

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Լ Օ Կ Լ Ա Լ Կ

LIV, № 1

1972

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, կենսաբանական գիտությունների դոկտոր, Ա. Ք. ԲԱՐԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԲԱՆԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բզրակից-անդամ, Վ. Մ. ԽԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բզրակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բզրակից-անդամ (պատ. խմբագրի տեղակալ), Ս. Հ. ՄԻՐՉՈՑՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բզրակից-անդամ, Ս. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ-խմբագիր), Օ. Մ. ՍԱԳՈՆՉՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բզրակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բզրակից-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Э. Г. АФРИКЯН, доктор биологических наук, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, чл.-корр. АН АрмССР (зам. отв. редактора), С. А. МИРЗОЯН, чл.-корр. АН АрмССР, С. С. МКРТЧЯН, академик АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР.

Ր Ո Վ Ա Ն Գ Ա Կ Ա Ռ Ի Թ Յ Ա Ր Ե Ն

6

Մ Ր Թ Ե Մ Ո Ս Ի Կ Ա Ս

Ա. Հ. Առաքելյան—Բազմաթյունների կոմպոզիտային սարսափի վրա արված ու ռեֆերիտի կարգաբերություններ	2
Կ. Ս. Մանույան—Սյունիքի բազմազգային միջավայրում	1
Յ. Յա. Ափրիկ. Վ. Ա. Սենգիբադ—Բնակչության մեղմանը բաժանման սարսափություններում ունեցած ազդեցությունների ինքնաբերական կենսաբանությունների և սպիտակ մասեր	12
Վ. Ս. Կրիզյան—Մարդկանց բնակավայրերի մոտակայքերի ինքնաբերական	17
Ա. Վ. Կիրիկով—ԼՂ-ի անցումային մասերից	20

Ս Ե Ն Ե Ն Ա Կ Ա Ս

Լ. Ս. Մուրադյան—Ջերմային սպիտակ կարծիքները բարձր շերտառիկների գեոլոգիայում	23
--	----

Ս Կ Ր Ե Ս Ի Պ Ի Կ Ա Ս Ի Ե

Յու. Վ. Մայրապետ, Ջ. Վ. Այրապետյան—Լեռնային Ռազմատիկայի Երկրաբանական և Կառվարչական ծախսերի գաղափարներ	42
---	----

Ի Ո Ր Ո Ւ Մ Ե

Ա. Ս. Լավրենտյան, Ժ. Ս. Պետրոսյան, Ի. Ս. Չարազյան—Ալիա-կենտրոնացված բնակավայրերում արված աշխատանքների և արված աշխատանքների կենտրոնացված շերտառիկների և արված աշխատանքների վրա	80
---	----

Ն Ի Չ Ի Ո Ւ Մ Ե

Գ. Ս. Սեդրաչյան, Վ. Հ. Ներսիսյան—Կառված զինուորական կենտրոնացված շերտառիկների և արված աշխատանքների կենտրոնացված շերտառիկներ	87
---	----



СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
МАТЕМАТИКА	
А. А. Аракелян — Нереклексивные отношения в компактном пространстве множества	3
К. М. Мосесян — Минимальный граф, не являющийся сильно базиремым	8
Т. Я. Азизов, В. А. Сендеров — О спектре и инвариантных подпространствах анитарных операторов в банаховых пространствах с индефинитной метрикой	13
В. М. Едигарян — К обобщенной проблеме моментов Стильтьеса	17
А. В. Ефимов — Пролодные матрицы класса LR	28
МЕХАНИКА	
Л. М. Мурадян — Плоская задача термоползучести при высоких температурах	33
СТРАТИГРАФИЯ	
Ю. В. Саядян, З. В. Алешинская — Первая радиоуглеродная датировка и ус- ловия захоронения лчашенских археологических памятников	43
БИОХИМИЯ	
А. С. Оганесян, Ж. С. Геворкян, И. Р. Фаталова — Влияние альфа-кетоглю- таровой кислоты на образование аммиака из L-аминокислот в корковом слое почек белых крыс	51
ФИЗИОЛОГИЯ	
Г. С. Ордуян, В. Г. Григорян — Статистический анализ фоновой активности нейронов сенсомоторной области коры мозга кошки	57

УДК 518.90

МАТЕМАТИКА

А. А. Аракелян

Нерефлексивные отношения в компактном пространстве множеств

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 26/IV 1971)

1. Статья посвящена изучению свойств отношений, связанных с топологией пространства, на котором они заданы.

Во втором параграфе определяется отношение мажорирования между подмножествами некоторого пространства A и доказывается существование множества максимумов по нему.

Приводится пример построения компактной системы подмножества некомпактного пространства.

Результаты статьи могут быть применены как в теории кооперативных игр n -лиц, так и к играм с бесконечным множеством игроков, где пространство, на котором задано отношение, не является компактным.

Пусть имеем метрическое пространство A с расстоянием $\rho(e, f)$ между элементами e и f . Если E и F подмножества из A , то под расстоянием между E и F , $\theta(E, F)$ понимаем (см. (2.3)).

$$\theta(E, F) = \max \left\{ \sup_{e \in E} \inf_{f \in F} \rho(e, f), \sup_{f \in F} \inf_{e \in E} \rho(e, f) \right\}.$$

Если Σ система подмножеств из A , то под диаметром Σ , $d(\Sigma)$, понимаем

$$d(\Sigma) = \sup_{M_1, M_2 \in \Sigma} \theta(M_1, M_2).$$

2. Пусть $\{E_n\}_{n=1, 2, \dots}$ некоторая последовательность из A . Тогда E_0 равен пределу $\{E_n\}_{n=1, 2, \dots}$, $E_0 = \lim E_n$, если $\lim \theta(E_n, E_0) = 0$.

Будем рассматривать пару (Σ, P) , где Σ — система замкнутых подмножеств из некоторого метрического пространства A , P — нерефлексивное отношение (или нерефлексивная система отношений) на Σ . Под срезом P , через множество $E \in \Sigma$, $P(E)$, понимаем (см. (4))

$$P(E) = \{F \in \Sigma : P(E, F)\}.$$

Определение 1. Пусть E и F элементы из Σ . Будем говорить, что E мажорирует F относительно P , $E \xrightarrow{P} F$, если $P(E, F)$ и для любого такого $G \in \Sigma$, что $P(G, E)$ следует $P(G, F)$.

Лемма 1. Отношение \xrightarrow{p} на Σ является отношением частичного упорядочения, если $\Sigma = \{E \subset A : E \cap P(E) = \emptyset\}$.

Доказательство. Докажем сначала, что может иметь место одно и только одно из соотношений $E \xrightarrow{p} F$; $F \xrightarrow{p} E$; $E \not\xrightarrow{p} F$, $F \not\xrightarrow{p} E$.

Если бы $E \xrightarrow{p} F$ и $F \xrightarrow{p} E$, то $P(E, E)$ и мы получили противоречие с тем, что $E \cap P(E) = \emptyset$.

Покажем теперь, что отношение \xrightarrow{p} на Σ транзитивное. Пусть $G \xrightarrow{p} E$ и $E \xrightarrow{p} F$. Покажем, что $G \xrightarrow{p} F$. Так как $P(G, E)$ и $P(E, F)$, то $P(G, F)$. Но из $P(L, G)$ и $P(G, E)$ следует $P(L, E)$. Отсюда, $P(L, F)$. Следовательно, $C \xrightarrow{p} F$. Лемма доказана.

Определение 2. Последовательность $\{E_n\}_{n=1, 2, \dots}$ множеств из Σ такую, что $E_{n+1} \xrightarrow{p} E_n$, $n = 1, 2, \dots$, $E_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ назовем m -последовательностью, если $E_0 \xrightarrow{p} E_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Лемма 2. Если (а) $\Sigma = \{E \subset A : E \cap P(E) = \emptyset\}$; (в) Q линейно-упорядоченное по мажорированию подмножество из Σ ; (с) Σ компактное; (д) всякая такая сходящаяся последовательность $\{E_n\}_{n=1, 2, \dots}$ из Σ , что $E_{n+1} \xrightarrow{p} E_n$, является m -последовательностью, то Q имеет максимум в Σ относительно \xrightarrow{p} .

Доказательство. Если Q конечная, то утверждение леммы очевидно.

Предположим, что Q бесконечная и не имеет максимума в Σ относительно \xrightarrow{p} .

Так как Σ компактное, то оно ограничено и, следовательно, существует такое замкнутое, ограниченное подмножество $\Sigma_1 \subset \Sigma$, что $Q \subset \Sigma_1$. Но, поскольку Σ_1 компактное, то оно покрывается конечным числом открытых множеств. Так как Q бесконечное, то конечное покрытие Σ_1 содержит множество, пересечение которого с Q для любого E из Q содержит бесконечное множество мажорирующих E элементов. Обозначим через Σ_2 замкнутое подмножество из Σ_1 , содержащее то множество из конечного покрытия Σ_1 , пересечение которого с Q бесконечно. Продолжим этот процесс дальше. Получим последовательность таких, вложенных одно в другое замкнутых множеств $\Sigma_1 \supset \Sigma_2 \supset \dots$, что $d(\Sigma_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ в силу компактности Σ . Но так как

Σ компактное, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} \Sigma_i \neq \emptyset$. Положим $E_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Sigma_i$. Если $L \in Q$, то существует такое множество $L_1 \in \Sigma_1 \cap Q$, что $L_1 \xrightarrow{p} L$, \dots , существует такое множество $L_{i+1} \in \Sigma_i \cap Q$, что $L_{i+1} \xrightarrow{p} L_i$. Так как $\theta(L_i, L_i) \leq \max(d(\Sigma_i), d(\Sigma_{i+1}))$, то $\theta(L_i, L_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$. Следовательно, $\{L_i\}_{i=1, 2, \dots}$ фундаментальная и $E_0 = \lim_{i \rightarrow \infty} L_i$. Отсюда, $E_0 \in \Sigma$ и $E_0 = \lim_{i \rightarrow \infty} E_i$. Поскольку $\{E_i\}_{i=1, 2, \dots}$ m -последовательность, то $E_0 \xrightarrow{p} E_i$, $i = 1, 2, \dots$. Лемма доказана.

Теорема 1. Если (а) $\Sigma = \{E \subset A: E \cap P(E) = \emptyset\}$; (b) Σ компактное пространство; (с) всякая такая сходящаяся последовательность $\{E_n\}_{n=1, 2, \dots}$ из Σ , что $E_{n+1} \xrightarrow{p} E_n$, $n = 1, 2, \dots$ является m -последовательностью, то существует множество Σ^* максимумов из Σ относительно \xrightarrow{p} .

Доказательство. Отношение \xrightarrow{p} , по лемме 1, является отношением частичного упорядочения. Теорему мы докажем, если докажем, что всякое линейно упорядоченное по \xrightarrow{p} подмножество Q из Σ ограничено сверху. По лемме 2, Q имеет максимум в Σ . Следовательно, по лемме Цорна, существует множество максимумов Σ^* из Σ . Теорема доказана.

Следствие 1. Если (а) $\Sigma = \{E \subset A: E \cap P(E) = \emptyset\}$; (b) A компактное пространство; (с) всякая такая сходящаяся последовательность $\{E_n\}_{n=1, 2, \dots}$ из Σ , что $E_{n+1} \xrightarrow{p} E_n$, $n = 1, 2, \dots$ является m -последовательностью, то существует множество Σ^* максимумов из Σ относительно \xrightarrow{p} .

Доказательство. Из компактности A следует компактность Σ . Отсюда, по теореме 1, существует множество Σ^* максимумов из Σ по \xrightarrow{p} .

Следствие 2. Если (а) A слабо компактное пространство; (b) $\Sigma = \{E \subset A: E \cap P(E) = \emptyset, E \text{ слабо замкнутые в } A\}$; (с) всякая такая слабо сходящаяся последовательность $\{E_n\}_{n=1, 2, \dots}$ из Σ , что $E_{n+1} \xrightarrow{p} E_n$, $n = 1, 2, \dots$ является m -последовательностью, то существует множество Σ^* максимумов из Σ относительно \xrightarrow{p} .

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

Пример построения компактной системы подмножеств некомпактного пространства.

Положим $J = \{1, 2, \dots\}$,

$$A = \{x = \{x_i\}_{i \in J} \mid x(J) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1\}.$$

Пусть $E = \{x \in A: \sum_{i \in S} x_i = x(S) = \text{const}, S \neq J\}$.

Определим

$$G(S) = \{x \in E: x_i = \text{const}, i \in J - S\}, S \subset J.$$

Отсюда, каждое E представляется в виде системы множеств $\{G(S)\}$.

Если $G_1(S)$ и $G_2(S)$ некоторые множества, то под расстоянием $\rho(G_1(S), G_2(S))$ между ними понимаем

$$\rho(G_1(S), G_2(S)) = \sup_{i \in J - S} \{|x_i - y_i|, |x(S) - y(S)|\} \quad (1)$$

где $x \in G_1(S)$, $y \in G_2(S)$.

Очевидно, что аксиомы метрики здесь выполнены.

Каждому $G(S)$ поставим в соответствие такой элемент $\xi = (\{\xi_i\}_{i \in J \setminus S}, \xi_i)$, что

$$\xi_i = x_i, \quad i \in J \setminus S$$

$$\xi_i = x(S) \text{ где } x \in G(S).$$

Под расстоянием между ξ_1 и ξ_2 понимаем

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \sup_{i \in J \setminus S} \{|\xi_i^{(1)} - \xi_i^{(2)}|, |\xi_i - \xi_i^{(2)}|\}.$$

Очевидно, что установленное нами соответствие взаимно-однозначное и взаимно непрерывное в том смысле, что $\xi^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi^{(0)}$ тогда и только тогда, когда $G^{(n)}(S) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G^0(S)$.

Если $|J \setminus S| = k < \infty$, то множество $\{\xi\} \subset E^{k+1}$, соответствующее $E = \{G(S)\}$, будучи замкнутым и ограниченным подмножеством $(k+1)$ -мерного евклидова пространства компактное. Отсюда, так как установленное нами соответствие гомеоморфизм, то $E = \{G(S)\}$ так же компактно в смысле метрики (1).

Положим расстояние между $E = \{G_1(S)\}$ и $F = \{G_2(S)\}$ равным

$$\theta(E, F) = \max \left\{ \sup_{a \in E} \inf_{b \in F} \rho(a, b), \sup_{a \in F} \inf_{b \in E} \rho(a, b) \right\} \quad (2)$$

Если теперь $|J \setminus S| = k < \infty$, $\Sigma = \{E \subset A : E = G(S), E \text{ замкнутые в смысле метрики (1)}\}$, то каждое из множеств E , так как доказали выше, компактно в смысле метрики (1). Соответствующая Σ система подмножеств из E^{k+1} так же компактная. Отсюда, в силу гомеоморфизма соответствия, Σ компактно, в смысле метрики (2). Таким образом, компактная система подмножеств некомпактного пространства нами построена.

Ленинградский государственный
университет

Ա. Հ. ԱՌԱՔԵՆՅԱՆ

Բազմությունների կոմպակտ տարածության վրա տրված ոչ սեֆիկեխսիվ հարաբերություններ

Ոչխատանքը նվիրված է ոչ սեֆիկեխսիվ հարաբերությունների հատկությունների հետազոտմանը, որոնք կախված են այն տարածության տոպոլոգիայից, որի վրա տրված են այդ հարաբերությունները:

Բազմությունների միջև սահմանվում է մաժորության հարաբերությունը և գտնվում են բազմությունների տարածության, ըստ այդ հարաբերության մաթսիմալ էլեմենտների գոյության պայմանները:

ЛИТЕРАТУРА — ФРЦЧЦЦПРДЗНРЪ

1 D. B. Gillies, Solutions to general nonzero-sum games, Contributions to the theory of games IV, Ann. Math. Stud. 40, 1959. 2 Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М.—Л., 1934. 3 К. Куратовский, Топология, т. 1, М., 1966. 4 Ж. Рице, Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа, Кибернетический сборник № 7, стр. 129—185, 1963.

УДК 519.1

К. М. Моссян

Минимальный граф, не являющийся сильно базируемым

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 11/V 1971)

В настоящей статье мы придерживаемся терминологии, принятой в (1). Под словом „граф“ всюду будем понимать обыкновенный граф, под раскраской графа—правильную раскраску его вершин. Через Λ обозначим класс обыкновенных графов, не содержащих треугольников.

О п р е д е л е н и е. Неориентированный граф, который можно ориентировать так, чтобы он стал базисным графом некоторого орграфа (графа частичного упорядочения), назовем базируемым (сильно базируемым), а соответствующую ориентацию—базирующей (сильно базирующей).



Рис. 1

В монографии (2) поставлена следующая задача (гл. 9, п. 1, проблема 3^a): в классе Λ найти графы с наименьшим числом ребер, которые не являются сильно базируемыми (такие графы назовем не сильно базируемыми).

Можно показать, что имеют место следующие утверждения:

Теорема 1. Если хроматическое число графа меньше длины минимального цикла, то граф сильно базируемый.

Теорема 2. Если граф $L = (X, U)$ сильно базируемый, то для произвольной вершины a существует хотя бы одна сильно базирующая ориентация графа такая, что все инцидентные с a дуги в орграфе $L = (X, U)$ исходят из a (заходят в a).

Лемма 1. Четырехугольник может иметь только две существенно различных сильно базирующих ориентации (рис. 1, слева), а в пятиугольнике при любой сильно базирующей ориентации су-

существуют три ребра, ориентированные, как указано на рис. 1, справа.

Пусть M_4 — граф Мыцельского (см. (2) или (3), стр. 355) для хроматического числа $\gamma = 4$.

Лемма 2. Граф M_4 не является сильно базисуемым.

Предположим противное, т. е. что граф M_4 — сильно базисуемый. Тогда по теореме 2 существует такая сильно базисирующая ориентация σ , при которой все дуги, инцидентные вершине a , исходят из нее. По лемме 1 для той же ориентации на цикле $(a, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a)$ существуют три ребра, ориентированные, как на рис. 2.

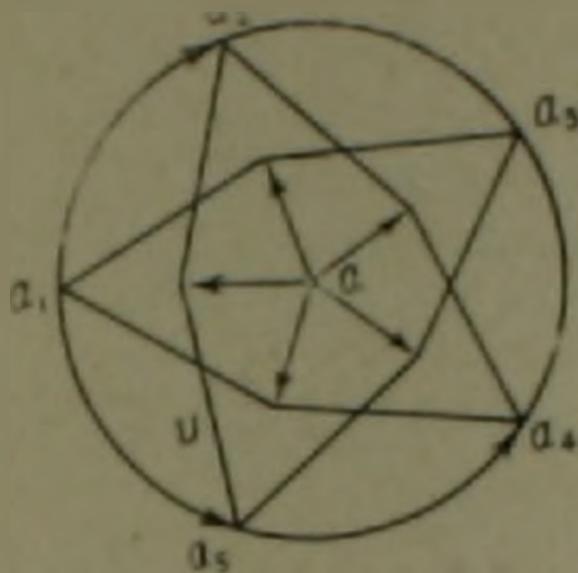


Рис. 2

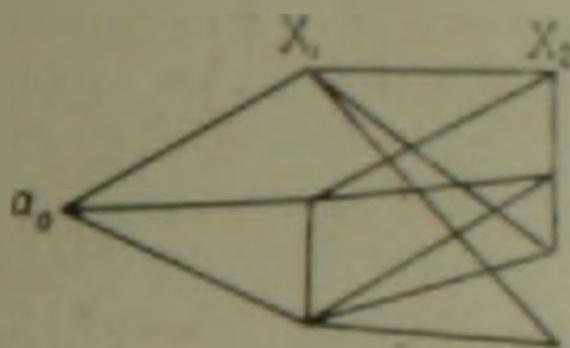


Рис. 3

При ориентации σ ребро u может иметь одно из двух возможных направлений. Ориентируя ребро u в любом из этих направлений и применяя лемму 1 несколько раз, мы сориентируем все ребра, но полученные при этом ориентации не будут сильно базисуемыми.

Определение. Пусть множество вершин графа $L = (X, U)$ разделено на три непересекающихся подмножества следующим образом:

$$X_2 = \{a_0\},$$

$$X_1 = \{x \mid x \in X \ \& \ a_0x \in U\},$$

$$X_3 = X \setminus (X_1 \cup X_2).$$

Тогда граф $L' = (a_0, X_1, X_2; U)$ (см. рис. 3) назовем **двудольным представлением** графа $L = (X, U)$ из вершины a_0 .

Лемма 3. Если $M \in \Lambda$ и имеет хроматическое число $\gamma(M) \geq 4$, то при любом двудольном представлении v в M найдется цикл нечетной длины, принадлежащей подграфу $M(X_2)$.

Действительно, в противном случае $M(X_2)$ был бы графом Кёнига и, следовательно, граф M можно было бы окрасить тремя цветами.

Теорема 3. В классе Λ , графов из Λ , обладающих хроматическим числом $\gamma = 4$, существует только один (с точностью до

изоморфизма) граф с наименьшим числом ребер и только один с наименьшим числом вершин: оба они изоморфны M_0 .

Доказательство.

Пусть $M(X, U)$ — один из вершинно (или реберно) минимальных графов класса Λ_0 .

Так как $M(X, U)$ критический, то верно (см. (2))

$$\forall x \in X \quad r(x) > 3 \quad (1)$$

а по теореме Брукса

$$\exists x \in X \quad r(x) > 4.$$

Пусть $a_0 \in X$ такая, что

$$r(a_0) = \max_{x \in X} r(x).$$

Найдем двудольное представление графа $M(X, U)$ из вершины a_0 . По лемме 3 в этом представлении существует цикл нечетной длины, принадлежащий подграфу $M(X_1)$.

Возможны следующие случаи:

I. Длина минимального цикла C нечетной длины в подграфе $M(X_1)$ равна пяти. Обозначим $C = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.

1) Пусть $r(a_0) = 5$ и $|X_1| = 5$.

Очевидно, из любой $x \in X_1$ может идти не более двух ребер в X_2 , а используя (1), получим, что вершины множеств X_1 и X_2 соединяются десятью ребрами. В графе $M(X, U)$ ни одна из вершин множества X_2 не может иметь степень меньше 4, иначе граф допускал бы раскраску тремя цветами. Значит, в графе $M(X, U) \forall a_i \in X_2 \quad (a_i) = 4$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Непосредственно проверяется, что существует единственный граф с такими свойствами и что он совпадает с M_0 .

Итак, построен граф M_0 с $\gamma = 4$, с $n(M_0) = 11$ вершинами и $m(M_0) = 20$ ребрами.

Простой проверкой убеждаемся, что если в подграфе $M(X_1)$ кроме цикла C есть еще хотя бы одна вершина, то $n(M) > n(M_0)$ и $m(M) > m(M_0)$.

2) Пусть $r(a_0) = 4$.

Можно показать, что в этом случае $n(M) > n(M_0)$ и $m(M) > m(M_0)$.

3) Пусть $r(a_0) > 6$.

Тогда $n(M) > 12$, а $m(M) > 23$.

II. Длина минимального цикла нечетной длины в подграфе $M(X_1)$ равна 7.

В этом случае число вершин в графе $M(X, U)$ не менее 12, а ввиду замечания, сделанного в (1), число ребер будет не менее 25.

III. Длина минимального цикла нечетной длины в подграфе $M(X_1)$ не меньше 9.

В этом случае число вершин не менее 14, а число ребер не менее 21.

Все возможные случаи рассмотрены. Этим завершено доказательство теоремы*.

Теорема 4. *Граф M_0 — единственный не сильно базисуемый граф класса Λ , имеющий наименьшее число ребер (вершин).*

Доказательство.

Если число ребер (вершин) какого-нибудь графа $L \in \Lambda$, отличного от M_0 , будет не больше числа ребер (вершин) графа M_0 , то по теореме 3 будет $\tau(L) < 4$ и, следовательно, по теореме 1 граф L окажется сильно базисуемым.

Простой проверкой убеждаемся в справедливости следующей леммы:

Лемма 4. *Если при некоторой базисуемой ориентации Ψ графа $H = (Y, V)$ одна из сторон какого-то четырехугольника принадлежит ориентации, то этот четырехугольник ориентирован циклически.*

Очевидно, граф с наименьшим числом вершин (ребер) и не являющийся базисуемым есть четырехвершинный полный граф. Единство имеет место

Теорема 5. *Граф M_0 — единственный не базисуемый граф класса Λ , имеющий наименьшее число ребер (вершин).*

Докажем, что граф M_0 не базисуем. Если бы существовала базисуемая ориентация Ψ для графа M_0 , то, так как он не является сильно базисуемым (лемма 2), при ориентации Ψ в графе M_0 существовал бы ориентированный цикл C . Каким бы ни был ориентированный цикл C в графе M_0 , существует четырехугольник, имеющий с этим циклом одно общее ребро. Применяя несколько раз лемму 4, мы приходим к противоречию.

Так как сильная базисуемость графа влечет его базисуемость, то остальные утверждения теоремы 5 следуют из теоремы 4.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Կ. Մ. ՄԱՍԻՍՅԱՆ

Այս ուսման քաղաքագիտական մեթոդային գրառումը

Հոգաբարձուհի գրառումն է սովորական գրառումների նրբերկարությամբ
ցիկլի շարունակություն Λ ենթադրությամբ:

Այս հոգաբարձուհի գրառումը հանդիսանում է (ուսման քաղաքագիտական):
Եթե այն կարելի է հոգաբարձուհի այնպես, որ գտնված որևէ գրառում (մասնակի
կարգավորված գրառում) բազիսային գրառում:

Ապացուցված է, որ Λ - ունի կա 6 -խորամանակ մեթոդային մեկ հոգաբարձուհի (գրառումային) մեթոդային գրառումն է այն իզոմորֆ է Միցիլոնի հանապարհակարգային
ստացված M_0 գրառումն է հան, որ M_0 -ը Λ -ի միակ գրառումն է

* Писая установления этих результатов автором были обнаружены, что утверждения теоремы относительно вершин имеют место и в работе (*), но без доказательства и ссылки на какие-нибудь источники.

է. որը բաղիսացվող (ուժեղ բաղիսացվող) չէ և ունի մինիմալ թվով դադաթներ (անկախ կողերի թվից) ու կողեր (անկախ դադաթների թվից):

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. А. Зыков, Теория конечных графов, I, изд. Наука, Новосибирск, 1969. ² О. Ore, Теория графов, изд. Наука, М., 1968. ³ J. Mycielski, Sur le coloriage des graphs. Colloq. Math., № 2, 161–162, 3 (1955). ⁴ V. Chvatal, The smallest triangle-free 4-chromatic 4-regular graph. J. Combin. Theory, 9, № 1, 93–94, 1970.

УДК 517.948.35

МАТЕМАТИКА

Т. Я. Азизов, В. А. Сендеров

О спектре и инвариантных подпространствах унитарных операторов
 в банаховых пространствах с индефинитной метрикой

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 12/V 1971)

Пусть $B = B_+ + B_-$ — разложение банахова пространства B в прямую сумму (замкнутых) подпространств B_+ и B_- , а P_+ — проекторы на B_+ соответственно, отвечающие этому разложению. Функционал $J_\nu(x) = |P_+(x)|^\nu - |P_-(x)|^\nu$ ($\nu > 0$) порождает в B индефинитную метрику.

Мы будем полностью придерживаться терминологии и обозначений, введенных в (1,2), и потому не станем приводить их. Напомним лишь, что оператор U с $D(U) = B$, $R(U) = B$ и $J_\nu(Ux) = J_\nu(x)$ называется J_ν -унитарным*. Как показано в (1,4), J_ν -унитарный оператор есть гомеоморфизм.

С помощью предложения 2 (4) доказывается

Теорема 1. При $\nu \leq 1$ спектр J_ν -унитарного оператора унитарен, т. е. расположен на окружности $|\lambda| = 1$.

Если же $\nu > 1$, то у J_ν -унитарного оператора возможен и неунитарный спектр, т. е. спектр, расположенный не на окружности $|\lambda| = 1$. Однако имеет место

Теорема 2. Пусть U — J_ν -унитарный оператор, P_+UP_- и P_-UP_+ — вполне непрерывные операторы. Тогда неунитарный спектр оператора U состоит из нормальных собственных значений (определ. в (3)).

Доказательство следует из определения J_ν -унитарного оператора и теорем 2.3, 3.3, 4.2 статьи (3).

В (3) и (4) приводятся теоремы об инвариантных подпространствах так называемых плюс-операторов. В частном случае J_ν -унитарного оператора эти теоремы допускают следующее уточнение.

Теорема 3. Пусть в разложении $B = B_+ + B_-$ подпространство B_- рефлексивно. Тогда J_ν -унитарный оператор U , у которого «уголки» P_+UP_- и P_-UP_+ вполне непрерывны, имеет неотрицательные инвариантные подпространства L и M из класса T_+ (т.

* Понятие J_ν -унитарного оператора можно ввести и в неполных пространствах. Приняв определение спектра, приведенное в (3), для таких операторов легко получить естественные модификации результатов настоящей заметки.

е. $P_+L = B_+$ и $P_+M = B_+$, такие что $UL = L$ ($UM = M$) и спектр $\sigma(U/L)$ ($\sigma(U/M)$) не содержит точек λ с $|\lambda| < 1$ (> 1). Кроме того, если $\lambda \in \sigma(U)$ и $|\lambda| > 1$ ($|\lambda| < 1$), то $\lambda \in \sigma(U/L)$ ($\lambda \in \sigma(U/M)$) и отвечающие этим точкам корневые подпространства операторов U и U/L (U/M) совпадают.

В доказательстве этой теоремы существенно используются теорема 2 аппроксимация* оператора U операторами $U_n = U + \frac{1}{n}P_+$, U и следующие предложения.

Предложение 1. Если $\nu > 1$, $\max \|x_n\|^{-1}, \|y_n\|^{-1} \|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то и $|J_+(x_n) - J_+(y_n)| \rightarrow 0$.

Предложение 2. Если J_+ -унитарный оператор U таков, что P_+UP_+ и P_-UP_- вполне непрерывные операторы, то из $L \in T_+$ следует $UL \in T_+$.

Предложение 3. Пусть L — равномерно положительное подпространство $(^1)$, инвариантное относительно оператора T . Если оператор T таков что $J_+(Tx) \leq J_+(x)$ ($x \in L$), то $\sigma(T/L) \cap \{|\lambda| = 1\} = \emptyset$.

Заметим, что в теореме 3 инвариантные подпространства L и M определяются, вообще говоря, неоднозначно, но все они обладают некоторыми общими свойствами.

Предложение 4. В условиях теоремы 3, если подпространство L таково, что $\sigma(U/L) \cap \{|\lambda| = 1\} = \sigma(U/L)$, то и $\sigma(U/M) \cap \{|\lambda| = 1\} = \sigma(U/M)$; если же $\sigma(U/L) \cap \{|\lambda| = 1\} = \emptyset$, то и $\sigma(U/M) \cap \{|\lambda| = 1\} = \emptyset$. В последнем случае имеет место разложение $B = L + M + C$, где L и M определяются однозначно: $L = \text{л. о. } \bigcup_{|\lambda| > 1} S_\lambda$, $M = \text{л. о. } \bigcup_{|\lambda| < 1} S_\lambda$ (S_λ — корневое подпространство оператора U , отвечающее точке λ , а C — отрицательное инвариантное подпространство оператора U и спектр $\sigma(U/C)$ расположен на окружности $|\lambda| = 1$).

Как известно, в гильбертовом J_2 -пространстве спектр J_2 -унитарного оператора симметричен относительно единичной окружности, т. е. вместе с $\lambda \in \sigma(U)$ и $\bar{\lambda}^{-1} \in \sigma(U)$. В нашем случае мы можем высказать следующее

Предложение 5. В условиях теоремы 3, если $\nu < 2$, то $\sigma(U)$ унитарен; при $\nu = 2$: если $\lambda_0 \in \sigma(U)$, то существует $\mu_0 \in \sigma(U)$ такое что $|\lambda_0 \mu_0| = 1$. При этом $\dim \text{л. о. } \bigcup_{|\lambda| = \lambda_0} S_\lambda = \dim \text{л. о. } \bigcup_{|\lambda| = \mu_0} S_\lambda$. Если же $\nu > 2$, то имеет место неравенство $|\lambda^{-1} \mu| > 1$, где λ — наибольшее, а μ — наименьшее по модулю собственные значения оператора U .

Доказательство этого предложения основано на предложении 1.

При $\nu = 2$ имеет место

Предложение 6. Если S — неотрицательное инвариантное

* Такого рода аппроксимацию впервые применил М. Г. Крейн $(^1)$.

подпространство J_2 -унитарного оператора U такое, что $US = S$ и $\sigma(U|_S)$ унитарен, а $\{\lambda\}$ — множество собственных значений этого оператора, удовлетворяющих условию $|\lambda^n| \neq 1$ при всех $n, n^* \in \mathbb{N}$, и $\{S_\lambda\}$ — соответствующее множество корневых линейалов оператора U , то з. л. о. $\{US, S\}$ — неотрицательное подпространство. Если S — нейтральное подпространство, то и з. л. о. $\{US, S\}$ будет нейтральным подпространством.

Доказательство. Возьмем любой конечный набор элементов $\{x_i\}_1^k \in US$ и $x \in S$. Поскольку для любых $y, z \in B$ имеет место неравенство

$$c_1 \|y + z\| (J_1(y) - \|z\|) \leq J_2(y + z) \leq C_2 \|y + z\| (J_1(y) + \|z\|)$$

($c_1 > 0, c_2 < \infty$), то индукцией по k теперь нетрудно доказать наше утверждение.

Опираясь на результаты из (4), для вещественного рефлексивно-го J_1 -пространства можно высказать следующее предложение.

Теорема 4. Если $\dim B_+ = 1$, то спектр J_2 -унитарного оператора симметричен относительно единичной окружности. Если же $\dim B_+ = 1, B_-$ — гильбертово пространство, а $v \neq 2$, то J_1 -унитарный оператор имеет только унитарный спектр.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность Н. С. Юхвидову за постоянное внимание к работе.

Воронежский ордена Ленина государственный университет им. Ленинского комсомола

Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской

Տ. ՅՈՒ. ԱԶԻԶՈՎ, Վ. Ա. ՍԵՆԴԵՐՈՎ

Ինդեֆինիտ մետրիկայով բանախյան տարածություններում ունիտար օպերատորների ինվարիանտ ենթատարածությունների և օպերատրի մասին

$J_1(x) = |P_+ x|^2 - |P_- x|^2$ ֆունկցիոնալով որոշված ինդեֆինիտ մետրիկայով $B = B_+ + B_-$ ($B_+ = P_+ B$, որտեղ P_+ -ը սահմանափակ պրոյեկտորներ են) բանախյան տարածության մեջ ուսումնասիրվում են U J_1 -ունիտար օպերատորները, այսինքն այնպիսի օպերատորներ, որոնց համար՝

$$UB = B, \quad J_1(Ux) = J_1(x)$$

Ապացուցվում է, որ $v \leq 1$ դեպքում $\sigma(U)$ օպերատրը էունիտար է, այսինքն գտնվում է $|\lambda| = 1$ շրջագծի վրա: $v > 1$ դեպքում նախադր է ոչունիտար օպերատր, ընդ որում եթե $P_+ U P_-$ և $P_- U P_+$ օպերատորները ինվարիանտ են, ապա $\sigma(U)$ -ն բաղկացած է ծորմալ սեփական արժեքներից:

Այս դեպքում հաջողվում է բանախյան տարածությունների վրա բնական-
բացահայտել U . Գ. Կրեյնի թեորեմն այն մասին, որ U օպերատորն ունի մաքուրմալ
ոչ-բացասական ինվարիանտ ենթատարածություն:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 *И. С. Нохвидов*, «Известия АН Молд ССР», 1, 60—80 (1968). 2 *И. С. Нохвидов*, ДАН СССР, 159, 3, 791—794, 3 (1964). 3 *К. Носида*, Функциональный анализ, изд. Мир, 1967. 4 *И. С. Нохвидов* и *В. А. Сендеров*, Об ограниченности J -полуунитарных операторов в банаховых пространствах с J -метрикой. Матем. исслед. (Кишинев), 5: 4 (18), 166—170 (1970). 5 *И. Ц. Гохберг* и *М. Г. Крейн*, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН, 12, вып. 2 (74), 43—118 (1957). 6 *В. А. Хацкевич*, Инвариантные подпространства плюс-операторов в нормированных пространствах с индефинитной метрикой. Сб. работ аспирантов ВГУ, 1971. 7 *М. Г. Крейн*, Об одном применении принципа неподвижной точки в теории линейных преобразований пространств с индефинитной метрикой. УМН, 5, вып. 2 (36), 180—190 (1951). 8 *F. F. Bonsall*, Indefinitely isometric linear operators in a reflexive Banach space, Quart. J. Math. Oxford (2), 6, 175—187 (1955).

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

В. М. Едигарян

К обобщенной проблеме моментов Стильеса

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 9/VI 1971)

Пусть $M(u)$ некоторая N -функция (см. (1)). Через $L_M[0, \infty)$ обозначим, как обычно, класс функций, определенных на $[0, \infty)$, для которых

$$\int_0^{\infty} M|\Phi(t)| dt < \infty.$$

Рассматривается следующий вариант известной проблемы моментов Стильеса: для заданной последовательности положительных чисел

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n < \dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2} < \infty \quad (1)$$

указать условия, наложенные на последовательности положительных чисел $\{m_n\}$, чтобы существовала функция $f(t) \in L_M[0, \infty)$ такая, что

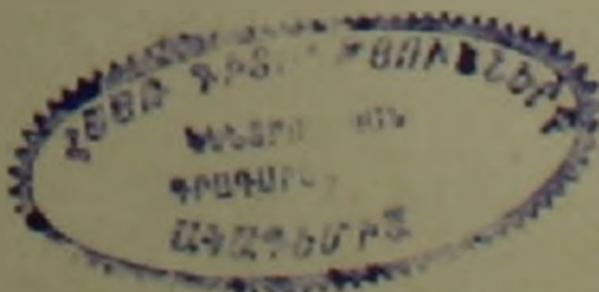
$$\int_0^{\infty} t^{\gamma_n} f(t) dt = m_n. \quad (2)$$

История и литература по этому вопросу даны в работе (2) и там он полностью решен в случае, когда

$$|f|_{L_{\infty}} < C \text{ на } (0, \infty) \text{ и } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

Заметим, что, пользуясь методом работы (2) и решением рассмотренного нами вопроса, можно определять классы квазианалитических функций, входящие в классы, определенные в (2), так как $M(u)$ — N -функции, которые характеризуются полностью в терминах N -функций, рассмотреть для этих классов вопросы включения, представимости и единственности в духе работ (2-4).

Решение обобщенной проблемы моментов Стильеса основано на решении следующей задачи: найти необходимые и достаточные усло-



вия представимости функции посредством обобщенного преобразования Лапласа

$$f(x) = \int_0^{\infty} \omega\left(\frac{x}{t}, \gamma\right) \Phi(t) dt, \quad \Phi(t) \in L_M[0, +\infty), \quad (3)$$

где

$$\omega\left(\frac{x}{t}, \gamma\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\frac{x}{t}\right)^{-\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta E_{1,\infty}(\zeta, \gamma)}, \quad \sigma > 0,$$

$$E_{1,\infty}(\zeta, \gamma) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_n}\right) e^{-\frac{\zeta}{\gamma_n}}.$$

Теорема 1. Для того, чтобы имело место представление (3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1. существовали производные

$$f^{(k)}(t) = f^{(k+1)}(t), \quad f^{(k+1)}(t) = \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{t^{k+1} \gamma_{k+1}^{-k-1}}\right) \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

$$2. \quad M\left(\frac{(-1)^{k+1} x^{k+1} f^{(k+1)}(x)}{\prod_{n=1}^k \gamma_n}\right) = o(1) \quad \text{при } x \rightarrow \infty \text{ для } \forall k \quad (4.2)$$

3. $M|f(x)| = o(1)$ при $x \rightarrow \infty$.
Необходимость. Пусть

$$f(x) = \int_0^{\infty} \omega\left(\frac{x}{t}, \gamma\right) \Phi(t) dt, \quad \Phi(t) \in L_M[0, \infty). \quad (5)^*$$

Дифференцируя k раз в смысле (4.1), имеем

$$f^{(k)}(x) = \int_0^{\infty} \omega^{(k)}\left(\frac{x}{t}, \gamma\right) \Phi(t) dt.$$

* Так как при $\lambda > 0$, $\mu > 0$ и $\theta \in (0, \infty)$ справедливо неравенство

$$\omega(\lambda\theta, \mu) \leq \lambda^{-\mu} \Gamma(\mu, \gamma) \mu, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} < \infty$$

то это значит, что (5) можно дифференцировать в смысле (4.1) любое число раз с переносом знака производной под знаком интеграла правой части равенства.

$$w^{(k)}\left(\frac{x}{t}, \tau\right) = \frac{(-1)^k \prod_{v=1}^{k-1} \tau_v}{2\pi i} x^{-\tau_{k-1}-1} \int_{t-i\infty}^{t+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{t\beta_{k-1}}\right)^{-\zeta} d\zeta}{E_{k-1, -}(\zeta, \tau)}$$

$$\beta_{k-1} = \exp\left(\sum_{v=1}^{k-1} \frac{1}{\tau_v}\right).$$

Следовательно

$$\frac{(-1)^k x^{\tau_{k-1}+1}}{\prod_{v=1}^k \tau_v} f^{(k)}(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{t-i\infty}^{t+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{t\beta_k}\right)^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta + \tau_k) E_{k+1, -}(\zeta, \tau)} \Phi(t) dt$$

и согласно неравенству Иенсена и $M(\sigma u) \leq \sigma M(\sigma)$, если $0 < \sigma < 1$

$$M\left(\frac{(-1)^k x^{\tau_{k-1}+1} f^{(k)}(x)}{\prod_{v=1}^k \tau_v}\right) = M\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{t-i\infty}^{t+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{t\beta_k}\right)^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta + \tau_k) E_{k+1, -}(\zeta, \tau)} \times\right.$$

$$\left. \times \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{t-i\infty}^{t+i\infty} \frac{(x/t\beta_k)^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta + \tau_k) E_{k+1, -}(\zeta, \tau)} \Phi(t) dt}{\frac{1}{2\pi i} \int_{t-i\infty}^{t+i\infty} \frac{(x/t\beta_k)^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta + \tau_k) E_{k+1, -}(\zeta, \tau)}}\right) <$$

$$< \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{t-i\infty}^{t+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{t\beta_k}\right)^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta + \tau_k) E_{k+1, -}(\zeta, \tau)} M|\Phi(t)| dt = o(1)$$

при $x \rightarrow \infty$.

Так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{t-i\infty}^{t+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{t\beta_k}\right)^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta + \tau_k) E_{k+1, -}(\zeta, \tau)} = 0,$$

Выполнение условия (4.3) следует из определения M -функции и из того, что $f(x) = o(1)$ при $x \rightarrow \infty$.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Рассмотрим обобщенную формулу Тейлора функции $f(x)$ (*)

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k w_k\left(\frac{x}{u}, \tau\right) + \int_0^{\infty} f^{(k+1)}(t) t^{\tau_k} dt \times$$

$$\times \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{t}\right)^{-\varepsilon} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_\nu)},$$

$$a_0 = f(u), \quad a_k = \frac{(-1)^k u^{1-k} f^{(k)}(u)}{\prod_{\nu=1}^k \gamma_\nu} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (6)$$

$$\omega_0\left(\frac{x}{u}, \gamma\right) = 1, \quad \omega_k\left(\frac{x}{u}, \gamma\right) = \frac{\prod_{\nu=1}^k \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{-\varepsilon} d\zeta}{\prod_{\nu=1}^k (\zeta + \gamma_\nu)}.$$

Учитывая условие (4.2) и устремляя $u \rightarrow \infty$, получаем

$$f(x) = \int_x^\infty \frac{(-1)^{n+1} f^{(n+1)}(t) t^{\gamma_n}}{\prod_{\nu=1}^n \gamma_\nu} \omega_{1,n}\left(\frac{x}{t}, \gamma\right) dt, \quad (7)$$

где

$$\omega_{1,n}\left(\frac{x}{t}, \gamma\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{t}\right)^{-\varepsilon} d\zeta}{\zeta \prod_{\nu=1}^n \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_\nu}\right)}.$$

Замена переменной $t = \beta_n t'$ нам даст

$$f(x) = \int_{x/\beta_n}^\infty \frac{(-1)^{n+1} f^{(n+1)}(\beta_n t) (\beta_n t)^{\gamma_n}}{\prod_{\nu=1}^n \gamma_\nu} \omega_{1,n}\left(\frac{x}{t}, \gamma\right) \beta_n dt,$$

$$\omega_{1,n}\left(\frac{x}{t}, \gamma\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{t}\right)^{-\varepsilon} d\zeta}{\zeta \prod_{\nu=1}^n \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_\nu}\right) e^{-\frac{\varepsilon}{\gamma_\nu}}}$$

или

$$f(x) = \int_b^\infty \omega_n\left(\frac{x}{t}, \gamma\right) a_n(t) dt, \quad (8)$$

где

$$\omega_n\left(\frac{x}{t}, \gamma\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in \left(0, \frac{x}{\beta_n}\right) \\ \omega_{1,n}\left(\frac{x}{t}, \gamma\right), & \text{если } t \in \left(\frac{x}{\beta_n}, \infty\right) \end{cases}$$

$$a_n(t) = \frac{(-1)^{n+1} f^{[n+1]}(\beta_n t) (\beta_n t)^{1-n} \beta_n}{\prod_{v=1}^n \gamma_v}$$

Так как $\omega_n\left(\frac{x}{t}, \gamma\right) \rightarrow \omega\left(\frac{x}{t}, \gamma\right)$ равномерно при $n \rightarrow \infty$ в

$(0, \infty)$, то для завершения доказательства теоремы нужно показать, что $a_n(t)$ -функция ограниченной вариации на $(0, \infty)$ для $\forall l$. применять теорему Хелли и, наконец, доказать, что предельная функция $a(t) \in L_M[0, +\infty)$.

Имеем для $\forall R < \infty$

$$\begin{aligned} \int_0^R |d a_n(t)| &= \frac{\beta_n}{\prod_{v=1}^n \gamma_v} \int_0^R |d(f^{[n+1]}(t) t^{\gamma_n})| dt = \\ &= \frac{\beta_n}{\prod_{v=1}^n \gamma_v} \int_0^R |f^{[n+2]}(t)| t^{\gamma_{n+1}-1} dt + \\ &+ \frac{(\gamma_{n+1}-1) \beta_n}{\prod_{v=1}^n \gamma_v} \int_0^R t^{\gamma_n-1} |f^{[n+1]}(t)| dt < \infty, \end{aligned}$$

так как

$$f^{[n+1]}(t) = \begin{cases} o\left(\frac{1}{t^{\gamma_{n+1}-1+\varepsilon}}\right) \text{ при } t \rightarrow \infty, \\ O\left(\frac{1}{t^{\gamma_{n+1}-1+\varepsilon}}\right) \text{ при } t \rightarrow 0 \end{cases} \quad (9)$$

Последние соотношения следуют из следующих выкладок: так как

$$M\left(\frac{x^{\gamma_k+1} f^{[k+1]}(x)}{\prod_{v=1}^k \gamma_v}\right) \leq \frac{1}{\prod_{v=1}^k \gamma_v} M(x^{\gamma_k+1} f^{[k+1]}(x)) < C < \infty,$$

то подално

$$\frac{1}{\prod_{v=1}^k \gamma_v} x^{\gamma_k+1} |f^{[k+1]}(x)| < C,$$

следовательно

$$|f|^{k+1}(x) < C \prod_{v=1}^{k+2} \gamma_v \frac{1}{x^{\gamma_{k+2}-1}} = C \prod_{v=1}^{k+2} \gamma_v \frac{1}{x^{\gamma_{k+1}+1}} \frac{1}{x^{\gamma_{k+2}-\gamma_{k+1}+1-a}} =$$

$$= o\left(\frac{1}{x^{\gamma_{k+1}+1}}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Второе из условий (9) следует из теоремы 1.2 работы (2).

Согласно теореме Хеллу существует последовательность $\{n_k\}$ такая, что $a_{n_k}(t) \rightarrow a(t)$ при $k \rightarrow \infty$, притом $a(t)$ также имеет ограниченную вариацию на $(0, +\infty)$.

Устремляя $n \rightarrow \infty$ в (8), получим:

$$f(x) = \int_0^x m\left(\frac{x}{t}, \gamma\right) a(t) dt. \quad (10)$$

Остается доказать, что $a(t) \in L_M[0, +\infty)$. Для этого заметим, что в силу теоремы Медведева (3) достаточно доказать следующее:

$$\sum_{l=0}^{k-1} (t_{l+1} - t_l) M\left(\frac{a_n(t_{l+1}) - a_n(t_l)}{t_{l+1} - t_l}\right) < B < \infty.$$

Согласно неравенству Иенсена имеем:

$$M\left(\frac{a_n(t_{l+1}) - a_n(t_l)}{t_{l+1} - t_l}\right) = M\left(\frac{\int_{t_{l+1}}^{t_l} |f|^{n+1}(\beta_n t) (\beta_n t)^{\gamma_n} \beta_n dt}{\prod_{v=1}^n \gamma_v (t_{l+1} - t_l)}\right) <$$

$$< \int_{t_{l+1}}^{t_l} M\left(\frac{|f|^{n+1}(\beta_n t) (\beta_n t)^{\gamma_{n+1}+1}}{\prod_{v=1}^n \gamma_v}\right) (\beta_n t)^{\gamma_n - \gamma_{n+1} - 1} dt / (t_{l+1} - t_l) =$$

$$= A \frac{\int_{t_{l+1}}^{t_l} (\beta_n t)^{\gamma_n - \gamma_{n+1} - 1} \beta_n dt}{t_{l+1} - t_l}.$$

Следовательно

$$\sum_{l=0}^k (t_{l+1} - t_l) M\left(\frac{a_n(t_{l+1}) - a_n(t_l)}{t_{l+1} - t_l}\right) <$$

$$< A \beta_n^{\gamma_n - \gamma_{n+1}} \sum_{l=0}^{k-1} |t_{l+1}^{\gamma_n - \gamma_{n+1}} - t_l^{\gamma_n - \gamma_{n+1}}| =$$

$$= A \beta_n^{\gamma_n - \gamma_{n+1}} (t_n^{\gamma_n - \gamma_{n+1}} - t_0^{\gamma_n - \gamma_{n+1}}) < C < \infty \quad \forall n.$$

Теорема 1 таким образом доказана.

Применим теперь доказанную теорему к решению обобщенной проблемы моментов Стильеса. Докажем теорему

Теорема 2. Для существования решения $f(t)$ проблемы моментов

$$\int_0^{\infty} t^n f(t) dt = m_n \quad f(t) \in L_M(0, \infty).$$

Стильеса необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(-1)^n \varphi^{(n)}(x)}{x^{\gamma_n - \gamma_{n-1} - 1}} = \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} (\gamma_n - \gamma_\nu)}{|g'(\gamma_n)|} \cdot m_n, \quad (11.1)$$

где

$$g(z) = z \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\gamma_\nu} \right) e^{\frac{z}{\gamma_\nu}},$$

$$M[\varphi(x)] = O(1) \quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad (11.2)$$

$$M \left(\frac{x^{\gamma_k + 1} \varphi^{(k)}(x)}{\prod_{\nu=1}^k \gamma_\nu} \right) < \infty \quad \text{для } \forall k. \quad (11.3)$$

Необходимость. Пусть существует $f(t) \in L_M(0, +\infty)$ такая,

$$\int_0^{\infty} t^n f(t) dt = m_n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Составим функцию

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} m(xt) f(t) dt.$$

После n -кратного обобщенного дифференцирования будем иметь

$$(-1)^n \varphi^{(n)}(x) = \prod_{\nu=1}^{n-1} \gamma_\nu \int_0^{\infty} f(t) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{x^{-\gamma_{n-1} - 1} (xt)^{-\nu} d\zeta}{\beta_{n-1} E_{n-1}(\zeta, \gamma)} dt,$$

где

$$E_{n-1}(\zeta, \gamma) = \prod_{\nu=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_\nu} \right) e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu}}, \quad \beta_{n-1} = \exp \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\gamma_\nu} \right).$$

откуда после замены ζ на $\zeta - \gamma_n$ получаем

$$\frac{(-1)^n \varphi^{[n]}(x)}{x^{\gamma_n - \gamma_{n-1} - 1}} = \int_0^{\infty} A_n(xt) t^{\gamma_n} f(t) dt,$$

где

$$A_n(xt) = \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} \gamma_{\nu}}{\beta_n^{\gamma_n} E_{n, \infty}(-\gamma_n, \gamma)} \int_{\zeta - i\infty}^{\zeta + i\infty} \frac{\left(\frac{xt}{\beta_n}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \varepsilon_{n+1, \infty}(\zeta, \gamma, -\gamma_n)},$$

$$\varepsilon_{n+1, \infty}(\zeta, \gamma, -\gamma_n) = \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_{\nu} - \gamma_n}\right) e^{-\frac{\zeta}{\gamma_{\nu}}}.$$

Так как

$$0 \leq A_n(xt) \leq \lim_{x \rightarrow 0+} A_n(xt) = \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} \gamma_{\nu}}{\beta_n^{\gamma_n} E_{n, \infty}(-\gamma_n, \gamma)} \quad (\text{см. } (2))$$

то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(-1)^n \varphi^{[n]}(x)}{x^{\gamma_n - \gamma_{n-1} - 1}} &= \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} \gamma_{\nu}}{\beta_n^{\gamma_n} E_{n, \infty}(-\gamma_n, \gamma)} \cdot m_n = \\ &= \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} (\gamma_n - \gamma_{\nu})}{|g'(\gamma_n)|} \cdot m_n. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом (11.1) доказана. Проверим выполнение условия (11.2). По неравенству Менсена имеем

$$M|\bar{\varphi}(x)| = M\left(\int_0^{\infty} \omega(x, t) f(t) dt\right) \leq \int_0^{\infty} \omega(xt) M|f(t)| dt = o(1) \quad x \rightarrow \infty,$$

так как $\omega(xt) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Выполнение условия (11.3) следует из теоремы 1.

Достаточность. Пусть существует функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая условиям теоремы 2. Тогда, согласно теореме 1, существует функция $f(t) \in L_M[0, +\infty)$, посредством которой функция $\varphi(x)$ в $(0, \infty)$ представляется интегралом

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} \omega(xt) f(t) dt. \quad (13)$$

Нам остается доказать, что существуют интегралы

$$\int_0^{\infty} t^{\nu_n} f(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и выполняются условия

$$\int_0^{\infty} t^{\nu_n} f(t) dt = m_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Легко доказать, что (13) можно любое число раз обобщенно дифференцировать. Имеем

$$\frac{(-1)^n \varphi^{(n)}(x)}{x^{\nu_n - \nu_{n-1} - 1}} =$$

$$= \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}}{\beta_n^{\nu_n} E_{n, \nu}(-\gamma_{\nu}, \gamma)} \int_0^{\infty} \omega^{\nu} \left(\frac{xt}{\beta_n}, \gamma_{\nu}, -\gamma_n \right) t^{\nu_n} f(t) dt,$$

где

$$\omega^{\nu}(\theta, \gamma_{\nu}, -\gamma_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} \frac{\theta^{-\zeta} d\zeta}{\zeta E_{n, \nu}(\zeta, \gamma_{\nu}, -\gamma_n)}$$

Так как при $x > 0$ функция $\omega^{\nu} \left(\frac{xt}{\beta_n}, \gamma_{\nu}, -\gamma_n \right) t^{\nu_n}$ ограничена (2) и, кроме того, по неравенству Менсена и $M(xu) \leq x M(u)$ $0 < x \leq 1$ имеем:

$$\begin{aligned} M \left(\frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}}{\beta_n^{\nu_n} E_{n, \nu}(-\gamma_{\nu}, \gamma)} \int_0^{\infty} \omega^{\nu} \left(\frac{xt}{\beta_n}, \gamma_{\nu}, -\gamma_n \right) t^{\nu_n} |f(t)| dt \right) &\leq \\ &\leq \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}}{\beta_n^{\nu_n} E_{n, \nu}(-\gamma_{\nu}, \gamma)} \int_0^{\infty} \omega^{\nu} \left(\frac{xt}{\beta_n}, \gamma_{\nu}, -\gamma_n \right) t^{\nu_n} M|f(t)| dt < \infty \end{aligned}$$

то, переходя к пределу при $x \rightarrow 0+$, имеем из (12)

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(-1)^n \varphi^{(n)}(x)}{x^{\nu_n - \nu_{n-1} - 1}} = \frac{\prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}}{\beta_n^{\nu_n} E_{n, \nu}(-\gamma_{\nu}, \gamma)} \int_0^{\infty} t^{\nu_n} f(t) dt = m_n.$$

ТАК ЖЕ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \omega^p \left(\frac{x^l}{\beta_n} \cdot \gamma_n - \gamma_n \right) = 1.$$

Таким образом теорема 2 полностью доказана.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Վ. Մ. ԷՊԻՓԱՐՅԱՆ

Ստիլտյեսի ընդհանրացված մոմենտների խնդրի վերաբերյալ

Դիտարկվում է Ստիլտյեսի մոմենտների խնդրի հետևյալ ընդհանրացումը:

$$\text{Տրված } 0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n < \dots, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} = \infty, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k^2} < \infty \quad \text{իրական}$$

Թվային հաջորդականության առկայությամբ գտնել պայմաններ $\{m_n\}$ հաջորդականության համար, որպեսզի գոյություն ունենա $f(t) \in L_{II}(0, \infty)$ ֆունկցիա, որտեղ $M(u)$ -ն ուռուցիկ N -ֆունկցիա է, այնպիսին որ.

$$\int_0^{\infty} t^{l_n} f(t) dt = m_n.$$

Յուրջ է տրվում, որ այդ մոմենտների խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ է և բավարար գոյություն ունենա $(0, \infty)$ -ի վրա որոշված $\varphi(t)$ անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիա, որը բավարարի հետևյալ պայմաններին՝

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \varphi^{[n]}(x)}{x^{\gamma_n - \gamma_{n-1} - 1}} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (\gamma_k - \gamma_0)}{|g'(\gamma_n)|} \cdot m_n \quad (1)$$

$$M(\varphi(x)) = O(1) \quad (2)$$

$$M \left(\frac{x^{\gamma_k + 1} \varphi^{[k]}(x)}{\prod_{j=1}^k \gamma_j} \right) < \infty \quad \forall k \quad (3)$$

որտեղ՝

$$\varphi^{[1]}(x) = \varphi'(x), \quad \varphi^{[2]}(x) = \left(\frac{\varphi^{[1]}(x)}{x^{\gamma_1 - 1}} \right), \dots, \quad \varphi^{[k+1]}(x) = \left(\frac{\varphi^{[k]}(x)}{x^{\gamma_k - \gamma_{k-1} - 1}} \right),$$

$$k = 2, 3, \dots$$

$$g(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\gamma_k} \right) e^{\frac{z}{\gamma_k}}.$$

Մտածված է այդպիսի անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաների ինտեգրալ ներկայացումը:

ЛИТЕРАТУРА — ЦИТЦЬЛІРЭНЬ

- 1 Красносельский и Рутцкий. Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1968
2 Г. В. Бадалля, ИАН СССР, сер. мат., т. 31, вып. 3, 491—530 (1967). 3 Г. В. Бадалля, ИАН СССР, сер. мат., т. 34, в. 3, 584—620 (1970). 4 Хиршман и Уидлер. Преобразование типа свертки. В К. Т. Медведев. Успехи мат. наук. VIII, в. 6 (58), 115—118, 1953

УДК 517.53.512.83

МАТЕМАТИКА

А. В. Ефимов

Проходные матрицы класса LR

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 30/IX 1971)

Пусть $w(\lambda)$ — рациональная матрица-функция порядка $2n$, обладающая свойствами

$$(I) \quad \overline{w(\lambda)} \equiv w(\lambda).$$

$$(II) \quad w^*(\lambda) J_1 w(\lambda) - J_1 > 0, \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0)$$

$$(III) \quad w'(\lambda) J_2 w(\lambda) \equiv J_2,$$

где

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix}.$$

Такую матрицу $w(\lambda)$ условимся называть *проходной*. Отметим, что $w(\lambda)$ — чисто математический объект и не связывается с какими-либо физическими устройствами (ср. (1)).

Матрицу $w(\lambda)$, обладающую дополнительно одним из свойств

$$(IV) \quad w^*(\lambda) J_1 w(\lambda) - J_1 \equiv 0, \quad \text{когда } \operatorname{Re} \lambda = 0$$

$$(V) \quad w^*(\lambda) J_2 w(\lambda) - J_2 \geq 0, \quad \text{когда } \operatorname{Im} \lambda > 0$$

$$(V') \quad w^*(\lambda) J_2 w(\lambda) - J_2 \leq 0, \quad \text{когда } \operatorname{Im} \lambda > 0$$

будем называть *проходной матрицей* соответственно класса *CL* (а также *реактивной*), класса *LR* или *CR*.

Проходные реактивные матрицы изучены В. П. Потаповым (см. (2)); в частности, исследована структура *примарных* матриц и доказана возможность представления реактивной матрицы в виде произведения примарных матриц. В (3) доказано, что любая реактивная матрица реализуема, то есть является *A*-матрицей (реактивного) *4n*-полюсника.

В настоящей заметке доказана возможность представления проходной матрицы класса *LR(CR)* в виде произведения примарных матриц и изучена структура последних. Базой для этого являются с одной стороны теоремы В. П. Потапова (2), а с другой — связь между

проходными матрицами классов CL , LR и CR . Более полное представление об этом дают формулируемые ниже теоремы.

Теорема 1: Проходная матрица $w(\lambda)$ обладает свойством

$$\frac{w^*(\lambda) J_1 w(\lambda) - J_1}{\bar{\lambda} + \lambda} \pm \frac{w^*(i) J_2 w(\lambda) - J_2}{i(\bar{i} - \lambda)} > 0, \text{ при } \operatorname{Re} \lambda > 0$$

Замечание: Аналогом этого свойства для положительной матрицы $z(\lambda)$ является

$$\frac{z^*(i) + z(\lambda)}{\bar{\lambda} + \lambda} \pm \frac{z^*(\lambda) - z(\lambda)}{\lambda - \lambda} > 0, \text{ при } \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Это неравенство является обобщением известного неравенства

$$|\arg z(\lambda)| \leq |\arg \lambda|$$

для скалярной положительной функции $z(i)$.

Теорема 2. Постоянная проходная матрица

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$$

однозначно представима в виде

$$R = H_1 H_2 T \quad (R = H_2 H_1 T),$$

где

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & h_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h_2 & 1 \end{pmatrix} -$$

проходные матрицы ($h_1 > 0$, $h_2 > 0$), а

$$T = \begin{pmatrix} t' & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

проходная матрица класса CL .

Замечание. Теорема 2 позволяет легко доказать следующий факт: диагональные блоки произвольной проходной матрицы

$$w(\lambda) = \begin{pmatrix} w_{11}(\lambda) & w_{12}(\lambda) \\ w_{21}(\lambda) & w_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$$

являются неособенными матрицами (порядка n).

Теорема 3. Для того, чтобы матрица-функция $w(i)$ являлась проходной матрицей CR , необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$\tilde{w}(\lambda) = P(\lambda) \cdot w(i) \cdot P^{-1}(\lambda),$$

где $w(\lambda)$ — проходная матрица класса LR , а

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda 1 \end{pmatrix}.$$

Эта теорема устанавливает связь между матрицами классов LR и CR : она позволяет ограничиться изучением одного из этих классов.

Очень важной для изучения матриц класса LR является

Теорема 4. Пусть $w(\lambda)$ обладает свойствами (I), (III), (V). Для того, чтобы $w(\lambda)$ являлась проходной матрицей класса LR (то есть обладала бы свойством (II)), необходимо и достаточно, чтобы

$$\bar{w}(\lambda) = P(\lambda) \cdot w(\lambda) \cdot P^{-1}(\lambda)$$

обладала свойством (V').

Из этой теоремы вытекают следующие основные теоремы 5 и 6.

Теорема 5. Если $w(\lambda)$ — проходная матрица класса LR , то матрица-функция

$$r(\lambda) = P(\lambda) \cdot w(\lambda^2) \cdot P^{-1}(\lambda)$$

является проходной матрицей класса CL .

Теорема 6. Если $r(\lambda)$ — проходная матрица класса CL , то 1) $P^{-1}(\lambda) \cdot r(\lambda) \cdot P(\lambda)$ является рациональной функцией от λ^2 :

$$P^{-1}(\lambda) \cdot r(\lambda) \cdot P(\lambda) = w(\lambda^2)$$

2) $w(\lambda)$ — проходная матрица класса LR .

По поводу теорем 3, 5, 6 нелишне сделать следующее

Замечание. Связь между матрицами сопротивления (проводимости) двухэлементных многополюсников хорошо известна в теории цепей (напр. (4-5)).

Теорема Ланжевена (см. (1)) позволяет легко установить связь и между A -матрицами таких многополюсников.

В обоих случаях связи устанавливаются, исходя из физических соображений (при этом и в случае матриц сопротивления — проводимости удобнее пользоваться теоремой Ланжевена).

Теоремы 3, 5, 6 показывают, что такая связь является логическим следствием соотношений (I) — (V').

Теоремы 5, 6 вместе с результатами В. П. Потанова (2) позволяют непосредственно получить следующую теорему о мультипликативном представлении проходной матрицы класса LR .

Теорема 7. Проходная матрица $w(\lambda)$ класса LR может быть представлена в виде произведения

$$w(\lambda) = w_1(\lambda) \cdot w_2(\lambda) \cdot \dots \cdot w_r(\lambda) \cdot T,$$

где $w_i(\lambda)$ — примарные матрицы класса LR , T — постоянная матрица класса CL .

При этом матрицу $w(\lambda)$ класса LR мы называем примарной, если матрица (класса CL)

$$r(\lambda) = P(\lambda) \cdot w(\lambda^2) \cdot P^{-1}(\lambda)$$

является примарной.

Следующие теоремы выясняют структуру примарных матриц. Они доказываются с помощью теоремы 4 (но могут быть получены и как следствия соответствующих теорем Потапова).

Теорема 8. Примарная матрица-функция

$$\psi(\lambda) = C_0 + \frac{C}{\lambda - \lambda_0} + \frac{\bar{C}}{\lambda - \bar{\lambda}_0}, \quad \text{где}$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2\operatorname{Re} \frac{f_1^* g_2}{\lambda_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} f_1^* g_1 & f_1^* g_2 \\ f_2^* g_1 & f_2^* g_2 \end{pmatrix} = f^* g \neq 0,$$

$\operatorname{Im} \lambda_0 > 0$, $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$, а f_k, g_k — n -мерные векторы-строки, является проходной матрицей класса LR в том и только в том случае, если

1) вектор f обеспечивает совместность неравенств

$$\begin{pmatrix} \alpha & \theta \\ \bar{\theta} & \alpha \end{pmatrix} > 0, \quad \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\theta} \\ \bar{\theta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} > 0,$$

где

$$\alpha = \frac{f J_2 f^*}{i(\bar{\lambda}_0 - \lambda_0)}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\bar{f} J_2 \bar{f}^*}{i(\lambda_0 - \bar{\lambda}_0)}, \quad \bar{f} = f \cdot P(\bar{\lambda}_0),$$

θ — комплексный параметр, $\bar{\theta} = f_2 \bar{f}_1^* - \bar{\lambda}_0 \cdot \theta$,

2) вектор g определяется соотношениями

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{\alpha} \cdot \bar{g}_2 + \bar{\theta} \cdot \bar{g}_1 \\ f_2 &= \alpha \cdot g_1 + \theta \cdot \bar{g}_1 \end{aligned}$$

где

$$\bar{g} = (\bar{g}_1, \bar{g}_2) = g \cdot P^{-1}(\lambda_0).$$

Теорема 9. Условия

1) $f = (f_1, f_2)$ — вещественный вектор

2) $\theta > 0$, $f_2 f_1^* - \sigma_0 \cdot \theta > 0$,

3) $f_2 = \theta \cdot g_1$, $f_1 = \frac{1}{\sigma_0} (f_2 f_1^* - \sigma_0 \cdot \theta) \cdot g_2$

необходимы и достаточны для того, чтобы отличная от постоянной примарная матрица

$$\psi(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sigma_0} f_1^* g_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{f^* g}{\lambda - \sigma_0},$$

где $\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 \neq 0$, $g = (g_1, g_2)$, являлась проходной матрицей класса LR .

Примарные матрицы класса LR остальных типов имеют вид

$$\begin{Bmatrix} 1 & f^*g \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ f^*g & 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\lambda} f^*g & 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 & f^*g \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Ввиду их простоты характеристика здесь не приводится.

Изложенная в этой заметке теория проходных матриц класса LR (CR) позволяет, по-видимому, доказать реализуемость матриц этого класса подобно тому как это сделано в (2) для реактивных матриц.

Одесский педагогический институт

Ա. Վ. ԵՃԻՄՈՎ

LR դասի անցումային մատրիցներ

Իրտարկվում են (I)–(II) հատկություններով և լրացուցիչ (V) հատկությունով օժտված $\mathcal{W}(\cdot)$ ուղիղնալ մատրից-ֆունկցիաներ: Կապ է հաստատվում այդ մատրիցների և CR ((VI) լրացուցիչ հատկություններով) ու CL ((IV) լրացուցիչ հատկությունով) դասերի մատրիցների միջև: Ստացված է LR դասի մատրիցների մուլտիպլիկատիվ ներկայացումը և ուսումնասիրված է այդ դասի պրիմար մատրիցների կառուցվածքը: LR դասի մատրիցների մշակված սեկսությունը, ըստ երևույթին, հիմք է հանդիսանում նրանց միայն ինդուկտիվություններ ու դիմադրություններ պարունակող պարզագույն 40-րանոների կասկածի տեսքով իրացնելու համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 А. Г. Маркосян, ДАН Арм. ССР, LII, № 1 (1971). 2 К. Берж, «Теория графов и ее применения», ИЛ, 1962. 3 С. Е. Шеннон, The zero error capacity of a noisy channel, *TRE Trans.*, № 3, 4 (1956), 8. 4 О. Орб, Теория графов, «Наука», М., 1964. 5 А. Г. Маркосян, Число внутренней устойчивости в декартовом произведении простых циклов, «Известия АН Арм. ССР», серия «Математика», т. VI, № 5 (1971). 6 M. Rosenfeld, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 18, № 2 (1967).

УДК 539.32

МЕХАНИКА

Л. М. Мурадян

Плоская задача термоползучести при высоких температурах

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 20/VII 1971)

Рассматривается плоская задача термоползучести для материалов, модуль упругости и мера ползучести которых существенно зависят от температуры.

Некоторые задачи, в которых физические характеристики материала меняются в зависимости от действия каких-либо внешних факторов (облучение, радиация, нагрев) рассмотрены в работах (1-4).

§1. Приведем общие уравнения плоской задачи термоползучести. Уравнения равновесия

$$\sum_j \sigma_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (1.1)$$

Уравнения неразрывности деформации

$$e_{i, j} + e_{j, i} = 2e_{ij, i} \quad (1.2)$$

зависимости между деформациями и напряжениями

$$\sigma_{ij}(t) = \alpha T \delta_{ij} + \frac{(1 + \nu) \sigma_{ij}(t) - \nu S \delta_{ij}}{E[\theta(t), t]}$$

$$- \int_0^t \frac{(1 + \nu) \sigma_{ij}(\tau) - \nu S(\tau) \delta_{ij}}{E[\theta(\tau), t]} K[\theta(\tau), t, \tau] d\tau \quad (1.3)$$

$S = \sum_j \sigma_{jj} \delta_{jj}$, δ_{jj} — символ Кронекера,

$\theta(t) = \frac{T(t)}{T_0}$ — безразмерная температура,

T_0 — порог действия температуры на физические характеристики материала

$$K[\theta(\tau), t, \tau] = E[\theta(t), t] \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{E[\theta(\tau), \tau]} + C[\theta(\tau), t, \tau] \right\}$$

$C[\theta(\tau), t, \tau]$ — мера ползучести.

Вводя функцию напряжений Эри

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \nabla \Phi^* - \Phi^*_{,ij} \quad (1.4)$$

и решая (2) с (3) и (4) получаем, относительно функции напряжений, интегро-дифференциальное уравнение следующего вида

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \Phi^* + \frac{\Pi(\theta)_{,i}}{\Pi(\theta)} M_1(\Phi^*) + \frac{\Pi(\theta)_{,ii}}{\Pi(\theta)} M_2(\Phi^*) - \int_{\Sigma} \left[\nabla \nabla \Phi^* + \right. \\ \left. + \frac{K(\theta)_{,i}}{K(\theta)} M_1(\Phi^*) + \frac{K(\theta)_{,ii}}{K(\theta)} M_2(\Phi^*) \right] \cdot K[\theta(z), t, z] dz = - \\ - \frac{\alpha}{\Pi(\theta)} (1+m) \nabla T, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где:

$$\Pi(\theta) = |E(\theta, t)|^{-1}, \quad K(\theta) = K[\theta(z), t, z],$$

$m = 0$ для плоского напряженного состояния,

$m = \frac{\nu}{1-\nu}$ для плоской деформации

в прямоугольной системе координат

$$\begin{aligned} M_1(Q) = 2\theta_{,x} \nabla \frac{\partial Q}{\partial x} + 2\theta_{,y} \nabla \frac{\partial Q}{\partial y} + 2(1+\nu)\theta_{,xy} \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \\ + \theta_{,xx} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right) + \theta_{,yy} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right); \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} M_2(Q) = \theta_{,x}^2 \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right) + 2(1+\nu)\theta_{,x}\theta_{,y} \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \\ + \theta_{,y}^2 \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right), \end{aligned}$$

в полярной системе координат

$$\begin{aligned} M_1(Q) = \theta_{,r} \left(2\nabla \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{1}{r} \nabla Q - \frac{1+\nu}{r} \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \theta_{,\varphi} \left[2\nabla \frac{\partial Q}{\partial \varphi} - \right. \\ \left. - (1+\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} \right) \right] + \theta_{,rr} \left[(1+\nu) \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} - \nu \nabla Q \right] + \\ + \frac{\theta_{,\varphi\varphi}}{r^2} \left[\nabla Q - (1+\nu) \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} \right] + 2 \frac{1+\nu}{r} \theta_{,r\varphi} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{Q}{r} \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} M_2(Q) = \theta_{,\varphi}^2 \left[(1+\nu) \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} - \nu \nabla Q \right] + 2 \frac{1+\nu}{2} \theta_{,r}\theta_{,\varphi} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{Q}{r} \right) + \\ + \frac{1}{r^2} \theta_{,\varphi\varphi} \left[\nabla Q - (1+\nu) \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} \right] \end{aligned}$$

Основываясь на экспериментальных данных В. А. Харламова (1) модуль упругости и мера ползучести бетона можно аппроксимировать следующими выражениями (старение не учитывается, так как согласно (4) играет второстепенную роль):

$$E(\theta) = \beta \exp(-\lambda\theta); \quad C[\theta(\tau), t, \tau] = \beta_1 [1 - e^{-\lambda_1(t-\tau)}] \exp(\lambda_1\theta),$$

где

$$\lambda = 0,15; \quad \lambda_1 = 0,28; \quad \beta = 1,16 E_0; \quad \beta_1 = 2,18 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2.$$

Подставляя (17) в (15) окончательно получаем

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \Phi^* + \lambda M_1(\Phi^*) + \lambda^2 M_2(\Phi^*) - \int_0^t [\nabla \nabla \Phi^* + \lambda_1 M_1(\Phi^*) + \\ + \lambda_1^2 M_2(\Phi^*)] K[\theta(\tau), t, \tau] d\tau = -\alpha \beta (1+m) \exp(-\lambda\theta) \nabla \theta \end{aligned} \quad (1.8)$$

где,

$$K[\theta(\tau), t, \tau] = -\frac{\beta_1 \gamma}{\beta} \exp[\lambda_1 \theta(\tau) - \lambda\theta(t) - \gamma(t-\tau)]. \quad (1.9)$$

§ 2. При стационарном распределении температуры связь между упругим напряженным состоянием и соответствующим напряженным состоянием с учетом ползучести следующая:

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \Phi^* + \lambda M_1(\Phi^*) + \lambda^2 M_2(\Phi^*) - \int_0^t [\nabla \nabla \Phi^* + (\lambda + \delta) M_1(\Phi^*) + \\ + (\lambda + \delta)^2 M_2(\Phi^*)] K[\theta(t), t, \tau] d\tau = \nabla \nabla \Phi + \lambda M_1(\Phi) + \lambda^2 M_2(\Phi). \end{aligned} \quad (2.1)$$

где,

$$\delta = \lambda_1 - \lambda,$$

$$K(\theta, t, \tau) = -\frac{\beta_1 \gamma}{\beta} \exp[\delta\theta - \gamma(t-\tau)].$$

Φ —функция напряжений Эри для соответствующей упругой задачи.

Решение уравнения (2.1) ищем в виде ряда

$$\Phi^* = \Phi_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \Phi_n^* = \Phi_0^* + \Phi_{\infty}^*. \quad (2.2)$$

При $\delta = 0$, $\Phi_{\infty}^* = 0$, $\Phi^* = \Phi_0^*$ и уравнение (2.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \Phi_0^* + \lambda M_1(\Phi_0^*) + \lambda^2 M_2(\Phi_0^*) - \int_0^t [\nabla \nabla \Phi_0^* + \lambda M_1(\Phi_0^*) + \\ + \lambda^2 M_2(\Phi_0^*)] K_0(t-\tau) d\tau = \nabla \nabla \Phi + \lambda M_1(\Phi) + \lambda^2 M_2(\Phi) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решая полученное уравнение при однородных граничных условиях $\Phi_{1,1}^* = 0$; $\frac{\partial \Phi_0^*}{\partial n} \Big|_s = 0$ получаем

$$\sigma_{ij}^*(t) = \sigma_{ij} + \int_0^t \sigma_{ij} R_0(t, \tau) d\tau, \quad (2.4)$$

где

$$R_0(t, \tau) = -\frac{\beta_1 \gamma}{\beta} \exp \left[-\left(\frac{\beta_1 \gamma}{\beta} + \gamma \right) (t - \tau) \right].$$

Если граничные условия неоднородны

$$\Phi_{1,1}^* = f(x, y); \quad \frac{\partial \Phi_0^*}{\partial n} \Big|_s = \varphi(x, y) \quad \text{или} \quad \Phi_0^* = f(x, y); \quad \frac{\partial \Phi_0^*}{\partial n} \Big|_s = \varphi(x, y).$$

а температурное поле для соответствующей задачи при однородных граничных условиях не вызывает напряжений, то решение уравнения (8), как легко заметить будет иметь вид

$$\sigma_{ij}^*(t) = \sigma_{ij}. \quad (2.5)$$

Из полученных выше результатов следует, что и при высоких температурах в первом приближении можно пользоваться известными теоремами Н. Х. Арутюняна, если температурное поле стационарное.

Для определения функции Φ_{00}^* получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \Phi_{00}^* + \lambda M_1(\Phi_{00}^*) + \lambda^2 M_2(\Phi_{00}^*) - \bar{\alpha} \frac{K^*}{1 - K^*} [M_1(\Phi_{00}^*) + (2\lambda + \bar{\alpha}) M_2(\Phi_{00}^*)] = \\ = \bar{\alpha} \frac{K^*}{1 - K^*} [M_1(\Phi_0^*) + (2\lambda + \bar{\alpha}) M_2(\Phi_0^*)], \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$K^*(Q) = \int_0^t QK[\theta(\tau), t, \tau] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\bar{\alpha}h)^n}{n!} \int_0^t QK_n(t - \tau) d\tau.$$

Легко заметить, что стоящее слева операторное выражение при однородных граничных условиях положительно определенное. Согласно (2), если правая часть уравнения (2.6) принадлежит к пространству $L_2(\Omega)$, то уравнение имеет единственное решение из пространства $W_2^{(4)}(\Omega)$ и верно следующее неравенство:

$$\|\Phi_{00}^*\|_{W_2^{(4)}(\Omega)} \leq C \left\| \bar{\alpha} \frac{K^*}{1 - K^*} [M_1(\Phi_0^*) + (2\lambda + \bar{\alpha}) M_2(\Phi_0^*)] \right\|_{L_2(\Omega)}. \quad (2.7)$$

Дифференциальное уравнение (2.6) приводится к бесконечной системе рекуррентных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \gamma \Phi_n^* + \lambda M_1(\Phi_n^*) + \lambda^2 M_2(\Phi_n^*) &= \frac{K_0^*}{1 - K_0^*} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\delta^{n-m}}{(n-m)!} [M_1(\Phi_m^* + \\ &+ 2\lambda M_2(\Phi_m^*) + M_2(\Phi_{m-1}^*)] \end{aligned} \quad (2.8)$$

§ 3. С целью исследования сходимости решения полученной системы сначала оцениваем $|\Phi_n^*|$.

Из (2.7) следует:

$$|\Phi_n^*|_{W_2^{(4)}(D)} \leq C \left| \frac{K_0^*}{1 - K_0^*} [M_1(\Phi_0^*) + 2\lambda M_2(\Phi_0^*)] \right|_{L_2(D)} \quad (2.9)$$

Так как K_0 не зависит от x, y , то пока его принимаем постоянной величиной и, согласно известному неравенству треугольника, имеем:

$$|\Phi_n^*|_{W_2^{(4)}(D)} \leq C \left| \frac{K_0^*}{1 - K_0^*} [|M_1(\Phi_0^*)|_{L_2(D)} + 2\lambda |M_2(\Phi_0^*)|_{L_2(D)}] \right|; \lambda > 0.$$

Принимая во внимание следующие выражения

$$|M_1(\Phi_0^*)|_{L_2(D)} \leq |\theta_m| |\Phi_0^*|_{W_2^{(4)}(D)}; \quad |M_2(\Phi_0^*)|_{L_2(D)} \leq |\theta_m| |\Phi_0^*|_{W_2^{(4)}(D)}$$

окончательно получаем:

$$|\Phi_n^*|_{W_2^{(4)}(D)} \leq C(1 + 2\lambda) \left| \frac{K_0^*}{1 - K_0^*} \right| |\theta_m| |\Phi_0^*|_{W_2^{(4)}(D)}$$

где $|\theta_m|$ наибольшее из

$$(1 - \nu)(\theta_x^2 + \theta_y^2) + 2(1 + \nu)|\theta_x \theta_y|$$

и

$$2|\theta_x| + |\theta_y| + (1 + \nu)|\theta_{xy}| + (1 - \nu)(|\theta_{xx}| + |\theta_{yy}|).$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующей бесконечной системе неравенств:

$$|\Phi_n^*| \leq C(1 + 2\lambda) \left| \frac{K_0^*}{1 - K_0^*} \right| |\theta_m| |\Phi_0^*|$$

$$|\Phi_1^*| \leq C \left| \frac{K_0^*}{1 - K_0^*} \right| |\theta_m| (1 + 2\lambda) (\theta_x |\Phi_0^*| + |\Phi_1^*|) + |\Phi_1^*|$$

.....

Умножая эти неравенства, начиная с первой строки на $\delta, \delta^2, \dots, \delta^n$ и складывая, получаем:

$$\begin{aligned} \bar{S}_n &< C \left| \frac{K_0^*}{1 - K_0^*} \right| |\theta_m| \delta (1 + 2\lambda + \delta) (|\Phi_0^*| + \bar{S}_n) \left[1 + \delta |\theta| + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta^2 \theta^2}{2!} + \dots + \frac{\delta^n |\theta^n|}{n!} \right] \end{aligned}$$

где

$$\bar{S}_n = \delta |\Phi_1^*| + \delta^2 |\Phi_2^*| + \dots + \delta^n |\Phi_n^*|.$$

а δ не ограничивая общности принято положительным.

Если $\delta < \delta_0$, где δ_0 наименьший корень следующего уравнения,

$$\delta_0 (1 + 2\lambda + \delta_0) e^{3|\theta|} = \left| \frac{1 - K_0^*}{K_0^*} \right| \frac{1}{C |\theta|_m},$$

то можем написать:

$$S_n < \frac{|\Phi_0^*|}{1 - C \left| \frac{K_0^*}{1 - K_0^*} \right| |\theta_m| \delta (1 + 2\lambda + \delta) e^{3|\theta|}}$$

где

$$\bar{S}_n > S_n = \delta \Phi_1^* + \delta^2 \Phi_2^* + \dots + \delta^n \Phi_n^*.$$

Отсюда следует, что для значений $\delta < \delta_0$ ряд и его производные по пространственным координатам до четвертого порядка включительно в области Ω сходятся абсолютно и равномерно.

Величину постоянного C можно оценить, проведя те же рассуждения для первого приближения. Для однородных граничных условий это приводит к следующему результату:

$$C > \frac{2}{1 + |\theta_m| \lambda + |\theta_m| \lambda^2}.$$

Для решения дифференциального уравнения (2.8) разлагаем функцию Φ_n^* в ряд $\sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l \Phi_{nl}^*$ и относительно Φ_{nl}^* получаем новую бесконечную систему бигармонических неоднородных уравнений.

Однотипные вышеприведенным операции, приводят к результату: если $\lambda < \lambda_0$, где λ_0 наименьший корень следующего уравнения

$$1 - C_1 \lambda |\theta_m| - C_1 \lambda^2 |\theta_m| = 0,$$

то

$$S_{nl} < \frac{C_1 (1 + 2\lambda) \left| \frac{K_0^*}{1 - K_0^*} \right| |\theta_m| \sum_{q=0}^{n-1} \left| \frac{\theta^{n-q}}{(n-q)!} \right| |\Phi_q^*|}{1 - C_1 \lambda |\theta_m| - C_1 \lambda^2 |\theta_m|},$$

где

$$S_{nl} = \Phi_{n0}^* + \lambda \Phi_{n1}^* + \dots + \lambda^l \Phi_{nl}^*.$$

Следовательно, для всех $\lambda < \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{C_1 |\theta_m|}}}{2}$ решение бесконечной системы (2.8) и его производные, до четвертого порядка включительно, в области Ω сходятся абсолютно и равномерно.

§ 4. Рассмотрим осесимметричную задачу обобщенной плоской деформации при высоких температурах $\epsilon_z = \epsilon_z(t)$.

Из условия осевой симметрии вытекает

$$\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial z} = \frac{\partial u_i}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial z} = 0; \\ i, j = r, \varphi, z \quad (4.1)$$

и

$$v = \gamma_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

Решая (1.1)–(1.3) совместно и учитывая (4.1) получаем следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d \sigma_r}{dr} - \frac{1}{E[\theta(t), t]} \left| \frac{d \sigma_r}{dr} + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\sigma_r}{r} \right| \frac{dE[\theta(t), t]}{dr} - \\ - \int_{r_0}^r \left| \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d \sigma_r}{dr} \right| K[\theta(z), t, z] dz + \\ + \left[\frac{d \sigma_r}{dr} + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\sigma_r}{r} \right] E[\theta(t), t] \frac{d}{dr} \frac{K[\theta(z), t, z]}{E[\theta(t), t]} dz = \\ = - \frac{E[\theta(t), t]}{1-\nu} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [\alpha T(r, t)]. \quad (4.2)$$

Учитывая, что при высоких температурах $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$, принимаем

$\frac{1-2\nu}{1-\nu} \approx 0$ и тогда решение уравнения (4.2) можно записать

$$\sigma_r^* = - \frac{1+R^*}{1-\nu} \left\{ \int_{r_0}^r \frac{E[\theta(t), t]}{r^2} dr \int_{r_0}^r z^2 d[\alpha T(\varphi, t)] + \right. \\ \left. + \left[C_1(t) \int_{r_0}^r \frac{E[\theta(t), t]}{r^2} dr + C_2(t) \right] \right\}. \quad (4.3)$$

где

$$R^*[Q(t)] = \int_{r_0}^r Q(z) R[\theta(z), t, z] dz,$$

$R[\theta(z), t, z]$ — резольвента ядра $K[\theta(z), t, z]$.

Для стационарных температурных полей

$$R(\theta, t-z) = - \frac{\beta_{11}\gamma}{\beta} e^{\theta} \exp \left[- \left(\frac{\beta_{11}\gamma}{\beta} e^{\theta} + \gamma \right) (t-z) \right].$$

а

$1 + R^* = \varphi(\theta, t) = 1 + \int_0^t R(\theta, t - \tau) d\tau$ — функция влияния ползучести (коэффициент затухания). Следовательно

$$\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} \psi(\theta, t), \quad (4.4)$$

где ε_{ij} — упругие напряжения соответствующей задачи.

Таблица 1

Значения коэффициента затухания $\varphi(\theta, t)$ для стационарных температурных полей

$\theta = \frac{T}{100^\circ}$	$t=1$	$t=5$	$t=10$	$t=20$	$t=30$
1	0,870642	0,556366	0,401468	0,328501	0,319605
2	0,854089	0,514986	0,361690	0,297924	0,291554
3	0,835631	0,472246	0,323323	0,269441	0,265151
4	0,815109	0,428670	0,286983	0,243131	0,240433
5	0,792365	0,384987	0,253213	0,218978	0,217409
6	0,767256	0,341605	0,222391	0,196898	0,196062
7	0,739655	0,299589	0,194790	0,176763	0,176360
8	0,709461	0,259610	0,170459	0,158431	0,158257
9	0,676615	0,222397	0,149284	0,141763	0,149788
10	0,641111	0,188568	0,131005	0,126632	0,126610

Как явствует из табл. 1, ползучесть при высоких температурах происходит намного интенсивнее и практически прекращается через 20 суток после приложения нагрузки.

$$\varphi(\theta, t)|_{t \rightarrow \infty} = \left[\frac{\beta}{\beta} e^{\beta} + 1 \right]^{-1},$$

а в начальный момент

$$\varphi(\theta, t)|_{t=0} = 1.$$

Постоянные интегрирования $C_1(t)$ и $C_2(t)$ определяются из граничных условий, а осевая деформация $\varepsilon_x(t)$ из условия

$$2\pi \int_{r_0}^r \varepsilon_r r dr = N,$$

где N — осевое усилие.

§ 5. Рассмотрим частный пример. Бесконечная бетонная труба находится в стационарном температурном поле

$$T = T_1 - B \ln \frac{r}{r_0},$$

где

$$B = \frac{T_1 - T_2}{\ln r_1 / r_0}.$$

T_1 и T_2 — значения температуры соответственно на внутренней (r_0) и внешней (r_1) поверхностях.

Интегрируя (4.3) с учетом (1.7) и удовлетворяя граничные условия

$$\sigma_{r|r=r_0}^* = 0; \quad \sigma_{r|r=r_1}^* = 0$$

получаем

$$\sigma_r^* = \frac{\alpha_0 E_0 B}{1 - \nu} \frac{e^{-\lambda \theta}}{2 \lambda B_1} \left| \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\lambda B_1} - 1 \right| \left[1 - A \frac{\frac{r_0^2}{r^2} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\lambda B_1}}{1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\lambda B_1}} \right] \psi(\theta, t),$$

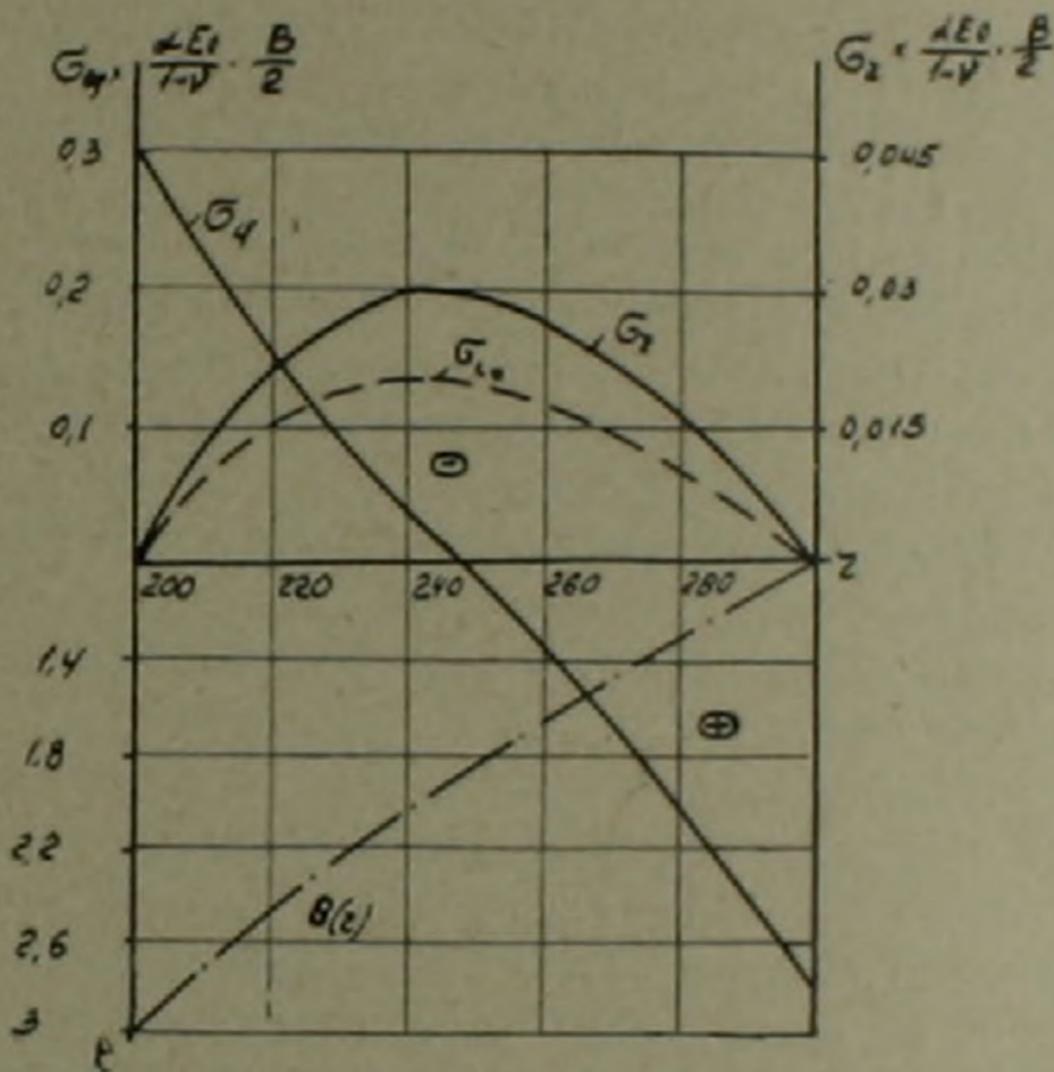


Рис. 1. σ_{r0} — радиальные напряжения без учета влияния температуры на деформативные характеристики материала

$$\sigma_r^* = \frac{\alpha_0 E_0 B}{1 - \nu} \frac{e^{-\lambda \theta}}{2 \lambda B_1} \left| \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\lambda B_1} (1 + \lambda B_1) - \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\lambda B_1 - 2} [A (\lambda B_1 - 1) + A - 1] \right| \psi(\theta, t),$$

где

$$B_1 = \frac{B}{T_0}; \quad A = \frac{1 - \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^{\lambda B_1}}{\frac{r_0^2}{r_1^2} - \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^{\lambda B_1}},$$

Из полученных выражений следует, что при постоянной разности температур на внутренней и внешней поверхностях ($T_1 - T_2 = \text{Const}$), и при определенных размерах трубы, напряжения сущест-

венно зависят от температуры внутренней поверхности. Повышение температуры T_1 приводит к уменьшению напряжений.

На рис. 1 показаны эпюры радиальных и кольцевых напряжений с учетом только упругих свойств материала. Изменение напряжений во времени с учетом ползучести материала легко получить пользуясь (4.4) и приведенной таблицей значений коэффициента затухания $\psi(0, t)$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Լ. Մ. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ

Ջերմային սողի հարթ խնդիրը բարձր ջերմաստիճանների դեպքում

Ջերմային սողի հարթ խնդիրը, երբ առաձգականության մոդուլը և սողի չափը կախված է ջերմաստիճանից, բերվում է շորրորդ կարգի փոփոխական գործակիցներով ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարման:

Ստացված հավասարումը լուծվում է գրգռման եղանակով և ապացուցվում է լուծման գույգամբիոսությունը:

Առանցքային սիմետրիկ հարթ խնդրի համար, երբ $\nu=0,5$ ստացվում է փակ լուծում:

Դիտարկված է անվերջ բետոնե խողովակի ջերմային սողի խնդիրը ստացիոնար ջերմային դաշտում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 М. А. Задоян, ДАН Арм. ССР, т. XXXI, № 4 (1960). 2 М. А. Задоян, «Известия АН Арм. ССР», сер. физ.-мат. наук, № 4, т. XVI (1963). 3 И. И. Голденблат и Н. А. Николаенко, Расчеты температурных напряжений в ядерных реакторах, Госатомиздат, 1962. 4 В. А. Харламов, Труды научно-исследовательского института бетона и железобетона, вып. 6, 1959. 5 М. А. Задоян, Л. М. Мурадян, «Известия АН Арм. ССР», сер. техн. наук, № 4, т. 24 (1971). 6 Н. Х. Арутюнян, Некоторые вопросы теории ползучести, М., 1952. 7 С. А. Соболев, Некоторые приложения функционального анализа к математической физике, Изд. ЛГУ, 1950. 8 А. И. Косицелов, Успехи математических наук, т. XIII, вып. 4, 1958. 9 Н. Н. Хилтон, Journ. Appl. Mech. Vol 19, 1953.

УДК 550.835.551.797 (799)

СТРАТИГРАФИЯ

Ю. В. Саидян, З. В. Алешинская

Первая радиоуглеродная датировка и условия захоронения
лчашенских археологических памятников

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Т. Асланяном 15/VII 1971)

Траншея, прорытая в 1969 г. на территории древнего поселения, от с. Лчашен до оз. Севан, длиной около 1 км и глубиной 2,8 м в своей начальной части вскрыла три могильника, захороненных в прибрежных осадках Севана (рис. 1). Стены и потолок могильников сложены из огромных плоских глыб лав (типа Е по К. Н. Паффенгольцу). Длина глыб достигает 2 м, а толщина—1 м. Потолок погребальной камеры, по-видимому, находился на уровне поверхности местности или чуть ниже, а каменная насыль, сделанная на потолочной каменной плите, придавала могильнику вид кургана, возвышающегося на 0,80—1,20 м. Насыль над могильниками Лчашенского поселения сохранилась не везде. Например, над могильниками, вскрытыми указанной траншеей, она отсутствует.

В одном из могильников нами обнаружены различные костные остатки, среди которых А. Н. Мотузко определил:



Рис. 1. Лчашенские могильники, вскрытые траншеей

1. *Homo sapiens* (человек) — плечевая, бедренная, 2 обломка больших берцовых костей, тазовая кость; кости принадлежат одному индивидуму, мужского пола, среднего возраста, рост которого согласно индексу Троттера и Блезера был равен 165—170 см;

2. *Bos* sp. (домашняя корова) — молодое животное;

3. *Equus* cf. *hemionus* — осел;

4. *Equus caballus* (домашняя лошадь) — молодое животное.

Возраст остатков, по мнению А. Н. Мотузко, не древнее исторического времени. Следует отметить, что ранее в районе Лчашенских раскопок наряду с этими костными остатками (за исключением осла) были обнаружены кости различных домашних и диких животных (1).

Погребальная камера могильников строилась в прибрежных отложениях Севана в период регрессии озера. В разрезе этих отложений, вскрытых траншеей, четко выделяются два слоя (снизу вверх):

1. Чередование линзовидных прослоек разнозернистых суглинков, супесей, песков и гравия, почти целиком представленных вулканомиктовым материалом; мощность слоя около 2,15 м. В отложениях этого слоя строилась погребальная камера и весь могильник.

2. Косослоистые мелкозернистые вулканомиктовые пески, в верхах которых имеется фауна моллюсков *Lymnaea stagnalis* L., *L. auricularia* L., *Planorbis planorbis* L.; мощность слоя 65 см. Пески в сторону озера фациально переходят в гумусированные супесчаные погребенные почвы (20 см), перекрытые слоем (10 см) таких же песков и слоем (10 см) торфа.

Литологическое строение верхнего слоя показывает, что он трансгрессивно налегает на нижний слой и перекрывает все группы культур Лчашенского поселения. Кроме того, перерыв в осадконакоплении данного периода четко фиксируется гумусированными супесчаными погребенными почвами, налегающими на отложения слоя 1.

Раскопанная материальная культура Лчашена по данным А. О. Мнацаканяна (2) подразделяется на несколько хронологических групп: наиболее древняя группа охватывает период III тыс. до н. э., вторая группа — от начала до последней четверти II тыс. до н. э., третья — от XIII—XII до VII—VI вв. до н. э. С 13—12 веков до н. э. в Лчашене появилось железо. Эти группы культур (по устному сообщению А. О. Мнацаканяна) расположены в последовательности уменьшения их возраста от современного уровня озера (после искусственного спуска) до сел. Лчашен.

В указанных могильных курганах Лчашена нами были обнаружены обломки древесины колесниц, которые переданы на определение абсолютного возраста в радиоуглеродную лабораторию Кафедры общей физической географии и палеогеографии МГУ. Были выполнены два анализа: возраст обломков древесины с пола колесницы оказался равным 3500 ± 100 лет (МГУ—НОАН—29), а с рамы колесницы — 3630 ± 100 лет (МГУ—НОАН—30). Кроме того, был определен возраст фауны моллюсков, обнаруженных в верхах слоя 2, который по C_{14} показал 2020 ± 120 лет (МГУ—49).

Эти абсолютные датировки показывают, что указанной траншеей

вскрыта культура, относящаяся ко второй хронологической группе. Последняя существовала около 750 лет, однако возраст фауны верхнего слоя 2, трансгрессивно покрывающего эту культуру, говорит о том, что перерыв в осадконакоплении Севана на данном побережье, в районе вскрытых траншеей могильных курганов был продолжительным, по крайней мере около 1500—1600 лет.

Трансгрессия, затопившая эти курганы началась в конце I тыс. до н. э. Какова же была причина этой трансгрессии — геологическая, антропологическая или климатическая?

Как отмечалось выше, вмещающие лчашенские памятники отложения состоят из вулканомиктового материала. По всей вероятности, основная масса этого материала произошла из пирокластических продуктов плейстоценового вулкана Богусар, расположенного в 1,5 км от лчашенского поселения и в 5 км от устья р. Раздан. По данным А. Т. Асланяна (3), «вулкан Богу, извергая громадное количество базальтовых лав и шлаков (нижний покров), заполнивших прилегающий отрезок долины, запрудил долину р. Раздан», образовав воды Малого Севана. Но вопрос в том — действовал ли этот вулкан в начале указанной трансгрессии озера, подпруживали ли в это время продукты его извержения долину р. Раздан и являются ли вмещающие могильники отложения пирокластическими или они вулканомиктовые?

Следует тут же отметить, что рассматриваемые прибрежные отложения Севана содержат богатую пыльцу и споры, что исключает вероятность пирокластического происхождения вмещающих могильники отложений, а тем более наличие продуктов предполагаемого извержения в долине р. Раздан. Кроме того, самые молодые голоценовые лавы (тип E), развитые здесь, использовались древними лчашенцами для закладки стен и потолка жилищ и могильных курганов. Таким образом, причиной указанной трансгрессии не могла быть подпруда вулканического происхождения.

Современные тектонические движения в области бассейна озера Севан по своим темпам резко уступают колебаниям уровня озера. Для наиболее подвижного района, по данным П. П. Казанчяна (4), они не превышают 7 мм в год. Учитывая их амплитуду и противоположную направленность на различных участках бассейна и сопредельных районов, не представляется возможным объяснить современные колебания уровня Севана только тектоническими подвижками.

Думать о том, что устье р. Раздан могло быть заложено древними лчашенцами каменными глыбами с целью подъема уровня воды, а может быть и регулирования стока реки, также маловероятно. Для этого необходимо допустить более высокий уровень культуры.

В течение последнего столетия на наших глазах наблюдаются весьма значительные колебания уровня вод озера Севан. По подсчетам О. А. Азерниковой (5), годовой объем естественной аккумуляции в период с 1891 по 1966 гг. колебался циклическими вариациями длительностью в 3—4 года, 9—11 лет и 17—19 лет от 750 до минус 350 млн. м³. Первопри-

чину этих колебаний указанный автор видит в глобальных изменениях природы Земли в связи с солнечной активностью и вариациями приливообразующей силы Луны.

Как показали точные балансовые расчеты, выполненные Б. Д. Зайковым (6), О. А. Азерниковой (5) и многими другими гидрологами, существует довольно тесная связь между современными колебаниями уровня Севана и величиной речного стока впадающих в него рек. При этом степень зависимости между двумя указанными явлениями подтверждается высоким коэффициентом корреляции, который, по данным О. А. Азерниковой (5), достигает 0,78.

По-видимому, основной причиной колебаний водного баланса озера Севан прежде всего следует считать увеличение или уменьшение речного стока в его бассейне, связанные с климатическими изменениями. Справедливость такого предположения подтверждают следующие факты.

Время накопления рассматриваемых отложений в палеогеографическом смысле относится к послеледниковому периоду, в соответствии со схемой М. И. Нейштадта (7)—к концу среднего-позднего голоцена. За последние 3000—3500 лет в Закавказье и во всей Черноморско-Каспийской области наблюдаются колебания климатических условий, выражающиеся в пульсации ледников на Большом Кавказе (8), пиками новокаспийского (9, 10) и новочерноморского (11) бассейнов; сдвигами лесной растительности в сторону низин (12).

Смену растительного покрова и изменения климатических условий в бассейне оз. Севан в период накопления рассматриваемых отложений четко иллюстрируют результаты спорово-пыльцевого анализа проб, отобранных из двух разрезов, вскрытых указанной траншеей: первый непосредственно у могильников, а второй—на расстоянии 200 м от первого в сторону озера. Во всех без исключения образцах констатировано преобладание пыльцы травянистых растений и кустарничков (53—99%). Содержание пыльцы древесных пород колеблется в широких пределах от 5 до 45%. Споры встречаются редко. Иногда встречается пыльца водных растений (*Potamogeton*).

Как видно из приведенных диаграмм (рис. 2, 3), спорово-пыльцевые спектры верхней части разрезов (гл. 0,00—0,65 м) значительно отличаются от нижней (гл. 1,90—2,8 м). Так, в отложениях нижнего интервала преобладает пыльца травянистых и кустарничковых растений—64—99%, пыльца древесных пород составляет 5—14%. В разрезе I споры отсутствуют, а в разрезе II на глубине 1,10—1,60 м наблюдается их высокое содержание—4—33%. Пыльца древесных пород представлена единичными пыльцевыми зернами *Pinus*, *Betula*, *Ostrya*, *Carpinus*, *Tilia*. В группе трав и кустарничков резко преобладает пыльца *Chenopodiaceae* до 64%, разнотравья—до 69%, присутствует пыльца *Gramineae*—8—13%, *Artemisia*—до 16%, *Ephedra*—4—15%. Среди разнотравья преобладает пыльца *Compositae*—до 63%. Единично встречается пыльца растений таких семейств как *Liliaceae*, *Caryophyllaceae*, *Cruciferae*, *Umbelliferae*, *Plantaginaceae*, *Dipsacaceae*. В разрезе II отмечена пыльца гигрофитов (*Sparganium*—2%), а споры представлены *Bryales*, *Polypodiaceae*.

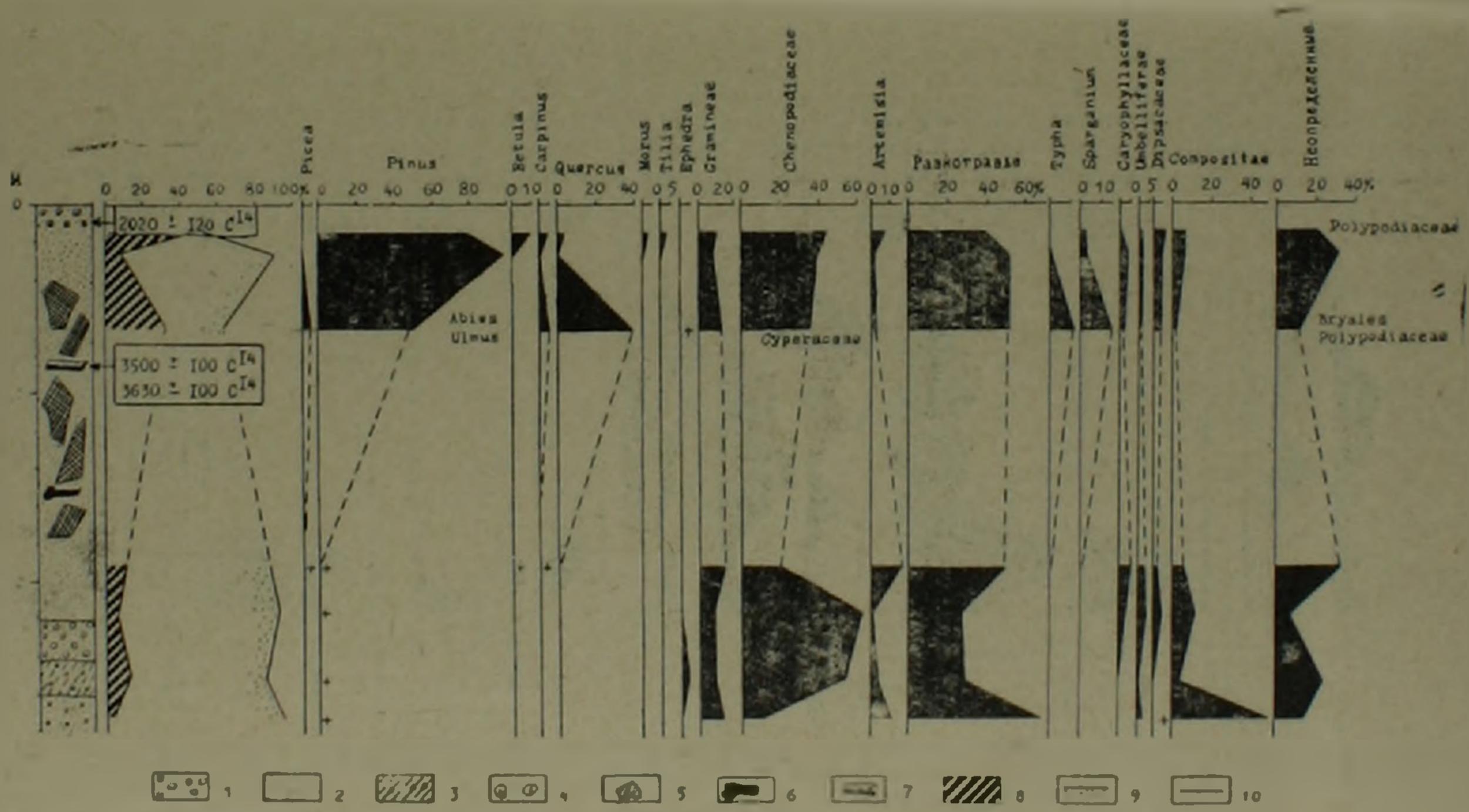


Рис 2 Спорно-пыльцевая диаграмма голоценовых отложений разреза Лчащен I (Анализы З В Алешинской). 1—галька, гравий, 2—песок; 3—супесь; 4—раковины моллюсков; 5—плиты

лава, 6—костные остатки, 7—древесина, 8—пыльца древесных и кустарничковых пород; 9—пыльца травянистых и кустарничковых растений, 10—споры

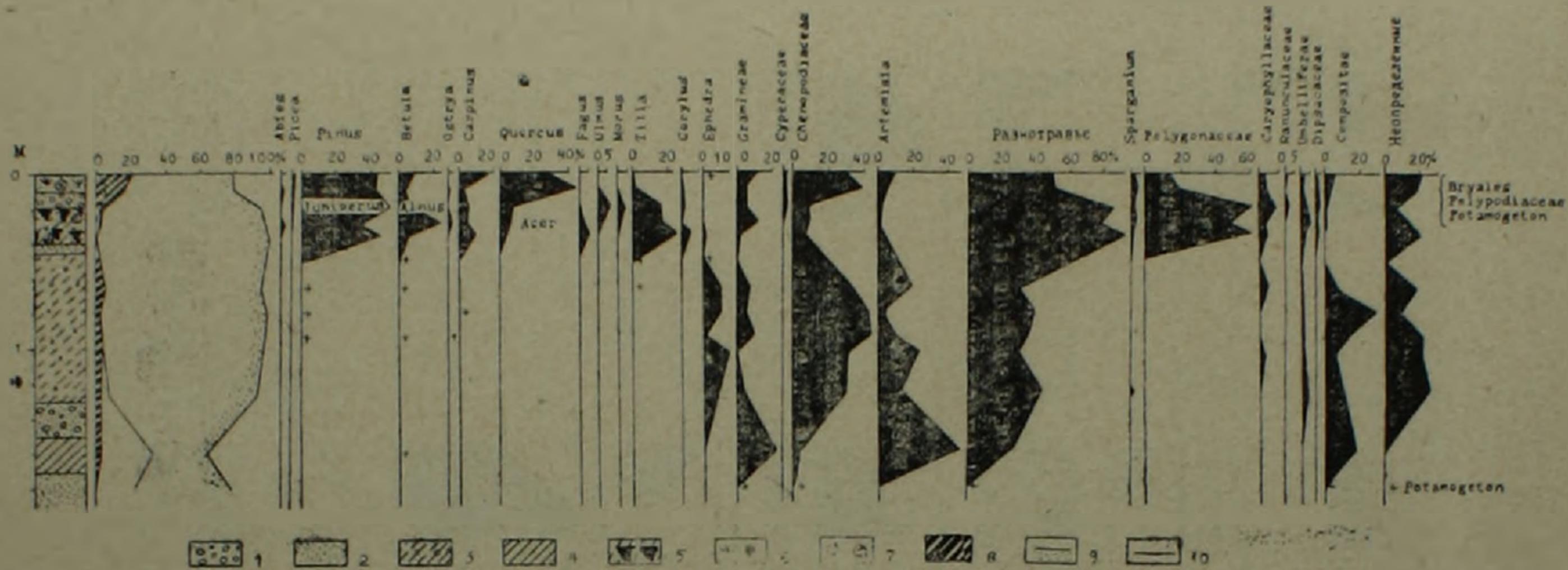


Рис 3. Спорово-пыльцевая диаграмма гллоэновых отложений раз-
рета Лчашен II (Анализы З В Длешинской) 1—галька, гравий,
2—песок, 3—супесь, 4—суглинок, 5—гумусированная супесчаная

почва; 6—остатки травянистых растений и мхов; 7—раковины мол-
люсков, 8—пыльца древесных и кустарниковых пород; 9—пыльца
травянистых и кустарничковых растений, 10—споры

Спорово-пыльцевые спектры верхней части разрезов отличаются от нижележащих большим содержанием и флористическим разнообразием пыльцы древесных пород—19—45%. Пыльца трав и кустарничков составляет—53—95%, споры—не более 3%. Среди пыльцы древесных пород резко доминирует пыльца *Pinus* до 80—100%, встречается пыльца других хвойных пород (*Abies*—до 2%, *Picea*—до 4%, *Betula*—до 8%, *Juniperus*). Пыльца широколиственных пород, представлена также пыльцой *Ostrya*—до 2%, *Carpinus*—до 19%, *Fagus*—до 5%, *Ulmus*—до 7%, *Morus*—до 3%, *Tilia*—до 25%, *Acer*—до 2%, *Corylus*—до 1%, *Quercus*—до 43%. Наибольшее разнообразие пыльцы широколиственных пород наблюдается на глубине 0,30 м. В группе травянистых и кустарничковых растений доминируют пыльца разнотравья 39—61%, главным образом за счет пыльцы *Polygonum* (14—61%), а также *Chenopodiaceae*—36—45%. Встречается пыльца *Gramineae*—7—12%, *Artemisia*—1—10%. Отмечается единично пыльца *Cyretaceae* и *Ephedra*. Качественный состав пыльцы разнотравья более разнообразный, чем в отложениях нижней части разреза. Постоянно присутствует пыльца гигрофитов *Sparganium*—1—16%, *Typha*—11%, а также пыльца растений семейства: *Polygonaceae*, *Ranunculaceae*, *Rosaceae* (*Potentilla*), *Geraniaceae*, *Plumbaginaceae*, *Labiatae*, *Dipsacaceae*, *Cucurbitaceae*. Единично встречаются споры *Bryales*, *Polypodiaceae* и др. *Filicales*.

Таким образом, по разрезам указанной траншеи в верхних частях голоценовых отложений Севана (снизу вверх) наблюдается количественное и качественное увеличение пыльцы древесных и кустарничковых пород. Эти изменения являются отражением большой облесенности гор, окружающих котловину озера Севан за последние 2000 лет, т. е. в период формирования отложений верхней части разрезов.

Абсолютные и археологические датировки лчашенской материальной культуры, относящейся ко II тыс. до н. э. показывают, что за последние 3500—3700 лет на данном участке древнего поселения был значительный перерыв в осадконакоплении, продолжительностью по крайней мере около 1500—1600 лет. За это время уровень озера был ниже современного (до спуска) по крайней мере на 13 м, что было связано с уменьшением общей увлажненности данной области в первой половине суббореала—атлантике. Древние лчашенцы, в меру необходимости, жили ближе к воде.

Последняя трансгрессия, затопившая указанный участок Лчашенского поселения, началась в конце I тыс. до н. э. во второй половине суббореала и была связана с увеличением увлажненности территории. Уровень воды в озере поднялся до современного (до спуска). В таких условиях лесная растительность в бассейне озера Севан должна была сохраниться до наших дней, однако, надо предполагать, что она полностью истреблена человеком за историческое время.

Институт геологических наук
Академии наук Армянской ССР,
Московский государственный университет

Լճաշենի հնագիտական հուշարձանների առաջին ռադիոածխածնային
ըվազրումը և նստվածքների ժամկվելու պայմանները

Լճաշենի նյութական կուլտուրայի քաղաքակրթական և հնագիտական թվագրումը ցույց է տալիս, որ վերջին 5000 տարվա ընթացքում Սևանի լճի ափերում տեղի է ունեցել նշանակալից ընդմիջում՝ 3000 տարի տևողությամբ, Այդ ընթացքում՝ կապված տվյալ շրջանի ընդհանուր խոնավության անկման հետ (սուրբորեալի առաջին կիսամյակ—ատլանտիկա), լճի մակարդակը աստիճանաբար ընկել է: Հին լճաշենցիները անհրաժեշտարար շարժվել են դեպի ջրի մոտակա մասերը՝ ստեղծելով ավելի երիտասարդ կուլտուրա:

Վերջին տրանսգրեսիան ծածկել է լճաշենի բնակավայրը 2000 տարի առաջ և կապված է տվյալ շրջանի խոնավության բարձրացման հետ: Այն պայմանավորել է նաև Սևանի ավազանի ընդարձակ անտառապատումը: Զուրը լճում բարձրացել է մինչև ժամանակակից մակարդակը (մինչև արհեստական իջեցումը): Այդպիսի պայմանները անտառային ծածկույթը պետք է պահպանվեր մինչև մեր օրերը, սակայն ենթադրվում է, որ այն լրիվ ոչնչացվել է մարդու կողմից պատմական ժամանակաշրջանում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 С. К. Меджлумян, Палеофауна эпохи бронзы на территории Армении. Автореферат диссертации, 1965.
- 2 А. О. Мнацаканян, Тезисы докладов, посвященных итогам полевых археологических исследований в СССР в 1970 году, Тбилиси, 1971.
- 3 А. Т. Асатрян, «Известия АН Арм. ССР», сер. физ.-мат., естеств. и техн. наук, № 8 (1947):
- 4 П. П. Казанчян, Современные движения земной коры, № 2, 1965.
- 5 О. А. Азерникова, «Известия АН Арм. ССР», Науки о Земле, № 4 (1970).
- 6 Б. Д. Зайков, Материалы по исследованию озера Севан и его бассейна, ч. 1, вып. 3, 1933.
- 7 М. И. Нейштадт, Палеогеография и хронология верхнего плейстоцена и голоцена по данным радиоуглеродного метода, Изд. «Наука» М., 1965.
- 8 Е. М. Шербакова, Палеогеография четвертичного периода, Изд. МГУ, 1965.
- 9 О. К. Леонтьев, Труды Океанограф. комиссии АН СССР, т. 4, М., 1959.
- 10 О. К. Леонтьев, П. В. Федорова, «Известия АН СССР», сер. географ., № 4 (1953).
- 11 Е. Н. Нелесская и др., Труды Ин-та геол. АН Эст. ССР, 3, Таллин, 1961.
- 12 И. И. Тумаджанов, Л. К. Гогичайшвили, Голоцены, Изд. «Наука», М., 1969.

УДК 591.1.05

БИОХИМИЯ

А. С. Оганесян, Ж. С. Геворкян, И. Р. Фаталова

Влияние альфа-кетоглутаровой кислоты на образование аммиака из L-аминокислот в корковом слое почек белых крыс

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. Х. Бунятыном 23/VII 1971)

Почки с мочой выделяют довольно большое количество аммиака (у взрослого человека в норме 510—850 мг в сутки). Установлено, что при ацидозе усиливается его экскреция, а при алкалозе, наоборот, подавляется. Ряд авторов (1, 2) считает, что процессы глюконеогенеза в почечной ткани регулируют аммиакообразование в ней путем изменения активности глутаминазы I. Показано, что при ацидозе усиливается образование глюкозы из альфа-кетоглутаровой кислоты (α -КГЛ) в почках, в результате чего ускоряется метаболическое превращение глутаминовой кислоты, приводящей к понижению ее концентрации в почечной ткани, которая как известно является ингибитором глутаминазы I (2). Уменьшение содержания глутаминовой кислоты приводит к деингибированию глутаминазы I почечной ткани и усилению образования аммиака из глутаминна. Установлено, что 50—60% аммиака мочи образуется из глутаминна, а остальная часть—из аминокислот. С другой стороны, было показано, что при введении α -КГЛ экспериментальным животным, наблюдается значительное уменьшение выделения аммиака с мочой и повышение содержания α -КГЛ и глутаминовой кислоты в почках (3). Авторы считают, что наблюдаемое явление можно объяснить подавлением глутаминазы I, в результате повышения содержания глутаминовой кислоты. Наши прежние исследования (1, 4) показали, что в корковом слое почек наряду с глутамином, источником аммиака является также и ряд L-аминокислот (глутаминовая, аспарагиновая кислоты, орнитин и др.). Нами также было показано, что α -КГЛ в присутствии фосфата не оказывая влияния на активность глутаминазы I, значительно подавляет образование аммиака из L-глутаминовой кислоты в срезах почек (5).

Имея в виду вышесказанное, мы предполагали, что α -КГЛ, по-видимому, в основном регулирует образование аммиака из L-аминокислот.

Для выяснения этого вопроса, мы проводили сравнительные исследования по влиянию этой кетокислоты на образование аммиака из L-глутаминовой, L-аспарагиновой кислот и из L-орнитина в срезах коркового

слоя почек белых крыс, а также из глутаминна в срезах и гомогенатах коры почек этих животных.

Срезы почечной ткани (по 200 мг) инкубировали в Кребс-Рингер-би-карбонатном буфере, рН—7,4, при 1—37°C, в течение одного часа. На каждую пробу добавляли аминокислоты по 16 мкМ. Количество α-КГЛ варьировалось, как указано в таблицах. Аммиак определяли по микро-диффузионному методу Конве.

Таблица 1
Влияние α-КГЛ на диурез и выделение аммиака с мочой у белых крыс

№ опы- тов	Количество мочи в миллилитрах (за 24 часа)			Количество аммиака в мкмольях (за 24 часа)		
	контроль	α-КГЛ 15 мг	α-КГЛ 30 мг	контроль	α-КГЛ 15 мг	α-КГЛ 30 мг
1	2,5	2,7	4,8	69,1	54,5	39,0
2	2,3	2,8	3,9	67,6	52,7	35,5
3	1,5	2,4	3,2	60,5	38,1	24,8
4	2,0	2,7	3,8	73,5	50,8	37,0

Как видно из табл. 1, при введении α-КГЛ крысам (внутрибрюшинно) наблюдается значительное понижение количества выделенного с мочой аммиака, причем это явление наблюдается до определенного предела, приблизительно 50% контрольной величины. Интересно отметить, что большие дозы α-КГЛ в начале своего действия вызывают значительное повышение диуреза, что, по-видимому, связано с усилением фильтрационной способности почек.

Таблица 2
Влияние α-КГЛ на образование аммиака (в мкмольях/г ткани/час) из L-аминокислот в срезах и гомогенатах коркового слоя почек

№ опытов	Количество добавленного α-КГЛ	С р е з ы								Гомогенат	
		контроль				+α-КГЛ				глутами- нол	глутами- нол + α-КГЛ
		глутамино- вая кисло- та	аспараги- новая кис- лота	орнитин	глутами- нол	глутамино- вая кисло- та	аспараги- новая кис- лота	орнитин	глутами- нол		
1	0,375 мг/мл	5,6	10,0	12,0	27,0	2,7	7,8	11,6	26,8	22,3	22,0
2	0,375 .	5,2	9,7	9,0	24,0	3,2	7,0	11,0	24,7	26,7	28,0
3	0,375 .	6,1	8,9	10,3	22,5	2,7	5,7	10,5	24,0	23,2	23,8
4	0,375 .	5,4	9,3	11,6	—	3,0	8,1	12,0	—	—	—
5	0,75 .	6,8	11,0	14,4	30,7	1,3	8,1	11,0	26,4	26,4	25,0
6	0,75 .	6,2	9,7	11,0	23,3	2,2	7,3	10,3	19,8	23,5	24,4
7	0,75 .	5,9	11,2	9,4	—	1,8	5,4	9,9	—	—	—
8	1,5 .	6,6	10,9	12,0	27,0	0	2,8	11,0	23,7	29,1	28,5
9	1,5 .	5,7	10,0	10,9	26,0	0	2,1	9,0	23,0	24,2	24,0
10	1,5 .	5,6	8,7	9,7	24,0	0	0	8,1	20,1	26,4	25,3
11	1,5 .	4,3	6,0	8,3	33,0	0	0	5,7	27,0	—	—

Результаты исследований (табл. 2) показывают, что в контрольных опытах срезы почек в присутствии L-глутаминовой, L-аспарагиновой кислот и L-орнитина продуцируют большое количество свободного аммиака. Приведенные данные показывают, что α -КГЛ оказывает подавляющее действие на образование аммиака из этих аминокислот. Однако различные концентрации этой кетокислоты вызывают неодинаковое влияние на образование аммиака из различных L-аминокислот.

Малые количества (0,375 мг/мл) α -КГЛ значительно подавляя деаминирование L-глутаминовой кислоты, не оказывают влияния на деаминирование L-орнитина. Процессы же образования аммиака из L-аспарагиновой кислоты при этом ингибируются в сравнительно меньшей степени, чем из L-глутаминовой кислоты. С повышением концентрации α -КГЛ наблюдается более выраженное торможение деаминирования L-глутаминовой кислоты. Так, например, при добавлении 1,5 мг/мл α -КГЛ, образование аммиака из L-глутаминовой кислоты полностью прекращается. В этих концентрациях α -КГЛ сильно ингибирует также и деаминирование L-аспарагиновой кислоты (иногда до полного прекращения образования аммиака). С повышением концентрации α -КГЛ наблюдается подавление деаминирования также и L-орнитина. Однако ингибирующее действие α -КГЛ в отношении орнитина слабое. В то время, как при наличии в инкубируемой среде 1,5 мг/мл α -КГЛ, образование аммиака из L-глутаминовой и L-аспарагиновой кислот подавляется почти полностью, деаминирование же L-орнитина ингибируется от 8 до 32%. Из этой же таблицы видно, что α -КГЛ в срезах почек подавляет образование аммиака из глутаминна, а в гомогенате почечной ткани этого не наблюдается. Некоторый ингибирующий эффект α -КГЛ на образование аммиака из глутаминна в срезах почек объясняется его действием на деаминирование глутаминовой кислоты, образовавшаяся из глутаминна при гидролитическом расщеплении его. В гомогенатах коркового слоя почек, где глутаминовая кислота не деаминируется и не дает прироста аммиака, а активность глутаминазы довольно высокая, α -КГЛ не оказывает подавляющего влияния на ее активность. Неодинаковый эффект α -КГЛ на образование аммиака из различных аминокислот проявляется также и при ее внутривенном введении.

Приведенные данные показывают, что под действием α -КГЛ как *in vivo* так и *in vitro* наблюдается значительное подавление продукции аммиака в почках и выделение его с мочой. Однако эта кетокислота проявляет неодинаковое влияние на образование аммиака из различных источников.

Опыты, проведенные *in vitro* показывают, что под действием этой кетокислоты образование аммиака из L-аминокислот подавляется в значительной степени, а из глутаминна, который является основным источником аммиака мочи, образование его почти не изменяется. Отсутствие подавляющего эффекта α -КГЛ на активность глутаминазы ! (в присутствии фосфата) указывают и другие авторы (7⁵). Квам и сотр. (8) показа-

ли, что в отсутствие неорганического фосфата α -КГЛ в очищенных препаратах повышает активность глутаминазы I. Активность глутаминазы II в почках низкая, поэтому в процессах продукции аммиака в почках она не играет существенной роли.

Известно, что 50–60% аммиака мочи образуется из глутамина, а остальное количество — из различных аминокислот. Результаты наших исследований показывают, что α -КГЛ понижает выделение аммиака с мочой до определенного уровня. Подобное явление наблюдалось в опытах Балагура-Баруха и сотр. (4). Эти данные дают нам основание полагать, что наблюдаемое уменьшение выделения аммиака с мочой под действием α -КГЛ идет за счет подавления процессов образования аммиака из L-аминокислот. По-видимому, в физиологических условиях α -КГЛ играет важную роль в процессах регуляции образования аммиака в почках и его выделения с мочой. Надо полагать, что и в *in vivo* условиях под действием α -КГЛ образование аммиака из глутамина не изменяется.

Следует отметить особую важность подавляющего действия α -КГЛ на деаминирование L-аминокислот и отсутствие подобного влияния на продукцию аммиака из глутамина. Таким путем продукт деаминирования глутаминовой кислоты — α -КГЛ (который в почечной ткани образуется в достаточном количестве) с одной стороны подавляет деаминирование глутаминовой кислоты (также и аспарагиновой кислоты), способствуя сохранению гомеостаза в отношении этих аминокислот, а с другой стороны, не оказывая влияния на активность глутаминазы I (и как кетокислота повышая активность глутаминазы II) способствует выделению аммиака из организма.

Мы применяли сравнительно большие концентрации α -КГЛ, что не встречается в живом организме. Однако, в физиологических условиях ткани (ферментные системы) проявляют высокую реактивность в отношении различных факторов, поэтому не исключена возможность, что в *in vivo* условиях незначительные количества α -КГЛ оказывают соответствующее воздействие на процессы аммиакообразования из L-аминокислот.

Активность глутаминазы I, по-видимому, изменяется в редких случаях, когда в тканях организма образуется большое количество глутамина и возникает необходимость усиления его расщепления и выведения аммиака из организма. Известно, что активность глутаминазы I повышается при ацидозе и подавляется при алкалозе.

Каков механизм подавляющего действия α -КГЛ на деаминирование упомянутых L-аминокислот? Известно, что путем реаминирования и с участием дегидрогеназы глутаминовой кислоты α -КГЛ может связывать образовавшийся аммиак и тем самым понизить его количество. Однако, опыты показывают, что в срезах почек этим путем может связываться незначительное количество аммиака, что не может объяснить такое выраженное торможение образования аммиака в почечной ткани из L-аминокислот и подавление его выделения с мочой под действием α -КГЛ. Об этом говорят и результаты опытов с орнитинем, когда малые concentra-

дин α -КГЛ не оказывая влияния на образование аммиака из этой аминокислоты подавляют деаминирование глютаминовой кислоты примерно на 50%, к тому же в пробах с орнитинем образуется большое количество аммиака.

В почечной ткани добавленный α -КГЛ трансаминируясь с другими аминокислотами превращается в глютаминовую кислоту повышая ее содержание. В этих условиях надо было ожидать подавление активности глютаминазы I и образование аммиака из глютамина. Однако в наших опытах этого не наблюдалось. С другой стороны повышение содержания глютаминовой кислоты должно было привести к усилению образования аммиака из самой глютаминовой кислоты, так как она хорошо деаминируется в почечной ткани (срезы). Эти вопросы требуют дополнительных исследований.

Результаты наших исследований дают нам основание полагать, что в почечной ткани α -КГЛ, L-глютаминовая и L-аспарагиновая кислоты конкурируют за деаминирующий механизм и в зависимости от их концентрации в инкубируемой среде в соответствующей мере проявляется тормозящий эффект α -КГЛ на аммиакообразование из L-аминокислот.

Малые концентрации α -КГЛ преимущественно подавляют образование аммиака из L-глютаминовой кислоты и в меньшей мере из L-аспарагиновой кислоты, не оказывая влияния на деаминирование L-орнитина. Сравнительно высокие концентрации этой кетокислоты подавляют образование аммиака также из L-орнитина.

В присутствии α -КГЛ часть орнитина по орнитин- α -КГЛ трансаминазному пути превращается в глютаминовую кислоту; в этих условиях также надо было ожидать усиление аммиакообразования так как глютаминовая кислота как отмечалось выше хорошо деаминируется в срезах коркового слоя почек, однако, этого не наблюдается. Надо полагать, что и здесь мы имеем дело с подавлением процесса деаминирования L-глютаминовой кислоты в присутствии α -КГЛ. Не исключена возможность существования конкурентных взаимоотношений и между α -КГЛ и орнитинем за деаминирующий механизм этой аминокислоты. Что касается глютамина, то наблюдаемое частичное подавление образования аммиака из него в срезах коркового слоя почек в присутствии α -КГЛ, объясняется торможением образования аммиака из L-глютаминовой кислоты, образовавшейся при расщеплении самого глютамина. В гомогенатах почечной ткани, где глютаминовая кислота не подвергается деаминированию, α -КГЛ не проявляет подавляющего эффекта.

При добавлении α -КГЛ к гомогенатам почечной ткани наблюдается значительное повышение содержания глютаминовой кислоты, между тем как активность глютаминазы I не изменяется. Поэтому трудно объяснить регуляцию процессов образования аммиака из глютамина только изменением содержания глютаминовой кислоты почечной ткани. Надо полагать, что существуют и другие механизмы, регулирующие образование аммиака из глютамина в почечной ткани и выделение его с мочой. В последнее время подобное мнение высказывают и другие авторы.

Результаты наших исследований с одной стороны поддерживают ранее нами высказанное мнение о существовании в почечной ткани отдельных механизмов деаминации L-глутаминовой, L-аспарагиновой кислот и L-орнитина, а с другой — показывают, что образовавшийся в почечной ткани α -КГЛ (возможно и в других тканях) принимает участие в регуляции деаминации L-глутаминовой и L-аспарагиновой кислот, и тем самым способствует поддержанию гомеостаза в отношении этих аминокислот. Исследования по изучению механизмов деаминации L-аминокислот в почечной ткани продолжаются.

Институт биохимии
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ս. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Ժ. Ս. ԳԵՎՈՐԿՅԱՆ, Ի. Ռ. ՆԱԹԱՍՅԱՆ

Ալֆա-կետոգլյուտարատի սպիտակ առնետների երիկամների կեղևային շերտում L-ամինաթթուներից ամիակի առաջացման վրա

Փորձերը դրվել են սպիտակ առնետների վրա *in vivo* և նրանց երիկամների կեղևի կտրվածքների և հոմոգենատների վրա:

Ստացված արդյունքները ցույց են տվել, որ ալֆա-կետոգլյուտարատի (α -ԿԳԼ) ներորոգմանամյային ներարկման դեպքում ամիակի արտադրումը մեկի միջոցով խիստ նվազում է: α -ԿԳԼ փոքր քանակները դրախորեն ձնչում են ամիակի առաջացումը L-գլյուտամինաթթվից, ազդեցություն չունենալով L-օրնիտինի դեամինացման վրա. այդ պայմաններում ամիակի առաջացումը L-ասպարազինաթթվից, գլյուտամինաթթվի համեմատությամբ, ձնչվում է ավելի թույլ չափով: α -ԿԳԼ քանակի մեծացման դեպքում, լրիվ ձնչվում է գլյուտամինաթթվի և ասպարազինաթթվի դեամինացումը, իսկ օրնիտինի դեամինացումը ձնչվում է անհամեմատ թույլ չափով: α -ԿԳԼ ազդեցություն չի թողնում գլյուտամինի դեամինացման վրա:

Պետք է ենթադրել, որ օրգանիզմի հյուսվածքներում (առանձնապես երիկամային հյուսվածքում) առաջացած α -ԿԳԼ մասնակցում է L-ամինաթթուներից ամիակի առաջացման սրոցեսների կանոնավորմանը, հետևապես և այդ ամինաթթուների նկատմամբ հոմեոստազի պահպանմանը: Ստացված սվյայները պաշտպանում են առաջներում մեր կողմից արտահայտված այն միտքը, որ սպիտակ առնետների երիկամային հյուսվածքի կեղևային շերտում L-գլյուտամինաթթուն, L-ասպարազինաթթուն և L-օրնիտինը դեամինացման են ենթարկվում տարբեր ֆերմենտային սխեմաներով:

ЛИТЕРАТУРА — ՎՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ A. D. Goodman, R. E. Fulz a G. E. Cahill, J. Clin. invest., 45, 612 (1966).
² L. Goldstein, Ann. J. physiol., 210, 661 (1966). ³ S. Balagura-Baruch, L. M. Shurland a. I. C. Weithauer, Am. J. Physiol., 218, 1070 (1970). ⁴ Լ. Խ. Բուխտյան, Ա. Ս. Օզանյան և Ջ. Ս. Գեօրգյան, ДАН СССР, 177, 951, 1967. ⁵ Ջ. Ս. Գեօրգյան, Автореф. канд. дисс., Ереван, 1969. ⁶ Ա. Ս. Օզանյան և Ջ. Ս. Գեօրգյան, ДАН АрмССР, т. 52, № 3, 165 (1971) ⁷ H. A. Krebs, Biochem. J., 29, 1951 (1935) ⁸ B. Krampe E. Tzell a. G. Svehlensky, Biochem. Biophys. Res. Comm., 23 (5), 566, 1965.

УДК 612.8

ФИЗИОЛОГИЯ

Г. С. Ордуян, В. Г. Григорян

Статистический анализ фоновой активности нейронов сенсомоторной области коры мозга кошки

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. А. Бакуицем 22/IV 1971)

Импульсная активность нервных клеток является основным (если не единственным) кодом, посредством которого осуществляется прием, обработка и передача информации в нервной системе и его изучение должно сыграть большую роль в разгадке интимных механизмов нервной деятельности.

Временная структура импульсных последовательностей может быть изучена в терминах вероятности появления импульса как функции времени. Последовательность импульсов рассматривается как мгновенный процесс, т. е. как совокупность событий, имеющих место в различные моменты времени. Если события равновероятны и взаимно независимы, то распределение вероятностей подчиняется закону Пуассона:

$$P_n = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

где P_n — вероятность того, что за время t будет зарегистрировано ровно n импульсов;

λ — математическое ожидание (среднее значение) числа импульсов, поступивших за единицу времени.

Применительно к импульсной активности нейронов это означает, что в любой момент времени может иметь место интервал любой длины и что длина каждого последующего интервала не зависит от предыдущего. В этом случае наблюдается активность с экспоненциальным распределением интервальных длин, т. е. гистограмма спадает по экспоненциальному закону (1):

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (2)$$

где x — длина интервала;

$f(x)$ — плотность распределения интервалов.

Пуассоновское распределение при исследовании импульсной активности нейронов подтверждается многими авторами (2-6). Так напри-

мер, А. М. Мелехова и др. (4) показали, что более чем у трети проанализированных нейронов распределение интервалов соответствует экспоненциальному закону, т. е. разряды этих нейронов возникали случайно, хаотически. Данные других авторов не согласуются с этим (7-10). Накагама, Нишиока и др. (8) предположили, что вероятность появления импульса в некоторый определенный момент времени зависит от времени появления предыдущего импульса, но прямая зависимость существует только между соседними интервалами (простой Марковский процесс).

Таблица 1

Статистические характеристики фоновой активности нейронов сенсо-моторной коры кошки

Протокольный номер нейрона	Глубина погружения электрода, м.м	Количество интервалов	Среднее значение интервалов, мсек	Среднее квадратическое отклонение, мсек	Максимальный интервал, мсек	Минимальный интервал, мсек	Средняя частота, имп/сек	Модальное значение, мсек	Коэффициент вариации
12B171067-04	1,85	162	412,25	237,40	3834	2	2,42	20	0,57
10B061067-17	1,05	255	295,07	136,39	3580	10	3,39	42	0,46
-06	1,78	609	287,56	261,13	1766	12	3,48	158	0,91
12B171067-02	2,20	321	261,30	192,82	3725	1	3,83	60	0,74
11B101067-13	1,70	936	253,57	427,06	3230	1	3,94	6	1,68
13B251067-12	0,90	867	227,21	282,38	2535	1	4,40	102	1,24
11B101067-16	2,10	1248	192,11	236,24	2551	1	5,20	133	1,23
10B061067-04	1,76	618	189,06	276,80	2548	9	5,29	33	1,46
13B251067-06	1,87	1263	174,21	359,25	3369	1	5,74	2	2,06
12B171067-01	1,64	957	172,84	233,31	2628	1	5,78	22	1,35
-03	1,64	1110	157,04	182,49	1943	1	6,37	51	1,16
10B061067-03	1,73	1440	154,64	244,81	2575	2	6,47	13	1,58
11B101067-01	1,20	759	134,89	317,35	3928	2	7,41	40	2,35
10B061067-12	1,86	2101	121,06	148,05	2430	1	8,26	13	1,22
-02	1,76	2358	117,11	139,65	3713	3	8,54	77	1,19
-01	3,60	1152	103,93	141,61	2772	2	9,62	17	1,36
13B251067-01	0,90	1818	101,08	171,80	1203	1	9,89	2	1,70
-24	2,75	1929	95,87	125,53	1344	2	10,43	43	1,31
10B061067-16	1,95	1023	94,55	127,40	1997	1	10,58	2	1,35
11B101067-04	1,80	1272	81,84	129,04	1415	2	12,22	30	1,58
13B251067-08	1,87	1647	79,38	143,89	1425	1	12,60	2	1,81
-21	2,70	2478	77,81	90,48	1366	1	12,85	28	1,16
-09	0,80	2480	70,65	107,95	1739	2	14,15	23	1,53
11B101067-03	2,00	1482	65,54	47,16	606	1	15,28	74	0,72
13B251067-22	2,70	2832	55,25	55,82	784	2	18,10	19	1,01
10B061067-14	1,70	2316	53,58	93,96	2427	1	18,67	3	1,75
13B251067-05	1,50	3813	47,53	77,93	1214	1	21,04	3	1,64
-23	2,75	2730	28,73	27,84	331	1	34,81	30	0,97
10B061067-05	1,40	4602	14,99	11,55	89	1	66,71	7	0,77
-05a*	1,40	4602	14,59	11,67	102	1	68,54	5	0,80

* предыдущий нейрон, продолжение.

В задачу настоящего исследования входило изучение статистических характеристик импульсной активности нейронов сенсо-моторной области коры мозга кошки (11), зарегистрированных в условиях острого эксперимента. Выбор обусловлен тем, что данное образование представляет со-

бой скопление разных типов нейронов, имеющих богатые афферентные и эфферентные связи с различными областями коры мозга и центральной нервной системы. Большой объем обрабатываемой информации исключал возможность визуального анализа, поэтому был применен анализ с помощью вычислительной машины.

Подготовка животных (взрослые кошки), отведение потенциалов действия и регистрация активности отдельных нейронов проводилась по общепринятой методике.

Для каждого нейрона определялись следующие статистические характеристики (табл. 1): общее количество интервалов, минимальное, максимальное и среднее значение интервалов и их дисперсия, среднее квадратическое отклонение, средняя частота импульсации, модальное значение, коэффициент вариации, гистограмма распределения межимпульсных интервалов с различным шагом (Δ) изменения значения интервала, «частотная функция», корреляционное поле, τ -гистограмма.

«Частотная функция» $F(\Delta t \cdot k)$ целочисленного аргумента k ($k = 1, 2, \dots$), значения которой равны количеству импульсов активности, поступивших в последовательные равные промежутки времени Δt (Δt в мсек), вычисляется так. Если дана последовательность $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$, где x_i — численное значение i -го интервала в мсек, то суммируются поочередно интервалы x_i и после каждого сложения полученная сумма сравнивается с Δt , до тех пор, пока не выполнится условие:

$$\sum_{i=1}^{m_1} x_i > \Delta t. \quad (3)$$

Число m_1 и есть значение функции $F(\Delta t \cdot k)$ при $k = 1$. Далее вычисляется разность

$$\left[\sum_{i=1}^{m_1} x_i - \Delta t \right] = x_0 > 0, \quad (4)$$

и если $x_0 < \Delta t$, то интервалы x_i суммируются теперь к x_0 до выполнения условия

$$\left[x_0 + \sum_{i=1}^{m_2} x_i \right] > \Delta t, \quad (5)$$

а значение $F(\Delta t \cdot k)$ при $k = 2$ будет равно $m_2 - m_1$. Если же сам остаток больше, чем Δt ($x_0 > \Delta t$), то очередное значение функции F будет равно нулю. Таким образом, повторяя эту операцию до перебора всех значений интервалов, получим значения функции $F(\Delta t \cdot k)$ для любого k в виде: $m_1; (m_2 - m_1); (m_3 - m_2) \dots$

Для большинства нейронов Δt принималось равным 1000, т. е. вычислялось количество импульсов за секунду. В тех случаях, когда последовательность была слишком частой (или редкой) Δt принималось равным 500 (или 2000).

Корреляционное поле строится следующим образом. задается число τ , определяющее количество сдвигов, и коэффициент «сжатия» δ (δ — целое число). Берется пара численных значений интервалов $(x_i, x_{i+\tau})$, и проверяется условие

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_i}{\delta} &\leq 2^{\tau} - 1 \\ \frac{x_{i+\tau}}{\delta} &\leq 2^{\tau} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

τ принимает значения 7 или 8 (12).

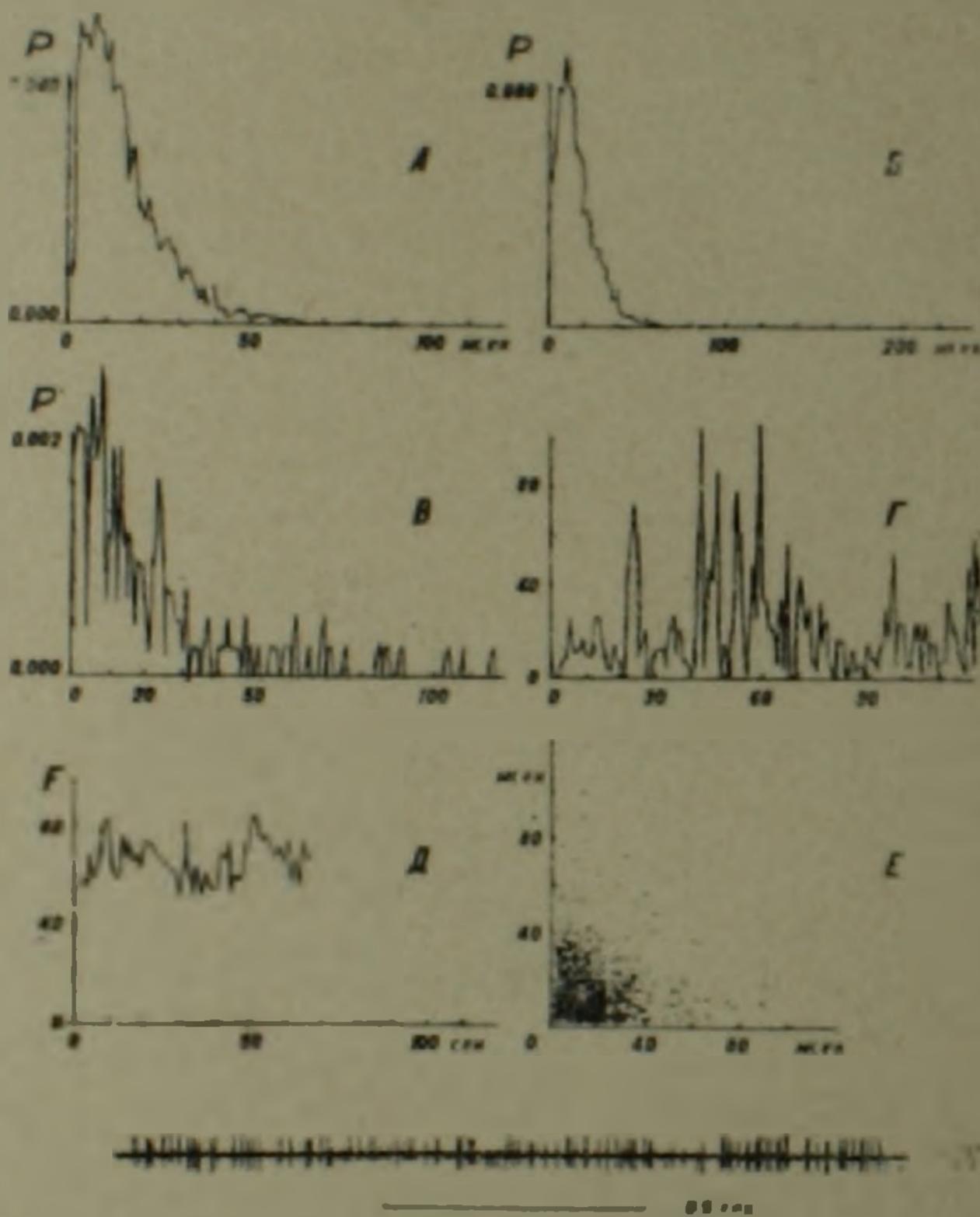


Рис. 1. Нейрон 10N061067-05. Общее количество интервалов $A = 4602$, $\mu = 14,99$ мсек, $\sigma = 11,55$ мсек. A — гистограмма распределения длительности межимпульсных интервалов, вычисленная с шагом $\Delta = 1$, B — то же с шагом $\Delta = 2$, B — τ -гистограмма, $\tau = 50$ мсек, $\Gamma = F(\tau)$, $\tau = 50$ мсек; D — частотная функция. По оси абсцисс отложено время в сек, по оси ординат — количество импульсов, поступивших за 1 сек ($\Delta t = 1000$ мсек). E — корреляционное поле. По оси абсцисс отложена длительность x_i предыдущего интервала, по оси ординат — длительность $x_{i+\tau}$ последующего интервала ($\tau = 1$), $\delta = 1$. $Ж$ — образец активности нейрона

При выполнении условия (6) строится точка $M_i(x_i, y_i)$ с координатами:

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= E\left(\frac{x_i}{b}\right) \\ y'_i &= E\left(\frac{x_{i+1}}{b}\right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где E означает „целая часть“.

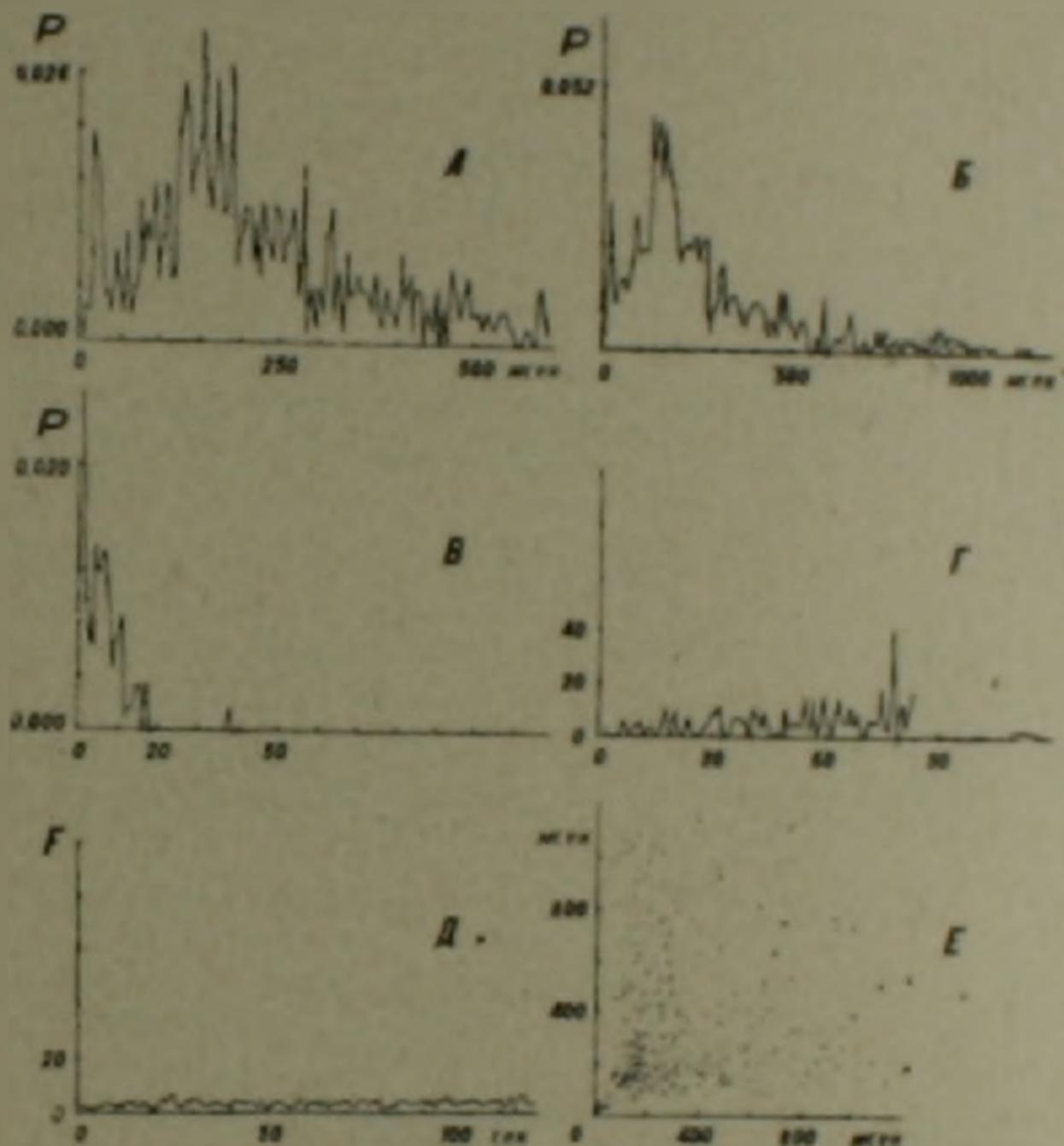


Рис. 2. Мейри 108081067-06 (обозначены те же). $N = 609$, $\mu = 287,56$ мсек, $\sigma = 261,13$ мсек. А-Δ-5; Б-Δ-10; В, Г-τ-500 мсек; Д-Δ-1000 мсек; Е-τ-10

При невыполнении условия берется следующая пара интервалов (x_i, x_{i+1}) и т. д.

Для построения τ-гистограммы выбирается произвольно число τ. Последовательность $\{x_i\}$ условно делится на пачки импульсов, причем за пачку принимается последовательность x_i, x_{i+1}, \dots, x_j , в которой все $x_i < \tau$ и имеет место условие

$$\left. \begin{aligned} x_{i-1} &> \tau \\ x_{i+1} &> \tau \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

т. е. граничные интервалы пачки не меньше τ . Далее подсчитывается количество импульсов в пачке, и строится гистограмма: по оси абсцисс откладывается количество импульсов в пачке, по оси ординат — количество таких пачек (с одинаковым числом импульсов). Соответствующие кривые построены на рис. 1—3, В. Рядом с каждой τ -гистограммой показана кривая $F(z)$, где по оси абсцисс отложен порядковый номер пачки в последовательности, а по оси ординат — число импульсов в пачке.

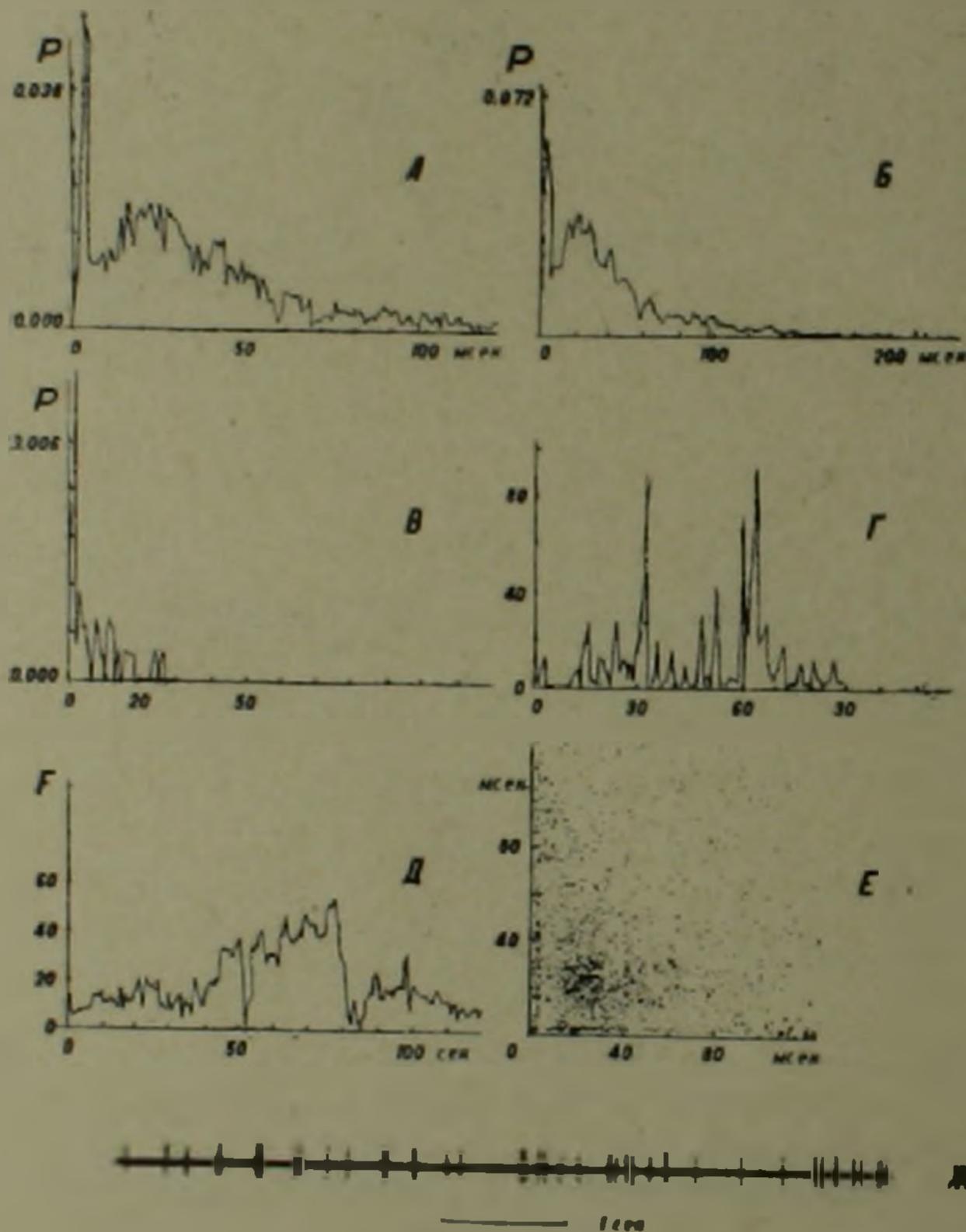


Рис. 1. Нейрон 10B061067-14 (обозначения те же). $N=2316$, $\mu=53,58$ мсек, $\sigma=93,96$ мсек. А— $\Delta=1$; Б— $\Delta=2$, В, Г— $\tau=200$ мсек; Д— $\Delta t=1000$ мсек; Е— $\delta=1$

Работа выполнена на основе статистического анализа фоновой импульсной активности 29 нейронов. Изучались только последовательности, полученные при экстраклеточном отведении. Большинство рассмотренных нейронов (25) имело активность в виде нерегулярных одиночных разрядов с различной средней частотой импульсации (от 2,42 до 68,54 имп/сек). Из них 2 нейрона имели довольно высокую частоту импуль-

сация (клетки 10B061067-05* и 13B251067-23), 6—сравнительно низкую (меньше 5 имп/сек), а остальные 17 занимали промежуточное между ними положение. Оставшиеся 4 нейрона имели фоновую активность, в которой преобладали пачечные или групповые разряды.

Среди исследованных чаще всего встречались нейроны с экспоненциальным распределением интервальных длин, что говорит в пользу стационарности потока импульсации этих нейронов, так как в этом случае число генерированных клеткой импульсов подчиняется закону Пуассона. Два нейрона имели гистограмму бимодальной формы. Встречались также распределения, не поддающиеся классификации.

Анализ корреляционных полей показал, что между смежными интервалами одной и той же последовательности импульсов чет или же существует слабая положительная корреляция. Независимость интервалов также подтверждает гипотезу о «пуассоновости» потока импульсов.

Графики наиболее характерных нейронов показаны на рис. 1—3. На рис. 1—нейрон с относительно высокой частотой импульсации для данного образования мозга, классифицируемый как «быстрый» нейрон, на рис. 2—«медленный» нейрон, а на рис. 3—нейрон, занимающий по частоте промежуточное между ними положение, но обладающий бимодальным распределением интервалов.

Все вычисления проводились на электронной вычислительной машине «Раздан-2». Информация вводилась в ЭВМ по разработанной нами специальной методике (13-14). Графики строились с помощью двухкоординатного регистрирующего прибора, смонтированного на выходе вычислительной машины (12).

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета,
Институт физиологии им. Л. А. Орбели
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ս. ՕՐԵՆԻՅԱՆ, Վ. Է. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Կատվի գլխուղեղի կեղևի զգացող-շարժողական շրջանի նեյրոնների ֆունկցիոնալ աշխուժության վիճակագրական վերլուծությունը

Հոդվածում վիճակագրական վերլուծության է ենթարկված կատվի գլխուղեղի կեղևի զգացող-շարժողական շրջանի սուր փորձի պայմաններում գրանցված 29 նեյրոնների ֆունկցիոնալ իմպուլսային աշխուժությունը:

Ուսումնասիրվել են միայն այն հաջորդականությունները, որոնք ստացվել են արտաբնական գրառման ժամանակ: Հետազոտվածների մեջ ազելի հաճախ հանդիպում են բջիջներ, որոնց միջիմպուլսային ընդմիջումների երկարությունների բաշխումն էքսպոնենցիալ է. ինչը և ցույց է տալիս, որ տվյալ

* Первые две цифры означают номер опыта, буква—отличительный код экспериментатора, последующие шесть цифр—дату опыта (число, месяц и год соответственно), последние две цифры—порядковый номер нейрона в данном опыте.

ընդհանրի իմպուլսային հոսքը ստացիոնար է: Վերլուծությունը նաև ցույց տվեց, որ իմպուլսների նույն հաչորդականության կից ընդմիջումների միջև կա կամ գոյություն ունի թույլ դրական կոռելյացիա: Հաշվարկները կատարման ենայի մեջ է մտցվել մեր կողմից մշակված հատուկ մեթոդիկայի օգնությամբ ևն «Հրապրան-2» էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենայի վրա: Ինֆորմացիան մեքենայի մեջ է մտցվել մեր կողմից մշակված հատուկ մեթոդիկայի օգնությամբ: Գրաֆիկները կառուցվել են մեքենայի ելքում տեղադրված երկկոորդինատային գրանցող սարքի միջոցով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Д. Р. Коке, У. Л. Смит, Теория очередей, 18, М., 1966. ² J. M. Fuster, A. Herz, G. L. Creutzfeldt, Arch. Ital. Biol., 103, 1, 159 (1965). ³ V. Braintenberg, G. Gambardella, G. Chigo, U. Vota, Kybernetik, 2, 5, 197 (1965). ⁴ А. М. Мелехова, Г. И. Шульгина, А. Н. Лебедев, Ж. высш. нервн. деят., 16, 5, 889 (1966). ⁵ J. Huuhtinen, Acta physiol. scand., 68, Suppl., 278, 1966. ⁶ Н. И. Васильевский, Физиолог. ж. СССР, т. 14, 4, 389 (1968). ⁷ G. F. Poggio, L. J. Vlernstein, J. Neurophysiol., 27, 4, 517 (1964). ⁸ Н. Nakahama, S. Nishioka, T. Otsuka, S. Atkawa, J. Neurophysiol., 29, 5, 921 (1966). ⁹ Р. Р. Великая, М. А. Куликов, Биофизика, т. 11, 2, 321 (1966). ¹⁰ М. А. Куликов, Физиол. ж., т. 12, 6, 829 (1966). ¹¹ В. Г. Григорян, В. В. Фанарджян, Материалы II Всесоюзного симпозиума «Структурная и функциональная организация мозжечка», 28, Ереван, 1968. ¹² Г. С. Ордуян, Вопросы радиоэлектроники, сер. ЭВТ, 4, 10, 1968. ¹³ А. В. Липинов, Г. С. Ордуян, Д. С. Саркисян, ДАН АрмССР, т. 45, № 2, 92 (1967). ¹⁴ А. В. Липинов, Г. С. Ордуян, В. В. Фанарджян, Ж. высш. нервн. деят., т. 18, 4, 739 (1968).

