

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

Том 93 № 4

1992

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. բեկե-
ծու (պատ. ֆակուլտետ), Է. Դ. ԱՅՐԻՍՅԱՆ,
Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱ-
ՐՈՒՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Ա.
Զ. ԳԱՐՐԻՆՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակա-
դեմիկոս, Ա. Ա. ԽԱՆՆԻՅԱՆ, Հայաստանի
ԳԱ պրոֆ. անդամ, Վ. Զ. ՀԱՄԻՆՍԿԻՅ-
ՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Զ. ՀԱԶԱՐՅԱՆ,
Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբ-
ագր. տեղակալ), Վ. Գ. ՄԻՐՔԱՆՅԱՆ,
Հայաստանի ԳԱ պրոֆ. անդամ, Գ. Ս. ՍԱ-
ՀԱԿՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմի-
կոս, Դ. Մ. ՍԵՆՐԱԿՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ
ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Մ. Լ. ՏԵՐ-
ՄԻԿԱՅԵՆՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադե-
միկոս, Վ. Բ. ՃԱՆԱՐՋՅԱՆ, Հայաստանի
ԳԱ ակադեմիկոս:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.
АРЗУМАНИЯН, канд. техн. наук (отв.
секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик
АН Армении, А. Т. БЛБАЯН, академик
АН Армении, А. А. ГАБРИЕЛЯН, ака-
демик АН Армении, В. О. КАЗАРЯН,
академик АН Армении (зам. отв. редак-
тора), Э. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН
Армении, Г. С. СААКЯН, академик АН
Армении, Д. М. СЕДРАКЯН, ака-
демик АН Армении (отв. редактор),
А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН Армении,
М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, академик АН
Армении, В. В. ФАНАРДЖЯН, ака-
демик АН Армении.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԱԹՆՄԱՏԻԿԱ

Ի. Թ. Բաղդասարյան, Վ. Ս. Զաֆարյան — Մ. Մ. Զրբաշյանի ? (7, 28) արտա- դրյալի շոշափողային սահմանային վարքագծի մասին	147
Ս. Խ. Գաբրիելյան — Ուղղորդված գրաֆների բերի համիլտոնյան ցիկլների մասին	155
Լ. Հ. Խաչատրյան, Հ. Ս. Հաբուրյունյան — Միջին մալ սփռող ցանցերի նոր դասերի կառուցում	159
Վ. Ս. Համբարյան — Ապոլոնյան շրջանի կետերի մինիմալ և մաքսիմալ բռնվե- լու ժամանակները	163
Ա. Իյոսիբեր, Հ. Վոլֆ — Տեղադրման եղանակը Տյուպլիցի օպերատորների հա- մար Մ. Զրբաշյանի տարածություններում	168

ԱՌԱՋԻԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Վ. Ն. Հակոբյան — Զաքերով թուլացված բաղադրյալ անիզոտրոպ սեպի հա- կահարթ լարվածային վիճակը	173
---	-----

ՖԻԶԻԿԱ

Վ. Գ. Բալաշանյան, Գ. Գ. Դեմիրճանյան, Է. Գ. Լուկանյան, Ռ. Ռ. Կոստան- յան — $\text{LiNbO}_3 : \text{E}^{3+}$ բյուրեղների սպեկտրասկոպիկ բնութագրերը	179
---	-----

ԵՐԿՐԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Վ. Հաբուրյունյան — Հայաստանի առաածքի վերին լիթոսֆերայի պետրոֆիզի- կական կտրվածքի մասին	183
--	-----

ՏՋԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Է. Ս. Հաբուրյունյան — Eviphididae Berlese, 1913 (Parasitiformes, Mesostig- mata) ընտանիքի նոր տեսակներ	189
---	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- Д. Т. Багдасарян, В. С. Захарян—О касательном предельном поведении произведения $B_1(z, z)$ М. М. Джрбашьяна 147
- С. Х. Дарбинян—О неполных гамильтоновых контурах в направленных графах 155
- Л. Г. Хачатрян, О. С. Арутюнян—Построение новых классов минимальных ширококестельных сетей 159
- В. С. Амбарян—Минимальное и максимальное время помки для точек круга Аполлония 163
- А. Бёттхер, Х. Вольф—Метод коллокации для операторов Теплица в пространствах М. М. Джрбашьяна 163

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- В. Н. Акселян—Антиплоское напряженное состояние составного анизотропного клина, ослабленного трещинами 173

ФИЗИКА

- В. Г. Бабсджинян, Г. Г. Демирханян, Э. П. Коканян, Р. Б. Костанян—Спектроскопические характеристики кристаллов $\text{LiNbO}_3:\text{Er}^{3+}$ 179

ГЕОЛОГИЯ

- А. В. Арутюнян—О петрофизическом разрезе верхней литосферы территории Армении 183

АКАРОЛОГИЯ

- Э. С. Арутюнян — Новые виды семейства Euphridae Berlese. 19.3 (Parasitiformes, Mesostigmata) 189

C O N T E N T S

MATHEMATICS

- G. T. Gagdassarlian, V. S. Zacharian* — Tangential boundary behavior of M. M. Dzrbashian products $\Gamma_0(z, z_0)$ 147
- S. Kh. Darbinian* — About non-complete Hamiltonian cycles in oriented graphs 155
- L. H. Khachatryan, H. S. Harutunian* — Construction of new classes of minimal broadcast network 159
- V. S. Hambarian* — The minimal and maximal capture time for the points of the circle of Apollon 163
- A. Böcher, H. Wolf* — Collocation methods for the Teepitz operators in Dzrbashian spaces 168

THEORY OF ELASTICITY

- V. N. Hakobyan* — An antiplane strained state of a composite anisotropic wedge, weakened by cracks 173

PHYSICS

- V. G. Badalyan, G. G. Demirehinian, E. P. Kotanian, R. B. Kostanian* — Spectroscopic characteristics of the $\text{LiNbO}_3:\text{Er}^{3+}$ crystals 179

GEOLOGY

- A. V. Arutunian* — On the petrophysical section of upper lithosphere of the territory Armenia 183

ACAROLOGY

- E. S. Arutunian* — New species of the family Eviptoridae Berlese 1913 (Parasitiformes, Mesostigmata) 189

Сдано в набор 16.06.1992 г. Подписано к печати 13.12.1992 г.

Формат 70 × 108_{1/16}. Бумага № 1, сыктывкарская. Высокая печать. Печ. лист 3,0. Усл. печ. л. 4,2. Усл. кр. отт. 4,2. Учет. изд. л. 3,03. Тираж 340. Заказ № 109.

Издательство АН РА. Цена 1 р. 10 к.

Адрес: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г, III эт., к. 13. Тел. 27-36-95.

Издательство Академии наук Армении, 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.
 Типография Издательства Академии наук Армении, 375019, Ереван,
 пр. Маршала Баграмяна, 24.

УДК 517.53

Д. Т. Багдасарян, член-корреспондент АН Армении и С. Захарян

О касательном предельном поведении произведения

$B(z, a_n)$ М. М. Джрбашина

(Представлено 21/VI 1991)

1. Рассмотрим произведение Бляшке

$$B(z, a_n) = \prod_{n=1}^{\infty} b(z, a_n).$$

где

$$b(z, a) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z} \cdot \frac{|a|}{a}, \quad 0 < |a| < 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < +\infty. \quad (1)$$

Функция $B(z, a_n)$ называется подпроизведением для произведения $B(z, a_n)$, если $\{a_n\}$ подпоследовательность для $\{a_n\}$.

Известно, что при условии (1) произведение Бляшке имеет радиальные предельные значения

$$B(e^{i\theta}, a_n) = \lim_{r \rightarrow 1-0} B(re^{i\theta}, a_n) \quad (2)$$

с модулем единица для всех $\theta \in [0, 2\pi]$ кроме, возможно, некоторого исключительного множества $E \in [0, 2\pi]$ линейной меры нуль. При этом в точках, где существуют радиальные граничные значения, будут существовать и угловые пределы (1).

Вопрос о том, что дополнительно можно утверждать об исключительном множестве E , где не имеет место соотношение (2), когда последовательность $\{a_n\}$ подчинена более сильному, чем (1), условию,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|)^{\alpha} < +\infty \quad (0 < \alpha < 1), \quad (2)$$

впервые был исследован Фростманом.

С целью формулировки полученного им результата приведем известное определение γ -емкости множества.

Множество E , измеряемое по Борелю, имеет положительную γ -емкость ($0 < \gamma < 1$), если найдется такая мера μ , которая сосредоточена на E , т. е. $\mu(E) = 1$, для которой функция

$$V_\gamma(x, r) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu}{|e^{it} - e^{ix}|^\gamma} \quad (4)$$

остается равномерно-ограниченной по x при $r \rightarrow 1 - 0$.

В этом случае обозначают $\text{Cap}_\gamma(E) > 0$. В противном случае E имеет емкость, равную нулю $\text{Cap}_\gamma(E) = 0$.

Отметим следующее: если $\text{Cap}_\gamma(E_k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, p$), то

$$\text{Cap}_\gamma \left\{ \bigcup_1^p E_k \right\} = \text{Cap}_\gamma \left\{ \bigcap_1^p E_k \right\} = 0.$$

Результат Фростмана утверждает, что при условии (3) исключительное множество E для соотношения (2) имеет γ -емкость нуль.

В настоящей работе рассмотрен вопрос о касательных пределах для произведения Бляшке. Приведем известное определение касательного предела.

Пусть имеем множество точек z .

$$R(m, \theta, \gamma) = \{z: 1 - |z| \geq m |\arg z - \theta|^\gamma, 0 < |z| < 1\}, \quad (5)$$

где за $|\arg z - \theta|$ принимаем меньшую из дуг на $C = \{z: |z| = 1\}$ между $\frac{z}{|z|}$ и $e^{i\theta}$.

Пусть функция $f(z)$ определена на $D = \{z: |z| < 1\}$. Если существует такое L , что для каждого m ($m > 0$) $f(z) \rightarrow L$ при $z \rightarrow e^{i\theta}$ и $z \in R(m, \theta, \gamma)$, то говорят, что $f(z)$ имеет T_γ -предел в точке $e^{i\theta}$.

Очевидно, что T_γ -предел существует в том и только в том случае, когда существует классический угловой предел. При $\gamma > 1$ положение меняется. В работе (2) показано, что для каждого γ ($\gamma > 1$) существует произведение Бляшке, для которого не существует T_γ -предела нигде на C .

Г. Карго (3) доказал следующую теорему.

Теорема А. Если нули функции $B(z, a_n)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|)^{\alpha} < +\infty \quad (0 < \alpha < 1),$$

то для любого γ ($1 < \gamma < \frac{1}{\alpha}$) существует множество E_γ ,

$\text{Cap}_{\gamma+1}(E) = 0$, для которого произведение $B(z, a_n)$ и все его подпроизведения имеют T_γ -предел, модуль которого равен единице в каждой точке $C - E_\gamma$.

Можно доказать теорему, аналогичную теореме А: в частном случае, при $\beta = 1$, эта теорема совпадает с теоремой А.

Теорема 1. Если последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|)^{\alpha} < +\infty \quad (0 < \alpha < 1),$$

то для любого β , которое удовлетворяет условию $\alpha < \beta < 1$, и любого γ , $\beta < \gamma < \frac{\alpha}{\alpha - \beta}$, существует такое множество E , $\text{Cap}_{\frac{\gamma}{\beta}}(E) = 0$,

для которого произведение Бляшке $B(z, a_n)$ и любое его подпроизведение имеют $T_{\frac{\gamma}{\beta}}$ -предел, модуль которого равен единице, в каждой

точке $S - E$.

В процессе доказательства теоремы 1 использованы теорема А и тот факт, что в случае, если имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - |a_n|}{|e^{i\theta} - a_n|^{\frac{1}{\beta}}} < +\infty,$$

то в точке $e^{i\theta}$ произведение $B(z, a_n)$ и все его подпроизведения имеют $T_{\frac{1}{\beta}}$ -предел.

Из теоремы 1 видно, что множество E , где $B(z, a_n)$ не имеет $T_{\frac{1}{\beta}}$ -предела, получается наиболее редко при $\beta = 1$. Это доказано в работе Карго (3) иным путем.

2. Развивая общую теорию факторизации мероморфных функций в единичном круге, М. М. Джрбашян (4) ввел в рассмотрение произведение $B_*(z, z_n)$, которое в частном случае, при $\alpha = 0$, совпадает с произведением Бляшке.

Для сходимости произведения $B_*(z, z_n)$ необходимо и достаточно, чтобы нули $\{z_n\}_1^{\infty}$ функции $B_*(z, z_n)$ удовлетворяли условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|)^{1+\alpha} < +\infty.$$

Отметим два свойства теоремы Б и В (см. соответственно (5, 6)) произведения $B_*(z, z_n)$, которые мы используем в дальнейших доказательствах.

Теорема Б. При условии

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|)^{1+\alpha} < +\infty \quad (-1 < \alpha < 0)$$

имеет место представление

$$B_*(z, z_n) = B_0(z, z_n) \exp \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{2}{(1 - ze^{-i\theta})^{1+\alpha}} - 1 \right\} d\phi(\theta), \quad (6)$$

где $\psi(\theta)$ — некоторая невозрастающая функция ограниченной вариации $[-\pi, \pi]$.

Теорема В. При условии

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|)^a < +\infty \quad (0 < a < \infty)$$

имеет место представление

$$B_n(z, z_n) = B_{n-1}(z, z_n) \exp \sum_{k=1}^n \left\{ 2 \int_{|z_n|}^1 \frac{(1-x)^{a-1}}{\left(1 - \frac{\bar{z}_n z}{x}\right)^a} dx - \frac{(1 - |z_n|)^a}{a} \right\} \quad (7)$$

Целью настоящей работы является: доказать верность результатов теоремы А и для произведения $B_n(z, z_n)$ М. М. Джрбашяна при $-1 < a < 1$.

Докажем следующие леммы:

Лемма 1. Пусть $0 < a < 1$ и

$$E_a = \left\{ e^{ix} : \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi(\theta)}{|1 - e^{i(x-\theta)}|^a} = +\infty \right\}, \quad (8)$$

где $\psi(\theta)$ — неубывающая функция конечной вариации на $[-\pi, \pi]$. Тогда $\text{Cap}_a(E_a) = 0$.

Доказательство. Ясно, что в случае $e^{ix} \in E_a$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi(\theta)}{|1 - r e^{i(x-\theta)}|^a} = +\infty.$$

Следовательно, для любого $M > 0$ и любого $x : e^{ix} \in E_a$ существует $r(x, M)$ ($r(x, M) < 1$), при котором

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi(\theta)}{|1 - r(x, M) e^{i(x-\theta)}|^a} > M. \quad (9)$$

Предположим, что $\text{Cap}_a(E_a) > 0$. Тогда существует такая мера μ , при которой $\mu(E_a) = 1$ и

$$V_a(x, r) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu}{|1 - r e^{i(x-\theta)}|^a}$$

остается равномерно ограниченным по $x \in [-\pi, \pi]$ при $r \rightarrow 1-0$.

В частном случае, при $r = r(x, M)$, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu}{|1 - r(x, M) e^{i(x-\theta)}|^a} < +\infty, \quad e^{ix} \in E_a.$$

Следовательно

$$\int_{E_a} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi(\theta)}{|1 - r(x, M) e^{i(x-\theta)}|^a} \right\} d\mu =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \int_{E_a} \frac{d\mu}{|1 - r(x, M) e^{i(x-\theta)}|^a} \right\} d\psi(\theta) < C \int_{-\pi}^{\pi} d\mu(\theta) < C.$$

Это неравенство противоречит тому, что для любого $M > 0$ на E_a имеет место неравенство (9).

Отсюда следует справедливость утверждения леммы 1.

Лемма 2. Пусть γ любое число из $1 < \gamma < \frac{1}{a}$, $e^{ix} \in E_{a\gamma}$, где

$$F_{a\gamma} = \left\{ e^{ix} : \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi(\theta)}{|1 - e^{i(x-\theta)}|^{a\gamma}} = +\infty \right\}.$$

$\psi(\theta)$ — неубывающая функция конечной вариации на $[-\pi, \pi]$. Тогда

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{x-a}^{x+a} \frac{d\psi(\theta)}{|1 - ze^{-i\theta}|^a} = 0. \quad (10)$$

Доказательство. При r достаточно близких к 1, имеем

$$|e^{i\theta} - z| \geq 1 - r,$$

$$|e^{i\theta} - z| = |e^{i\theta} - e^{ix} + e^{ix} - z| \geq |e^{i\theta} - e^{ix}| - (1 - r).$$

Сложив эти неравенства, получим

$$|e^{i\theta} - z| \geq \frac{1}{2} |e^{i\theta} - e^{ix}| \geq K |e^{i\theta} - e^{ix}|^{\gamma},$$

где $K > 0$.

Следовательно,

$$\int_{x-a}^{x+a} \frac{d\psi(\theta)}{|1 - ze^{-i\theta}|^a} \leq K^{-a} \int_{x-a}^{x+a} \frac{d\psi(\theta)}{|e^{i\theta} - e^{ix}|^{a\gamma}}. \quad (11)$$

Из (11) ясно, что для выполнения (10) достаточно доказать

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi-a}^{\pi+a} \left\{ \int_{x-a}^{x+a} \frac{d\psi(\theta)}{|e^{i\theta} - e^{ix}|^{a\gamma}} \right\} dx = 0.$$

Имеем при $e^{ix} \in E_{a\gamma}$

$$\int_{-\pi-a}^{\pi+a} \left\{ \int_{x-a}^{x+a} \frac{d\psi(\theta)}{|e^{i\theta} - e^{ix}|^{a\gamma}} \right\} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \int_{\theta-a}^{\theta+a} \frac{dx}{|e^{i\theta} - e^{ix}|^{a\gamma}} \right\} d\psi(\theta).$$

Но при $x \in [\theta - a, \theta + a]$ имеем

$$|e^{i\theta} - e^{ix}|^2 = 2 - 2\cos(\theta - x) \geq \frac{4}{\pi^2} |\theta - x|^2.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \int_{-\pi-a}^{\pi+a} \left\{ \int_{x-a}^{x+a} \frac{d\psi(\theta)}{|e^{i\theta} - e^{ix}|^{2\gamma}} \right\} dx &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \int_{\theta-a}^{\theta+a} \frac{dx}{\left(\frac{2}{\pi} |\theta - x|\right)^{2\gamma}} \right\} d\psi(\theta) = \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\gamma} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{a^{1-2\gamma}}{1-2\gamma} \right\} d\psi(\theta), \end{aligned}$$

последнее выражение стремится к нулю при $a \rightarrow 0$.

Теперь докажем следующие теоремы о касательном предельном поведении $B_\alpha(z, z_n)$ при $-1 < \alpha < 0$ и при $0 < \alpha < 1$.

Теорема 2. Пусть последовательность $\{z_n\}_1^\infty$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|)^{\alpha+1} < \infty, \quad -1 < \alpha < 0.$$

Тогда произведение $B_\alpha(z, z_n)$ М. М. Джрбашяна и любое его подпроизведение имеет T_γ -предел для любого $\gamma \left(1 < \gamma < \frac{1}{\alpha+1}\right)$ кроме, возможно, множества E , для которого $\text{Cap}_{\gamma(\alpha+1)}(E) = 0$.

Доказательство. Из теоремы А и Б ясно, что достаточно доказать вышеуказанное утверждение для функции

$$K_\alpha(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi(\theta)}{(1 - ze^{-i\theta})^{\alpha+1}},$$

и теорема будет доказана.

Пусть $e^{ix} \in E_{\gamma(\alpha+1)}$. Тогда напишем

$$K_\alpha(z) = K_\alpha^{(1)}(z) + K_\alpha^{(2)}(z) + K_\alpha^{(3)}(z),$$

где интегрирование распространяется соответственно на отрезки

$$[-\pi, x-a], \quad [x+a, \pi] \text{ и } [x-a, x+a].$$

Так как первые два слагаемых аналитические функции в окрестности e^{ix} , а третье при $e^{ix} \in E_{\gamma(\alpha+1)}$ по лемме 2 стремится к нулю и $\text{Cap}_{\gamma(\alpha+1)}(E_{\gamma(\alpha+1)}) = 0$, то теорема доказана.

Теорема 3. Если последовательность $\{z_n\}_1^\infty$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|)^\alpha < +\infty \quad (0 < \alpha < 1), \quad (13)$$

то произведение $B_a(z, z_n)$ М. М. Джрбашяна при $0 < a < 1$ и каждое его подпроизведение имеет T_γ -предел для любого γ ($0 < \gamma < \frac{1}{a}$) кроме, возможно, множества E , для которого $\text{Cap}_{a,\gamma}(E) = 0$.

Доказательство. При условии (13) имеет место представление (7).

В работе (*) доказано, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{|z_n|}^1 \frac{(1-x)^{a-1}}{\left(1 - \frac{\bar{z}_n}{x} z\right)^a} dx$$

равномерно сходится в окрестности каждой точки $e^{i\theta}$ кроме точек $e^{i\theta} \in E$, для которых $\text{Cap}_a(E) = 0$. Так как для любого γ ($1 \leq \gamma < \frac{1}{a}$) из $\text{Cap}_a(E) = 0$ следует, что $\text{Cap}_{a,\gamma}(E) = 0$, то по теореме 2 получается доказательство и для $B_a(z, z_n)$ при $0 < a < 1$.

Ереванский политехнический институт

Դ. Ք. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ Բյուրակից անդամ Վ. Ս. ԶԱԲԵՐՅԱՆ

Մ. Մ. Զրբաշյանի $B_a(z, z_n)$ արտադրյալի շոշափողային սահմանային վարքագծի մասին

Նշանակենք $R(m, \theta, \gamma) = \{z : 1 - |z| \geq m |\arg z - \theta|^\gamma, 0 < |z| < 1\}$, որտեղ որպես $|\arg z - \theta|$ ընդունված է $\frac{z}{|z|}$ և $e^{i\theta}$ -ն միացնող միավոր շրջանի փոքր աղեղը:

Թող $f(z)$ ֆունկցիան որոշված լինի $D = \{z, |z| < 1\}$ -ում, եթե գոյություն ունի այնպիսի L , որ կամայական $m > 0$ համար $f(z) \rightarrow L$, երբ $z \rightarrow e^{i\theta}$ և $z \in R(m, \theta, \gamma)$, ապա կասենք, որ $f(z)$ ֆունկցիան $e^{i\theta}$ -կետում ունի T_γ -սահման:

Հոդվածում, օգտագործելով Բլաշկեի $B(z)$ արտադրյալի համապատասխան հատկությունները, ապացուցված են հետևյալ թեորեմները Մ. Մ. Զրբաշյանի $B_a(z, z_n)$ արտադրյալների համար, երբ $-1 < a < 1$:

Թեորեմ 1. Եթե

$$\sum (1 - |z_n|)^{1+a} < +\infty, \quad (-1 < a < 0),$$

ապա $B_a(z, z_n)$ արտադրյալը և նրա ցանկացած ենթաարտադրյալը ունեն T_γ -սահման ($1 \leq \gamma < \frac{1}{a+1}$), բացի գուցե մի E բազմությունից, որի համար $\text{Cap}_{\gamma(a+1)}(E) = 0$:

$$\sum (1 - |z_n|)^a < +\infty, \quad 0 < a < 1.$$

այսինքն $B_a(z, z_n)$ -ը և նրա ցանկացած $B_a(z, z_n)$ ենթաարտադրյալը ունեն
 I_T -առհման, բացի զրոյն մի E բազմությունից, որի համար $\text{Cap}_T(E) = 0$:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950.
- ² A. J. Lohwater, G. Piranian, Ann. Acad. Sci Fenn. Ser. A. J., v. 239 (1957).
- ³ G. T. GarGo, Canadian Journal of mathematics, v. 14, № 2, p. 334—348 (1962).
- ⁴ М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука М., 1966. ⁵ М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, Мат. заметки, т. 4, № 1, с. 3—10 (1968). ⁶ Д. Т. Багдасарян, И. В. Оганесян, ДАН Арм ССР, т. 90, № 5, с. 199—205 (1990).

УДК 519.1

С. Х. Дарбинян

О неполных гамильтоновых контурах в направленных графах

(Представлено чл.-корр. АН Армении Ю. Г. Шукурьяном 11/VII 1991)

В настоящей работе рассматриваются конечные орграфы, без петель и кратных дуг. Все понятия, и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в (1). Обозначим через $D(n, p)$ орграф порядка p , полученный из контура длины p после перероентации $n-1$ последовательных дуг. При $n=2$ орграф $D(2, p)$ называется неполным гамильтоновым контуром. Известно (2), что если орграф G удовлетворяет достаточному условию гамильтоновости Гуйя-Ури (3) или Вудала (4), то G содержит неполный гамильтоновый контур. В (5) доказано, что орграфы, удовлетворяющие достаточному условию гамильтоновости Мейнила (6), также содержат неполные гамильтоновые контуры (кроме некоторых описанных случаев).

Цель настоящей статьи показать, что любой p -вершинный ($p \geq 12$) направленный граф с минимальной полустепенью не меньше, чем $\lfloor (p-2)/2 \rfloor$, содержит неполные гамильтоновые контуры. Заметим, что ранее в (7) было доказано, что такие направленные графы, при $p \geq 10$, содержат орграфы $D(3, p)$.

Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначим множество вершин и множество дуг орграфа G , соответственно. Дугу, исходящую из вершины x и заходящую в вершину y , обозначим через xy .

Пусть $A, B \subseteq V(G)$ и $x \in V(G)$. Введем обозначения

$$E(A \rightarrow B) = \{yz \in E(G) / y \in A, z \in B\},$$

$$E(A, B) = E(A \rightarrow B) \cup E(B \rightarrow A),$$

$$I(x) = \{y \in V(G) / xy \in E(G)\},$$

$$O(x) = \{y \in V(G) / xy \in E(G)\}.$$

Запись $A \rightarrow B$ означает, что если $y \in A$ и $z \in B$, то $yz \in E(G)$. Если $H \subseteq V(G)$ и $A \rightarrow B$, $B \rightarrow H$, то будем писать $A \rightarrow B \rightarrow H$. Если же $A = \{x\}$, то вместо $\{x\}$ будем писать x .

Очевидно имеет место следующая.

Лемма. Пусть G есть p -вершинный ($p \geq 4$) гамильтонов орграф, не содержащий неполный гамильтонов контур. Если $C_p = x_1 x_2 \dots x_p x_1$ — гамильтонов контур в G и $x_k x_1 \in E(G)$, где $3 \leq k \leq p-1$, то для любого i , $k \leq i \leq p-1$, имеет место

$$|E(x_i \rightarrow x_2)| + |E(x_{i+1} \rightarrow x_{i+1})| \leq 1.$$

Теорема. Пусть G есть p -вершинный ($p \geq 12$) направленный граф с минимальными полустепенями, не меньшими $\lfloor (p-2)/2 \rfloor$. Тогда G содержит неполный гамильтонов контур.

Здесь приведем лишь схему доказательства теоремы.

Предположим, что G не содержит неполный гамильтонов контур. Известно (⁶), что G содержит контур длины $p-1$. Пусть $C_{p-1} = y_1 y_2 \dots y_{p-1} y_1$ — контур длины $p-1$ в G и вершина y не принадлежит этому контуру. Легко заметить, что для некоторого i , $1 \leq i \leq p-1$, имеет место $y_i y, y y_{i+1} \in E(G)$. Следовательно, G содержит такой гамильтонов контур $C_p = x_1 x_2 \dots x_p x_1$, что для некоторого j , $1 \leq j \leq p$, имеет место $x_{j-1} x_{j+1} \in E(G)$. Пусть для определенности $j=1$, т. е. $x_p x_2 \in E(G)$. Очевидно, что $x_1 x_2 \notin E(G)$ и $x_{p-1} x_1 \notin E(G)$.

Сначала для орграфа G и контура C_p доказываются утверждения 1—7.

1. $x_p x_2 \notin E(G)$ и $x_{p-1} x_2 \notin E(G)$.

2. Если $x_3 x_p \in E(G)$, то для всех $i \in [4, p-2]$ имеет место

$$|E(x_i \rightarrow x_2)| + |E(x_{i+1} \rightarrow x_{i+1})| \leq 1.$$

3. $E(x_1, \{x_2, x_{p-1}\}) \neq \emptyset$.

4. Если $x_1 x_{p-1} \in E(G)$, $E(x_2, x_p) = \emptyset$ и $x_{p-2} x_p \notin E(G)$, то для $n = \lfloor p/2 \rfloor$ и для некоторого k , где $k \geq 4$ и $k+n \leq p$, имеют место

$$I(x_p) = \{x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-2}, x_{p-1}\},$$

$$E(x_1 - \{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+n-1}\}) \neq \emptyset.$$

5. Если $x_1 x_{p-1} \in E(G)$ и $E(x_p, x_2) = \emptyset$, то $x_{p-1} x_2 \notin E(G)$.

6. $E(x_1, x_2) \neq \emptyset$ и $E(x_1, x_{p-1}) \neq \emptyset$.

7. $E(x_2, x_p) = E(x_2, x_{p-1}) = \emptyset$.

Из утверждений 6 и 7 имеем, что $x_2 x_1, x_1 x_{p-1} \in E(G)$ и

$$E(x_2, x_p) = E(x_2, x_{p-1}) = \emptyset.$$

Отсюда и из утверждения 5 вытекает, что возможен только случай $x_p x_{p-1} \in E(G)$ или случай $E(x_2, x_{p-1}) = \emptyset$.

Случай. $x_2 x_{p-1} \in E(G)$.

В этом случае сначала доказываются соотношения $x_{p-2} x_p \notin E(G)$ и $x_2 x_1 \notin E(G)$.

Отсюда с помощью утверждения 4 получим, что

$$I(x_p) = \{x_{p-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-2}\},$$

где $k \geq 4$ и $k+n \leq p$. Значит по лемме,

$$E(x_2 \rightarrow \{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+n-2}, x_1, x_4, x_{p-1}, x_p\}) = \emptyset,$$

т. е. $od(x_2) \leq n-2$, что является противоречием.

Случай. $E(x_3, x_{p-1}) = \emptyset$.

Из $E(x_3, \{x_p, x_{p-1}\}) = \emptyset$ вытекает, что для всех $i \in \{p, p-1\}$ имеет место $E(x_3, x_i) \neq \emptyset$. Отсюда с помощью утверждения 7 получим, что $x_3 x_i \in E(G)$. Значит, для некоторого i , $5 \leq i \leq p-3$ имеет место $x_1 x_3, x_3 x_{i+1} \in E(G)$. Поэтому $x_4 x_3 \notin E(G)$, т. е. $x_2 x_4 \in E(G)$ или $E(x_2, x_4) = \emptyset$.

Предположим, что $x_2 x_4 \in E(G)$. Тогда

$$\{x_5, x_7, \dots, x_{p-2}\} \rightarrow x_3 \rightarrow \{x_4, x_6, \dots, x_{p-3}\}.$$

Учитывая рассмотренный случай $x_2 x_{p-1} \in E(G)$ и утверждение 7, можем считать, что

$$E(x_1, \{x_4, x_5\}) = E(x_2, x_3) = \emptyset.$$

Поэтому, пользуясь леммой, получим

$$\{x_7, x_9, \dots, x_{p-2}\} \rightarrow x_1 \rightarrow \{x_6, x_8, \dots, x_{p-1}\},$$

$$\{x_{n+3}, x_{n+4}, \dots, x_{p-2}\} \rightarrow x_2 \rightarrow \{x_6, x_7, \dots, x_{n+2}\}.$$

Отсюда легко заметить, что $E(x_4, x_p) = \emptyset$. Следовательно, так как $E(x_1, x_4) = \emptyset$, то $x_4 x_6 \in E(G)$. Значит, по утверждению 7, $E(x_4, x_7) = \emptyset$. Итак, получили, что вершина x_4 несмежна с вершинами x_1, x_3, x_p , а это невозможно.

Теперь предположим, что $E(x_2, x_4) = \emptyset$. Можем считать, что $E(x_p, x_{p-2}) = \emptyset$. Из $E(x_2, \{x_4, x_{p-1}\}) = \emptyset$ вытекает, что

$$\{x_{n+3}, x_{n+4}, \dots, x_{p-2}\} \rightarrow x_2 \rightarrow \{x_5, x_6, \dots, x_{n+2}\}.$$

Из $E(x_3, \{x_{p-1}, x_p\}) = \emptyset$ следует, что $x_4 x_6 \notin E(G)$, а из $x_3 x_2, x_2 x_5 \in E(G)$ с помощью леммы получим, что $E(x_4, x_6) = \emptyset$ и $x_1 x_4 \in E(G)$. В результате имеем контур $C_{p-1} = x_1 x_4 x_3 \dots x_i x_3 x_{i+1} \dots x_p x_1$, где $5 \leq i \leq p-3$. Если $i \geq 6$, то $x_2 \rightarrow \{x_5, x_6\}$, а если $i = 5$, то $x_2 \rightarrow \{x_3, x_5\}$. Следовательно, G содержит неполный гамильтоновы контур, а это противоречит нашему предположению.

Следующий пример орграфа G показывает, что при $p = 9$ утверждение теоремы не верно.

Пусть G есть 9-вершинный орграф с множеством вершин $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, где $|V_i| = 3$ и $E(\langle V_i \rangle) = \emptyset$, и $xu \in E(G)$ тогда и только тогда, когда $x \in V_i$ и $u \in V_{(i+1) \bmod 3}$.

Очевидно, что G удовлетворяет условию теоремы и не содержит неполный гамильтоновы контур.

Ուղղորդված գրաֆների բերի համիլտոնյան ցիկլերի մասին

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է հետևյալ պնդումը՝

Թեորեմ. Դիցուք G -ն կամայական p -գագաթների ($p \geq 12$) ուղղորդված գրաֆ է, որի մինիմալ կիսաաստիճանները փոքր չեն $[(p-2)/2]$ քվից: Ապա G -ն պարունակում է բերի համիլտոնյան ցիկլ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Փ. Խարաի. Теория графов, Мир, М., 1973. ² A. Benh ciqe, Journal of Graph Theory, v. 8 № 1 (1984). ³ A. Ghoulia-Houri, C. R. Acad. Sci., Paris, v. 25 (1960).
- ⁴ D. R. Woodall, Proc. London Math. Soc., v. 14 (1972). ⁵ Ս. Խ. Դարբինյան, Երևանի համալսարանի Վ-րդ թիվի լուս. տեխ. կոնֆ. ժողովածու, Երևան, 1986. ⁶ H. Meyniel, Journal Combinatorial Theory, Ser. B, v. 14 (1975). ⁷ Ս. Խ. Դարբինյան, ԴԱՆ ԱրմՍՍՐ, տ. 84, № 2 (1987). ⁸ Ս. Խ. Դարբինյան, Մաթ. վոպր. կիբեռնետիկի և ՎԻՍԻՄԻՒԼՅԱՆԻ թԵԽՆԻԿԻ, Երևան, № 14 (1985).

МАТЕМАТИКА

УДК 621.391

Л. Г. Хачатрян, О. С. Арутюнян

Построение новых классов минимальных ширококестательных сетей

(Представлено академиком АН Армении Р. Р. Варшановым 29/VIII 1991)

Коммуникационную сеть принято определять как связный граф $G=(V, E)$, где V —множество вершин или множество элементов коммуникационной сети, а E —множество ребер или множество коммуникационных линий.

Процесс распространения информации в коммуникационной сети с началом в некоторой вершине и до полного ее заполнения называется ширококестанием, если имеют место следующие условия:

1) каждая передача информации требует затраты времени, которая принимается за единицу;

2) каждый элемент в течение единицы времени может передать информацию только одной из своих соседних вершин.

Минимальное время ширококестания для информации, исходящей из вершины u , обозначим через $t(u)$. Для произвольного связного графа G введем обозначение $t(G) = \max \{t(u)\}$. Очевидно, что $t(G) \geq \lceil \log_2 n \rceil$, где n — число вершин графа (в каждый момент времени число вершин, обладающих информацией, может увеличиться не более чем в два раза).

Минимальной ширококестательной сетью (МШС) называется граф на n вершинах, время ширококестания которого равно $\lceil \log_2 n \rceil$. Обозначим через $B(n)$ минимальное число ребер всех МШС на n вершинах. МШС, имеющая $B(n)$ ребер, называется наименьшей ширококестательной сетью (НШС).

До настоящего времени были известны значения величины $B(n)$ только для $n = 2^m$ и $n \leq 15$ (1). В работах (2,3) построены некоторые классы МШС и для $B(n)$ получены верхние оценки. В данной работе построены новые классы МШС, позволяющие улучшить оценки для $B(n)$, приведенные в (2,3), а в случае, когда $n \neq 2^m - 2$, найдено точное значение функции $B(n)$. В зависимости от количества элементов в коммуникационной сети рассмотрены три случая.

1. $n = 2^m - 2$.

Сначала заметим, что локальная степень любой вершины v каждой МШС на $2^m - 2$ вершинах удовлетворяет неравенству $\rho(v) \geq m - 1$ (так как если $\rho(v) \leq m - 2$ для некоторой вершины v , то широковещанием, начинающимся из v , за m единиц времени можно информировать не более чем $1 + 2^{m-1} + 2^{m-2} + \dots + 2^2 = 2^m - 3 < n$ вершин). Поэтому $B(2^m - 2) \geq \frac{(2^m - 2)(m - 1)}{2}$. Следовательно,

регулярный граф H (определяющий некую МШС) на $n = 2^m - 2$ вершинах является также НШС и $B(2^m - 2) = \frac{(2^m - 2)(m - 1)}{2}$. Перейдем к

построению графа H . Обозначим вершины графа через $v_0, v_1, \dots, v_{2^m-3}$. Две вершины v_i и v_j соединяются тогда и только тогда, когда $i + j = 2^r - 1 \pmod{2^m - 2}$, где $r = 1, 2, \dots, m - 1$. Легко заметить, что полученный граф не имеет петель и является $(m - 1)$ -регулярным. Имеет место следующая.

Теорема 1. *Граф H является НШС и $B(n) = B(2^m - 2) = \frac{m}{2}n - \frac{n}{2}$.*

2. $n = 2^m - 2^k$.

Пусть подмножество вершин M МШС $G(V, E)$ является вершинным покрытием, т. е. любое ребро G инцидентно некоторой вершине M . Допустим, что локальная степень вершины v_i , $\rho(v_i) \leq \log_2 |V| - 1$, где $v_i \in M$. Пусть также граф $G'(V', E')$ изоморфен графу $G(V, E)$: $(v_i, v_j) \in E \Leftrightarrow (v'_i, v'_j) \in E'$. Обозначим через $G_0(V_0, E_0)$ граф, определенный следующим образом: $V_0 = V \cup V'$, $E_0 = E \cup E' \cup \bar{E}$, где $\bar{E} = \{(v_i, v'_i) : v_i \in M\}$. Доказывается следующая

Лемма. *Граф $G_0(V_0, E_0)$ является МШС.*

Вышеприведенная лемма является основной для построения МШС на $n = 2^m - 2^k$ ($2 \leq k \leq m - 2$) вершинах.

Сначала рассмотрим случай $k = 2$, т. е. $n = 2^m - 4$. Пусть граф $H(V, E)$ является НШС на $2^{m-1} - 2$ вершинах, описанной в пункте 1. Легко заметить, что множество всех вершин v_i , где i нечетно (четно), является вершинным покрытием графа H . $M = \{v_i : i \text{ — нечетно}\}$ и $\rho(v_j) = m - 2 = \log_2 |V| - 1$, где j — четно (нечетно). Таким образом, граф H удовлетворяет всем требованиям леммы и, следовательно, граф $H_0(V_0, E_0)$, являющийся объединением H и H' (H' изоморфен H), $V_0 = V \cup V'$, $E_0 = E \cup E' \cup \bar{E}$, где $\bar{E} = \{(v_i, v'_i) : i \text{ — четно}\}$, является МШС, число ребер которой $S(n) = \frac{m}{2}n - \frac{3}{4}n$.

Нетрудно заметить, что граф H_0 также удовлетворяет требованиям

леммы, откуда и получим МШС на $n = 2(2^m - 4) = 2^{m+1} - 8$ вершинах с $S(n) = \frac{m+1}{2}n - n$ ребрами. Аналогично продолжая этот процесс,

можно построить МШС на $2^{k-2}(2^m - 4) = 2^{m+k-2} - 2^k$ вершинах. Таким образом имеет место следующая

Теорема 2. Для любого $k = 2, 3, \dots, m-2$ существует МШС на $n = 2^m - 2^k$ вершинах с числом ребер $S(n) = \frac{m}{2}n - \frac{k+1}{4}n$.

3. $n = 2^m - 2^k - j$.

Пусть $n = 2^m - 2^k - j$, где $0 < j < 2^k$, $k \leq m-2$. Рассмотрим наименьшее ширококвещательное дерево (*) на $n = 2^m$ вершинах с корнем v (дерево с корнем v , для которого имеет место $t(v) = \lfloor \log_2 n \rfloor$). Через v_i ($i = 1, \dots, m$) обозначим ту соседнюю вершину v , которая при ширококвещании из вершины v получает информацию в момент времени i , а через u_i ($i = 1, \dots, m-k$) обозначим ту из соседних вершин v_i , которая получает информацию из v_i в момент времени $i+1$. Удалим корень v . Далее из полученного множества несвязных деревьев с корнями $v_1, v_2, \dots, v_m$ удалим деревья с корнями $v_{m-k+1}, \dots, v_m$, а из дерева с корнем v_{m-k} удалим j вершин, максимально удаленных от вершины v_{m-k} . В результате получим граф G на $n = 2^m - 2^k - j$ вершинах. Все вершины графа G , кроме соседних вершин u_i ($i = 1, \dots, m-k$) соединяются с вершиной v_i ($i = 1, \dots, m-k$). Можно доказать, что полученный граф G' является МШС, и, следовательно, имеет место следующая

Теорема 3. Если $n = 2^m - 2^k - j$, где $0 < j < 2^k$, $k = 1, \dots, m-2$, то существует МШС на n вершинах, число ребер которой равно

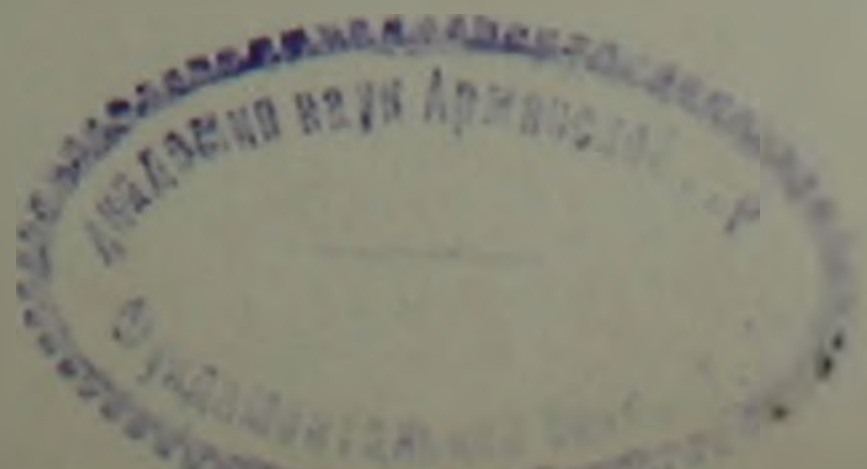
$$S(n) = (m - k + 1)n - m(k - 2) - (k + 2) + \frac{k(k + 1)}{2}.$$

Институт проблем информатики и автоматизации
Академии наук Армении и
Ереванского государственного университета

Լ. Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Հ. Ս. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Միևիմալ սփռող ցանցերի նոր դասերի կառուցում

Ուսումնասիրվում է միևիմալ սփռող ցանցերի կառուցման խնդիրը: G ցանցը կոչվում է միևիմալ սփռող ցանց, եթե նրա սփռման ժամանակը հավասար է՝ $t(G) = \lfloor \log_2 n \rfloor$. Որտեղ n -ն ցանցի էլեմենտների քանակն է: Ծանցի էլեմենտների քանակից կախված առաջարկվում են երեք նոր մեթոդներ միևիմալ սփռող ցանցեր կառուցելու համար: $n = 2^m - 2$ դեպքում կառուցվում է $H(m-1)$ -ոկտալար գրաֆը: Թեորեմ 1-ը պնդում է, որ H գրաֆը փոքրագույն սփռող ցանց է. որի կողերի քանակը հավասար է՝



$B(n) = \frac{mn}{2} - \frac{n}{2}$: Մինիմալ սփռող ցանցը կոչվում է փոքրագույն սփռող ցանց, եթե նրա կողերի քանակը (հաստատուն զաղաթների քանակի դեպքում) փոքրագույնն է: $n = 2^m - 2^k$ (թեորեմ 2) և $n = 2^m - 2^k - 1$, որտեղ $0 < j < 2^k$ (թեորեմ 3), ղեկավարում կառուցվում են մինիմալ սփռող ցանցեր, որոնց կողերի քանակները փոքր են մինչև այժմ հայտնի մինիմալ սփռող ցանցերի կողերի քանակներից:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

¹ A. M. Farley, S. T. Hedetniemi, A. Proskurowski *et al.*, Discrete Math., p. 189—193 (1979). ² A. M. Farley, Networks, v. 9, p. 313—332 (1979). ³ S. Chau, A. L. Liestman, Simon Fraser University, Department of Computing Science, TR 84—8 (1984). ⁴ A. Proskurowski, IEEE Trans on Comput, v. 30, p. 363—366 (1981).

МАТЕМАТИКА

УДК 518.9

В. С. Амбарин

Минимальное и максимальное время поимки для точек
круга Аполлония

(Представлено чл.-корр. АН Армении Ю. Г. Шукурбяном 14/X 1991)

Пусть преследователь P и преследуемый E перемещаются в плоскости с постоянными по модулю скоростями α и β соответственно. В начальный момент времени $t=0$ игроки P , E находятся в точках $P(O)$, $E(O)$. Выберем систему координат таким образом, чтобы точки $P(x_1, y_1)$ и $E(x_2, y_2)$ в начальный момент лежали на оси OX . Известно, что при применении игроком P стратегий параллельного сближения (сокращенно Π -стратегия) и при прямолинейном движении игрока E множество точек встречи является окружностью Аполлония. Также известно, что при всевозможных кусочно-постоянных стратегиях игрока E множество точек встречи содержится в круге Аполлония ⁽¹⁾.

Пусть M любая точка круга Аполлония. Обозначим через V_M множество всех стратегий игрока E , при которых встреча происходит в точке M , а P использует Π -стратегию.

Здесь стратегии определены как в ⁽¹⁾. Для каждой конкретной стратегии $v \in V_M$ время встречи при использовании игроком P Π -стратегии определяется однозначно. Обозначим это время через t_v , а множество времен встречи для различных стратегий $v \in V_M$ (когда встреча происходит в точке M) обозначим через T_M . Найдем

$$\min_{v \in V_M} \{T_M\} \text{ и } \max_{v \in V_M} \{T_M\}.$$

Очевидно, что

$$\min_{v \in V_M} \{T_M\} \geq \frac{|P(O)M|}{\alpha}.$$

Покажем существование стратегии $v_{\min}^M$ игрока E , при которой P , при применении им стратегии параллельного сближения, движется прямолинейно к точке M . Стратегия $v_{\min}^M$ показана на рис. 1. Игрок E выбирает направление к точке A и движется к ней по прямой. Игрок P тоже движется к точке A , прямолинейно через M . В точке A

игрок E делает поворот на $\pi - 2\Delta$ (где Δ — угол $\angle A E(0) X$), а P продолжает двигаться к точке M прямолинейно, и встреча происходит в точке M .

Прежде чем найти максимум времени встречи, докажем две леммы.

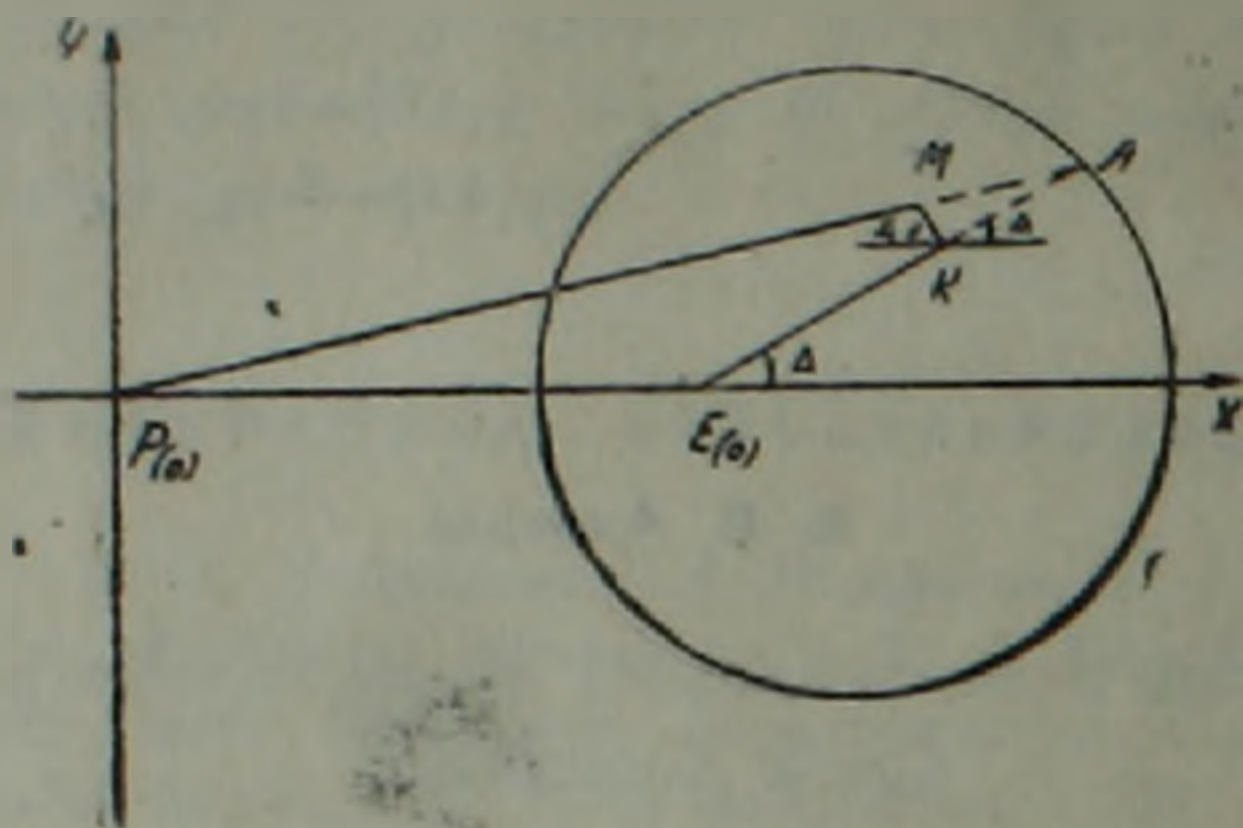


Рис. 1

Предположим, игрок E движется по некоторой кривой линии, а игрок P применяет П-стратегию и M — точка встречи. Обозначим через t соответствующее время встречи.

Поскольку при использовании игроком P стратегии параллельного сближения отрезок $|PE|$ остается параллельным отрезку $|P(0)E(0)|$, т. е. оси OX , то проекции скоростей игроков P и E на ось OY равны между собой ($\dot{y}_1 = \dot{y}_2$).

Движение игрока E описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_2 = v(t),$$

$$\dot{y}_2 = \sqrt{\beta^2 - v^2(t)}, \quad ((\dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_2)^2 = \beta^2).$$

Движение игрока P при использовании им стратегии параллельного сближения описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_1 = \sqrt{\alpha^2 - (\dot{y}_1)^2} = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 + v^2(t)} = \sqrt{c^2 + v^2(t)}, \quad (\alpha^2 - \beta^2 = c^2, c > 0),$$

$$\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = \sqrt{\beta^2 - v^2(t)}.$$

Ясно, что

$$|P(0)M_x| = \int_0^t \sqrt{c^2 + v^2(t)} dt. \quad (1)$$

$$|E(0)M_x| = \int_0^t v(t) dt, \quad (2)$$

где M_x проекция точки M на ось OX .

Из теоремы о среднем имеем:

$$\int_0^t \sqrt{c^2 + v^2(t)} dt = \sqrt{c^2 + v(t'') \cdot t} \quad (3)$$

$$\int_0^t v(t) dt = v(t') \cdot t, \quad \text{где } t', t'' \in [0, t]. \quad (4)$$

Лемма 1. Имеет место неравенство

$$v(t') \leq v(t'').$$

Доказательство. Составим разность

$$t^2 (v^2(t'') - v^2(t')) = \left(\int_0^t (c^2 + v^2(t))^{\frac{1}{2}} dt \right)^2 - \left(\int_0^t c dt \right)^2 - \left(\int_0^t v(t) dt \right)^2. \quad (5)$$

Согласно неравенству Минковского для интегралов ⁽²⁾, если $0 < k < 1$, то

$$\begin{aligned} \left(\int (f + g + \dots + l)^k dx \right)^{1/k} &\geq \left(\int f^k dx \right)^{1/k} + \\ &+ \left(\int g^k dx \right)^{1/k} + \dots + \left(\int l^k dx \right)^{1/k} \end{aligned} \quad (6)$$

и равенство имеет место тогда и только тогда, когда $f, g, \dots, l$ пропорциональны.

При $k = \frac{1}{2}$ из неравенства (6) следует

$$v(t'') - v(t') \geq 0.$$

Лемма доказана.

Построим перпендикуляр m к прямой $(P(0)E(0))$, проходящий через точку M . Допустим, m пересекает окружность Аполлония в точках B_1 и B_2 . Далее допустим $|MB_1| < |MB_2|$.

Пусть E движется по полупрямой $[E(0), B_1]$. Тогда движение игроков E и P описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_2 = v_1,$$

$$\dot{y}_2 = \sqrt{\beta^2 - v_1^2},$$

$$\dot{x}_1 = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 + v_1^2} = \sqrt{c^2 + v_1^2},$$

$$\dot{y}_1 = \sqrt{\beta^2 - v_1^2},$$

где τ_1 — постоянная величина. Время встречи в точке B_1 обозначим через t_1 .

Лемма 2. Справедливо неравенство

$$t \leq t_1.$$

Прежде чем доказать лемму, рассмотрим одно замечание.

Замечание. Если две точки окружности Аполлония a_1 и a_2 находятся справа (слева) от перпендикуляра l к отрезку $|P(0)E(0)|$ в точке $E(0)$ и $a_{1x} \leq a_{2x}$ (a_{1x} и a_{2x} — проекции точек a_1 и a_2 на ось OX соответственно), то

$$\sqrt{c^2 + (v^1)^2} \leq \sqrt{c^2 + (v^2)^2} \quad (\sqrt{c^2 + (v^1)^2} \geq \sqrt{c^2 + (v^2)^2}).$$

где $\sqrt{c^2 + (v^i)^2}$ — проекция скорости P на ось OX , когда встреча происходит в точке a_i , $i = 1, 2$.

Доказательство леммы 2. Допустим, что точка M находится справа (слева) от перпендикуляра l (см. рис. 2). Учитывая (3) и (4), рассмотрим следующие прямолинейные движения игроков E и P :

$$\dot{x}_2 = v(t''),$$

$$\dot{x}_1 = \sqrt{c^2 + v^2(t'')},$$

$$\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = \sqrt{\beta^2 - v^2(t'')}$$

и обозначим точку встречи через A^* . Заметим, что точка A^* находится на окружности Аполлония и в силу леммы 1 A^* не может находиться слева (справа) от точки B_1 .

Следовательно

$$\sqrt{c^2 + v_1^2} < \sqrt{c^2 + v^2(t'')}.$$

Далее имеем

$$t = \frac{|P(0)M_x|}{\sqrt{c^2 + v^2(t'')}} < \frac{|P(0)M_x|}{\sqrt{c^2 + v_1^2}} = t_1.$$

Теперь пусть точка M находится на перпендикуляре l . Тогда $v_1 = v(t') = 0$.

Очевидно, что из

$$c = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \leq \sqrt{c^2 - v^2(t'')}$$

следует $t \leq t_1$.

Лемма доказана.

Таким образом доказана

Теорема.

$$\min_{v \in V_M} \{T_M\} = \frac{|P(0)M|}{\alpha} \quad \text{и} \quad \max_{v \in V_M} \{T_M\} = \frac{|P(0)B_1|}{\alpha}.$$

На рис. 2 показана стратегия $v_{\max}^M$ игрока E , при которой встреча происходит в точке M с максимальным временем ($|B_1L| = |LM|$).

Следствие. Пусть M и N любые точки круга Аполлония и имеет место неравенство

$$M_x \leq N_x,$$

где M_x и N_x проекции точек M и N на ось OX .

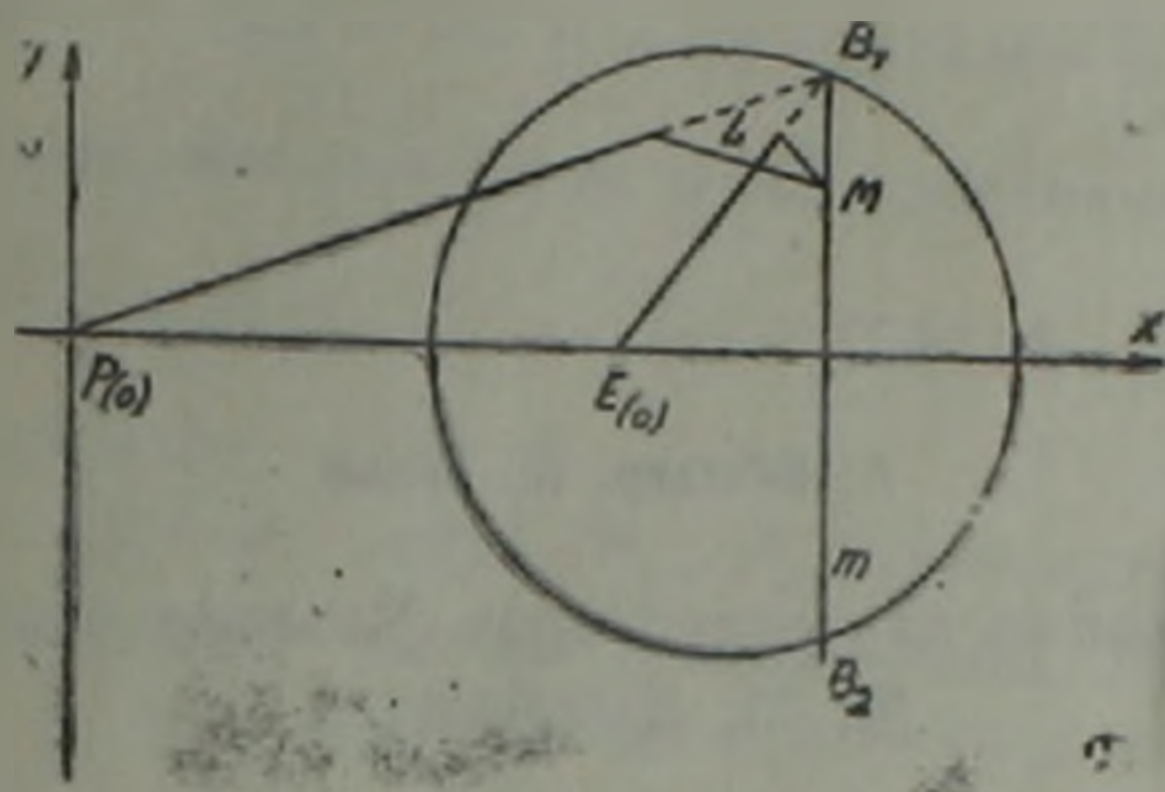


Рис. 2

Тогда справедливо

$$t_{V_{\max}}^M < t_{V_{\max}}^N$$

и равенство имеет место только при $M_x = N_x$.

Доказательство следует из леммы 2.

Институт проблем информатики и автоматизации
Академии наук Армении

Վ. Ս. ՀԱՄԲԱՐՅԱՆ

Ապոլոնյան շրջանի կետերի միևնույն և մահսիմալ բռնվելու ժամանակները

Աշխատանքը վերաբերում է հարթության վրա պարզ հետապնդման խնդիրներին: Ծնթադրվում է, որ P հետապնդվողը կիրառում է զուգահեռ մոտեցման ստրատեգիա (Γ -ստրատեգիա):

Խնդիր է դրվում գտնել E հետապնդվողի այնպիսի շարժում, որի դեպքում հանդիպման ժամանակը մաքսիմալ (մինիմալ) է, այն պայմանով, որ Ապոլոնյան շրջանի M հանդիպման կետը ֆիքսված է: Այս խնդիրն ամբողջությամբ լուծված է: Կառուցվում է այն կետերի բազմությունը, որոնցում հանդիպման մաքսիմալ ժամանակը հաստատուն է: Այդպիսի կետերի բազմությունը համընկնում է $P(0)$, $E(0)$ ուղղուն ուղղահայաց ուղղի B_1B_2 -ի այն հատվածների հետ, որոնք ընկած են Ապոլոնյան շրջանի մեջ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Л. А. Петросян, ДАН СССР, т. 161, № 1, с. 52—54 (1965). ² Г. Г. Харди, Дж. Литтлвуд, Г. Полиа, Неравенства, М., 1948.

УДК 517.984

А. Бёттхер, Х. Вольф

Метод коллокации для операторов Теплица в пространствах
М. М. Джрбашяна

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. Б. Нерсисяном 21/X 1991)

Пространством Джрбашяна A_α^2 называется гильбертово пространство всех голоморфных в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций f , для которых

$$\|f\|^2 = (\alpha + 1) \int_D |f(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha dA(z) < \infty,$$

где $dA = r dr d\theta / \pi$ — нормированная двумерная мера Лебега и $\alpha > -1$ является параметром. Скалярное произведение в A_α^2 определяется равенством

$$(f, g) = (\alpha + 1) \int_D f(z) \overline{g(z)} (1 - |z|^2)^\alpha dA(z).$$

Пространство A_α^2 является подпространством пространства $L_\alpha^2(D)$, и ортогональный проектор $P: L_\alpha^2(D) \rightarrow A_\alpha^2$ действует по правилу

$$(Pf)(z) = (\alpha + 1) \int_D f(w) (1 - z\bar{w})^{-\alpha-2} (1 - |w|^2)^\alpha dA(w) \quad (z \in D).$$

Интересные исторические замечания и подробное изложение теории пространств A_α^2 можно найти в книге А. Э. Джрбашяна и Ф. А. Шамомяна (1).

Пусть $a \in C(\overline{D})$ непрерывная в замкнутом единичном круге $\overline{D}$ функция. Оператор

$$T(a): A_\alpha^2 \rightarrow A_\alpha^2, \quad f \mapsto P(af)$$

называется оператором Теплица, порожденным функцией a . Отметим, что уравнение $T(a)f = g$ может быть записано как интегральное уравнение

$$(\alpha + 1) \int_D \alpha(\omega) \frac{(1 - |\omega|^2)^\alpha}{(1 - z\bar{\omega})^{\alpha+2}} f(\omega) dA(\omega) = g(z) \quad (z \in D).$$

Полагаем $\chi_n(z) = z^n$ ($n \geq 0$). Одночлены $\chi_n(z)$ принадлежат A_α^1 , и ортонормированные одночлены

$$e_n(z) = (\Gamma(n/2 + 1) \Gamma(\alpha + 2) / \Gamma(n/2 + \alpha + 2)) z^n$$

образуют ортонормированный базис в A_α^2 . Обозначаем через

$$P_n : A_\alpha^1 \rightarrow \text{span} \{ \chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n \} = \text{span} \{ e_0, e_1, \dots, e_n \}$$

ортogonalный проектор.

Метод редукций (или метод $\{P_n, P_n\}$) для приближенного решения уравнения $T(a)f = g$ состоит в следующем. Ищется приближенное решение f_n в виде многочлена степени не выше n , так, чтобы совпадали первые $n + 1$ коэффициентов Тейлора (в точке O) функций $T(a)f_n$ и g . Иными словами, уравнение $T(a)f = g$ заменяется приближенным уравнением

$$P_n T(a)f_n = P_n g \quad (f_n \in \text{Im } P_n). \quad (1)$$

Будем говорить, что метод редукции (или метод $\{P_n, P_n\}$) применим к обратимому оператору Теплица $T(a)$ в A_α^2 , если существует $n_0 \geq 0$ такое, что уравнения (1) однозначно разрешимы для всех $n \geq n_0$ и всех $g \in A_\alpha^1$ и приближенные решения f_n сходятся по норме пространства A_α^1 к (точному) решению f уравнения $T(a)f = g$ при $n \rightarrow \infty$. В работе (2) мы доказали, что метод редукции применим к всякому обратимому оператору Теплица.

Настоящая заметка посвящена двум другим методам приближенного решения уравнения $T(a)z = g$. Пусть $0 < r < 1$. Полагаем

$$\gamma_{j,n} = r e^{2\pi i j / (n+1)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; j = 0, \dots, n),$$

т. е. $\gamma_{j,n}$ — нули многочлена $z^{n+1} - r^{n+1}$, а также определяем функции $K_{j,n} \in A_\alpha^2$ равенствами

$$K_{j,n}(z) = (1 - z\bar{\gamma}_{j,n})^{-\alpha-2} \quad (z \in D). \quad (2)$$

Мы здесь ищем приближенное решение f_n уравнения $T(a)f = g$ или в виде многочлена степени не выше n , или в виде линейной комбинации функций $K_{0,n}, \dots, K_{n,n}$, а неизвестные коэффициенты многочлена или линейной комбинации определяются коллокационными уравнениями

$$(T(a)f_n)(\gamma_{j,n}) = g(\gamma_{j,n}) \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

Обозначаем через

$$L_n: A_n^2 \rightarrow \text{span} \{ \chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n \} = \text{span} \{ e_0, e_1, \dots, e_n \}$$

интерполяционный проектор с узлами $\gamma_{0,n}, \dots, \gamma_{n,n}$, т. е. проектор, сопоставляющий функции $f \in A_n^2$ многочлен $L_n f \in \text{Im } P_n$ такой, что $(L_n f)(\gamma_{j,n}) = f(\gamma_{j,n})$ при $j = 0, 1, \dots, n$. Имеем

$$L_n f = \sum_{j=0}^n f(\gamma_{j,n}) l_{j,n},$$

где лагранжевы многочлены $l_{0,n}, \dots, l_{n,n}$ определены уравнениями

$$l_{j,n}(\gamma_{k,n}) = \delta_{j,k} \quad (j, k \in \{0, \dots, n\}).$$

В силу воспроизводящего свойства функций («ядер») (2) имеют место равенства

$$f(\gamma_{j,n}) = (f, K_{j,n}) \quad (f \in A_n^2).$$

Итак, можно также записать

$$L_n f = \sum_{j=0}^n (f, K_{j,n}) l_{j,n}.$$

Из этого представления немедленно получаем следующую формулу для сопряженных проекторов L_n^*

$$L_n^* f = \sum_{j=0}^n (f, l_{j,n}) K_{j,n}.$$

Таким образом, коллокационные методы, упомянутые выше, могут быть интерпретированы заменой уравнения $T(a)f = g$ приближенными уравнениями

$$L_n T(a) f_n = L_n g \quad (f_n \in \text{Im } P_n), \quad (3)$$

соответственно

$$L_n T(a) f_n = L_n g \quad (f_n \in \text{Im } L_n^*), \quad (4)$$

Будем говорить, что метод $\{L_n, P_n\}$ (соответственно $\{L_n, L_n^*\}$) применим к обратимому оператору Теплица $T(a)$, если существует $n_0 \geq 0$, такое, что уравнения (3) (соответственно (4)) имеют единственное решение f_n при всех $n \geq n_0$ и всех $g \in A_n^2$ и функции f_n сходятся к (точному) решению f уравнения

$$T(a)f = g \text{ в норме пространства } A_n^2 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Теорема 1. Методы $\{L_n, P_n\}$ и $\{L_n, L_n^*\}$ применимы к каждому обратимому оператору Теплица $T(a)$.

Доказательство опирается на наблюдение, что матричное представление проекторов L_n относительно базиса $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} I & D_1 & D_2 & D_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где $D_1, D_2, D_3, \dots$ — следующие диагональные матрицы:

$$D_1 = \text{diag} \left(\frac{(e_{n+1}, K_{0,n})}{(e_0, K_{0,n})}, \dots, \frac{(e_{2n+1}, K_{0,n})}{(e_n, K_{0,n})} \right),$$

$$D_2 = \text{diag} \left(\frac{(e_{2n+2}, K_{0,n})}{(e_0, K_{0,n})}, \dots, \frac{(e_{3n+2}, K_{0,n})}{(e_n, K_{0,n})} \right),$$

Отсюда вытекает (неожиданный!) факт, что

$$\|L_n - P_n\| \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \|L_n^* - P_n^*\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

и вследствие этого нашу теорему можно почти непосредственно вывести из применимости метода $\{P_n, P_n^*\}$ к каждому обратимому оператору Теплица $T(a)$.

Отметим, что применимость методов $\{L_n, P_n\}$ и $\{L_n^*, L_n^*\}$ существенно зависит от специального выбора коллокационных узлов $\tau_{j,n}$. Пусть, например, $r \in (0, 1)$ и

$$\beta_{j,n} = -r + j(2r)/n \quad (j = 0, \dots, n).$$

Обозначим теперь через $R_n: A_n^2 \rightarrow \text{Im } P_n$ интерполяционный проектор с узлами $\beta_{0,n}, \dots, \beta_{n,n}$.

Теорема 2. *Проекторы R_n сильно не сходятся к единичному оператору в пространстве A_n^2 . В частности, метод $\{R_n, P_n\}$ не применим к единичному оператору, и, тем более, не применим к каждому обратимому оператору Теплица.*

Доказательство этой теоремы основано на том обстоятельстве, что сходимость в A_n^2 влечет за собой поточечную сходимость в D и что можно указать $h \in (0, 1)$ и $a \in (1, \infty)$, такие, что

$$(R_n f)(ih) \rightarrow f(ih) \quad \text{для} \quad f(z) = 1/(z - a) \quad z \in D.$$

Наконец, отметим, что мы также изучили матричный случай, т. е. применимость методов $\{P_n, P_n^*\}$, $\{L_n, P_n\}$, $\{L_n^*, L_n^*\}$ к операторам Теплица $T(a)$ в прямой сумме N экземпляров A_n^2 , порожденным матричными функциями a порядка N с элементами из $C(\bar{D})$. В этой ситуации проявляется новый (но для специалистов, наверное, не удивительный) эффект. Для матричной функции a с элементами из $C(\bar{D})$ обозначим через $\{a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ последовательность коэффициентов Фурье ограниченной функции $a|_{\partial D}$ и через $W(a)$ дискретный мат-

ричный оператор Винера—Хопфа, действующий в прямой сумме N экземпляров пространства l^2 по правилу

$$(W(\bar{a})\varphi)_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-j} \varphi_k \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Теорема 3. Пусть a — матричная функция с элементами из $\mathcal{C}(\bar{D})$. Для того, чтобы к оператору $T(a)$ был применим метод $\{P_n, P_n\}$ (соответственно $\{L_n, P_n\}$ или $\{L_n, L_n\}$), необходимо и достаточно, чтобы оба оператора $T(a)$ и $W(\bar{a})$ были обратимыми в соответствующей прямой сумме N экземпляров пространств A_1^2 и l^2 .

Доказательство такой теоремы требует более мощных средств, в частности, некоторых результатов Б. Зильберманна (см. главу 7 книги (2)).

Технический университет
Кембридж (ФРГ)

Ա. ԲՅՈՏԵՆԵՐ, Հ. ՎՈԼՅ

Տեղադրման եղանակը Տյոպլիցի օպերատորների համար
Մ. Զրբաշյանի տարածություններում

Մ. Զրբաշյանի A_1^2 տարածություններում դիտարկվում է տեղադրման (կոնկացիայի) եղանակը Տյոպլիցի օպերատորների համար: Ցույց է տրված, որ այդ եղանակը կարելի է կիրառել շրջվող օպերատորի նկատմամբ, երբ մատավոր լուծումը փնտրվում է որպես բազմանդամ կամ որպես հատուկ բնորոշված կորիզների գծային կոմբինացիա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԲՈՒՆ

¹ A. E. Djrbashian, F. A. Shamolian, Topics in the Theory of A_p^2 Spaces, BSB-Teubner, Leipzig, 1968. ² A. Böttcher, B. Silbermann, Analysis of Toeplitz Operators, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, N. Y., 1990.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539. 3

В. Н. Акопян

Антиплоское напряженное состояние составного анизотропного клина,
 ослабленного трещинами

(Представлено чл.-корр. АН Армении Б. Л. Абрамяном 30/VII 1991)

Многие смешанные краевые задачи анизотропного или кусочно-однородного клина рассмотрены в работах (1-4).

В настоящей статье рассматривается антиплоское напряженное состояние анизотропного составного клина, ослабленного одним или несколькими трещинами. Задача в общем случае математически формулируется в виде системы сингулярных интегральных уравнений, решение которой строится методом ортогональных многочленов. В одном частном случае получено замкнутое решение поставленной задачи.

1. Пусть упругий составной клин из двух разнородных клиньев, изготовленных из материалов, обладающих цилиндрической анизотропией, с углами раствора α и β соответственно, по линии соединения на отрезках $[a_i, b_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) ослаблен трещинами и деформируется под воздействием касательных напряжений $\tau_{\theta r}^{\pm}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), которые действуют на берегах трещин и вызывают антиплоскую деформацию.

При этом считается, что боковые кромки клиньев свободны от нагрузок и ось цилиндрической анизотропии проходит через вершину клина.

Необходимо определить контактные напряжения, действующие на участках контакта клиньев, их коэффициенты интенсивности в вершинах трещин, а также меры раскрытия трещин.

Для определенности в дальнейшем все величины, касающиеся верхнего или нижнего клиньев, будут снабжены индексами 1 и 2 соответственно.

Тогда поставленная задача математически формулируется в виде следующей смешанной граничной задачи:

$$\begin{aligned} \tau_{\theta r}^{(1)}(r, \alpha) = \tau_{\theta r}^{(2)}(r, -\beta) = 0 \quad (0 < r < \infty); \\ \tau_{\theta r}^{(1)}(r, 0) = \tau_{\theta r}^{(2)}(r, 0); \quad W^{(1)}(r, 0) = W^{(2)}(r, 0) \quad (r \in L); \quad (1.1) \\ \tau_{\theta r}^{(1)}(r, 0) = \tau_{\theta r}^{+}(r); \quad \tau_{\theta r}^{(2)}(r, 0) = \tau_{\theta r}^{-}(r) \quad (r \in L), \end{aligned}$$

где $\tau_{\alpha}^{\pm}(r)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) — известные функции, характеризующие заданные на берегах трещины нагрузки, а $L = \bigcup_{i=1}^N [a_i, b_i]$.

При этом функции перемещения $W^{(i)}(r, \theta)$ ($i = 1, 2$), каждая в области своего определения, удовлетворяют уравнению (1)

$$\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial r} - \frac{2\lambda_i}{r} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial \theta^2} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь $\lambda_i = a_{45}^{(i)}/a_{55}^{(i)}$ — соотношение упругих постоянных соответствующих материалов (1)

Интегрируя уравнения (1.2) и удовлетворяя условиям (1.1), для определения мер раскрытия трещин получим следующую систему интегральных уравнений:

$$2\pi \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} R(r, r_0) W_i'(r_0) dr_0 = -rf_j(r), \quad (1.3)$$

$$(a_i < r < b_i; \quad i = 1, 2, \dots, N),$$

которую нужно решить при условиях

$$W(a_i) = W(b_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (1.4)$$

Здесь введены обозначения

$$W(r) = W^{(1)}(r, 0) - W^{(2)}(r, 0) \quad (r \in L);$$

$$R(r, r_0) = \frac{1}{\pi x^+} \left[\frac{1}{\ln(r_0/r)} + x^+ R_1(r, r_0) \right];$$

$$R_1(r, r_0) = \int_0^{\infty} \left[\frac{\operatorname{ch} \vartheta^+ s - \operatorname{ch} \vartheta^- s}{x^+ \operatorname{sh} \vartheta^+ s + x^- \operatorname{sh} \vartheta^+ s} - \frac{1}{x^+} \right] \sin(s \ln(r_0/r)) ds;$$

$$f_j(r) = -x_1 \left\{ \tau_{0j}^+(r) - \tau_{0j}^-(r) - \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} K(r, r_0) (\tau_{0i}^+(r_0) - \tau_{0i}^-(r_0)) dr_0 \right\};$$

$$K(r, r_0) = \frac{1}{2\pi i r} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{\operatorname{tg}(e_1 as) - x \operatorname{tg}(e_2 as)}{\operatorname{tg}(e_1 as) + x \operatorname{tg}(e_2 as)} \left(\frac{r_0}{r} \right)^s ds;$$

$$d_i = (a_{45}^{(i)})^2 - (a_{44}^{(i)})^2; \quad x_i = \frac{d_i}{e_i a_{55}^{(i)}}; \quad e_i = \sqrt{1 - \lambda_i^2}; \quad (i = 1, 2);$$

$$\vartheta^{\pm} = e_1 \alpha \pm e_2 \beta; \quad x^{\pm} = 1 \pm x; \quad x \equiv x_1/x_2.$$

Далее, для решения системы (1.3) на каждом интервале $[a_i, b_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) перейдем к новым переменным по формулам

$$r_0 = \exp[c_i s + d_i], \quad r = \exp[c_i x + d_i],$$

где

$$c_i = \frac{1}{2} \ln(b_i/a_i) \quad \text{и} \quad d_i = \frac{1}{2} \ln(a_i/b_i).$$

Тогда систему (1.3) можно записать в виде:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_i(s)}{s-x} ds + \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 Q_{i,j}(x, s) \varphi_j(s) ds = F_i(x), \quad (1.5)$$

$$(-1 < x < 1; \quad i = 1, 2, \dots, N).$$

Здесь

$$\varphi_i(x) = \exp[r_i x + d_i] W'(\exp[c_i x + d_i]);$$

$$F_i(x) = -\frac{\pi x^+}{2x} \exp[c_i x + d_i] f_i(\exp[c_i x + d_i]);$$

$$Q_{i,j}(x, s) = \frac{c_i(1 - \delta_{ij})}{c_j s - c_i x + d_j - d_i} + x R_i(\exp[c_i x + d_i], \exp[c_j s + d_j]);$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

2. Решение системы (1.5) представим в виде бесконечного ряда

$$\varphi_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n^{(i)} T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (2.1)$$

где $T_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — многочлены Чебышева первого рода, а $X_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N; n = 0, 1, 2, \dots$) — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя выражения функций $\varphi_i(x)$ из (2.1) в (1.5) по известной процедуре (5), приходим к следующей эквивалентной системе бесконечных систем алгебраических уравнений:

$$X_m^{(i)} = \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}^{(i,j)} X_n^{(j)} = C_m^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, N; \quad m = 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

$$A_{m,n}^{(i,j)} = \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 U_{m-1}(x) \sqrt{1-x^2} dx \int_{-1}^1 Q_{i,j}(x, s) \frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds; \quad (2.3)$$

$$C_m^{(i)} = -\sum_{j=1}^N A_{m,0}^{(i,j)} X_0^{(j)} + \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 F_i(x) U_{m-1}(x) \sqrt{1-x^2} dx,$$

где $U_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — многочлены Чебышева второго рода.

Исходя из того, что ядра бесконечных систем $A_{\alpha, \beta}^{(i, j)}$ — регулярные функции, легко доказать (3.6), что система (2.3) квазивполне регулярна.

Теперь, интегрируя (2.1), найдем меры раскрытия трещин. Они выражаются формулами

$$W_i(\exp[c_i x + d_i]) = c_i \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(i)} U_{n-1}(x) \sqrt{1-x^2} + c_i X_0^{(i)} \arcsin x + q_i \quad (2.4)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N),$$

где q_i ($i = 1, 2, \dots, N$) — постоянные интегрирования. Удовлетворяя условиям (1.4), найдем $X_0^{(i)} = q_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$).

Контактные напряжения вне трещин найдем из уравнения (1.5) при ($|x| > 1$). Они имеют вид:

$$\begin{aligned} \tau_{32}^{(i)}(x^*) &= \frac{x^*}{\pi x_2^+} \left\{ \frac{2\sqrt{x^2-1} \operatorname{sgn} x - 1}{\sqrt{x^2-1} |2|x| - \sqrt{x^2-1}|} \times \right. \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^{(i)}}{n} [H(x) + (-1)^n H(-x)] - \\ &\quad - \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(i)} \int_{-1}^1 Q_{n,j}(x, s) \frac{T_n(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} \Big\} - \\ &\quad - c_i \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 K(x^*, s^*) s^* (\tau_{0j}^+ - \tau_{0j}^-) ds; \\ &\quad (x^* = \exp[c_i x + d_i]; \quad |x| > 1). \end{aligned}$$

При этом коэффициенты интенсивности этих напряжений K в точках a_i и b_i определяются соотношениями:

$$K(a_i) = \frac{1}{\pi x_2^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n X_n^{(i)}}{n}; \quad K(b_i) = \frac{1}{\pi x_2^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^{(i)}}{n}.$$

Отметим, что в частном случае, когда $x^- = 0$, уравнение (1.3) при помощи замены переменных $s = r_0^{1/2}$ и $x = r^{1/2}$ сводится к системе сингулярных интегральных уравнений (4)

$$\sum_{i=1}^N \int_{\bar{a}_i}^{\bar{b}_i} \frac{V_i(s)}{s-x} ds = F_j(x) \quad (\bar{a}_j < x < \bar{b}_j; \quad j = 1, 2, \dots, N), \quad (2.5)$$

которая допускает замкнутое решение (1)

$$V_l = \frac{(-1)^{N-l+1} \left\{ \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N (-1)^{N-j} \int_{\frac{a_l}{2}}^{\frac{b_l}{2}} \sqrt{\left| \prod_{j=1}^N (t - \bar{a}_j)(t - \bar{b}_j) \right|} \frac{F_l(t)}{t-x} dt \right\}}{\pi \sqrt{\left| \prod_{i=1}^N (x - \bar{a}_i)(x - \bar{b}_i) \right|}}, \quad (26)$$

($\bar{a}_l < x < \bar{b}_l$; $l = 1, 2, \dots, N$)

где

$$V_l(s) = s^{1/2} W_l(s^{1/2}); \quad F_l(x) = \frac{\pi x^+}{2\pi} x^{1/2-1/2} f_l(x^{1/2});$$

$$\bar{a}_i = a_i^{2/2}; \quad \bar{b}_i = b_i^{2/2} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Далее, приведем формулы для остальных важных механических характеристик в случае, когда имеется только одна трещина и

$$\Psi(r) = \pi \int_a^r \ln \left| \frac{A}{B} \right| dr_0,$$

где

$$A = (\bar{b} - \bar{a})^2 - 4 \left(r^{2/2} - \frac{\bar{b} + \bar{a}}{2} \right) \left(r_0^{2/2} - \frac{\bar{b} + \bar{a}}{2} \right) +$$

$$+ 4 \sqrt{(r^{2/2} - \bar{a})(\bar{b} - r^{2/2})(r_0^{2/2} - \bar{a})(\bar{b} - r_0^{2/2})},$$

$$B = (\bar{b} - \bar{a})^2 - 4 \left(r^{2/2} - \frac{\bar{b} + \bar{a}}{2} \right) \left(r_0^{2/2} - \frac{\bar{b} + \bar{a}}{2} \right) -$$

$$- 4 \sqrt{(r^{2/2} - \bar{a})(\bar{b} - r^{2/2})(r_0^{2/2} - \bar{a})(\bar{b} - r_0^{2/2})},$$

($\bar{a} < r < \bar{b}$)

$$\tau_{02}(r) = -\frac{r_0}{\pi} \times$$

$$\times \frac{\left| \sqrt{(r^{2/2} - \bar{a})(r^{2/2} - \bar{b})} \operatorname{sgn} \left(r^{2/2} - \frac{\bar{b} + \bar{a}}{2} \right) - \frac{\bar{b} - \bar{a}}{2} \right| r^{2/2} I_1(r^{2/2})}{r \sqrt{(r^{2/2} - \bar{a})(r^{2/2} - \bar{b})} \left| \left| r^{2/2} - \frac{\bar{b} + \bar{a}}{2} \right| - \sqrt{(r^{2/2} - \bar{a})(r^{2/2} - \bar{b})} \right|};$$

$$I_1(x) = \int_a^{\bar{b}} \frac{\xi^{1/2} \sqrt{(\xi - \bar{a})(\bar{b} - \xi)}}{\sqrt{\xi}(\xi - x)} d\xi; \quad (0 < x < \bar{a}; \quad \bar{b} < x < \infty)$$

$$K(a) = \frac{\tau_0}{\pi} \frac{a^{2/2+1} I_1(a^{2/2})}{\sqrt{\bar{b} - \bar{a}}}; \quad K(b) = \frac{\tau_0}{\pi} \frac{b^{2/2+1} I_1(b^{2/2})}{\sqrt{\bar{b} - \bar{a}}};$$

$$x^* = \frac{\tau_0 x^+ x_2}{\pi(\bar{b} - \bar{a})}; \quad \bar{a} = a^{*1/2}; \quad \bar{b} = b^{*1/2}.$$

В конце заметим, что все полученные результаты имеют место и в случае изотропных материалов.

Институт механики
Академии наук Армении

Վ. Ն. ՀԱԿՈՐՅԱՆ

Ճախեցող թուլացված բաղադրյալ անիզոտրոպ սեպի ճակահարք լարվածային վիճակը

Դիտարկված է գլանային անիզոտրոպիայով օժտված երկու սեպերից կազմված բաղադրյալ սեպի հակահարթ լարվածային վիճակը, երբ այն սեպերի միացման գծի երկարությամբ թուլացված է մեկ կամ մի քանի ճաքերով:

Խնդիրը մաթեմատիկորեն ձևակերպված է ինտեգրալ հավասարումների համակարգի ձևով, որի լուծումը կառուցված է Չեբիշևի օրթոգոնալ բաղմանդամների օգնությամբ: Մի մասնավոր դեպքում կառուցված է խնդրի փակ լուծումը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 С. Г. Лехницкий, Теория упругости анизотропных тел, М., Наука, М., 1977.
- 2 Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 25, № 2 (1972).
- 3 В. М. Александров, С. М. Мхитарян, Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками, Наука, М., 1983.
- 4 И. Я. Штаерман, Контактная задача теории упругости, ГИТТЛ. М.—Л., 1949.
- 5 К. С. Чобанян, Напряжения в составных упругих телах, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1987.
- 6 М. П. Саярук, Механика разрушения, т. 2, Наукова думка, Киев, 1988.
- 7 А. М. Саргсян, в кн.: Механика деформируемого твердого тела, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1991.

УДК 535.34.535.37

В. Г. Бябалжанин, Г. Г. Демирханян, Э. П. Коканян, Р. Б. Костанян

Спектроскопические характеристики кристаллов $\text{LiNbO}_3:\text{Er}^{3+}$

(Представлено академиком АН Армении М. Л. Тер-Микаеляном 15/VII 1991)

Возможность подавления при комнатных температурах фотоиндуцированного «оптического повреждения» в $\text{MgO}:\text{LiNbO}_3$ (1) вызвала повышенный интерес к кристаллам ниобата лития, легированным различными ионами. Заманчивой является идея создания миниатюрных многофункциональных активных сред путем комбинирования их высоких лазерных параметров с электро- и нелинейно-оптическими свойствами. В работах (2,3) описаны установки на одном элементе $\text{Nd}:\text{MgO}:\text{LiNbO}_3$ и осуществлены режимы импульсной и непрерывной генерации, самоудвоение частоты и активная внутренняя модуляция добротности резонатора лазера.

В настоящей работе приводятся результаты спектральных и кинетических исследований нового лазерного материала $\text{LiNbO}_3:\text{Er}^{3+}$, проведенных при комнатных температурах. На основе анализа спектров поглощения в области длин волн от 0,33 до 3,5 мкм и люминесценции с энергетических уровней $^4\text{S}_{3/2}$, $^4\text{F}_{9/2}$, $^4\text{I}_{11/2}$ и $^4\text{I}_{13/2}$ ионов Er^{3+} в LiNbO_3 при возбуждении излучением с $\lambda=0,532$ мкм (4), в рамках теории кристаллического поля лигандов, определены феноменологические параметры интенсивности Джадда—Офелта Ω_2 , Ω_4 и Ω_6 и с их помощью вычислены основные спектроскопические характеристики исследуемого кристалла, а также оценены эффективные поперечные сечения вынужденных переходов $^3\text{I}_{11/2} \rightarrow ^4\text{I}_{13/2}$ (~ 3 мкм) и $^4\text{I}_{13/2} \rightarrow ^4\text{I}_{15/2}$ ($\sim 1,6$ мкм).

Исследования проводили на ориентированных образцах из монокристаллов $\text{LiNbO}_3:\text{Er}^{3+}$, выращенных методом Чокральского. Концентрация примеси Er_2O_3 в исходной шихте $\sim 1\%$ вес.

Известно, что все излучательные внутрицентровые характеристики примесных редкоземельных (РЗ) ионов в кристаллах (интенсивности бесфононных линий, вероятности спонтанных переходов, коэффициенты поглощений и т. п.) выражаются посредством силы линий соответствующих переходов (5). Для РЗ $^{3+}$ ионов правилом Лапорта запрещены

прямые, электро-дипольные переходы и для объяснения интенсивностей спектральных линий помимо электрических квадрупольных и магнитно-дипольных необходимо учесть в первом порядке теории возмущений также и косвенные электро-дипольные переходы (вкладами мульти-полей более высокого порядка ввиду их малости можно пренебречь). Силу линии перехода $i \rightarrow f$ можно записать в виде

$$S_{if} = |\langle I_i | \bar{Q} | I_f \rangle|^2 + |\langle I_i | \bar{M} | I_f \rangle|^2 + S_{if}^{ed}, \quad (1)$$

где I_i — полный угловой момент состояния i ; $\bar{Q}$, $\bar{M}$ — операторы электрического квадрупольного и магнитно-дипольного моментов, соответственно. Точный расчет вклада косвенных дипольных переходов слишком сложен, но, как показано Джаддом и Офельтом (⁶⁻⁸), он может быть выражен через три феноменологических параметра Ω_2 , Ω_4 и Ω_6 (параметры интенсивности Джадда—Офельта)

$$S_{if}^{ed} = \sum_{l=2,4,6} \Omega_l \times |\langle I_i | U_l | I_f \rangle|^2, \quad (2)$$

где U_l — единичные неприводимые тензорные операторы, матричные элементы которых для всех RZ^{3+} ионов приведены в (⁹).

Интегральный коэффициент поглощения с основного уровня $\bar{K}_{if}$, выраженный через силу линии перехода S_{if} , имеет вид

$$K_{if} = N_0 \times \frac{8\pi^3 e^2}{3ch} \times \bar{\lambda}_{if} \times \frac{1}{2I_i + 1} \times \frac{(\pi^2 + 2)^2}{9\pi} \times S_{if}. \quad (3)$$

Здесь N_0 — число примесных ионов в 1 см^3 ; e — заряд электрона; c — скорость света, h — постоянная Планка; $\bar{\lambda}_{if}$ — средняя длина волны перехода $i \rightarrow f$; n — показатель преломления кристалла на длине волны $\bar{\lambda}_{if}$. Подставляя в левую часть выражения (3) экспериментальные значения интегральных коэффициентов поглощения K , получим систему уравнений относительно параметров Ω_l , из решения которой и определяются искомые величины. Используя измеренные значения интегральных коэффициентов поглощения для первых семи возбужденных энергетических уровней ионов Er^{3+} в $LiNbO_3$, из вышеуказанной системы уравнений методом наименьших квадратов были определены величины параметров интенсивности: $\Omega_2 = 2,05 \cdot 10^{-20} \text{ см}^2$, $\Omega_4 = 0,33 \cdot 10^{-20} \text{ см}^2$ и $\Omega_6 = 0,19 \cdot 10^{-20} \text{ см}^2$. В этих расчетах величина N_0 бралась равной $3 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ (оцененная со значением коэффициента вхождения Er^{3+} в кристалле $LiNbO_3 \sim 0,1-0,2$), а значения $n(\bar{\lambda}_{if})$ взяты из (¹⁰).

С помощью найденных величин параметров Ω_l могут быть вычислены вероятности спонтанных переходов, индуцированных косвенными электро-дипольными переходами

$$A_{ji}^{ed} = \frac{64\pi^4 e^2}{3h} \times \frac{1}{\lambda_{ij}^3} \times \frac{1}{2l_j + 1} \times \frac{n(n^2 + 2)^2}{9} \times S_{ji}^{ed}. \quad (4)$$

Вероятность магнитно-дипольных переходов рассчитывалась по формуле (5)

$$A_{ji}^{md} = \frac{64\pi^4}{3h} \times \frac{1}{\lambda_{ij}^3} \times \frac{n^3}{2l_j + 1} \times | \langle l_j | \vec{M} | l_j \rangle |^2. \quad (5)$$

Вклад электрических квадрупольных переходов в силы линий рассматриваемых переходов иона Er^{3+} оказался пренебрежимо малым.

В таблице приведены экспериментальные и рассчитанные по формулам (3)–(5) значения интегральных коэффициентов поглощения K , полные вероятности излучательных переходов $A_j = \sum_i A_{ji}^{ed} + A_{ji}^{md}$, вероятности безызлучательных переходов W (11), а также измеренные (4) и расчетные величины времен жизни τ рассматриваемых энергетических уровней ионов Er^{3+} в LiNbO_3 .

Экспериментальные и расчетные значения интегральных коэффициентов поглощения K с основного состояния, вероятности излучательных A и безызлучательных W переходов, времена жизни τ некоторых энергетических уровней иона Er^{3+} в кристаллах LiNbO_3

Мультиплет	λ , мкм	K , 10^{-7}		A , с^{-1}	W , с^{-1}	τ , мкс	
		расчетное	экспериментальное			расчетное	экспериментальное
$^4I_{13/2}$	0,155	6,87	7,2	160	~ 0	6300	7300
$^4I_{11/2}$	0,98	0,54	0,63	122,7	$4 \cdot 10^3$	243	220
$^4I_{9/2}$	0,806	0,17	0,16	1,4,8	$2 \cdot 10^6$	0,5	—
$^4F_{9/2}$	0,664	0,80	0,90	952,4	$3 \cdot 10^4$	3,3	2
$^4S_{3/2}$	0,550	0,11	0,12	865,9	$3 \cdot 10^4$	32,4	28,5
$^2H_{11/2}$	0,525	3,7	4,3	11,4	$\sim 10^{12}$	~ 0	—
$^4F_{7/2}$	0,490	0,38	0,42	1818	$\sim 10^7$	$\sim 0,1$	—

Измеренные методом графического интегрирования из спектров люминесценции на переходах $^4I_{11/2} \rightarrow ^4I_{13/2}$ и $^4I_{11/2} \rightarrow ^4I_{15/2}$ с учетом спектральных и энергетических чувствительностей примененной аппаратуры значения коэффициентов ветвления излучения с уровня $^4I_{11/2}$ ионов Er^{3+} равны: $\beta(^4I_{15/2}) = 0,83$ и $\beta(^4I_{13/2}) = 0,17$. Полученные экспериментальные значения β неплохо согласуются с расчетными величинами 0,77 и 0,23, соответственно.

Знание полных вероятностей излучательных переходов $A(^4I_{11/2} \rightarrow ^4I_{13/2}) = 28,3 \text{ с}^{-1}$ и $A(^4I_{11/2} \rightarrow ^4I_{15/2}) = 164 \text{ с}^{-1}$ позволяет оценить эффективные сечения вынужденных переходов в этих каналах (11)

$$\sigma_j = \frac{A_j \times \epsilon_j^2}{4\pi^2 c n^2 \Delta\nu_j^2 \Phi}. \quad (6)$$

Здесь $\Delta\nu_j^\Phi$ — эффективная ширина полосы люминесценции, равная отношению интегральной интенсивности люминесценции к ее пиковому значению на длине волны λ_j ; $j = 1, 2$ для переходов ${}^4I_{13/2} \rightarrow {}^4I_{15/2}$ и ${}^4I_{11/2} \rightarrow {}^4I_{13/2}$, соответственно. Подставляя в (6) измеренные значения $\Delta\nu_1^\Phi \simeq 7 \text{ см}^{-1}$ и $\Delta\nu_2^\Phi \simeq 23 \text{ см}^{-1}$, для эффективных сечений вынужденных переходов получим: $\sigma_1 \simeq 1,0 \cdot 10^{-19} \text{ см}^2$; $\sigma_2 \simeq 1,8 \cdot 10^{-20} \text{ см}^2$.

Таким образом, приведенные результаты свидетельствуют о перспективности дальнейших исследований кристаллов $\text{LiNbO}_3:\text{Er}^{3+}$ с целью разработки новой среды для лазеров средней ИК-области длин волн с возможностью использования электро- и нелинейно-оптических свойств матрицы.

Институт физических исследований
Академии наук Армении

Վ. Գ. ՌԱՐԱԶԱՆՅԱՆ, Գ. Գ. ԴԵՄԻՐՅԱՆՍԻ, Է. Գ. ԿՈԿԱՆՅԱՆ, Ռ. Բ. ԿՈՍՏԱՆՅԱՆ

$\text{LiNbO}_3:\text{Er}^{3+}$ բյուրեղների սպեկտրասկոպիկ բնութագրեր

Աշխատանքում բերված են նոր լազերային նյութի՝ $\text{LiNbO}_3:\text{Er}^{3+}$ բյուրեղների սենյակային չերմաստիճաններում սպեկտրալ և կինետիկ հետազոտությունների արդյունքները: Օգտագործելով Er^{3+} իոնի առաջին յոթ գրգռված էներգետիկ մակարդակների ինտեգրալ կլանման գործակիցների փորձարարական արժեքները, լիզանդների բյուրեղական դաշտի տեսության սահմաններում որոշվել են Ջադ—Օֆելտի ինտենսիվության պարամետրերը՝ $\Omega_1 = 2,05 \cdot 10^{-20}$, $\Omega_2 = 0,33 \cdot 10^{-20}$ և $\Omega_0 = 0,19 \cdot 10^{-20} \text{ սմ}^2$, որոնց սֆերիկաժամկ հաշվարկվել են հետազոտվող բյուրեղի սպեկտրասկոպիկ բնութագրերը: Փնտհատվել են նաև ստիպողական ալցումների էֆեկտիվ կտրվածքների արժեքները՝ $\sigma_1 ({}^4I_{13/2} \rightarrow {}^4I_{15/2}) \simeq 1,8 \cdot 10^{-20} \text{ սմ}^2$ և $\sigma_2 ({}^4I_{13/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}) \simeq 1,0 \cdot 10^{-10} \text{ սմ}^2$:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ C. Zhong, J. Han, Z. Wu, Proc. 11-th Int. Quant. Electron. Conf., 1980, IEEE Cat. no 89 CH 1561—0, 631, 1990. ² T. Y. Fan, A. Cordova-Plaza, M. Y. F. Digonnet et al., J. Opt. Soc. Am., B/v. 3, № 1, p. 140—147 (1986). ³ A. Cordova-Plaza, T. Y. Fan, M. Y. F. Digonnet et al., Opt. Lett., v. 13, № 3, p. 209—211 (1988). ⁴ В. Г. Бабаджанян, С. Джорджевску, К. Ионеску и др., Изв. АН Армении. Физика, т. 25, вып. 6, с. 356—359 (1991). ⁵ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, т. 3, Наука, М., 1963. ⁶ B. R. Judd, Phys. Rev., v. 127, № 3, p. 750—761 (1962). ⁷ G. S. Ofeit, J. Chem. Phys., v. 37, № 3, p. 511—520 (1962). ⁸ M. J. Weber, Phys. Rev., v. 157, № 2, p. 262—272 (1967). ⁹ C. W. Nielson, G. F. Koster, Spectroscopic coefficients for p^n , d^n and f^n configurations. The M. J. T. Press, Cambridge, 1963. ¹⁰ Ю. С. Кузьминов, Ниобат и танталат лития. Материалы для нелинейной оптики, Наука, М., 1975. ¹¹ Ф. П. Сафарян, С. А. Агабалян, Н. А. Григорян, ФГТ, т. 30, № 2, с. 557—560 (1988). ¹² А. Л. Микаэлян, М. Л. Тер-Микаслян, Ю. С. Гурков, Оптические квантовые генераторы на твердом теле. Советское радио, М., 1967.

ГЕОЛОГИЯ

УДК 552 (161)
552.321

А. В. Арутюнян

О петрофизическом разрезе верхней литосферы территории Армении
(Представлено академиком АН Армении А. А. Габриеляном 9/X 1991)

Исследования упругих и плотностных свойств горных пород офиолитовой ассоциации Малого Кавказа при высоких термобарических параметрах ((¹⁻¹) и др.) и интерпретация геофизических данных ((^{5,6,7}) и др.) позволили составить петрофизический разрез верхней литосферы северо-западного направления и интерпретировать профиль Армаш—Ереван—Спитак—Богдановка—Ахалкалаки—Ахалциха—270 км.

На сейсмических разрезах характерными являются слои с пониженными (5,5—15,0; 35,0—45,0 км) и повышенными (4—6; 10—13; 22—34 км) скоростями продольных волн (рис. 1).



Рис. 1. Сейсмический разрез по профилю Армаш—Ахалцихе по данным МОВЗ—ГСЗ (НПО Нефтегеофизика, 1989): 1 — осредненное положение границы обмена; 2 — линии истинной скорости продольных волн в км/с; 3 — тектонические нарушения; 4 — проекции гипоцентров близких землетрясений, удаленных от линии профиля на ± 2 ((а) и ± 20 км ((б)). $K = 1 + 10$; 5 — проекция гипоцентра Спитакского землетрясения 7 декабря 1988 г

Вариации значений скоростей и плотностей при различных давлениях и температурах для различных типов горных пород Малого Кавказа могут быть интерпретированы с позиций актуалистического метода.

В ((⁹—¹⁰) и др.) третий слой океанической коры рассматривается как состоящий из серпентинизированных ультрабазитов.

Серпентинизация ультрабазитов верхней мантии может быть вызвана инфильтрацией океанической воды через трещиноватые базальты и габброиды второго океанического слоя. Также допускается сходный механизм формирования коры области Тетис.

Продвижение Африкано-Аравийской плиты в северном направлении вызвало закрытие Тетиса, и современная кора региона включает фрагменты коры Тетиса. Утолщение второго и третьего слоев коры за счет горизонтальных подвижек, наряду с накоплением вулканогенно-осадочных толщ, могло быть причиной частичного погружения серпентинизированных масс до глубин 35—45 км. Естественно предполагать, что серпентинизированные массы, вследствие низкой плотности и высокой пластичности, внедрялись по гравитационному механизму в верхние горизонты земной коры в виде диапиров. Диапир вырисовывается на сейсмическом разрезе под Севанской офиолитовой зоной (рис. 1). Низкоскоростной пласт представляет собой линзообразное тело, достигающее в поперечнике 7—9 км с уменьшением к краям до 2—3 км. Отражающие границы показывают движение подкоровых масс в верхние горизонты. К этой же области приурочены разломы глубинного заложения.

Сейсмическое профилирование (МОВЗ—ГСЗ) 1989 г., к сожалению, не охватило в полной мере глубинные горизонты Вединской офиолитовой зоны. Судя по данным станции «Земля» (1974) в подошве земной коры, как в Вединской офиолитовой зоне, так и в прилегающих к ней областях, обнаружены слои с пониженными скоростями ($v_p = 5.1—5.3$ км/с), что дает основание для предположения о наличии линзообразного тела под Вединской офиолитовой зоной. Серпентинизированные массы по глубинным разломам внедрялись в верхние горизонты земной коры, включали как края блоков несерпентинизированных ультрабазитов, так и блоки из вышележащих слоев габбро-амфиболитов, базальтов и метаморфизованных пород (рис. 2). Как видно, имели место прерывисто-непрерывное выжимание серпентинизированного третьего слоя Тетиса в течение миллионов лет и сокращение его объема. Вместе с тем шла дегидратация серпентинитов и, как следствие, амфиболизация вышележащего габброидного слоя за счет высвобождающейся воды. Важно отметить, что эти процессы должны были понизить скорости прохождения продольных волн от 7,0 до 6,8 км/с.

Значения скоростей продольных волн и плотности на рис. 2 и 3 получены при высоких давлениях и температурах.

Отметим, что выше амфиболизированного габброидного слоя расположены породы габбро ($v_p = 7,0$ км/с, $\rho = 2,95$ г/см³), а над ними базальты. Над базальтовым слоем располагаются вулканогенно-осадочные метаморфизованные породы протерозойского возраста, которые обладают довольно высоким скоростями продольных волн ($v_p = 6,6$ км/с).

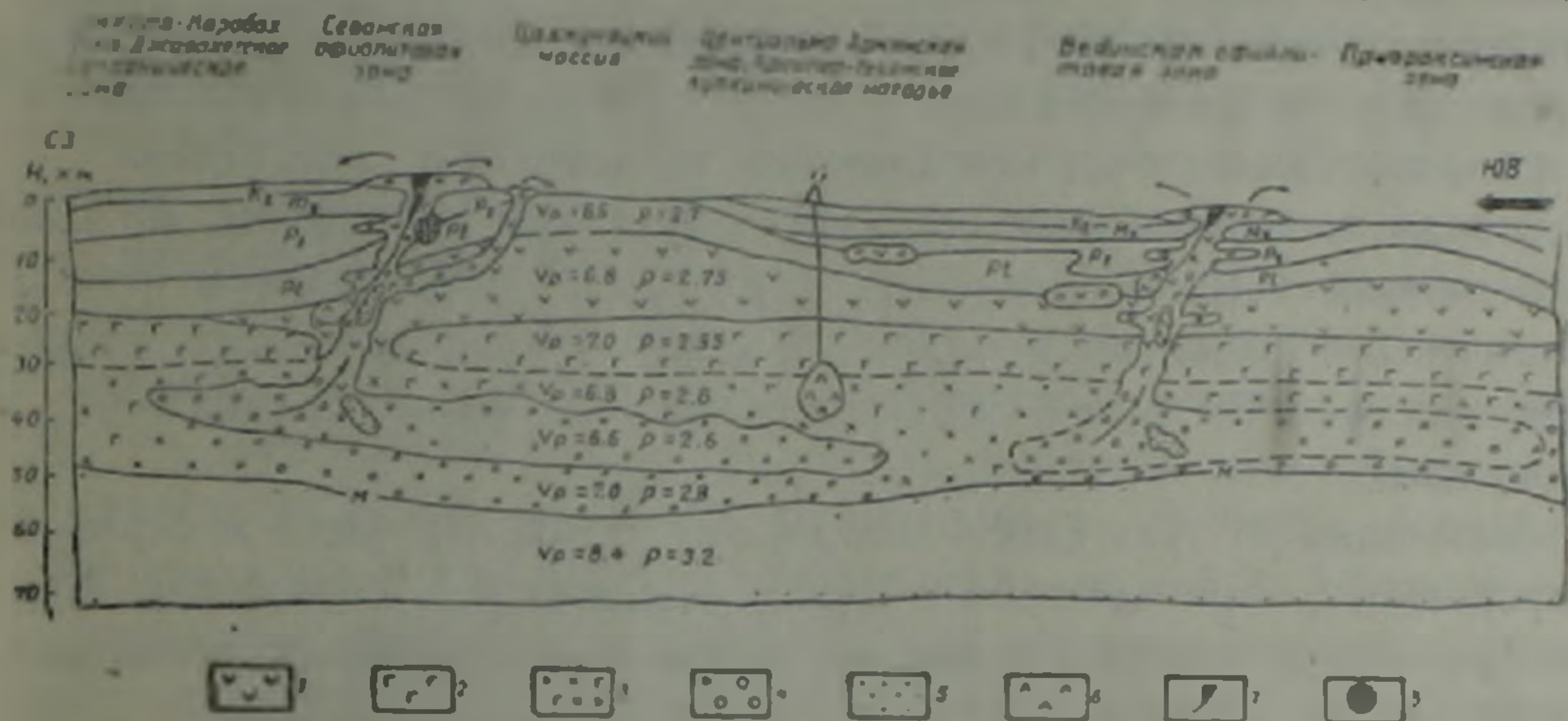


Рис. 2. Петрофизический разрез литосферы территории Армении по направлению юго-запад-северо-восток (образование офиолитовых массивов); 1 — базальтовый слой; 2 — габброидный слой; 3 — габбро-амфиболитовый слой; 4 — серпентинизированный слой; 5 — верхняя мантия (ультрабазиты); 6 — вулканические аппараты; 7 — интрузии офиолитовых зон; 8 — эпицентр Спитакского землетрясения 1988 г.

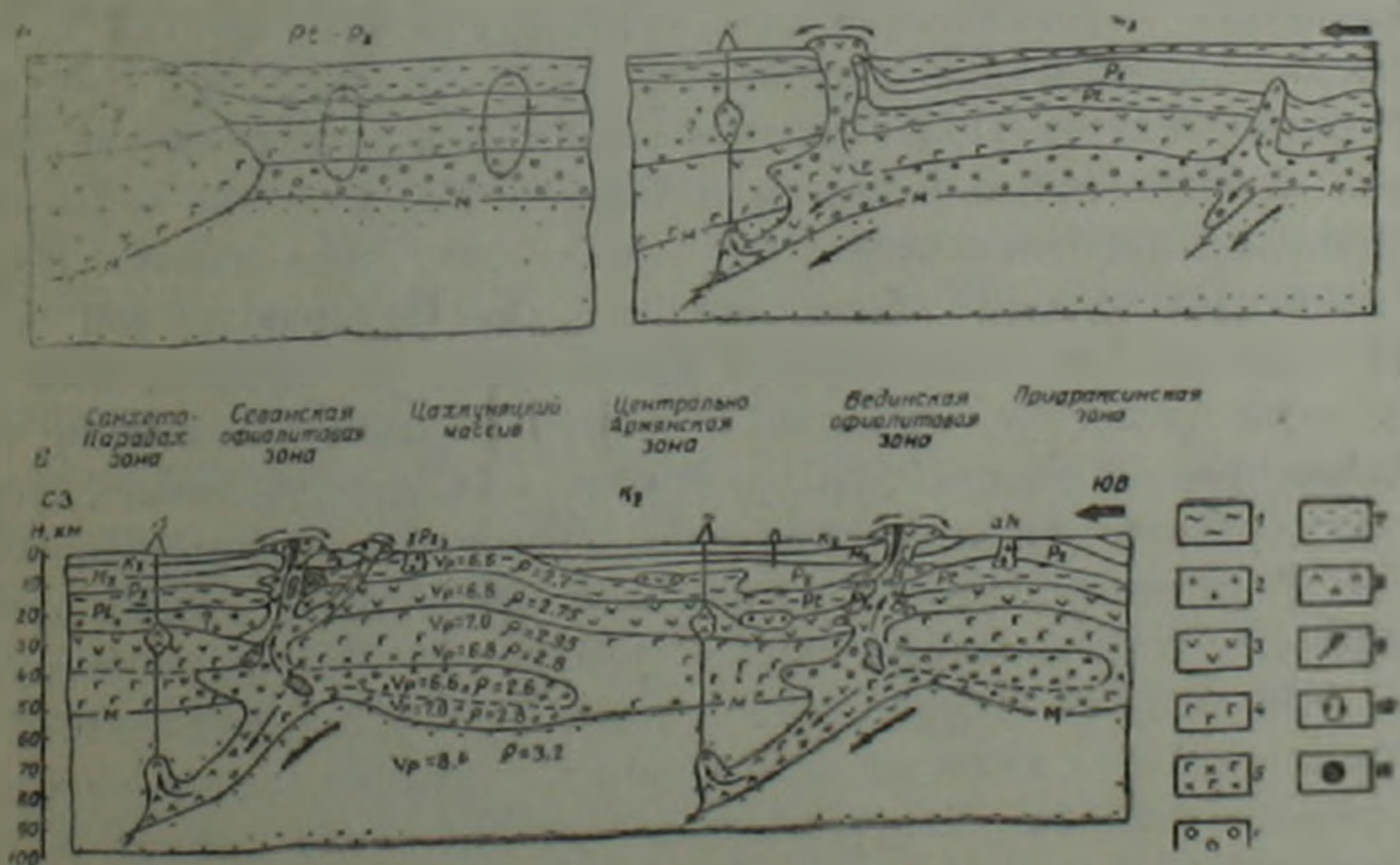


Рис. 3. Петрофизический разрез литосферы территории Армении по направлению юго-запад-северо-восток (образование офиолитовых глубинных подвигов); 1 — породы протерозойского возраста; 2 — гранитный слой, гранитоидные интрузии; 3 — базальтовый слой; 4 — габброидный слой; 5 — габбро-амфиболитовый слой; 6 — серпентинизированный слой; 7 — верхняя мантия (ультрабазиты); 8 — вулканические аппараты; 9 — интрузии офиолитовых зон; 10 — гидротермальная циркуляция; 11 — эпицентр Спитакского землетрясения 1988 г.

Они обнажаются на поверхности в районе Цахкуняцкого массива. На участках их погружения, над метаморфизованными породами, предполагается залегание пород палеозойского, мезозойского и кайнозойского возрастов, мощности которых на петрофизическом разрезе отображены схематично. Обратим внимание на то, что близкорневая покровная структура офиолитов образуется вследствие выжимания высокопластичных серпентинизированных масс и кремнисто-вулканогенной толщи и горизонтального их перемещения на небольшое расстояние.

Исходя из взаимосвязи состава и структуры литосферы, на основании петрологических и других данных (¹¹⁻¹⁴) предлагаем историю геологического развития и новую модель петрофизического разреза литосферы (рис. 3). В ее основу положены следующие геодинамические предпосылки.

Состоящая из трех слоев—осадочного, вулканогенного и серпентинизированного, кора доюрского Тетиса, вследствие продвижения Африкано-Аравийской плиты в северном направлении, начинает испытывать горизонтальные сжатия (¹⁵). На границе океанической коры с континентальной происходило как частичное пододвигание, так и выдавливание слоев океанической коры—начало образования Севанской офиолитовой зоны. Вследствие горизонтальных подвижек происходило утолщение коры доюрского Тетиса, что привело к срыву коры (начало образования Вединской офиолитовой зоны) на определенном расстоянии от Севанской офиолитовой зоны.

Вследствие продолжающегося горизонтального сжатия с юга происходило пододвигание центральной части Армении под Сомхето-Карабахскую зону, а Приараксинской зоны—под центральную часть Армении. Вулканические процессы в Сомхето-Карабахской (юра-мел) и центральной (неоген-четвертичное время) зоне объясняются последовательностью поддвига, более позднего для Приараксинской зоны. Важно отметить, что пододвигание происходило по офиолитовым зонам. С этим процессом, очевидно, связано не только выжимание серпентинизированных масс из больших глубин, но и переплавление глубинных магм разного состава вследствие повышения термобарических условий. Этим можно объяснить наличие в офиолитовых зонах вулканитов разного состава, в том числе и гранитоидов. Частичное погружение и переплавление базальтового слоя (габбро-амфиболитов) на различных глубинах является источником извержения магмы андезито-базальтового состава. Петрологические исследования показали (¹⁴), что андезито-базальтовая магма образовалась за счет переплавления габбро-амфиболитовой фации. В базальтовых потоках вулкана Арагац и Гегамского хребта ксенолиты в основном представлены породами габбро-амфиболитовой фации, в единичных случаях серпентинизированными ультрабазитами (¹⁶). Образование гранитоидных магм могло происходить за счет переплавления метаморфизованных и осадочных образований на глубинах 15—20 км.

Прогноз землетрясений и сейсмической опасности, по мнению ряда исследователей, очевидно, не может быть решен без развития представлений о глубинном строении региона и геотектонических процессах, протекающих в недрах Земли.

Глубинное строение зоны Спитакского землетрясения отображено на предложенном петрофизическом разрезе. Отметим, что карбонатсодержащие породы при высоких термобарических параметрах (при давлениях 2—4 и 14—16 кб соответствуют 5—10 и 35—40 км глубины) испытывают полиморфные переходы, которые сопровождаются скачкообразным изменением объема до 15% (¹⁷). Скачкообразное изменение объема (до 30%) наблюдается в серпентинитах и серпентинизированных ультрабазитах в интервалах температур 420—620°С (¹⁸). Эти процессы, по нашим представлениям, могут быть причиной кратковременных процессов на различных глубинах литосферы.

Природа слоев с пониженными скоростями ($v_p = 5,3—5,8$ км/с) верхних горизонтов земной коры (5,5—15,0 км) остается неясной. Отметим также, что слои с пониженными скоростями в южной части разреза, расположенные на глубине 5,5—15,0 км, могут представить интерес с точки зрения нефтегазоносности. Нефтегазопроявления известны (¹⁹) в южной части центрального прогиба (севернее Вединокой офиолитовой зоны). Так, вскрыт нефтяной пласт на глубине 3500 м на контакте нижнего эоцена и палеоцена (скважина Шорахпюр—1), отмечено проявление горючего газа (1/3 м³/с) в СЗ части Араратской котловины (глубина 3600 м).

На указанных глубинах прогнозируется развитие отложений верхнего палеозоя—нижнего мезозоя, которые в Вединской офиолитовой зоне служат тектоническим подложьем офиолитов и южнее обнажаются на поверхности. Эти отложения представлены морскими мелководными битуминозными известняками, графитизированными сланцами, углистыми и графитизированными известняками с явными признаками обогащенности углеводородами.

Предложенная модель петрофизического разреза верхней литосферы, надо полагать, может способствовать развитию представлений о глубинном строении региона с рассматриваемых автором позиций как одной из наиболее вероятных версий, исходящей из геодинамической концепции сближения ограниченных литосферных блоков.

Ереванский политехнический институт

Ա. Վ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Հայաստանի տաքսիմի վերին իրաֆերայի պետգոֆիզիկական
կոնվալսի մասին

Բարձր ջերմանշումային պայմաններում ապարների առաձգական հատկությունների և խտության ուսումնասիրության և երկրագոֆիզիկական կտր-

վածքների մեկնարանման հիման վրա կազմված է լիթոսֆերայի պետրոֆիզիկական կտրվածքը (Հարավ-արևմուտք)—(Հյուսիս-արևելք) ուղղությամբ:

Երկրակեղևի հիմքում տեղադրված ցածր արագությամբ և բարձր պլաստիկությամբ օժտված ոսպնյակաձև մարմինները, որոնք, ըստ մեր տվյալների, ներկայացված են սերպենտինիզացված ապարներով, Փոքր Կովկասի օֆիոլիտային գոտիների առաջացման աղբյուր են համարվում: Բարձր ջերմաճնշումային պայմաններում թերմոդինամիկական պայմանների փոփոխության հետևանքով կատարվում է սերպենտինիզացված ապարների ջրազրկում, որը ընթանում է ծավալային փոփոխություններով (մինչև 30 %): Ուվալային փոփոխություններ (15%-ի սահմաններում) նկատվում են նաև կարրոնատ պարունակող ապարներում, որը պայմանավորված է կալցիտ միներալում սյուլիմորֆ ձևափոխություններով: Նշված փոփոխությունները կարող են պատճառ հանդիսանալ երկրակեղևում ալնթարթային պրոցեսների առաջացման:

Երկրակեղևի վերին հորիզոններում, ցածր արագությամբ օժտված շերտը, որը տեղադրված է 5,5—15,0 կմ խորություններում, հաշվի առնելով երկրաբանական և երկրաֆիզիկական մի շարք տվյալներ, դիտարկվում է հեռանկարային նավթազազաբերության տեսանկյունից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 А. В. Арутюнян, Изв. АН АрмССР, Науки о Земле, т. 27, № 5, с. 83—92 (1974). 2 А. В. Арутюнян, ДАН АрмССР, т. 65, № 3, с. 161—165 (1977). 3 А. Т. Асланян, А. В. Арутюнян и др., ДАН АрмССР, т. 61, № 3, с. 152—159 (1975). 4 А. Т. Асланян, А. В. Арутюнян и др., Физика Земли, № 2, с. 30—38, 1976. 5 Геология Армянской ССР. Геофизика. Т. 10. Ереван, Изд. АН АрмССР, 1972. 6 И. Н. Горетовская, в кн.: Геофизические поля и сейсмичность, Наука, М., 1975. 7 А. В. Михальцев, Ю. К. Шукин и др., Разветвления и оврагизация, № 11, с. 6—13, 1990. 8 H. H. Hess, History of ocean basins Petrologic studies: A volume in honor A. F. Buddington Washington, Geol. Soc. Amer., p. 15—31, 1962. 9 А. Т. Асланян, А. В. Арутюнян, Изв. АН АрмССР Науки о Земле т. 41, № 2, с. 12—17 (1988). 10 Л. И. Лобковский, Геодинамика зон спрединга субдукции и двухъярусная тектоника плит, Недра, М., 1988. 11 К. И. Карапетян, Изв. АН АрмССР, Науки о Земле, т. 22, № 3, с. 3—14 (1969). 12 Б. Г. Лутц, А. Л. Книппер и др., Геотектоника, № 6, с. 49—61, 1980. 13 Б. Т. Меликсетян и др., Изв. АН АрмССР, Науки о Земле, т. 37, № 1, с. 3—23 (1984). 14 А. К. Юхьян, Экспериментальное моделирование глубинных процессов и состава земной коры Армянского вулканического нагорья (по данным изучения продуктов вулканизма), Автореф. канд. дис. М., ИФЗ АН СССР, 1982. 15 История океана Тетис. Отв. ред. А. С. Монин, Л. П. Зоненшайн, Мир, М., 1987, 154 с. 16 К. Г. Ширинян, С. Б. Абибян, ДАН АрмССР, № 1, с. 47—51 (1958). 17 А. Т. Асланян, А. В. Арутюнян, А. И. Левыкин, ДАН АрмССР, т. 43, № 2, с. 96—100 (1976). 18 А. В. Арутюнян, А. А. Бдолян, Изв. АН АрмССР, Науки о Земле, т. 41, № 3, с. 33—39 (1988). 19 Ю. В. Каграманов и др., Геология нефти и газа, № 6, с. 47—50, 1981.

УДК 595.422:592/599:001.4

Э. С. Арутюнян

Новые виды семейства Eviphididae Berlese, 1913
(Parasitiformes, Mesostigmata)

(Представлено академиком АН Армении С. О. Мовсесяном 7/1 1991)

Настоящая работа содержит описание двух новых видов клещей рода *Alliphis* Halbert, 1923 и одного вида рода *Pelethiphis* Berlese, 1911 (Eviphididae), обнаруженных на жуках в коллекции Института зоологии АН РА.

Номенклатура щетинок в тексте дается по Эвансу (1) с некоторыми изменениями. Размеры указаны в микронах (мкм). Ширина дорсального щита измерялась на уровне щетинок D_5 .

Alliphis ankavani Arutunjan sp. nov.

Материал. Голотип ♀, окр. Анкавана, Разданский р-н. Армянская ССР, 15 августа 1930 г., собран на *Onthophagus fracticornis* (Preyssl), (Scarabaeidae) по сборам А. Шелковникова, препарат № 178 (1) (в коллекции клещей, обнаруженных на жуках). Паратипы: 3 ♀ ♀, препарат № 178 (1), 3 ♀ ♀, препарат № 178. Аллотип ♂ — препарат № 178.

Типы хранятся в лаборатории акарологии Института зоологии АН РА.

Самка (рис. 1, 1—4). Дорсальный щит яйцевидной формы с сетчатой скульптурой. Впереди и по краям щита развит орнамент из линий. На щите 30 пар разнородных щетинок: первая пара спинных щетинок копьевидная; кроме спинных (D_{7-9}) и задних медиальных (м) щетинок, длина которых не превышает 12 мкм, остальные спинные щетинки щетинковидные, сравнительно длинные. Их длина от 18 до 42 мкм. Длина дорсального щита 450, ширина 255. Щелевидные органы дорсального щита хорошо развиты. Тектум с узким длинным срединным острием, у основания которого по краям имеются 3 пары хорошо развитых зубцов (рис. 1, 3). Передний край стернального щита прямой, задний слабо вогнутый; щит по краям окружен темной каймой, несет 3 пары щетинок (St_{1-3}); щелевидные органы между щетинками St_1 в виде наклонной щели. Метастернальные щитки маленькие. Престернальных щитков 4 пары, слабо развитых. Генитальный щит с выпуклым задним

красн, несет пару щетинок. Анальный щит обратногрушевидный. Метоподальных щитков 2 пары, первые пары слабо развиты. Перитремальные щиты слабо расширенные. Форма спермопринимającego протока изображена на рис. 1, 4.



Рис. 1. *Alliphis ankavanı* sp. nov. Самка (1—4): 1 — сверху; 2 — снизу; 3 — тектум; 4 — спермопринимательный проток с симприемником (III, IV — кэкссы III и IV ног). Самец (5—6): 5 — сверху; 6 — снизу

Самец (рис. 1, 5, 6). Сходен с самкой. Набор щетинок и пор дорсального щита почти как у самки. Длина дорсального щита 345, ширина — 210. Грудной щит с хорошо развитой сетчатой скульптурой, несет 5 пар щетинок. Прегрудные щитки хорошо развиты. Форма перитрем как у самки.

По строению генитального и перитремальных щитов и морфологическим признакам ряда структур вид близок к *Alliphis santosdiasi* Ryke, 1959 (³), но по строению и размерам дорсальных щетинок, по строению тектума и престеральной области эти виды хорошо различаются.

Alliphis bakeri Arutunjan sp. nov.

Материал. Голотип ♀, окр. Херсона (Украина), собран на *Sisyphus schaeferi* L. (Scarabaeidae). препарат № 19(1) (в коллекции клещей, обнаруженных на жуках). Дата и сборщик жука неизвестны, по-видимому, материал собран в 1925—1929 гг.

Тип хранится в лаборатории акарологии Института зоологии АН РА.

Самка (рис. 2, 1—2). Дорсальный щит овальной формы, с сильно выраженным своеобразным орнаментом, несет 30 пар щетинок. Щетинки I₁ копьевидные, остальные тонкие, короткие, их длина не превышает 13—14 мкм. Длина дорсального щита 410, ширина 255;

щелевидные органы щита хорошо развиты. Стернальный щит длинный, по краям окружен темной каймой, несет 3 пары щетинок (St_{1-3}); щелевидные органы между щетинками St_1 в виде наклонной щели. Метастернальные щитки хорошо выраженные. Генитальный щит с округлым задним краем, окружен темной каймой. Анальный щит обратногрушевидный. Перитремальные щиты расширенные. Щетинки I—IV ног в основном шиповидные.

Самец неизвестен.

Вид назван именем известного акаролога Э. Бэкера.

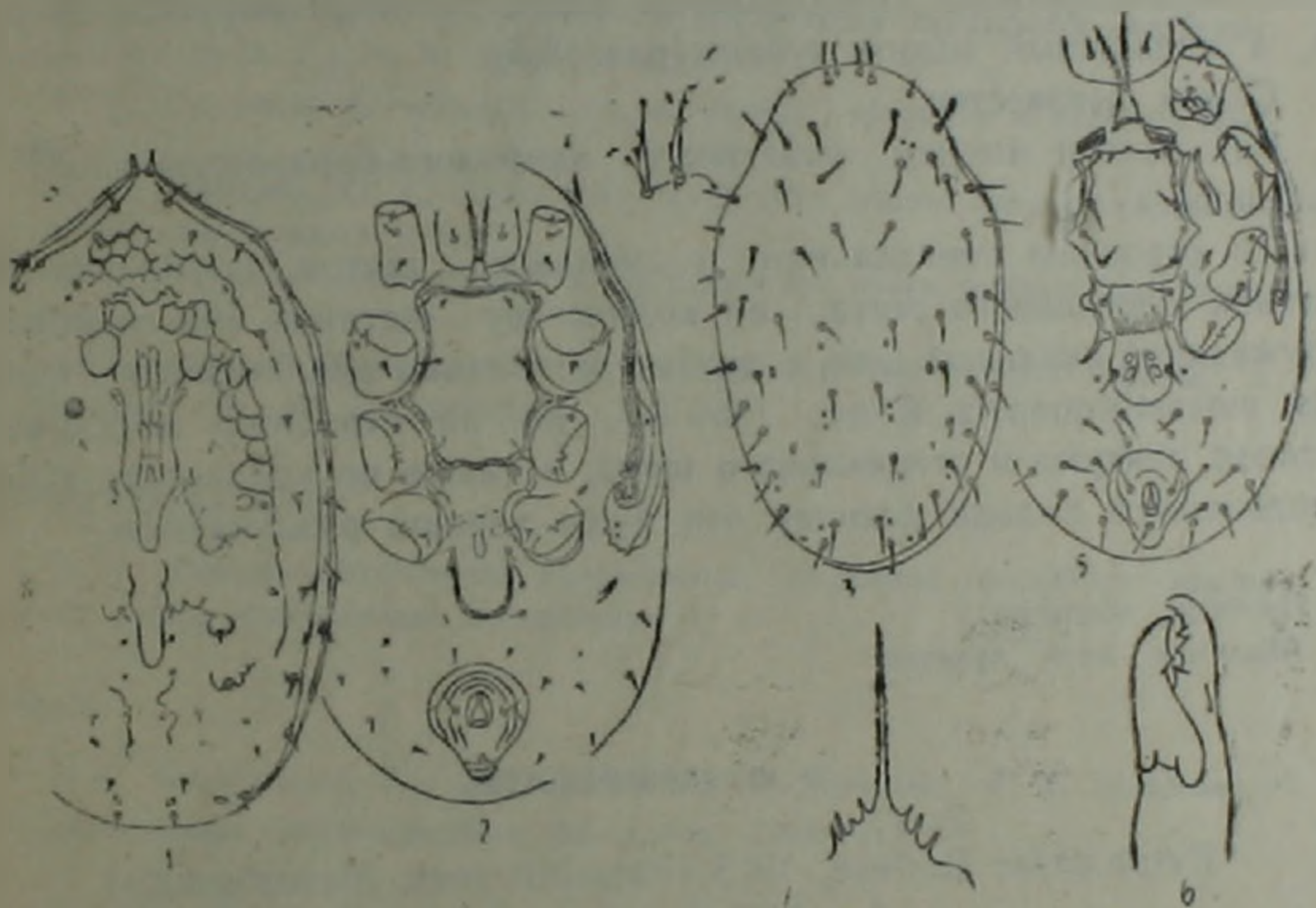


Рис. 2. *Alliphis bakeri* sp. nov. Самка (1—2): 1 — сверху; 2 — снизу. *Pelethiphis balachovi* sp. nov. Самка (3—5): 3 — сверху, 4 — с боку, 5 — снизу; 6 — хелицера

По расположению дорсальных щетинок и пор, по строению перитремального щита и ряду морфологических признаков вид близок к *Alliphis siculus* (Oud., 1905) (?), но по орнаменту дорсального щита, по строению дорсальных щетинок и другим признакам эти виды хорошо различаются.

Pelethiphis balachovi Arutunjan sp. nov.

Материал. Голова ♀. Атрек, Закасп. обл. (Туркмения), 8 августа 1930 г., собран из *Podalus infestus* Sem. (Scarabaeidae), препарат № 268 (в коллекции клещей, обнаруженных на жуках). Сборщик неизвестен.

Тип хранится в лаборатории акарологии Института зоологии АН РА.

Самка (рис. 2, 3—6). Дорсальный щит почти овальной формы, несет 29 пар однородных щетинок. Дорсальные щетинки вблизи осно-

вания с небольшим расширением и острой вершиной, длина их не превышает 30 мкм. Форма щетинок D_1 щетинковидная. Щелевидные органы дорсального щита хорошо заметны. Длина дорсального щита 410, ширина 225. Тектум с длинным стволиком, сужающимся от основания к вершине, края основания с длинными зубчиками (рис. 2,4). Стернальный щит с 3 парами щетинок. Метастернальные щетинки на мягкой кутикуле. Престернальных щитков 3 пары, хорошо развитых. Генитальный щит не крупный, с выпуклым задним краем, несет пару щетинок. Анальный щит почти обратногрушевидный. Перитремальные щиты нерасширенные. Неподвижный палец хелицер вооружен четырьмя, а подвижный одним зубцом (рис. 2,6).

Самец неизвестен.

Вид назван именем известного акаролога-паразитолога Ю. С. Балашова.

По строению генитального и анального щитов, по количеству щетинок дорсального щита, по количеству щетинок на мембране, окружающей анальный щит, и другим признакам вид близок к *Pelethiphis mozambiquensis* Ryke, 1959 (*), но по строению дорсальных щетинок, тектума и стернального щита, а также по количеству зубцов неподвижного пальца хелицер эти виды хорошо различаются.

Институт зоологии
Академии наук Армении

Է. Ս. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Eviphididae Berlese, 1913 (Parasitiformes, Mesostigmata)

ընտանիքի նոր տեսակներ

Ներկա հոդվածում նկարագրվում է բզեզների վրա հանդիպող դիտուժյան համար նոր, Eviphididae ընտանիքի պատկանող 3 տեսակ սղիք: Տեսակ *Alliphis ankavani* sp. nov. հայտնաբերվել է *Onthophagus fracticornis*-ի վրա, *Alliphis bakeri* sp. nov. տեսակը՝ *Sisyphus schaeferi*-ի վրա, իսկ *Pelethiphis balachovi* sp. nov. տեսակը՝ *Podalgus infantulus*-ի վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- * G. O. Evans J. Linn. Soc. London, Zool., v. 43 (291), p. 203-259 (1957).
** W. Karg, Die Tierwelt Deutschlands, Jena, v. 59, p. 1-475 (1971). * P. A. J. Ryke, Coimbra Editora, Limitad, p. 1-19 (1959).