

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր

Д О К Л А Д Ы

Том 93 № 5

1992

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. ֆաբուլադար), Է. Գ. ԱՅՐԻՆՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ՐԱՔԱՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՆՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ըզր. աղղամ, Վ. Հ. ՀԱՄՐԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խըմբագրի աղղակալ), Վ. Դ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ըզր. աղղամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Դ. Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի), Մ. Լ. ՏԵՐՄԻԹԱՅԵՆՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՆԱՆԱՐՁՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН Армении, А. Т. БАБАЯН, академик АН Армении, А. А. ГАБРИЕЛЯН, академик АН Армении, В. О. КАЗАРЯН, академик АН Армении (зам. отв. редактора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН Армении, Г. С. СААКЯН, академик АН Армении, Д. М. СЕДРАКЯН, академик АН Армении (отв. редактор), А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН Армении, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, академик АН Армении, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик АН Армении.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒԹ Յ ՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Է. Ա. Դանիելյան, Ա. Ռ. Սիմոնյան—Մեկից մեծ ծանրաբեռնվածությամբ Պրաթ-հեթ համակարգում պայմանական սպասման ժամանակներ	195
Վ. Գ. Պետրոսյան—Կարտանի նույնության տիպի առնչություններ	200
Ա. Ա. Գալստյան—Փսևդոդիֆերենցիալ կորիզներով ինտեգրալ հավասարումների լուծումը	207
Կ. Վ. Գառապյան—Օպերիոնալ մարտինգալների ադապտոտիկ վարքի մասին	212

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Մ. Մխիբարյան—Առաձգականության տեսության կոնտակտային և խառը խոլոդիոներում հանդիպող լոգարիթմական կորիզներով ինտեգրալ օպերատորների համար սպեկտրալ առնչությունների մասին	220
--	-----

ԲԻՈԹԵՄԻԱ

Ա. Զ. Փեփոյան, Ա. Ա. Հաբուբյանյան, Ժ. Ա. Կծոյան, Կ. Գ. Ղառաղյոզյան— <i>Salmonella derby</i> բջիջների չիպիդային պերօքսիդացիոն պրոցեսի առանձնահատկությունների մասին	227
Բաժանդակություն 93-րդ հատորի	232

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян, А. Р. Симолян—Условные времена ожидания в модели Прабху при загрузке, большей единицы	195
В. Г. Петросян—Соотношения типа тождества Картана	200
А. А. Гадсян—Решение интегральных уравнений с псевдодифферен- циальными ядрами	207
К. В. Гаспарян—Об асимптотическом поведении опциональных мар- тигалов	212

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. Мхитарян—О спектральных соотношениях для интегральных опе- раторов с логарифмическими ядрами, встречающихся в контактных и смешан- ных задачах теории упругости	220
---	-----

БИОХИМИЯ

А. З. Пепоян, А. А. Арутюнян, Ж. А. Кцоян, К. Г. Карагезян—Об осо- бенностях процесса перекисеобразования липидов клеток <i>Salmonella derby</i>	227
Содержание 93-го тома	232

CONTENTS

MATHEMATICS

<i>E. A. Daniellian, A. R. Simonian</i> — Conditional waiting times in Prabhu's model with traffic intensity more than one	195
<i>V. G. Petrossian</i> — Cauchy's Identity type relations	200
<i>A. A. Galstian</i> — Integral equations with the pseudodifferential kernels	207
<i>K. V. Gasparian</i> — On asymptotic behaviour of optional martingales	212

THEORY OF ELASTICITY

<i>S. M. Mkhitarian</i> — On spectral correlations for integral operators with logarithmic kernels, which meet in contact and mixed problems of theory of elasticity	220
--	-----

BIOCHEMISTRY

<i>A. Z. Pepoyan, A. A. Haroutyunian, G. A. Kizoyan, K. G. Karagezian</i> — About the peroxidations specifications of the process lipids in <i>Salmonella</i> derby cells	227
Contents of volume 93	232

ISSN 0371-1330. Доклады Академии наук Армении, 1992, т. 93, № 5, с. 193-240.

Сдано в набор 6.10.1992 г. Подписано к печати 25.06.1993 г.

Формат 70 × 108^{1/16}. Бумага № 1, сыктывкарская. Высокая печать. Печ. лист 3.0.
Усл. печ. л. 4.2. Усл. кр. отт. 4.2. Учет. изд. л. 3.37. Тираж 335. Заказ № 137.

Издат. № 8019. Цена 1 р. 10 к.

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г, III эт., к. 13, т. 27-36-95

Издательство Академии наук Армении, 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24 г.

Типография Издательства Академии наук Армении, 375019, Ереван.

пр. Маршала Баграмяна, 24.

МАТЕМАТИКА

УДК 519.2

Э. А. Даниелян, А. Р. Симонян

Условные времена ожидания в модели Прабху при загрузке.
большей единицы

(Представлено академиком АН Армении Р. В. Амбарцумяном 10/X 1991)

1°. Модель $M_1 | G, 1 | \infty$. В одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием поступают независимые пуассоновские потоки 1-вызовов, ..., r -вызовов с параметрами $a_1 > 0, \dots, a_r > 0$ соответственно. Длительности обслуживания вызовов независимы в совокупности, не зависят от процесса поступления и для k -вызовов ($k = \overline{1, r}$) имеют функцию распределения (ФР) $B_k(x)$. $B_k(+0) = 0$.

В момент $t = 0$ модель свободна от вызовов.

Дисциплина Прабху (1), с.112). Поступая в момент t в модель, k -вызов ($k = \overline{1, r}$) приобретает индекс $t + u_k$, где $0 = u_1 < \dots < u_r$. В любой момент на приборе находится вызов с наименьшим индексом, т. е. допускаются прерывания обслуживания. Прерванный вызов дообслуживается. Параметры $v_k = u_k - u_{k-1}$ ($k = \overline{2, r}$) определяют дисциплину. Случаи $v_k = 0$ и $v_k = +\infty$ ($k = \overline{2, r}$) соответствуют дисциплинам FIFO и абсолютных приоритетов.

Модель Прабху = модель $M_r | G_r | 1 | \infty$ + дисциплина Прабху.

Пусть: $\bar{w}_k(t)$ ($k = \overline{1, r}$; $t \geq 0$) — условное виртуальное время ожидания (УВВО) k -вызова в момент t , при условии прекращения с момента t доступа вызовов в модель; ρ_{k1} — загрузка модели 1-вызовами, ..., k -вызовами ($\overline{1, k}$ -вызовами); $\rho_k = 1 - \rho_{k1}$ — недогрузка модели $\overline{1, k}$ -вызовами.

Условия на процесс загрузки: при $\rho_{k1} > 1$ и $s \neq 0$ имеют место представления

$$\sum_{m=1}^i a_m \int_0^\infty e^{-sx} dB_m(x) = \sigma_i - \rho_{i1} s + B_i s^i (1 + o_i(1)), \quad i = \overline{k, r}, \quad (1.1)$$

где $\sigma_i = a_1 + \dots + a_i$, $1 < i \leq 2$, $0 < B_k < \dots < B_r \stackrel{\text{def}}{=} B$.

Условия на параметры: существуют пределы ($m = \overline{k, r}$): либо

$$M_m = \lim_{t \rightarrow +\infty} (s_m(t)/t^{1/\gamma}), \quad (2_k)$$

либо

$$R_m = \lim_{t \rightarrow +\infty} (s_m(t)/(\bar{B}_m(t))^{1/\gamma}), \quad (3_k)$$

где обозначено

$$s_m(t) = -p_r t - \sum_{i=m}^{r-1} (p_i - p_r) v_{i+1}, \quad \bar{B}_m(t) = B_r t + \sum_{i=m}^{r-1} (B_i - B_r) v_{i+1}.$$

Предельные законы строятся по ФР:

1. $\bar{G}_\gamma(x)$. $\bar{G}_\gamma(x) = 0$ при $x < 0$ и

$$\int_0^\infty e^{-sx} d\bar{G}_\gamma(x) = e^{s^\gamma} \left\{ 1 - \frac{s}{\Gamma(1/\gamma)} \int_0^1 e^{-s^\gamma u} u^{-(1-\gamma^{-1})} du \right\}, \quad s \geq 0,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

2. $G_{1/\gamma}(x)$. $G_{1/\gamma}(x) = 0$ при $x < 0$ и

$$\int_0^\infty e^{-sx} dG_{1/\gamma}(x) = \exp[-s^{1/\gamma}], \quad s \geq 0.$$

3. $G_\gamma(x)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dG_\gamma(x) = \exp[-(-it)^\gamma], \quad i = \sqrt{-1}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

4. $\bar{W}_k^0(x)$ — стационарная ФР $\bar{w}_k^0(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ в модели $M_r | G_r | 1 | \infty$ с абсолютными приоритетами.

Все ФР имеют плотности, обозначаемые малыми буквами с теми же индексами.

2°. При условиях (1_k) и $p_{r1} > 1$ опишем класс предельных ФР для $\bar{w}_k(t)$, $k < r$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1_k) и существуют пределы (2_k).

а) Если $M_k = +\infty$, то равномерно по $x \in (-\infty, +\infty)$ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P \left\{ \frac{\bar{w}_k(t) - s_k(t)}{(\bar{B}_k(t))^{1/\gamma}} < x \right\} = G_\gamma(x),$$

б) Если $M_k = -\infty$, то равномерно по $x \in (-\infty, +\infty)$ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P\{\bar{w}_k < x\} = \bar{W}_k^0(x).$$

Пункт а) теоремы доказан в (?).

В частности, пункт а) теоремы 1 исчерпывает случай $\rho_{n1} > 1$.

Свойства условий (2_k) и (3_k) .

1. При существовании пределов (2_k) , (3_k)

$$M_k \leq M_{k+1} \leq \dots \leq M_r \quad (R_k \leq R_{k+1} \leq \dots \leq R_r).$$

Более того, условие $M_m = +\infty$ ($M_m = -\infty$) равносильно условию $R_m = +\infty$ ($R_m = -\infty$).

Пусть найдется n , $k \leq n < r$, такое, что $\rho_{n1} < 1$, $\rho_{n+11} > 1$ и существует предел

$$\bar{B}_{n+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\hat{B}_{n+1}(t)/t). \quad (4)$$

2. Группа условий: существуют пределы (2_k) ,

$$s_{n+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (s_{n+1}(t)/t) \quad (5)$$

и

$$M_k > -\infty, \quad M_n < +\infty, \quad M_{n+1} = +\infty \quad (6)$$

равносильна группе условий: существуют пределы (3_k) ,

$$c_{n+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (s_{n+1}(t)/\hat{B}_{n+1}(t)) \quad (7)$$

и

$$R_k > -\infty, \quad R_n < +\infty, \quad R_{n+1} = +\infty. \quad (8)$$

Более того ($m = \overline{k, n}$):

$$R_m = \left[\hat{B}_{n+1} + \frac{B - B_n}{\rho_n - \rho_r} s_{n+1} \right]^{-1/\gamma} \cdot M_n,$$

$$s_{n+1} = c_{n+1} \cdot \bar{B}_{n+1}.$$

Пусть найдется n , $k \leq n < r$, такое, что $\rho_{n1} = 1$.

3. Пределы (4), (5), (7) существуют, причем

$$\bar{B}_{n+1} = B, \quad s_{n+1} = -\rho_r, \quad c_{n+1} = (-\rho_r/B).$$

4. Группа условий: существуют пределы (2_k) и имеет место (6) — равносильна группе условий: существуют пределы (3_k) и имеет место (8).

Более того ($m = \overline{k, n}$):

$$R_m = M_m \cdot B_n^{-1/\gamma}, \quad 0 \leq R_n < +\infty.$$

3°. Пусть выполнены условия (1_k) , найдется n , $k \leq n < r$, такое, что $\rho_{n1} < 1$, существуют пределы (3_k) , (7) и имеют место (8). (Условия $A(n)$).

Обозначим

$$\lambda_n = \frac{B_n c_{n+1}}{(\rho_n - \rho_r) - (B - B_n) c_{n+1}}, \quad R_{kn} = R_n + \rho_r \sum_{l=k}^{n-1} \frac{R_{l+1} - R_l}{\rho_l - \rho_r} \quad (9)$$

и введем ФР

$$F_\gamma(R_m, m = \overline{k, n}; x) = \begin{cases} G_\gamma(-R_{kn}) + \int_{-R_{kn}}^{+\infty} G_\gamma\left(\frac{x - u\lambda_n^{1/\gamma}}{(1 - \lambda_n)^{1/\gamma}}\right) dG_\gamma(u) & \text{при } x > -R_k, \\ 0 & \text{при } x \leq -R_k. \end{cases}$$

Теорема 2. При условиях $A(n)$ равномерно по x существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P \left\{ \frac{\bar{w}_k(t) - s_k(t)}{(\hat{B}_k(t))^{1/\gamma}} < x \right\} = F_\gamma(R_m, m = \overline{k, n}; x).$$

Теорема 3. Если в условиях теоремы 2 $c_{n+1} = 0$, то равномерно по x существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P \left\{ \frac{\bar{w}_k(t) - s_k(t)}{(\hat{B}_k(t))^{1/\gamma}} < x \right\} = \begin{cases} G_\gamma(x) & \text{при } x > -R_k, \\ 0 & \text{при } x \leq -R_k. \end{cases}$$

Пусть найдется n , $k \leq n < r$, такое, что $\rho_{n1} = 1$, выполнены условия (I_n) , существуют пределы (2_k) и имеет место (6) (Условие $B(n)$). Введем ФР

$$F_\gamma(R_k, R_{kn}, x) = \begin{cases} \bar{G}_\gamma(R_{kn}, x) & \text{при } x > -R_k, \\ 0 & \text{при } x \leq -R_k. \end{cases}$$

где при $x > -R_k$

$$\bar{G}_\gamma(R_{kn}, x) = G_\gamma(x) - \int_0^1 [G_\gamma - \tilde{G}_\gamma] [(x + R_{kn})(1 - w)^{-1/\gamma}] d_w G_{1,\gamma}(wR_{kn}^{-1}).$$

Теорема 4. При условиях $B(n)$ равномерно по x существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P \left\{ \frac{\bar{w}_k(t) - s_k(t)}{(B_n t)^{1/\gamma}} > x \right\} = F_\gamma(R_k, R_{kn}, x),$$

где R_{kn} определяется равенством

$$R_{kn} = B_n^{-1/\gamma} \left[M_n + \rho_r \sum_{l=k}^{n-1} \frac{M_{l+1} - M_n}{\rho_l - \rho_r} \right]$$

и

$$R_k = -B_n^{-1/\gamma} M_n.$$

Теорема 5. Если в условиях теоремы 4 $R_{kn} = 0$, т. е.

$$M_n = p_r \sum_{i=k}^{n-1} \frac{M_{i+1} - M_i}{p_i - p_r},$$

то равномерно по x существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P \left\{ \frac{\bar{w}_k(t) - s_k(t)}{(B_n t)^{1/\gamma}} < x \right\} = \begin{cases} G_\gamma(R_{kn}, x) & \text{при } x > -R_k, \\ 0 & \text{при } x \leq -R_k. \end{cases}$$

Ереванский государственный
университет

Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Ա. Ռ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

Լեկից մեծ ծանոթեցնվածությամբ Պրաբհուի համակարգում
պայմանական սպասման ժամանակներ

Աշխատանքում դիտարկվում է Պրաբհուի $M_r |G_r, 1|_\infty$ համակարգը ⁽¹⁾, $a_k > 0$ ($k = \overline{1, r}$) ներմտնող հոսքի պարամետրով և $B_n(x)$ սպասարկման բաշխման ֆունկցիայով:

$\bar{w}_k(t)$ -ով նշանակված է t պահին համակարգ եկած k -պահանջի պայմանական սպասման ժամանակը, այն պայմանով, որ t պահից ղաղարում է պահանջների հոսքը ղեպի համակարգ: p_{r1} -ը համակարգի ծանրաբեռնվածությունն է 1 , k -պահանջներով:

Ծանրաբեռնվածության պրոցեսի վրա ղրված է հետևյալ պայմանը, որ $p_{r1} > 1$ և հրք $s \downarrow 0$, տեղի ունի հետևյալ վերլուծությունը՝

$$\sum_{m=1}^i a_m \int_0^\infty e^{-sx} dB_m(x) = \sigma_i p_{i1} s + B_i s^1 (1 + o_s(1)), \quad i = \overline{k, r},$$

որտեղ

$$\sigma_i = a_1 + \dots + a_i, \quad 1 < \gamma \leq 2, \quad 0 < B_k \leq \dots \leq B_r \stackrel{\text{def}}{=} B.$$

Վերոհիշյալ և պարամետրերի վրա ղրված որոշ պայմանների ղեպքում ապացուցված են $\bar{w}_k(t)$ -ի սահմանային բաշխման ֆունկցիաների ղաղը նկարագրող թեորեմներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱՇԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. У. Прабху, Стохастические процессы теории запасов, Мир, М., 1987.
² А. Р. Симонян, в кн. Вероятность и оптимизация, Изд Ереванского гос. ун-та, 1991.

УДК 517.53

В. Г. Петросян

Соотношения типа тождества Картана

(Представлено чл.-корр. АН Армении Н. У. Аракеляном 30/X 1991)

Одной из основных характеристик в классической теории распределения значений Р. Неванлинны является функция приближения

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta(r, a)} \ln |\varpi(re^{i\varphi}) - a|^{-1} d\varphi, \text{ которая показывает, насколько}$$

близки значения функции $\varpi(z)$ к постоянной a , на дугах

$$\Delta(r, a) = \Delta(r, a, \varpi) = \{z: |z| = r, |\varpi(z) - a| \leq 1\} \quad (1)^*.$$

В работе (2) вводятся новые характеристики близости, которые учитывают поведение производных высшего порядка функции $\varpi(z)$ на тех дугах окружности $|z| = r$, на которых ϖ близка к a . Мы имеем в виду следующие величины ($z = re^{i\varphi}$):

$$P_k(r, a) \stackrel{\text{def}}{=} r \int_{\Delta(r, a)} \ln^{(k)} |\varpi(z) - a|^{-\frac{1}{k}} d\varphi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Оказывается, что величины $P_k(r, a)$ обнаруживают свойства, аналогичные свойствам функций приближения $m(r, a)$, т. е. для них выполняется аналог второй основной теоремы Р. Неванлинны и соответственно аналог соотношения дефектов, характеризующих уже новые «исключительные» значения.

Ясно, что оценки величин $P_k(r, a)$ являются одновременно оценками k -вых производных функции $\ln |\varpi(z) - a|^{-1}$, являющейся мерой близости ϖ к a .

Укажем также другие точки зрения, с которых изучение величин $P_k(r, a)$ представляет интерес.

На актуальность изучения таких объектов указывает следующее простое предложение, связывающее $P_1(r, a)$ с классическими величинами: если мероморфная в $\mathbb{C}$ функция имеет по крайней мере два

* Мы полагаем известными основные определения и результаты теории распределения значений.

дефектных значения в смысле В. П. Петренко, т. е. существуют значения a_1 и a_2 , для которых $\beta(a_1) > 0$, $\beta(a_2) > 0$, где

$$\beta(a) = \lim_{r \rightarrow \infty} (L(r, a)/T(r)) = \lim_{r \rightarrow \infty} (\max_{|z|=r} \ln^+ |\varpi(z) - a|^{-1}/T(r)),$$

то для любого $a \in \mathbb{C}$ и r справедливы неравенства

$$m(r, a) \leq \max_{|z|=r} \ln^+ |\varpi(z) - a|^{-1} \leq P_1(r, a) + O(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Таким образом, оценки сверху $P_1(r, a)$ одновременно являются оценками дефектов $\delta(a)$ и $\beta(a)$.

Получение окончательных результатов в теории мероморфных функций зачастую упирается в оценки логарифмических производных (1, 3-5).

Поскольку величины $P_1(r, a)$ определяются посредством логарифмической производной и для них устанавливаются соотношения дефектов, то эти величины становятся объектами самостоятельного изучения.

В работе (2) получены оценки сверху величин

$$Q_k(r, a) \stackrel{\text{def}}{=} r \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{\varpi^{(k)}(z)}{\varpi(z) - a} \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi.$$

Ясно, что из оценок величин $P_k(r, a)$ и $Q_k(r, a)$ можно извлечь информацию о поведении $\varpi^{(k)}(z)$ на множествах $\Delta(r, a)$.

В настоящей заметке продолжено изучение качественного сходства свойств $P_k(r, a)$, $Q_k(r, a)$ и неванлинновской функции $m(r, a)$. С этой точки зрения рассматривается функция $L(r, a)$, фигурирующая в определении дефекта В. П. Петренко. Именно, для этих величин получены аналоги известного тождества Картана, которое в сущности эквивалентно соотношению (6)

$$\int_0^{2\pi} m(r, e^{i\theta}) d\theta = o[T(r)], \quad r \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть $\varpi(z)$ — мероморфная в $\mathbb{C}$ функция конечного нижнего порядка λ . Тогда на некоторой неограниченной последовательности значения r выполняется

$$\int_0^{2\pi} P_k(r, e^{i\theta}) d\theta = o[T(r)], \quad r \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Следствие. Если существуют значения a_1 и a_2 такие, что $\beta(a_1) > 0$, $\beta(a_2) > 0$, то соотношение (3) теоремы 1 можно заменить следующим:

$$\int_0^{2\pi} L(r, e^{i\theta}) d\theta = o[T(r)], \quad r \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Теорема 2. При условиях теоремы 1 справедливо

$$\int_0^{2\pi} Q_k(r, e^{i\theta}) d\theta = o[T(r)], \quad r \rightarrow \infty, \quad (5)$$

При $k=1$ эти результаты были установлены в работе (7).

Доказательство теоремы 1 опирается на «свойство близости a -точек» мероморфных функций, которое мы приводим в модификации, непосредственно следующей из предложения 1 работы (8) (с. 413—414).

Теорема А. Пусть $w(z)$ — мероморфная в $\mathbb{C}$ функция; $\varphi(r) \uparrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ ($\varphi^{13}(r) < A(r)$). Тогда в круге $|z| \leq r$ можно указать $\Phi(r)$ попарно непересекающихся областей $E_i(r)$, $i = 1, 2, \dots, \Phi(r)$, для которых справедливы следующие утверждения:

$$I. \quad |\Phi(r) - A(r)| \leq Q(r), \quad (6)$$

где $Q(r) \leq KA(r)/\varphi(r) + K\varphi^{17}(r)L(r)$, $K = \text{const} < \infty$.

II. В каждой области $E_i(r)$ функция $w(z)$ однолистка; замыкание множества $w(E_i(r))$, стереографически отображенное на риманову сферу, совпадает со сферой с некоторым числом k_i исключенных из сферы односвязных областей Δ_j^i , $j = 1, 2, \dots, k_i$.

$$III. \quad \rho(\Delta_j^i) \leq 1/\varphi(r), \quad j = 1, 2, \dots, k_i, \quad i = 1, 2, \dots, \Phi(r), \quad (7)$$

где $\rho(\Delta_j^i)$ — диаметр области Δ_j^i в сферической метрике.

$$IV. \quad \sum_{i=1}^{\Phi(r)} k_i \leq 4A(r) + Q(r). \quad (8)$$

$$V. \quad d(E_i(r)) \leq K\varphi^8(r)z/A^{\frac{1}{3}}(r), \quad i = 1, 2, \dots, \Phi(r), \quad (9)$$

где $d(E_i(r))$ — диаметр области $E_i(r)$.

Теорема А представляет собой «свойство близости a -точек» мероморфных функций $w(z)$, устанавливающее, что для «хороших» a и b a -точки и b -точки функции $w(z)$ близко располагаются друг от друга (поскольку они лежат в малых областях $E_i(x)$). Теорема А включает в себя основной вывод теории распределения значений, согласно которому количества таких a -точек и b -точек близки.

Обозначим через $n(r, a, b)$ количество тех a -точек $z_a(a) \in E_b(r) \subset \sum_{i=1}^{\Phi(r)} E_i(r)$, для каждой из которых находится b -точка $z_b(b)$

из $E_b(r)$, и пусть $\Delta(r, \rho) = \int_0^{2\pi} n(r, e^{i\theta}, \rho e^{i\theta}) d\theta$, $\rho > 0$.

Лемма 1. Пусть $w(z)$ — мероморфная в S функция. Тогда справедливы следующие неравенства ($r > r_0$):

$$2\pi\Phi(r) - K\{A(r)/\varphi(r) + \varphi^{10}(r)L(r)\} \leq \Delta(r, \rho) \leq 2\pi\Phi(r), \quad (10)$$

где $K = \text{const} < \infty$.

Доказательство. Обозначим через $\{\gamma_j\}$ совокупность тех кривых, которые принадлежат области $w(E_j(r))$ и лежат на дугах $\{I_j\}$ окружности $|\omega| = 1$ таких, что если $e^{i\theta} \in I_j$, то прообраз точки $\rho e^{i\theta}$ принадлежит области $E_j(r)$. Тогда величина $\Delta(r, \rho)$ показывает суммарную длину всех линий, лежащих на поверхности $F(r) = \{w(z): z \in U_{j=1}^{\Phi(r)} E_j(r)\}$, проекции которых лежат над совокупностью дуг $\{I_j\}$, $j = 1, 2, \dots, \Phi(r)$.

Определим величину $n_j(r, e^{i\theta}, \rho, e^{i\theta})$ равной нулю, если хотя бы одна из $e^{i\theta}$ -, $\rho e^{i\theta}$ -точек не принадлежит множеству $E_j(r)$, и равной единице, если $e^{i\theta}$ -, $\rho e^{i\theta}$ -точки принадлежат множеству $E_j(r)$. Поскольку $w(z)$ однолистка в каждой области $E_j(r)$, то

$$n(r, e^{i\theta}, \rho e^{i\theta}) = \sum_{j=1}^{\Phi(r)} n_j(r, e^{i\theta}, \rho e^{i\theta}). \quad (11)$$

Следовательно

$$\Delta(r, \rho) = \sum_{j=1}^{\Phi(r)} \int_0^{2\pi} n_j(r, e^{i\theta}, \rho e^{i\theta}) d\theta \leq 2\pi\Phi(r),$$

т. е. получаем правую часть неравенства (10).

Обозначим $\Delta'_{l, \rho}$ ($l = 1, 2, \dots, k_l$)-проекции на плоскость тех областей Δ'_l , которые пересекаются с окружностями $\{\omega: |\omega| = 1\}$ и $\{\omega: |\omega| = \rho\}$; $k_{l, \rho}$ — их количество. Тогда, используя пункты II, III теоремы А и исходя из геометрических соображений, нетрудно видеть, что

$$\int_0^{2\pi} n_l(r, e^{i\theta}, \rho e^{i\theta}) d\theta \geq 2\pi - \frac{K}{\varphi(r)} k_{l, \rho} \quad (r > r_0).$$

Отсюда, воспользовавшись оценками (8), (11) и учитывая неравенство $k_l \geq k_{l, \rho}$, получим

$$\Delta(r, \rho) \geq 2\pi\Phi(r) - K\{A(r)/\varphi(r) + \varphi^{10}(r)L(r)\}.$$

Лемма доказана.

Обозначим при фиксированном α , $0 < \alpha < 1$,

$$E_\alpha^n = E_\alpha(R_n) = \{r: \alpha^2 R_n \leq r \leq \alpha R_n\}. \quad R_n > 0.$$

Лемма 2. Пусть $w(z)$ — мероморфная в S функция, $a, b \in S$, $|a - b| > 2$, $\alpha < \beta < 1$. Тогда выполняется неравенство

$$\int_{E_n^a} P_k(r, a) dr \leq K \{ |m(R'_n, a) + m(R'_n, b)| + [n(R'_n, a) + n(R'_n, b) - \\ - 2n(R'_n, a, b)] + [A(R'_n)]^{-\frac{1}{sk}} n(R'_n, a, b) + o[T(cR_n)] \} R_n, \quad (12)$$

где $R'_n = \beta R_n$, $c = \text{const} > 1$.

О доказательстве леммы 2. Устанавливается существование таких чисел $b \in \mathbb{C}$, $|a - b| > 2$, для которых $\int_{\Delta(r, a)} |\ln^{(k)}(w(z) - b)|^{\frac{1}{k}} d\varphi$

„малы“. Тогда оценки $P_k(r, a)$ будут близки к оценкам величин

$\int_{\Delta(r, a)} |\ln^{(k)}(w(z) - a) - \ln^{(k)}(w(z) - b)|^{\frac{1}{k}} d\varphi$. После представления под-

ытегрального выражения формулой Р. Неванлинны применяется „свойство близости a -точек“.

Лемма 3 ((⁹), с. 205). Пусть $w(z)$ — мероморфная в $\mathbb{C}$ функция. Тогда имеет место неравенство ($K = \text{const} < \infty$)

$$\iint_{D(R)} \left| \frac{w'(z)}{w(z)} \right| d\omega \leq KRT(cR), \quad R < R_0, \quad (13)$$

где $D(R) = \{z: |z| \leq R\}$, $d\omega$ — элемент площади, $c = \text{const} > 1$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $a = e^{i\theta}$, $b = \rho e^{i\theta}$, $|a - b| > 2$. Интегрируя по θ неравенство (12) леммы 2 и используя лемму 1 и соотношение (2), получим

$$\int_{E_n^a} \int_0^{2\pi} P_k(r, e^{i\theta}) d\theta dr \leq KR_n \int_0^{2\pi} [n(R'_n, a) + n(R'_n, b) - \\ - 2n(R'_n, a, b)] d\theta + KR_n [\Phi(R'_n) [A(R'_n)]^{-\frac{1}{sk}} = o[T(cR_\rho)]] \}. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что величина $\frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} n(r, \rho e^{i\theta}) \rho d\theta$ показывает сред-

нее число накрытия над кривой, являющейся стереографическим образом окружности $|w| = \rho$. Следовательно, согласно второй теореме о покрытии ((¹), гл. XIII, с. 338) имеем

$$\int_0^{2\pi} n(r, \rho e^{i\theta}) d\theta = 2\pi A(r) + KL(r).$$

Следовательно, применяя лемму 1, неравенство (6) теоремы А и учитывая очевидное соотношение $A(r) < T(ch)/\ln c$ из (14), получим

$$\int_{E_n^0} \int_0^{2\pi} P_k(r, e^{i\theta}) d\theta dr < [T(cR_n)]^{\frac{17}{35}} L(R_n') R_n + o[T(cR_n)] R_n, \quad (15)$$

$$R_n \rightarrow \infty.$$

Из оценки $L(r) < [A(r)]^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ ($r > 0$), $r \in E$ ((1), п. 326), где E — некоторое множество конечной логарифмической меры, вытекает, что при $R_n > R_0$ в каждом интервале $(\frac{1+\alpha}{2} R_n, \frac{3+\alpha}{4} R_n)$ найдется такая точка $R_n' = \beta R_n$, в которой верно неравенство

$$L(R_n') = L(\beta R_n) < [A(\beta R_n)]^{\frac{1}{2}+\epsilon} \left[\left(\ln \frac{1}{\beta} \right)^{-1} T(R_n) \right]^{\frac{1}{2}+\epsilon}.$$

Окончательно, из (15) имеем

$$\int_{E_n^0} \int_0^{2\pi} P_k(r, e^{i\theta}) d\theta dr = o[T(cR_n)] R_n. \quad (16)$$

Отсюда, применяя лемму 1.3.1 работы (5), получим утверждение теоремы 1.

Доказательство следствия следует из теоремы 1 и неравенства (1).

Доказательство теоремы 2 легко провести, используя лемму 3 и неравенство (16).

Автор благодарен Г. А. Барсегяну за полезные обсуждения и постоянное внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Վ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ԿԱՐՏԱՆԻ ԸՈՎՆՈՐԺՅԱՆ ՄԻԱՊԻ ԱՌՆՀԱՐԺՅՈՒՆՆԵՐ

Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ հետևյալ մոտարկման ֆունկցիաների համար ($z = re^{i\varphi}$)

$$P_k(r, a) \stackrel{\text{def}}{=} r \int_{\Delta(r, a)} |\ln^{(k)}(w(z) - a)|^{\frac{1}{k}} d\varphi,$$

$$Q_k(r, a) \stackrel{\text{def}}{=} r \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{w^{(k)}(z)}{w(z) - a} \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi,$$

որտեղ $w(z)$ -ը մերոմորֆ է $\mathbb{C}$ -ում, $\Delta(r, a) = \{z : |z| = r; |w(z) - a| \leq 1\}$, $k \in \mathbb{N}$ տեղի ունեն k -արտանի նույնության տիպի առնչություններ, Որպես հետևանք ստացվում է այդ առնչության անալոգը ψ . Պետրենկոյի ածի տեսությունում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 Р. Неванlinna. Однозначные аналитические функции, М.—Л., ГИТТЛ, 1941.
- 2 Г. А. Барсегян, В. Г. Петросян, Изв. АН. Армении, Математика (в печати), 3 W. Fuchs, App. Math., v. 68, № 2 (1956). 4 W. Fuchs, Ill. J. Math., v. 7, № 4 (1963). 5 В. П. Петренко, Рост мероморфных функций, Высшая школа, Харьков, 1978. 6 У. К. Хейман, Мероморфные функции, М., 1966. 7 Г. А. Барсегян, В. Г. Петросян, Изв. АН. Армении, Математика, т. 25, № 5 (1990). 8 Г. А. Барсегян, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 20, № 5 № 6 (1985). 9 Г. А. Барсегян, Мат. сб., т. 114(156) (1981).

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

А. А. Галстян

Решение интегральных уравнений с
 псевдодифференциальными ядрами

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. Б. Нерсисяном 27/XI 1991)

При построении параметрикса для гиперболического оператора возникает необходимость исследования следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} D_t Q(t, s) + R(t, s) Q(t, s) + R_0(t, s) \in C_{l,s}(S^{-\infty}), \\ Q(s, s) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$Q(s, s) = 0, \quad (2)$$

где $R(t, s)$, $R_0(t, s)$ — $d \times d$ -матричные псевдодифференциальные операторы, зависящие от параметров $[t, s \in [0, T]]$. При предположениях на символ оператора $R(t, s)$, а именно

$$|D_t^\alpha D_x^\beta r(t, s, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha|+|\beta|} g(t, \xi), \quad (3)$$

$$\int_0^T g(\tau, \xi) d\tau \leq K \ln \langle \xi \rangle, \quad g(t, \xi) \leq C_0 \langle \xi \rangle^m, \quad (4)$$

в работе (1) доказывается существование и единственность решения задачи (1), (2). Мы переносим этот результат на интегральные уравнения типа Вольтерра

$$Q(t, s) = R_0(t, s) + \int_0^t R(t, \theta) Q(\theta, s) d\theta. \quad (5)$$

Интегральные уравнения с псевдодифференциальными ядрами рассматривались во многих работах (см., например (2)). В работах (3, 4) рассматривались интегральные уравнения типа Вольтерра параболического типа.

Наряду с уравнением (5) рассматриваются также интегральные уравнения

$$V(t, s) = R_0(t, s) + \int_0^t V(\theta, s) R(t, \theta) d\theta. \quad (6)$$

$$U(t, s) = R_0(t, s) + \int_s^t U(t, \theta) R(\theta, s) d\theta, \quad (7)$$

$$G(t, s) = R_0(t, s) + \int_s^t R(\theta, s) G(t, \theta) d\theta, \quad (8)$$

где $R(t, s)$, $R_0(t, s)$ — $d \times d$ -матричные псевдодифференциальные операторы (ПДО) с символами $r(t, s, x, \xi)$, $r_0(t, s, x, \xi)$ соответственно.

Определение. Отображение $Q(t, s) \in C([0, T]^2, \cup_{m=0}^{\infty} \Psi_{\alpha, \beta}^m)$ будем называть решением интегрального уравнения (5), если

$$Q(t, s) - R_0(t, s) - \int_s^t R(t, \theta) Q(\theta, s) d\theta \in C_{1,2}(S^{-\infty}). \quad (9)$$

Решение уравнений (6), (7), (8) определяется аналогично.

Теорема 1. Предположим, что существуют постоянные K , M , C_0 такие, что с некоторыми p, m для любых α, β , с положительными постоянными $C_{\alpha, \beta}$, при всех $0 \leq s \leq t \leq T$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle \geq M$ выполнены неравенства

$$|D_t^\alpha D_x^\beta r(t, s, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha| + |\beta|} g(s, x, \xi), \quad (10)$$

$$|D_t^\alpha D_x^\beta r_0(t, s, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{p - |\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha| + |\beta|} g(s, x, \xi). \quad (11)$$

$$\int_0^T g(\tau, x, \xi) d\tau \leq K \ln \langle \xi \rangle, \quad g(s, x, \xi) \leq C_0 \langle \xi \rangle^m \quad (12)$$

Тогда существуют решения $Q(t, s)$, $V(t, s)$, $U(t, s)$, $G(t, s)$ интегральных уравнений (5), (6), (7), (8), с символами $q(t, s, x, \xi)$, $v(t, s, x, \xi)$, $u(t, s, x, \xi)$, $g(t, s, x, \xi)$ соответственно.

Причем эти символы — $d \times d$ -матрицы и при всех $0 \leq s \leq t \leq T$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $\langle \xi \rangle \geq M$ удовлетворяют неравенствам

$$|D_t^\alpha D_x^\beta q(t, s, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{K+m-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{2|\alpha| + |\beta| + 1}, \quad (13)$$

$$|D_t^\alpha D_x^\beta v(t, s, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{K+m-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{2|\alpha| + |\beta| + 1}, \quad (14)$$

$$|D_t^\alpha D_x^\beta u(t, s, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{K+m-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{2|\alpha| + |\beta| + 1}, \quad (15)$$

$$|D_t^\alpha D_x^\beta g(t, s, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{K+m-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{2|\alpha| + |\beta| + 1}, \quad (16)$$

и, следовательно, принадлежат классу $C_1([s, T], \cap_{0 \leq i \leq 1} S^{K+p+m+i}) \cap \cap_{0 \leq i \leq 1} C_1^1([s, T], \cap_{0 \leq i \leq 1} S^{K+p+2m+i})$.

Доказательство. Сначала докажем теорему для интегрального уравнения (5). Выберем собственные представители классов эк-

нивалентности $R(t, s)$, $R_0(t, s)$ и построим собственный оператор $Q(t, s)$. Решение будем искать в виде

$$q \sim q_0 + q_1 + q_2 + \dots \pmod{C_l^1(S^{-\infty})}, \quad (17)$$

где $q_k(t, s, x, \xi)$ — решение следующего интегрального уравнения

$$q_k(t, s, x, \xi) = r_k(t, s, x, \xi) + \int_s^t r(t, \theta, x, \xi) q_k(\theta, s, x, \xi) d\theta, \quad (18)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

где

$$r_k(t, s, x, \xi) = \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{|\alpha|=-l} \frac{1}{|\alpha|!} \int_s^t \partial_\xi^\alpha r(t, \theta, x, \xi) D_x^\alpha q_k(\theta, s, x, \xi) d\theta, \quad (19)$$

и $q_0(t, s, x, \xi)$ находится по следующей формуле:

$$q_0(t, s, x, \xi) = r_0(t, s, x, \xi) + \int_s^t w(t, \theta, x, \xi) r_0(\theta, s, x, \xi) d\theta, \quad (20)$$

$$w = \sum_{v=1}^{\infty} w_v, \quad w_1(t, s) = r(t, s), \quad w_{v+1}(t, s) = \int_s^t w_1(t, \theta) w_v(\theta, s) d\theta. \quad (21)$$

Лемма 1. Для любых α, β, v ($v = 1, 2, \dots$) имеют место неравенства

$$\|D_\xi^\alpha D_x^\beta w_v(t, s, x, \xi)\| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha|+|\beta|} \times$$

$$\times g(s, x, \xi) \frac{v^{|\alpha|+|\beta|}}{(v-1)!} \left\{ \int_s^t g(\tau) d\tau \right\}^{v-1}. \quad (22)$$

Существует $w(t, s)$ матричный ПДО с символом

$$w(t, s, x, \xi) = w_1(t, s, x, \xi) + w_2(t, s, x, \xi) + \dots$$

удовлетворяющим условиям

$$\|D_\xi^\alpha D_x^\beta w(t, s, x, \xi)\| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha|+|\beta|} g(s, x, \xi) \times$$

$$\times \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v^{|\alpha|+|\beta|}}{(v-1)!} \left\{ \int_s^t g(\tau) d\tau \right\}^{v-1}. \quad (23)$$

Лемма 2. Для любых α, β, k имеют место неравенства

$$\|D_\xi^\alpha D_x^\beta r_k(t, s, x, \xi)\| \leq C_{\alpha, \beta, k} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|-k} g(s, x, \xi) (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha|+|\beta|+2k} \times$$

$$\times \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v^{|\alpha|+|\beta|+2k-1}}{v!} \left\{ \int_s^t g(\tau) d\tau \right\}^v, \quad (24)$$

$$|D_t^\alpha D_x^\beta q_k(t, s, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, k} \langle \xi \rangle^{-k-|\alpha|-|\beta|} g(s, x, \xi) (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha|+|\beta|+2k} \times \\ \times \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(v+1)^{|\alpha|+|\beta|+2k}}{v!} \left\{ \int_0^t g(\tau) d\tau \right\}. \quad (25)$$

Из неравенств (25) и (12) получаем

$$|D_t^\alpha D_x^\beta q_k(t, s, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, k} \langle \xi \rangle^{K-k-|\alpha|-|\beta|} (\ln \langle \xi \rangle)^{2(|\alpha|+|\beta|+2k)+1} g(s, x, \xi) \quad (26)$$

равномерно по $0 \leq s \leq t \leq T$. Следовательно,

$$q_k \in C_1([s, T]; \bigcap_{0 \leq i \leq k} S^{K-k+i}).$$

Таким образом, существование решения уравнения (5) доказано.

Доказательство теоремы для уравнений (6), (7), (8) проводится аналогично. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения теоремы 1, тогда решения интегрального уравнения (5) и интегрального уравнения (6) единственны по модулю $C_1([s, T], \Psi^{-\infty})$.

Доказательство. Докажем единственность решения уравнения (5). Пусть $U(t, s)$ решение следующего интегрального уравнения

$$u(t, s) = f(t, s) + \int_0^t R(t, \theta) u(\theta, s) d\theta, \quad (27)$$

где $f(t, s) \in C([0, T]^2, \mathcal{S}')$. Определим оператор G по формуле

$$Gf(t, s) = \int_0^t V^*(t, t') f(t', s) dt', \quad (28)$$

где $V^*(t, t')$ решение следующего интегрального уравнения:

$$V^*(t, t') = I + P(t, t') + \int_0^t V^*(t, \theta) R(\theta, t') d\theta, \quad (29)$$

здесь I — тождественный оператор, $P(t, t')$ сглаживающий оператор, гладко зависящий от t, t' . Решение уравнения (29) существует согласно теореме 1. Из (27) получаем

$$Gf(t, s) = \int_0^t V^*(t, t') u(t', s) dt' = \int_0^t V^*(t, t') \int_0^t R(t', \theta) u(\theta, s) d\theta dt'.$$

Меняя порядок интегрирования во втором интеграле и учитывая (29), получаем

$$u(t, s) = \frac{\partial}{\partial t} (Gf(t, s)) - P(t, t)u(t, s) - \int_0^t \frac{\partial P(t, t')}{\partial t} u(t', s) dt'. \quad (30)$$

Теперь легко доказать единственность решения уравнения (5). Пусть $Q_1(t, s)$ и $Q_2(t, s)$ два решения этого уравнения, тогда подставляя в (30)

$$u(t, s) = (Q_1(t, s) - Q_2(t, s))u_0 \in C^1([s, T]; \mathcal{E}),$$

где $u_0 \in \mathcal{E}'(R^1)$, получаем $Q_1(t, s) - Q_2(t, s)$, которое является элементом пространства $C^1([s, T], \Psi^{-\infty})$.

Доказательство единственности решения уравнения (6) проводится аналогично. Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю К. А. Ягджяну за постановку задачи.

Межвузовский научный центр
по прикладным проблемам математики

Ա. Ա. ԴԱԼՍՅԱՆ

Փսևդոդիֆերենցիալ կորիզներով ինտեգրալ հավասարումների լուծումը

Աշխատանքում դիտարկվում են վոլտերայի տիպի հետևյալ ինտեգրալ հավասարումները՝

$$Q(t, s) = R_0(t, s) + \int_0^t R(t, \theta) Q(\theta, s) d\theta,$$

$$V(t, s) = R_0(t, s) + \int_0^t V(\theta, s) R(t, \theta) d\theta,$$

$$U(t, s) = R_0(t, s) + \int_0^t U(t, \theta) R(\theta, s) d\theta,$$

$$G(t, s) = R_0(t, s) + \int_0^t R(\theta, s) G(t, \theta) d\theta.$$

որտեղ $R_0(t, s)$, $R(t, s)$, $Q(t, s)$, $V(t, s)$, $U(t, s)$, $G(t, s)$ — փսևդոդիֆերենցիալ օպերատորներ են: Այդպիսի հավասարումների համար կառուցվում է հակադարձ օպերատոր, որի կորիզը ևս հանդիսանում է փսևդոդիֆերենցիալ օպերատոր, ապացուցվում է լուծման գոյությունը և միակությունը կորիզների սիմվոլների վրա դրված սահմանափակումների դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 К. А. Ягджян, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 21, № 4 (1986). 2 К. Taniguchi, Math. Japonica, v. 27, № 4 (1982). 3 Н. Tanabe, Hokkaido Math. J., v. 12 (1983). 4 Y. Fujita, Osaka J. Math, v. 27 (1990). 5 Ф. Трев, Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. I, Мир, М., 1984.

УДК 519.21

К. В. Гаспарян

Об асимптотическом поведении опциональных мартингалов

(Представлено академиком АН Армении Р. В. Амбарцумяном 10/III 1992)

В данной работе получены усиленные законы больших чисел (У. З. Б. Ч.) для одномерных и многомерных опциональных мартингалов. Приведены также законы повторного логарифма для одномерных опциональных мартингалов, распространяющие соответствующие результаты Д. Лепингя. Многомерный вариант У. З. Б. Ч. применяется для установления строгой состоятельности МНК—оценок параметров для линейной регрессионной модели, рассмотренной в регулярном случае А. А. Новиковым и А. В. Мельниковым ⁽¹⁻²⁾, а также А. Ле Бретоном и М. Мусейлой ⁽⁴⁾.

В отличие от работ ⁽³⁻⁶⁾, где аналогичные вопросы рассмотрены для регулярных (cadlag) мартингалов, заданных на стандартном стохастическом базисе, здесь рассматриваются опционально-измеримые (laglad) мартингалы (с траекториями, имеющими двусторонние пределы) на произвольном стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$. Необходимые понятия, используемые в работе, можно найти в ⁽⁷⁻⁹⁾.

Примем следующие обозначения:

$$\mathcal{F}_+ = (\mathcal{F}_{t+})_{t \geq 0},$$

где $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$; $\mathcal{P}, \mathcal{O}$ — алгебры предсказуемых и опциональных множеств, а также множества соответствующих d -мерных измеримых процессов и $d \times d$ -матрично-значных процессов ($d \geq 1$); $\mathcal{P}_s$ — множество строго предсказуемых d -мерных процессов и $d \times d$ -матрично-значных процессов $((a_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{P}_s$, если $(a_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{P}$ и $(a_{t+})_{t \geq 0} \in \mathcal{O}$); τ, τ_p и τ_+ — множества $\mathcal{F}$ -моментов остановки (м. о.), $\mathcal{F}$ -предсказуемых м. о. и $\mathcal{F}_+$ -м. о.; A_{loc}, V^+ и A_{loc}^+ — множества d -мерных процессов локально интегрируемой вариации, возрастающих и локально интегрируемых возрастающих процессов; $A(R^k, R^d)$ и $A^+(R^d)$ — множество матрично-значных процессов $A_t: R^k \rightarrow R^d$ ограниченной вариации и множество положительно определенных матрично-значных процессов

$A \in A(R^k, R^d)$ таких, что $A_t - A_s$ является положительно определенной матрицей для любых $t > s$; $M_{loc}(R^d)$ и $M_{loc}^2(R^d)$ — множества опциональных локальных и локально квадратично интегрируемых d -мерных мартингалов; $S(R^d)$ — множество d -мерных опциональных семимартингалов.

Для d -мерных опциональных процессов $X = (X_t)_{t \geq 0}$ условимся обозначать $(X \rightarrow)$ множество, где существует $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t(\omega) = X_\infty(\omega)$ по норме $\|\cdot\|$ пространства R^d и является конечной случайной величиной (с. в.).

Для множеств $A, B \in \mathcal{F}$ запись $A \equiv B$ п. н. или $A \subset B$ п. н. будет означать соответственно $P(A \Delta B) = 0$ или $P(A \cap (\Omega \setminus B)) = 0$, где Δ — знак симметрической разности множеств.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, F = (F_t)_{t \geq 0}, P)$ — некоторый стохастический базис, где $F = (F_t)_{t \geq 0}$ — произвольная фильтрация (неубывающий поток σ -алгебр: $F_s \subseteq F_t \subseteq \mathcal{F}$, $t \geq s \geq 0$).

Пусть $M = (M_t)_{t \geq 0} \in M_{loc}(R^1)$. Тогда имеет место единственное (с точностью до неотличимости) представление (см. (7)) $M = M^c + M^d$, где $M^c = M^c + M^d \in M_{loc}(R^1)$, $M^c \in M_{loc}(R^1)$ и M^d (M^g) $\in M_{loc}(R^1)$ — непрерывная и „чисто разрывная“ *càdlàg* (*càglàd*) составляющие для M .

Определим процессы $\Delta M_s = M_s - M_{s-}$, $\Delta^+ M_s = M_{s+} - M_s$, ($s \geq 0$)

$$[M, M]_t = \langle M^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} (\Delta M_s)^2 + \sum_{s \leq t} (\Delta^+ M_s)^2 \in V^+,$$

$$D_t = \langle M^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} (1 + |\Delta M_s|)^{-1} (\Delta M_s)^2 +$$

$$+ \sum_{s \leq t} (1 + |\Delta^+ M_s|)^{-1} (\Delta^+ M_s)^2 \in A_{loc}^+.$$

где $\langle M^c \rangle \in A_{loc}^+$ — квадратическая характеристика для $M^c \in M_{loc}(R^1)$.

Справедливы следующие результаты относительно множества сходимости опциональных локальных мартингалов (ср. (6)).

Теорема 1 (см. (10)). Пусть $M \in M_{loc}(R^1)$ ($\in M_{loc}^2(R^1)$). Тогда

а) $(\bar{D}_\infty < \infty) \subseteq (M \rightarrow) ((\langle M \rangle_\infty < \infty) \subseteq (M \rightarrow))$ п. н.;

б) если для всех $T \in \tau$ и $U \in \tau_+$ имеем $E|\Delta M_T|^2 I_{T < \infty} < \infty$ и $E|\Delta^+ M_U|^2 I_{U < \infty} < \infty$ ($E|\Delta M_T|^2 I_{T < \infty} < \infty$ и $E|\Delta^+ M_U|^2 I_{U < \infty} < \infty$), то

$$(\bar{D}_\infty < \infty) = ([M, M]_\infty < \infty) = (M \rightarrow) \text{ п. н.}$$

$$((\langle M \rangle_\infty < \infty) = ([M, M]_\infty < \infty) = (M \rightarrow)) \text{ п. н.,}$$

где $\bar{D} \in \mathcal{P}_+ \cap A_{loc}^+$ — компенсатор процесса $D \in A_{loc}^+$, $\langle M \rangle = \langle M^c \rangle + \langle M^g \rangle \in \mathcal{P}_+ \cap A_{loc}^+$ — квадратическая характеристика для $M \in M_{loc}^2(R^1)$.

1. Усиленные законы больших чисел

а) Одномерный случай.

Пусть $X = (X_t)_{t \geq 0} \in S(R^1)$ с разложением $X = X_0 + A + M$, где $X_0 \in F_0$, $A \in V$, $M \in M_{1\infty}(R^1)$ и $L = (L_t)_{t \geq 0} \in V^+ \cap P_+$.

Рассмотрим следующий процесс:

$$Y_t = \int_{[0, t]} (1 + L_s)^{-1} dX'_s + \int_{[0, t]} (1 + L_{s+})^{-1} dX''_s, \quad (1)$$

где

$$X = X' + X'', \quad X' = X_0 + A' + M', \quad X'' = A'' + M'',$$

$$A' = A + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta A_k, \quad A'' = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta^k A,$$

(относительно определений интегралов в (1) см. (9)).

При доказательстве У. З. Б. Ч. используется следующее обобщение известной леммы Кронека (см. (9)).

Лемма 1 (см. (10)). Для процессов $X \in S(R^1)$ и $L \in V^+ \cap P_+$ справедливо включение

$$(L_- = \infty) \cap (Y_t \rightarrow 0) \subseteq (L_t^{-1} X_t \rightarrow 0) \text{ п. н. } (t \rightarrow \infty).$$

Доказательство. Из (1) легко видеть, что

$$(1 + L_t) \cdot Y'_t + (1 + L_{t+}) \cdot Y''_t = X_t - X_0. \quad (2)$$

Применяя формулу интегрирования по частям (см. (9)), получим

$$(1 + L_t) Y_t = (1 + L_t) \cdot Y'_t + (1 + L_{t+}) \cdot Y''_t + Y_{t-} L'_t + Y_t L''_t.$$

Тогда из (2) заключаем, что

$$\begin{aligned} (1 + L_t)^{-1} X_t &= (1 + L_t)^{-1} (X_0 + Y_t) + \\ &+ (1 + L_t)^{-1} (L_t Y_t - Y_{t-} L'_t - Y_t L''_t). \end{aligned}$$

Ввиду того, что на множестве $(L_- = \infty) \cap (Y_t \rightarrow 0)$ имеем $\sup_{t \geq 0} |Y_t| < \infty$,

$(1 + L_t)^{-1} (X_0 + Y_t) \rightarrow 0$ п. н. при $t \rightarrow \infty$.

С другой стороны, имеем для $u < t$, $0 < t$

$$\begin{aligned} & (1 + L_t)^{-1} \left| L_t Y_t - \int_{[0, t]} Y_{s-} dL'_s - \int_{[0, t]} Y_s dL''_{s+} \right| \leq \\ & \leq (1 + L_t)^{-1} \left(\int_{[0, u]} |Y_t - Y_{s-}| dL'_s + \int_{[u, t]} (|Y_{s-} - Y_t| + |Y_{s-} - Y_{s-}|) dL'_s + \right. \\ & \quad \left. + \int_{[0, u]} |Y_t - Y_s| dL''_{s+} + \int_{[u, t]} (|Y_{s-} - Y_t| + |Y_{s-} - Y_s|) dL''_{s+} \right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq 2 \sup_{t \in [0, \infty)} |Y_t| (1 + L_t)^{-1} (L_t^+ + L_t^-) + |Y_\infty - Y_0| +$$

$$+ (1 + L_t)^{-1} \int_{[0, t]} |Y_\infty - Y_{t-}| dL_t^+ + (1 + L_t)^{-1} \int_{[0, t]} |Y_\infty - Y_t| dL_t^-. \quad (3)$$

Отсюда на множестве $(L_\infty = \infty) \cap (Y \rightarrow)$ для достаточно больших t выбором соответствующих n и σ правую часть в неравенстве (3) можно сделать сколь угодно малой.

Теорема 2 (см. (10)). Пусть $L \in V^+ \cap P_+$ и $L_\infty = \infty$ п. н. Тогда

$$L_t^{-1} X_t \rightarrow 0 \text{ п. н. при } t \rightarrow \infty \text{ если:}$$

- а) для $X \in M_{loc}^2(R^1)$ имеем $\langle Y \rangle_\infty < \infty$ п. н.;
- б) для $X \in M_{loc}(R^1)$ имеем $|Y, Y|_\infty < \infty$ п. н. и $E|\Delta X_T|/I_{T,\infty} < \infty$, $E|\Delta^+ X_U|/I_{U,\infty} < \infty$ для всех $T \in \tau$ и $U \in \tau_+$;
- с) для $X \in S(R^1)$ имеем

$$\text{Var } B'_\infty + \text{Var } B''_\infty + \bar{D}_\infty < \infty \text{ п. н.} \quad (4)$$

где $Y = Y_0 + B + N \in S(R^1)$ ($B = B' + B'' \in V$, $N \in M_{loc}(R^1)$) процесс из (1), $\text{Var } B_\infty$ — вариация процесса B на $[0, \infty]$.

Доказательство. а) Утверждение непосредственно следует из теоремы 1а и леммы 1; б) так как процесс $Y \in M_{loc}(R^1)$ и для всех $T \in \tau$ и $U \in \tau_+$ имеем

$$E|\Delta Y_T|/I_{T,\infty} \leq E(1 + L_T)^{-1} |\Delta X_T|/I_{T,\infty} \leq E|\Delta X_T|/I_{T,\infty} < \infty,$$

$$E|\Delta^+ Y_U|/I_{U,\infty} \leq E(1 + L_{U+})^{-1} |\Delta^+ X_U|/I_{U,\infty} \leq E|\Delta^+ X_U|/I_{U,\infty} < \infty,$$

то утверждение следует из теоремы 1б и леммы 1; с) пусть $X \in S(R^1)$ с разложением $X = X_0 + (A' + M') + (A'' + M'')$, где $A', A'' \in V$, $M' = M^+ + M^-$, $M^\pm \in M_{loc}(R^1)$. Запишем процесс Y из (1) в виде $Y = Y_0 + B + N$, где $B = B' + B'' \in V$, $N \in M_{loc}(R^1)$ и $B' = (1 + L)^{-1} \cdot A'$, $B'' = (1 + L_+)^{-1} \cdot A''$, $N = (1 + L)^{-1} \cdot M' + (1 + L_-)^{-1} \cdot M''$. Из условия (4) следует, что $P(B' \rightarrow) = 1$, $P(B'' \rightarrow) = 1$, т. е. $P(B \rightarrow) = 1$.

С другой стороны, так как $\bar{D}_\infty < \infty$, то из теоремы 1а) следует, что $P(N \rightarrow) = 1$. Таким образом, имеем $P(Y \rightarrow) = 1$ и утверждение с) следует из леммы 1.

Из теоремы 2 выводится следующий вариант леммы Бореля — Кантелли (ср. (2)).

Лемма 2 (см. (10)). Пусть $A = A' + A'' \in A_{loc}^+$ и выполняются условия

$$\tilde{A}'_\infty = \infty, \tilde{A}''_\infty = \infty \text{ п. н. и } E \sup_{t \geq 0} \Delta A_t < \infty, E \sup_{t \geq 0} \Delta^+ A_t < \infty. \quad (5)$$

Тогда

$$\bar{A}_t^{-1} A_t \rightarrow 1 \text{ п. н. при } t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Ввиду того, что $X = A - \bar{A} \in M_{\text{loc}}(R^1)$, достаточно доказать, что $\bar{A}_t^{-1} X_t \rightarrow 0$ п. н. при $t \rightarrow \infty$. Согласно теореме 2 для этого нужно показать, что :

а) $E|\Delta X_T|/I_{T-} < \infty$, $E|\Delta^+ X_U|/I_{U-} < \infty$ для любых $T \in \tau$ и $U \in \tau_+$;

б) $(1 + \bar{A})^{-2} \cdot [X', X']_- + (1 + \bar{A}_+)^{-2} \cdot [X^g, X^g]_- < \infty$ п. н.

Условие а) следует из неравенств:

$$|\Delta X| \leq \Delta A + \Delta \bar{A}, \quad |\Delta^+ X| \leq \Delta^+ A + \Delta^+ \bar{A} \text{ и}$$

$$E\Delta \bar{A}_T/I_{T-} \leq E \sup_{t \geq 0} \Delta A_t < \infty, \quad E\Delta^+ \bar{A}_U/I_{U-} \leq E \sup_{t \geq 0} \Delta^+ A_t < \infty$$

для любых $T \in \tau$ и $U \in \tau_+$, поскольку множества $(\Delta \bar{A} > 0) \in \mathcal{P}$ и $(\Delta^+ \bar{A} > 0) \in \mathcal{O}$ исчерпываются последовательностями соответственно F -предсказуемых м. о. и F -м. о. (см. (7)). Условие б) также легко получить, учитывая (5) и очевидные неравенства: $(1 + \bar{A}) \cdot A' \leq 1$ и $(1 + \bar{A}_+) \cdot A^g \leq 1$ (ср. (6)).

в) Многомерный случай (У. З. Б. 4)

Для $M = (M^1, \dots, M^d)^* \in M_{\text{loc}}^2(R^d)$ положим (см. (7))

$$Q' = (d \langle M^{lr}, M^{lr} \rangle / d \langle M' \rangle)_{l,j \leq d},$$

$$Q^g = (d \langle M^{lg}, M^{lg} \rangle / d \langle M^g \rangle)_{l,j \leq d}, \quad Q' \in \mathcal{P}, \quad Q^g \in \mathcal{P}_s,$$

где $M^l = M^{lr} + M^{lg}$, $\langle M' \rangle = \text{tr}(\langle M^{lr}, M^{lr} \rangle)_{l,j \leq d}$,

$\langle M^g \rangle = \text{tr}(\langle M^{lg}, M^{lg} \rangle)_{l,j \leq d}$, $\text{tr} A$ — след матрицы A .

Пусть $L = (l_{ij}^{l,j})_{l,j \leq d} \in A^+(R^d) \cap \mathcal{P}_s$, $L_+ = (l_{ij+}^{l,j})_{l,j \leq d} \in A^+(R^d)$, так что

$$\int_{[0, t)} \text{tr} L_s^{-1} Q'_s (L_s^{-1})^* d \langle M' \rangle_s < \infty,$$

$$\int_{[0, t)} \text{tr} L_{s+}^{-1} Q_{s+}^g (L_{s+}^{-1})^* d \langle M^g \rangle_{s+} < \infty,$$

где $(L^{-1})^*$ — транспонированная матрица.

Тогда определен процесс

$$Y_t = \int_{[0, t]} L_s^{-1} dM_s^r + \int_{[0, t]} L_{s+}^{-1} dM_{s+}^g \in M_{\text{loc}}^2(R^d) \quad (\text{ср. (7)}).$$

Имеет место матричный аналог леммы Кронекера (ср. (2)).

Лемма 3. Пусть $M \in M_{\text{loc}}^2(R^d)$, $L \in A^+(R^d) \cap P_1$, $L_+ \in A^+(R^d)$.

Тогда

$$(\lambda_{\min}(L_t) \rightarrow \infty) \cap (\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \lambda_{\min}^{-1}(L_t) \lambda_{\max}(L_t') < \infty) \cap (\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \lambda_{\min}^{-1}(L_t) \lambda_{\max}(L_t'') < \infty) \cap \\ \cap (Y_t \rightarrow) \subseteq (\|L_t^{-1} M_t\| \rightarrow 0) \text{ п. н.},$$

где $\lambda_{\min}(L_t)$ и $\lambda_{\max}(L_t)$ — минимальное и максимальное собственные значения матрицы L_t .

Доказательство. Нетрудно видеть, что $M_t = \int_{[0, t]} L_s dY_s^r + \int_{[0, t]} L_{s+} dY_{s+}^g$ с точностью до неотличимости.

Далее, применяя формулу интегрирования по частям (см. (9)), получим

$$L_t Y_t = \int_{[0, t]} L_s dY_s^r + \int_{[0, t]} L_{s+} dY_{s+}^g + \int_{[0, t]} dL_s^r Y_{s-} + \int_{[0, t]} dL_{s+}^g Y_s.$$

Откуда имеем

$$L_t^{-1} M_t = L_t^{-1} \int_{[0, t]} dL_s^r (Y_t - Y_{s-}) + L_t^{-1} \int_{[0, t]} dL_{s+}^g (Y_t - Y_s).$$

Учитывая теперь условия леммы, получим для $u < t$, $v < t$ (ср. (3))

$$\|L_t^{-1} M_t\| \leq \lambda_{\min}^{-1}(L_t) \left\| \int_{[0, t]} dL_s^r (Y_t - Y_{s-}) \right\| + \\ + \lambda_{\min}^{-1}(L_t) \left\| \int_{[0, t]} dL_{s+}^g (Y_t - Y_s) \right\| \leq 2d \lambda_{\min}^{-1}(L_t) \sup_{s \geq 0} \|Y_s\| (\lambda_{\max}(L_u^r) + \\ + \lambda_{\max}(L_v^g)) + d \lambda_{\min}^{-1}(L_t) \|Y_- - Y_t\| (\lambda_{\max}(L_t^r) + \lambda_{\max}(L_t^g)) + \\ + \lambda_{\min}^{-1}(L_t) \left(\left\| \int_{[u, t]} dL_s^r (Y_- - Y_{s-}) \right\| + \left\| \int_{[v, t]} dL_{s+}^g (Y_- - Y_s) \right\| \right). \quad (6)$$

Для достаточно больших t выбором соответствующих значений u и v правую часть в (6) можно сделать произвольно малой.

Отсюда получим следующий вид У. З. Б. Ч. для d -мерных мартингалов.

Теорема 3 (ср. (1)). Пусть $M \in M_{\text{loc}}^2(R^d)$, $L \in A^+(R^d) \cap P_s$, $L_+ \in A^+(R^d)$ и имеют место условия: (п. н.)

$$1) \lambda_{\min}(L_t) \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow \infty;$$

$$2) \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \lambda_{\min}^{-1}(L_t) \lambda_{\max}(L_t) < \infty, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \lambda_{\min}^{-1}(L_t) \lambda_{\max}(L_t^g) < \infty;$$

$$3) \text{tr} L^{-1} Q'(L^{-1})^* \cdot \langle M' \rangle_- < \infty, \quad \text{tr} L_+^{-1} Q_+^g(L_+^{-1})^* \cdot \langle M^g \rangle_- < \infty.$$

Тогда $\|L_t^{-1} M_t\| \rightarrow 0$ п. н. при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Из условий 3) следует, что $\langle Y \rangle_- < \infty$ п. н.. Тогда согласно теореме 1 имеем $\|Y_t - Y_- \| \rightarrow 0$ п. н. и по лемме 3 получим $\|L_t^{-1} M_t\| \rightarrow 0$ п. н.

Приведем простое применение У. З. Б. Ч. для следующей регрессионной модели (ср. (1-4)):

Пусть наблюдается процесс

$$X_t = A_t \theta + M_t, \quad t \geq 0,$$

где $M = M' + M^g \in M_{\text{loc}}^2(R^d)$, $A = A' + A^g \in A(R^k, R^d) \cap P_s$, $\theta \in R^k$ — неизвестный параметр. Пусть существует процесс $V = V' + V^g \in P_s \cap A^+(R^1)$ такой, что $dA'_t/dV'_t = \alpha_t$, $dA^g_{t+}/dV^g_{t+} = \beta_t$, $\alpha \in A(R^k, R^d) \cap P_s$, $\beta \in A(R^k, R^d) \cap O$, определены процессы:

$$N_t = \int_{[0, t]} \alpha_s dM'_s + \int_{[0, t]} \beta_s dM^g_{s+} \in M_{\text{loc}}^2(R^d).$$

$$L_t = \int_{[0, t]} \alpha_s^* \alpha_s dV'_s + \int_{[0, t]} \beta_s^* \beta_s dV^g_{s+} \in A^+(R^k) \cap P_s, \quad L_{t+} \in A^+(R^k),$$

$$Q' = (d \langle N'^r, N'^r \rangle / dV')_{r, j \leq d}, \quad Q^g = (d \langle N'^g, N'^g \rangle / dV^g)_{r, j \leq d}.$$

$$d \langle N' \rangle / dV' \leq \xi^1 < \infty \text{ п. н.}, \quad d \langle N^g \rangle_+ / dV^g_+ \leq \xi^2 < \infty \text{ п. н.}$$

Теорема 4 (ср. (2)). Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы 3 и следующее условие:

$$3') \text{tr} L^{-1} Q'(L^{-1})^* \cdot V'_- < \infty, \quad \text{tr} L_+^{-1} Q_+^g(L_+^{-1})^* \cdot V^g_- < \infty \text{ п. н.}$$

Тогда МНК-оценка $\hat{\theta}_T = L_T^{-1} \left(\int_{[0, T]} \alpha_s dX'_s + \int_{[0, T]} \beta_s dX^g_{s+} \right)$ строго состоятельна ($T > 0$).

Доказательство. Легко видеть, что $\theta_T = \theta + L_T^{-1} N_T$. Тогда из теоремы 3 имеем $\|\theta_T - \theta\| \rightarrow 0$ п. н. при $T \rightarrow \infty$.

2. Законы повторного логарифма

Теорема 5 (ср. (5)). Пусть $M \in M'_{loc}(R^1)$ и $E \sup_{t>0} |\Delta M_t| < \infty$, $E \sup_{t>0} |\Delta^+ M_t| < \infty$. Тогда при условии $\langle M \rangle_\infty = \infty$ п. н. имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_t (2 \langle M \rangle_t, \ln \ln \langle M \rangle_t)^{-1/2} < 1 \text{ п. н.}$$

Теорема 6 (ср. (6)). Пусть $M \in M_{loc}(R^1)$. Если $E \sup_{t>0} |\Delta M_t| < \infty$, $E \sup_{t>0} |\Delta^+ M_t| < \infty$, то при условии $[M, M]_\infty = \infty$ п. н. имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_t (2 [M, M]_t, \ln \ln [M, M]_t)^{-1/2} \leq 1 \text{ п. н.}$$

Доказательства этих теорем с соответствующими модификациями проводятся по той же схеме, что и в работе (5).

Ереванский государственный университет

Կ. Վ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

Օպցիոնալ մարտինգալների ասիմպտոտիկ վարքի մասին

Հոդվածում ստացված են մեծ թվերի ուժեղացված օրենքները միաչափ և բազմաչափ օպցիոնալ մարտինգալների համար: Բերված են նաև կրկր-նակի լոգարիթմի օրենքները միաչափ օպցիոնալ մարտինգալների համար: Որպես օրինակ ապացուցված է անհայտ պատրամետրի գնահատականի խիստ ունակալիուսությունը գծային բազմաչափ ռեգրեսիոն մոդելի համար:

Բոլոր պրոցեսները դիտարկվում են կամայական ստոխաստիկ բազիսի վրա և ենթադրվում են ոչ ռեգուլյար (երկկողմանի սահմաններ ունեցող հետադժեբրով):

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ A. A. Novikov, Statistics and Control of Stochastic Processes, Springer, Berlin etc., 1985.
- ² A. B. Мельников, ДАН СССР, т. 286, № 3 (1986).
- ³ A. V. Melnikov, A. A. Novikov, Probab. Theory and Math. Stat., v. 2—Utrecht, VSP BV/Vilnius: Mokslas, 1990.
- ⁴ A. Le Breton, M. Musiela, Probab. Theory and Related Fields, v. 81, № 2 (1989).
- ⁵ D. Lepingle, Lecture Notes Math., v. 649, Springer, Berlin etc., 1977.
- ⁶ P. III. Липцер, А. Н. Ширяев, Теория мартингалов, Наука, М., 1986.
- ⁷ Л. И. Гальчук, Мат. сб., т. 112 (154), № 4 (8) (1980).
- ⁸ Л. И. Гальчук, Теория вероятн. и ее примен., т. 29, № 1 (1984).
- ⁹ К. В. Гаспарян, Канд. дис., Ереван, 1980.
- ¹⁰ K. V. Gasparian, Fifth Intern. Vilnius Conf. on Probab. Theory and Math. St., Abstr., Vilnius, 1989.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 529.3.01

С. М. Мхитарян

О спектральных соотношениях для интегральных операторов
с логарифмическими ядрами, встречающихся в контактных
и смешанных задачах теории упругости

(Представлено чл.-корр. АН Армении Б. Л. Абрамяном 15/XI 1991)

Многие контактные и смешанные задачи теории упругости и теории вязкоупругости сводятся к интегральным или интегро-дифференциальным уравнениям с логарифмическими ядрами (1-3). Их решения часто проще и эффективнее построить при помощи спектральных соотношений для соответствующих интегральных операторов, чем другими методами. Обширный класс спектральных соотношений в ортогональных многочленах для интегральных операторов, встречающихся в разнообразных областях механики деформируемого тела и математической физики, приведен в (4,5). Кроме того, такие соотношения получены в (6), а также в работах (7-11).

В настоящей статье методами теории логарифмического потенциала устанавливаются спектральные и родственные с ними соотношения для интегральных операторов, порожденных логарифмическими ядрами, которые играют важную роль в контактных и смешанных задачах механики деформируемого тела и в смежных отраслях математической физики.

1. Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$\int_L \ln \frac{1}{|x-u|} \varphi(u) du = f(x) \quad (1.1)$$

при условии

$$\int_L \varphi(x) dx = P < \infty, \quad (1.2)$$

где $\varphi(x) \in L^1_+(L)$ ($\varphi(x) > 0$), $f(x) \in L^1(L)$, L — отрезок или совокупность отрезков горизонтальной оси Ox плоскости, отнесенной к правой прямоугольной декартовой системе координат Oxy . При помощи логарифмического потенциала простого слоя

$$U(x, y) = \int \ln \frac{1}{V(x-u)^2 + y^2} \varphi(u) du \quad (1.3)$$

решение уравнения (1.1) при условии (1.2) можно свести к решению следующей внешней краевой задачи (1):

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 \quad ((x, y) \in \Pi \setminus L, \quad \Pi = \{r > 0\}); \\ U(x, y)|_{y=0} &= f(x) \quad (x \in L); \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$U(x, y) \simeq P \ln \frac{1}{r} \quad (r \rightarrow \infty, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}).$$

После решения краевой задачи (1.4) плотность источников — решение уравнения (1.1) определится по известной формуле

$$-\pi \gamma(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{sgn} y \frac{\partial U}{\partial y} \quad (x \in L). \quad (1.5)$$

Чтобы иметь дело с регулярной на бесконечности внешней краевой задачей, от функции $U(x, y)$ перейдем к функции (1)

$$V(x, y) = U(x, y) - P \ln \frac{1}{r} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}). \quad (1.6)$$

Тогда вместо (1.4) будем иметь следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \Delta V &= 0 \quad ((x, y) \in \Pi \setminus L); \\ V(x, y)|_{y=0} &= f(x) - P \ln \frac{1}{|x|} \quad (x \in L); \\ V(x, y) &\rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty); \end{aligned} \quad (1.7)$$

а вместо (1.5) — формулу

$$-\pi \varphi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \operatorname{sgn} y \left[\frac{\partial V}{\partial y} - \pi P \delta(x) \right] \right\} \quad (x \in L), \quad (1.8)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Далее конкретно рассмотрим два случая, когда

$$1) L = \{y = 0; |x| \leq a\}; \quad 2) L = \{y = 0; |x| \geq a\}.$$

Сначала рассмотрим случай конечного отрезка L , т. е. первый случай. Как в (1), комплексную плоскость $z = x + iy$ с разрезом вдоль L при помощи функции Жуковского

$$z = \frac{a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad \zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta}, \quad (1.9)$$

отобразим на единичный круг $\rho < 1$ плоскости ζ , причем будем иметь

$$\begin{aligned}x &= \frac{a\xi}{2} \left(1 + \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}\right) = \frac{a}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos \vartheta, \\y &= \frac{a\eta}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}\right) = \frac{a}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \sin \vartheta.\end{aligned}\quad (1.10)$$

При указанном отображении верхний и нижний берега разреза L переходят, соответственно, в нижнюю и верхнюю полуокружности $\rho=1$, а точка $z=\infty$ переходит в точку $\xi=0$. Исходя из последнего, при помощи (1.10) находим

$$\frac{1}{r} = \frac{2\rho}{a} (\rho^4 + 2\rho^2 \cos 2\vartheta + 1)^{-1/2},$$

откуда вытекает, что $1/r \simeq 2\rho/a$ ($\rho \rightarrow 0$). Поэтому, предполагая, что как обычно, плотность источников логарифмического потенциала (1.3) обладает конечной мощностью, т. е. имеет место условие (1.2), в соответствии с (1.6) введем в рассмотрение функцию

$$W(\rho, \vartheta) = U_0(\rho, \vartheta) - P \ln \left(\frac{2\rho}{a}\right), \quad (1.11)$$

$$U_0(\rho, \vartheta) = U\left(\frac{a}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos \vartheta, \frac{a}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \sin \vartheta\right).$$

Тогда краевая задача (1.7) преобразуется в следующую задачу Дирихле для единичного круга:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} &= 0 \quad (\rho < 1, -\pi < \vartheta \leq \pi); \\ W(0, \vartheta) &= 0; \quad W(1, \vartheta) = f_0(\vartheta) - P \ln \frac{2}{a}; \quad f_0(\vartheta) = f(a \cos \vartheta).\end{aligned}\quad (1.12)$$

При этом формула (1.5) с учетом (1.11) перейдет в формулу ($x = a \cos \vartheta$ $-\pi < \vartheta \leq \pi$)

$$\varphi(x) = \left(\pi a |\sin \vartheta|^{-1} \left| P + \frac{\partial W(\rho, \vartheta)}{\partial \rho} \right| \right)_{\rho=1}. \quad (1.13)$$

Решение краевой задачи (1.12), построенное в (1) методом разделения переменных, имеет вид ($n=1, 2, \dots$)

$$W(\rho, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \cos n\vartheta \quad (-\pi < \vartheta \leq \pi),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta, \quad P = \left(2\pi \ln \frac{2}{a}\right)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\vartheta) d\vartheta.$$

Рассмотрим одну гармонику $W_n(\rho, \vartheta) = \rho^n \cos n\vartheta$ ($n=1, 2, \dots$) полученного потенциала, а также его нулевую гармонику $W_0(\rho, \vartheta) \equiv 0$.

Вычислив по формуле (1.13) соответствующую плотность источников, находим

$$\varphi(a \cos \vartheta) = \begin{cases} n \cos n\vartheta (\pi a \sin \vartheta)^{-1} & (n = 1, 2, \dots) \\ \rho (\pi a \sin \vartheta)^{-1} & (n = 0; 0 < \vartheta < \pi). \end{cases} \quad (1.14)$$

Учитывая (1.11), выражения указанной гармоникки при $\rho=1$ и соответствующей ей плотности источников из (1.14) подставим в (1.3). В результате придем к следующим спектральным соотношениям ($T_n(x)$ — многочлены Чебышева первого рода):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-u|} \frac{T_n(u/a) du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \begin{cases} n^{-1} T_n(x/a) & (n = 1, 2, \dots); \\ \ln(2/a) & (n = 0, |x| < a); \end{cases} \quad (1.15)$$

полученным в (1.2) другим методом.

Чтобы получить родственные с (1.15) соотношения, дающие выражения интегралов на лучах $|x| > a$, заметим, что согласно (1.10) лучу $x > a$ соответствует значение $\vartheta = 0$, а лучу $x < -a$ — значение $\vartheta = \pi$; следовательно

$$|x| = \frac{a}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \quad (0 < \rho < 1).$$

откуда

$$\rho = (|x| - \sqrt{x^2 - a^2})/a \quad (|x| \geq a). \quad (1.16)$$

Подставляя в (1.3) значения указанной гармоникки потенциала при $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$ и выражение $\varphi(x)$ из (1.14), с учетом (1.11) и (1.16) получим следующие интегральные соотношения ($H(x)$ — функция Хевисайда, $n = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-u|} \frac{T_n(u/a) du}{\sqrt{a^2-u^2}} &= \\ &= \frac{1}{n} [H(x) + (-1)^n H(-x)] [(|x| - \sqrt{x^2 - a^2})/a]^n; \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-u|} \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \ln [2(|x| - \sqrt{x^2 - a^2})/a^2] \quad (|x| > a).$$

Соотношения (1.15) и (1.17) после дифференцирования их обеих частей по переменной x переходят в соответствующие интегральные соотношения с ядром Коши.

2 Обращаясь ко второму случаю, решение краевой задачи (1.7), как выше, опять построим методом разделения переменных, для чего опять воспользуемся конформным отображением (1.9). При помощи (1.9) плоскость $z = x + iy$ с исключенными лучами $|x| \geq a$ вещественной оси отобразится на верхнюю полуплоскость $\eta > 0$, причем

полуплоскость $y > 0$ отобразится на полукольцо $\{ \rho > 1, 0 < \theta < \pi \}$, а полуплоскость $y < 0$ — на полукруг $\{ \rho < 1, 0 < \theta < \pi \}$ плоскости ξ . Отметим, что верхнему берегу разреза L по лучу $x > a$ ($x < -a$) соответствует луч $\xi > 1$ ($\xi < -1$), а нижнему берегу разреза L по лучу $x > a$ ($x < -a$) интервал $0 < \xi < 1$ ($-1 < \xi < 0$).

Краевая задача (1.7), сформулированная в координатах ξ, η для полуплоскости $\eta > 0$, обладает нормальным решением вида

$$V_0(\xi, \eta) = e^{-\lambda\eta} \begin{cases} \cos(\lambda\xi) \\ \sin(\xi) \end{cases} \quad (\lambda > 0, \quad -\infty < \xi < \infty, \quad \eta > 0); \quad (2.1)$$

$$V_0(\xi, \eta) = V\left(\frac{a\xi}{2}\left(1 + \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}\right), \frac{a\eta}{2}\left(1 - \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}\right)\right).$$

Соответствующую потенциалу (2.1) плотность источников можно вычислить по формуле (1.8), если при ее преобразовании, как выше, учесть, что в данном случае согласно (1.10)

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{2}{a} \frac{\xi^2}{|\xi^2 - 1|} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial V_0}{\partial \eta} \quad \left(x = \frac{a}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)\right).$$

Далее, приняв во внимание (1.3), (1.6) и поступив совершенно аналогично изложенному выше, придем к следующим четырем спектральным соотношениям:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty} \right) \ln \frac{|x|}{|x-u|} w_{\pm}(u) \begin{cases} \cos(\lambda \rho_{\pm}(u)) \\ \operatorname{sgn} u \sin(\lambda \rho_{\pm}(u)) \end{cases} du = \\ = \frac{a}{\lambda} \begin{cases} \cos(\lambda \rho_{\pm}(x)) \\ \operatorname{sgn} x \sin(\lambda \rho_{\pm}(x)) \end{cases}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$w_{\pm}(x) = \frac{|x| \pm \sqrt{x^2 - a^2}}{2\sqrt{x^2 - a^2}}; \quad \rho_{\pm}(x) = \frac{|x| \pm \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

$$(\lambda > 0, \quad |x| > a).$$

Ими даются обобщенные собственные функции интегрального оператора

$$K\varphi = \frac{2}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty} \right) \ln \left| \frac{x}{x-u} \right| \varphi(u) du.$$

Так как интервалу $L' = \{y = 0: -a < x < a\}$ соответствует полуокружность $\{ \rho = 1, 0 < \theta < \pi \}$ плоскости ξ , то родственные с (2.2) интегральные соотношения имеют вид ($|x| < a, \lambda > 0$)

$$\frac{2}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty} \right) \ln \left| \frac{x}{x-u} \right| \tilde{w}_{\pm}(u) \begin{cases} \cos(i\rho_{\pm}(u)) \\ \operatorname{sgn} u \sin(i\rho_{\pm}(u)) \end{cases} du =$$

$$= \frac{a}{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{a} \sqrt{u^2 - x^2}} \begin{cases} \cos(\lambda x/a); \\ \sin(\lambda x/a). \end{cases}$$

Отметим, что указанный интегральный оператор K согласно (2.2) обладает двукратным сплошным спектром.

Спектральные соотношения (2.2) можно записать в более компактной форме, если в них от косинусов и синусов перейти к экспоненциальной функции. Эти соотношения можно преобразовать также на полубесконечном интервале (a, ∞) . А именно, будем иметь

$$\frac{1}{\pi} \int_a^{\infty} \ln \frac{x^2}{|x^2 - u^2|} \tilde{w}_{\pm}(u) \cos(\tilde{\rho}_{\pm}(u)) du = \frac{a}{\lambda} \cos(\tilde{\rho}_{\pm}(x)); \quad (2.3)$$

$$(x > 0, \quad x > a)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_a^{\infty} \ln \frac{x+u}{|x-u|} \tilde{w}_{\pm}(u) \sin(\tilde{\rho}_{\pm}(u)) du = \frac{a}{\lambda} \sin(\tilde{\rho}_{\pm}(x));$$

$$(2.4)$$

$$\tilde{w}_{\pm}(x) = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - a^2}}{2 \sqrt{x^2 - a^2}}; \quad \tilde{\rho}_{\pm}(x) = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \quad (x > a).$$

Дифференцирование обеих частей (2.2)–(2.4) по переменной x приводит к соотношениям, содержащим ядро Коши и аналогичные ядра.

Заметим, что при помощи замены переменных $x = ae^{\tau/2}$, $u = ae^{\eta/2}$ ($0 < \tau, \eta < \infty$) из (2.4) можно получить новые спектральные соотношения для ядра $\ln \left| \operatorname{ctg} \frac{\tau - \eta}{4} \right|$ на полубесконечном интервале.

В заключение отметим, что формулы разложения произвольной функции по обобщенным собственным функциям, дающимся спектральными соотношениями (2.)–(2.4), можно получить из соответствующих формул разложения этой функции в интеграл Фурье.

Институт механики
Академии наук Армении

Ս. Մ. ՄԵՐԲԱՐՅԱՆ

Առաձգականության տեսության կոնտակտային և խառը խնդիրներում
հանդիպող լոգարիթմական կորիզներով ինտեգրալ օպերատորների
համար սպեկտրալ առնչությունների մասին

Աշխատանքում լոգարիթմական պոտենցիալի մեթոդների օգնությամբ
ստացված է առաձգականության տեսության, ինչպես նաև առաձգամածու-

ցիկլոթյան տեսության, կոնտակտային և խտոր եզրային խնդիրներում հաճախ հանդիպող լոգարիթմական կորիզներով ծնվող ինտեգրալ օպերատորների համար սպեկտրալ և ազգակից ինտեգրալ առնչությունների մի դաս։ Այդ առնչությունները վերջավոր ինտեգրալի դեպքում պարունակում են Չեբիշևի առաջին սեռի օրթոգոնալ բազմանդամներ, իսկ երկու միատեսակ և կոորդինատների սկզբնականի նկատմամբ համաչափ դասավորված կիսաանվերջ ինտեգրալների դեպքում — փոփոխված արգումենտով հոանկյունաչափական սինուս և կոսինուս ֆունկցիաներ։ Ստացված առնչությունները, որոնք ներկայացնում են ինքնուրույն մաթեմատիկական հետաքրքրություն, հնարավորություն են տալիս կառուցելու կոնտակտային և խտոր խնդիրների բավականին լայն դասի որոշիչ ինտեգրալ և ինտեգրալ-դիֆերենցիալ հավասարումների պարզ և արդյունավետ լուծումները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 Н. Я. Штасерман, Контактная задача теории упругости, Гостехтеориздат, М — Л, 1949. 2 Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976. 3 В. В. Пачасюх, М. П. Саврук, А. П. Дацынин, Распределение напряжений около трещины в пластинках и оболочках. Наукова думка, Киев, 1976. 4 Г. Я. Полов, Контактные задачи для линейно-деформируемого основания, Высшая школа, Киев-Одесса, 1982. 5 Г. Я. Полов, Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкрепления, Наука, М., 1982. 6 В. М. Александров, В. А. Кучеров, ПММ, т. 34, вып. 4, с. 643—652 (1970). 7 С. М. Мхитарян, Изв. АН Арм. ССР. Механика, т. 35, № 6, с. 3—18 (1982). 8 С. М. Мхитарян, Изв. АН СССР, МТТ, № 1, с. 63—72 (1983). 9 С. М. Мхитарян, ПММ, т. 47, вып. 2, с. 219—227 (1983). 10 С. М. Мхитарян, ПММ, т. 48, вып. 1, с. 105—113 (1984). 11 С. М. Мхитарян, ПММ, т. 48, вып. 5, с. 845—853 (1984). 12 Г. Я. Полов, ПММ, т. 27, вып. 5, с. 821—832 (1963).

БИОХИМИЯ

УДК 579.852.14

А. З. Пелоян, А. А. Арутюнян, Ж. А. Кцоян,
член-корреспондент АН Армянской К. Г. Карагезян

Об особенностях процесса перекисеобразования липидов клеток
Salmonella derby

(Представлено 12/XI 1991)

Открытие у бактериальных клеток внехромосомных элементов наследственности оказалось чрезвычайно важным для дальнейшей разработки эволюционной проблематики различных форм ДНК в клетках как прокариот, так и эукариот для укрепления связей генетики с теорией эволюции на молекулярном уровне.

Важность изменений бактериальных мембран и клеточных стенок в процессе эволюции самой бактерии делает не только интересным, но и необходимым изучение плазмидомембранных взаимоотношений, что включает мембраносвязанные процессы, действующие на физиологические и физико-химические свойства плазмид, и определяет роль плазмиды в формировании клеточных стенок бактерий.

В некоторых работах показано, как с наличием плазмиды изменяются белковый ⁽¹⁾, липидный ⁽²⁾ состав бактериальных клеточных стенок. Плазмиды как своеобразные факторы эволюции могут оказывать влияние на синтез веществ, участвующих в метаболизме бактериальных клеток ⁽³⁻⁵⁾. Они влияют на рост, размножение и сохранение бактериальных клеток ⁽⁶⁾.

Ранее нами показана ^(7,8) важная роль R-плазмиды в физико-химической организации клеточных стенок *S. derby*. Показано изменение качественного и количественного состава фосфолипидов (ФЛ) клеток *S. derby* в зависимости от наличия в них R-плазмиды ⁽⁹⁾. С другой стороны показано также влияние R-плазмиды на физиологические характеристики этих клеток ⁽¹⁰⁾.

Учитывая непосредственную роль процесса перекисидации липидов (ПОЛ) в физико-химической организации бактериальных клеток, мы задались целью заняться специальным изучением особенностей течения реакции ПОЛ в плазмидосодержащих и бесплазмидных клетках *S. derby*.

Об активности ПОЛ судили по содержанию манонитронового диальдегида (МДА), образующего с тиббарбитуровой кислотой окрашива-

ние, интенсивность которого регистрировали спектрофотометрически (спектрофотометр Сф—4А) при длине волны 535 нм (¹¹), количество перекисей пересчитывали на 1 мкг фосфора данной суспензии.

Содержание фосфатидной кислоты (ФК) определяли по Смирнову и Чирковской (¹²), ФЛ пятна идентифицировали с помощью соответствующих свидетелей («Sigma»—США).

Минерализацию липидного фосфора осуществляли в среде серной и азотной кислот и количество ФЛ выражали в мкг неорганического фосфора на 1 мг ацетонового порошка (¹³). Активность фосфатазы ФК определяли по Помазанской (¹⁴).

Свободный α -токоферол в клетках *S. derby* определяли по методу Дигана (¹⁵).

Ранее нами было показано, что кинетическая направленность реакции ПОЛ в клетках *S. derby* не определяется R-плазмидой *S. derby* (¹⁶). Детальное изучение процесса ПОЛ показало, что количество МДА (последнего продукта пероксидации липидов) в клетках *S. derby*, лишенных R-плазмиды как в аскорбат, так и в НАДФ. Н зависимой системах окисления, оказывается примерно в 18 раз больше, чем в плазмидосодержащих клетках *S. derby*.

Результаты по изучению реакции ПОЛ клеток трансформантов выявили выраженное сходство исследуемых процессов этих клеток с дикими, плазмидосодержащими клетками *S. derby*, что четко указывает на ассоциацию вышеисследуемого процесса с R-плазмидой *S. derby* (¹⁶).

Согласно литературе, взаимообусловленность между интенсивностью ПОЛ и составом липидов (^{17, 18}) может рассматриваться и как физико-химическая система регуляции, и как одна из существующих в норме форм обновления состава липидов биологических мембран (¹⁹). Однако чрезмерное или длительное неферментативное свободно-радикальное окисление липидов приводит к резкому нарушению физико-химической структуры мембран. Это, в частности, распространяется на функции проницаемости, устойчивости липид-белковых комплексов, а также инактивацию липидзависимых мембраносвязанных ферментов (²⁰).

Учитывая это и основываясь на наших экспериментальных данных, попытаемся представить непосредственную роль процесса ПОЛ в физико-химической организации мембран в зависимости от наличия R-плазмиды в клетках *S. derby*, включая: а) изменение в липидном составе, особенно фосфатидилхолинов (ФХ), фосфатидил-этанолламинов (ФЭ), лизофосфатидилхолинов (ЛФХ), α -токоферола; б) влияние на гидрофобность мембраны; в) изменение проницаемости мембраны.

Особо интересно изучение влияния процессов ПОЛ на рост и размножение клеток *S. derby*.

а) Из литературы известно (²¹), что реакции ПОЛ обуславливают изменение состава липидов мембран. Ранее нами показано, что

в бесплазмидных клетках *S. derby*, действительно, имеет место изменение липидного состава (^{19, 20}). Суммарное (процентное) количество ФХ и ФЭ в плазмидосодержащих клетках *S. derby* примерно в 2,5—3 раза увеличивается, что может быть результатом интенсивного синтеза указанных ФЛ в плазмидных клетках *S. derby*. По литературным данным (²³), пероксидированию больше всего подвергаются ФЭ и ФХ, что, несомненно, отражается и на конечной концентрации всего спектра ФЛ *S. derby*, и на ФЛ—ФЛ-ных соотношениях в них.

Поскольку ФК является исходным субстратом вовлекающихся в синтез ФЛ-глицеридов, то в ходе работы представляло интерес проследить за изменениями в содержании ФК и активности фосфатазы ФК в плазмидных и бесплазмидных клетках *S. derby*. В экспериментах установлено, что как содержание ФК, так и активность фосфатидфосфогидролазы в обоих штаммах *S. derby* находятся почти в одинаковых пределах. При этом отмеченное нами увеличение содержания ФЛ в плазмидном штамме (²²) мы склонны связывать с изменением ферментных систем, участвующих в синтезе и распаде липидных компонентов клеток (включая и процессы ПОЛ).

В состав липидов клеток входят также витамины группы Е. По литературным данным (²⁴), α -токоферолы обладают свойствами ингибиторов окислительных радикальных процессов. Поэтому в цели нашей работы входило также определение сравнительного количества α -токоферола в плазмидных и бесплазмидных клетках *S. derby*.

Установлено, что в бесплазмидных клетках его количество при подсчете на 1 мг влажных клеток в 2—3 раза больше, чем в плазмидосодержащих клетках. Учитывая, что ФЛ в смеси с антиоксидантами могут проявлять свойства синергистов (²³), не исключается, что соотношение ФЛ/ α -токоферол в плазмидных клетках *S. derby* способствует проявлению антиокислительных свойств ФЛ, где несмотря на большое количественное содержание последних, как отмечалось выше, наблюдается слабо выраженное перекисеобразование липидов.

б) Применение нами ранее метода поляризационной микроскопии позволило выявить различия во взаимодействиях мембран клеток *S. derby* с водой в 35%-ной мембранной суспензии этих клеток (¹⁰). Было показано увеличение гидрофобности мембран бесплазмидных клеток, что, по всей видимости, следует связывать также с увеличением выхода МДА, в результате чего происходят изменения в геометрических параметрах липидного бислоя с увеличением гидрофобного объема мембраны.

в) Согласно существующей научной информации, изменение состояния ПОЛ сопровождается сдвигами в антиокислительной активности, и, следовательно, вязкости мембран (¹⁷), в связи с чем происходят глубокие отклонения в физико-химических свойствах мембраны и главным образом в функции проницаемости (²¹). Связанный с этим процесс повреждения мембран может сопровождаться выходом некоторых мембраносвязанных и цитоплазматических ферментов в надосадочную жидкость.

По имеющейся информации процесс роста некоторых микроорганизмов сопровождается способностью выделять липиды в культуральную жидкость с интенсификацией в последней процессов ПОЛ⁽²⁵⁾. Это вызвало интерес к изучению процессов ПОЛ также в жидкой питательной среде роста клеток, для чего по завершении роста клеток *S. derby* их удаляли из среды и в 0,2 мл бульона измеряли выход МДА. Результаты экспериментов продемонстрировали процессы перекиссообразования в культуральных жидкостях обоих типов клеток *S. derby* (таблица): в случае роста бесплазмидных клеток количество МДА в жидкой среде было значительно больше, чем при росте плазмидосодержащих клеток *S. derby*. Выяснение причины интенсификации процессов ПОЛ в культуральных жидкостях бесплазмидного штамма *S. derby* входит в цель наших дальнейших исследований. По всей вероятности, это обусловлено и выходом ЛФХ (процентное содержание которых в бесплазмидных клетках значительно выше) в культуральную жидкость, поскольку, с другой стороны, в отличие от ФХ и ФЭ, ЛФХ хорошо растворимы в воде⁽²⁶⁾. Вероятный выход ЛФХ, в свою очередь, по всей видимости, будет влиять на гидрофобность бесплазмидной клетки.

Процесс перекисного окисления липидов в культуральных жидкостях клеток *Salmonella derby*

Штаммы	К89 дикий плазмидосодержащий	К82 бесплазмидный	Тр 82 плазмидный трансформант
Количество манового диальдегида	0,08	0,115	0,75

Примечания. Даны среднестатистические из 5 опытов. Абсолютные показатели количества МДА и СФ даны без учета на 1 мкг белка или фосфора

Ранее нами экспериментально обнаружено отставание роста бесплазмидных клеток в 2—3 раза в сравнении с плазмидными клетками⁽¹⁰⁾. Замедленный рост и размножение бесплазмидного штамма *S. derby* может быть также следствием накопленных конечных продуктов ПОЛ, взаимодействие которых с ферментами, как известно, может привести к их инактивации.

Таким образом, отсутствие R-плазмиды чревато глубокими отклонениями физико-химических свойств компонентов мембран *S. derby*, их дестабилизацией с последующими изменениями метаболического статуса клетки в целом и как результат—ее функциональной активности.

Институт экспериментальной биологии
Академии наук Армении

Salmonella derby բջիջների լիպիդային պերօքսիդացիոն
պրոցեսի առանձնահատկությունների մասին

Ուսումնասիրությունները ցույց են տվել, որ լիպիդային պերօքսիդացիոն պրոցեսի (ԼՊՊ) ինտենսիվությունը *S. derby* բջիջներում կախված է R-պլազմիդի առկայությունից: Պարզվել է, որ պլազմիդից զուրկ՝ բջիջներում ԼՊՊ-ն 18 անգամ ավելի ինտենսիվ է, քան պլազմիդ պարունակող բջիջներում:

Տրանսֆորմանտ բջիջներում ԼՊՊ-ի ուսումնասիրությունը վկայում է, որ, իրոք, նշված պրոցեսը որոշվում է *S. derby* R-պլազմիդով:

Նկարագրված է R-պլազմիդի առկայությունից կախված ԼՊՊ պրոցեսի անմիջական ազդեցությունը *S. derby* բջիջների մեմբրանների ֆիզիկա-քիմիական բնութագրերի վրա, ներառյալ՝ լիպիդային կազմում (ֆոսֆատիդիլսուլինների, ֆոսֆատիդիլէթանոլամինների, լիզոֆոսֆատիդիլսուլինների, α-տոկոֆերոլի), մեմբրանի հիդրոֆորության աստիճանի և նրա թափանցելիության վրա: Մեծ է ԼՊՊ-ի ազդեցությունը վերոհիշյալ բջիջների աճման և բազմացման պրոցեսների վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ M. Zaleska, K. Lounatmaa *et al.*, EMBOG: 1013–1018 (1985). ² O. A. Богославская, E. B. Бурлакова *и др.*, Метаболические плазмиды бактерий, Наука, М., с. 33–35, 1982. ³ M. Ruzi, G. Baldacci *et al.*, in: 3 Eur. congr. Biotechnol. Mucken, p. 359–362, 1984. ⁴ P. Tichy, M. Hargman, Folia Microbiol., p. 101–104 (1985). ⁵ X. Yugu, T. Heuraug, Acta Genet. Ind., v. 13, p. 323–329 (1986). ⁶ P. M. Bennett, A. Linton, Antimicrob. Chemother., v. 18, p. 123–126 (1986). ⁷ A. Յ. Пепоян, Тезисы 3 конф. молодых ученых ИЭБ АН АрмССР, с. 51, 1988. ⁸ Ж. А. Кцоян *и др.*, ДАН АрмССР, т. 89, № 5, с. 216–219 (1989). ⁹ A. Z. Peroyan, G. A. Ktzooyan, K. G. Kargezian, FEBS, p. 503 (1990). ¹⁰ A. Յ. Пепоян, Г. Г. Бадалян, ДАН Армении, т. 91, вып. 5, с. 219–225 (1990). ¹¹ Ю. А. Владимиров *и др.*, Мир, М., 1972. ¹² Смирнов, Чирковский, Жур. эвол. биохим. и физиол., т. 5, с. 15 (1969). ¹³ Fliske *et al.*, J. Biol. Chem., v. 66, p. 361 (1925). ¹⁴ Л. Ф. Помазанская, Журн. эвол. биохим. и физиол., № 14, т. 1 (1935). ¹⁵ D. E. Daggren, Arch. Biochem. Biophys., v. 184, p. 116–120 (1959). ¹⁶ A. Յ. Пепоян, Л. Н. Овзьян *и др.*, Биофизика, вып. 3 (1991). ¹⁷ E. B. Бурлакова, в кн.: Биохимия липидов и их роль в обмене веществ, Наука, М., с. 23–34, 1981. ¹⁸ F. Novelli *et al.*, Ital. J. Biochem., v. 21, p. 325–334 (1975). ¹⁹ E. B. Бурлакова *и др.*, Сообщ. МГУ, с. 41–45, 1965. ²⁰ E. B. Бурлакова *и др.*, Наука, М., с. 113–141, 1982. ²¹ E. B. Бурлакова, Stud. Biophys., v. 53, p. 67–71 (1975). ²² A. Յ. Пепоян *и др.*, 10-й объединенный симпозиум биохим. о-в СССР–ГДР, М., с. 59, 1989. ²³ Ж. Н. Аристархова *и др.*, Наука, Л., с. 230, 1985. ²⁴ С. А. Аристархова *и др.*, ДАН СССР, т. 223, с. 215–218 (1976). ²⁵ С. А. Абрамитова *и др.*, Микробиология, т. 56, с. 549–553 (1987). ²⁶ B. D. Ladbroke *et al.*, Chem. and Phys. Lipids, v. 304–356 (1969).

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Ո Ւ Ն, 13-րդ հատորի

ԻՐԱԹՈՒՄԱՏԻԿԱ

Ա. Ս. Սարգսյան—Հերեզի ֆունկցիաները և Ֆուրյեի շարքերի տարամիտությունը	3
Ա. Ա. Ալեքսանյան, Ռ. Կ. Սևաթյան—Վերջավոր դաշտում բառակոսային հավասարումների հետ կապված ժառանգություններ	6
Ա. Ա. Անդրյան—Եզրային խնդիրներ երկնիստ անկյուններում բարձր կարգի ածանցյալի նկատմամբ շուծված մասնակի ածանցյալներով հավասարման համար	11
Հ. Բ. Ներսիսյան, Մ. Արդու, Շ. Ա. Բաղդասարյան—Նոր արագ լուծվող ինտեգրալ հավասարում	51
Ա. Հ. Մամալյան—Մատրիցա-ֆունկցիաների որոշ փասերի էֆեկտիվ ֆակտորիզացում	99
Վ. Ի. Գավրիլով, Վ. Ս. Ջաֆարյան—Որոշ ֆունկցիաների կոնֆորմ ինվարիանտությունը և եզրային արժեքների բնութագրիչ հատկությունը	105
Ա. Գ. Թունիկ—Ուղղորդիչ վեկտորի մեթոդը զծային ժրագրավորման մեջ	110
Է. Ա. Միրզախանյան—Հիլբերտյան K_0 -շրջակայքային ուսումնասիրության մասին	119
Ի. Թ. Բաղդասարյան, Վ. Ս. Ջաֆարյան—Մ. Մ. Ջրբաշյանի $B_0(Z, Z_n)$ արտադրյալի շոշափողային սահմանային վարքագծի մասին	147
Ս. Խ. Դարբինյան—Ուղղորդված գրաֆների թերի համիլտոնյան ցիկլների մասին	155
Լ. Հ. Խաչատրյան, Հ. Ս. Հաբուքյանյան—Միջինային սփռող ցանցների նոր դասերի կառուցում	159
Վ. Ս. Համբարյան—Ապոլոնյան շրջանի կետերի միջինային և մաքսիմալ բռնվելու ժամանակները	163
Ա. Բյուրխեբ, Հ. Վուլֆ—Տեղադրման եղանակը Տյուպլիցի օպերատորների համար Մ. Ջրբաշյանի տարածություններում	168
Է. Ա. Դանիելյան, Ա. Ռ. Սիմոնյան—Մեկից մեծ ժանրաբեղմնավածությամբ Պրադ-հուի համակարգում պայմանական սպասման ժամանակներ	195
Վ. Գ. Պետրոսյան—Կարտանի նույնության տիպի առնչություններ	200
Ա. Ա. Գալստյան—Փակագծի ֆերմիցիալ կորիզներով ինտեգրալ հավասարումների լուծումը	207
Կ. Վ. Գասպարյան—Օպերիտալ մարտինգալների ասիմպտոտիկ վարքի մասին	213

ԿԻՐԱԹԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Լ. Լ. Հաբուքյանյան—Միկրոծրագրային սլոոցեսորի բազմամակարդակ մոդելի համար ձրագրերի օպերիմալ իրականացման արդյունքներ	59
---	----

ՀԱՇՎՈՂԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Հ. Բ. Ներսիսյան, Գ. Ո. Աղեկյան—Տյուպլիցյան տիպի մատրիցաներով համակարգերի լուծման վեկտորացված ալգորիթմներ	17
--	----

ԽՆԽԱՆԻԿԱ

Մ. Վ. Բելուրիկյան, Ա. Ռ. Մուխոմիլաշյան—Պարբերաբար անհարթ մակերևույթի երկայնքով սահմանի սկանգոնման մակերևութային ալիքի գոյության մասին	63
---	----

ԱՌԱՋԳԱՆԱՆԻԹՅԱՆ ՏՆՍՈՒԹՅՈՒՆ

Յու. Ա. Անտիպով, Ն. Խ. Հաբուրյունյան—Անհամասնու պատման մարմինների ոլոր-	
ման դեպքում համապատասխանության սկզբունքի մասին	23
Վ. Ս. Տոնոյան, Ն. Ս. Մելնուսյան—Կիսահարթության եզրից սկսվող ուղղանկյուն	
քով առաձգական կիսահարթության համար հակահարթ կոնտակտային խնդիր	28
Վ. Ն. Հակոբյան—Ծածկերով թուլացված բաղադրյալ անիզոտրոպ սեպի հա-	
կահարթ լարվածային վիճակը	173
Ս. Մ. Մխիթարյան—Առաձգականության տեսության կոնտակտային և խառը խըն-	
դիրներում հանդիպող լողարիթմական կորիզներով ինսուլյացիայի օպերատորների համար	
սպեկտրալ առնչությունների մասին	220

ՖԻԶԻԿԱ

Գ. Հ. Գրիգորյան, Բ. Վ. Կրիժանովսկի—Մղման հաճախությամբ կոնային ճառա-	
դարձում	58
Ռ. Պ. Ուրեցյան, Դ. Հ. Բազալյան, Վ. Մ. Գասպարյան, Յ. Ա. Մունսյան,	
Ա. Յ. Ջորանյան—Իոնների առանց բախումային շարժումը բարձր լարման Պեննինգի	
պարպումում	73
Ռ. Գ. Շերման—Ատոմի կլանման սպեկտրը ինտենսիվ սեղմված լույսի դաշտում	77
Ա. Գ. Մերժանով, Ս. Հ. Մկրտչյան, Մ. Դ. Ներսիսյան, Պ. Բ. Ավագյան, Կ. Ս.	
Մարտիրոսյան—Մագնիսական դաշտը, մակածված ԻԲՍ պրոցեսով	81
Մ. Ա. Անդրիասյան, Ն. Վ. Վարդանյան, Ռ. Բ. Կոստանյան— $Y_3Al_5O_{12}:Nd^{3+}$ և	
$Y_3Al_5O_{12}:Er^{3+}$ ալոսիվ բյուրեղներով 1,06 և 2,04 մկմ ալիքների երկարության	
լազեր	84
Վ. Գ. Բարաչանյան, Գ. Գ. Դեմիրճյանյան, Է. Պ. Կոկանյան, Ռ. Բ. Կոստան-	
յան— $LiNbO_3:Er^{3+}$ բյուրեղների սպեկտրասկոպիկ բնութագրերը	179

ԵՐԿՐԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Վ. Հաբուրյունյան—Հայաստանի տարածքի վերին լիթոսֆերայի պետրոֆիզի-	
կական կտրվածքի մասին	183

ԾՈՒԵԿՈՒԼՅԱՐ ԿՆՆՍԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ռ. Ա. Զախարյան, Մ. Ա. Պողոսյան—Բջջում օլիգոնուկլեոտիդային մոլեկուլների	
թաղանթային տեղափոխման մեխանիզմը	33

ԲԻՈԳԵՄԻԱ

Ռ. Հ. Նուգարյան, Ի. Խ. Երիցյան—Նորադրեններգիկ էությունի ազդեցությունը ուղեղի	
երայում սպիտակուցների կազմի վրա	89
Ա. Զ. Փեփայան, Ա. Ա. Հաբուրյունյան, Ժ. Ա. Կծոյան, Կ. Գ. Ղառազյուզյան—	
Salmonella derby բջիջների լիպիդային պերօքսիդացիոն պրոցեսի առանձնահատկու-	
թյունների մասին	227

ԷԿՈԼՈԳԻԱ

Ռ. Հ. Ռևազյան, Լ. Ա. Արաբադյան, Բ. Խ. Մեծունց—Ջրամբարների հատակա-	
յին նստվածքների օդատադործումը պալեոդատաբանական արտադրության մեջ	123

ԲՈՒՅՍՆՐԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Հ. Հ. Գեկչյան, Ռ. Զ. Սիսեոյան, Ի. Լ. Գավրյան, Խ. Կ. Խաժակյան—Մայրական	
պալարի և հանքային սննդառության տարբեր ֆոնների ազդեցությունը վիրուսազերծ կար-	
տոֆիլի աճի և զարգացման վրա հիդրոպոնիկայի պայմաններում	128

Է. Ս. Հարությունյան — Eviphis Berlese, 1903 սեռի Eviphididae Berlese, 1913 (Parasitiformes) ընտանիքի նոր հոսանք	94
Է. Ս. Հարությունյան — Eviphididae Berlese, 1913 (Parasitiformes, Mesostigmata) ընտանիքի նոր հոսանքներ	109

ՃԻՋԻՈՒՈՒԳԻՄ

Է. Ա. Հովհաննիսյան — Ուղեղիկի կենտրոնական կորիզների նեյրոնների ֆունկցիոնալ ախտաբանությունը	38
Վ. Լ. Կոռոզնով, Վ. Բ. Չանարչյան — Կեղևային ազդանշանների տրվող կարմիր կորիզ-ազնուզիչային նեյրոնների արագ պատասխանները	42
Վ. Ե. Աղամյան, Ռ. Ս. Հակոբյան, Ռ. Բ. Ալավերդյան, Հ. Լ. Մարգարյան, Հ. Խ. Մելիքյան, Ս. Ռ. Ներսիսյան, Վ. Հ. Սարգսյան, Ն. Վ. Թաթրյան — Մարդու կողմից ուղեղ-զարդված լուսային իմպուլսների ճառագայթման հայտնաբերումը	46
Պ. Ռ. Հարությունյան, Ռ. Ա. Հարությունյան, Ջ. Կ. Խաչատրյան, Լ. Ա. Սանակվադ — Օքսիտոցինի ազդեցությունը օրգանիզմի շերմային համեմատազի վրա	134
Վ. Հ. Սարգսյան — Դեյտերսյան կորիզի նեյրոնների հետընթաց և սինապսային հեղուկային կարմիր կորիզի գրգռման միջոցով	139

СОДЕРЖАНИЕ 93 тома

МАТЕМАТИКА

А. С. Саргсян — Функции Лебега и расходимость рядов Фурье	3
А. А. Алексанян, Р. К. Серобян — Покрытия, связанные с квадратичными над конечным полем уравнениями	6
А. А. Андриян — Граничные задачи в двугранных углах для уравнений в частных производных, не разрешенных относительно старшей производной	11
А. Б. Нерсисян, М. Абду, Ш. А. Багдасарян — Новое быстро решаемое интегральное уравнение	51
А. Г. Камалян — Эффективная факторизация некоторых классов матриц-функций	99
В. И. Гаврилов, В. С. Захарян — Кояфоринная инвариантность и характеристическое свойство граничных значений функций класса M	105
А. Д. Тунцел — Метод направляющего вектора в линейном программировании	110
Э. А. Мирзаханян — О гильбертовых K_0 -окрестностных ретрактах	119
Д. Т. Багдасарян, В. С. Захарян — О касательном предельном поведении произведения $B_n(z, z_n)$ М. М. Джрбашяна	147
С. Х. Дпрбциян — О неполных гамильтоновых контурах и направленных графах	155
Л. Г. Хачатрян, О. С. Арутюнян — Построение новых классов минимальных широкополосных сетей	159
В. С. Амбарян — Минимальное и максимальное время поимки для точек круга Аполлония	163
А. Бёттхер, Х. Вольф — Метод коллокации для операторов Теплица в пространствах М. М. Джрбашяна	168
Э. А. Даниелян, А. Р. Симонян — Условные времена ожидания в модели Прабху при загрузке большей единицы	195
В. Г. Петросян — Соотношения типа тождества Картана	200
А. А. Галстян — Решение интегральных уравнений с псевдодифференциальными ядрами	207
К. В. Гаспарян — Об асимптотическом поведении опциональных мартингалов	212

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Л. Л. Арутюнян — Результаты оптимальной реализации программы для многоуровневой модели микропрограммного процессора	58
---	----

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

А. Б. Нерсисян, Г. В. Агекян — Векторизованные алгоритмы решения систем с матрицами теплицева типа	17
--	----

МЕХАНИКА

М. В. Белубекян, А. Р. Мухсизачоян — О существовании «стоячей» поверхностной сдвиговой волны вдоль периодически неровной поверхности	63
--	----

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- Ю. А. Антилов, Н. Х. Арутюнян — О принципе соответствия при кручении неоднородных тел вращения 23
- В. С. Тоноян, Н. С. Мелкумян — Антиплоская контактная задача для упругой полуплоскости с вертикальной трещиной, идущей от границы полуплоскости 28
- В. Н. Акопян — Антиплоское напряженное состояние составного анизотропного клина, ослабленного трещинами 173
- С. М. Мхитарян — О спектральных соотношениях для интегральных операторов с логарифмическими ядрами, встречающихся в контактных и смешанных задачах теории упругости 220

ФИЗИКА

- Г. Г. Григорян, Б. В. Крыжачковский — Коническое излучение на частоте накачки 68
- Р. П. Баберцян, Д. А. Бадалян, В. М. Гаспарян, Ц. А. Минасян, А. К. Чобанян — О бесстолкновительном движении ионов в высоковольтном пеннинговском разряде 73
- Б. Г. Шерман — Спектр поглощения атома в интенсивном сжатом свете 77
- А. Г. Мерханов, С. О. Мкртчян, М. Д. Нерсисян, П. Б. Авакян, К. С. Мартиросян — Магнитное поле, наведенное процессом СВЧ 81
- М. А. Андриасян, Н. В. Варданян, Р. Б. Костанян — Лазер с активными элементами из кристаллов $Y_2Al_2O_5:Nd^{3+}$ и $Y_3Al_5O_{12}:Er^{3+}$, излучающих на длинах волн 1,06 и 2,94 мкм 84
- В. Г. Бабаджанян, Г. Г. Демирханян, Э. П. Коканян, Р. Б. Костанян — Спектроскопические характеристики кристаллов $LiNbO_3:Er^{3+}$ 179

ГЕОЛОГИЯ

- А. В. Арутюнян — О петрофизическом разрезе верхней литосферы территории Армении 183

МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ

- Р. А. Захарян, М. А. Погосян — Мембранный механизм переноса молекул нуклеотидов в клетку 33

БИОХИМИЯ

- О. А. Назарян, И. Х. Ерицян — Влияние норадренергических веществ на состав воднорастворимых белков мозга 89
- А. З. Пепоян, А. А. Арутюнян, Ж. А. Кцоян, К. Г. Карагезян — Об особенностях процесса перекисеобразования липидов клеток *Salmonella derby* 227

ЭКОЛОГИЯ

- Р. Г. Рсвазян, Л. А. Араратян, Б. Х. Межунц — Об использовании данных отложений водохранилищ в сельскохозяйственном производстве 123

АКАРОЛОГИЯ

- Э. С. Арутюнян — Новый вид рода *Eviplis* Berlese, 1903 семейства *Eviplididae* Berlese, 1913 (*Parasitiformes*) 91
- Э. С. Арутюнян — Новые виды семейства *Eviplididae* Berlese, 1913 (*Parasitiformes*, *Mesostigmata*) 189

ФИЗИОЛОГИЯ

Э. А. Оганесян — Фоновая импульсная активность нейронов центральных ядер мозжечка бодрствующей кошки	38
В. Л. Городнов, В. В. Фанарджян — Быстрые реакции рубро-спинальных нейронов на корковые сигналы	42
В. Е. Адамян, Р. С. Акопян, Р. Б. Алавердян, А. Л. Маркарян, Г. Х. Мелконян, С. Р. Нерсисян, В. А. Саркисян, Н. В. Табирян — Импульсное направленное световое излучение человека	44

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

А. Г. Деведжян, Р. Э. Сисерян, И. Л. Давтян, Х. К. Хажакян — Влияние материнского клубня и различных фонов минерального питания на рост и развитие безвирусного картофеля в гидропонике	128
К. Р. Арутюнян, Р. А. Арутюнян, Дж. К. Хачатрян, Л. А. Саакова — Влияние окситоцина на температурный гомеостаз организма	134
В. А. Саркисян — Антидромные и синаптические реакции нейронов ядра Дейтерса на стимуляцию красного ядра	139

CONTENTS of volume 93

MATHEMATICS

A. S. Sargsian — Lebesgue functions and divergence of Fourier series	3
A. A. Alexanian, R. K. Serobian — Covers concerned with the quadratic over finite field equations	6
A. A. Andrian — The boundary value problem in angle dihedral for partial differential equations unsolvable by means of a high derivative	11
A. B. Nersessian, M. Abdu, Sh. A. Bagdasarian — New fast solved integral equation	51
A. H. Kamellian — Effective factorization of certain classes of matrix functional	99
V. I. Garrilov, V. S. Zakarian — Conformal invariant and characteristic property of boundary magnitude of function class M	105
A. D. Tane — The leading vector method and its applications	110
E. A. Mirzakhanian — On Hilbert K_0 -neighbourhood retracts	119
D. T. Bagdasarian, V. S. Zakarian — Tangential boundary behaviour of M. M. Dzrbashian products $B_2(z, z_0)$	147
S. Kh. Darbinian — About non-complete Hamiltonian cycles in oriented graphs	155
L. H. Khachatryan, H. S. Harutunian — Construction of new classes of minimal broadcast network	159
V. S. Hambarian — The minimal and maximal capture time for the points of the circle of Apollon	163
A. Böttcher, H. Wolf — Collocation methods for the Toeplitz operators in Dzrbashian spaces	16
E. A. Daniellian, A. R. Simontian — Conditional waiting times in Prabhu's model with traffic intensity more than one	195
V. G. Petrossian — Cartan's identity type relations	200
A. A. Galstian — Integral equations with the pseudodifferential kernels	207
K. V. Gasparian — On asymptotic behaviour of optional martingales	212

APPLIED MATHEMATICS

L. L. Harutiunian — Results of program optimal realization for micro-programmed processors with structured organization	58
---	----

COMPUTER MATHEMATICS

H. B. Nersessian, G. V. Agekian — The parallel algorithms for solving of systems with matrices of Toeplitz type	178
---	-----

MECHANICS

M. V. Belubekian, A. R. Mukhsikhachoyan — On the shear "standing" surface wave existence along a corrugated surface	63
---	----

THEORY OF ELASTICITY

Yu. A. Anilpov, N. Kh. Arutyunian — On the correspondence principle for inhomogeneous axially symmetrical bodies under tension	23
--	----

<i>V. S. Tonoyan, N. S. Melkoumian</i> — An antiplane herizian problem for an elastic half-plane with a vertical crack, starting from the boundary of the half-plane	28
<i>V. N. Hakobian</i> — An antiplane strained state of a composite anisotropic wedge, weakened by cracks	173
<i>S. M. Mkhitarian</i> — On spectral correlations for integral operators with logarithmic kernels, which meet in contract and mixed problems of theory of elasticity	220

PHYSICS

<i>G. G. Grigorian, B. V. Kryzhanovskii</i> — Conical emission on the pump frequency	68
<i>R. P. Baberislan, D. A. Badalian, V. N. Ousparian, Ts. A. Minassian, A. K. Chibaniat</i> — Non collisional movement of ions in high-voltage Penning discharge	73
<i>B. G. Sherman</i> — The absorption spectrum of an atom in squeezed light	77
<i>A. Y. Merzhenov, S. O. Mkrtichian, M. D. Nersessian, P. N. Asatyan, K. S. Martirosian</i> — Magnetic field caused by SHS process	81
<i>M. A. Andriassian, N. V. Vardanian, R. B. Kostanian</i> — A laser with $Y_3Al_5O_{12}:Nd^{3+}$ and $Y_3Al_5O_{12}:Er^{3+}$ crystals as active media emitting at 1.16 and 2.94 μm	84
<i>V. G. Babadjanian, G. G. Demirkhanian, E. P. Koranian, R. B. Kostanian</i> — Spectroscopic characteristics of the $LiNbO_3:Er^{3+}$ crystals	119

GEOLOGY

<i>A. V. Arutunian</i> — On the petrophysical section of upper lithosphere of the territory Armenia	183
---	-----

MOLECULAR BIOLOGY

<i>B. A. Zakharian, M. A. Pogosian</i> — Membrane mechanism of transport of oligonucleotides into cell	33
--	----

BIOCHEMISTRY

<i>O. A. Nazarian, I. Ch. Ertsian</i> — Influence of noradrenergic substances on the proteins composition	89
<i>A. Z. Pepoyan, A. A. Haroutyunian, G. A. Ktzoyan, K. G. Karagezian</i> — About the peroxidation specifications of the process lipids in Salmonella derby cells	227

ECOLOGY

<i>R. H. Revazian, L. A. Araratian, B. K. Mezhunts</i> — On the using of the bottom precipitations of reservoirs in agricultural industry	123
---	-----

PLANT PHYSIOLOGY

<i>H. H. Devejian, R. Z. Sisertan, I. L. Davtian, K. K. Khazhakian</i> — Effect of maternal tuber and different phases of mineral nutrition on the growth and development of the virusless potato under hydroponic conditions	128
---	-----

ACAROLOGY

<i>E. S. Arutunian</i> — New species of the genus <i>Eviphis</i> Berlese, 1903 of the family Eviphididae Berlese, 1913 (Parasitiformes)	94
---	----

<i>E. S. Arutunian</i> — New species of the family Euphrasidae Berlese, 1913 (Parasitiformes, Mesostigmata)	189
--	-----

PHYSIOLOGY

<i>E. A. Hovhannissian</i> — The Neuronal background activity of the cerebellar central nuclei in alert cat	38
<i>V. L. Gorodnov, V. V. Fanardjan</i> — Fast reactions of rubrospinal neurons to cortical signals	42
<i>V. E. Adamyan, R. S. Akopian, R. V. Alaverdian, H. L. Margarian, G. Kh. Melkonian, S. R. Nersisyan, V. A. Sarkisian, N. V. Tabirian</i> — Observation of directed light pulses emitted from the human body	46
<i>R. A. Harutunian, K. R. Harutunian, D. K. Khachaturian, L. A. Sahakova</i> — The influence of oxytocin on the temperatural homeostasis of organism	131
<i>V. H. Sarkisian</i> — Antidromic and synaptic reactions of Deiters' neurons to stimulation of red nucleus	139