in Y$.

Заметим также, что $X_i(0) = Y_{i+1}(0)$, $X_{i+1}(1) = Y_i(1)$.

Определение 2. *Отображение* $Z(\gamma):\gamma\in[0,1]\to Z(\gamma)\subset R^1$ *непрерывно, если из* $\gamma_i\to\gamma^0$, $x_i\to x^0$, *где* $\gamma^0, \gamma_i\in[0,1]$, $i\geq 1$, $x_i\in Z(\gamma_i)$, *следует* $x^0\in Z(\gamma^0)$.

Лемма 2 *Отображения* $X_i(\alpha)$, $Y_i(\beta)$, $(i=\overline{0,\ n+2};\ \alpha,\beta\in[0,1])$ *непрерывны.*

Доказательство. Пусть $\alpha_j\to\alpha$ при $j\to\infty$. Обозначим через $a_i^{(j)}$, $b_i^{(j)}$ границы отрезка $X_i(\alpha_j)$. Определим $a_0=-\infty$. Возьмем произвольную точку a_1 сгущения последовательности $\{a_1^{(j)}\}_{j\geq 1}$. Пусть для удобства $a_1=\lim\limits_{j\to\infty}a_1^{(j)}$. Проделаем ту же операцию с последовательностями $\{a_i^{(j)}\}_{j\geq 1}$, $i=\overline{2,\ n+2}$, и $\{b_i^{(j)}\}_{j\geq 1}$, $i=\overline{0,\ n+1}$. Положим $b_{n+2}=+\infty$.

Итак,

$$\lim_{j\to\infty}a_i^{(j)}=a_i,\quad \lim_{j\to\infty}b_i^{(j)}=b_i,\quad i=\overline{0,\ n+2},\tag{2}$$

причем

$$-\infty=a_0<a_1\leq b_0\leq a_2<b_1\leq\ldots\leq a_{n+1}\leq b_n\leq a_{n+2}\leq$$
$$\leq b_{n+1}<b_{n+2}=+\infty.$$

Из (1) и (2) следует, что для $i=\overline{0,\ n+2}$

$$(-1)^{n-i}\Delta_\alpha(t)\leq 0\tag{3}$$

при $t\in(a_i,\ b_i)$, если $a_i\neq b_i$.

Из (3) и $\bigcup\limits_{i=0}^{n+2}[a_i,\ b_i]=R^1$ следует, что $a_i\neq b_i$, $i=\overline{0,\ n+2}$, так как в противном случае функция Δ_α имела бы не более n строгих перемен знака, что противоречит лемме 1. Отсюда и из определения $X_i(\alpha)$ следует $[a_i,\ b_i]\subset X_i(\alpha)$, $i=\overline{0,\ n+2}$. Для любого i из $x_j\in\in[a_i^{(j)},\ b_i^{(j)}]$ и $x_j\to x^0$ вытекает, что $x^0\in[a_i,\ b_i]$. Следовательно, $x^0\in X_i(\alpha)$.

Непрерывность отображений $Y_i(\beta)$ доказывается аналогично.

3. Доказательство теоремы

В случае $\sigma^+_{\vec{c}}=\sigma^-_{\vec{c}}$ утверждение теоремы очевидно.

Пусть $\sigma^+_{\vec{c}}\neq\sigma^-_{\vec{c}}$.

Лемма 3. *Для любой* ФР $\sigma\in\mathfrak{M}(\vec{c})$ *и любой точки* $\xi\in[a,\ b]$ *существует* ФР $\nu\in I_{n+2}(\vec{c})$ *такая, что* $J_\nu(t)\geq J_\sigma(t)$ $(J_\nu(t)\leq J_\sigma(t))$ *в некоторой окрестности точки* ξ.

Доказательство. Если не существует такого i, $0\leq i\leq n+2$, что $n-i$ четно и $\xi\in Y_i(0)$, то в некоторой окрестности точки ξ имеет место $\delta_0(t)<0$. В этом случае положим $\nu=\sigma^-_{\vec{c}}$.

Пусть существует i такое, что $n-i$ четно и $\xi\in Y_i(0)$.

Случай I. $i \neq n + 2$. а) Предположим, что $\xi \in Y_i(1)$. Пусть $\beta' = \sup\{\beta : \xi \in Y_i(\beta)\}$. Согласно лемме 2, $\xi \in Y_i(\beta')$. В силу сделанного предположения $\beta' < 1$, и, следовательно, существует последовательность $\{\beta_j\}_{j \geq 1}$ такая, что $\xi \in Y_i(\beta_j)$ и $\beta_j \to \beta'$. Пусть для некоторого β_j не существует такого k, что $n - k$ четно и $\xi \in Y_k(\beta_j)$. Тогда $\delta_{\beta_j}(t) \leq 0$ в некоторой окрестности точки ξ. В этом случае полагаем $\nu = \rho_{\beta_j}$. Если же для всех β_j, $j \geq 1$, существуют k_j такие, что $n - k_j$ четны и $\xi \in Y_{k_j}(\beta_j)$, то существует m, $m \neq i$, такое, что $n - m$ четно и $\xi \in Y_m(\beta_j)$ для бесконечного числа элементов последовательности $\{\beta_j\}$. По лемме 2 $\xi \in Y_m(\beta')$. Так как $n - i$ и $n - m$ четны, то $m \neq i - 1$, $m \neq i + 1$. Вместе с $m \neq i$ это противоречит включению $\xi \in Y_i(\beta')$.

б) Предположим, что $\xi \in Y_i(1) = X_{i+1}(1)$. Пусть $\alpha' = \inf\{\alpha : \xi \in X_{i+1}(\alpha)\}$. Согласно лемме 2, $\xi \in X_{i+1}(\alpha')$. Если $\alpha' = 0$, то $\xi \in X_{i+1}(0) = Y_{i+2}(0)$. Это противоречит условию $\xi \in X_{i+1}(\alpha')$. Поэтому $\alpha' \neq 0$ и дальнейшее рассмотрение аналогично приведенному в а).

Случай II, $i = n + 2$. а) При $\xi \in Y_{n+2}(1)$ доказательство аналогично доказательству пункта а) случая I.

б) Пусть $\xi \in Y_{n+2}(1)$. Так как $Y_{n+2}(1) \subset Y_{n+1}(1)$, то $\xi \in Y_{n+1}(1)$. Точка ξ не может совпадать с левым концом отрезка $Y_{n+1}(1)$, так как в этом случае множества $Y_{n+1}(1)$ и $Y_{n+2}(1)$ совпадают, что невозможно. Так как $\xi \in Y_{n+1}(1)$ и не совпадает с левым концом отрезка $Y_{n+1}(1)$, то $\delta_1(t) \leq 0$ в некоторой окрестности точки ξ. В этом случае полагаем $\nu = \sigma_{\vec{c}}^{1}$.

Итак, доказано существование такой ФР $\nu \in I_{n+2}(\vec{c})$, что $J_\nu - J_\nu \leq 0$ в некоторой окрестности точки ξ. Случай $J_\nu - J_\nu \geq 0$ рассматривается аналогично. Лемма 3 доказана.

Теорема следует из леммы 3 и утверждения:

$$\inf_{\sigma \in \mathfrak{M}(\vec{c})} J_\sigma(\xi) \quad \text{и} \quad \sup_{\sigma \in \mathfrak{M}(\vec{c})} J_\sigma(\xi + 0)$$

достижимы. Докажем последнее.

Пусть $d = \inf\limits_{\sigma \in \mathfrak{M}(\vec{c})} J_\sigma(\xi)$. Пусть последовательность ФР $\sigma_i \in \mathfrak{M}(\vec{c})$, $i \geq 1$ такова, что $J_{\sigma_i}(\xi) \to d$. Выберем подпоследовательность последовательности $\{\sigma_i\}$, слабо сходящуюся к некоторой ФР $\sigma \in \mathfrak{M}(\vec{c})$. Покажем, что $J_\sigma(\xi) = d$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\xi' < \xi$ такое, что $J_\sigma(\xi) - J_\sigma(\xi') < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и ξ' — точка непрерывности J_σ. Существует номер N такой, что для любого $i > N$ выполнено неравенство

$|J_{\sigma_j}(\xi') - J_0(\xi')| < \frac{\varepsilon}{2}$, из которого следует, что $J_0(\xi) - J_{\sigma_j}(\xi') < \varepsilon$, $j > N$. Так как $J_{\sigma_j}(\xi') \leqslant J_{\sigma_j}(\xi)$, то $J_0(\xi) - J_{\sigma_j}(\xi) < \varepsilon$, откуда следует $J_0(\xi) - d \leqslant \varepsilon$. Последнее неравенство влечет $J_0(\xi) = d$.

Ереванский государственный университет

Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Վ. Ռ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ, Կ. Ռ. ԹԱԹԱԼՅԱՆ

Մարկովի անհավասարություններ ինդեքսացիոն դասերի վրա

Մարկովի էքստրեմալ խնդիրը դիտարկվում է բաշխման ֆունկցիաների n դեֆեկտ ունեցող ինդեքսացիոն $\mathfrak{M}$ դասի վրա։

n չեբիշևյան ընդհանրացված մոմենտային սահմանափակումների դեպքում ապացուցվում է, որ $\mathfrak{M}$ դասում էքստրեմումները հասանելի են ոչ ավելի քան $n+2$ ինդեքս ունեցող բաշխման ֆունկցիաների վրա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Г. Крейн, А. А. Нудельман*, Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, Наука, М., 1973. [2] *С. Карлин, В. Стадден*, Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике, Наука, М., 1976. [3] *R. Barlow, A. Marshall*, I and II Ann. Math. Stat., v ., p. 1234–1274 (1964). [4] *J. H. B. Kemperman*, Moments problems with convexity conditions, I. In Optimizing methods statistics, p. 115—178, 1971. [5] *Э. А. Даниелян, К. Р. Таталян*, Межвузовский сборник научных трудов, ЕГУ, Прикладная математика, № 7, с. 127—141, 1988. [6] *В. Р. Манукян*, ДАН Армении, т. 91, № 4, с. 1 8(1990). [7] *S. Karlin*, Total positivity and applications. Stanford, California, Stanford Univ. press, 1968. [8] *Э. А. Даниелян, К. Р. Таталян*, Межвузовский сборник научных трудов, ЕГУ, Математика, № 6, с. 148—158, 1988.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 92 1991 № 1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 536.24

Р. С. Минасян

Течение тепла в призматическом теле прямоугольного сечения, движущемся с постоянной скоростью

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. Б. Нерсесяном 23/XI 1990)

Рассмотрим плоское нестационарное течение тепла в призматическом теле прямоугольного поперечного сечения, движущемся с постоянной скоростью, компоненты которой равны v_x, v_y, когда внутри тела действуют источники тепла, интенсивность которых линейно зависит от температуры*. Дифференциальное уравнение теплопроводности с учетом конвекции будет иметь вид [1]

$$\frac{DU}{Dt} - a\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = \alpha U + \frac{1}{\rho c} w(x, y, t), \tag{1}$$

где $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}$ обозначает так называемую субстанциональную, или полную, производную [1], $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ — коэффициент температуропроводности, λ — коэффициент теплопроводности, c — теплоемкость, ρ — плотность, $w(x, y, t)$ — интенсивность тепловыделения, не зависящая от температуры $U(x, y, t)$. Предположим, что на границе области происходит теплообмен с окружающей средой. Начальное условие и условия на границе будут

$$U(x, y, 0) = L(x, y); \quad -\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = h_0[T_0(y, t) - U(0, y, t)];$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=b} = h_1[T_1(y, t) - U(b, y, t)];$$

$$-\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = h_2[S_0(x, t) - U(x, 0, t)]; \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=d} = h_3[S_1(x, t) - U(x, d, t)].$$

---

* Внутри твердого тела тепло может образовываться в результате пропускания электрического тока, при радиоактивном распаде [2] и т. п.

Для нахождения решения применим преобразование Лапласа, предполагая, что как U, так и $\frac{\partial U}{\partial t}$ имеют порядок роста не выше e^{qt}, где $q > \alpha$ — некоторая постоянная величина. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы граничные функции $S(x, t)$; $T_j(y, t)$ $(j = 1, 2)$ и интенсивность тепловыделения $w(x, y, t)$ удовлетворяли этому условию и, вместе с тем, чтобы начальное распределение $f(x, y)$ было ограниченным.

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (1), получим

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial y^2} - 2\alpha_1 \frac{\partial U^*}{\partial x} - 2\alpha_2 \frac{\partial U^*}{\partial y} - \frac{p-\beta}{a} U^* =$$

$$= -\frac{1}{\lambda} w^*(x, y, p) - \frac{f(x, y)}{a}. \tag{3}$$

Здесь

$$U^*(x, y, p) = \int_0^\infty e^{-pt} U(x, y, t)\, dt;$$

$$w^*(x, y, p) = \int_0^\infty e^{-pt} w(x, y, t)\, dt; \tag{4}$$

$$\operatorname{Re} p = \beta > q; \qquad \alpha_1 = \frac{v_x}{2a}; \qquad \alpha_2 = \frac{v_y}{2a}.$$

Рассмотрим далее систему функций $\{\eta_k(y)\}$:

$$\eta_k(y) = \frac{e^{\alpha_2 y}}{N_k}\left(\cos \gamma_k y + \frac{h_2 - \alpha_2}{\gamma_k} \sin \gamma_k y\right), \tag{5}$$

где

$$N_k = \frac{1}{\gamma_k}\left\{\frac{[\gamma_k^2 + (h_2 - \alpha_2)^2]d}{2} + \frac{(h_2 + h_3)[\gamma_k^2 + (h_2 - \alpha_2)(h_3 + \alpha_2)]}{2[\gamma_k^2 + (h_3 + \alpha_2)^2]}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

удовлетворяющих уравнению

$$\eta_k''(y) - 2\alpha_2 \eta_k'(y) + (\gamma_k^2 + \alpha_2^2)\eta_k(y) = 0 \tag{6}$$

и граничным условиям

$$-\eta_k'(0) + h_2\eta_k(0) = \eta_k'(d) + h_3\eta_k(d) = 0, \tag{7}$$

причем собственные числа γ_k являются корнями трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma_k d = \frac{(h_2 + h_3)\gamma_k}{\gamma_k^2 - (h_2 - \alpha_2)(h_3 + \alpha_2)}. \tag{8}$$

Функции $\eta_k(y)$, ортогональные и нормированные с весом $e^{-2\alpha_2 y}$, составляют, одновременно с функциями $\gamma_k \cos \gamma_k y + (h_2 - \alpha_2) \sin \gamma_k y$, полную в $(0, d)$ систему. Представим функцию $U^*(x, y, p)$ в виде ряда по $\eta_k(y)$:

$$U^*(x, y, p) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x, p) \eta_k(y). \tag{9}$$

Здесь $f_k(x, p) = \int_0^d e^{-2\alpha_2 y} U^*(x, y, p) \eta_k(y) dy$. Умножив обе части уравнения (3) на $e^{-2\alpha_2 y} \eta_k(y)$ и проинтегрировав от 0 до d, будем иметь

$$f_k''(x, p) - 2\alpha_1 f_k'(x, p) - \left(\gamma_k^2 + \alpha_2^2 + \frac{p - \alpha}{a}\right) f_k(x, p) = -w_k(x, p), \tag{10}$$

где

$$w_k(x, p) = \int_0^d e^{-2\alpha_2 y} \left[\frac{1}{\lambda} w^*(x, y, p) + \frac{1}{a} L(x, y)\right] \eta_k(y) dy +$$

$$+ h_2 \eta_k(0) S_0^*(x, p) + h_3 \eta_k(d) e^{-2\alpha_2 d} S_1^*(x, p). \tag{11}$$

Решая уравнение (10) и удовлетворяя соответствующим граничным условиям, получим

$$f_k(x, p) = \frac{e^{\alpha_1 x}}{G_{k, p}} \left\{ [\delta_{k, p} \operatorname{ch} \delta_{k, p} x + (h_0 - \alpha_1) \operatorname{sh} \delta_{k, p} x] \times \right.$$

$$\times \left[h_1 T_k^{(1)}(p) + \frac{1}{\delta_{k, p}} \int_x^b e^{-\alpha_1 x_1} w_k(x_1, p) (\delta_{k, p} \operatorname{ch} \delta_{k, p}(b - x_1) + \right.$$

$$\left. + (h_1 + \alpha_1) \operatorname{sh} \delta_{k, p}(b - x_1)) dx_1 \right] + [\delta_{k, p} \operatorname{ch} \delta_{k, p}(b - x) +$$

$$+ (h_1 + \alpha_1) \operatorname{sh} \delta_{k, p}(b - x)] \left[h_0 T_k^{(0)}(p) + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{\delta_{k, p}} \int_0^x e^{-\alpha_1 x_1} w_k(x_1, p) (\delta_{k, p} \operatorname{ch} \delta_{k, p} x_1 + (h_0 - \alpha_1) \operatorname{sh} \delta_{k, p} x_1) dx_1 \right] \right\}. \tag{12}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\delta_{k, p} = \sqrt{\gamma_k^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \frac{p - \alpha}{a}}, \quad T_k^{(i)}(p) = \int_0^d e^{-2\alpha_2 y} T_i^*(y, p) \eta_k(y) dy; \tag{13}$$

$$G_{k, p} = [\delta_{k, p}^2 + (h_0 - \alpha_1)(h_1 + \alpha_1)] \operatorname{sh} \delta_{k, p} b + (h_0 + h_1) \delta_{k, p} \operatorname{ch} \delta_{k, p} b$$

Ниже нам понадобятся нули $G_{k, p}$. Легко видеть, что уравнение

$$[\delta^2 + (h_0 - \alpha_1)(h_1 + \alpha_1)] \operatorname{sh} \delta b + (h_0 + h_1) \delta \operatorname{ch} \delta b = 0 \tag{14}$$

не имеет комплексных корней. В самом деле, пусть δ_j корень уравнения (14). Тогда, очевидно, и $\overline{\delta}_j$ является корнем (14). Рассмотрим интеграл

$$(\delta_j^2 - \overline{\delta}_j^2)\int_0^b \psi_j(x)\overline{\psi}_j(x)\,dx, \qquad (15)$$

где $\psi_j(x) = \delta_j \operatorname{ch}\delta_j x + (h_0 - \alpha_1)\operatorname{sh}\delta_j x$. Функция $\psi_j(x)$ удовлетворяет уравнению $\psi_j'' - \delta_j^2\psi_j = 0$ и условиям $-\psi_j'(0) + (h_0 - \alpha_1)\psi_j(0) = \psi_j'(b) + (h_1 + \alpha_1)\psi_j(b) = 0$. Интегрируя (15) по частям и учитывая уравнение и граничные условия для $\psi_j(x)$, получим $(\delta_j^2 - \overline{\delta}_j^2)\int_0^b \psi_j(x)\overline{\psi}_j(x)\,dx = 0$, откуда имеем $\delta_j^2 = \overline{\delta}_j^2$, так как под интегралом стоит положительная функция. Уравнение (14) имеет бесконечное множество простых мнимых корней $\delta_j = i\mu_j$, расположенных в границах ([3]) $j\pi < \mu_j b < j\pi + \frac{(h_0 + h_1)b}{j\pi}$. Кроме того, в случае, если $(\alpha_1 - h_0)(\alpha_1 - h_1) > \frac{h_0 \quad h_1}{b}$, уравнение (14) имеет простой действительный корень $\operatorname{th}\delta b = -\frac{\delta(h_0 + h_1)}{(\alpha_1 - h_0)(\alpha_1 + h_1) - \delta^2}$, а при $(\alpha_1 - h_0)(\alpha_1 + h_1)b = h_0 + h_1$ — кратный корень в нуле.

Согласно теореме обращения ([4]) переход от преобразованной функции к оригиналу осуществляется посредством обратного преобразования

$$U(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt}\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x, p)\,\eta_k(y)\,dp, \qquad (16)$$

где $\sigma > \beta$. Полюса $-(\gamma_k^2 + \mu_j^2 + \alpha_1^2 + \alpha^2)a + \alpha$ подынтегральной функции расположены все на отрицательной действительной оси. Рассмотрим в плоскости p односвязную область Q_l, ограниченную контуром l, не проходящим ни через один полюс и составленным из отрезков прямых $\operatorname{Re} p = \sigma\ (-R_n \leqslant \operatorname{Im} p \leqslant R_n)$, $\operatorname{Im} p = \pm R_n\ (0 < \operatorname{Re} p \leqslant \sigma)$, дуг окружности $|p| = R_n$, двубережных разрезов вдоль отрицательной оси оси и дуг окружностей вокруг полюсов функции $f_k(x, p)$ (см. рисунок).

Функция $f_k(x, p)$ регулярна в замкнутой области $\overline{Q}_l$, и согласно теореме Коши ([5]) интеграл, взятый по контуру l, равен нулю. Согласно лемме Жордана интеграл по дугам окружности $|p| = R_n$ так же, как интегралы по отрезкам BC и $B'C'$, стремится к нулю при неограниченном возрастании R_n. Применяя теорию вычетов и воспользовавшись теоремой Бореля о свертке ([4]), для функции $U(x, y, t)$ получим выражение

$$U^{i}(x, y, t) = 2abe^{\alpha_1 x} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} M_{j} \eta_k (y) e^{-m_{j,k} t} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^d e^{-2\alpha_2 y_1} \eta_k (y_1) \int_0^t [h_1 \xi_j (x) T_1 (y_1, t_1) + h_0 \zeta_j (x) T_0 (y_1, t_1)] \times \right.$$

$$\times e^{m_{j,k} t_1} dt_1 dy_1 + \frac{\xi_j (x)}{\mu_j} \int_x^b e^{-\alpha_1 x_1} \zeta_j (x_1) \left[\int_0^t (h_2 \eta_k (0) S_0 (x_1, t_1) + \right.$$

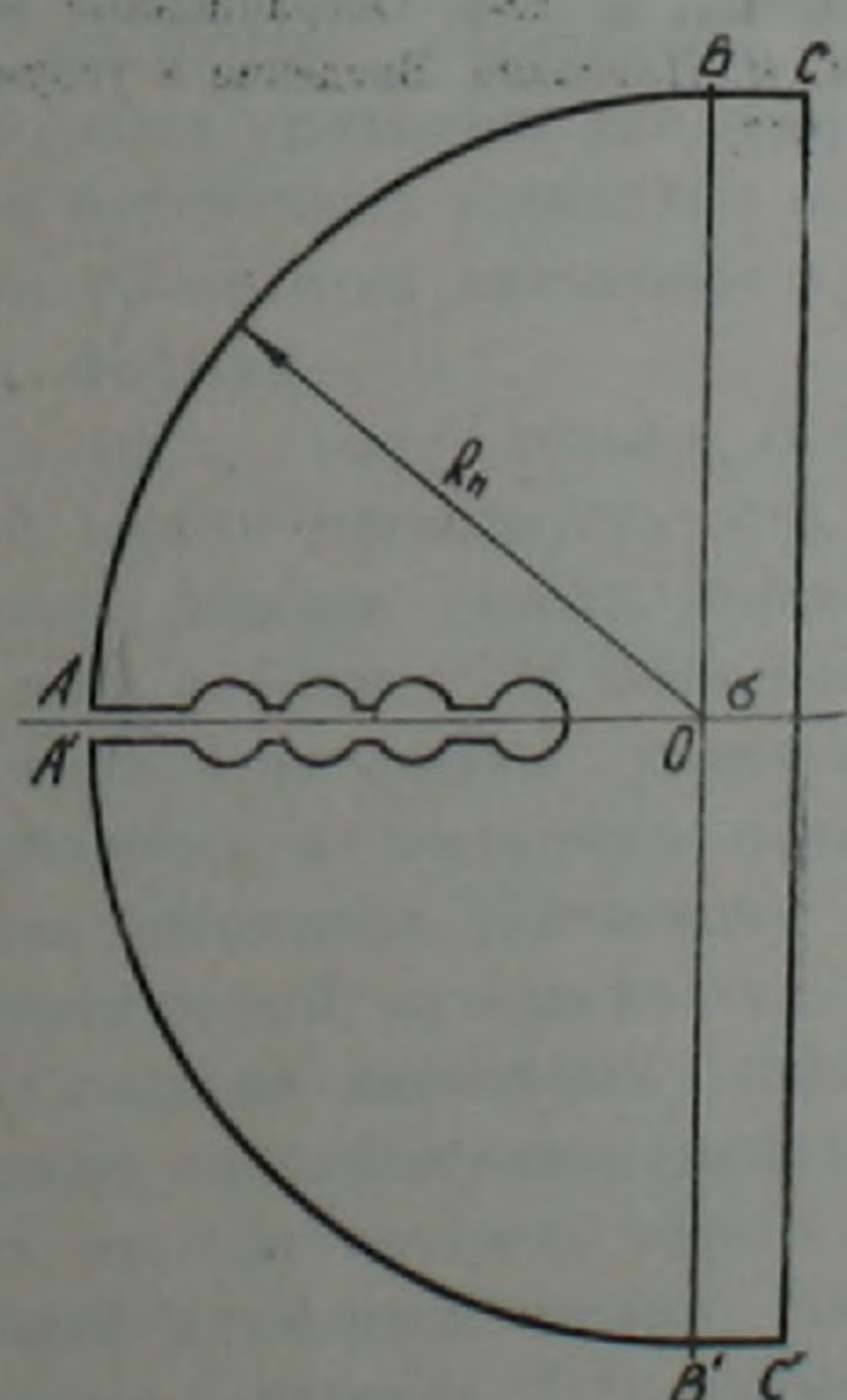
$$+ h_3 \eta_k (d) e^{-2\alpha_2 d} S_1 (x_1, t_1)) e^{m_{j,k} t_1} dt_1 + \frac{1}{a} \int_0^d e^{-2\alpha_2 y_1} \eta_k (y_1) L (x_1, y_1) dy_1 +$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda} \int_0^d e^{-2\alpha_2 y_1} \eta_k (y_1) \int_0^t w (x_1, y_1, t_1) e^{m_{j,k} t_1} dt_1 dy_1 \right] dx_1 +$$

$$+ \frac{\zeta_j (x)}{\mu_j} \int_0^x e^{-\alpha_1 x_1} \xi_j (x_1) \left[\int_0^t (h_2 \eta_k (0) S_0 (x_1, t_1) + \right.$$

$$+ h_3 \eta_k (d) e^{-2\alpha_2 d} S_1 (x_1, t_1)) e^{m_{j,k} t_1} dt_1 + \frac{1}{a} \int_0^d e^{-2\alpha_2 y_1} L (x_1, y_1) \eta_k (y_1) dy_1 +$$

$$\left. \left. + \frac{1}{\lambda} \int_0^d e^{-2\alpha_2 y_1} \eta_k (y_1) \int_0^t w (x_1, y_1, t_1) e^{m_{j,k} t_1} dt_1 dy_1 \right] dx_1 \right\}.^{*} \quad (17)$$



Рис

* Если $(\alpha_1 - h_0)(\alpha_1 + h_0) b = h_0 + h_1$, то в ряду (17) добавляется выражение, получаемое при кратном корне уравнения (14).

Здесь введены следующие обозначения

$$M_j = \frac{(-1)^j \mu_j^2 \sqrt{[\mu_j^2 + (h_0 - \alpha_1)^2][\mu_j^2 + (h_1 + \alpha_1)^2]}}{[\mu_j^2 + (h_0 - \alpha_1)^2][\mu_j^2 + (h_1 + \alpha_1)^2] b + (h_0 + h_1)[\mu_j^2 + (h_0 - \alpha_1)(h_1 + \alpha_1)]};$$

$$m_{jk} = a(\mu_j^2 + \gamma_k^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) - \alpha; \qquad \xi_j(x) = \cos \mu_j x + \frac{h_0 - \alpha_1}{\mu_j} \sin \mu_j x;$$

$$\zeta_j(x) = \cos \mu_j (b - x) + \frac{h_1 + \alpha_1}{\mu_j} \sin \mu_j (b - x).$$

Институт математики Академии наук Армении

Ռ. Ա. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Հաստատուն արագությամբ շարժվող՝ ուղղանկյունաձև կտրվածքով պրիզմատիկ մարմնում ջերմության հոսքը

Հոդվածում դիտարկվում է ուղղանկյունաձև կտրվածք ունեցող հաստատուն արագությամբ շարժվող պրիզմատիկ մարմնում ջերմության հոսքը, երբ կողերի վրա տեղի է ունենում ջերմափոխանակություն շրջապատող միջավայրի հետ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Карслоу, Д. Егер.* Теплопроводкость твердых тел. Наука, М., 1964. [2] *H. Jeffreys.* The Earth. Cambridge, 1976. [3] *Р. А. Минасян.* ДАН АрмССР, т. 28, № 4 с. 160—161 (1959). [4] *X. Карслоу, Д. Егер.* Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, М., 1948 [5] *И. И. Привалов.* Введение в теорию функций комплексного переменного. Наука, М., 1977.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 92 1991 № 1

МЕХАНИКА

УДК 539.3

С. О. Саркисян

Об уравнениях двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек

(Представлено академиком АН Армении С. А. Амбарцумяном 28/IX 1990)

Основные положения двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек и пластин изложены в [1], хотя в ней недостаточно полно были разработаны общие методы сведения трехмерной проблемы магнитоупругости в целом к двумерной.

В работах [2, 3] изучены асимптотические свойства решений всех групп уравнений, определяющих проблему магнитоупругости в целом в тонкой области оболочки, построены асимптотически обоснованные общие двумерные уравнения магнитоупругости тонких оболочек. В работах [4–6] построено вариационное уравнение двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек и доказаны основные энергетические теоремы.

В работах [7, 8] построены нелинейные по параметрам индуцированного магнитного поля уравнения динамики тонких упругих оболочек в постоянных и переменных магнитных полях. Оценены асимптотические погрешности приведения названных уравнений к двум предлагаемым линейным формам.

Следует отметить (речь идет только о линейной задаче), что уравнения двумерной теории магнитоупругости, представленные в работе [7], по своему виду, вообще говоря, отличаются от аналогичных уравнений, получаемых в работах [2, 3]. Возникает естественный вопрос, каковы взаимоотношения этих систем уравнений, характеризующих колебания тонких оболочек в магнитном поле.

Настоящая работа посвящена указанному вопросу. Кроме того, в данной работе получен новый, на наш взгляд, весьма важный результат—построена новая система двумерных дифференциальных уравнений с соответствующими каноническими граничными условиями, определяющими проблему магнитоупругости тонких оболочек.

1. Уравнения общей двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек, представленные в работах [2–4], имеют следующий вид:

$$\frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} S - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2 + \frac{1}{R_1} \left[\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} + 2 \frac{R}{R_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H \right] + \frac{1}{c} \bar{j}_2 B_{03} - 2\rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial A_2 S}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 T_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} S - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_1 + \frac{1}{R_2} \left[\frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 + \right. \tag{1.1}$$

$$\left. + 2 \frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_2} + 2 \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H \right] - \frac{1}{c} \bar{j}_2 B_{03} - 2\rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \times$$

$$\left. \times \left[\frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 \right] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{c} \bar{j}_1 B_{02} - \frac{1}{c} \bar{j}_2 B_{01} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{1.2}$$

$$\left(\bar{j}_1 (\alpha_1, \alpha_2, t) + 2\sigma h \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial w (\alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial t} + 2\sigma h \frac{B_{03}}{c} \frac{\partial u_1 (\alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial t} \right) \vec{e}_1 +$$

$$+ \left(\bar{j}_2 (\alpha_1, \alpha_2, t) - 2\sigma h \frac{B_{03}}{c} \frac{\partial u_2 (\alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial t} - 2\sigma h \frac{B_{02}}{c} \frac{\partial w (\alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial t} \right) \vec{e}_2 =$$

$$= - \frac{2\sigma h}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\Omega} \frac{\bar{j}_1 (\alpha_1', \alpha_2', t) \vec{e}_1' + \bar{j}_2 (\alpha_1', \alpha_2', t) \vec{e}_2'}{R_{QP}} d\Omega. \qquad Q, P \in \Omega.$$

Здесь кроме общепринятых обозначений теории тонких оболочек ([9]), $\bar{j}_1$, $\bar{j}_2$ – компоненты поверхностной плотности тока проводимости; R_{PQ} — расстояние между двумя точками (α_1, α_2) и (α_1', α_2') на срединной поверхности оболочки Ω, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $(\vec{e}_1', \vec{e}_2')$ базисные векторы для срединной поверхности оболочки в указанных точках; B_{0k}, $k = 1, 2, 3$ – вектор напряженности заданного стационарного магнитного поля; σ — электропроводимость материала оболочки.

К уравнениям (1.1), (1.2) следует присоединить соотношения упругости, канонические граничные условия теории тонких оболочек ([9]), а также канонические граничные условия для электродинамической части задачи ([4])

$$\bar{j}_1 |_{\Gamma} = \bar{j}_2 |_{\Gamma} = 0, \tag{1.3}$$

а также начальные условия ([2–4]).

Компоненты поверхностей плотности тока проводимости $\bar{J}_1$ и $\bar{J}_2$ выражаются формулами ([4])

$$\bar{J}_1 = 2\sigma h\left(E_{20} - \frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{B_{03}}{c}\frac{\partial u_1}{\partial t}\right),$$

$$\bar{J}_2 = 2\sigma h\left(E_{10} + \frac{B_{03}}{c}\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{B_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right), \tag{1.4}$$

где E_{i0}, $i = 1, 2$ — тангенциальные компоненты индуцированного электрического поля в точках срединной поверхности оболочки, которые удовлетворяют уравнению ([2, 3])

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2E_{20}) - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1E_{10}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial h_{30}}{\partial t}. \tag{1.5}$$

Здесь h_{30}—нормальная компонента к срединной поверхности оболочки вектора индуцированного магнитного поля в точках срединной поверхности оболочки.

Компоненты поверхностной плотности электрического тока удовлетворяют уравнению ([2–4])

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2\bar{J}_1) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1\bar{J}_2) = 0, \tag{1.6}$$

представляющему двумерный аналог уравнения $\operatorname{div}\vec{j} = 0$ в случае трехмерной постановки задачи

Для определения величин, характеризующих электромагнитное поле в окружающей оболочку среде (вакууме), имеем следующие уравнения ([2–4]):

$$\operatorname{rot}\vec{h}^{(e)} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{h}^{(e)} = 0, \tag{1.7}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}^{(e)}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\vec{E}^{(e)} = 0. \tag{1.8}$$

Отметим, что на уровне точности созданной двумерной теории (1.1)—(1.6) область трехмерной оболочки для изучения внешней задачи электродинамики можно рассматривать как математический разрез вдоль срединной поверхности оболочки Ω, при этом тангенциальные компоненты вектора $\vec{h}^{(e)}$ на указанном разрезе будут терпеть разрывы (величина которых соответственно равна компоненте поверхностной плотности тока проводимости $\bar{J}_1$ или $\bar{J}_2$); нормальная компонента вектора $\vec{h}^{(e)}$, а также тангенциальные компоненты вектора $\vec{E}^{(e)}$ будут непрерывными.

Вводим скалярный магнитный потенциал Φ, определяемый формулой

$$\vec{h}^{(e)} = \operatorname{grad} \Phi. \tag{1.9}$$

Принимая во внимание (1.9), из (1.7) получим, что магнитный потенциал Φ будет удовлетворять уравнению Лапласа во всем пространстве

$$\Delta\Phi = 0, \tag{1.10}$$

а на разрезе вдоль Ω будет претерпевать соответствующие разрывы.

Вихревой поверхностный ток, возбуждаемый в срединной поверхности оболочки, будем характеризовать функцией тока F [10, 11], которую определим равенствами

$$\bar{J}_1 = -\frac{1}{A_2}\frac{\partial F}{\partial \alpha_2}, \qquad \bar{J}_2 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}, \tag{1.11}$$

где в данном случае

$$F = \Phi^{+} - \Phi^{-}. \tag{1.12}$$

Если компоненты поверхностной плотности электрического тока будут определяться через функции тока по формулам (1.11), то уравнение (1.6) будет тождественно удовлетворяться. Подставив (1.11) при помощи (1.4) в уравнение (1.5), приходим к следующему уравнению:

$$\Delta_2 F = -\frac{2\sigma h}{c}\frac{\partial h_{30}}{\partial t} - \frac{2\sigma h}{c}\left\{\frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left[A_2\left(B_{01}\frac{\partial w}{\partial t} + B_{03}\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left[A_1\left(B_{03}\frac{\partial u_2}{\partial t} - B_{02}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right]\right\}, \tag{1.13}$$

$$h_{30} = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{grad}\Phi)^{+} + (\operatorname{grad}\Phi)^{-}\right]\vec{n},$$

где $\vec{n}$ — нормаль к срединной поверхности оболочки; Δ_2 — оператор Лапласа на криволинейной поверхности оболочки

$$\Delta_2(\cdot) = \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_2}\right). \tag{1.14}$$

Систему уравнений (1.1), (1.10) — (1.13) можно представить как уравнения, определяющие магнитоупругое состояние тонкой оболочки. Эти уравнения и совпадают с уравнениями работы [7].

Как можно убедиться из вывода уравнений (1.10) — (1.13), они были получены совершенно простыми математическими средствами из уравнений работ [2–4], т. е. из уравнений (1.5) — (1.7). Следовательно, определяющая система уравнений магнитоупругости тонких оболочек (1.1), (1.10) — (1.13) представляется проще в других определяющих величинах.

Отметим, что уравнения (1.10)—(1.13) следует решать в бесконечном трехмерном пространстве с соответствующими условиями на бесконечности. В уравнениях (1.1), (1.2) в скрытом виде тоже присутствует решение внешней задачи электродинамики (1.7), (1.8) в бесконечном трехмерном пространстве. Этим решением определяется ядро интегрального уравнения (1.2), представляющее собой функцию источника для уравнений (1.7) и (1.8), вид которого заранее известен ([17])—это обратная величина трехмерного расстояния между двумя точками в пространстве, на основе которой и были получены интегральные уравнения (1.2).

В работах ([3, 5]), во-первых, построены нелинейные по параметрам индуцированного магнитного поля уравнения динамики тонких оболочек в постоянных и переменных по времени магнитных полях, во-вторых, разработан асимптотический подход к решению системы уравнений (1.1), (1.10)—(1.13), при которых указанная сложнейшая задача решается в несколько этапов, на каждом из которых решаются относительно более простые системы уравнений.

Построенные в работах ([2–4]) асимптотические разложения для всех величин, определяющих трехмерную задачу магнитоупругости при тонкой области оболочки, имеют место в следующих случаях ([2, 4]): 1) когда $2p < l$, $\omega = 1$ и 2) когда $2p \geqslant l$, $\omega = \frac{2p}{l}$, где $\frac{p}{l}$ показатель изменяемости магнитоупругости состояния, ω—показатель изменяемости по времени. В первом случае мы имеем дело с относительно высоким показателем изменяемости по времени, которому соответствукт двумерные уравнения (1.1), (1.2), или системой уравнений (1.1), (1.10)—(1.13), для которой решение (или использование готового решения) внешней задачи электродинамики обязательно.

Во втором случае мы имеем дело с относительно низким показателем изменяемости магнитоупругого состояния В этом случае уравнение (1.5) будет представляться следующим образом:

$$\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 E_{20}) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 E_{10}) = 0. \tag{1.15}$$

Так как уравнение (1.13) было получено на основе уравнения (1.5), следовательно, имея в виду (1.15), вместо уравнения (1.13) будем иметь

$$\Delta_2 F = -\frac{2\sigma h}{c} \left\{ \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[A_2 \left(B_{01} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[A_1 \left(B_{02} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] \right\}. \tag{1.16}$$

Уравнения (1.1), (1.16) с учетом (1.11) будут представлять разрешающую систему уравнений двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек (в случае низкой изменяемости магнитоупругого состояния по времени). Граничные условия будут представлять классические граничные условия теории тонких оболочек ([9]) и канонические условия (1.3).

Как можно убедиться, в случае относительно низкой изменяемости магнитоупругого состояния во времени трехмерная задача магнитоупругости приводится к чисто двумерной проблеме, для которой заранее не нужно решать (или использовать готовое решение) внешнюю задачу электродинамики для всего трехмерного пространства.

Двумерные уравнения магнитоупругости тонких оболочек (1.1), (1.16) полностью совпадают с соответствующими уравнениями работы ([7]).

Следует отметить, что при низком показателе изменяемости $\left(\omega = \frac{2p}{l}\right)$ магнитоупругого состояния во времени упрощаются также уравнения (1.1), где следует отбросить тангенциальные составляющие силы инерции и силы электромагнитного происхождения, т. е. в данном случае будут иметь место преимущественно нормальные формы колебаний.

2. При относительно низкой изменяемости магнитоупругого состояния во времени $\left(\omega = \frac{2p}{l}\right)$ можно построить совершенно новую систему двумерных дифференциальных уравнений магнитоупругости тонких оболочек.

Из уравнения трехмерной электродинамики для тела проводящей оболочки ([1])

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{B}_0\right), \tag{2.2}$$

будет следовать следующее векторное уравнение:

$$\Delta \vec{j} = -\frac{\sigma}{c} \operatorname{grad} \operatorname{div}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{B}_0\right) + \frac{\sigma}{c} \Delta\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{B}_0\right) + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}, \tag{2.3}$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0, \tag{2.4}$$

где Δ—трехмерный векторный оператор Лапласа.

Из первых двух скалярных уравнений (2.3) с помощью асимптотического подхода, развитого в работах ([2-4]), получается следующая система дифференциальных уравнений относительно компонент поверхностного тока проводимости $\bar{i}_1$ и $\bar{i}_2$:

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left\{\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\bar{j}_2A_2)-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\bar{j}_1A_1)\right]\right\}=$$
$$=-\frac{2\sigma h}{c}\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left\{\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2B_{01}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1B_{02}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right]\right\},$$
$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left\{\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\bar{j}_2A_2)-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\bar{j}_1A_1)\right]\right\}= \tag{2.5}$$
$$=-\frac{2\sigma h}{c}\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left\{\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2B_{01}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1B_{02}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right]\right\}.$$

Система дифференциальных уравнений (1.1), (2.5) является разрешающей системой двумерной теории магнитоупругости тонких оболочек. К этим уравнениям необходимо добавить соотношения упругости, классические граничные и начальные условия теории тонких оболочек ([9]), канонические граничные условия (1.3), а также условие (1.6).

Следует отметить, что третье уравнение векторного уравнения (2.3) на указанном асимптотическом уровне будет удовлетворяться тождественно.

При подстановке (1.11) уравнения (2.5) удовлетворяются тождественно.

Ленинаканский филиал
Ереванского политехнического института

Ս. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Բարակ թաղանթների մագնիսաառաձգականության երկչափ տեսության հավասարումների մասին

Քննարկվում են բարակ թաղանթների մագնիսաառաձգականության երկչափ տեսության հավասարումների մի քանի տեսքերը և նրանց փոխկապակցվածությունը։

Կառուցվում է բարակ թաղանթների մագնիսաառաձգականության երկչափ տեսության դիֆերենցիալ հավասարումների մի նոր համակարգ, համապատասխան կանոնիկական եզրային պայմաններով։

Բարակ թաղանթների մագնիսաառաձգականության երկչափ տեսության դիֆերենցիալ հավասարումների այս նոր համակարգի և համապատասխան եզրային խնդրի կառուցումը ներկայացվում է որպես միանգամայն նոր արդյունք այդ բնագավառի մեջ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. Наука, М., 1977. [2] *С. О. Саркисян.* Изв. АН АрмССР. Механика, т. 38, № 6, с. 21—34 (1985). [3] *С. О. Саркисян.* Изв. АН АрмССР. Механика, т. 42, № 5, с. 25—34 (1989). [4] *С. О. Саркисян.* ДАН АрмССР, т. 89, № 4, с. 181—186 (1989).

[5] *С. О. Саркисян* Уч. записки Ереванского ун-та. Естествен. науки, № 2, с. 41—46, 1985 [6] *С. О. Саркисян*. Межвуз. сб. научн. трудов. Механика, Изд. Ереванского ун-та, вып. 6, с. 102—111, 1987. [7] *А. Л. Радовинский*, Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. № 4, с. 164—170. 1987, [8] *А. Л. Радовинский*, Общие теоремы электромеханики тонких упругих оболочек ПММ, т. 53, вып. 4, с. 658—664 (1989) [9] *В. В. Новожилов*, Теория тонких оболочек Л., Судпромгиз, 1962. [10] *Л. А. Цейтлин*, ЖТФ, т. 39, вып. 10, с. 1733—1741 (1969) [11] *В. И. Астахов*. *И. М. Грудский*, Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика, № 2, с. 5—14, 1989, [12] *Я. П. Терлецкий*. *Ю. П. Рыбаков*, Электродинамика, Высшая школа, М., 1980.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 92 1991 № 1

ЭНТОМОЛОГИЯ

УДК 595.771

Л. С. Мирумян

Новый вид галлиц Halodiplosis araratica sp. n. (Diptera, Cecidomyiidae) на солянке вересковидной (Salsola ericoides Bieb.)

(Представлено академиком АН Армении С. О. Мовсесяном 29/XII 1990)

Род Halodiplosis Kieff.

Род включает 40 видов, распространенных в Средней Азии и Казахстане ([1, 2, 3]), и только один вид известен в фауне Северной Африки (Тунис). Развиваются в основном на саксаулах и других маревых.

Галлицы рода характеризуются бледно-серой, иногда бурой окраской. Радиальная жилка R_5 впадает в вершину крыла (рисунок, *4*). У самцов антенны 2+12-члениковые, каждый членик двуузелковый. Между узелками обособляется стебелек, нередко стебелек очень слабо выражен. Каждый членик жгутика несет 2 мутовки петлевидных нитей (рисунок, *1*). Членики антенн у самок более или менее цилиндрические, с прижатой сенсорной нитью, число их может уменьшаться до 2+11. Щупики одночлениковые. Коготки лапок простые с хорошо развитым эмподием.

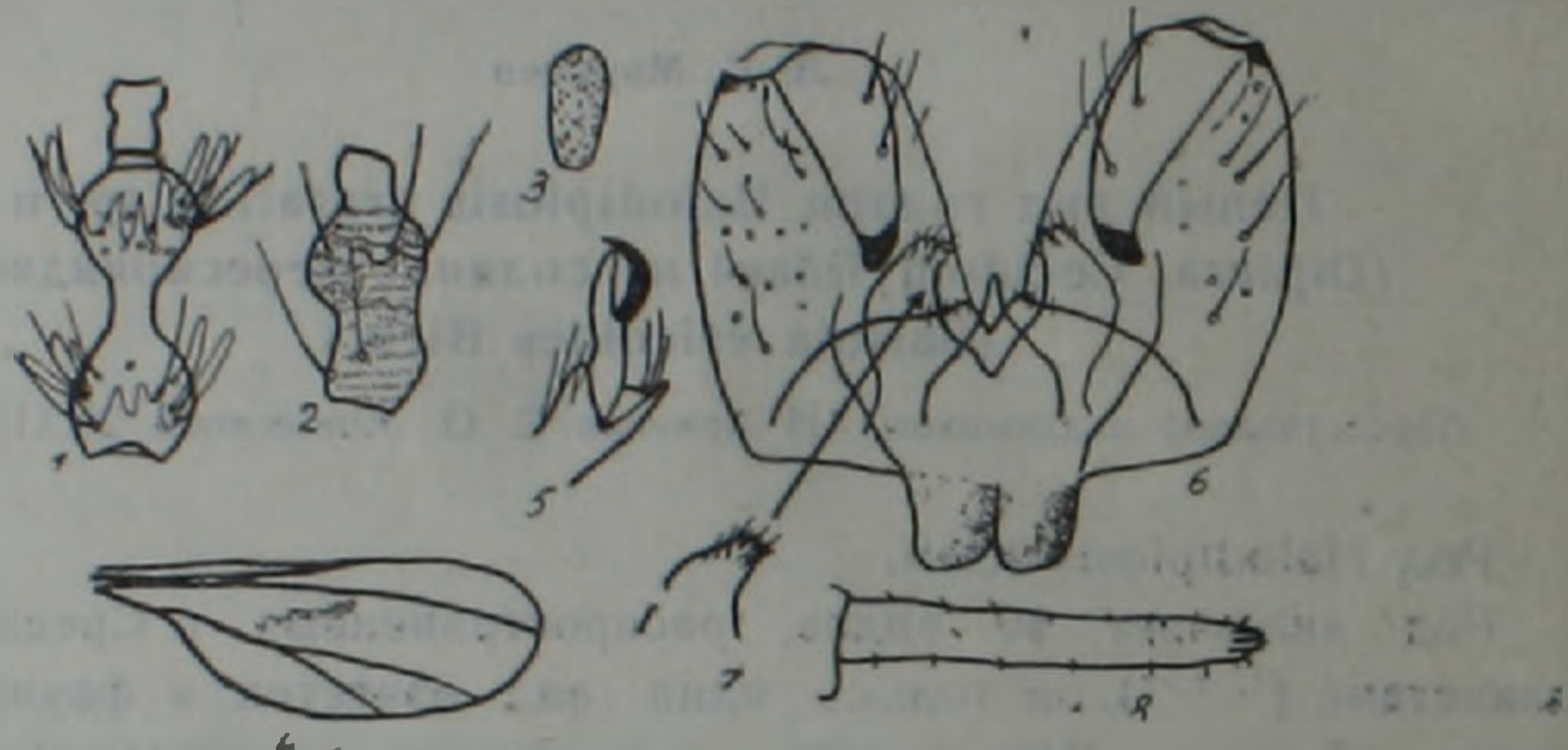
Гонококситы гениталий самца массивные, гоностили заканчиваются черным когтем. Церки короткие, гипопрокт имеет треугольную срединную выемку, эдеагус конусовидный. Для самок рода характерен телескопический, выдвижной яйцеклад с хорошо выраженными небольшими церками на конце.

Основные виды рода, описанные из Средней Азии, были отнесены к родам Asiodiplosis Marik. и Haloxylophaga Marik. сведенным в настоящее время в синонимы рода Halodiplosis Kieff. ([1])

В Армении обнаружен новый вид из этого рода. Род Halodiplosis регистрируется в фауне Кавказа впервые.

Halodiplosis araratica Mirumian sp. n.

О п и с а н и е. Самец. Тело бурое, среднеспинка сильно склеротизована, брюшко узкое, светлее груди. Длина тела 3 мм. Антенны 2+12-члениковые, членики двуузелковые с четко выраженными стебельками (рисунок, *1*). Межчлениковые стебельки средних члеников усика в 1,3 раза длиннее межузелковых. Педицелл округлый. Межчлениковый стебелек 1-го членика жгутика сильно расширен, 1-й членик в 1,2 раза длиннее срединных. Узелки члеников несколько сплюснуты в поперечном направлении и несут основную и вершинную мутовки петлевидных сенсорных нитей, а также мутовки длинных крепких волосков. Последний членик жгутика на вершине закруглен, состоит из двух слившихся узелков, либо имеется перетяжка между ними. Длина щупика в 2 раза превосходит его ширину (рисунок, *3*).



Детали морфологии галлицы Halodiplosis araratica Mirumian sp. n.
1 — членик жгутика антенн самца; 2 — то же самки; 3 — щупик самца; 4 — крыло; 5 — коготок; 6 — гениталии самца; 7 — лопасть гипопрокта; 8 — конец брюшка самки

Гонококситы гениталий самца широкие в основании, со слегка закругленными боковыми сторонами (рисунок, 6). Длина гоностиля равна 1/2 длины гонококсита, к вершине он плавно сужается. Черный коготок на конце гоностиля широкий. Поверхность гонококситов и гоностилей покрыта длинными волосками и сильно исчерчена. Аподема гонококситов сильно склеротизована и имеет продольный шов. Церки с округлыми боковыми сторонами и неглубокой выемкой на вершине. Поверхность церков покрыта микротрихиями, собранными в группы. Лопасти церков небольшие, на вершине слегка закруглены. Гипопрокт с глубокой срединной выемкой, уже церков, равен половине длины гонококситов, имеет закругленные боковые лопасти, каждая из которых на вершине несет по 7—8 зубцевидных щетинок (рисунок, 6, 7). Эдеагус плавно заостряется к вершине, заканчивается чуть выше церков и короче гипопрокта.

Самка. Тело бурое, длина вместе с яйцекладом 3,2 мм. Число члеников антенн 2+11. Членики с короткими межузелковыми стебельками (рисунок, *2*). Длина базального утолщения в 3 раза больше длины межчленикового стебелька. Стебелек 1-го членика в апикальной части расширен. 1-й членик усика в 1,5 раза длиннее второго, а 11-й в 1,5 раза длиннее 10-го, на вершине закруглен. На первых члениках хорошо заметны глубокие перетяжки, по направлению к концевым членикам глубина перетяжек уменьшается. Вершинная половина базального утолщения начальных члеников шире основной. Поверхность члеников покрыта мелкими щетинками, а в местах перетяжек морщинистая. Сенсорная нить плотно прижата, извилистая, петель не образует. Членики несут длинные крепкие волоски. Членик щупика усеченный. Эмподий слегка короче коготков (рисунок, *5*). Яйцеклад на конце закруглен, покрыт редкими щетинками и заканчивается овальными церками, расположенными на дорсальной стороне (рисунок, *8*).

Дифференциальный диагноз. Вид входит в группу, характеризующуюся двуузелковыми члениками антенн самца, и занимает положение в подгруппе видов, самки которых имеют яйцеклад, покрытый очень редкими волосками (Halodiplosis noxia Marik. и др.) От среднеазиатских видов этой подгруппы отличается удлиненными стебельками члеников антенн самца, а также тем, что межчлениковый стебелек первого членика жгутика антенн самца в апикальной части сильно расширен. Гениталии самца с сильно склеротизованной аподемой, имеющей продольный склеротизованный шов. Церки яйцеклада самки сильно редуцированы и смещены на его дорсальную сторону. Членики антенн самки с глубокими перетяжками.

Биология. Вид обнаружен в полупустынных участках около с. Урцадзор и райцентре Веди Араратского района. В местах обнаружения поражение массовое. Повреждает листовые почки солянки вересковидной (Salsola ericoides). Личинки оранжевые, бочонковидные, развиваются по одной в многокамерных, мясистых, почковых галлах. Снаружи галл шаровидный, опушенный, покрыт бело-голубыми волосками и недоразвитыми листочками, которые на концах приобретают красный оттенок. Размеры галла колеблются от 0,5 до 2,5 см. Личинки можно встретить в галлах в апреле-мае и в конце октября. Окукливание происходит в галлах. Вылетают галлицы в мае. Период от сбора до вылета имаго длится 5—7 дней. После вылета имаго галлы желтеют и высыхают, однако остаются на растении до следующего года. Из галлов, собранных в конце октября, вылета имаго не наблюдалось. Личинки осеннего поколения зимующие.

Материал. Голотип—самец, препарат 147/1 в канадском бальзаме с этикеткой: Армения, Араратский район, с. Урцадзор, на солянке вересковидной (Salsola ericoides), 12.05.1980. Паратипы—4 самца, 5 самок, препараты № 147/2, 147/3 с той же этикеткой (Л. С. Мирумян).

Типовой материал хранится в Институте зоологии АН Армении и в зоологическом музее МГУ им. Ломоносова.

Институт зоологии Академии наук Армении

Լ. Ս. ՄԻՐՈՒՄՅԱՆ

Salsola ericoides Bieb. աղաբույսի վրա նոր տեսակի գալամլակ Halodiplosis araratica sp. n. (Diptera, Cecidomyiidae)

Նկարագրվում է Halodiplosis սեռին պատկանող նոր տեսակի ֆիտոֆագ-գալամլակ, որը Հայաստանում S. ericoides աղաբույսի վրա առաջացնում է բողբոջային գալեր։ Նախկինում այս սեռի բոլոր տեսակները հայտնի էին Միջին Ասիայից, Ղազախստանից, իսկ 1 տեսակն էլ Թունիսից։ Halodiplosis սեռը Կովկասի համար նշվում է առաջին անգամ։ Բերված է սեռի բնութագիրը։

Նոր տեսակը սեռի մյուս տեսակներից տարբերվում է մի շարք արտահայտված մորֆոլոգիական հատկանիշներով։

Տրված է տեղեկություններ տեսակի կենսակերպի մասին։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *П. И. Мариковский*. Энтомол. обозр., т. 34, с. 298—312 (1955 а). [2] *П. И. Мариковский*. Зоол. журн., т. 34, вып. 2, с. 336—346 (1955 б). [3] *Б. М. Мамаев*. Энтомол. обозр., т. 51, вып. 4, с. 886—898 (1972). [4] *M. Skuhravá*. Catalogue of palearctic Diptera, v. 4, p. 72—297, Budapest, 1986.