

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ

ДОКЛАДЫ

Том 93 № 3

1992

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Կ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. Բաբուդյան), Է. Գ. ԱՅՐԻՆՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐԻՆԻՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԽԱՆՍԱՆ, Հայաստանի ԳԱ թղթ. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Գ. ՄԻՒԹԱՐՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ թղթ. անդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Դ. Մ. ՍԵՂՈՒՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Մ. Լ. ՏԵՐՄԻՔԱՆՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՁՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН Армении, А. Т. БАБАЯН, академик АН Армении, А. А. ГАБРИЕЛЯН, академик АН Армении, В. О. КАЗАРЯН, академик АН Армении (зам. отв. редактора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН Армении, Г. С. СААКЯН, академик АН Армении, Д. М. СЕДРАКЯН, академик АН Армении (отв. редактор), А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН Армении, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, академик АН Армении, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик АН Армении.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ

ЕРЕВАН

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ա. Հ. Վամալյան—Մատրիցա-ֆունկցիաների որոշ դասերի էֆեկտիվ ֆակտորիզացում	99
Վ. Ի. Գավրիլով, Վ. Ս. Ջաֆարյան—Մ դասի ֆունկցիաների հոնֆորմ ինվարիանտությունը և լոբալին արժեքների բնութագրիչ հատկությունը	105
Ա. Դ. Խունին—Ուղղորդիչ չեկտորի մեթոդը գծային ժրագրավորման մեջ	110
Է. Ա. Միրզախանյան—Հիբերտյան K_0 -շրջակայքային ռետրակտների մասին	119

ԷԿՈԼՈԳԻԱ

Ռ. Հ. Ռեազյան, Լ. Ա. Արաբադյան, Ռ. Խ. Մեծունց—Ջրամբարների հատակային նստվածքների օգտագործումը գյուղատնտեսական արտադրության մեջ	123
---	-----

ԲՈՒՅՍԵՐԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Հ. Հ. Դևեզյան, Ռ. Ջ. Սիսեոյան, Ի. Լ. Դավթյան, Խ. Կ. Խաժակյան—Մայրական պլազմայի և հանքային սննդամթերքի տարրեր ֆոնների ազդեցությունը վիրոսազերծ կարտոֆիլի աճի և զարգացման վրա հիդրոպոնիկայի պայմաններում	128
--	-----

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Ք. Ռ. Հաբուրյունյան, Ռ. Ա. Հաբուրյունյան, Ջ. Կ. Խաչատրյան, Լ. Ա. Սանակովա—Օթախողի ազդեցությունը օրգանիզմի չերմային հոմեոստազի վրա	134
Վ. Հ. Սարգսյան—Դեյտերոյան կորիզի նեյրոնների հետընթաց և սինապսային ռեակցիան կարմիր կորիզի դրդման միջոցով	139

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- А. Г. Камалян — Эффективная факторизация некоторых классов матриц-функций 99
- В. И. Гаврилов, В. С. Захарян — Конформная инвариантность и характеристическое свойство граничных значений функций класса M 105
- А. Д. Туниев — Метод направляющего вектора в линейном программировании 110
- Э. А. Мирзаханян — О гильбертовых K_0 -окрестностных ретрактах . . . 119

ЭКОЛОГИЯ

- Р. Г. Ревазян, Л. А. Араратян, Б. Х. Межунц — Об использовании донных отложений водохранилищ в сельскохозяйственном производстве 123

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

- А. Г. Деведжян, Р. Э. Сисерян, И. Л. Давтян, Х. К. Хажакян — Влияние материнского клубня и различных фонов минерального питания на рост и развитие безвирусного картофеля в гидропонике 128

ФИЗИОЛОГИЯ

- К. Р. Арутюнян, Р. А. Арутюнян, Дж. К. Хачатрян, Л. А. Саакова — Влияние окситоцина на температурный гомеостаз организма 131
- В. А. Саркисян — Антидромные и синаптические реакции нейронов ядра Дейтерса на стимуляцию красного ядра 132

CONTENTS

MATHEMATICS

- A. H. Kamallan* — Effective factorization of certain classes of matrix functional 99
- V. I. Gavrilov, V. S. Zakerian* — Central invariant and characteristic property boundary magnitude of function class M 103
- A. D. Tunev* — The leading vector method and its applications 110
- E. A. Mirzakhanian* — On Hilbert K_0 -neighbourhood retracts 119

ECOLOGY

- R. H. Revazian, L. A. Araratian, B. K. Mezherits* — On the using of the bottom precipitations of reservoirs in agricultural industry 123

PLANT PHYSIOLOGY

- H. H. Develian, R. Z. Sislerian, I. L. Davtian, K. K. Khazhakian* — Effect of maternal tuber and different phases of mineral nutrition on the growth and development of the virusless potato under hydroponic conditions 126

PHYSIOLOGY

- R. A. Harutunian, K. R. Harutunian, D. K. Khachatryan, L. A. Sahakova* — The influence of oxytocin on the temperatural homeostasis of organism 131
- V. H. Sarkisian* — Antidromic and synaptic reactions of Deiters' neurons to stimulation of red nucleus 139

Сдано в набор 16. 06. 1992. Подписано к печати 26. 10. 1992

Формат 70×108^{1/16}. Бумага № 1, сыктывкарская. Высокая печать. Печ. лист 3,6
[Уса. печ. л. 4,5. Усл. ар. стр. 4,5. Учет. изд. л. 32. Тираж 10. Заказ № 90
Издат. № 8013. Цена 1 р. 10 к.

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г, II эт., к. 1, тел. 27-92-38.

Издательство Академии наук Армении, 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г
Типография Издательства Академии наук Армении, 375019, Ереван,
пр. Маршала Баграмяна, 24.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968, 517.514

А. Г. Камалян

Эффективная факторизация некоторых классов матриц-функций

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. Б. Нерсисяном 29/V 1991)

Введение. Пусть Γ — простой замкнутый контур в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, разбивающий плоскость на две области Γ_+ и Γ_- . В дальнейшем ради простоты будем считать, что $0 \in \Gamma_+$, $\infty \in \Gamma_-$. Пусть S — оператор сингулярного интегрирования вдоль контура Γ , действующий в пространстве L_p ($L_p = L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$):

$$(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int_{\Gamma} \varphi(t) \frac{dt}{t-x}, \quad \varphi \in L_p.$$

Введем проекторы $P_{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm S)$ и следующие классы функций: $L_p^+ = P_+ L_p$, $L_p^- = P_- L_p + \text{const}$, $M_p^{\pm} = L_p^{\pm} + R$, где R — множество рациональных функций с полюсами вне Γ . Если все элементы матриц-функции (м-ф) G порядка $k \times k$ принадлежат одному и тому же классу функций H , то условимся коротко обозначать $G \in H^{k \times k}$.

Под факторизацией м-ф $G \in L_1^{k \times k}$ в пространстве L_p ($1 < p < \infty$) будем понимать представление

$$G(t) = G_+(t) \Lambda(t) G_-(t) \quad (t \in \Gamma), \quad (1)$$

где $G_+ \in (L_p^+)^{k \times k}$, $G_- \in (L_p^-)^{k \times k}$, $G_+^{-1} \in (L_p^+)^{k \times k}$, $G_-^{-1} \in (L_p^-)^{k \times k}$ ($q = p/(p-1)$) $\Lambda(t) = \text{diag}[t^{x_1} \dots t^{x_k}]$ и $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k$ — целые числа, называемые частными индексами м-ф G (см. (1, 2)). Хорошо известно, что в скалярном случае ($k=1$) при условии существования факторизации факторы могут быть записаны в явном виде с помощью проекторов $P_{\pm}$. В матричном случае ($k > 1$) эффективные методы факторизации построены только для частных классов м-ф (например, рациональных или треугольных).

Под мероморфной факторизацией м-ф $G \in L_1^{k \times k}$ в пространстве L_p ($1 < p < \infty$) будем понимать представление

$$G(t) = A_+(t) A_-(t) \quad (t \in \Gamma) \quad (2)$$

где $A_+ \in (M_p^+)^{k \times k}$, $A_- \in (M_q^-)^{l \times l}$, $A_+^{-1} \in (M_p^+)^{k \times k}$, $A_-^{-1} \in (M_q^-)^{l \times l}$ ($q = p/p - 1$).

Как известно (см. (2), теорему 2.10), из мероморфной факторизуемости м-ф G следует ее факторизуемость, причем представление (1) можно получить из представления (2) эффективным образом с помощью конечного числа алгебраических операций.

Ряд прикладных задач сводится к факторизации м-ф вида $\sum_{s=0}^n a_s Q_s$, где a_s — скалярные функции, а Q_s — рациональные м-ф (см. (3-5)). В работах (3-9) предложены различные методы эффективной факторизации для м-ф такого вида, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям алгебраического характера. За исключением (4, 9) все эти работы относятся к м-ф второго порядка.

В данной работе предлагается метод мероморфной факторизации м-ф вида

$$A = \sum_{s=0}^{n-1} a_s Q^s, \quad (3)$$

где a_s ($s = 0, 1, \dots, n-1$) скалярные функции, $Q \in R^{k \times k}$, $Q^n = f^n I_k$, $f^n \in R$ (I_k — единичная матрица $k \times k$).

1°. Обозначим через $\mathcal{Q}_p(Q)$ ($1 \leq p \leq \infty$) класс всех м-ф $A \in L^{k \times k}$, представимых в виде (3), с $a_s \in L_p$ ($s = 0, 1, \dots, n-1$).

Непосредственной проверкой легко убедиться, что если

$$A, B \in \mathcal{Q}_1^k(Q), \quad A = \sum_{s=0}^{n-1} a_s Q^s, \quad B = \sum_{s=0}^{n-1} b_s Q^s,$$

то

$$C = AB = BA = \sum_{s=0}^{n-1} c_s Q^s,$$

где

$$c_s = \sum_{j=0}^s a_j b_{s-j} + f^n \sum_{j=s+1}^{n-1} a_j b_{n-j+s}. \quad (4)$$

Пусть $L(t)$ ($t \in \Gamma$) жорданова форма $Q(t)$, а м-ф $T(t)$ такая, что $TQT^{-1} = L$. Поскольку $L^n = TQ^nT^{-1} = f^n I_k$, то

$$L = \text{diag} [e^{\psi_1(0)} f, e^{\psi_1(1)} f, \dots, e^{\psi_1(k-1)} f], \quad (5)$$

где ψ_l ($l \in \Gamma$) — семейство возрастающих отображений множества $\{0, 1, \dots, k-1\}$ в множество $\{0, 1, \dots, n-1\}$ ($\psi_l(0) \leq \psi_l(1) \leq \dots \leq \psi_l(k-1)$), $\varepsilon = \exp(2\pi i/n)$.

Следует заметить, что $A \in \mathcal{Q}_p^k(Q)$, вообще говоря, не единственным образом представляется в виде (3). Более точно, имеет место следующая

Лемма 1. Элементы $\mathfrak{Q}_p^k(Q)$ представляются в виде (3) единственным образом тогда и только тогда, когда $k \geq n$ и множество собственных значений Q почти для всех $t \in \Gamma$ совпадает с множеством $\{f, \varepsilon f, \dots, \varepsilon^{n-1} f\}$.

Доказательство. Пусть $\sum_{s=0}^{n-1} a_s Q^s = 0$. Учитывая равенство (5)

$$\text{из } 0 = T \left(\sum_{s=0}^{n-1} a_s Q^s \right) T^{-1} = \sum_{s=0}^{n-1} a_s L^s \text{ получим}$$

$$\sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon^{\psi_t(r)s} f^r a_s = 0 \quad r = 0, 1, \dots, k-1. \quad (6)$$

Чтобы элементы $\mathfrak{Q}_p^k(Q)$ представлялись в виде (3) единственным образом, необходимо и достаточно, чтобы система (6) имела только тривиальное решение $a_s = 0$ ($s = 0, \dots, n-1$) почти для всех $t \in \Gamma$. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда $k \geq n$ и ψ_t является сюръективным отображением почти для всех $t \in \Gamma$.

Следствие. В случае $k = n$ утверждение леммы 1 справедливо тогда и только тогда, когда следы м-ф Q^s ($s = 1, \dots, n-1$) равны нулю.

Действительно, в случае $k = n$ будем иметь $\psi_t(r) = r$ ($r = 0, 1, \dots, n-1$), откуда в силу $\text{tr } Q^s = \text{tr } L^s$ ($s = 1, \dots, n-1$) получим требуемое.

2°. Пусть $Q_0 = (q_{i,j})_{i,j=1}^n \in R^{n \times n}$, где $q_{n+1} = f^n$, $q_{i,i+1} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) и $q_{i,j} = 0$ при $i - j < n-1$, $j - i \neq 1$. Легко проверить, что $Q_0^n = f^n I_n$. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $A_0 = \sum_{s=0}^{n-1} a_s Q_0^s \in \mathfrak{Q}_1^n(Q_0)$. Тогда для факторизуемости м-ф A_0 в L_p ($1 < p < \infty$) необходимы и достаточна факторизуемость следующих функций $\tilde{a}_m$:

$$\tilde{a}_m = \sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon^{sm} g^s a_s, \quad (m = 0, 1, \dots, n-1). \quad (7)$$

Если $\tilde{a}_m = (\tilde{a}_m)_+ (\tilde{a}_m)_-$ — некоторые мероморфные факторизации функций $\tilde{a}_m$ в L_p , а $(A_0)_\pm = \sum_{s=0}^{n-1} (a_s)_\pm Q_0^s$, где

$$(a_s)_\pm = \frac{1}{n} g^{-s} \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon^{m(n-s)} (\tilde{a}_m)_\pm \quad (s = 0, 1, \dots, n-1) \quad (8)$$

то представление $A_0 = (A_0)_+ (A_0)_-$ является мероморфной факторизацией м-ф A_0 в L_p .

Доказательство. Введем м-ф: $\bar{A}_0 = \text{diag} [\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}]$,
 $(\bar{A}_0)_\pm = \text{diag} [(\bar{a}_0)_\pm, (\bar{a}_1)_\pm, \dots, (\bar{a}_{n-1})_\pm]$, $F = \text{diag} [1, f, \dots, f^{n-1}]$

$$E = \frac{1}{\sqrt{n}} (\epsilon^{(k-1)(j-1)})_{k,j=1}^n.$$

Непосредственным подсчетом нетрудно убедиться, в равенствах

$$A_0 = FE\bar{A}_0E^{-1}F^{-1}, \quad (A_0)_\pm = FE(\bar{A}_0)_\pm E^{-1}F^{-1}, \quad (9)$$

откуда следует равенство $A_0 = (A_0)_+ (A_0)_-$. Условия
 $(A_0)_+ \in (M_p^+)^{n \times n}$, $(A_0)_+^{-1} \in (M_q^+)^{n \times n}$, $(A_0)_- \in (M_q^-)^{n \times n}$, $(A_0)_-^{-1} \in (M_p^-)^{n \times n}$
в силу формул (8), (9) и $F^\pm \in R$ эквивалентны условиям

$$(\bar{a}_m)_+ \in M_p^+, \quad (\bar{a}_m)_- \in M_q^+, \quad (\bar{a}_m)_- \in M_q^-, \quad (\bar{a}_m)_-^{-1} \in M_p^-, \\ (m = 0, 1, \dots, n-1).$$

3°. Обозначим через φ отображение $\varphi: \Omega_p^n(Q_0) \rightarrow \Omega_p^b(Q)$ ($1 \leq p \leq \infty$),
действующее по формуле $\varphi\left(\sum_{s=0}^{n-1} a_s Q_s^0\right) = \sum_{s=0}^{n-1} a_s Q^s$. Нетрудно убе-
диться, что справедлива следующая

Лемма 2. Если $A \in \Omega_1^n(Q_0)$, $B \in \Omega_1^n(Q_0)$ и $AB \in \Omega_q^n(Q_0)$ ($1 \leq q \leq \infty$), то $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B) \in \Omega_q^b(Q)$

Основным результатом данной работы является

Теорема 2. Пусть $A = \sum_{s=0}^{n-1} a_s Q^s \in \Omega_1^b(Q)$, а функции $\bar{a}_m$ ($m = 0, 1, \dots, n-1$), определенные по формулам (7), допускают ме-
роморфную факторизацию в L_p ($1 < p < \infty$), $\bar{a}_m = (\bar{a}_m)_+ (\bar{a}_m)_-$.

Если $A_\pm = \sum_{s=0}^{n-1} (a_s)_\pm Q^s$, где $(a_s)_\pm$ определены по формулам (8).

то $A = A_+ A_-$ является мероморфной факторизацией м-ф A в L_p .

Доказательство. Пусть м-ф $A_0 \in \Omega_1^n(Q_0)$ такая, что $\varphi(A_0) = A$. Тогда в силу теоремы 1 м-ф A_0 допускает мероморфную факториза-
цию $A_0 = (A_0)_+ (A_0)_-$. Из определений $(A_0)_\pm$, $A_\pm$, в силу леммы 2,
имеем $A = \varphi(A_0) = \varphi((A_0)_+) \varphi((A_0)_-) = A_+ A_-$. Заметив, что из
 $B_0 \in \Omega_p^n(Q_0) \cap (M_p^+)^{n \times n}$ следует $\varphi(B_0) \in \Omega_p^b(Q) \cap (M_p^+)^{k \times k}$, и учитывая
 $\varphi((A_0)_\pm^{-1}) = A_\pm^{-1}$, получим доказательство теоремы.

Замечание 1. Условия факторизуемости всех функций $\bar{a}_m$
($m = 0, 1, \dots, n-1$) не являются необходимым условием для факто-
ризуемости A . Чтобы убедиться в этом, достаточно взять $Q = fI_n$.
Эти условия станут необходимыми, если имеет место условие леммы

1. Действительно, в этом случае φ будет взаимно-однозначным отображением.

Замечание 2. Поскольку доказательства полученных результатов не зависят от контура Γ , то они остаются справедливыми как в случае бесконечных контуров (в частности вещественной прямой), так и в случае замкнутых сложных контуров.

Замечание 3. Теорема 1 справедлива также и для м-ф блочной структуры, т. е. когда в условии теоремы 1 $a_s \in L_1^{m \times m}$ ($s = 0, 1, \dots, n-1$; $m > 1$), $Q_0 = (q_{i,j})_{i,j=1}^n \in R^{nm \times nm}$, $q_{i,j} \in R^{m \times m}$, где $q_{n,1} = f^n I_n$, $q_{i,i+1} = I_m$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) и $q_{i,j} = 0$ при $i-j < n-1$, $j-i \neq 1$.

4. Пусть $K(x)$ ($-\infty < x < \infty$) обобщенная функция с преобразованием Фурье $\bar{K}(x) \in L_\infty(-\infty, \infty)$ и $f^n(x) = -K(\ln x)$ ($x > 0$). Введем м-ф $Q = (q_{i,j})_{i,j=1}^n$ с $q_{1,2} = f^n$, $q_{i,i+1} = 1$ ($i = 2, \dots, n-1$), $q_{n,1} = 1$ и $q_{i,j} = 0$ при $i-j < n-1$, $j-i \neq 1$.

В работе ⁽¹⁰⁾ показано, что исследование вопросов разрешимости уравнения

$$y(x) + (\operatorname{th}(\pi x) - \nu)^n \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t) y(t) dt = h(x)$$

$$(\nu \in \mathbb{C}; n \in \mathbb{N}; y, h \in L_2(-\infty, \infty))$$

водится к факторизации м-ф $G = (1 + \beta \alpha^{n-1} \theta f^n) I_n + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \alpha^{k-1} \theta Q^k$, где $\alpha = 1 - \nu$, $\beta = 1 + \nu$, $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$.

Ясно, что при $f \in R$ м-ф $G \in \Omega_-^n(Q)$ и для нее справедлива теорема 2. Примером ядра $K(x)$, для которого $f \in R$, может служить следующая функция:

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \exp\{\beta_2(sn - mn + ix) - \beta_1\} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(sn + ix) \Gamma(kn + mn - sn - ix)}{(kn + mn - 1)!} F(kn, sn + ix; kn + mn; a_2/a_1),$$

где $k, m, s \in \mathbb{N}$, $s < k + m$, $|\operatorname{Im} \beta_k| < \pi$, $\alpha_k = \exp \beta_k$ ($k = 1, 2$), F — гипергеометрический ряд Гаусса.

В этом случае (см. ⁽¹¹⁾)

$$f(x) = e^{1/2} \frac{x^s}{(a_1 + x)^k (a_2 + x)^m}$$

Մատրիցա-ֆունկցիաների որոշ դասերի էֆեկտիվ ֆակտորիզացում

Ի տարբերություն սկալյար դեպքի, մատրիցա-ֆունկցիայի էֆեկտիվ (բացահայտ) ֆակտորիզացման խնդրի լուծումը հայտնի է միայն մասնավոր դասերի համար (որինակ՝ ուսցիոնալ մատրիցա-ֆունկցիաների դեպքում)։

Մի շարք կիրառական հարցերում առաջանում է ուսցիոնալ մատրիցաների և սկալյար ֆունկցիաների կոմբինացիայով ներկայացվող մատրիցա-ֆունկցիաների ֆակտորիզացման խնդիրը։

Հոդվածում կառուցվում է մերոմորֆ ֆակտորիզացում $\sum_{s=0}^{n-1} a_s Q^s$ տեսքի մատրիցա-ֆունկցիաների համար, որտեղ a_s -ը սկալյար ֆունկցիաներն են, Q -ն $k \times k$ կարգի ուսցիոնալ մատրիցա-ֆունկցիա է, $Q^n = f^n I_k$, f -ը ուսցիոնալ ֆունկցիա է։

Կառուցված մերոմորֆ ֆակտորիզացումը հնարավորություն է տալիս ստանալ նշված տեսքի մատրիցա-ֆունկցիաների ֆակտորիզացումը վերջավոր Բվով հանրահաշվական դործողությունների միջոցով։

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ K. Clancey, I. Gohberg, Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators, Basel, Birkhäuser, 1981. ² G. S. Litvinchuk, I. M. Spitkovskii, Factorization of Measurable Matrix Functions, Basel, Birkhäuser, 1987. ³ E. Melster, F.-O. Speck, OT: Advanc. and Applicat., v. 41 (1989). ⁴ Melster, F.-O. Speck, Z. Anal. Anw. Bd 8, № 4 (1989). ⁵ A. A. Хранков, ПММ, т. 35, № 4 (1971). ⁶ V. T. Daniele, SIAM J. Appl. Math., p. 44, № 4 (1984). ⁷ A. B. Lebre, Int. Eg. OT, v. 12, № 3 (1989). ⁸ S. Prössdorf, F.-O. Speck, Proc. Roy. Soc. Edin., Ser. A 115 (1990). ⁹ D. S. Jones, Proc. Roy Soc. Lond., Ser. A 393 (1984). ¹⁰ A. Г. Камалян, А. Б. Нерсисян, Функц. анализ и прил., т. 23, в. 2 (1989). ¹¹ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований, Наука, М., 1969.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

В. И. Гаврилов, член-корреспондент АН Армении В. С. Захарян

Конформная инвариантность и характеристическое свойство
граничных значений функций класса M

(Представлено 12/VI 1991)

В статье (1) рассмотрен класс M голоморфных функций в единичном круге, который строго содержит все классы Харди H^p и строго содержится в классе В. И. Смирнова N^+ . Г. Ц. Тумаркин (см. (2), с. 131—141) установил свойство конформной инвариантности классов H^p и N^+ и получил полную характеристику граничных функций в классах H^p и N^+ в терминах аппроксимации многочленами. В настоящей статье эти результаты Г. Ц. Тумаркина распространяются на функции класса M .

1. Рассмотрим в единичном круге $D: |z| < 1$ произвольную голоморфную функцию $f(z)$ и обозначим $Mf(\theta) = \sup_{0 < r < 1} |f(re^{i\theta})|$, $0 < \theta < 2\pi$. Следуя терминологии статьи (1), функцию $f(z)$ отнесем к классу M , если

$$\int_0^{2\pi} \log^+ Mf(\theta) \cdot \frac{d\theta}{2\pi} < +\infty, \quad (1)$$

где $\log^+ t = \max\{\log t, 0\}$, $t > 0$.

В работе (1) установлены разнообразные свойства функций класса M . В частности, если обозначить через H^p , $p > 0$, классы Харди в круге D , через N^+ — класс В. И. Смирнова в круге D и через N — класс Неванлинны голоморфных функций в круге D , то справедливы строгие вложения $\bigcup_{p>0} H^p \subset M \subset N^+ \subset N$. Доказано также, что M является полным сепарабельным метрическим пространством, в котором инвариантная матрица d задается формулой

$$d(f, g) = \int_0^{2\pi} \log(1 + M(f - g)(\theta)) \cdot \frac{d\theta}{2\pi}; \quad f, g \in M.$$

Непосредственная проверка позволяет заключить, что функция

$$\rho(f) = \int_0^{2\pi} \log(1 + Mf(\theta)) \cdot \frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in M,$$

определяет полунорму в M .

Отметим также, что для любой функции $f(z)$ класса M и любого числа r , $0 < r < 1$, функция $f_r(z) = f(rz)$ принадлежит классу M и $f_r \rightarrow f$ в метрическом пространстве M при $r \rightarrow 1 - 0$ (см. (1), с. 720). Непосредственно проверяется, что $\rho(f_r) \leq \rho(f)$, $0 < r < 1$.

2. Докажем, что класс M является конформно инвариантным семейством функций.

Теорема 1. Для любой функции $f(z)$ класса M и произвольного конформного отображения $\zeta = \xi(z)$ круга D на себя композиция $(f \circ \xi)(z) = f(\xi(z))$ принадлежит классу M .

Доказательство. Произвольное конформное отображение $\zeta = \xi(z)$ круга D на себя имеет вид $\zeta = \xi(z) = e^{ia} \cdot \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$, $a \in D$, $a \in (-\infty, +\infty)$, и значит, справедливы оценки

$$\frac{1-|a|}{1+|a|} \leq \frac{1}{|\xi'(z)|} \leq \frac{1+|a|}{1-|a|}; \quad z, a \in D. \quad (2)$$

Рассмотрим произвольную возрастающую последовательность $\{r_n\}$, $0 < r_n < r_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$, и последовательности функций $\{f_n(x)\}$, $f_n(z) = f(r_n \cdot z)$, $n \in \mathbb{N}$, и $\{(f_n \circ \xi)(z)\}$, $(f_n \circ \xi)(z) = f(r_n \cdot \xi(z))$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $|\xi| = |\xi(z)| = 1$ при $|z| = 1$ и $d\theta = |dz|$ на $|z| = 1$, $z = e^{i\theta}$, то

$$M(f \circ \xi)(\theta) \leq \max_{|z|=1} |f_n(\xi(z))| = \max_{|\zeta|=1} |f_n(\zeta)| = C_n < +\infty, \quad n \in \mathbb{N},$$

и следовательно

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \log^+ M(f_n \circ \xi)(\theta) \cdot \frac{d\theta}{2\pi} &\leq \int_{|z|=1} \log^+ [\max_{|\zeta|=1} |f_n(\xi(z))|] \cdot \frac{|dz|}{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \log^+ [\max_{|\zeta|=1} |f_n(\zeta)|] \cdot \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| \cdot |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \log^+ C_n \cdot \frac{1}{|\xi'(z)|} \cdot |d\zeta|, \end{aligned}$$

откуда, с учетом (2), получаем оценку

$$\int_0^{2\pi} \log^+ M(f_n \circ \xi)(\theta) \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \leq \frac{1+|a|}{1-|a|} \log^+ C_n < +\infty, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

Неравенства (3) показывают, что функции $f_n(\xi(z))$, $n \in \mathbb{N}$, принадлежит классу M . Поскольку функциональная последовательность $\{f_n(\cdot(z))\}$ равномерно сходится к функции $f(\xi(z))$ в круге D и схо-

дится к функции $f(z)$ в метрике пространства M , то, в силу полноты пространства M , предельная функция $f(z)$ обязана принадлежать классу M , что и требовалось доказать.

3. Согласно вложению $M \subset M'$ и классической теореме Р. Неванлинны (см., например, (9), с. 82), каждая функция $f(z)$ класса M имеет конечные угловые граничные значения $f(e^{i\theta})$ почти во всех точках $e^{i\theta}$ на граничной окружности $\Gamma: |z|=1$.

Следующая теорема содержит полную характеристику угловых граничных значений функций класса M . Мы отмечаем участие Л. Ганжулы в доказательстве необходимости условий этой теоремы.

Теорема 2. Пусть E произвольное измеримое множество точек окружности $\Gamma: |z|=1$ и $\varphi(e^{i\theta})$ — измеримая функция, заданная на E . Для того, чтобы функция $\varphi(e^{i\theta})$ почти всюду на E совпадала с угловыми граничными значениями некоторой голоморфной в круге $D: |z|<1$ функции $f(z)$, принадлежащей классу M , необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность многочленов $\{p_n(z)\}$, обладающая свойствами:

1) последовательность $\{p_n(e^{i\theta})\}$ почти всюду на E сходится к функции $\varphi(e^{i\theta})$;

$$2) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \log^+ M p_n(\theta) \cdot \frac{d\theta}{2\pi} < +\infty.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть для некоторой функции $f(z)$ класса M граничная функция $f(e^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})$ почти всюду на множестве $E \subset \Gamma$. Рассмотрим произвольную числовую последовательность $\{r_n\}$, $0 < r_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$, и образуем функциональную последовательность $\{f_n(z)\}$, $f_n(z) = f(r_n z)$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in D$. Последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится к функции $f(z)$ в круге D .

Так как функции $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, являются голоморфными функциями в замкнутом круге $\bar{D}: |z| \leq 1$, то согласно аппроксимационной теореме Рунге, существует такая последовательность многочленов $\{p_n(z)\}$, что

$$|p_n(z) - f_n(z)| < \varepsilon_n \quad \text{для всех } z, \quad |z| \leq 1, \quad (4)$$

где числовая последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, имеет $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

Из свойства (4) и предшествующих ему рассуждений следует, что последовательность многочленов $\{p_n(z)\}$ равномерно сходится к функции $f(z)$ в круге D .

Так как угловые граничные значения $f(e^{i\theta})$ существуют почти всюду на окружности $\Gamma: |z|=1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^{i\theta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ для почти всех точек $e^{i\theta} \in \Gamma$. Поэтому, согласно (4), $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ почти всюду на Γ и значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(e^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})$ почти всюду

на E , т. е. выполняется свойство 1) в условиях теоремы 2.

Проверим выполнение условия 2) этой теоремы. Заметим прежде всего, что поскольку

$$|p_n(re^{i\theta})| \leq |p_n(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})| + |f(re^{i\theta})|, \quad n \in N,$$

то

$$\begin{aligned} Mp_n(\theta) &= \sup_{0 < r < 1} |p_n(re^{i\theta})| \leq \sup_{0 < r < 1} |p_n(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})| + \sup_{0 < r < 1} |f(re^{i\theta})| = \\ &= M(p_n - f)(\theta) + Mf(\theta), \quad n \in N, \end{aligned}$$

и значит,

$$\log^+ Mp_n(\theta) \leq \log^+ M(p_n - f)(\theta) + \log^+ Mf(\theta) + \log 2, \quad n \in N. \quad (5)$$

Так как последовательность полиномов $\{p_n(z)\}$ равномерно сходится к функции $f(z)$ в круге D , то, начиная с некоторого номера $N_0 \in N$, выполняется неравенство $M(p_n - f)(\theta) < 1$, $n \geq N_0$. Поскольку $f(z) \in M$, то из (5) следует, что

$$\int_0^{2\pi} \log^+ Mp_n(\theta) \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} \log^+ Mf(\theta) \cdot \frac{d\theta}{2\pi} + \log 2 = C_1, \quad n \geq N_0. \quad (6)$$

С другой стороны, можно указать такую постоянную C_2 , $0 < C_2 < +\infty$, что для всех номеров $n \in N$, не превосходящих число N_0 , и всех $\theta \in [0, 2\pi)$ выполняется неравенство $\log^+ Mp_n(\theta) \leq C_2$, и значит,

$$\int_0^{2\pi} \log^+ Mp_n(\theta) \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \leq C_2, \quad n \leq N_0. \quad (7)$$

Полагая $C = \max\{C_1, C_2\}$, заключаем, на основании (6) и (7), что справедливо неравенство

$$\int_0^{2\pi} \log^+ Mp_n(\theta) \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \leq C, \quad n \in N,$$

которое эквивалентно условию 2) теоремы 2.

Достаточность. Поскольку многочлены принадлежат классу M , то условия 1) и 2) теоремы 2 становятся условиями теоремы А. Я. Хинчина—А. Островского (см. (2), с. 118), согласно которой последовательность полиномов $\{p_n(z)\}$ сходится равномерно в круге D к некоторой функции $f(z)$ из класса M , для которой $f(e^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})$ почти во всех точках $e^{i\theta}$ множества E .

Многочлены $p_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, принадлежат также классу M . Поскольку класс M является полным метрическим пространством, то функция $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(z)$ принадлежит классу M .

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Վ. Ի. ԳԱՎՐԻԼՈՎ, Հայաստանի ԴԱ բոլակից անդամ Վ. Ի. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

Այդպիսի ֆունկցիաների կոնֆորմ ինվարիանտությունը և էզոմորֆիզմների բնութագրիչ հատկությունը

Հոդվածում դիտարկվում է միավոր շրջանում հոլոմորֆ ֆունկցիաների այսպես կոչված M դասը, որը պարունակում է Հարդիի դասերը և ընկնում է Սմիթնոլթի դասերի մեջ: Հ. Տումարկինը ստացել էր Հարդիի և Սմիթնոլթի դասերի կոնֆորմ ինվարիանտության հատկությունը և այդ դասերի էզոմորֆիզմների ֆունկցիաների լրիվ բնութագրումը մոտարկող բազմանդամների տերմիններով:

Ներկա հոդվածում այդ երկու հատկությունները տարածվում են M դասի ֆունկցիաների վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Hong Oh Kim, Canad. J. Math., v. 40, No 3, p. 718—741 (1988). * Ի. Ի. Իրսևալով, Граничные свойства аналитических функций. Изд. 2-е, М.—Л., 1950.

УДК 519.8

А. Д. Тунисев

Метод направляющего вектора в линейном программировании

(Представлено академиком АН Армении Р. Р. Варшановым 29/V 1991)

В работе предлагается идея в преобразовании Гаусса выбирать не один элемент, а одновременно несколько элементов — направляющий вектор. Эта идея позволяет обобщить метод исключения и на его основе развить симплекс-метод Дж. Б. Данцига ^(1,2), его модифицированный вариант — метод обратной матрицы ⁽²⁾ и двойственный симплекс-метод Г. Е. Лемке ⁽⁵⁾.

Суть развития заключается в том, что на каждом шаге выбирается не один особый элемент, а одновременно несколько элементов — особый направляющий вектор, который позволяет после шага обобщенного метода полного исключения (жорданового исключения) перейти к улучшенному плану. Так как улучшенные планы в рассматриваемом смысле единственны, то этим гарантируется конечность предлагаемых методов.

Отметим, что данный подход позволяет предложить эффективные методы для решения некоторых классов задач. В частности, в вопросах управления запасами, надежности и т. д. существуют задачи, которые формализуются как задачи марковского процесса принятия решений. В рамках линейного программирования они имеют специальную структуру матрицы. Последнее позволяет при выборе особого направляющего вектора соответствующей длины предложить эффективный метод решения этих задач.

Кроме того, такой подход является естественным с точки зрения многопроцессорных вычислительных комплексов.

Обозначения. Здесь удобно использовать обозначения, предложенные И. В. Романовским ⁽⁶⁾. Приведем необходимые из них: $x[N]$ — вектор $x = \{x_i\}$, где i пробегает конечное множество N ; $x[K]$ — соответствующий K -й „кусоч“ вектора, если $K \subset N$; $x[i]$ — компонента вектора, имеющая индекс i ; $z[i, N]$ — i -я строка матрицы $z[M, N] = \{z_{ij}\}$, $i \in M$, $j \in N$, а $z[M, j]$ — ее j -й столбец.

$z[K, I]$ — подматрица матрицы $z[M, N]$, где $K \subseteq M$, $I \subseteq N$. Здесь мы не будем выделять векторы строк и столбцов.

1. Теоретическая основа метода. 1.1. Пусть $M = \{1, \dots, m\}$, $N = \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$a[M, N]x[N] = a[M, 0] \quad (1)$$

относительно неизвестного вектора-столбца $x[N]$.

Пусть $K \subseteq N$ и при некотором $i_0 \in M$ норма $\|a[i_0, K]\| \neq 0$. Обозначим $N' = \{0, 1, \dots, n\}$ и положим

$$a'[i, N'] = \begin{cases} \frac{a[i, N']}{\|a[i_0, K]\|}, & i = i_0, \\ a[i, N'] + a_i a'[i_0, N'], & i \neq i_0, \end{cases} \quad (2)$$

где $a_i = a_i(K) = -a[i, K]a'[i_0, K]$, $i \in M \setminus i_0$.

Теперь составим новую систему

$$a'[i, K]y[K] + a'[i, N \setminus K]x[N \setminus K] = a'[i, 0], \quad i \in M \setminus i_0, \quad (3)$$

где $y[K]$ — неизвестный вектор-столбец.

Теорема 1. Если $\{x[K], x[N \setminus K]\}$ — произвольное решение системы (1), то $\{y[K], x[N \setminus K]\}$ — решение системы (3), где

$$y[K] = x[K] + \lambda a'[i_0, K], \quad \lambda \in R^1.$$

И наоборот, если $\{y[K], x[N \setminus K]\}$ — произвольное решение системы (3), то $\{x[K], x[N \setminus K]\}$ — решение системы (1), где

$$x[K] = y[K] + (a'[i_0, 0] - a'[i_0, K]y[K] - a'[i_0, N \setminus K]x[N \setminus K])a'[i_0, K]. \quad (4)$$

Следствие. Пусть $M_0 \subseteq M$ и $i_0 \in M_0$. Тогда система (1) и система

$$\begin{cases} a'[i, N]x[N] = a'[i, 0], & i \in M_0, \\ a[i, N]x[N] = a[i, 0], & i \in N \setminus M_0, \end{cases}$$

эквивалентны в смысле множества решений.

Замечание 1. Преобразование (2) совпадает с преобразованием Гаусса, если K — одноэлементное множество, и с преобразованием Грамма—Шмидта, если $K = N'$.

1.2. Используя линейное параметрическое преобразование (2), можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть $a[M, N]$ — матрица полного ранга. Тогда существует такое

$$K = \{K_1, K_2, \dots, K_{m-1}\}, \quad K_i \subseteq N, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad N = \bigcup_{i=1}^{m-1} K_i,$$

что

$$a[M, N] = I_m[M, M]a_K[M, N], \quad (5)$$

при этом данное разложение в рассматриваемом смысле, т. е. при $K = \{K_1, K_2, \dots, K_{m-1}\}$, единственное.

Здесь $I_K [M, M]$ — нижняя треугольная матрица, диагональные элементы которой равны единице, а $u_K [M, N']$ — прямоугольная матрица, соответствующие „куски“ строк которой удовлетворяют условию

$$u[i, K_s] u[s, K_s] = 0, \quad i > s \quad (i = 2, 3, \dots, m; \quad s = 1, 2, \dots, m-1).$$

Отметим, что при $N=M$ разложение (5) в двух крайних случаях совпадает, соответственно, с LU -разложением (когда все K_i — одноэлементные множества) и с ортогональным разложением (когда все $K_i = N$).

Разложение (5), которое естественно назвать частично-ортогональным, является основой для дальнейшего развития группы методов исключения (1,8) и исследования их ошибок округления.

2. *Обобщение методов исключения.* 2.1. Пусть система (1) ранга r разрешима и первые ее r строк линейно-независимы. Обозначим $R = \{1, 2, \dots, r\}$. Сущность обобщенного метода полного исключения заключается в следующем.

1. Последовательно для $s = 1, 2, \dots, r$ выбираем $K_s \subseteq N$ такое, что $\|a^{s-1}[s, K_s]\| \neq 0$, и полагаем ($a^0 [M, N'] = a [M, N']$)

$$a^s [i, N'] = \begin{cases} \frac{a^{s-1}[i, N']}{\|a^{s-1}[s, K_s]\|}, & i = s, \\ a^{s-1}[i, N'] + \alpha_i a^s [s, N'], & i \neq s, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\alpha_i = \alpha_i^s(K_s) = -a^{s-1}[i, K_s] a^s [s, K_s], \quad i \neq s. \quad (7)$$

При этом на каждом s -ом шаге запоминаем „кусочек“ $a^s [s, K_s]$ вектора $a^s [s, N]$, $s = 1, 2, \dots, r$.

2. Тогда после r шагов получим систему вида

$$a^r [R, N] x [N] = a^r [R, 0]. \quad (8)$$

3. Пусть $K = \bigcup_{s \in R} K_s$. Формируем матрицу $b [R, K] = \|b [s, j]\|$, где элементы s -й строки имеют вид:

$$b [s, j] = \begin{cases} a^s [s, j], & j \in K_s, \\ 0, & j \in K \setminus K_s \end{cases} \quad (s = 1, 2, \dots, r).$$

4. Пусть $u [K, N'] = b^T [R, K] a^r [R, N']$. Сформируем систему

$$u [K, N] x [N] = u [K, 0],$$

которая эквивалентна системе (8).

При введенных предложениях справедлива

Теорема 3. Для произвольного $j \in N'$:

а) столбец $u [K, j]$ является собственным вектором подматрицы $u [K, K]$ с собственным значением $\lambda = 1$, т. е.

$$u [K, K] u [K, j] = u [K, j];$$

б) компоненты вектора $u[K, j]$ являются коэффициентами разложения j -го столбца матрицы $a[M, N']$ по столбцам матрицы $a[M, K]$, т. е.

$$a[M, K]u[K, j] = a[M, j],$$

при этом данное разложение в рассматриваемом смысле, т. е. при $\{K_1, K_2, \dots, K_r\}$, является единственным.

Следствие 1. Если $K_1 = K_2 = \dots = K_r = N$, то $u[N, 0]$ ортогонально ядру матрицы $a[M, N]$, т. е. $u[N, 0]$ — нормальное решение системы (1).

Решение $u[K, 0]$ будем называть частично-нормальным.

2.2. Заменяя в (6) и (7) $i \neq s$ на $i > s$, через r шагов получим эквивалентную систему вида

$$a^s[s, N]x[N] = a^s[s, 0], \quad s = 1, 2, \dots, r,$$

которую легко решить обратным ходом, если использовать (4). Другими словами, получаем обобщенную процедуру метода исключения Гаусса.

Неразрешимость системы определяется так же, как и в обычных методах исключения.

2.3. Пусть матричная система

$$a[M, N]x[N, M] = e[M, M],$$

где $e[M, M]$ — единичная матрица, неразрешима.

Рассмотрим нормально матричное уравнение

$$b[N, N]x[N, M] = a^T[M, N], \quad (9)$$

где $b[N, N] = a^T[M, N]a[M, N]$.

Пусть $K_s \subseteq N$, $s \in R$, $N' = \bigcup_{s \in R} K_s$. При $\{K_1, K_2, \dots, K_r\}$ применим к системе (9) обобщенную процедуру жордановых исключений. Тогда после r шагов, в конечном итоге, получим систему вида

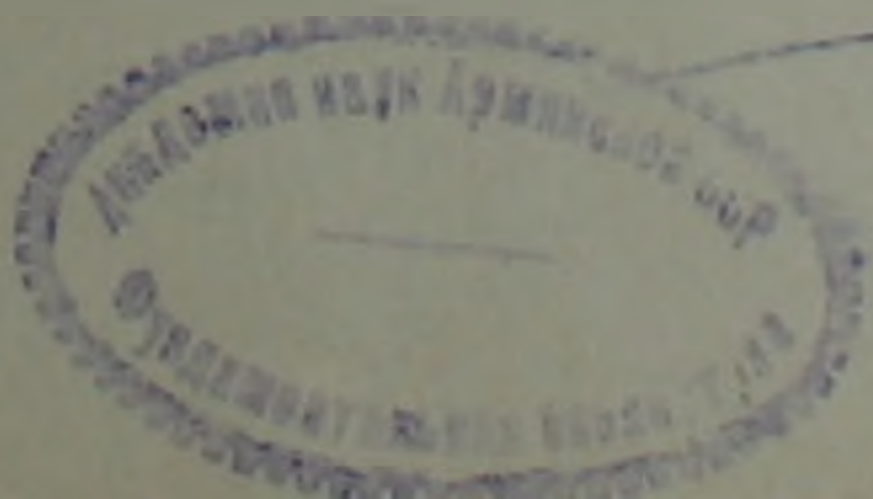
$$u[N, N]x[N, M] = \bar{u}[N, M].$$

При введенных предположениях справедлива

Теорема 4. Матрица $u[N, M]$ относительно $a[M, N]$ обладает первыми тремя свойствами псевдообратной матрицы Мура—Пенроуза (см. например [7, 11]), при этом в рассматриваемом смысле она единственная.

Следствие. Если $K_1 = K_2 = \dots = K_r = N$, то $u[N, M]$ — псевдообратная матрица Мура—Пенроуза, а $u[N, N]$ — матрица ортогонального проектирования.

При заданном разбиении $u[N, M]$ назовем частично-псевдообратной матрицей и частично-нормальной, если $a[M, N]$ матрица полного ранга.



3. Развитие симплексных методов. Полученные выше результаты являются алгебраической основой для дальнейшего развития признаков оптимальности опорного плана и симплексных методов.

3.1. Признаки оптимальности частично-нормального плана. Рассмотрим задачу линейного программирования. Максимизировать линейную форму

$$c[N]x[N] \quad (10)$$

при условиях

$$a[M, N]x[N] = a[M, 0], \quad (11)$$

$$x[N] \geq 0[N], \quad (12)$$

где $0[N]$ — нулевой вектор.

Утверждение 1. Пусть при $K = \bigcup_{s \in M} K_s$, $K_s \subseteq N$, $s \in M$, матрица $u[K, M]$ — частично-обратная относительно матрицы $a[M, K]$

и $u[K, 0] = u[K, M]a[M, 0] \geq 0[K]$, $(u[K, j])$ — коэффициенты разложения относительно псевдобазиса $\{a[M, j]\}$, $j \in K$. Тогда

а) расширение оценки относительно псевдобазиса $\{a[M, j]\}$ равны

$$\Delta[j] = c[K]u[K, j] - c[j] = u^T[K, M]c^T[K]a[M, j] - c[j], \\ j \in N;$$

б) если $\Delta[j] \geq 0$, $j \in N$, то $u[K, 0]$ — решение задачи (10)–(12),

а $\lambda[M] = u^T[K, M]c^T[K]$ — решение двойственной к ней задачи.

Справедливость этого утверждения следует из критерия оптимальности Л. В. Канторовича (12).

3.2. Рассмотрим расширенный вариант симплекс-метода*. Пусть задача (10)–(12) невырожденная, $x^0[M, N'] = a[M, N']$, $x^0[M, M] = e[M, M]$ — единичная матрица, $x^0[0, j] = \Delta[j]$, $j \in N'$ — оценки относительно базиса $\{a[M, j]\}_{j \in M}$, $x^0[M, 0]$ — опорный план. Кроме того сформируем матрицу $b^0[M, N]$, у которой подматрица $b^0[M, M] = x^0[M, M]$, т. е. единичная, а $b^0[M, N \setminus M] = 0[M, N \setminus M]$, т. е. нулевая. Теперь опишем переход от s -го шага к $s+1$, где $s = 0, 1, 2, \dots, s$. Пусть на s -м шаге получена система

$$\begin{cases} x^s[0, N]x[N] = x^s[0, 0], \\ x^s[M, N]x[N] = x^s[M, 0] \end{cases} \quad (13)$$

и матрица $b^s[M, N']$, где $x^s[0, N'] = [x^s[0, 0], x^s[0, N']]$ — вектор расширенных оценок.

1. Выберем $\bar{K}_{s+1} \subseteq N$ так, что $x^s[0, j] < 0$, $j \in \bar{K}_{s+1}$.

* Этот метод является одной из версий процедуры (13), когда каждая итерация состоит только из одного шага. Предложен совместно с А. С. Тупиным.

2. Пусть $x^s [i, 0] > 0$, $i \in M$. Определяем

$$\theta_i = \frac{x^s [f, 0]}{|x^s [f, \bar{K}_i]|} = \min \frac{x^s [i, 0]}{|x^s [i, \bar{K}_i]|}$$

для тех i , для которых «кусоч» $x^s [i, \bar{K}_i]$ содержит все положительные компоненты вектора $x^s [i, \bar{K}_{s+1}]$. Ясно, что $\bar{K}_i \subseteq \bar{K}_{s+1}$, $i \in M$ (здесь $f = f_{s+1}$, $\bar{K}_i = \bar{K}_i^{s+1}$).

3. Шаг обобщенного жорданового исключения. Полагаем

$$x^{s+1} [i, N'] = \begin{cases} \frac{x^s [i, N']}{|x^s [i, \bar{K}_i]|}, & i = f, \\ x^s [i, N'] + \alpha_i x^{s+1} [f, N'], & i \neq f, \end{cases} \quad (14)$$

где

$$\alpha_i = \alpha_i^{s+1}(\bar{K}_i) = -x^s [i, \bar{K}_i] x^{s+1} [f, \bar{K}_i], \quad i \neq f.$$

4. Формируем матрицу $b^{s+1} [M, N']$, которая получается из матрицы $b^s [M, N']$ заменой строки $b^s [f, N']$ на строку $b^{s+1} [f, N']$, т. е.

$$b^{s+1} [i, N] = \begin{cases} b^{s+1} [i, N], & i = f, \\ b^s [i, N], & i \neq f. \end{cases}$$

где элементы $b^{s+1} [f, N]$ определяются следующим образом:

$$b^{s+1} [f, j] = \begin{cases} x^{s+1} [f, j], & j \in \bar{K}_f, \\ 0, & j \in N \setminus \bar{K}_f. \end{cases}$$

5. Если оценки $x^{s+1} [0, j] \geq 0$, $j \in N$, то

$$x [N] = u [N, 0] = b^{s+1} [M, N] x^{s+1} [M, 0]$$

— оптимальный план задачи (10)—(12). В противном случае переходим к п. 1, где полагаем $s = s + 1$.

Замечание 2. Если на s -ом шаге некоторые компоненты вектора $x^s [M, 0]$ становятся равными нулю, то следует применить процедуру исключения нулевых компонент неопорного плана (¹³). Однако предварительно на предыдущем $(s-1)$ -шаге можно попытаться варьированием $\bar{K}_s$ добиться positivity вектора $x^s [M, 0]$.

Утверждение, аналогичное теореме 3, доказывает конечность метода, который естественно назвать расширенным симплекс методом.

3.3. Расширенный метод обратной матрицы. Пусть $M' = \{0, 1, \dots, m\}$. $\bar{x}_0 [M', M']$ — единичная матрица и $u [0, N'] = x^0 [0, N']$ (вектор на-

чальных оценок). Пусть последовательно для $s = 1, 2, \dots, s$ согласно (14) преобразуются элементы матрицы $\bar{x}^0[M', M']$. Тогда в результате получим матрицу $\bar{x}^s[M', M']$.

Утверждение 2. Пусть N_s — множество индексов ненулевых столбцов матрицы $b^s[M, N]$. Тогда матрица $\bar{x}^s[M', M']$ обладает следующими свойствами;

а) $x^s[M', N'] = \bar{x}^s[M', M'] a[M', N']$ совпадает с расширенной матрицей системы (13), полученной расширенным симплекс-методом;

б) $\bar{u}[N_s, M] = b^{sT}[M, N_s] \bar{x}^s[M, M]$ является частично-обратной матрицей относительно $a[M, N_s]$.

Таким образом, учитывая утверждение 2, можно предложить следующий метод решения задачи (10)–(12). На каждом s -м шаге определяем $x^s[M', \bar{K}_{s+1}]$ и по процедуре 3.2 преобразуем только $\bar{x}^s[M', M]$, $x^s[M', \bar{K}_s]$, $b^s[M, N_s]$. При использовании второй формы признака оптимальности плана вычисляем также $\bar{u}[N_s, M]$.

3.4. При условии, что оценки $x^s[0, j] \geq 0$, $j \in N$ и $x^s[\bar{K}_{s+1}, 0] < 0[\bar{K}_{s+1}]$, где $\bar{K}_{s+1} \subseteq M$, $s = 0, 1, 2, \dots, s$, в расширенном двойственном симплекс-методе в качестве особого направляющего выбирается не вектор-строка, а вектор-столбец $x^s[\bar{K}_s, f]$. Если $x^s[M, 0] \geq 0[M]$, то процесс заканчиваем.

3.5. В расширенном симплекс-методе могут быть применены все три правила симплекс-метода, но с расширенным толкованием. В частности:

а) на каждом s -м шаге определяем такое $\bar{K}_{s+1} \subseteq N$, которое дает наибольшее приращение линейной формы (10), т. е.

$$|x^{s+1}[f, \bar{K}_s]| x^s[0, \bar{K}_s]|, \quad \bar{K}_s \subseteq \bar{K}_{s+1};$$

б) если на s -м шаге мы отталкиваемся от неопорного плана, то в псевдобазис вводим ту расширенную оценку, которая дает наибольшее приращение (10), т. е. в этом случае $\bar{K}$ — одноэлементное множество.

Если применяется правило а), то экспоненциальные оценки В. Кли и Дж. Минти (14) не распространяются на расширенный симплекс-метод (пути разные), что подтверждается примером задач класса $(n, 2n)$ для $n = 2, 3, 4, 5$. Таким образом, вопрос о сложности расширенного симплекс-метода остается открытым. Решение его упирается в решение задачи, поставленной проф. Н. З. Шором, — определение такой стратегии, т. е. $\{\bar{K}_s\}$, которая кратчайшим путем приводит к оптимуму. Аналогичная задача ставится и с точки зрения минимизации времени.

В расширенном симплекс-методе пункты 1 и 2 заранее гарантируют, что на каждом s -ом шаге

$$x[N] := b'^T[M, N] x'[M, 0] > 0[N]$$

и значение линейной формы (10) возрастает. Однако процесс можно организовать так, чтобы особые направляющие векторы определялись из последнего условия. В этом случае $b'[M, N]$ и $x'[M, 0]$ могут содержать и нулевые, и отрицательные элементы. При таком подходе пункты 1 и 2 метода при переходе от s -го к $(s+1)$ -шагу заменяются решением следующих m простейших задач комбинаторного типа. Для каждого $i \in M$ и всех $K_i \subseteq N$, для которых значение линейной формы (10) возрастает согласно (14), определяем $x'^{s+1}[M, 0]$, где $\bar{K}_i = K_i$ и формируем $b'^{s+1}[M, N]$. Среди всех K_i и $i \in M$ выбираем тот особый направляющий вектор, который удовлетворяет указанным выше условиям и дает наибольшее приращение линейной формы (10), и переходим к пункту 3 метода. Этот подход позволяет включать в процесс увеличения линейной формы (10) не только положительные, но и отрицательные оценки.

Отметим, что на основе расширенного симплекс-метода может быть развит двойственный симплекс метод Лемке. В этом случае в качестве особого направляющего вектора выбирается не вектор-строка, а вектор-столбец.

Пусть $\bar{u}[N_s, M]$ — частично обратная матрица, полученная на s -м шаге и $u[N_s, 0] > 0[N]$. Тогда на каждом s -м шаге движение к оптимуму может быть организовано вдоль направления (сдвиг):

$$x[N_s] = u[N_s, 0] + \lambda_s c'[N_s],$$

где

$$c'[N_s] = (e[N_s, N_s] - \bar{u}[N_s, M] a[M, N_s]) c[N_s]$$

— частично-ортогональная проекция $c[N_s]$. Другими словами, мы получаем проекционный метод.

Предложенный в данной работе математический аппарат позволяет сделать следующий вывод: симплекс-метод Данцига, связанный с преобразованием Гаусса, содержит в себе большие скрытые возможности в смысле развития его идеи. Таким образом, возникает задача исследования скрытых возможностей симплекс-метода и пересмотра методов (общих и специальных), связанных с его идеей.

Отдел биофизики
Академии наук Армении

Ուղղորդիչ վեկտորի մեթոդը գծային ծրագրավորման մեջ

Աշխատությունում առաջարկվում է Գաուսի ձևավորության մեջ ընտրել ոչ թե մեկ էլեմենտ, ինչպես դա ընդունված է, այլ միաժամանակ մի քանի էլեմենտ՝ ուղղորդիչ վեկտոր: Այս միտքը թույլ է տալիս ընդհանրացնել բացառման մեթոդները և նրանց հիման վրա զարգացնել Չ. Բ. Դանցիգի սիմպլեքս մեթոդը, Լ. Վ. Կանտորովիչի հակադարձ մատրիսի մեթոդը և Դ. Ի. Շեմկեի երկակի սիմպլեքս մեթոդը:

Զարգացման էությունն այն է, որ յուրաքանչյուր քայլում ընտրվում է ոչ թե մեկ հատուկ էլեմենտ, այլ միաժամանակ մի քանի էլեմենտներ (հատուկ ուղղորդիչ վեկտոր), որը թույլ է տալիս բացառման ընդլայնված մեթոդի քայլից հետո անցնել կատարելագործված պլանի:

Քանի որ կատարելագործված պլանները դիտարկվող իմաստով միանկն են, հետևաբար ապահովվում է առաջարկվող մեթոդների վերջնականությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ G. B. Danzig, *Econometrica*, № 17, p. 200—211 (1949)
- ² Дж. Б. Данциг, *Линейное программирование, его обобщения и применения*, Прогресс, М., 1966.
- ³ Л. В. Канторович, *ДАН СССР*, т. 37, № 7—8, с. 227—229 (1942).
- ⁴ Л. В. Канторович, М. К. Гавурин, в кн.: *Проблемы повышения эффективности работы транспорта*, Изд-во АН СССР, М., с. 100—138, 1949
- ⁵ G. E. Lemke, *Navy Res. Logistics Quart.*, т. 1, № 1, с. 36—47 (1954).
- ⁶ И. В. Романовский, *Алгоритмы решения экстремальных задач*, Наука, М., 1977.
- ⁷ Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, *Вычислительные методы линейной алгебры*, Физматгиз, М.—Л., 1963.
- ⁸ В. В. Воеводин, *Вычислительные основы линейной алгебры*, Наука, М., 1977.
- ⁹ E. H. Moore, *Bull. Amer. Math. Soc.*, № 25, p. 394—395 (1910).
- ¹⁰ H. A. Penrose, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, № 51, p. 406—413 (1955).
- ¹¹ А. Алберт, *Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание*, Наука, М., 1975.
- ¹² Л. В. Канторович, *Математические методы организации и планирования производства*, в кн.: ЛГУ, 1959.
- ¹³ А. Д. Тукчев, *Кибернетика*, № 4, с. 68—72 (1984).
- ¹⁴ V. Klee, G. J. Minty, *Inequalities III*, Ed. by O. Shisha, Acad. Press, N. Y., p. 159—72, 1972.

УДК 515.1

Э. А. Мирзаханян

О гильбертовых K_0 -окрестностных ретрактах

(Представлено академиком АН Армении Р. В. Амбарцумяном 17/VII 1991)

В статье вводятся понятия гильбертова K_0 -ретракта и K_0 -окрестностного ретракта, являющихся специальными подмножествами вещественного гильбертова пространства H . Существуют свойства евклидовых ретрактов и окрестностных ретрактов, которые перестают быть справедливыми в бесконечномерном случае (в частности, в гильбертовом пространстве) в классе всех непрерывных отображений. Вместе с тем оказывается, что ряд таких свойств остаются справедливыми и в вещественном гильбертовом пространстве H , если, однако, рассматривать только так называемые K_0 -отображения, принадлежащие одному специальному классу K_0 непрерывных отображений подмножеств пространства H . В работе приведены бесконечномерные аналоги ряда таких свойств.

Определение и некоторые основные свойства класса K_0 содержатся в (1-3).

Определение 1. Ретракт A множества $X \subset H$ называется K_0 -ретрактом для X , если существует ретракция $g: X \rightarrow A$, являющаяся K_0 -отображением, соответственно множества $A \subset X$ — K_0 -окрестностным ретрактом для X , если A является K_0 -ретрактом для некоторого открытого в X множества $U \supset A$.

Ниже ретракции, являющиеся K_0 -отображениями, будем называть K_0 -ретракциями.

Определение 2. Семейство K_0 -отображений $f_t: X \rightarrow Y$ называется K_0 -гомотопией, если определенное формулой $F(t, x) = f_t(x)$ отображение F цилиндра $I \times X$ в Y является K_0 -отображением в гильбертовом пространстве $H^* = \mathbb{R} \times H$.

Как известно, в классе всех непрерывных отображений единичная сфера S пространства H является ретрактом для единичного замкнутого шара B пространства H . Однако с помощью бесконечномерных гомотопических групп (4) установлено (5), что в классе K_0 -отображений сферы S не является ретрактом для B , т. е. S не является

K_0 -ретрактом для B , стало быть, и для H . Этот факт играет основную роль при доказательстве приводимых ниже предложений. Отметим также, что S является K_0 -окрестностным ретрактом как для B , так и для H , ибо отображение $x \rightarrow \frac{x}{|x|}$ является K_0 -ретракцией $H \setminus \{0\}$ на S .

Предложение 1. Пусть F — замкнутое подмножество в H , а G — одна из ограниченных компонент дополнения $H \setminus F$. Тогда не существует K_0 -отображения $f: \bar{G} \rightarrow F$ такого, что $f(x) = x$ для всякой точки $x \in \bar{G} \setminus G$.

Предложение 2. Пусть G — непустое открытое ограниченное подмножество пространства H . Тогда множество $F = H \setminus G$ не является K_0 -ретрактом для H .

Предложение 3. Пусть F — замкнутое и ограниченное подмножество пространства H , являющееся K_0 -ретрактом для H . Тогда множество $G = H \setminus F$ связно.

Предложение 4. Пусть замкнутое, ограниченное множество F есть K_0 -окрестностный ретракт H и удовлетворяет условию: существует открытое в H множество $U \supset F$ такое, что F — K_0 -ретракт для U и число компонент для множества $H \setminus F$, содержащихся в $H \setminus U$, конечно. Тогда число компонент $H \setminus F$ конечно.

Предложение 5. Пусть X — K_0 -окрестностный ретракт пространства H и $H^* = R^n \times H$ — гильбертово пространство, являющееся декартовым произведением евклидова пространства R^n размерности $n \geq 0$ и пространства H . Тогда, если множество $X^* \subset H^*$ K_0 -гомеоморфно в H^* множеству X , то X^* является K_0 -окрестностным ретрактом для H^* .

Лемма Подмножество Y пространства H является K_0 -окрестностным ретрактом для H тогда и только тогда, когда для любых множеств $A \subset X \subset H$ всякое K_0 -отображение $f: A \rightarrow Y$ можно продолжать до K_0 -отображения $f^*: U \rightarrow Y$ некоторой окрестности U в X подмножества A .

Предложение 6. Пусть $A \subset X \subset H$, причем A замкнуто в X и $T = O \times X \cup I \times A$. Пусть, далее, Y — произвольный K_0 -окрестностный ретракт для H . Тогда всякое K_0 -отображение (в гильбертовом пространстве $H^* = R \times H$) $F: T \rightarrow Y$ может быть продолжено до K_0 -отображения $\tilde{F}: I \times X \rightarrow Y$.

Теорема 1. Пусть $A \subset X \subset H$, причем A замкнуто в X , и Y — K_0 -окрестностный ретракт для H . Пусть, далее, $f: X \rightarrow Y$ — K_0 -отображение, $g_1: A \rightarrow Y$ — частичная K_0 -гомотопия отображения f . Тогда гомотопию g_1 можно продолжить до K_0 -гомотопии $f_1: X \rightarrow Y$ отображения f .

Предложение 7. Пусть X — замкнутый K_0 -окрестностный ретракт в H . Тогда X будет K_0 -ретрактом в H в том и только том случае, когда X K_0 -стягиваемо по себе в точку.

Предложение 8. Пусть $A \subset X \subset H$, причем A замкнуто в X и $Y - K_0$ -окрестностный ретракт в H . Пусть, далее, $f, g: X \rightarrow Y - K_0$ -отображения, а $\varphi_1: A \rightarrow Y - K_0$ — некоторая K_0 -гомотопия, связывающая $f|_A$ с $g|_A$. Тогда существуют окрестность V в X подмножества A и K_0 -гомотопия $\tilde{\varphi}_1: V \rightarrow Y$, связывающая $f|_V$ и $g|_V$ и являющаяся продолжением на V гомотопии φ_1 .

Теорема 2. Пусть $A \subset X \subset H$, причем A замкнуто в X . Пусть, далее, $Y - K_0$ -ретракт в H , тогда всякое K_0 -отображение $f: A \rightarrow Y$ может быть продолжено до K_0 -отображения $\tilde{f}: X \rightarrow Y$.

Следствие 1. Пусть $Y - K_0$ -окрестностный ретракт для H , а $f, g: X \rightarrow Y - K_0$ -отображения произвольного подмножества пространства H . Предположим, далее, что на некотором (необязательно замкнутом) подмножестве $A \subset X$ отображения f и g совпадают. Тогда существуют открытая окрестность V множества A в X и K_0 -гомотопия $\tilde{\varphi}_1: V \rightarrow Y$ такая, что $\tilde{\varphi}_1: f|_V \simeq g|_V$ (rel A).

Предложение 9. Пусть замкнутое подмножество пространства представимо в виде $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$, где каждое из X_i является открытым в X подмножеством и является K_0 -окрестностным ретрактом для H . Тогда и само X является K_0 -окрестностным ретрактом для H .

Предложение 10. Пусть Y — компактное подмножество пространства H , являющееся ее K_0 -окрестностным ретрактом. Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого подмножества $X \subset H$ любые два K_0 -отображения $f, g: X \rightarrow Y$, удовлетворяющие условию $\|f(x) - g(x)\| \leq \varepsilon$ для любой точки $x \in X$, K_0 -гомотопны между собой, причем эта гомотопия является неподвижной на подмножестве $A \subset X$, на котором эти отображения совпадают.

Предложение 11. Если локально компактное множество $X \subset H$ является K_0 -окрестностным ретрактом для H , то X — конечномерно ($\dim X < \infty$).

Следствие 2. Гильбертов куб Q не является K_0 -окрестностным ретрактом для H .

Замечание. Аналогичным образом определяются понятия K_1 -деформационного ретракта и K_0 -окрестностного деформационного ретракта и устанавливаются бесконечномерные аналоги некоторых соответствующих свойств конечномерного случая.

Հիլբերտյան K_0 -շրջակայության ռետրակտների մասին

Գոյություն ունեն լվկլիդյան տարածությունում ռետրակտների և շրջակայքային ռետրակտների մի ամբողջ շարք կարևոր և հետաքրքիր հատկություններ, որոնք դադարում են ճիշտ լինելուց անվերջ չափանի ֆունկցիոնալ տարածություններում քոյոր անընդհատ արտապատկերումների դասում:

Հոդվածում մտցված են հիլբերտյան K_0 -ռետրակտների և K_0 -շրջակայքային ռետրակտների գաղափարները: Դրանք իրական հիլբերտյան H տարածությունում այն ռետրակտներն են, որոնց դեպքում ռետրակցիաները պատկանում են H տարածության ենթաբազմությունների անընդհատ արտապատկերումների մի հատուկ K_0 դասի: Հոդվածում բերված են վերը նշված հատկություններից մի քանիսի անվերջ չափանի անալոգները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 В. Г. Болтянский ДАН АрмССР. т. 51, № 3 (1970) 2 Э. А. Мирзаханян, ДАН АрмССР. т. 51. № 5 (1970). 3 Э. А. Мирзаханян, ДАН АрмССР т. 79, № 1 (1984). 4 Э. А. Мирзаханян, Уч. зап ЕГУ, № 3, 1990. 5 Э. А. Мирзаханян, Уч. зап. ЕГУ, № 1, 1991.

ЭКОЛОГИЯ

УДК 631

Р. Г. Ревазян, Л. А. Араратян, Б. Х. Межуни

Об использовании донных отложений водохранилищ в
сельскохозяйственном производстве

(Представлено академиком АН Армении С. В. Григоряном 6/IX 1991)

Проблема охраны искусственных водохранилищ заключается не только в очистке и высвобождении громадных количеств донных отложений, но и в изыскании способов их обработки и рационального применения.

Лабораторией биогеохимии ИГН АН Армении начиная с 1990 г. проводились исследования по использованию донных отложений Ереванского водохранилища как источника макро- и микроэлементов для сельскохозяйственного производства.

Исследования позволили установить, что всю центральную часть водоема занимает черный ил, а литораль—в основном пески. Пробы, взятые из полосы берега, по своему механическому составу относятся к пескам средней крупности. С нарастанием глубины идет уменьшение доли среднего песка и увеличение количества илистых фракций. На расстояниях от 10 до 30 м от берега озера располагается илистый песок. В интервале от 30 до 40 м от берега во всех разрезах встречается песчанистый ил черного цвета, в котором доля илистых частиц не превышает 60—70 %, а фракции песка составляют менее 30—40 %. Впадины озера заполнены черным илом, в котором илистые частицы составляют более 90 % от сухой массы пробы.

Для характеристики донных отложений проводились исследования химического состава с применением спектрального и химического анализов по общепринятым методикам (1).

Данные анализов показали (табл. 1), что содержание гумуса и биогенных элементов в донном иле относительно невысокое. Однако концентрации некоторых тяжелых металлов находятся в токсических количествах: так, концентрации свинца в 4 раза, меди до 2,5 раза, никеля до 1,5 раза превышают предельно допустимые концентрации в почве. Очевидно, здесь донные отложения являются своеобразным физико-химическим фильтром для токсических веществ, поступающих в водохранилище. С одной стороны, они как естественный барьер пре-

пятствуют поступлению некоторой части загрязняющих веществ в грун-
товые воды, с другой,—большие их скопления в водохранилище могут
привести к преждевременному его старению.

Таблица 1

Содержание гумуса и химических элементов в донных отложениях
Ереванского водохранилища

Гумус, %	Общий азот, %	pH	Гидроли- зуемый N	Полвижный P ₂ O ₅	Обменный K ₂ O	Fe		
мг/100 г ила								
2.46—5.34	0.25—0.28	8.0	8.2—14.0	9.2—8.4	35.0—48.0	25500—33000		
Mn	Ti	Ni	Cu	Pb	Mo	Co	Zn	V
мг/ 1 г ила								
440—570	2000—4550	120—140	78—130	61—89	2.7—4.7	21.8—27.0	170—180	77—110

Учитывая, что донный ил содержит большой набор макро- и
микроэлементов, полагаем использовать его как дешевый источник
питательных элементов для растений. С этой целью были заложены
опыты с растениями пшеницы. Результаты опытов показали, что наи-
большие прибавки в продуктивности по сравнению с фоном (почва)
получены от применения донного ила (100%) и донного ила в смеси с
кварцевым песком (ил 50% + песок 50%).

Установлено (табл. 2), что в растениях, выращенных на донном
иле и на смеси его с почвой и песком, содержание тяжелых металлов
в растениях выше предельно допустимой концентрации: свинца в 7—14
раз, меди в 3—5 раз, цинка до 2 раз. Отсюда следует, что некоторые
тяжелые металлы в донном иле находятся в токсических количествах
и практически в таком виде его невозможно использовать в сельско-
хозяйственном производстве.

Таблица 2

Содержание тяжелых металлов в растениях в опытах с донными отложениями

Варианты опыта	мг/кг сухого растения									
	Fe	Mn	Ti	Ni	Cu	Pb	Mo	Co	Zn	V
Ил 100%	57	17.2	4.3	0.46	28.7	2.2	5.9	0.8	15.8	0.54
Почва 75% + ил 25%	710	82	237	4.5	46.0	2.4	1.7	0.8	18.4	4.5
Почва 50% + ил 50%	191	66	30	1.4	42.0	1.1	1.8	0.8	12.7	1.2
Песок 50% + ил 50%	54	56	4.7	0.5	36.7	0.7	2.3	0.8	15.5	0.5

В связи с этим донные отложения были подвергнуты обработке различными реагентами с целью перевода содержащихся в них тяжелых металлов—токсикантов в труднорастворимые в воде и слабых кислотах продукты (табл. 3).

Таблица 3

Содержание тяжелых металлов в 1,0 н НСl вытяжке из донного ила
Ереванского водохранилища, мг/кг сухого ила

Вариант опыта	Ni	Pb	Cu	Co	Mo	Zn	Mn	Fe
Донный ил	66,5	5,6	53,2	2,9	0,24	2,7	39,9	39,9
Донный ил + H_3PO_4	11,4	0,56	1,7	0,35	0,33	2,1	9,2	3,5
Донный ил + доломит	0,37	—	1,2	—	0,1	0,92	4,8	2,2
Донный ил + H_3PO_4 + доломит	1,2	—	2,4	0,33	0,27	—	16,4	3,7
Донный ил + H_3PO_4 + органика	0,5	—	1,3	—	0,18	—	8,6	2,7
Донный ил + доломит + органика	0,37	0,43	1,6	—	0,11	—	5,9	2,9
Донный ил + перлит	2,1	1,8	37,4	1,9	0,16	10,7	28,1	9,4
Донный ил + цеолит	0,38	—	0,58	—	0,01	—	4,6	1,7
Донный ил + диатомит	1,2	—	1,0	2,6	0,13	—	13,9	17,3

Опыты по нейтрализации тяжелых металлов—токсикантов включают следующие варианты: донный ил без добавок—фон. Серии с внесением сорбентов, с ортофосфорной кислотой и с органикой (птичий помет). Продолжительность компостирования—три недели. После завершения опытов в донных илах определили реакцию среды и содержание изучаемых тяжелых металлов—токсикантов: валовое, в вытяжке 1,0 н НСl. Повторность опыта трехкратная.

Результаты опыта показали (табл. 3), что с помощью применяемых реагентов стало возможным переведение тяжелых металлов в трудно-растворимые в слабых кислотах формы и в менее подвижное состояние, способствующее закреплению избыточного количества ионов. Особенно хорошие результаты получены в вариантах с применением сорбентов. Так, наилучший результат получен в варианте с применением цеолита, где концентрации тяжелых металлов-токсикантов в вытяжке 1,0н НСl существенно упали: никеля и меди на 2 порядка ниже, кобальт, свинец и цинк не обнаружены. Здесь, очевидно, имела место фиксация гранулами цеолита тяжелых металлов. Поскольку сорбенты имеют катионообменные центры и большой отрицательный заряд, то положительно заряженные тяжелые металлы могут адсорбироваться более прочно и соответственно труднее выщелачиваться (2-4).

Применение ортофосфорной кислоты тоже обусловило понижение концентрации элементов-токсикантов, что, по-видимому, связано со снижением подвижности тяжелых металлов в связи с образованием фосфатов.

Испытание донного ила проводили в условиях вегетационного опыта с культурой томата с использованием сорбентов и других реагентов. Путем сопоставления показателей, полученных по фону и в вариантах с внесением реагентов, можно заключить, что в основном с помощью различных реагентов стало возможным переводить тяжелые металлы в труднорастворимые формы, гарантирующие их переход в растения в количестве, не превышающем предельно допустимые концентрации для продуктов питания.

Исследования донного ила установили возможность использования его как ценного субстрата для выращивания растений как в условиях теплиц, так и в питомниках, учитывая при этом, что в тепличных хозяйствах в качестве субстрата используют довольно ценный пахотный слой почвы и без того малоземельной республики. Более того, в теплицах в зависимости от выращиваемой культуры приходится часто (от 2-х и более лет раз) менять почву. Однако использование донных илов в качестве субстрата с применением добавок (сорбентов), по-видимому, позволит частично исключить эти хлопоты, так как известно, что сорбенты, в частности диатомит, внесенный в почву, способствует усилению деятельности микроорганизмов, поражающих вредителей и возбудителей болезней сельскохозяйственных культур (5).

Практически неограниченные запасы природных сорбентов в Армении, их дешевизна, довольно высокие адсорбционные и ионообменные свойства делают экономически целесообразным их использование для нейтрализации содержащихся в донном иле тяжелых металлов—загрязнителей.

В целом наши исследования позволили заключить, что донный ил Ереванского водохранилища можно использовать в качестве высокоэффективного дешевого питательного субстрата для тепличного хозяйства только после соответствующей обработки и широкого производственного испытания, а для питомников и для выращивания декоративных культур его можно применять и без обработки.

Институт геологических наук
Академии наук Армении

Ռ. Հ. ՌԵՎԱԶՅԱՆ, Լ. Ս. ԱՐԱՐԱՏՅԱՆ, Բ. Խ. ՄԽԹՐԻԱՆ

Զբամբարների հատակային նստվածքների օգտագործումը գյուղատնտեսական արտադրության մեջ

Հեղինակների հիմնական խնդիրն է հանդիսացել ուսումնասիրել Երևանյան լճում անընդհատ կուտակվող ու զգալի չափերի հասնող հատակային տիղմից ոչ միայն ձերբազատվելը, այլև նրա մշակման ու ռացիոնալ օգտագործման ուղիների որոնումը:

Առաջին փորձերը, որոնք նպատակ են ունեցել պարզաբանելու գյուղատնտեսական մշակույթների վրա հատակային տիղմի ազդեցությունը, տվել

են դրական արդյունքներ: Սակայն այդ փորձերը ցույց են տվել նաև, որ հատակային տիղմի վրա աճեցրած բույսերում կուտակվում է մի շարք ծանր մետաղներ (Pb, Cu, Zn) տոքսիկ քանակությամբ, որը զգալի գերազանցում է թույլատրելի սահմանները:

Հաշվի առնելով այդ հանգամանքը, հետագա փորձերում հատակային տիղմը մշակվել է մի շարք սորբենտներով (ցեոլիտ, դիատոմիտ, դոլոմիտ և այլն), որը հնարավորություն է տվել վերածել այդ տոքսիկ տարրերը բույսերի համար անմատչելի ձևերի (չդիսոցվող և դժվարալուծ՝ թույլ թթուներում):

Այսպիսով, հատակային տիղմի նախնական փորձարկումները ցույց տվեցին, որ այն՝ շնորհիվ իոմոսի (2—5 %) ու մի շարք մակրո և միկրո-տարրերի պարունակության, կարելի է հաջողությամբ օգտագործել որպես սուրստրատ չերմատնային տնտեսության մեջ (քաղականին թանկարժեք հողի վաւելւաւերտի փոխարեն) և տնկարաններում:

ЛИТЕРАТУРА — ՉՐԵՎԱՆԱԻՐՅՈՒՆ

1. А. В. Петербургский. Практикум по агрономической химии. Колос, М., 1969.
2. С. Грег, К. Силл. Адсорбция, удельная поверхность, пористость. Мир, М., 1970.
3. Р. Гриссбах. Теория и практика ионного обмена. ИЛ, М., 1963.
4. Д. Радлемберг. Селективность ионного обмена, в кн: Ионный обмен, Мир, М., 1968.
5. А. В. Яблоков. Сельское хозяйство без пестицидов, в кн: Экологическая альтернатива, Прогресс, М., 1990.

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЯ

УДК 581.14: 631.539

А. Г. Деведжян, Р. З. Сисерян, И. Л. Давтян, Х. К. Хажакян

Влияние материнского клубня и различных фонов минерального питания на рост и развитие безвирусного картофеля в гидропонике

(Представлено академиком М. Х. Чайлахяном 16/VI 1991)

Разработка гидропонного способа размножения безвирусного семенного картофеля (¹⁻³) выдвинула ряд технологических задач, решение которых требовало проведения специальных физиологических исследований. При выращивании картофеля в гидропониках представлялось важным в первую очередь рассмотреть взаимоотношения между двумя качественно различными источниками питания в регуляции клубнеобразования. В связи с этим изучали характер влияния метаболитов материнского (маточного) клубня, с одной стороны, и минерального раствора, с другой, на клубнеобразование и общую продуктивность растений в гидропонике.

Опыты проводили в зимне-весенний сезон 1991 г. в Институте агрохимических проблем и гидропоники АН Армении.

Оздоровленные в условиях *in vitro* клубни картофеля *Solanum tuberosum* сорта Бирюза 20 февраля высаживали в гидропонические вегетационные сосуды емкостью 8,5 л с приспособлением для автономного подпитывания корней растений с помощью электрокомпрессора. Посадку клубней (по 1 на сосуд) производили на глубине 5 см, а в качестве субстрата использовали красный вулканический шлак с размером частиц 1—2 см.

Сразу после появления первых ростков (27 февраля) у половины растений удаляли материнские клубни, вторая же половина растений до конца опыта развивалась под контролем материнского клубня.

В течение первых двух недель после посадки клубней (с 20 февраля по 6 марта) опытный материал 3 раза в неделю поливали водопроводной водой; начиная с 6 марта в опыт были введены два резко различных фона минерального питания—высокий и низкий при 5-кратном подпитывании каждого сосуда в течение недели. Данный режим поливов сохраняли до 10 апреля, т. е. дня окончания опыта.

В целом, схема опыта состояла из 4-х вариантов: 1) высокий

минеральный фон питательного раствора, материнский клубень оставлен; 2) то же, материнский клубень удален; 3) низкий минеральный фон питательного раствора, материнский клубень оставлен; 4) то же, материнский клубень удален.

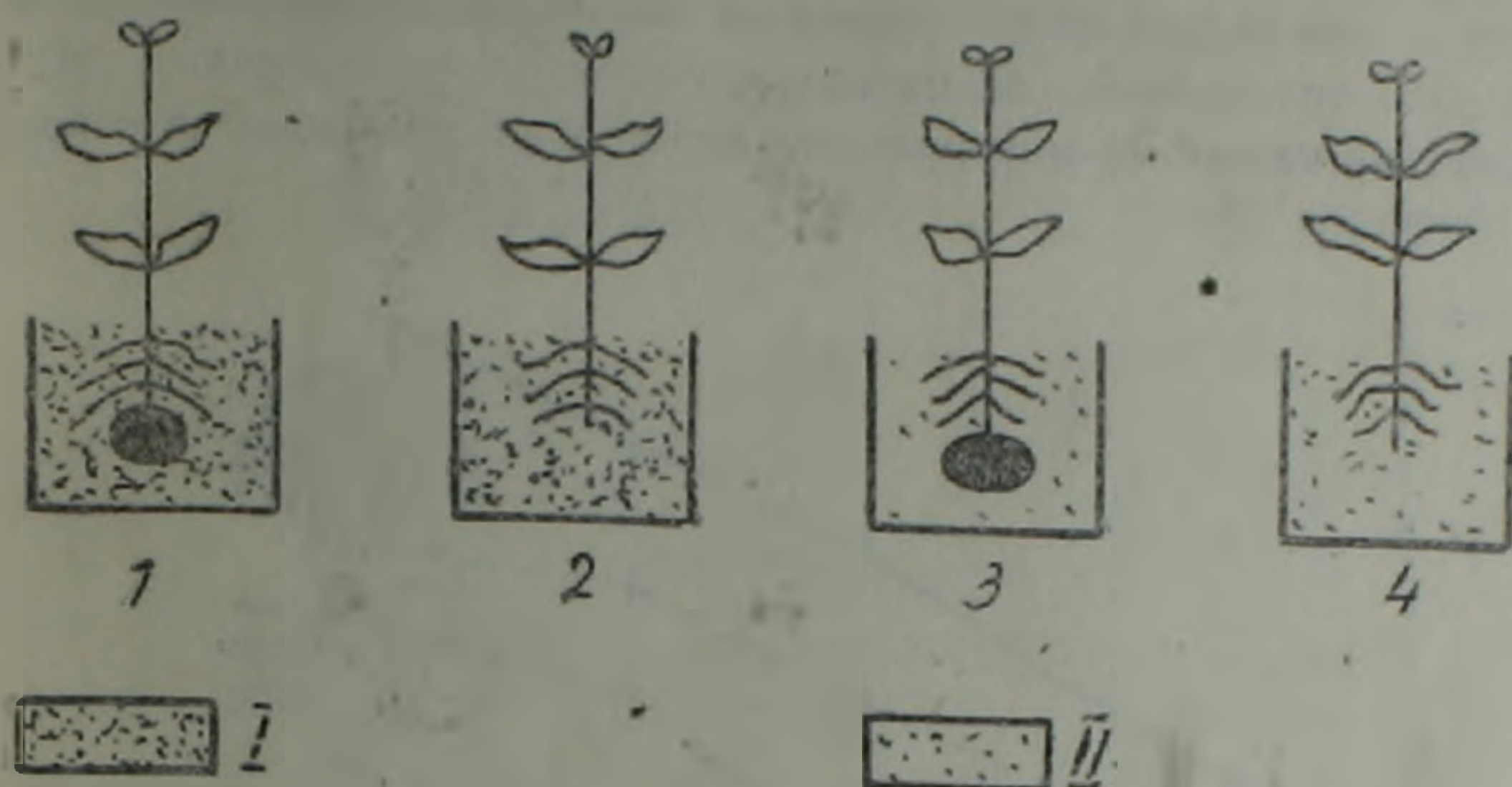


Рис. 1. Растения варнятов 1,3 — под контролем, 2,4 — вне контроля материнского клубня; гидропонический раствор содержит высокий (1, 2) и низкий (3, 4) фон элементов минерального питания

Разные фоны минерального питания растений создавали по следующей схеме.

Высокий фон: с 6 по 13 марта растения поливали 25%-ным раствором от полной питательной смеси по Г. С. Давтяну (4); с 13 по 20 марта—50%-ным раствором; с 20 марта по 10 апреля—полным 100%-ным раствором, который еженедельно заменяли свежеприготовленным.

Низкий фон: с 6 по 13 марта растения поливали 25%-ным раствором, который до конца опыта еженедельно обновляли чистой водопроводной водой, т.е. ограничивались лишь промывочными поливами.

В течение опыта проводили фенологические наблюдения и биометрические измерения для регистрации динамики роста, а в конце опыта (10 апреля)—учет ряда параметров продуктивности растений, в том числе морфологический анализ и весовой анализ надземных и подземных органов по сырой биомассе. Повторность в каждом варианте 10-кратная. Цифровой материал обрабатывали статистически по средним значениям и их стандартным ошибкам.

Результаты изучения динамики роста растений картофеля показаны на рис. 2, а параметры роста, развития и продуктивности надземных и подземных органов растений в конце опыта—в таблице.

Представленные данные, как и следовало ожидать, показали, что в стимуляции продукционных процессов надземных органов совместное влияние материнского клубня и высокого фона минерального питания (вариант 1) достаточно сильное, по сравнению с растениями без материнских клубней при низком фоне минерального питания (вариант 4). Вместе с тем из опытных вариантов 2 и 3 выявлено, что для сти-

муляции роста растений в высоту более предпочтительно присутствие материнского клубня, чем влияние высокого минерального фона. Сравнение этих же вариантов (2 и 3) по параметрам диаметра разрастания куста в ширину, интенсивности образования боковых побегов первого порядка и накопления общей надземной биомассы показывает, что ведущая роль принадлежит не материнскому клубню (вариант 3), а интенсивному источнику минерального питания растений или высокому фону (вариант 2).

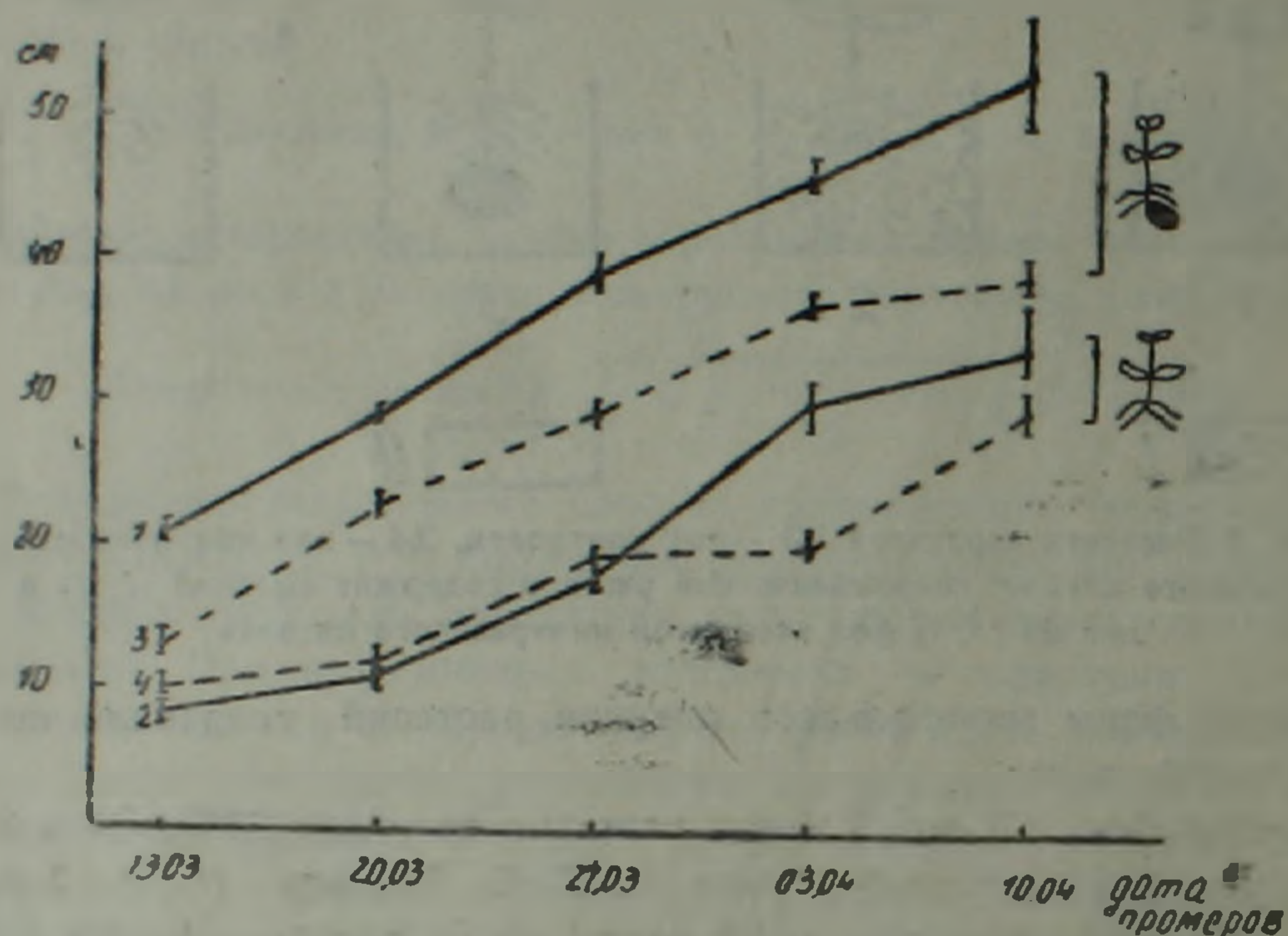


Рис. 2. Динамика роста картофеля в гидропонике под контролем (1, 3) и вне контроля (2, 4) материнского клубня при различных фонах минерального питания. Сплошная линия — высокий фон, пунктирная — низкий фон

Взаимоотношения минерального и органического источников питания картофеля в продуктивности подземных органов складываются иным образом. Продуктивность или вес корней в большей мере зависит от деятельности материнского клубня. Аналогичен эффект влияния маточного клубня на столонообразование растений или число столонов, хотя рост уже образовавшихся столонов или вес столонов, наоборот, находится под контролем интенсивного минерального фона. Анализ клубнеобразования опытных растений или числа образовавшихся клубней выявил существенную возможность полной компенсации с помощью интенсивного минерального фона процессов, контролируемых материнским клубнем. Более того, удаление маточного клубня не повлияло на число образовавшихся клубней или интенсивность клубнеобразования растений (варианты 1 и 2). Необходимо отметить, однако, что рост индуцированных или уже образовавшихся клубней целиком подчинен влиянию материнского клубня независимо от минерального фона: нормальный рост клубней, выявленный по весовому признаку, осуществляется только при наличии маточного клубня (варианты 1 и

Некоторые параметры продуктивности безвирусного картофеля в гидропонике в зависимости от различных источников питания

№	В а р и а н т ы	Продуктивность надземных органов, среднее на 1 растение				Продуктивность подземных органов, среднее на 1 растение				Диаметр клубней (см по трем стандартам % от общего числа клубней для каж- дого стандарта				
		высота растений, см	диаметр куста, см	число побегов первого порядка, шт.	вес надземных органов, г	вес корней, г	столонов		клубней		1-3	3-4	5	
							число, шт.	вес, г	число, шт.	вес, г				
1	Материнский клубень	Высокий фон минерального питания	53±4.8	25.6	9.3	109±4.1	10.8	11.5	1.9	8.8±0.9	69±4.0	51	44	4
2	Без материнского клубня		34±2.9	18.4	3.4	38±2.4	2.5	3.8	2.1	9.2±2.2	30±4.1	57	30	3
3	Материнский клубень	Низкий фон минерального питания	29±1.3	15.9	1.1	30±1.7	4.1	7.9	1.0	8.1±0.5	52±4.0	46	57	4
4	Без материнского клубня		29±1.5	12.2	1.1	24±2.1	2.1	6.7	1.3	4.2±1.9	19±1.5	67	33	—

3). Распределение полученных клубней по трем стандартам их диаметров (1—2; 2—3; 5 см) показало, что в вариантах 2 и 4, по сравнению с вариантом 1, имеется смещение в сторону преимущественного образования клубней с меньшим диаметром (1—2 см). В варианте 3, наоборот, наблюдалось смещение к стандарту с диаметром 3—4 см. Эти данные подтверждают указанный нами факт о компенсации роли материнских клубней в процессе клубнеобразования за счет высокого минерального фона, а также о существенной роли материнского клубня в росте уже образовавшихся клубней.

Полученные нами данные не противоречат результатам известных исследований (⁵⁻⁶) по влиянию материнского клубня на процесс клубнеобразования, где было однозначно показано, что материнский клубень не только не стимулирует клубнеобразование, но и тормозит его. Независимость инициации клубнеобразования растений от существования материнского клубня с точки зрения функциональной деятельности последних в качестве доноров гормональных метаболитов (⁶) подтверждается также исследованиями (⁷) по индукции образования микроклубней картофеля *in vitro* на среде без регуляторов роста при определенных соотношениях сахарозы и азота, а также длины дня.

Вместе с тем полученные в наших опытах результаты показали, что два различных источника питания картофеля (органический и минеральный) не однозначно контролируют различные процессы индукции органобразования с одной стороны и дальнейшего роста уже образовавшихся органов растений, с другой. Для индукции образования одних органов, в том числе клубней, решающее значение имеет интенсивное минеральное питание, для других—материнский клубень. И наоборот, ряд иных органобразовательных процессов может контролироваться маточным клубнем, а дальнейший рост уже индуцированных органов—интенсивным или высоким фоном минерального питания.

Возможность компенсации деятельности маточного клубня высоким фоном минерального питания имеет важное технологическое значение. Достаточно отметить, что в наших опытах, после удаления и повторной посадки маточных клубней в гидропонику, они прекрасно прорастают и дают достаточный выход семенного материала, тем самым удваивая продукционную ценность каждого семенного клубня. Полученные результаты являются еще одним свидетельством перспективности исследований по созданию сортов картофеля, размножающихся ботаническими семенами (^{2, 8}), которые, естественно, произрастают без материнских клубней, не оказывая при этом отрицательного влияния на продуктивность клубнеобразования.

Таким образом, проведенные исследования показали принципиальную возможность технологического регулирования морфогенеза и продуктивности картофеля в гидропонике с помощью различных источников питания растений.

Институт агрохимических проблем и гидропоники
Академии наук Армении

Մայրական պալարի և հանձային սննդառության տարբեր ֆոների
ազդեցությունը միջուսագեղձ կալոսոֆիլի և ԳԽԳՍԳՄԻՄԻՄ
հիդրոպոնիկայի պայմաններում

Հիդրոպոնիկայի պայմաններում ուսումնասիրվել է պալարագոյացման
և բույսերի ընդհանուր արդյունավետության վրա մայրական պալարի և հան-
քային սննդառության տարբեր ֆոների ազդեցության բնույթը:

Յույց է տրված, որ բույսերի ընդհանուր կենսազանգվածի կուտակման հա-
մար որոշիչը հանքային սնուցման բարձր ֆոնն է: Արմատների և ստորոնների
քանակը մեծ մասամբ պայմանավորված է մայրական պալարի գործունեու-
թյամբ, դրանց հետագա աճը հանքային սննդառության բարձր ֆոնով: Իսկ
պալարագոյացման ինդուկցիայի համար վճռական նշանակություն ունի
սննդառության բարձր ֆոնը, այլ ոչ թե մայրական պալարի առկայությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 А. Г. Деведжян, С. Х. Майрапетян, в кн.: Регуляция роста и развития картофеля, Наука, М., с. 167—170 1990. 2 Р. З. Сисерян, А. Г. Деведжян, Тезисы докл. респ. конф «Наука—овощеводству», Ереван, с. 36, 1990. 3 И. Л. Давтян, А. Г. Деведжян, Тезисы докл. респ. конф «Наука—овощеводству», Ереван, с. 16, 1990. 4 Г. С. Давтян, Гидропоника. Справочная книга по химизации сельского хозяйства, Колос, М., 1984. 5 R. Tizlo, C. R. Tizlo, Euton, v. 40, № 1, p. 49—59 (1981). 6 Ж. В. Цовян, М. Т. Петросян, в кн.: Регуляция роста и развития картофеля, Наука, М., с. 78—82, 1990. 7 N. Garner, J. Blake, Ann. Bot. (USA), v. 63, № 6, p. 663—674 (1989). 8 О. С. Мелик-Саркисов, В. А. Аветисов, Вестн. с. х. наук, № 1, с. 57—64, 1987.

УДК 612.57

К. Р. Арутюнян, Р. А. Арутюнян, Дж. К. Хачатрян, Л. А. Саакова

Влияние окситоцина на температурный гомеостаз организма

(Представлено академиком АН Армении В. В. Фанарджяном 6/VI 1991)

Регуляторное участие пептидов в поддержании температурного гомеостаза организма в настоящее время привлекает внимание многих исследователей (1-5). Одним из таких пептидов является окситоцин, который играет важную роль в родовой деятельности и рефлексе молокоотдачи. Описаны метаболические эффекты окситоцина, его действие на экскрецию некоторых ионов, регуляцию водно-солевого обмена в экстраренальных органах, секрецию пищеварительных соков и др. (6-10). Что касается физиологической роли окситоцина в регуляции теплообмена организма и в поддержании температурного гомеостаза, этот вопрос до сегодняшнего дня изучен недостаточно. Имеющиеся данные (11-12) указывают на то, что окситоцин обладает антипирогенными действиями и что этот эффект связан с угнетением продукции эндогенного пирогена.

Цель настоящей работы заключалась в выяснении действия разных доз окситоцина на теплообмен организма у кроликов при разных температурных фонах организма. Изучение этого вопроса имеет не только теоретическое, но и практическое значение, поскольку спектр клинического действия окситоцина весьма широк. В наших опытах учитывалась динамика изменения центральной температуры в области ободочной кишки и периферической температуры в области главной артерии ушных раковин, а также теплосодержание в организме. Беспрерывную запись температуры исследуемых точек производили потенциометром, который был подключен к выходу усилителя с чувствительностью 0,013° для центральной и 0,13° для периферической температуры. Динамику изменения теплосодержания определяли по формуле $Q = m \cdot c \cdot t (\Delta T)$, где учитывали теплоемкость тканей, массу животного и изменение температуры организма. Эксперименты проводили в трех сериях. В первой серии изучали влияние различных доз окситоцина на вышеуказанные параметры в условиях нормотермии организма, в пределах термонеutralной зоны окружающей среды (22°). Во второй

и третьей сериях—на фоне гипер- и гипотермии в условиях температуры выше (36°) и ниже ($7,0^{\circ}$) термонеutralной зоны. Эксперимент проводили в основном на двух кроликах, один из них служил контролем и получал физиологический раствор, а второй являлся опытным и получал окситоцин. Порядок ведения опыта был следующим: в течение 30—40 мин производили контрольную синхронную регистрацию температурных показателей и теплосодержания в организме до установления плато, затем внутривенно вводили окситоцин (фирмы Гедеон Рихтер А. О., Будапешт) в дозе 4 и 8 мкг/кг на фоне нормо-, гипер- и гипотермии организма. На 9 кроликах со средней массой 3326 проведено 68 экспериментов, из коих 34 с окситоцином и 34 без окситоцина.

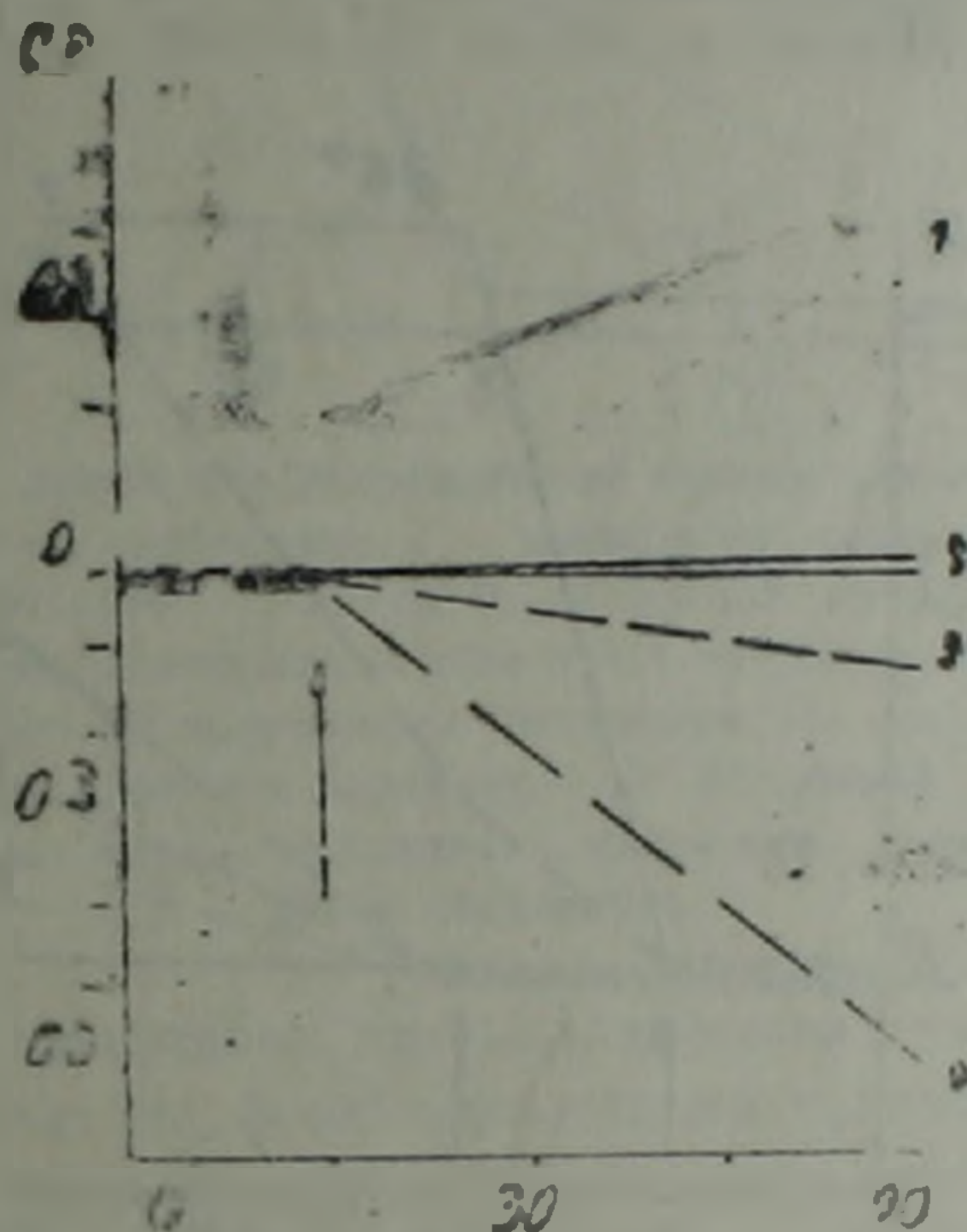


Рис. 1. Влияние разных доз окситоцина на температурный гомеостаз организма на фоне его нормотермии. 1, 4 — $\Delta T^{\circ}\text{C}$ ободочной кишки опытных кроликов, получивших окситоцин в дозе 8 мкг/кг; 2, 3 — то же контрольных кроликов, не получивших окситоцин. По оси абсцисс — время опыта в минутах; по оси ординат — $\Delta T^{\circ}\text{C}$ ободочной кишки. Стрелкой показано время введения окситоцина

Установлено, что внутривенное введение окситоцина в дозе 4 мкг/кг вызывает достоверный ($P < 0,01$) гипотермический эффект и центральная температура снижается в среднем на $0,61^{\circ}$, в то время как у контрольных кроликов она понижается всего на $0,11^{\circ}$ (рис. 1). Периферическая температура организма в обоих случаях снижалась в пределах $2,67$ — $2,68^{\circ}$, а теплосодержание, после введения окситоцина, составляло в среднем 500 кал/кг, против 172 кал/кг в контроле. При введении окситоцина в дозе 8 мкг/кг наблюдается гипертермический эффект и центральная температура повышается в среднем на $0,39^{\circ}$ против $-0,02^{\circ}$ в контроле. Периферическая температура организма снижалась в среднем на $1,95^{\circ}$ или в 2,5 раза больше, чем у контрольных. Что касается теплосодержания, то оно у опытных кроликов увеличи-

налось на 202 кал/кг или в 4 раза по сравнению с контролем ($P < 0,001$).

Результаты второй серии экспериментов (рис. 2) показали, что если введение окситоцина в дозе 4 мкг/кг на фоне гипертермии организма повышало температуру ядра в два раза больше по сравнению с контролем (соответственно на $0,42$ и на $0,23^\circ$), то введение окситоцина в дозе 8 мкг/кг увеличивало эту разницу в восемь раз (соответственно на $1,02$ и на $0,14^\circ$). Температура оболочки при дозе окситоцина 4 мкг/кг как у контрольных, так и у опытных кроликов повышалась в пределах $11,06$ — $11,26^\circ$, а при дозе 8 мкг/кг—в пределах $12,6$ — $14,37^\circ$. Теплосодержание соответственно увеличивалось в первом случае от 100 до 410 кал/кг, а во втором—от 56 до 491 кал/кг.

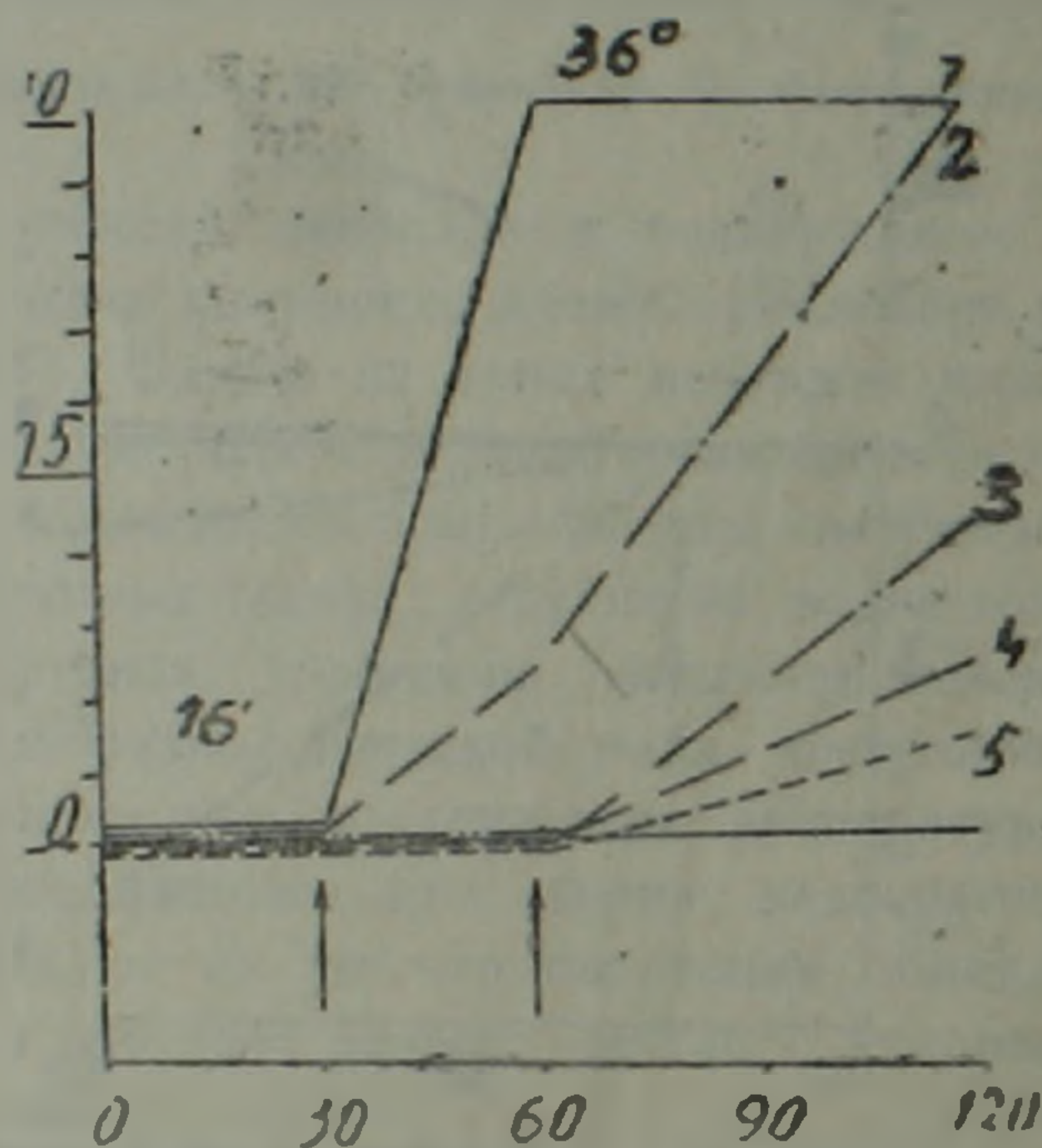


Рис. 2. Влияние разных доз окситоцина на температурный гомеостаз организма на фоне его гипертермии. 1 — температура камеры до и в период нагрева животного; 2, 3 — $\Delta T^\circ\text{C}$ оболочной кишки опытных кроликов, получивших окситоцин в дозе 8 и 4 мкг/кг; 4, 5 — то же контрольных кроликов, не получивших окситоцин. По оси абсцисс — время опыта в минутах, по оси ординат — $\Delta T^\circ\text{C}$ оболочной кишки. Первая стрелка показывает начало нагрева животного, вторая — время введения окситоцина.

Данные экспериментов третьей серии показывают, что введение окситоцина в дозе 4 мкг/кг на фоне гипотермии организма не останавливает гипотермию и центральная температура продолжает снижаться аналогично контрольным показателям в среднем на $0,20$ — $0,21^\circ$ (рис. 3). При введении окситоцина в дозе 8 мкг/кг гипотермический эффект устраняется и центральная температура тела повышается в среднем на $0,15^\circ$ против ее снижения у контрольных — в среднем на $0,49^\circ$ ($p < 0,02$). Что касается периферической температуры организма, то она в обоих случаях снижалась, однако при дозе окситоцина 4

мкг/кг она снижалась в среднем от 9,08 до 13,75°, а при дозе 8 мкг/кг — от 14,02 до 14,58°. Теплосодержание у опытных кроликов в первом случае увеличивалось от 96 до 244 кал/кг, а во втором — от 128 до 256 кал/кг. У контрольных, соответственно, от 370 до 438 и от 180 до 365 кал/кг.

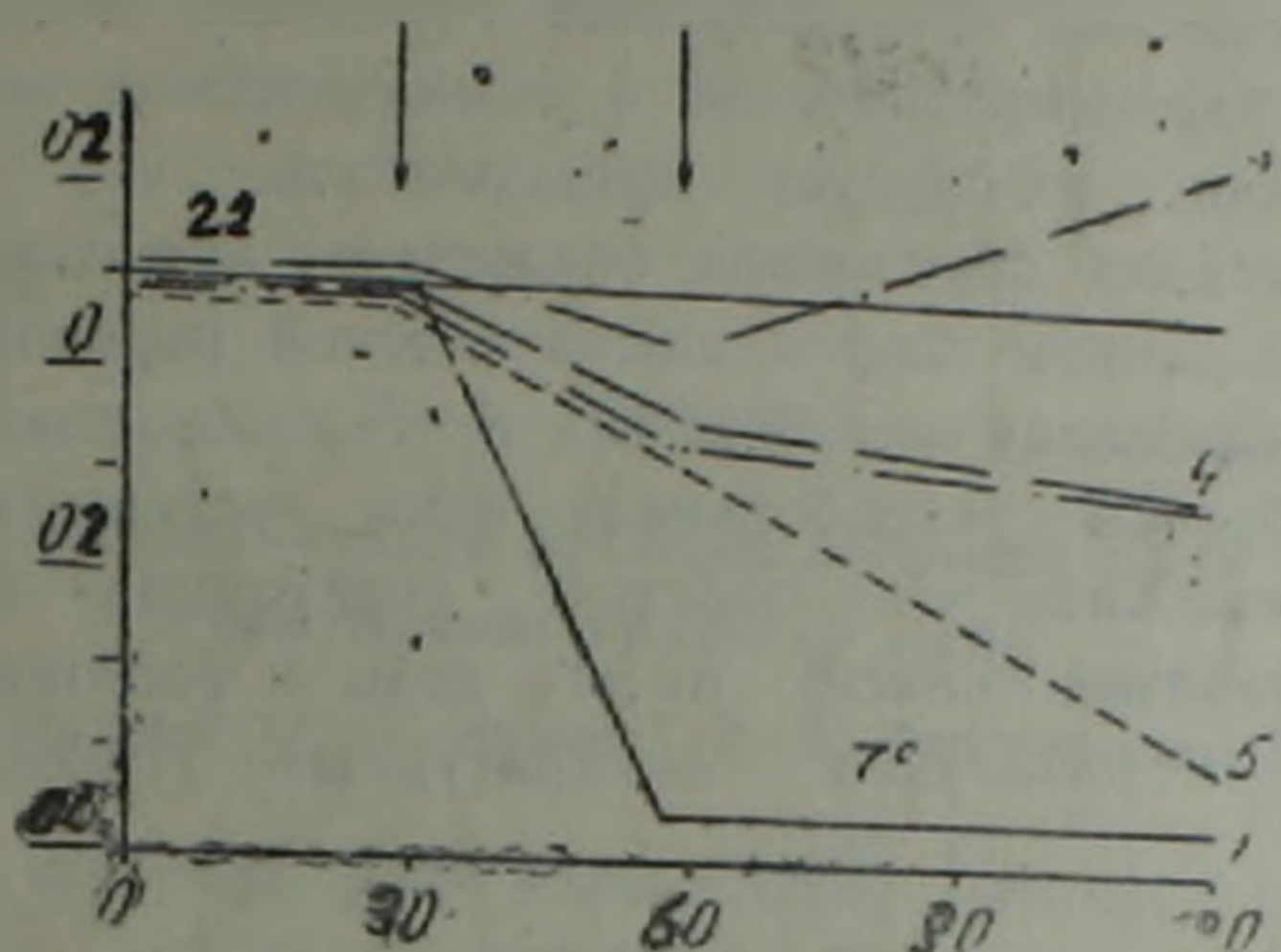


рис. 3. Влияние разных доз окситоцина на температурный гомеостаз организма на фоне его гипотермии. 1 — температура камеры до и в период охлаждения животного; 2, 3 — ΔT °C ободочной кишки опытных кроликов, получивших окситоцин в дозе 8 и 4 мкг/кг; 4, 5 — то же контрольных кроликов, не получивших окситоцин. По оси абсцисс — время опыта в минутах, по оси ординат — ΔT ободочной кишки. Первая стрелка показывает начало охлаждения животного, вторая — время введения окситоцина

Что касается латентного периода действия окситоцина на температурный гомеостаз на фоне нормотермии организма, то выявлено, что при дозе 8 мкг/кг он равнялся 17 мин, а при дозе 4 мкг/кг — 25 мин. На фоне гипотермии латентный период в первом случае составлял 20 мин, а во втором — 32 мин; на фоне гипертермии в обоих случаях — 20 мин.

Анализируя полученные данные, можно отметить, что окситоцин участвует в поддержании температурного гомеостаза организма. Его терморегуляторный эффект зависит от исходного температурного фона организма и дозы введенного пептида. Высокие дозы окситоцина, введенные в организм на фоне нормотермии, вызывают гипертермический, а низкие дозы — гипотермический эффект. Введение окситоцина на фоне гипертермии организма в условиях нагрева животного потенцирует гипертермический эффект действия высокой температуры окружающей среды и, по сравнению с контрольными животными, приводит к значительному повышению центральной температуры тела. Низкие дозы окситоцина, введенные в организм на фоне его гипотермии, не устраняют гипотермический эффект действия низкой температуры окружающей среды, а высокие дозы не только останавливают гипотермию, но даже значительно повышают центральную температуру тела по сравнению с таковой у контрольных животных. Механизм действия окситоцина не вполне ясен. Ввиду того, что он усиливает

сократительную активность гладкой мускулатуры внутренних органов через парасимпатическую нервную систему, надо предполагать, что гипотермический эффект окситоцина обусловлен активацией парасимпатической нервной системы, снижением общего метаболизма и теплопродукции в организме. Поскольку в нормальных условиях жизнедеятельности организма температурный гомеостаз поддерживается взаимодействием парасимпатической и симпатической нервной системы и их медиаторами, то следует предполагать, что гипертермический эффект окситоцина обусловлен снижением активности парасимпатической и повышением тонуса симпатической нервной системы и, как следствие, увеличением метаболизма и теплособразования в организме.

Таким образом, разработанная нами экспериментальная модель позволила установить, что действие окситоцина на температурный гомеостаз организма зависит от его дозы и состояния системы терморегуляции в различных температурных условиях окружающей среды.

Институт физиологии им. Л. А. Орбели
Академии наук Армении

Է. Ի. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ի. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Զ. Կ. ԿԱԶԱՏՐՅԱՆ, Լ. Ա. ՍՈՂՈԿՈՎԻԼ

Օքսիտոցինի ազդեցությունը օրգանիզմի ջերմային հոմեոստազի վրա

Ապացուցված է, որ օրգանիզմի նորմոթերմիայի ֆոնի վրա օքսիթոցինի ցածր դոզայի ներերակային ներարկումը հարուցում է հիպոթերմիկ, իսկ բարձր դոզայինը՝ հիպերթերմիկ արդյունք: Եթե օրգանիզմի հիպերթերմիայի ֆոնի վրա օքսիտոցինի նշված դոզաների ներարկման դեպքում նկատվում է օրգանիզմի կենտրոնական ջերմաստիճանի բարձրացում, ապա հիպոթերմիայի ֆոնի վրա նրա բարձր դոզայի ներարկումը հիպոթերմիան փոխարինում է հիպերթերմիայով, իսկ ցածր դոզան արդյունք չի հարուցում: Ենթադրվում է, որ օքսիտոցինի ջերմակարգավորիչ հատկությունը պայմանավորված է օրգանիզմի ելակետային ջերմությամբ և պեպտիդի դոզայով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 Р. А. Арутюнян и др., ДАН АрмССР, т. 87, № 4, с. 184—188 (1988).
- 2 Р. А. Арутюнян и др., ДАН АрмССР, т. 90, № 1, с. 45—48 (1990).
- 3 Н. К. Попова, И. П. Воронова, в кн.: Система терморегуляции при адаптации организма к факторам среды, Новосибирск, с. 13, 1990.
- 4 Т. Г. Емельянова (Асмакова), в кн.: Система терморегуляции при адаптации организма к факторам среды, Новосибирск, с. 25—26, 1990.
- 5 Л. Янский, С. Выбирал и др., в кн.: Нейропептиды и терморегуляция, Минск, с. 9—31, 1990.
- 6 W. H. Sawyer, Men Soc. Endocrin., v. 13, p. 45—48 (1963).
- 7 R. Schwyzer, Ann. Rev. Biochem., v. 33, p. 172—174 (1964).
- 8 L. N. Anlesbrook, Am. J. Physiol., v. 216, p. 830—835 (1969).
- 9 И. И. Грачев, В. П. Галанцев, Физиология лактации, общая и сравнительная. Руководство по физиологии, Л., 1973.
- 10 Н. А. Юдаев, З. Ф. Утешов, в кн.: Биохимия гормонов и гормональная регуляция, М., с. 11, 1976.
- 11 П. П. Мурзенко, Бюлл. экп. биологии и медицины, т. 58, № 10, с. 426—428, 1989.
- 12 П. П. Мурзенко, в кн.: Нейропептиды и терморегуляция, Минск, с. 76—90, 1990.

Физиология

УДК 612.926+612.831

В. А. Саркисян

Антидромные и синаптические реакции нейронов ядра Дейтерса на стимуляцию красного ядра

(Представлено академиком АН Армении В. В. Фанарджяном 31/VII 1991)

Латеральное вестибулярное ядро (ЛВЯ) Дейтерса является одной из важнейших структур ствола мозга в механизмах регуляции мышечного тонуса, поддержании равновесия и ориентации в пространстве (1-3). Красное ядро (КЯ) также широко участвует в регуляции движений (4-6). Показано, что ЛВЯ и КЯ обладают хорошо выраженной соматотопической организацией и посредством своих нисходящих систем — латерального вестибулоспинального (ВС) и руброспинального (РС) трактов регулируют деятельность экстензорных и флексорных мотонейронов, соответственно, (7-9). Другой важной особенностью организации этих нисходящих систем является наличие аксонных коллатералей их нейронных элементов, которые разветвляются на разных уровнях спинного мозга. Показано, что 50% ВС нейронов дают коллатерали к шейным и люмбальным сегментам спинного мозга (10); коллатерали 5% РС нейронов также достигают указанных спинальных уровней (5). Недавние эксперименты по инъекции пероксидазы хрена в ЛВЯ выявили прямые двусторонние проекции от КЯ ко всем частям ядра Дейтерса (11). В настоящей работе электрофизиологически показано наличие двусторонних вестибуло-рубральных связей. Выявлены моно-, олиго- и полисинаптическая природа влияний КЯ на ЛВЯ.

Эксперименты проведены на семи взрослых кошках массой 2,5—3,5 кг, наркотизированных нембуталом. КЯ контралатеральной стороны раздражалось биполярным вольфрамовым электродом. Электроды вводили в КЯ по следующим стереотаксическим координатам: L 2, H-3,5 и A 3,5 (12). ВС нейроны ядра Дейтерса идентифицировали по их антидромным потенциалам действия (ПД), возникающим в ответ на раздражение латерального ВС тракта. Стимуляцию латерального вестибулярного нерва осуществляли парой вольфрамовых электродов, введенных в овальное (катод) и круглое (анод) отверстия среднего уха. Стимуляцию производили прямоугольными толчками тока длительностью 0,1—0,5 мс напряжением 1—10 В и силой 0,1—0,15 мА. Отве-

ление активности отдельных нейронов ядра Дейтерса производили с помощью стеклянных микроэлектродов, заполненных раствором хлористого калия (3 моль/л) с сопротивлением 2—10 МОм. Локализацию кончиков раздражающих и регистрирующих электродов проверяли гистологически.

Произведено внутриклеточное отведение активности 74 нейронов ЛВЯ, реагирующих на стимуляцию КЯ. Одиночное раздражение КЯ в 50 нейронах ядра Дейтерса вызывало антидромные ПД (рис. 1, A5, B1, E1). Скрытый период возникновения антидромных ПД колебался в пределах 0,2—0,7 мс (в среднем $0,38 \pm 0,1$ мс, $n=50$; рис. 1, G). 17 из 50 нейронов ЛВЯ были идентифицированы как ВС (рис. 1, A1, B1, E2, G, столбики с кружочками). Они характеризовались фиксированной латенцией при подпороговой (рис. 1, B1, E1) и надпороговой (рис. 1, A5, интенсивности стимуляции. При парной стимуляции с короткими интервалами они проявляли короткую рефрактерность (рис. 1, A2,3, A6,7). Антидромные ПД могли следовать высокочастотной стимуляции до 600—1000 имп/с (рис. 1, A8, A4). Среднее расстояние между КЯ и ЛВЯ составляло 12 мм, а расчетная скорость проведения вестибуло-руб-ральных волокон колебалась в пределах 17,1—60 м/с. Согласно данным предыдущих работ (^{1,13}), нейроны, дающие начало этим волокнам, могут быть отнесены к «быстрому» типу ВС нейронов. Среди антидромно активированной клеточной популяции семь нейронов были также ортодромно активированы стимуляцией ипсилатерального вестибулярного нерва. Четыре из них были возбуждены моносинаптически, что указывает на их принадлежность к вестибулярным нейронам «второго порядка» (¹⁴) (рис. 1, E3).

Стимуляция КЯ в 24 нейронах ядра Дейтерса вызывала ортодромные ПД (рис. 1, C1, D, F1). Они возникали со скрытым периодом 0,7—1,4 мс (в среднем $1 \pm 0,21$ мс, $n=24$; рис. 1, H). В некоторых нейронах ЛВЯ градуальное увеличение интенсивности стимуляции КЯ не влияло на величину латенции, что свидетельствует об их моно- или олигосинаптической природе (рис. 1, C1, D). Однако из-за низкого порога деполяризации ДД запись ВПСП нейронов ЛВЯ была затруднена. 8 из 24 ортодромно активированных нейронов были идентифицированы как ВС (рис. 1, C2, H, столбики с кружочками). Три клетки из этой популяции были ортодромно активированы также стимуляцией вестибулярного нерва (рис. 1, F2); одна из них являлась вестибулярным нейроном «второго порядка». Раздражение КЯ не вызывало тормозных реакций в нейронах ядра Дейтерса.

Результаты настоящей работы выявили, что подобно ряду структур ствола мозга (¹), КЯ также устанавливает двусторонние связи с ядром Дейтерса (рис. 2). Полисинаптические возбуждающие влияния КЯ на нейроны ядра Дейтерса могут быть реализованы через латеральное ретикулярное ядро (ЛРЯ), ядро лицевого нерва, нижней оливы или каудальное тройничное ядро (¹⁵⁻¹⁶). В этом случае КЯ подобно ЛРЯ функционально может рассматриваться как релейная станция при

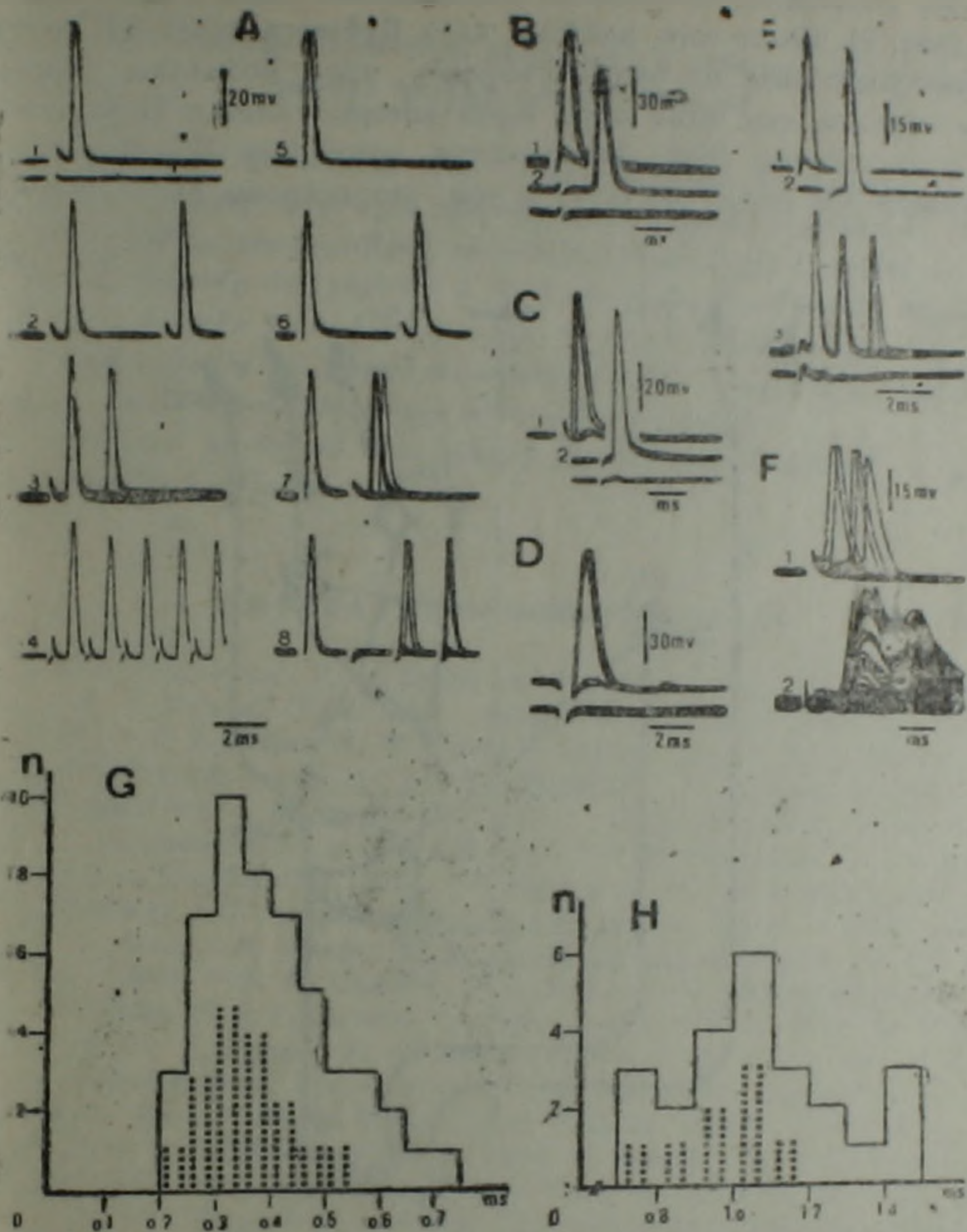


Рис. 1. Антидромная и синаптическая активация нейрона ЛВЯ стимуляцией КЯ. А5, В1, Е1 — антидромные ПД трех нейронов ЛВЯ, вызванные подпороговым (В1, Е1) и надпороговым (А5) раздражением КЯ. А1, В2, Е2 — антидромные ПД тех же нейронов, вызванные надпороговым раздражением латерального ВС тракта. А2, 3 и А6, 7 — эффекты парной стимуляции латерального ВС тракта и КЯ с укорочением межстимульного интервала, соответственно. А4 и А8 — ПД при частотном раздражении до 850 (А4) и 600 (А8) имп/с. Е3 — ортодромный ПД кистки, вызванный раздражением вестибулярного нерва. С1, D, F1 — ортодромные ПД трех нейронов ЛВЯ в ответ на раздражение КЯ. F2 — ВПД, вызванный стимуляцией вестибулярного нерва. С2 — антидромный ПД на раздражение латерального ВС тракта. Нижние записи на А1-Е представляют экстраклеточный контроль. G и H — гистограммы распределения скрытых периодов антидромных (G) и ортодромных (H) ПД нейронов ядра Дейтерса. Столбики с кружочками представляют идентифицированные ВЛ-нейроны. Абсцисса — время в мс, ордината — количество нейронов. Потенциалы зарегистрированы усиленным постоянным током при наложении 5-10 пробегов луча. Частота повторения 5 в 1 с.

передаче командных сигналов из двигательной коры в ядро Дейтерса (11, 12) (рис. 2). Более того, нейроны ядра Дейтерса через КЯ получают информацию также от промежуточного ядра мозжечка, проторая, таким образом, еще один путь, через который клетки Пуркинье действуют на нейроны ЛВЯ. Антидромная активация ВС нейронов при стимуляции КЯ свидетельствует о том, что нейроны ядра Дейтерса в

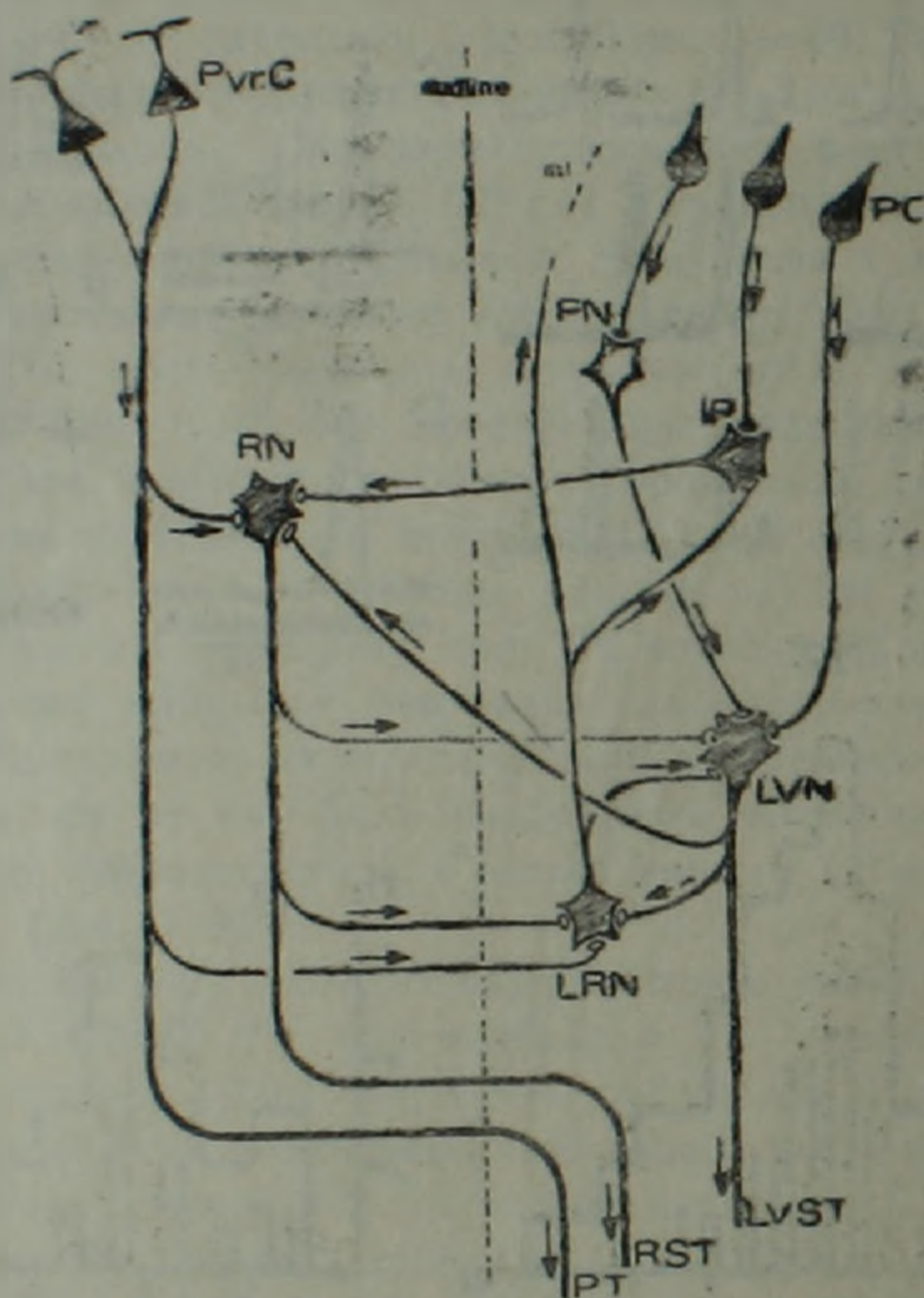


Рис. 2. Схематическое изображение взаимоотношений нейронов ядра Дейтерса с пирамидными нейронами коры мозга (Pyr. C), клетками Пуркинье мозжечка (PC), фастигиальными (FN) и промежуточными (IP) нейронами и нейронами ЛВЯ. РГ, RST и LVST — пирамидный, руброспинальный и латеральный ВС тракты соответственно, ml — моховидные волокна

свою очередь модифицируют активность рубральных нейронов. Известно, что КЯ и ЛВЯ являются важными центрами для контроля активности флексорных и экстензорных мышц (4, 10). Двусторонние отношения ЛВЯ с КЯ, возможно, обеспечивают координацию и корреляцию активности этих двух структур в процессе реализации вестибуло- и руброспинальных двигательных рефлексов.

Институт физиологии им. Л. А. Орбели Академии наук Армении

Դեյտեբույան կորիզի նեյրոնների ճեղքնթաց և սինապսային ռեակցիան
կարմիր կորիզի զրդման միջոցով

Անդգայացված կատուների մոտ ուսումնասիրվել են կարմիր կորիզից
հրահրված Դեյտեբույան կողմային վեստիբուլար կորիզի նեյրոնների հետըն-
թաց և ուղղընթաց գործողության պոտենցիալները: Ցույց է տրված, որ կար-
միր կորիզի զրդումը հանգեցնում է հիմնականում Դեյտեբույան նեյրոնների
հետընթաց, ինչպես նաև մոնո-, օլիգո- և բաղմասինապսային ակտիվաց-
ման: Հայտնաբերվել են վեստիբուլառնուղղային նեյրոնների ակսոնների
վերընթաց ճյուղավորումներ՝ ուղղված կարմիր կորիզին:

Քննարկվում են նշված երևույթների յուրահատկություններն ու գործու-
նեության նշանակությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ V. V. Funardjian, V. H. Sarkisian, Progress in Brain Res., v. 76, p. 45-60 (1988).
- ² V. J. Wilson, G. M. Jones, Mammalian vestibular physiology, Plenum, N. Y., (1975).
- ³ V. J. Wilson, B. W. Peterson, Physiol. Rev., v. 58, p. 80-105 (1978).
- ⁴ J. Masson, Physiol. Rev., v. 14, p. 638-658 (1964).
- ⁵ Y. Shinoda, C. Ghez, A. Arnold, Exp. Brain Res., v. 30, p. 203-218 (1977).
- ⁶ A. Tsukahara, V. H. Toyama, K. Kosaka, Experientia, v. 20, p. 632-633 (1964).
- ⁷ V. V. Funardjian, V. H. Sarkisian, Neuroscience, v. 5, p. 551-558 (1980).
- ⁸ R. Nyberg-Hansen, A. Brodal, J. Anat., v. 98, p. 235-253 (1964).
- ⁹ O. Pompeiano, A. Brodal, J. Compl. Neurol., v. 108, p. 225-252 (1957).
- ¹⁰ C. Adzug, M. Maeda, B. W. Peterson et al. J. Physiol. (Lond.), v. 243, p. 499-522 (1974).
- ¹¹ В. И. Погосян, В. В. Фанарджян, Нейр-физиология, т. 20, с. 494-503 (1988).
- ¹² A. L. Berman, The Brain Stem of the Cat, Madison, Wisconsin, (1968).
- ¹³ H. Ito, T. Hongo, M. Yoshida et al., Jap. J. Physiol., v. 14, p. 639-658 (1964).
- ¹⁴ T. Akaike, Brain. Res., v. 18, p. 428-432 (1973).
- ¹⁵ G. Holstege, J. Tan, Behavioural Brain. Res., v. 28, p. 33-57 (1988).
- ¹⁶ S. B. Edwards, Brain Res., v. 48, p. 45-63 (1972).
- ¹⁷ P. Bruckmosser, M.-R. Hepp, M. Wiesendanger, Exp. Neurol., v. 26, p. 239-252 (1970).
- ¹⁸ P. Bruckmosser, M.-R. Hepp, M. Wiesendanger, Exp. Neurol., v. 27, p. 368-378 (1971).
- ¹⁹ V. J. Wilson, International Rev. Neurobiol., Acad. Press, v. 15, p. 27-81 (1972).