

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA  
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ  
МЕХАНИКА  
MECHANICS

1991

# ПОВЕДЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ЛИНИИ РАЗДЕЛА КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Апикян Ж.Г., Саргсян А.М.

Ապիկյան Ժ.Գ., Սարգսյան Ա.Մ., ստացիոնար ֆիզիկական դաշտերի վարքը կտր-առ-կտր համասեռ գլանային աճիգոտրոպ մարմնի ընդլայնական կտրվածքի տիրույթների քառանկան գծի աճկյունային կետի շրջակայքում

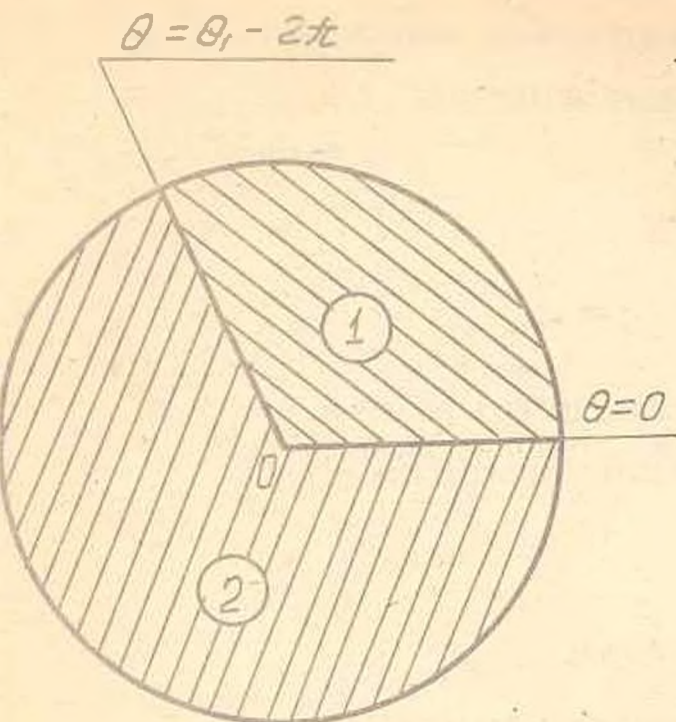
Apikyan J.G., Sargsian A.M. Stationary physical field behavior in the vicinity of an angle point of the separation line of step by step homogeneous anisotropic media

Ստուճաստիված է հարթ ստացիոնար ֆիզիկական դաշտերի քննութագրիչների վարքը կտր-առ-կտր համասեռ գլանային աճիգոտրոպ մարմնի ընդլայնական կտրվածքի տիրույթների քառանկան գծի աճկյունային կետի շրջակայքում:

Исследовано поведение характеристик плоских стационарных физических полей в окрестности угловой точки линии раздела областей поперечного сечения кусочно-однородного тела, составленного из двух различных цилиндрических анизотропных призматических тел, спаянных между собой по боковой поверхности.

Исследованию поведения плоских стационарных физических полей в окрестности края поверхности соединения кусочно-однородного изотропного и анизотропного тела при различных условиях на его боковой поверхности посвящены работы [1-4]. В пространстве геометрических и физических параметров кусочно-однородного тела получены уравнения поверхности, разделяющей области, где характеристики соответствующих полей (упругие напряжения при кручении и продольном сдвиге, потоки тепла и вещества в задачах теплопроводности и диффузии напряженность электрического и магнитного полей, плотность постоянного тока и т.д.) в окрестности края поверхности соединения стремятся к нулю или бесконечности.

В работе [1] исследовано также решение задачи кручения кусочно-однородного изотропного призматического стержня около угловой точки линии раздела областей его поперечного сечения (фиг.1). Показано, что напряжения кручения бесконечно возрастают при приближении к угловой точке линии раздела всегда, кроме случая  $\theta_1 = \pi$ , что соответствует от-



Фиг. 1

существованию угловой точки на линии раздела.

В настоящей работе с помощью местных решений исследовано поведение характеристик плоских стационарных физических полей в окрестности угловой точки линии раздела областей поперечного сечения кусочно-однородного тела, составленного из двух различных цилиндрически анизотропных призматических тел, спаянных между собой по боковой поверхности (фиг. 1). Поперечное сечение составного тела является плоскостью упругой симметрии. Ось анизотропии принимается за ось  $z$  цилиндрической системы координат  $r, \theta, z$  с началом  $0$  в точке поперечного сечения.

При отсутствии источников возмущения потенциалы плоских полей  $U_k(r, \theta)$  ( $k = 1, 2$ ) удовлетворяют уравнению [5, 6]

$$\chi_{22}^{(k)} \frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2} + \frac{\chi_{22}^{(k)}}{r} \frac{\partial U_k}{\partial r} + \frac{2\chi_{12}^{(k)}}{r} \frac{\partial^2 U_k}{\partial r \partial \theta} + \frac{\chi_{11}^{(k)}}{r^2} \frac{\partial^2 U_k}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

$$k = 1, \quad 0 < \theta < \theta_1; \quad k = 2, \quad -\theta_2 < \theta < 0; \quad \theta_2 = 2\pi - \theta_1$$

На ветвях линии раздела имеем следующие условия сопряжения:

$$U_1(r, \theta) |_{\theta=0} = U_2(r, \theta) |_{\theta=0} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{a_{11}^{(1)}}{r} \frac{\partial U_1}{\partial \theta} + a_{12}^{(1)} \frac{\partial U_1}{\partial r} \right) |_{\theta=0} \\ & = \left( \frac{a_{11}^{(2)}}{r} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + a_{12}^{(2)} \frac{\partial U_2}{\partial r} \right) |_{\theta=0} \end{aligned} \quad (3)$$

$$U_1(r, \theta) |_{\theta=\theta_1} = U_2(r, \theta) |_{\theta=\theta_1-2\pi} \quad (4)$$

$$\left( \frac{a_{11}^{(1)}}{r} \frac{\partial U_1}{\partial \theta} + a_{12}^{(1)} \frac{\partial U_1}{\partial r} \right) |_{\theta=0} = \left( \frac{a_{11}^{(2)}}{r} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + a_{12}^{(2)} \frac{\partial U_2}{\partial r} \right) |_{\theta=\theta_1-2\pi} \quad (5)$$

где  $\chi_{11}^{(k)}, \chi_{22}^{(k)}, \chi_{12}^{(k)}$  ( $k=1, 2$ ) — [1,2]-постоянные, характеризующие физические свойства неоднородной анизотропной среды (упругие постоянные, диэлектрические и магнитные проницаемости, коэффициенты теплопроводности, диффузии, электропроводности и т.д.).

Компоненты характеристик полей выражаются через  $U_k(r, \theta)$  следующими формулами:

$$H_r^{(k)}(r, \theta) = \frac{\chi_{12}^{(k)}}{r} \frac{\partial U_k}{\partial \theta} + \chi_{22}^{(k)} \frac{\partial U_k}{\partial r} \quad (6)$$

$$H_\theta^{(k)}(r, \theta) = \frac{\chi_{11}^{(k)}}{r} \frac{\partial U_k}{\partial \theta} + \chi_{12}^{(k)} \frac{\partial U_k}{\partial r} \quad (7)$$

Методом разделения переменных решение уравнения (1) представим в виде

$$U_k(r, \theta) = r^p (A_k \cos p \tau_k \theta + B_k \sin p \tau_k \theta) \exp(-\sigma_k p) \quad (8)$$

где  $p$  — произвольный параметр,

$$\tau_k = \sqrt{a_{22}^{(k)} / a_{11}^{(k)} - \sigma_k^2}, \quad \sigma_k = a_{12}^{(k)} / a_{11}^{(k)} \quad (9)$$

Удовлетворяя условиям сопряжения (2)-(5), получим однородную систему линейных уравнений, из условия существования нетривиального решения которой следует

$$\begin{aligned} & \frac{4\chi}{(1+\chi)^2} \operatorname{sh}^2(\pi^* p^*) + \sin^2(\pi p^*) \\ & = \frac{(1-\chi)^2}{(1+\chi)^2} \sin^2(\pi - \theta_1^*) p^* \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$p^* = \frac{\tau_1 \theta_1 + \tau_2 \theta_2}{2\pi} p, \quad \pi^* = \frac{\sigma_1 \theta_1 + \sigma_2 \theta_2}{\tau_1 \theta_1 + \tau_2 \theta_2} \pi \quad (11)$$

$$\chi = \frac{a_{11}^{(2)} \tau_2}{a_{11}^{(1)} \tau_1}, \quad \theta_1^* = \frac{2\pi \tau_2 \theta_2}{\tau_1 \theta_1 + \tau_2 \theta_2} \quad (12)$$

Уравнение (10) при конкретных значениях параметров  $\chi, \sigma_k, \theta_1$  имеет бесконечное множество корней, которые могут быть пронумерованы по порядку возрастания их действительных частей.

Общее решение уравнения (1) представляется в виде

$$U_k(r, \theta) = A_{k0} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{p_n} (A_{kn} \cos p_n \tau_k \theta$$

$$+ B_{kn} \sin p_n \tau_k \theta) \exp(-\sigma_k p_n) \quad (13)$$

где суммирование распространяется на все корни уравнения (10), для которых  $\operatorname{Re} p_n > 0$ . Необходимость отбрасывания корней с отрицательными действительными частями вытекает из условия конечности накопленной удельной энергии в окрестности угловой точки линии раздела [1].

Из представления (13) и (6,7) видно, что если  $0 < \operatorname{Re} p_1 < 1$ , то при приближении к угловой точке линии раздела областей поперечного сечения характеристики полей неограниченно возрастают, при этом порядок особенности равен  $|\operatorname{Re} p_1 - 1|$ . Если  $\operatorname{Re} p_1 > 1$ , то характеристики убывают до нуля при  $r \rightarrow 0$ . В случае  $\operatorname{Re} p_1 = 1$  характеристики полей в угловой точке линии раздела конечны и вообще отличны от нуля.

Таким образом, исследование поведения характеристик полей в угловой точке линии раздела поперечного сечения составного цилиндрически анизотропного тела приводится к отысканию корня трансцендентного уравнения (10) с наименьшей положительной действительной частью в зависимости от параметров  $\chi, \sigma_k, \theta_1$ .

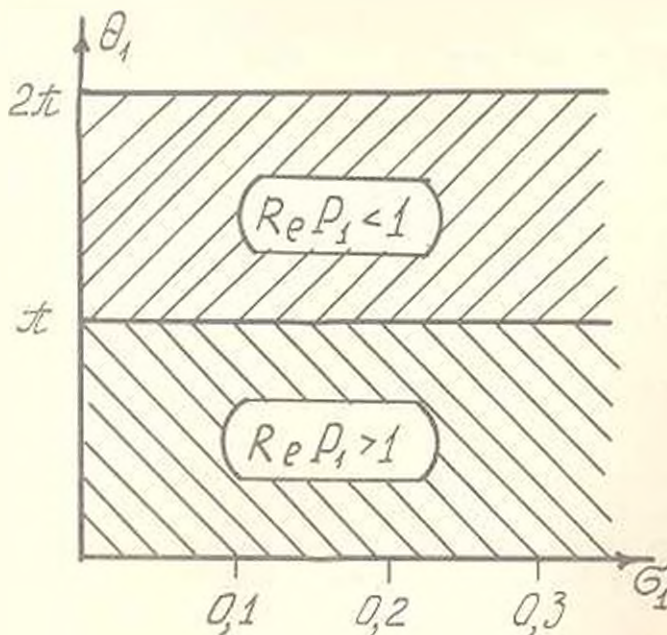
Уравнение (10) имеет сложную структуру, поэтому исчерпывающее наглядное общее исследование зависимости искомого корня  $p_1$  от параметров задачи, как это было сделано в работах [1-4], здесь невозможно.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Материалы кусочно-однородного тела изотропны, то есть  $a_{12}^{(1)} = a_{12}^{(2)} = 0$ . В этом случае вместо уравнения (10) будем иметь

$$\sin^2(\pi p) = \frac{(1 - \chi_0)^2}{(1 + \chi_0)^2} \sin^2(\pi - \theta_1) p \quad (14)$$

где  $\chi_0 = a_{11}^{(2)} / a_{11}^{(1)}$ . Здесь и далее учтено замечание Фойгта относительно



фиг. 2

Таблица 1

| $\sigma_1 \backslash \theta_1$       | 0     | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|--------------------------------------|-------|-----------------|------------------|-------|------------------|------------------|--------|
| $\sigma_1 = 0$<br>$\sigma_2 = 0.3$   | 0.954 | 0.974           | 0.990            | 1.000 | 1.005            | 1.005            | 1.000  |
| $\sigma_1 = 0.1$<br>$\sigma_2 = 0.3$ | 0.954 | 0.972           | 0.977            | 0.985 | 0.991            | 0.994            | 0.995  |
| $\sigma_1 = 0.2$<br>$\sigma_2 = 0.3$ | 0.954 | 0.960           | 0.965            | 0.969 | 0.975            | 0.977            | 0.980  |
| $\sigma_1 = 0.3$<br>$\sigma_2 = 0.3$ | 0.954 | 0.954           | 0.954            | 0.954 | 0.954            | 0.954            | 0.954  |

равенства упругих постоянных  $\nu_{11}^{(1)}$ ,  $\nu_{22}^{(2)}$  [5].

Уравнение (14) получено в работе [1], где было показано, что действительный корень  $p_1$  всегда находится в интервале  $0 < p_1 < 1$ , то есть в угловой точке линии раздела стремление характеристик полей к бесконечности неизбежно.

2. В случае  $\chi = 1$  из уравнения (10) следует

$$\sin^2 \frac{(\sigma_1 \theta_1 + \sigma_2 \theta_2)}{2} p + \sin^2 \frac{(\tau_1 \theta_1 + \tau_2 \theta_2)}{2} p = 0 \quad (15)$$

откуда для действительной части  $p_1$  получим

$$\operatorname{Re} p_1 = \frac{2\pi(\tau_1 \theta_1 + \tau_2 \theta_2)}{\theta_1^2 + \theta_2^2 + 2\theta_1 \theta_2 (\sigma_1 \sigma_2 + \tau_1 \tau_2)}$$

$$\tau_1 = \sqrt{1 - \sigma_1^2} \quad \tau_2 = \sqrt{1 - \sigma_2^2} \quad (16)$$

Из (16) непосредственно следует, что при  $\sigma_2 = \sigma_1$ , то есть для однородного цилиндрически анизотропного тела,  $\operatorname{Re} p_1 = \tau_1 < 1$ .

Следовательно, в окрестности оси анизотропии однородного цилиндрически анизотропного тела характеристики полей всегда стремятся к бесконечности. Принимая, что один из материалов составного тела является изотропным  $\sigma_2 = 0$ , из (16) для всех допустимых значений  $\sigma_1$  получим результат, приведенный на фиг. 2.

В табл. 1 приведены некоторые эти и другие значения действительной части  $p_1$  в зависимости от угла  $\theta_1$  при различных значениях  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ .

3. В другом частном случае, когда  $\sigma_1 \theta_1 + \sigma_2 \theta_2 = 0$ , что возможно, если  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  имеют разные знаки [7] вместо (10) имеем уравнение

$$\sin^2(\pi p^*) = \frac{(1 - \chi)^2}{(1 + \chi)^2} \sin^2(\pi - \theta_1^*) p^* \quad (17)$$

Как и в случае (14), уравнение (17) в интервале  $0 < p^* < 1$  всегда имеет действительный корень  $p_1^*$ . Следовательно, подбором геометрических и физических параметров задачи имеется возможность регулировать поведение характеристик полей в нужном направлении, что следует из формул (12). Табл. 2 содержит часть вычисленных значений  $p_1$  в зависимости от  $\chi$  при  $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$ .

Таблица 2

| $\sigma_1 \backslash \chi$            | 1     | 1.5   | 2     | 5     | 10    | 20    | 50    |
|---------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\sigma_1 = 0.4$<br>$\sigma_2 = -0.2$ | 1.043 | 0.985 | 0.947 | 0.855 | 0.815 | 0.791 | 0.777 |
| $\sigma_1 = 0.2$<br>$\sigma_2 = -0.4$ | 1.066 | 1.013 | 0.979 | 0.897 | 0.861 | 0.841 | 0.828 |

Анализ данных, приведенных на фиг.2 и в табл. 1,2 показывает, что в окрестности угловой точки линии раздела областей поперечного сечения кусочно-однородного цилиндрически анизотропного тела характеристики полей в зависимости от физических и геометрических параметров составного тела могут стремиться к нулю, иметь особенность или конечное значение.

На эти результаты следует, по-видимому, обратить внимание при исследовании причин возникновения известных аномалий геофизических полей океанического дна [8,9].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих средах. - Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
2. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Поведение некоторых физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела. - Докл. АН АрмССР, т.36,4, 1988, с.161-165.
3. Саргсян А.М. Поведение плоских стационарных физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного цилиндрически анизотропного клина. В со. - Механика деформируемого твердого тела. Ереван: Изд. АН РА, в печати.
4. Sinclair G.B. On the singular Eigenfunction for Plane Harmonic Problem in Composite Regions. - Journ. of Appl. Mech., 1980, v.47, N 1, p. 87-92.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. - М.: Наука, 1977. 416 с.
6. Саркисян В.С., Белубекян В.М. Об одной антиплоской задаче для клина. - Уч. зап. Ереван. ун-та, 3, 1986, с.36-40.
7. Сендецкий Дж. Механика композиционных материалов. Т.2. - М.: Мир, 1978. 364 с.
8. Геофизика океана. Т. 1. Геофизика океанического дна. - М.: Наука, 1979. 470 с.
9. Уэда Сеия. Новый взгляд на Землю. - М.: Мир, 1980. 214 с.

Институт механики АН Армении  
Поступила в редакцию 28.06.1991

О ВЛИЯНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ АНИЗОТРОПНОЙ  
ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

ՄՈՎՏԻՍՅԱՆ Լ.Ա.

Մովսիսյան Լ.Ա., Ջերմաստիճանի ազդեցությունը անիզոտրոպ առաձգամածուցիկ զլանային բաղաձր լայնություն ունեցող շերտի վրա:

Movsisyan L. A. About temperature effects on stability of anisotropic visco-elastic cylindrical shell

Ուսումնասիրվում է ստացիոնար ջերմաստիճանային դաշտում գտնվող առաձգամածուցիկ զլանային բաղաձր: Բաղաձրի նյութի մածուցիկ հատկությունները հանդես են գալիս սահմանների նկատմամբ: Առաձգական դրվածքով դիտարկվում է քաղաքիտ բաղաձր լայնություն ունեցող առաձգային սեղման և արտաքին ճնշման դեպքում:

Изучается вязко-упругая анизотропная цилиндрическая оболочка, находящаяся в стационарном температурном поле. Материал оболочки свойство вязкости проявляет по отношению к сдвигающим напряжениям. В упругой постановке рассматривается устойчивость многослойной оболочки при осевом сжатии и внешнем давлении.

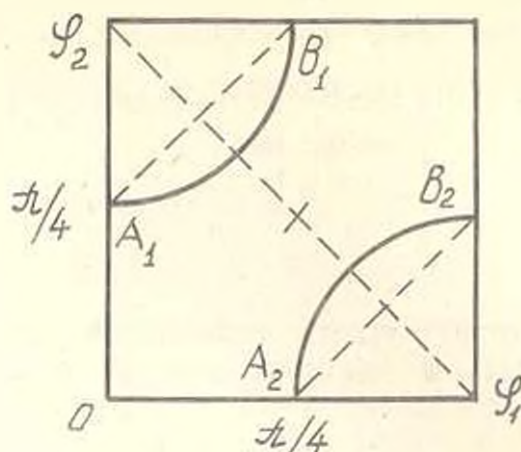
Изучается вязкоупругая анизотропная цилиндрическая оболочка, находящаяся в стационарном температурном поле. Свойство вязкости материала оболочки проявляется по отношению к сдвигающим напряжениям. Принимается также, что от температуры зависят только характеристики ползучести. В упругой постановке рассматривается устойчивость многослойной оболочки при осевом сжатии и внешнем давлении. Показан случай преимущества однослойной оболочки по отношению к многослойной. В связи с этим, температурная устойчивость исследуется для однослойной оболочки.

1. Как известно, многие прямоугольно армированные композиты проявляют вязкое свойство только по отношению к сдвигающим напряжениям и определяющий закон для них, в системе координат по направлениям армирования, записывается следующим образом:

$$\sigma_1 = A_{11} \epsilon_1 + A_{12} \epsilon_2, \quad \sigma_2 = A_{12} \epsilon_1 + A_{22} \epsilon_2 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{12} = \bar{A}_{66} \epsilon_{12}, \quad \bar{A}_{66} = A_{66} (1 - \Gamma^*)$$

В системе  $(x, y)$ , повернутой относительно первой на угол  $-\varphi$ , определяющими уравнениями будут:



Фиг.1

$$\sigma_{ij} = \tilde{B}_{ij} \epsilon_{ij} \quad (1.2)$$

Здесь уже во всех выражениях  $\tilde{B}_{ij}$  будет входить  $\Gamma^*$  [1], а формулы преобразования  $\tilde{B}_{ij}$  - через  $\tilde{A}_{ij}$  [1.2]. В [1] приводятся также вязкоупругие соотношения для симметрично и антисимметрично собранных пакетов.

Сначала рассмотрим упругую устойчивость симметрично собранной (антисимметричная получается аналогичным образом) цилиндрической оболочки при осевом сжатии, когда края оболочки свободно оперты. Решение ее есть в [1,3], здесь приведем окончательное выражение для критического усилия при осесимметричной потере устойчивости с целью нахождения наилучшего расположения слоев (наибольшее критическое усилие). Оно имеет вид при четном числе слоев ( $2n$ )

$$P_{кр} = 2D_{11}(\sqrt{N} - M), \quad M = \frac{3D_{16}(c_{11}c_{26} - c_{12}c_{16})}{4R^2D_{11}(c_{11}c_{66} - c_{16}^2)}$$

$$N = \frac{\Delta}{R^2D_{11}(c_{11}c_{66} - c_{16}^2)} \quad \Delta = \det ||c_{ij}|| \quad (1.3)$$

$$c_{ij} = 2 \sum_{k=1}^n B_{ij}^{(k)} (h_k - h_{k-1}), \quad D_{ij} = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n B_{ij}^{(k)} (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

В ходе получения (1.3) анизотропность - наличие коэффициентов  $c_{16}$ ,  $c_{26}$  - мало что вносят, хотя качественные картины напряженно-деформированного состояния для анизотропной и ортотропной оболочек совершенно различны [4]. Зададимся вопросом, возможно ли расположить слои так, чтобы они исчезли? Что произойдет с  $P_{кр}$  если просто зачеркнуть  $c_{16}$ ,  $c_{26}$ ? Для пластинки такая задача решена в [5]. Покажем это для случая, когда  $A_{11} = A_{22}$ . Для простоты анализа возьмем па-

кет из четырех слоев ( $n=2$ ). Тогда условие, при котором  $c_{16}$ ,  $c_{26}$  равнялись нулю, сводится к

$$\sin 4\varphi_1 + (\lambda - 1) \sin 4\varphi_2 = 0, \quad \lambda = h_2 / h_1 \quad (1.4)$$

Корни уравнения помимо вершины квадрата и точки  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  расположены на кривых  $A_1 B_1$ ,  $A_2 B_2$  (фиг.1). Для  $\lambda = 2$  (слои одинаковой толщины) кривые превращаются в прямые и корнями будут точки прямой  $\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ .

Выражение  $P_{кр}$  в точках, удовлетворяющим (1.4), будет:

$$P_{кр} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{D_{11}(c_{11}^2 - c_{12}^2)}{c_{11}}} \quad (1.5)$$

Так, если подставить сюда

$$c_{11} = h_1 [\lambda A + C (\cos^2 2\varphi_1 + (\lambda - 1) \cos^2 2\varphi_2)]$$

$$c_{12} = h_1 [\lambda D - C (\cos^2 2\varphi_1 + (\lambda - 1) \cos^2 2\varphi_2)]$$

где

$$D_{11} = \frac{2h_1^3}{3} [\lambda^3 D + C (\cos^2 2\varphi_1 + (\lambda^3 - 1) \cos^2 2\varphi_2)]$$

$$A = \frac{1}{2}(A_{11} + A_{33}), \quad C = \frac{1}{2}(A_{11} - A_{33}), \quad D = \frac{1}{2}(A_{11} + 2A_{12} - A_{33})$$

$$A_{33} = A_{12} + 2A_{66}$$

при условии (1.4) можно показать, что:

1) если  $A_{11} > A_{33}$ , то максимум  $P_{кр}$  по  $\varphi_1$  достигается при  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  ( $\frac{\pi}{2}$ ), минимум  $P_{кр}$  - при  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ .

2) если же  $A_{11} < A_{33}$ , то максимум  $P_{кр}$  достигается при  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ , минимум  $P_{кр}$  - при  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  ( $\frac{\pi}{2}$ ).

Следовательно, для критического усилия в первом случае будем иметь

$$P_{кр} = \frac{4h^2}{\sqrt{3} R} \sqrt{A_{11}^2 - A_{12}^2} \quad (1.6)$$

и во втором

$$P_{кр} = \frac{4h^2}{\sqrt{3} R} \sqrt{2A_{66}(A_{11} + A_{12})} \quad (1.7)$$

В то же время получается, что ортотропное решение (в формуле (1.3) приняты  $c_{16} = c_{26} = 0$ ) дает завышенные значения для критической силы. Есть все основания предполагать, что эти выводы верны и для случая  $A_{11} \neq A_{22}$  (для пластинки [5] только с той разницей, что при  $A_3 > \frac{A_{11} + A_{22}}{2}$  точка максимума будет не при  $\frac{\pi}{4}$ ).

Устойчивость симметрично собранной многослойной оболочки при внешнем равномерном давлении будем изучать, исходя из полубезмоментной теории (правда, здесь потребуются, помимо прочего, еще такое предположение  $\frac{\partial}{\partial y} \gg \frac{\partial}{\partial x}$ , что будет оправдано, так как и здесь при достижении  $c_{16} = c_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ , критическое давление получается наибольшим, а коэффициенты с такими постоянными фигурируют именно при исчислениях производных [2]).

Уравнение устойчивости в таких предположениях относительно некоторой потенциальной функции будет

$$D_{22} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^8} + \frac{1}{R^2 a_{11}} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + R q \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} = 0$$

$$a_{11} = \frac{c_{22} c_{66} - c_{26}^2}{\Delta} \quad (1.8)$$

Для свободно опертой оболочки критическое давление определяется формулой

$$q_{кр} = \frac{4\pi}{Rl} \left( \frac{D_{22}}{27R^2 a_{11}} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.9)$$

Как и в предыдущей задаче, проведя анализ (1.9) для случая  $A_{11} = A_{22}$  замечаем, что качественный вывод относительно максимального критического параметра верен и здесь, то есть что однослой лучше и что при  $A_{11} > A_3$  имеют смысл главные направления упругости расположить по главным линиям кривизны, а при  $A_{11} < A_3$  повернуть на  $45^\circ$ . И соответственно, для критического давления будем иметь:

$$q_{кр} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \frac{h^2}{Rl} \left[ \frac{h^2}{R^2} A_{11}^2 (A_{11}^2 - A_{12}^2) \right]^{\frac{1}{4}} \quad (1.10)$$

$$q_{кр} = \frac{8\pi}{3} \frac{h^2}{Rl} \left[ \frac{h^2}{18R^2} A_{66} (A_{11} + A_{12}) (A_{11} + A_3)^2 \right]^{\frac{1}{4}} \quad (1.11)$$

2. Теперь рассмотрим вязкоупругую устойчивость оболочки, находящейся в стационарном осесимметричном температурном поле. Предполагается, что температура настолько высокая, что вязкое свойство материала изменяется вместе с температурой, в то же время упругое нет, т.е. изменяются только коэффициенты, характеризующие оператор  $\Gamma$ . Как известно, при вязкоупругой устойчивости представляют интерес

критические параметры - мгновенные и длительные. Предыдущий пункт был посвящен не столько определению мгновенных критических сил, сколько обоснованию преимущества однослойной оболочки по сравнению с многослойными и вопросу наилучшего ориентирования главных направлений упругости.

Здесь будем заниматься вопросом определения длительных критических параметров, учитывая выводы, полученные в п.1, в частности, что при совпадении главных направлений с координатными линиями длительные критические параметры совпадают с мгновенными и более того, не зависят от температуры.

Таким образом, следует изучить случай, когда главные направления упругости составляют с координатными осями угол, равный  $\frac{\pi}{4}$ . Тогда определение длительного критического усилия при осевом сжатии сводится к уравнению

$$\frac{2h^3}{3} \frac{d^2}{dx^2} \left( \bar{B}_{11} \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \right) + \frac{2h}{R^2 \bar{a}_{11}} \bar{w} + p \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} = 0 \quad (2.1)$$

где

$$\bar{B}_{11} = A - A_{66} \bar{\Gamma}, \quad \frac{1}{\bar{a}_{11}} = \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{a_{66}}{4a} \bar{\Gamma} \right)$$

$$a = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{12} + \frac{a_{66}}{2})$$

$$a_{11} = \frac{A_{11}}{\Delta'}, \quad a_{12} = \frac{A_{12}}{\Delta'}$$

$$a_{66} = \frac{1}{A_{66}}, \quad \Delta' = A_{11}^2 - A_{12}^2$$

$\bar{\Gamma}$  - преобразованное по Лапласу ядро  $\Gamma^*$  (функция от температуры) при параметре преобразования  $s = 0$ . Единственное требование, налагаемое на  $\bar{\Gamma}$ , есть то, чтобы существовал ряд Фурье от него. В частности, для стандартного тела  $\Gamma = \gamma e^{-\alpha l}$  есть  $\bar{\Gamma} = \frac{\gamma}{a}$  и для термодинамически простых материалов; так как зависимости  $\gamma$  и  $\alpha$  от температуры одинаковы [6], то  $\bar{\Gamma}$  в этом случае не будет зависеть от температуры и, следовательно, температура не будет влиять на значение длительной критической силы.

Представляя известную функцию  $\bar{\Gamma}(x)$  в виде ряда

$$\bar{\Gamma}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \lambda_m x, \quad \lambda = \frac{m\pi}{l} \quad (2.2)$$

решение (2.1) также будем искать в виде ряда

$$\bar{w} = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin \lambda_m x \quad (2.3)$$

Тогда для неизвестных  $f_m$  получится система

$$\begin{aligned} (2d_0 - d_{2m} - 2p\lambda_m^2)f_m + \sum_{l=1}^{m-1} (d_{m-l} - d_{m+l})f_l \\ + \sum_{i=m+1}^{\infty} (d_{l-m} - d_{m+i})f_i = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$d_{m \pm l} = b_{m \pm l} \lambda_m^2 \lambda_l^2 + c_{m \pm l}$$

$$b_0 = \frac{2h^3}{3} (\Lambda - \Lambda_{66} a_0) \quad c_0 = \frac{2h}{aR^2} \left( 1 - \frac{a_{66}}{4a} a_0 \right)$$

$$b_m = -\frac{2h^3}{3} \Lambda_{66} a_m, \quad c_m = -\frac{h^3}{2R^2 a^2} a_{66} a_m$$

Длительное критическое усилие определяется из условия равенства нулю детерминанта системы (2.4) - как минимальный корень, при заданной температуре и зависимости  $\bar{\Gamma}$  от нее.

Главная гармоника потери устойчивости - наиболее близкая к истинной форме потери устойчивости (в общем, форма представляется рядом (2.3)), определяется формулой

$$\lambda_m = \left( \frac{2c_0 - c_{2m}}{2b_0 - b_{2m}} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.5)$$

которая не только не будет совпадать с гармоникой при длительной потере устойчивости без температуры (формы мгновенной и длительной потери устойчивости различные [7]), но и будет зависеть от распределения температуры.

Для второй задачи определение длительного критического давления сводится к уравнению

$$\frac{2h^3}{3} \bar{B}_{11} \frac{\partial^8 \bar{\Phi}}{\partial y^8} + \frac{2h}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{\bar{a}_{11}} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} \right) + Rq \frac{\partial^6 \bar{\Phi}}{\partial y^6} = 0 \quad (2.6)$$

Если искать  $\bar{\Phi}$  ( $\bar{\Phi} \rightarrow \bar{\Phi}(s=0)$ ) в виде

$$\bar{\Phi} = \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin \lambda_m x, \quad \mu_n = \frac{n}{R} \quad (2.7)$$

то для  $f_{m1}$  получим систему типа (2.4), где теперь

$$\mu_{m \pm 1} = b_{m \pm 1} \mu_n^2 + c_{m \pm 1} \lambda_m^2 \lambda_l^2 \quad (2.8)$$

а вместо  $2R\lambda_m^2$  надо полагать  $2Rq\mu_n^6$ , то есть  $q_{кр}^{(2)}$  также определится из бесконечной системы.

Следует отметить, что и здесь количество волн потери устойчивости в окружном направлении также будет зависеть от распределения температуры и определится формулой:

$$\mu_n = \left[ \frac{3(2c_0 - c_{2n})}{2b_0 - b_{2n}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

Таким образом, при заданной температуре и при заданной зависимости  $\Gamma(l, T)$  можно с любой точностью вычислить критические параметры. Здесь приведем формулы критических величин, полученных во втором приближении (детерминант второго порядка) для линейной зависимости  $\Gamma$  от температуры

$$\bar{\Gamma} = \gamma_1 + \delta T, \quad T = T_0 (1 + \cos \lambda_1 x) \quad (2.10)$$

$$q_{кр}^{(2)} = \frac{A_{11} \lambda^2}{l^2} \min \left( 2 \sqrt{\bar{b}_0 \bar{c}_0} \pm \frac{\bar{b}_0 \bar{c}_1 + \bar{b}_1 \bar{c}_0}{\sqrt{\bar{b}_0 \bar{c}_0}} \right) \quad (2.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{b}_0 &= \frac{1}{3} [1 + \beta - \beta(\gamma_1 + \delta T_0)] \\ \bar{c}_0 &= \frac{4\beta l^4}{R^2 h^2 (1 + \beta)} \left[ 1 - \frac{\gamma_1 + \delta T_0}{1 + \beta} \right] \\ \bar{b}_1 &= -\frac{1}{3} \beta \delta T_0, \quad \beta = \frac{2.166}{A_{11}}, \quad \bar{c}_1 = -\frac{4\beta l^4 \delta T_0}{R^2 h^2 (1 + \beta)^2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

При получении (2.11) принято, что главная гармоника реализуется при большом  $m$  ( $m \approx m+1$ ) и  $A_{12} = 0$ .

Для второй задачи

$$\begin{aligned} q_{кр}^{(2)} &= \frac{A_{11} \pi^2 h^2}{2Rl} \sqrt{\frac{h}{R}} \left[ 23 \left( \frac{\bar{b}_0 \bar{c}_0}{27} \right)^{\frac{1}{4}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{[1225 \bar{b}_0^2 \bar{c}_0^2 + 9 \bar{b}_1^2 \bar{c}_0^2 + 24 \bar{b}_0 \bar{c}_0 \bar{b}_1 \bar{c}_1 + 16 \bar{b}_0^2 \bar{c}_1^2]^{\frac{1}{2}}}{(27 \bar{b}_0^2 \bar{c}_0^3)^{\frac{1}{4}}} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь  $\bar{b}_l$  имеют прежние значения, а  $\bar{c}_l$  отличаются от (2.12) тем, что отсутствует множитель  $\frac{l^4}{R^2 h^2}$ .

В заключение надо отметить: то, что лучше для мгновенной задачи

с точки зрения обсужденного в п.1 вопроса ( рациональное использование свойства материала), может быть для длительной устойчивости не лучшим. В частности, если при  $A_{11} < A_3$  критические параметры максимум достигаются при  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , то длительные критические параметры, зависящие от температуры, могут быть меньше, чем длительные, что одни и те же мгновенные, при  $\varphi = 0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л. А. Некоторые задачи вязкоупругих анизотропных слоистых пластин и оболочек. - Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1989, т.42, N 3, с. 37-44.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. - М. : Физматгиз, 1961. 384 с.
3. Мовсисян Л. А. Об осесимметрично -нагруженной анизотропной цилиндрической оболочке. - Изв. АН Арм.ССР, сер.физ.- мат. н., 1962, т. XV, N 2, с. 111 -119.
4. Мовсисян Л. А. К расчету анизотропной цилиндрической оболочки вращения. - Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.- мат. н., т. 12, N 4, с. 89 -107.
5. Мовсисян Л. А. К устойчивости упругой и вязкоупругой анизотропной многослойной пластинки. - Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1990, т.43, N 4, с.3 -12.
6. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. - М: Наука, 1973. 288 с.
7. Потапов В.Д. Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций. -М: Стройиздат, 1986. 312 с.

Институт механики АН Армении  
Поступила в редакцию 27.9.1991

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО  
ПОВЕДЕНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ТЕЛ ВО ВНЕШНИХ  
КВАЗИУСТАНОВИВШИХСЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

ԳԱՇԿԵՎԻՇ Ա.Ր.

Գաշկևիչ Ա.Ր.-Արտաքին թվագիտատառված էլեկտրամագնիսական դաշտերում էլեկտրահաղորդիչ մարմինների ջերմամեխանիկական վարքի մաթեմատիկական մոդելավորումը:

Gachkevich A.R. Mathematical modelling of thermomechanical behavior of electroconductive bodies in the external quasi-steady electromagnetic fields.

Ծարագրված է մագնիսացման և քսենացման տարրերի հատկություններ ունեցող էլեկտրահաղորդիչ մարմիններում էլեկտրամագնիսական, ջերմային և մեխանիկական դաշտերի քանակական նկարագրման տեսության տարրերակառուցված եռ կոնկրետ մարմիններում դիտարկվող դաշտերի բնութագրերի ուսումնասիրման արդյունքները կախված նյութի էլեկտրաֆիզիկական հատկություններից:

Изложен вариант теории количественного описания электромагнитных, температурных и механических полей в электропроводных телах различной способности к намагничиванию и поляризации. Приведены результаты исследований характеристик рассматриваемых полей в конкретных телах в зависимости от электрофизических свойств их материала

В связи с расширяющимся использованием во многих отраслях промышленности электромагнитных полей для осуществления различных технологических процессов, в последнее время возрастает интерес к математическому моделированию, обусловленных такими воздействиями физических явлений в деформируемых телах [1-8]. В статье изложены результаты по дальнейшему развитию модельных представлений о термомеханическом поведении неферромагнитных неполяризуемых электропроводных тел [1,3], находящихся под воздействием квазистановившихся электромагнитных полей, на случай электропроводных тел, способных к намагничиванию и поляризации. Взаимосвязь электромагнитных, тепловых и механических процессов осуществляется джоулевым теплом и тепловыделениями вследствие намагничивания и поляризации пондеромоторными силами, а также термоупругим рассеянием энергии.

1. *Постановка задачи.* Ставится задача об определении электромагнитного, температурного и механических полей в упругих телах различной электропроводности и способности к намагничиванию и поляризации, когда в области вне тела заданы квазистановившиеся электрические токи [3]



$$j_{..}^{(0)}(r, t) = \operatorname{Re} j_{..}^{(0)}(r, t) = \operatorname{Re} \{ j_{..}^{(0)}(r, t) \exp(i\omega t) \} \quad (1.1)$$

амплитуда  $j_{..}^{(0)}(r, t)$  которых относительно мало изменяется во времени на периоде колебания  $f_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ , так что выполняется условие

$$\left| \frac{\partial j_{..}^{(0)}(r, t)}{\partial t} \right| \ll \omega \left| j_{..}^{(0)}(r, t) \right| \quad (1.2)$$

В математической схеме решения задачи примем, что электромагнитное поле по отношению к телу является внешним воздействием и его влияние на процессы теплопроводности и деформации осуществляется посредством тепловыделений и ponderomotorных сил [1,3,6,7]. Тогда исходная задача в принятом приближении описывается известными уравнениями электродинамики для области тела и внешней среды [3], а также динамической термоупругости [1,3] при соответствующих рассматриваемому случаю начальных и граничных условиях на электромагнитное поле, температуру и напряженное состояние.

Система уравнений электродинамики замыкается феноменологическими соотношениями, связывающими характеристики поля между собой и с электрическими токами.

Будем рассматривать широко распространенные изотропные среды, вектора индукций  $D_{..}$ ,  $B_{..}$ , в которых соответственно параллельны векторам напряженностей электрического  $E_{..}$  и магнитного  $H_{..}$  полей [9]

$$D_{..} = D_{..}(E_{..})e_E, \quad B_{..} = B_{..}(H_{..})e_H \quad (1.3)$$

Здесь  $e_E = \frac{E_{..}}{E_{..}}$ ,  $e_H = \frac{H_{..}}{H_{..}}$  - единичные орты в направлениях векторов  $E_{..}$ ,  $H_{..}$ ;  $E_{..}$ ,  $D_{..}$  - проекции векторов  $E_{..}$ ,  $D_{..}$  на положительное направление вектора  $E_{..}$ , а  $H_{..}$  и  $B_{..}$  - векторов  $H_{..}$  и  $B_{..}$  на положительное направление вектора  $H_{..}$ .

Будем пренебрегать влиянием подвижности среды на электрические токи, то есть закон Ома примем следующим:

$$j_{..} = \sigma E_{..} \quad (1.4)$$

где  $\sigma$  - коэффициент электропроводности.

Соотношения (1.3) можно также записать в виде

$$D_{..} = \varepsilon(E_{..})E_{..}, \quad B_{..} = \mu(H_{..})H_{..} \quad (1.5)$$

Здесь

$$\varepsilon(E_{..}) = \frac{D_{..}(E_{..})}{E_{..}} = \varepsilon_0 + \kappa_E(E_{..})$$

$$\mu(H_{..}) = \frac{B_{..}(H_{..})}{H_{..}} = \mu_0 + \kappa_H(H_{..})$$

- абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости тела,  $\kappa_E, \kappa_H$  - абсолютные электрическая и магнитная восприимчивости;  $\epsilon_0, \mu_0$  - диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума.

Для области внешней среды соотношения, связывающие характеристики электромагнитного поля, принимаются такими же, как и для вакуума [9]

$$D^{(0)} = \epsilon_0 E^{(0)}, \quad B^{(0)} = \mu_0 H^{(0)} \quad (1.6)$$

Для рассматриваемых тел при воздействии квазиустановившегося электромагнитного поля диэлектрическая  $\epsilon$  и магнитная  $\mu$  проницаемости определяются, в основном, электрофизическими свойствами материала рассматриваемого тела и характеристиками электромагнитного воздействия. Для неполяризуемых неферромагнитных электропроводных тел обычно полагают, что  $\epsilon$  и  $\mu$  не зависят от  $E_{..}$  и  $H_{..}$ , для неполяризуемых ферромагнитных - что  $\epsilon$  не зависит от  $E_{..}$ , а  $\mu = \mu(H_{..})$ , для неферромагнитных поляризуемых - что  $\epsilon = \epsilon(E_{..})$ , а  $\mu$  не зависит от  $H_{..}$ . В соответствии с этим выделим следующие типы электропроводных тел: неферромагнитные неполяризуемые, ферромагнитные неполяризуемые и неферромагнитные низкой электропроводности. Построим расчетные схемы для каждого из выделенных типов тел на основе характерных для них зависимостей между индукциями и напряженностями электрического и магнитного полей, а также соотношений электродинамики и выражений тепловыделений  $Q$  и ponderomotorных сил  $F$ , через характеристики полей. При этом решение задачи состоит из двух этапов. На первом этапе из уравнений электродинамики определяются напряженности электрического и магнитного полей в квазиустановившемся приближении на основе предложенных аналитических аппроксимаций зависимостей между индукциями и напряженностями электрического и магнитного полей для конкретного типа тела. После этого записываются соответствующие выражения тепловыделений и ponderomotorных сил. На втором этапе решается задача динамической термоупругости, в которой источниками тепла и объемными силами в исходных уравнениях [3] есть найденные на первом этапе тепловыделения и ponderomotorные силы.

**2. Неферромагнитные неполяризуемые тела.** Для таких тел феноменологические соотношения электродинамики, с учетом вышесказанного, принимают следующие:

$$D_{..} = \epsilon_0 \epsilon_{..} E_{..}, \quad B_{..} = \mu_0 \mu_{..} H_{..}, \quad j_{..} = \sigma E_{..} \quad (2.1)$$

где  $\epsilon_{..} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ ,  $\mu_{..} = \frac{\mu}{\mu_0}$  - относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости тела, которые считаются постоянными [9]. При этом система исходных уравнений Максвелла приводится к системе известных разрешающих уравнений для функций  $E_{..}$  или  $B_{..}$  [3,9], а задача первого этапа (электродинамики) формулируется полностью относительно любой из этих функций.

Будем исходить из того, что найдено решение задачи электродинамики при заданных условиях (1.1), (1.2) и определены комплексные напряженности электрического и магнитного полей в теле  $E_{..}(r, t) = E_{..}(r, t) e^{i\omega t}$ ,  $H_{..}(r, t) = H_{..}(r, t) e^{i\omega t}$ .

Тогда выражения для удельной мощности джоулева тепла  $Q_{..} = \int_{..} E_{..} = \sigma E_{..} E_{..}$  и удельной плотности ponderomotorных сил  $F_{..} = \mu j_{..} \times H_{..} = \mu \sigma E_{..} \times H_{..}$  примут вид

$$Q_{..} = Q^{(1)} + Q^{(2)}, \quad F_{..} = F^{(1)} + F^{(2)} \quad (2.2)$$

Здесь

$$Q^{(1)} = \frac{\sigma}{2} E_{..} \bar{E}_{..} = \frac{\sigma}{2} E(r, t) \bar{E}(r, t)$$

$$Q^{(2)} = \frac{\sigma}{4} (E_{..}^2 + \bar{E}_{..}^2) = \frac{\sigma}{2} \operatorname{Re} [(E_{..}^2(r, t) e^{2i\omega t})]$$

$$F^{(1)} = \frac{\sigma \mu}{4} (E_{..} \times \bar{H}_{..} + \bar{E}_{..} \times H_{..})$$

$$= \frac{\sigma \mu}{4} [E(r, t) \times \bar{H}(r, t) + \bar{E}(r, t) \times H(r, t)]$$

$$F^{(2)} = \frac{\sigma \mu}{4} (E_{..} \times H_{..} + \bar{E}_{..} \times \bar{H}_{..})$$

$$= \frac{\sigma \mu}{2} \operatorname{Re} [E(r, t) \times H(r, t) e^{2i\omega t}]$$

знаком " - " обозначены комплексно - сопряженные величины. Составляющие  $Q^{(1)}$  и  $F^{(1)}$  - малоизменяющиеся во времени на периоде  $T_{..} = \frac{2\pi}{\omega}$  функции, а  $Q^{(2)}$  и  $F^{(2)}$  - квазиустановившиеся.

В соответствии со структурой (2.2) джоулевых тепловыделений и ponderomotorных сил, температуру  $T$  и тензор напряжений  $\bar{\sigma}$  определяем в виде

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}, \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{(1)} + \bar{\sigma}^{(2)} \quad (2.3)$$

где функции  $T^{(j)}$ ,  $\bar{\sigma}^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ) удовлетворяют уравнениям связанной термоупругости для  $Q_{..} = Q^{(j)}$  и  $F_{..} = F^{(j)}$  при соответствующих начальных и граничных условиях. Составляющие  $T^{(1)}$  и  $\bar{\sigma}^{(1)}$  находим в квазистатической постановке, пренебрегая связанностью полей деформации и температуры, а функции  $T^{(2)}$  и  $\bar{\sigma}^{(2)}$  - в квазиустановившемся представлении [3].

Выполненные в такой постановке исследования показали [3, 7], что в окрестности частот электромагнитного поля  $\omega_n = \frac{1}{2} \omega_n^*$  ( $n = \overline{1, \infty}$ ), где  $\omega_n^*$  - собственные частоты термоупругих колебаний тела, значительно увеличиваются уровни квазиустановившихся составляющих температуры и напряжений и становятся соизмеримыми с квазистатическими, то есть имеют место резонансные явления. При этом высокие уровни квазиустановившихся составляющих температуры обусловлены связанностью полей деформации и температуры. С увеличением номера резонансной частоты амплитуды квазиустановившихся составляющих  $T^{(2)}$  и  $\bar{\sigma}^{(2)}$  уменьшаются.

В силу малости параметра связанности полей деформации и температуры для металлических материалов ( $\epsilon_{..} \ll 1$ ) [3], каждая из собственных частот термоупругих колебаний  $\omega_n$  практически равна соответствующей собственной частоте колебаний исследуемого тела.

Окрестность резонансной частоты (величина отклонения  $\Delta\omega$ , частоты  $\omega$  от первой резонансной  $\omega_1$ ), в которой максимальные значения напряжений  $\bar{\sigma}^{(2)}$  составляет не менее 10% наибольшего значения  $\bar{\sigma}^{(1)}$  в установившемся режиме, не зависит от характеристик электромагнитного поля и является узкой (практически она меньше 0.1 % от значения частоты). В этой окрестности максимальные величины составляющих  $\tau^{(2)}$  и  $\sigma^{(2)}$  обусловлены пондеромоторными силами (влияние джоулевых тепловыделений пренебрежимо мало) и незначительно зависят от критерия Био. Вне резонансных окрестностей определяющее влияние на термонапряженное состояние имеют джоулевы тепловыделения, усредненные по периоду электромагнитной волны.

**3. Ферромагнитные неполяризуемые тела.** Для таких тел феноменологические соотношения электродинамики, в соответствии с выражениями (1.4), (1.6), примем следующими:

$$D_{..} = \epsilon_0 \epsilon_{..} E_{..}, \quad B_{..} = B_{..}(H_{..}) e_H = \mu(H_{..}) H_{..}$$

$$j_{..} = \sigma E_{..} \quad (3.1)$$

Нелинейную зависимость  $B_{..} = B_{..}(H_{..})$  будем описывать динамической петлей гистерезиса, аналитическое выражение которой при периодической по времени напряженности магнитного поля ( $H_{..} = C \cos \omega t + D \sin \omega t$ ) можно записать в виде [10]

$$B_{..} = \mu_0 H_{..} + \beta \arctg \alpha H_{..} \quad (3.2)$$

Здесь

$$H_{..} = \sqrt{1 - \chi^2} \quad H_{..} = \frac{\chi}{\omega} \frac{\partial H_{..}}{\partial t}$$

$$\chi = \frac{H_c}{H_m} \quad \text{при} \quad H_{..} \leq H_m$$

$$\chi = \frac{H_c}{H_0} \quad \text{при} \quad H_{..} > H_m$$

$H_c$  - коэрцитивная сила;  $H_0$  и  $H_m$  - величина напряженности магнитного поля на поверхности тела и соответствующая гистерезисному насыщению, причем  $H_0$  в силу условий (1.2) считается постоянной на периоде  $f_{..} = \frac{2\pi}{\omega}$ ;  $\beta = \frac{2}{\pi} B_s$ ;  $\alpha = (\mu_H - 1) \frac{\mu_0}{\beta}$ ;  $\mu_H$  - начальная относительная магнитная проницаемость материала;  $B_s$  - величина индукции насыщения. В случае  $\chi = 0$  соотношение (3.2)

описывает основную кривую намагничивания, а также зависимость между  $B_{..}$  и  $H_{..}$  в телах, практически не обладающих гистерезисной кривой намагничивания (магнитомягкие тела). Отметим, что эллиптическая зависимость между  $B_{..}$  и  $H_{..}$ , характерная для малых амплитуд и высоких частот следует из соотношения (3.2) при  $B_s \rightarrow \infty$  и будет

$$B_{..} = \mu_0 \mu_H \left( \sqrt{1 - \chi^2} H_{..} - \frac{\chi}{\omega} \frac{\partial H_{..}}{\partial t} \right) \quad (3.3)$$

Представив функцию  $B_{..}(H_{..})$  в виде линейной и нелинейной составляющих, то есть

$$B_{..} = B_L + B_{..} \quad (3.4)$$

где

$$B_L = \mu_0 \mu_L H, \quad B_{..} \equiv B(H) - B_L = \mu_0 (1 - \mu_L) H + \beta \operatorname{arctg} \alpha H$$

$$\mu_L = 1 + \epsilon^{-\frac{1}{2}} (\mu_H - 1) \operatorname{arctg} \sqrt{\epsilon}, \quad \epsilon = (\alpha H_0)^2$$

из уравнений Максвелла придем к такой системе исходных квазилинейных уравнений электродинамики для функции  $H_{..}$

$$\Delta H_{..} - \operatorname{grad} \operatorname{div} H_{..} - \sigma \mu_0 \mu_L \frac{\partial H_{..}}{\partial t} = \sigma \frac{\partial B_{..}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} H = -\mu_0^{-1} \mu_L^{-1} \operatorname{div} B_{..} \quad (3.5)$$

где

$$H = H e_H, \quad B_{..} = [\mu_0 (1 - \mu_L) H + \beta \operatorname{arctg} \alpha H] e_H$$

Для определения функции  $H_{..}$  (решения задачи первого этапа) используем метод последовательных приближений. В качестве первого приближения выбираем решение системы (3.5) при  $B_{..} = 0$  и заданных граничных условиях. Последующие приближения определяем из уравнений

$$\begin{aligned} \Delta H_{..(n)} - \operatorname{grad} \operatorname{div} H_{..(n)} - \sigma \mu_0 \mu_L \frac{\partial H_{..(n)}}{\partial t} = \\ = \sigma \frac{\partial B_{..}(H_{..(n-1)})}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\operatorname{div} H_{..(n)} = -\mu_0^{-1} \mu_L^{-1} \operatorname{div} B_{..}(H_{..(n-1)}), \quad (n = \overline{2, \infty})$$

В квазиустановившемся приближении, с использованием соответству-

ющих разложений в ряды Фурье по времени, функции  $H_{..}$  и  $E_{..}$ , а также  $B_{..}$  для  $n$ -й итерации можно записать в виде

$$\psi_{(n)}(r, t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} \psi_{(n)2k+1}(r, t) \exp[i(2k+1)\omega t] \quad (3.7)$$

где  $\psi = [H_{..}, E_{..}, B_{..}]$ ,  $\psi_{(n)2k+1}$  - относительно мало изменяющиеся во времени на порядке  $f$  функции.

При известной напряженности магнитного поля  $H_{..}$  джоулевы тепловыделения удобно выразить формулой

$$Q = \frac{1}{\sigma} (\operatorname{rot} H_{..})^2 \quad (3.8)$$

Силовое воздействие электромагнитного поля на электропроводное ферромагнитное тело характеризуется пондеромоторными силами [1.11]

$$F_{..} = F^{(J)} + F^{(M)}$$

где

$$F^{(J)} = \operatorname{rot} H_{..} \times B_{..}, \quad F^{(M)} = \mu_0^{-1} [(M \nabla) B_{..} + M \times \operatorname{rot} B_{..}] \quad (3.9)$$

а также моментом сил  $S = M \times B_{..}$ .

Здесь  $F^{(J)}$  и  $F^{(M)}$  - силы воздействия поля соответственно на токи проводимости и молекулярные,  $M = B_{..} - \mu_0 H_{..}$  - намагниченность. В силу принятого условия параллельности векторов  $M$  и  $H_{..}$  получим, что  $S = 0$ .

Вследствие структуры выражений (3.7), тепловыделения (3.8) и пондеромоторная сила (3.9) представляются в виде спектра медленноизменяющихся во времени и квазиустановившихся составляющих. В соответствии с этим температуры и напряжения на втором этапе построения решения будем находить в виде

$$W = W^{(1)} + W^{(2)} \quad (3.10)$$

где  $W = [T, \bar{\sigma}]$ . Медленноизменяющиеся во времени составляющие температурного поля  $T^{(1)}$  и напряжений  $\bar{\sigma}^{(1)}$  как и ранее для неферромагнитных тел определяем в квазистатической постановке, пренебрегая связанностью полей деформации и температуры, а  $T^{(2)}$  и  $\bar{\sigma}^{(2)}$  - в квазиустановившемся режиме, то есть имеющими структуру

$$W^{(2)} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{Re} [W^{(2,2m)} e^{2im\omega t}] \quad (3.11)$$

При этом, следуя результатам работы [11], принимаем, что квазиустановившиеся составляющие температурного поля и напряжений обусловлены квазиустановившимися компонентами пондеромоторной силы. Квазистатические же составляющие вызваны как медленноизменяющимися во времени компонентами джоулева тепла и пондеромоторной силы, так и дополнительными тепловыделениями, возникающими вследствие перемагничивания, удельная плотность которых после усреднения по

периоду электромагнитной волны  $f_0 = \frac{1}{T}$  будет

$$Q_T = \nu \int_0^{f_0} H_{..} dV_{..} = \nu \int_0^{f_0} H_{..} \frac{\partial V_{..}}{\partial t} dt \quad (3.12)$$

Проведенные с использованием описанной методики численные исследования [10,11] показали, что для ферромагнитного тела имеются дополнительные по сравнению с неферромагнитным спектры резонансных частот электромагнитного поля  $\omega_{nm} = \frac{\omega_n}{m}$ ,  $m = \overline{2, \infty}$  окрестность  $\Delta\omega_n$  резонансных частот зависит от величины амплитудного значения напряженности магнитного поля  $H_0$  и при  $\beta_{..} \leq \beta_s$  значительно расширяется (больше чем на порядок) по сравнению с аналогичной для тела из эквивалентного неферромагнитного материала (имеющего  $\mu_{..} = 1$ ).

Значения характеристик исследуемых процессов существенно зависят от параметров  $\mu_{..}$  и  $\chi$ . При  $\chi \geq 0,05$  максимальные тепловыделения вследствие перемagnичивания становятся соизмеримы с джоулевыми. Для материалов и полей, при которых  $\mu_{..} > 100$ , квазистатические составляющие напряжений, обусловленные медленноизменяющимися во времени компонентами пондеромоторной силы, одного порядка с аналогичными от джоулевых тепловыделений.

4. *Тела низкой электропроводности.* К таким телам отнесем неферроэлектрические тела, которые по своим поляризационным свойствам близки к диэлектрикам и имеют коэффициент электропроводности  $\sigma \leq 100 \text{ см}$ . Для этих тел феноменологические соотношения электродинамики будут

$$D_{..} = D_{..}(E_{..}) e_E = \epsilon(E_{..}) E_{..} \\ V_{..} = \mu_0 \mu_{..} H_{..}, \quad j_{..} = \sigma E_{..} \quad (4.1)$$

Для установления вида функции  $D_{..}(E_{..})$  будем исходить из следующего известного представления вектора поляризации  $P = D_{..} - \epsilon_0 E_{..}$  [9]

$$P = P_M + P_R \quad (4.2)$$

где  $P_M$ ,  $P_R$  - соответственно векторы мгновенной (упругой) и релаксационной поляризации, которые связаны с напряженностью  $E_{..}$  соотношениями

$$P_M = \epsilon_0 \kappa_M E_{..}, \quad \frac{\partial P_R}{\partial t} = \frac{\epsilon_0 \kappa_R E_{..} - P_R}{\tau_R} \quad (4.3)$$

Здесь  $\kappa_M$ ,  $\kappa_R$  - диэлектрические проницаемости, характеризующие мгновенную и релаксационную поляризацию.  $\tau_R$  - время релаксации. С учетом соотношений (4.1)-(4.3) зависимость между индукцией  $D_{..}$  и напряженностью  $E_{..}$  для начально неполяризованного

тела низкой электропроводимости примет вид

$$D_{..}(r, t) = (1 + \kappa_M) \varepsilon_0 E_{..}(r, t) + \varepsilon_0 \kappa_p \tau_p^{-1} \int_0^t E_{..}(r, t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_p}\right) dt' \quad (4.4)$$

Следуя работе [3] и используя уравнения Максвелла, можно показать, что если свободные заряды в теле в начальный момент времени отсутствуют, то их объемная плотность (и при зависимостях (4.3)) равна нулю и в произвольный момент времени ( $Q \equiv 0$ ).

Для квазиустановившегося электромагнитного поля при  $\omega \ll \frac{1}{\tau_p}$ , а также для монохроматического воздействия, исходя из (4.4), можно ввести комплексные амплитуды  $E(r, t)$ ,  $D(r, t)$  напряженности электрического поля и электрической индукции, связанные соотношением

$$D(r, t) = \varepsilon_0 \varepsilon^* E(r, t) \quad (4.5)$$

где  $\varepsilon^* = \varepsilon' - i\varepsilon''$  - комплексная диэлектрическая проницаемость,

$$\varepsilon' = 1 + \kappa_M + \frac{\kappa_p}{1 + (\omega \tau_p)^2}, \quad \varepsilon'' = \frac{\kappa_p \omega \tau_p}{1 + (\omega \tau_p)^2} \quad (4.6)$$

Зависимости (4.6)  $\varepsilon'$  и  $\varepsilon''$  от частоты, следующие из закона релаксации (4.3), для большинства тел низкой электропроводимости удовлетворительно описывают дисперсию диэлектрической проницаемости  $\varepsilon'$  с частотой. Однако эти зависимости могут быть установлены и непосредственно из эксперимента и учтены в выражении (4.5).

При феноменологическом соотношении (4.5) из уравнений Максвелла, с учетом условий квазиустановленности на напряженности электрического и магнитного полей, аналогичных (1.2), и того, что  $Q \equiv 0$ , приходим к следующей системе уравнений на функцию  $E(r, t)$  в области тела:

$$\Delta E + k^2 E = 0, \quad \text{div } E = 0 \quad (4.7)$$

где

$$k^2 = \mu_0 \omega [\varepsilon_0 \omega \varepsilon' - i(\sigma + \varepsilon_0 \varepsilon'' \omega)]$$

Отметим, что соотношение (4.5) соответствует эллиптической зависимости между индукцией и напряженностью электрического поля.

При найденных комплексных напряженностях электрического и магнитного полей выражения для тепловыделений в теле (джоулевых и обусловленных поляризацией) и ponderomotorных сил запишутся [12,13]

$$Q = Q_d + Q_r, \quad F = F_k + F_A \quad (4.8)$$

где

$$Q_d = \sigma [ \operatorname{Re} ( E ( r , t ) e^{i \omega t} ) ]^2$$

$$Q_f = \omega \epsilon_0 \epsilon'' [ \operatorname{Re} ( E ( r , t ) e^{i \omega t} ) ]^2$$

- плотности джоулевых и поляризационных тепловыделений :

$$F_k = ( P \nabla ) E_{..} , \quad F_A = ( \sigma E_{..} + \frac{\partial D_{..}}{\partial t} ) \times \mu_0 H_{..}$$

-силы воздействия на диполи (сила Кельвина) и токи, в том числе поляризационные (сила Ампера).

Для начально поляризованных тел и в случае  $P \perp E_{..}$  необходимо учитывать также момент сил [13], а при  $\Omega \neq 0$  - и силу воздействия на заряды  $F_c = E_{..} \operatorname{div} D_{..}$  (силу Кулона).

Для рассматриваемых тел низкой электропроводимости представления тепловыделений и пондеромоторных сил по структуре аналогичны (2.2). Поэтому температуру и компоненты тензора напряжений находим в виде (2.3).

Выполненные на основе модели численные исследования показали [12], что при размерах тела значительно меньше длины падающей электромагнитной волны  $\lambda = c_0 / f$ , где  $c_0 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ , характеристики электромагнитного поля распределены равномерно, а при размерах порядка и больше длины волны их распределение неравномерно, что приводит к образованию по толщине зон более сильных и слабых тепловыделений. При совпадении одного из размеров тела с полудлиной волны, определяемой частотой внешнего воздействия, имеет место значительное увеличение напряженностей электрического и магнитного полей. Как следствие, в окрестностях таких частот достигают больших значений и уровни температуры и напряжений.

Имеют место резонансные явления, обусловленные периодическим характером изменения во времени тепловыделений и пондеромоторных сил, аналогичные как и для неферромагнитных неполяризуемых тел. При этом влияние пондеромоторных сил на резонансные явления пренебрежимо мало по сравнению с влиянием тепловыделений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев Б.А., Партоп В.З. Магнитоупругость. В кн.: Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. - М.: Изд. ВНИИТИ, 1981, т. 14, с. 3-59.
2. Белубекян М.В., Казарян К.Б. Магнитоупругая устойчивость тонких тел, служащих для транспортировки электрического тока. - Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1989, т. 42, № 2, с. 13-21.
3. Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Гачевский А.Р., Чернявская Л.В. Термоупругость электропроводных тел. - Киев: Наук. думка, 1977. 248 с.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2-х т. - М.: Наука, 1976. Т. 1, 536 с.
5. Амбарцумян С.А., Балдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. - М. Наука, 1977. 272 с.
6. Дресвянников В.И. Численное моделирование нестационарных магнито-термопластических процессов в электропроводящих средах. - Проблемы прочности, 1984, № 10, с. 85-89.

7. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. - М.: Наука, 1988. 472 с.
8. Родигин Н.М. Индукционный нагрев стальных изделий токами нормальной частоты. - М.: Свердловск: Металлургиздат, 1950. 248 с.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Физматгиз, 1959. 532 с.
10. Бурак Я.И., Гачкевич А.Р., Солодяк М.Т. Термоупругость электропроводных магнитотвердых тел во внешних установившихся электромагнитных полях. - Докл. АН УССР, Сер. А., 1989, № 6, с. 39 - 43.
11. Бурак Я.И., Гачкевич А.Р., Солодяк М.Т. Термоупругость электропроводных магнитомягких тел во внешних установившихся электромагнитных полях. - Докл. АН УССР. Сер. А, 1987, № 2, с. 44 - 48.
12. Бурак Я.И., Гачкевич А.Р., Терлецкий Р.Ф. Термомеханика тел низкой электропроводимости во внешних квазистационарных электромагнитных полях. - Докл. АН УССР. Сер. А, 1989, № 6, 39 - 43 с.
13. Поливанов К.М. Электродинамика движущихся тел. - М.: Энергоиздат, 1982. 192 с.

Институт прикладных проблем механики и  
математики АН Украины  
Поступила в редакцию 1. 05. 1991

ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ СОСТАВНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ  
ПЛОСКОСТИ С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Фильштинский Л.А.

Ֆիլշտինսկի Լ.Ա., Գրինի ֆունկցիան միջֆազային ճաքով անիզոտրոպ  
բաղադրյալ կիսահարթության համար:

Philshinskly L.A. Green function for compound anisotropic plane with inter-phase  
crack

Ռացիաճայտ տեսքով կառուցված է Գրինի ֆունկցիան երկու  
անիզոտրոպ, միմյանց անընդհատ ամրակցված, կիսահարթություններից  
բաղկացած անսահմանափակ միջավայրի համար: Ստացված են  
բացահայտված են ճեղքի զազաբներում լարումների եզակիությունների  
գործակիցների համար:

В явном виде построена функция Грина для неограниченной среды, составленной  
из двух анизотропных полуплоскостей, непрерывно скрепленных между собой. Пол-  
учены формулы для коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещины.

Задача теории упругости для составной изотропной, а также ани-  
зотропной плоскости с дефектом на границе раздела сред  
рассматривались в работах [1-7]. В данной статье в явном виде построена  
функция Грина для составной анизотропной плоскости с межфазной  
трещиной.

1. Рассмотрим неограниченную среду, составленную из двух раз-  
нородных анизотропных полуплоскостей, непрерывно скрепленных между  
собой вдоль участков  $|x_1| \geq a$  (фиг.1). На участке  $|x_1| < a$  име-  
ется отслойка, которую будем трактовать как межфазную трещину.  
Пусть в верхней полуплоскости в точке  $(x_{10}, x_{20})$  приложена  
сосредоточенная сила  $P = P_1 + iP_2$ . Приписывая величинам, относя-  
щимся к верхней (нижней) полуплоскости верхний (нижний) индекс  
"1", ("2") запишем граничные условия на оси  $x_1$  в виде

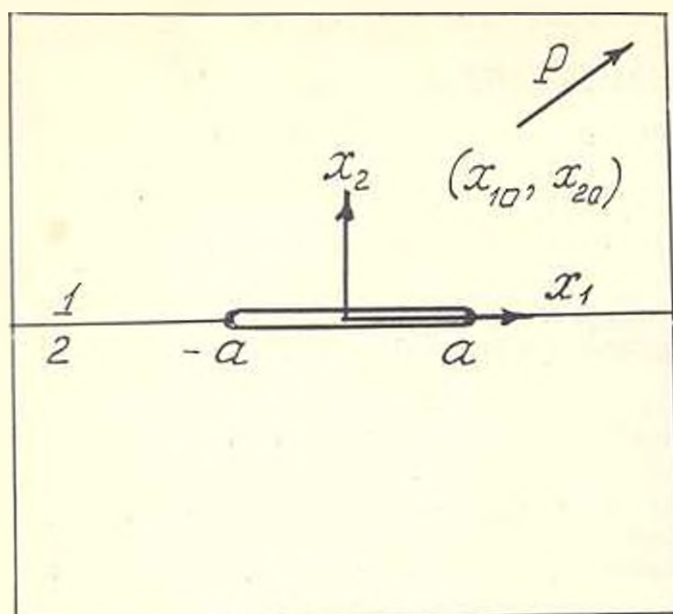
$$\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}, \quad \frac{du_i^{(1)}}{dx_1} = \frac{du_i^{(2)}}{dx_1} \quad |x_1| \geq a \quad (i=1, 2) \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ij}^{(1)\pm} = 0, \quad \sigma_{ij}^{(2)\pm} = 0 \quad |x_1| < a \quad (1.2)$$

где под  $\sigma^\pm$  понимаем предельные значения функции  $\sigma$  соответственно  
на верхнем или нижнем берегах трещины.

Компоненты вектора

$$U = \{U_k\} = \{\sigma_{22}, -\sigma_{12}, u_1'(x_1), u_2'(x_1)\}$$



Фиг.1

определяются равенствами

$$U_k = 2 \operatorname{Re} \sum_{\nu=1}^2 C_{k\nu} \Phi_{\nu}(z_{\nu}) \quad (k = \overline{1, 4}) \quad (1.3)$$

$$C_{1\nu} = 1, \quad C_{2\nu} = \mu_{\nu}, \quad C_{3\nu} = a_{11} \mu_{\nu}^2 - a_{16} \mu_{\nu} + a_{12}$$

$$C_{4\nu} = a_{12} \mu_{\nu} - a_{26} + \frac{a_{22}}{\mu_{\nu}}$$

$a_{ik}$  - упругие параметры материала,  $\mu_{\nu}$  - соответствующие им характеристические числа [8,9]

Таким образом, приходим к краевой задаче об определении четырех функций  $\Phi_{\nu}^{\pm}(z_{\nu}^{\pm})$ , аналитических каждая в своей плоскости  $z_{\nu}^{(\pm)} = x_1 + \mu_{\nu}^{(\pm)} x_2$ , по условиям непрерывной продолжимости компонент  $U_k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) через участки  $|x_1| \geq a$  и условиям  $U_1^{\pm} = U_2^{\pm} = 0$  на берегах отрезка  $[-a, a]$ .

Эту задачу естественно решать, применяя аналитическое продолжение соответствующих функций с последующим сведением ее к задачам Римана [10]. Но сперва необходимо построить фундаментальное решение для составной плоскости без отслойки.

2. Итак, рассмотрим составную среду, составленную из двух разнородных анизотропных полуплоскостей, непрерывно скрепленных между собой вдоль всей оси  $x_1$ . Пусть в точке  $(x_{10}, x_{20})$  действует сосредоточенная сила  $P = P_1 + iP_2$ . Обобщая известный метод отражения [11], будем разыскивать решение в виде

$$\Phi_{\nu}^{(1)}(z_{\nu}^{(1)}) = \frac{A_{\nu}^{(1)}}{z_{\nu}^{(1)} - z_{\nu 0}^{(1)}} - \sum_{m=1}^2 \frac{\overline{\sigma_{\nu m}^{(1)}} \overline{A_m^{(1)}}}{z_{\nu}^{(1)} - z_{m 0}^{(1)}} \quad (\nu = \overline{1, 2})$$

$$\Phi_v^{(2)}(z_v^{(2)}) = \sum_{m=1}^2 \frac{\alpha_{v+2,m}^{(1)} A_m^{(1)}}{z_v^{(2)} - z_{m0}^{(1)}} \quad (2.1)$$

$$z_v^{(1)} = x_{10} + \mu_v^{(1)} x_{20}, \quad z_{m0}^{(1)} = x_{10} + \mu_m^{(1)} x_{20}$$

где постоянные  $A_m^{(1)}$  однозначно определяются системой [8], ( $h$  — толщина пластины)

$$2 \operatorname{Im} \sum_{m=1}^2 A_m^{(1)} (\mu_m^{(1)})^{k-1} = - \frac{\Delta_k}{2\pi h} \quad (k = \overline{0,3}) \quad (2.2)$$

$$\Delta_0 = \frac{\alpha_{12}^{(1)} P_1 + \alpha_{22}^{(1)} P_2}{\alpha_{22}^{(1)}}, \quad \Delta_1 = P_2, \quad \Delta_2 = -P_1$$

$$\Delta_3 = - \frac{\alpha_{16}^{(1)} P_1 + \alpha_{26}^{(1)} P_2}{\alpha_{11}^{(1)}}$$

Для вычисления величин  $\alpha_{\nu m}^{(1)}$  привлечем условия сопряжения (1.1) на всей оси. Подставляя функции в эти условия, приходим к уравнениям

$$\sum_{\nu=1}^2 (\overline{C_{kv}^{(1)}} \alpha_{\nu m}^{(1)} + C_{kv}^{(2)} \alpha_{\nu+2,m}^{(1)}) = c_{km}^{(1)} \quad (m = 1, 2; k = \overline{1,4}) \quad (2.3)$$

Этим завершается построение фундаментального решения (2.1).

Если сосредоточенная сила приложена в точке  $(x_{10}, x_{20})$  нижней полуплоскости ( $x_{20} < 0$ ), то фундаментальное решение определяется соотношениями

$$\Phi_v^{(1)}(z_v^{(1)}) = \sum_{m=1}^2 \frac{\alpha_{v+2,m}^{(2)} A_m^{(2)}}{z_v^{(1)} - z_{m1}^{(2)}}, \quad Z_{v1}^{(2)} = x_{10} + \mu_v^{(2)} x_{20} \quad (2.4)$$

$$\Phi_v^{(2)}(z_v^{(2)}) = \frac{A_v^{(2)}}{z_v^{(2)} - z_{v1}^{(2)}} - \sum_{m=1}^2 \frac{\overline{\alpha_{vm}^{(2)}} \overline{A_m^{(2)}}}{z_v^{(2)} - z_{m1}^{(2)}} \quad (v = 1, 2)$$

где  $A_v^{(2)}$ ,  $\alpha_{vm}^{(2)}$  определяются соответственно из уравнений (2.2), (2.3), в которых у всех величин верхний индекс "1" необходимо заменить на "2".

3. Решение основной задачи, поставленной в п. 1, будем разыскивать в виде

$$W_v^{(r)}(z_v^{(r)}) = \Phi_v^{(r)}(z_v^{(r)}) + \Psi_v^{(r)}(z_v^{(r)}) \quad (v, r = 1, 2) \quad (3.1)$$

где функции  $\Phi^{(n)}(z_v^{(n)})$  определены в (2.1), (2.3), а  $\Psi_v^{(n)}(z_v^{(n)})$  учитывают возмущения, вносимые межфазной трещиной.

Используем идею аналитического продолжения  $\Psi_v^{(n)}(z_v^{(n)})$  следующим образом [12]. Функции  $\Psi_v^{(1)}(z)$  ( $\Psi_v^{(2)}(z)$ ) аналитически продолжим через участки  $|x_1| \geq a$  в нижнюю (верхнюю) полуплоскость при помощи функций  $\Psi_v^{(1)}(z)$  ( $\Psi_v^{(2)}(z)$ ) удовлетворяющих соотношению

$$\overline{\Psi_v^{(1)+}(x)} = \Psi_v^{(1)-}(x), \quad (\overline{\Psi_v^{(2)-}(x)} = \overline{\Psi}_v^{(2)+}(x))$$

При этом учитываем определение  $\overline{\Psi(\bar{z})} = \Psi(z)$ , а под  $\Psi^\pm(x)$  понимаем соответствующие предельные значения функции  $\Psi(z)$ .

С учетом сказанного, получаем из (1.3)

$$U_k^+(x) = \sum_{v=1}^2 (c_{kv}^{(1)} \Psi_v^{(1)+}(x) + \overline{c_{kv}^{(1)}} \overline{\Psi}_v^{(1)-}(x)) \quad (3.2)$$

$$+ 2 \operatorname{Re} \sum_{v=1}^2 c_{kv}^{(1)} \Phi_v^{(1)}(x) \quad (k = 1, 2)$$

$$U_k^-(x) = \sum_{v=1}^2 (c_{kv}^{(2)} \Psi_v^{(2)-}(x) + \overline{c_{kv}^{(2)}} \overline{\Psi}_v^{(2)+}(x))$$

$$+ 2 \operatorname{Re} \sum_{v=1}^2 c_{kv}^{(2)} \Phi_v^{(2)}(x) \quad (k = 1, 2)$$

Введем функции

$$F_k(z) = f_k(z) = \sum_{v=1}^2 [c_{kv}^{(1)} \Psi_v^{(1)}(z) - \overline{c_{kv}^{(2)}} \overline{\Psi}_v^{(2)}(z)] \quad x_2 > 0$$

$$F_k(z) = f_k(z) = \sum_{v=1}^2 [c_{kv}^{(2)} \Psi_v^{(2)}(z) - \overline{c_{kv}^{(1)}} \overline{\Psi}_v^{(1)}(z)] \quad x_2 < 0 \quad (3.3)$$

$$k = \overline{(1, 4)}$$

В силу (1.3) и непрерывной продолжимости функции  $U_k$  ( $k = 1, 2$ ) через всю ось  $x_1$  получаем

$$f_k^+(x) - f_k^-(x) = U_k^+(x) - U_k^-(x) = 0, \quad x_1 = x \quad (3.4)$$

$$(k = 1, 2)$$

Следовательно,  $F_k(z)$  ( $k = 1, 2$ ) с элементами  $f_k(z)$  при  $\text{Im } z > 0$  и  $f_k(z)$  при  $\text{Im } z \leq 0$  аналитична в полной  $z$ -плоскости. Поэтому можно положить  $F_1(x) = F_2(x) = 0$ .

Из (3.3) следуют предельные равенства

$$C \cdot \Psi^+(x) = f^+(x), \quad \overline{C} \cdot \overline{\Psi}^-(x) = -f^-(x) \quad (3.5)$$

$$C = \begin{vmatrix} c_{11}^{(1)} & c_{12}^{(1)} & -\overline{c}_{11}^{(2)} & -\overline{c}_{12}^{(2)} \\ c_{21}^{(1)} & c_{22}^{(1)} & -\overline{c}_{21}^{(2)} & -\overline{c}_{22}^{(2)} \\ c_{31}^{(1)} & c_{32}^{(1)} & -\overline{c}_{31}^{(2)} & -\overline{c}_{32}^{(2)} \\ c_{41}^{(1)} & c_{42}^{(1)} & -\overline{c}_{41}^{(2)} & -\overline{c}_{42}^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$\Psi^+(x) = \begin{vmatrix} \Psi_1^{(1)+} \\ \Psi_2^{(1)+} \\ \overline{\Psi}_1^{(2)+} \\ \overline{\Psi}_2^{(2)+} \end{vmatrix}, \quad \overline{\Psi}^-(x) = \begin{vmatrix} \overline{\Psi}_1^{(1)-} \\ \overline{\Psi}_2^{(1)-} \\ \Psi_1^{(2)-} \\ \Psi_2^{(2)-} \end{vmatrix}, \quad f^\pm(x) = \begin{vmatrix} f_1^\pm \\ f_2^\pm \\ f_3^\pm \\ f_4^\pm \end{vmatrix}$$

Складывая равенства (3.2) и учитывая при этом соотношение (3.4) (3.5), также граничные условия на берегах разреза, приходим к матричной задаче Римана

$$\sum_{j=3}^4 (b_{kj} f_j^+(x) - \overline{b}_{kj} \overline{f}_j^-(x)) = -4 \text{Re} \sum_{v=1}^2 c_{kv}^{(2)} \Phi_v^{(2)}(x) = N_k(x)$$

$$B = \|b_{kj}\| = AC^{-1}, A = \begin{vmatrix} c_{11}^{(1)} & c_{12}^{(1)} & \overline{c}_{11}^{(2)} & \overline{c}_{12}^{(2)} \\ c_{21}^{(1)} & c_{22}^{(1)} & \overline{c}_{21}^{(2)} & \overline{c}_{22}^{(2)} \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

Подберем теперь векторы  $(\rho_{k1}, \rho_{k2})$  и числа  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2$ ) таким образом, чтобы они были собственными векторами и соответствующими характеристическими числами однородных систем

$$\rho_{k1}(\overline{b_{13}} + \lambda_k b_{13}) + (-1)^{k-1} \rho_{k2}(\overline{b_{23}} + \lambda_k b_{23}) = 0 \quad (3.7)$$

$$\rho_{k1}(\overline{b_{14}} + \lambda_k b_{14}) + (-1)^{k-1} \rho_{k2}(\overline{b_{24}} + \lambda_k b_{24}) = 0, (k = 1, 2)$$

В этом случае (3.6) сводится к двум скалярным задачам Римана

$$\rho_k^+(x) + \lambda_k \rho_k^-(x) = N_k^+(x) \quad -a < x < a \quad (k = 1, 2) \quad (3.8)$$

$$\rho_k(x) = \sum_{j=3}^4 d_{kj} f_j(x)$$

$$N_k^+(x) = \rho_{k1} N_1(x) + (-1)^{k-1} \rho_{k2} N_2(x)$$

$$d_{ij} = \frac{2i \operatorname{Im} (b_{ij} \overline{b_{ij}})}{b_{2j} + \lambda_k b_{2j}} \quad (j=3,4)$$

Фигурирующие в (3.8) характеристические числа  $\lambda_1, \lambda_2$  находятся из условий нетривиальной разрешимости систем (3.7), которые сводятся к следующему квадратному уравнению:

$$\lambda_{1,2}^2 + 2r_1 \lambda_{1,2} + r_2 = 0 \quad (3.9)$$

$$r_1 = \frac{\operatorname{Re} (\overline{b_{13}} b_{24} - \overline{b_{23}} b_{14})}{b_{13} b_{24} - b_{23} b_{14}} \quad r_2 = \frac{(\overline{b_{13}} b_{24} - \overline{b_{23}} b_{14})}{b_{13} b_{24} - b_{23} b_{14}}$$

Очевидно, корни уравнения (3.9) можно представить так:

$$\lambda_1 = \frac{1}{R} e^{-i\varphi}, \quad \lambda_2 = R e^{-i\varphi} \quad \varphi = \arg (b_{13} b_{24} - b_{14} b_{23}) \quad (3.10)$$

где  $R$ -вещественное число,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Решения задач (3.8) элементарны. Имеем [10]

$$\rho_k(z) = (D_k(z) + M_k) X_k(z) \quad (k=1,2) \quad (3.11)$$

$$X_k(z) = (z+a)^{-\gamma_k} (z-a)^{\gamma_k-1}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2} - \frac{\varphi}{2\pi} + \frac{i}{2\pi} \ln R$$

$$D_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{N_k(x) dx}{X_k(x)(x-z)}, \quad \gamma_2 = \overline{\gamma_1}$$

Здесь  $X_k(x) = X_k^+(x)$  значения канонических функций  $X_k(z)$  на верхнем берегу разреза,  $M_k$  произвольные комплексные постоянные.

Выполняя предписанные в (3.11) квадратуры, получаем с учетом (3.8) и (3.6)

$$D_k(z) X_k(z) = \frac{2}{1+\lambda_k} \sum_{m=1}^2 [A_m^{(1)} \Omega_k^{(m)} \frac{1 - X_k(z) X_k^{-1}(z_{mo}^{(1)})}{z - z_{mo}^{(1)}} + \overline{A_m^{(1)}} \overline{\Omega_k^{(m)}} \frac{1 - X_k(z) X_k^{-1}(\overline{z_{mo}^{(1)}})}{z - \overline{z_{mo}^{(1)}}}] \quad (3.12)$$

$$\Omega_{11}^{(m)} = \Omega_{22}^{(m)} = - \sum_{\nu=1}^2 \sum_{j=1}^2 \rho_{1j} c_{\nu}^{(2)} \alpha_{\nu+2,m} \quad (m=1,2)$$

$$\Omega_{21}^{(m)} = \Omega_{12}^{(m)} = (-1)^j \sum_{\nu=1}^2 \sum_{j=1}^2 \rho_{2j} c_{\nu}^{(2)} \alpha_{\nu+2,m} \quad (m=1,2)$$

$$\rho_{k1} = 1 \quad \rho_{k2} = (-1)^k \frac{\bar{b}_{13} + \lambda_k b_{13}}{\bar{b}_{23} + \lambda_k b_{23}} \quad (k = 1, 2)$$

Далее, из равенств (3.3) находим

$$\begin{aligned} \Psi_v^{(1)}(z) &= \sum_{j=3}^4 l_{vj} f_j(z), \quad \operatorname{Im} z > 0 \quad (v = 1, 2) \\ \Psi_v^{(2)}(z) &= - \sum_{j=3}^4 \bar{l}_{v+2,j} f_j(z), \quad \operatorname{Im} z < 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

где  $l_{mj}$  ( $m, j = \overline{1, 4}$ ) - элементы матрицы  $C^{-1}$ .

Из (3.8), (3.11) следует, что функции  $f_3(z)$ ,  $f_4(z)$  определяются из следующей системы уравнений:

$$\sum_{j=3}^4 d_{kj} f_j(z) = (D_k(z) + M_k) X_k(z) \quad (k = 1, 2) \quad (3.14)$$

Обращая эту систему и вставляя полученные выражения функции  $f_j(z)$  в формулу (3.13), находим с учетом равенств (3.12)

$$\begin{aligned} \Psi_v^{(r)}(z_v^{(r)}) &= \sum_{m=1}^2 \frac{A_m^{(1)}}{z_v^{(r)} - z_{m0}^{(1)}} \sum_{i=1}^2 [1 - X_i(z_v^{(r)}) X_i^{-1}(z_{m0}^{(1)})] \\ &\quad + \frac{2 \Omega_{12}^{(m)} L_v^{(r)}}{(1 + \lambda_i) d_0} + \sum_{m=1}^2 \frac{\bar{A}_m^{(1)}}{z_v^{(r)} - \bar{z}_{m0}^{(1)}} \sum_{i=1}^2 [1 - X_i(z_v^{(r)}) X_i^{-1}(\bar{z}_{m0}^{(1)})] \\ &\quad + \frac{2 \bar{\Omega}_{12}^{(m)} L_v^{(r)}}{(1 + \lambda_i) d_0} + \sum_{i=1}^2 \frac{M_i}{d_0} L_v^{(r)} X_i(z_v^{(r)}) \quad (v, r = 1, 2) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$L_v^{(1)} = \sum_{j=3}^4 (-1)^{(j-1)} n_{ij} l_{vj}, \quad L_v^{(2)} = - \sum_{j=3}^4 (-1)^{(j-1)} n_{ij} \bar{l}_{v+2,j}$$

$$n_{13} = \frac{d_{14} d_{24}}{d_{14}}, \quad n_{14} = \frac{d_{13} d_{23}}{d_{13}}, \quad d_0 = d_{13} d_{24} - d_{14} d_{23}$$

Остается определить константы  $M_i$ . Поскольку в условия сопряжения (1.1) входят производные от перемещений, необходимо позаботиться, чтобы вектор перемещений был непрерывно продолжим через участки  $|x_1| \geq a$ . Это условие будет выполнено, если между  $M_1$  и  $M_2$  имеет место соотношение

$$\overline{M_2} = \lambda_1 M_1 \quad (3.16)$$

Теперь привлечем условия однозначности перемещений в составной плоскости

$$\int_c d u_i = \int_{-a}^a d [u_i] = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (3.17)$$

где  $c$  - произвольный замкнутый контур, содержащий внутри отрезок  $[-a, a]$  оси  $x_1$ ,  $[u_i]$  - скачок функции  $u_i$  при переходе через разрез.

Вводя сюда выражения  $u_i'(x)$  из (1.3), учитывая соотношения (3.1), (3.15), (3.16) и выполняя необходимые квадратуры, получаем после преобразований

$$M_i = \frac{2}{1 + \lambda_i} \sum_{m=1}^2 (A_m^{(1)} \Omega_{i1}^{(m)} + \overline{A_m^{(1)}} \overline{\Omega_{i1}^{(m)}}) \quad (i = 1, 2) \quad (3.18)$$

На этом построение функции Грина для составной анизотропной плоскости с межфазной трещиной заканчивается. Она полностью определяется формулами (3.1), (2.1), (3.15) и (3.18). Из аналитического представления функции Грина следует, что напряжения в вершинах межфазной трещины имеют степенные особенности, усиленные осцилляцией в малых окрестностях точек  $\pm a$ . Это явление имеет место и для составных изотропных сред [1, 13].

4. Для представления напряжения в малой окрестности вершины трещины оставим в (3.15) лишь члены, содержащие канонические функции  $X_j(z)$ . Асимптотический анализ этого выражения даст:

при  $x > a$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(r)} - \sigma_{22}^{(r)} &= 4 \operatorname{Re} \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 A_m^{(1)} \left[ \frac{(x-a)^{\gamma_n-1}}{(2a)^{\gamma_n}} \Omega_n^{(m)} \right. \\ &\quad \left. + D_{kn} \left[ \left( \frac{z_{m0}^{(1)} + a}{z_{m0}^{(1)} - a} \right)^{\gamma_n} + 1 \right] \right] + O(1) \end{aligned}$$

при  $x < -a$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(r)} - \sigma_{22}^{(r)} &= -4 \operatorname{Re} \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 A_m^{(1)} \left[ \frac{(x+a)^{-\gamma_n}}{(2a)^{1-\gamma_n}} \Omega_n^{(m)} \right. \\ &\quad \left. + D_{kn} \left[ \left( \frac{z_{m0}^{(1)} - a}{z_{m0}^{(1)} + a} \right)^{-\gamma_n} + 1 \right] \right] + O(1) \end{aligned}$$

Здесь

$$D_{k1} = \frac{1}{d_0} D_{k1}^{(1)}, \quad D_{k2} = \overline{D_{k1}}, \quad D_{k1}^{(1)} = \sum_{v=1}^2 C_{kv}^{(1)} L_v^{(1)}$$

Величина  $\sigma_{22}^{(r)}$  определяется при  $k = 1$ ,  $\sigma_{22}^{(r)}$  - при  $k = 2$ . Как и следовало ожидать, полученные выражения не зависят от  $r$ .

Коэффициенты интенсивности напряжений определим в соответствии с выписанной выше асимптотикой следующим образом:  
в вершине  $x = a$

$$K_I^+ = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{x}{a} - 1 \right)^{\frac{1}{2} + \frac{p}{2\pi}} \sigma_{22}(x) = \frac{|P|}{a h} < k_1^+ >, \quad x \rightarrow a, (x > a)$$

$$K_{II}^+ = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{x}{a} - 1 \right)^{\frac{1}{2} + \frac{p}{2\pi}} \sigma_{12}(x) = \frac{|P|}{a h} < k_2^+ >$$

$$|P| = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$$

$$< k_j^+ > = 4 \operatorname{Re} \sum_{m=1}^2 B_m^{(1)} \sum_{n=1}^2 \frac{\Omega_n^{(m)} D_{jn}}{2^{\gamma_n}} \left[ \left( \frac{z_{m0}^{(1)} + a}{z_{m0}^{(1)} - a} \right)^{\gamma_n} + 1 \right]$$

$$B_m^{(1)} = \frac{h}{|P|} A_m^{(1)}$$

в вершине  $x = -a$

$$K_I^- = \lim_{x \rightarrow -a} \left[ \left( \frac{x}{a} - 1 \right)^{\frac{1}{2} - \frac{p}{2\pi}} \sigma_{22}(x) \right] = \frac{|P|}{a h} < k_1^- >$$

$$x \rightarrow -a, (x < -a)$$

$$K_{II}^- = \lim_{x \rightarrow -a} \left[ \left( \frac{x}{a} + 1 \right)^{\frac{1}{2} - \frac{p}{2\pi}} \sigma_{12}(x) \right] = \frac{|P|}{a h} < k_2^- >$$

$$< k_j^- > = -4 \operatorname{Re} \sum_{m=1}^2 B_m^{(1)} \sum_{n=1}^2 \frac{\Omega_n^{(m)} D_{jn}}{2^{1-\gamma_n}} \left[ 1 + \left( \frac{z_{m0}^{(1)} - a}{z_{m0}^{(1)} + a} \right)^{1-\gamma_n} \right]$$

$$(j = 1, 2)$$

При вычислении указанных пределов было принято согласно [13], что  $\lim_{x \rightarrow \pm a} |x \pm a| = 0$ . Тем самым устраняется и физическая некорректность решения, связанная с тем обстоятельством, что напряжения в окрестности вершины бесконечное число раз меняют знак.

В заключение отметим, что без всяких принципиальных затруднений полученное аналитическое решение можно распространить на случай нескольких межфазных трещин, лежащих на оси  $x_1$ , а также полубесконечной межфазной трещины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. - Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, 1.
2. Райс. Си. Плоские задачи о трещинах, расположенных на границе раздела двух различных сред. - Тр. Амер. о-ва инженеров механиков. Прикладная механика, 1965, т.32, 2, с.186-192.
3. Прусов И.А., Лунская Л.И. Упругое состояние кусочно - однородной ортотропной плоскости с разрезами. Прикладная механика АН УССР, 1969, т.5, 8, с. 77-83.
4. Плехотный П.И. Взаимное давление двух различных полуплоскостей с прямолинейными щелями на линии спая. Прикладная механика АН УССР, 1970, т.6, 1, с.62 - 68.
5. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. - Ереван: Изд - во Ереванского университета, 1983, 260 с.
6. Кривой А.Ф., Радилло М.В. Особенности поля напряжений в составной анизотропной плоскости. - Изв. АН СССР. МТТ 1984, 3, с. 84 -92.
7. Асаян Д.Д., Аслаян А.А., Багдасарян Г.Е. О концентрациях упругих напряжений и индуцированного магнитного поля возле трещины, обусловленных внешним магнитным полем. - Изв. АН АрмССР. Механика, 1988, т.41, 2, с.15-258.
8. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. - М.: Гостехиздат, 1967. 356 с.
9. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин (прочность, устойчивость и колебания) - М.: Наука, 1967. 268 с.
10. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Физматгиз, 1968. 511 с.
11. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. В 2-х томах. Т.1, М. Изд-во иностр. лит., 1958. 930 с.
12. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. 708 с.
13. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. - М.: Наука, 1974. 640 с.

Сумский сельскохозяйственный институт  
Поступила в редакцию 6.02. 1991

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Абрамян Б.Л.

Աբրամյան Բ.Լ., Առաձգական միջավայրում ալիքների տարածումը:

Abramian B.L., Waves propagation in elastic medium

Համառոտ ձևով, առաձգականության զնային տեսության շրջանակներում, ցույց է տրված համասեռ և անհամասեռ, հոծ և խոռոչներ ունեցող, անսահմանափակ առաձգական ալիքների տարածման հարցին նվիրված գրականությունը:

В кратком виде, в рамках линейной теории упругости, показывается литература, посвященная вопросу распространения упругих волн в однородной и неоднородной, сплошной и имеющей полости, неограниченной упругой среде.

В рамках линейной теории упругости первые исследования, относящиеся к распространению упругих волн в упругой среде, выполнены еще в начале 19 -го столетия. Навье (1872) и Пуассон (1829) установили, что в изотропной неограниченной упругой среде волны распространяются с двумя различными скоростями. Эти волны условились называть продольными (волны расширения) и поперечными (волны искажения или сдвига).

Характер распространения упругих волн исследовался в работах Коши (1830), Стокса (1848), В. Томсона (лорд Кельвин, 1880), Рэлея (1885), Лэмба (1904) и других.

Сведения о первых исследованиях и динамической теории упругости, упомянутые здесь вкратце, читатели могут найти в курсах теории упругости [1-3]. Волны, распространяющиеся по плоской поверхности упругой изотропной среды, были исследованы Рэлеем [4,5], а волны, распространяющиеся по поверхности круглого сплошного цилиндра, исследовались в работах Похгаммера [6] и Кри [7].

Теория распространения упругих волн в сплошных средах, в средах, имеющих ослабления различного вида, или включения, была разработана исследованиями многих ученых [4-36].

В указанных работах даются основные уравнения движения упругой среды, обсуждаются различные фундаментальные вопросы волновой механики: теоремы существования и единственности решений уравнений динамики деформируемой среды; методы решения уравнений динамики; способы применения интегральных преобразований, для получения решений. Применяются различные потенциальные функции при решении уравнений. В общем случае решение динамической трехмерной задачи представляется при помощи одной скалярной и одной векторной потенциальных функций. Даются способы использования этих функций в различных координатных системах. В этих трудах приводятся также конкретные решения различных одномерных, двумерных и трехмерных

динамических задач теории упругости.

В работах [24,30,37] для решения трехмерных задач динамики теории упругости предлагается в цилиндрической и сферической координатных системах общее решение уравнений движения упругого тела представлять при помощи трех скалярных потенциальных функций  $\Phi$ ,  $\Psi$  и  $\chi$ , которые удовлетворяют одному и тому же волновому уравнению. В уравнении для функции  $\Phi$  входит скорость распространения продольной волны, а для функций  $\Psi$  и  $\chi$  — скорость распространения поперечной волны.

В исследованиях В.И.Смирнова и С.Л.Соболева [9-11,13,38] исследованы вопросы распространения волн в упругих средах. Получены функционально-инвариантные решения волнового уравнения.

В [13] были обобщены ранее полученные результаты в этой области по изучению волновых процессов и подробно изложена теория распространения колебаний в упругих телах.

Теория распространения колебаний в упругой среде обсуждается далее в ряде работ Г.И. Петрашеня, других ленинградских исследователей [14-16,39,40], В.М.Бабича [41-42], С.Г.Михлина [43]. В исследованиях этих авторов учитывается также неоднородность упругой среды.

Изучению волновых процессов в анизотропной среде и вопросам колебаний анизотропных упругих тел посвящено большое число исследований. Здесь отмечаются только некоторые из них [46-53].

Новые методы для решения смешанных задач динамической теории упругости предлагаются в монографиях И.И.Воровича и В.А.Бабешко [27,33]. В упомянутых работах изучается также вопрос разрешимости интегральных уравнений, связанных с задачами динамической теории упругости. Вопросы динамики неоднородной линейно-упругой среды посвящена монография [35].

В двухтомном труде американских сейсмологов К.Аки и П.Ричардса [29] дается фундаментальный материал по теории распространения упругих колебаний в упругой среде. Здесь рассматриваются также методы решения обратных задач геофизики, обработки сейсмической информации и кинематика и динамика источника сейсмических волн в очаге землетрясения.

В монографии Микловитца [26] даются основные сведения по теории распространения упругих волн в упругой среде в рамках линейной теории упругости и рассматриваются различные примеры пространственных динамических задач. Этому вопросу посвящены также работа [44] и другие его работы.

Отметим еще монографии [54-56], в которых освещаются различные вопросы распространения упругих волн в слоистой среде, и монографию [57], в которой в упрощенном виде освещаются вопросы распространения волн напряжений в упругих твердых телах и методы исследования практических задач.

Рэлей [4,5] установил, что вдоль плоской поверхности упругого неограниченного однородного и изотропного тела распространяется поверхностная волна, амплитуда этой волны убывает при удалении от поверхности по экспоненциальному закону, а скорость распространения волны несколько ниже скорости распространения поперечной волны. В дальнейшем другие исследователи выяснили, что если поверхность упругой среды имеет форму, отличную от плоской поверхности, то на такой поверхности распространение упругих волн типа Рэрея происходит другими скоростями.

Уравнение для частот колебаний бесконечно длинного круглого ци-

линдра при распространении в нем продольных волн было получено в работах Похгаммера [6] и Кри [7]. Корни уравнения Похгаммера - Кри исследовались в работе Я. Миндлина [58]. В другой работе Я. Миндлина [59] исследовалось также волновое уравнение, полученное им при рассмотрении волн, распространяющихся по поверхности цилиндрической полости кругового сечения в упругом однородном пространстве при наличии осевой симметрии. Позже эта задача была рассмотрена также в работе Бюо [60]. Этому вопросу посвящена еще одна работа Я. Миндлина [61].

Распространение упругих волн по поверхности цилиндрической полости круглого сечения в упругом однородном пространстве при отсутствии осевой симметрии исследовалось в работе [62]. Здесь получены волновое уравнение для нулевой гармоники (случай осевой симметрии), которое совпадает с уравнением Я. Миндлина и Бюо, а также уравнение для первой гармоники. Для корней полученных уравнений приведены численные результаты.

А. Ляв [63] установил, что в зависимости от структуры поверхностного слоя при неоднородности упругой среды, в верхнем поверхностном слое могут распространяться сдвиговые, поперечные волны, не выходя из этого слоя.

Позже подобные волны исследовались в работе Стоунли [64], который рассмотрел случай, когда сдвиговые волны распространяются во внутреннем слое упругой неоднородной среды, не переходя из этого слоя в соседние слои из других материалов. Стоунли исследовал также и волны типа Рэлея, которые появляются на границах внутреннего слоя, отделяющих его от соседних.

Вопрос о распространении упругих волн на границе двух сред с различными упругими свойствами исследовался также в работе В.Д. Купрадзе и С.Л. Соболева [11].

Волны типа Рэлея, Лява и Стоунли в дальнейшем изучались многими исследованиями. Здесь считаем удобным отметить лишь работы [65-100].

Лэмб [8] исследовал распространение упругих волн по поверхности упругого полупространства, когда источник, возбуждающий волны, в виде сосредоточенной силы приложен на поверхности упругого полупространства. В этой работе при исследовании задачи был применен метод интегральных преобразований. В работе было установлено, что начальное возбуждение упругой среды, на некотором расстоянии от местонахождения источника динамической нагрузки, ощущается продольными волнами. Далее ощущаются колебания, вызванные поперечной волной и затем ощущаются колебания со сравнительно большими амплитудами, вызванными дошедшей волной Рэлея.

В дальнейшем задачи о возникновении волн на поверхностях различных упругих сред, от действий источников динамических сил с различным местонахождением, стали называть задачами Лэмба. Исследованию таких задач посвящены работы [26, 28, 80-83, 101-104] и другие.

Микловитц [26], А.С. Алексеев и Б.Г. Михайленко [101, 102], С.С. Григорян и Р.А. Чередищенко [103] рассмотрели распространение волн на поверхностях слоистого полупространства с горизонтальной поверхностью раздела материалов, когда динамическая ассиметричная нагрузка находится на некоторой глубине слоистого полупространства, или на поверхности.

В работах [80-83] волны вызываются на поверхности однородного полупространства от действий внутренних динамических нагрузок, приложенных на поверхности внутренней сферической полости.

В работах [30, 102, 118] показываются различные случаи действий ди-

налических нагрузок, находящихся на поверхности упругой среды, или на некоторой глубине среды в различных местах и различным образом приложенных.

В работах [89-95] обсуждаются случаи распространения волн типа Лява в слоях переменной толщины, в слоях, которые являются неоднородными, или в слоях, расположенных не горизонтально. Рассмотрен также случай, когда волны Лява распространяются в слое, в котором имеются препятствия [100]. Распространение упругих волн в слоисто-однородных упругих средах исследовано также в работе [105], в которой использован метод контурных интегралов.

Распространение упругих волн вдоль цилиндрических полостей внутри упругой среды, исследовалось также в работах [106-113]. Этому вопросу посвящены еще многие исследования И.А.Викторова, которые обобщены в монографиях [114,115]. В первой монографии доказываются основные направления практического использования полученных в этой области результатов.

В качестве других практических применений подобных исследований следует упомянуть работы А.А. Ильюшина и Т.Р.Рашидова [116], Л.В.Никитина и А.Н. Тюраходжасва [117]. Эти работы посвящены исследованию действия сейсмических волн на подземный трубопровод. Однако в этих работах трубопровод моделируется упругим стержнем и считается, что он не оказывает заметных изменений на движение грунта, а фронт ударной волны берется перпендикулярным к оси стержня-трубопровода.

Решения различных задач о распространении упругих волн в упругих средах приводятся в монографиях [22-36,118].

Подробные обзоры литературы, касающиеся распространению упругих волн в упругих телах и решениям различных задач в этой области даются в работах [119-124].

Данный краткий обзор литературы, безусловно, не является полным и автор просит извинения, если он упустил некоторые важные работы, относящиеся к теме обсуждаемых вопросов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Теория упругости. -М.-Л.: ОНТИ, 1937.
2. Лява А. Математическая теория упругости. -М.-Л.: ОНТИ, 1935.
3. Новацкий В. Теория упругости. -М.: Изд. Мир, 1975.
4. Rayleigh J.W. On waves propagated along the plane surfaces of an elastic solid. -Proc.London Math.Soc., 1885, v.17, No.253, 4-11.
5. Стратт Д.В. (Лорд Рэлей). Теория звука. В двух томах. -М.: Гостехиздат, 1955.
6. Pochhammer L. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten Schwingungen in einem unbergrenzten isotropen kreiscylinder. -Jorn. reine und angew.math., 1876, Bd.81, No. 4, 324-336.
7. Chree C. Longitudinal vibrations of a circular bar. -Quart.Journ. Pure and Appl.Math., 1886, vol. 21, No.83/84, 287-298.
8. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. -Philos. Transac. of the Royal Soc. of London, 1904, vol. 203, ser.A, 1-42.
9. Смирнов В.И., Соболев С.Л. О применении нового метода к изучению упругих колебаний. -Тр. Сейсм. института АН СССР, 1932, 20.
10. Смирнов В.И., Соболев С.Л. О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии. -Тр. Сейсм. института АН СССР, 1933.
11. Купрадзе В.Д., Соболев С.Л. К вопросу о распространении упругих волн на границе двух сред с различными упругими свойствами. -Тр. Сейсм. института АН СССР, 1931, 10.
12. Нарикшвили Е.А. Общая теория волн Рэлея для полупространства. -Тр. Сейсм.

- института АН СССР, 1940, 90.
13. Соболев С.Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний. В кн.: Ф.Франки и Р.Мизеса - Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, часть вторая. - М.Л.: ОНТИ, 1937, гл.ХП, 468-617.
  14. Петрашень Г.И. О задаче Лэмба в случае упругого полупространства. - ДАН СССР, 1949, т.64, 5, 649-652.
  15. Петрашень Г.И., Марчук Г.И., Огурцов К.И. К задаче Лэмба в случае полупространства. - Учен. зап. ЛГУ, серия мат. наук, 1950, вып. 21, 135, 70-118.
  16. Петрашень Г.И. Методы исследования волновых процессов в средах, содержащих сферические или цилиндрические границы раздела. - Учен. зап. ЛГУ, серия мат. наук, 1953, вып. 27, 170, 96-220.
  17. Kupradze V.D. Dynamical problems in Elasticity. - In: "Progress in solid mechanics", Vol.3. Editors: I.N. Sneddon and R. Hill. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1963, 259 p.
  18. Papadopoulos M. The use of singular integrals in wave propagation problems; with application to the point source in a semi-infinite elastic medium. - Proceed. Royal Soc. of London (A), 1963, Vol. 276, No 1365, 204-237.
  19. White J.E. Seismic waves. - New York, McGraw-Hill Book Co. 1965.
  20. Буллен К.Е. Введение в теоретическую сейсмологию. - М.: Изд. Мир, 1966. 460 с.
  21. Bath M. Mathematical aspects of seismology. - Amsterdam: Elsevier publ. Co., 1968, 415 p.
  22. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids. - Amsterdam: North-Holland publ. Co., 1973, 425 p.
  23. Eringen C., Suhubi E.S. Elastodynamics. Vol. 1, Finite motions. - Academic Press, New York and London, 1974, 341 p.
  24. Eringen C., Suhubi E.S. Elastodynamics. Vol. 2, Linear theory. - Acad. Press, New York-San Francisco-London, 1975, 660 p.
  25. Graff K.F. Wave motion in elastic solids. - Oxford: Clarendon Press, 1975, 666 p.
  26. Miklowitz J. The theory of elastic waves and waveguides. - Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1968, 618 p.
  27. Воронович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. - М.: Наука, 1979. 320 с.
  28. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. - Научная думка, Киев: 1981. 284 с.
  29. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Теория и методы. - В двух томах. т. 1.: Изд. Мир, 1983, т. 520 с., т. 2, 360 с.
  30. Ben-Menahem A., Singh S.J. Seismic waves and Sources. Springer-Verlag: 1981, 1108 p.
  31. Payton R.G. Elastic wave propagation in transversely isotropic media. - The Hague, Martinus Nijhoff publisher, 1983. 192 p.
  32. Jain G. Main. Vibration and waves in Physics. - Cambridge Univers. press, 1984, 356 p.
  33. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. - М.: Наука, 1984. 256 с.
  34. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. - М.: Наука, 1986. 328 с.
  35. Бабешко В.А., Гуляков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. - М.: Наука, 1989. 343 с.
  36. Doyle J.F. Wave propagation in structures. - Springer-Verlag: 1989. 258 p.
  37. Norman G. Eibspruch, E.J. Witterholt, Rohn Truell Scattering of a plane transverse wave by a spherical obstacle in an elastic medium. - Journ. of Appl. Physics, 1960, vol. 31, No 5, 806-818.
  38. Смирнов В.И. О сингулярных решениях волнового уравнения и уравнений упругости. - Тр. Сейсм. Института АН СССР, 1936, 78.
  39. Петрашень Г.И., Смирнов Н.С., Гельцинский Б.Я. Некоторые задачи динамической теории упругости для сред, содержащих цилиндрические и сферические границы раздела. - Учен. зап. ЛГУ, серия мат. наук, 1953, вып. 27, 170, 221-265.
  40. Петрашень Г.И. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. - Л.: Наука, 1978, вып. 18. 248 с.
  41. Бабич В.М. Фундаментальные решения динамических уравнений теории упругости для неоднородной среды. - ПММ, 1961, т. 25, вып. 1, 38-45.
  42. Бабич В.М., Молотков И.А. Математические методы в теории упругих волн. Механика деформируемого тела. - ВИНТИ, т. 1, 1977, 5-62.
  43. Михлин С.Г. Фундаментальные решения динамических уравнений теории упругости для неоднородной среды. - ПММ, 1947, т. 11, вып. 4, 423-432.
  44. Miklowitz J. Elastic wave propagation. - Applied Mech. Surveys. Spartan Books. Washington D.C. 1966, 809-839.
  45. Aggarwal H.R., Ablow C.M. Solution to a class of three-dimensional pulse propagation problems in an elastic half-space. - Intern. Journ. Eng. Sci., 1967, vol. 5, No. 8, 663-679.

46. *Singe J.L. Elastic waves in anisotropic media.- Journ. of Math. and Physics., 1957, vol.35, No.4, 323-334.*
47. *Buchwald V.T. Elastic waves in anisotropic media. Proceed.-Royal Soc. of London (A), 1959, vol.253, No.1275, 563-580.*
48. *Lim T.C., Farnell G.W. Character of Pseudo surface waves on Anisotropic Crystals. -Journ.Acoust.Soc. of Amer., 1969, vol. 45, No. 4, 845-851.*
49. Голдсмит В., Рикетс Т. Поверхностные волны в анизотропном полупространстве. В сб. -Успехи механики деформируемых сред, -М.: Изд. Наука, 1975, 145-156.
50. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. -Л.: Наука, 1980, 280с.
51. Петрашень Г.И. (Под редакцией). Распространение объемных волн и методы расчета волновых полей в анизотропных упругих средах. Сборник научн.трудов Л. Наука, 1984, 282с.
52. *Clements D.L. A note on surface waves in anisotropic media.- Acta mechanica, 1985, vol.56, No. 1/2, 31-40.*
53. *Chadwick P. Wave propagation in transversely isotropic elastic media. Parts 1-3, Proceed. of the Royal Soc. London(A), 1989, vol.422, No.1862, 23-121.*
54. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. -М.: Изд. АН СССР, 1957. 502 с.
55. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. -М.: Наука, второе издание, 1973, 343 с.
56. *Ewing M., Jardetzky W., Press F. Elastic waves in layered media.- New York, McGraw-Hill Book Co., 1957, 380 p.*
57. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М. Изд.ИЛ, 1955. 192 с.
58. Миндлин Я.А. Распространение волн по поверхности бесконечно длинного кругового цилиндра. -ДАН СССР, 1946, т.52, 2, 107-110.
59. Миндлин Я.А. Распространение волн по поверхности бесконечно длинного кругового цилиндра, представляющего собой вырез в бесконечном упругом пространстве.- ДАН СССР, 1944, т.42, 4, 155-159.
60. *Biot M.A. Propagation of elastic waves in a cylindrical bore containing a fluid.- Journ. of Appl. Physics, 1952, vol.23, No.9, 997-1005.*
61. Миндлин Я.А. Свободные упругие волны на поверхности трубы бесконечной толщины. -ПММ, 1963, т.27, вып.3, 551-554.
62. Абрамян Б.Л., Георгян Г.З. Несимметричная задача о распространении упругих волн в пространстве с цилиндрической полостью.- ДАН Арм. ССР, 1986, т.83, 2, 73-77.
63. *Love A.E.H. Some problems of geodynamics. -Cambr.Univers.Press, 1926, 180 p.*
64. *Stoneley R. The elastic waves at the interface of separation of two solids. -Proceed. Royal Soc. London (A), 1924, vol.106, No.732, 416-429.*
65. *Buchwald V.T. Rayleigh waves in transversely isotropic media.- Quart.Journ.Mech. and Appl. Math., 1960, vol.14, part 3, 293-317.*
66. *Buchwald V.T. Rayleigh waves in anisotropic media.-Quart.Journ. Mech. and Appl. Math., 1960, vol. 14, part 4, 461-469.*
67. Бабич В.М., Кирпичникова Н.Я. О распространении волн Рэлея по поверхности неоднородного тела произвольной формы. -Ж. вычислительной математики и математической физики. 1962, т.2, 4, 652-665.
68. Бабич В.М., Молотков Н.А. О распространении волн Лява в упругом полупространстве, неоднородном по двум координатам. -Изв.АН СССР, Физика земли, 1966, 6, 34-38.
69. Мухина И.В., Молотков Н.А. О распространении волн Рэлея в упругом полупространстве, неоднородном по двум координатам. -Изв. АН СССР, Физика земли, 1967, 4, 3-8.
70. Крауликс П.В. К оценке интенсивности поверхностных волн Рэлея и Стоули на неоднородной трассе. -В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 2. Записки научн. семинаров ЛОМН, Л.: Изд. Наука, 1969, т.15, 115-121.
71. Белубекян М.В. Обусловии существования волн Стоули при скользящем контакте. Изв.АН Арм. ССР, Механика, 1990, т.43, 1, 52-56.
72. Белубекян М.В. О распространении упругих сдвигных волн вдоль периодически неровной поверхности. -ДАН Арм. ССР, 1990, т.90, 2, 71-74.
73. Бабич В.М., Кирпичникова Н.Я. К вопросу о волнах Рэлея, распространяющихся вдоль поверхности неоднородного упругого тела. -В кн. Математические вопросы теории распространения волн. 16. Записки научн. семинаров ЛОМН, Л.: Наука, 1986, т.156, 20-23.
74. Бабич В.М., Янсон Э.А. О распространении волн Лява вдоль поверхности упругого тела произвольной формы. -Изв. АН СССР, Физика земли, 1985, 5, 17-27.
75. *Pinney E. Surface motion due to a point source in a semi-infinite elastic medium.-*

- Bull. Seismol. Society Amer. 1954, vol. 44, No. 4, 571-596.
76. Янсон З.А. Нестационарные волны типа Рэлея вблизи поверхности неоднородного упругого тела. - В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 16. Записки научн. семинаров ЛОМН, Л.: Наука, 1986, т. 156, 168-183.
  77. Шемякин Е.И., Файншмидт В.А. Распространение волн в упругом полупространстве, возбужденном поверхностной касательной силой. - Учен. зап. ЛГУ, сер. мат. наук, 1954, вып. 28, 177, 148-179.
  78. Pekeris C.L. The seismic buried pulse. - *Proceed. National Acad. Sci.*, 1955, vol. 41, 629-639.
  79. Pekeris C.L., Lifson H. Motion of the surface of a uniform elastic half-space produce by a buried pulse. *Journ. of the acoust. Soc. Amer.*, 1957, vol. 29, No. 11, 1233-1238; errata, 1958, vol. 30, p. 365.
  80. Алексеев А.С. Задачи типа Лэмба для волнового уравнения в линейно неоднородном полупространстве. - Учен. зап. ЛГУ, сер. мат. наук, 1958, 246, 167-227.
  81. Шемякин Е.И. Задача Лэмба для внутреннего источника. - ДАН СССР, 1961, т. 140, 4, 780-782.
  82. Описко Н.И., Шемякин Е.И. Движение свободной поверхности однородного грунта при подземном взрыве. *Ж. прикл. механики и технической физики.*, 1961, 4, 82-93.
  83. Thiruvengadacher V.R., Viswanathan K. Dynamic response of an elastic half-space to time-dependent surface tractions over an embedded spherical cavity. *Proceed. Royal Soc. of London (A)*, 1965, vol. 287, No. 1411, 549-567.
  84. Гольдштейн Р.В. Волны Рэлея и резонансные явления в упругих телах. - ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, 516-525.
  85. Саакян С.Г. Динамическая задача для границы упругого однородного изотропного полупространства при сильном взрыве на поверхности. - Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1973, т. 26, 5, 20-35.
  86. Саакян С.Г. Волны в упругом полупространстве, вызванные бегущей осесимметричной нормальной нагрузкой. - Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, 1, 18-38.
  87. Саакян С.Г. О распространении осесимметричных ударных волн в слоисто-неоднородной среде. - Изв. АН СССР, Механика, 1987, т. 40, 4, 40-45.
  88. Саакян С.Г. Распространение волн в радиально-неоднородном упругом шаре. - Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1990, т. 43, 1, 36-43.
  89. Wolf W. Propagation of Love waves in surface layers of varying thickness. *Pure and Appl. Geophysics*, 1967/11, vol. 67, 76-82.
  90. Bhattacharya S. On the propagation of certain types of surface waves in a non-homogeneous elastic layer. - *Pure and Appl. Geophysics*, 1969, vol. 73, febr., 93-98.
  91. Sinha N.K. Propagation of Love Type waves in non-homogeneous layer lying over a vertically semi-infinite homogeneous isotropic medium. - *Pure and Appl. Geophysics*, 1969, vol. 73, febr., 47-59.
  92. Boore D.M. Love waves in a non-uniform waveguide: Finite difference calculation. - *Journ. of Geophys. Research.*, 1970, vol. 75, 1512-1527.
  93. Peing-Fei Gou. Interfacial and Love-type waves in materials with monoclinic elastic symmetry. - *Journ. Acoust. Soc. Am.*, 1970, vol. 47, No. 3, (part 2), 777-780.
  94. Lysmer J., Drake L.A. The propagation of Love waves across non horizontally layered structures. - *Bull. of Seismol. Soc. Amer.*, 1971, vol. 61, No. 5, Oct., 1233-1251.
  95. Bhattacharya S.N. Exact solution of SH wave equation in transversely isotropic inhomogeneous elastic media. - *Pure and Appl. Geophysics*, 1972, vol. 93, No. 1, 19-35.
  96. Simens D.A. Scattering of a Love wave by the edge of a Thin surface layer. - *Journ. Appl. Mech.*, 1975, vol. 42, No. 4, 842-846.
  97. Kalyanasundaram N. Finite-amplitude Love waves on an isotropic layered half-space. - *Intern. Journ. of Eng. Soc.*, 1981, vol. 19, No. 2, 287-293.
  98. Кессених Г.Г. Поверхностные волны Лява для двух изотропных слоев на изотропной подложке. - *Акустический журнал*, 1984, т. 30, вып. 1, 74-77.
  99. Геворкян А.В. Об одной задаче дифракции волн Лява. В кн.: Материалы 2-ой Всесоюз. научно-техн. конферен. - Прочность жесткость и технологичность изделий из композитных материалов. Ереван, 1984, т. 1, 162-167.
  100. Asgar S., Zanton F.D. Diffraction of Love waves by a finite rigid barrier. - *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 1986, vol. 76, Febr., No. 1, 241-257.
  101. Алексеев А.С., Михайленко Б.Г. О задаче Лэмба для неоднородного полупространства. - ДАН СССР, 1974, т. 214, 1, 84-86.
  102. Алексеев А.С., Михайленко Б.Г. Решение задачи Лэмба для вертикально-неоднородного упругого полупространства. - Изв. АН СССР, Физика земли, 1976, 12, 11-25.

103. Григорян С.С., Череди́ченко Р.А. Распространение упругих волн в слоистом полупространстве, вызываемых поверхностной динамической нагрузкой. - *Изв. АН СССР, МТТ*, 1976, т. 11, 1, 111-118.
104. Burridge R. Lamb's problem for an anisotropic half-space. - *Quart. Journ. Mech. and Appl. Math.*, 1971, vol. 24, part 1, 81-98.
105. Петра́шень Г.И., Мо́лотко́в И.А., Крау́клис П.В. Волны в слоисто-однородных упругих телах. Метод контурных интегралов в нестационарных задачах динамики. - *Л.: Наука*, 1982. 288 с.
106. White J.E. Elastic waves along a cylindrical bore. *Geophysics*, 1962, vol. 27, 327-333.
107. Ко́шова А.Н. Дифракция неустановившихся упругих волн на цилиндрической полости. - *Изв. АН СССР, МТТ*, 1976, 4, 115-121.
108. Flax L., Neubauer W.G. Reflection of elastic waves by a cylindrical cavity in an absorptive medium. - *Journ. Acoust. Soc. Amer.*, 1978, vol. 63, No. 3, 675-680.
109. Dutta S.K., Akily E.N. Diffraction of elastic waves by cylindrical cavity in a half-space. - *Journ. Acoust. Soc. Amer.*, 1978, vol. 64, No. 6, 1692-1699.
110. Dutta S.K., Wong K.C., Shah A.H. Dynamic stresses and displacements around cylindrical cavities of arbitrary shape. - *Journ. Appl. Mech.*, 1984, vol. 51, No. 4, 798-803.
111. Burden A.D. Propagation of elastic surface waves along cylindrical cavities of general cross section. *Wave motion*, 1985, vol. 7, No. 2, 153-168.
112. Зо́лотарева Л.И. Изучение особенностей некоторых интегральных уравнений динамических задач теории упругости для полубесконечных шахт. - *В сб.: Исследования по механике твердого деформируемого тела*, Ереван, Изд. АН Арм. ССР, 1981, 140-146.
113. Па́нфоров И.В. Распространение длинных импульсов продольных деформаций в трубе из трансверсально изотропного материала. - *Вестник МГУ, сер. I*, 1989, 3, 42-45.
114. Викто́ров И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. - *М.: Наука*, 1966. 168 с.
115. Викто́ров И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. - *М.: Наука*, 1981. 288 с.
116. Ильи́шин А.А., Ра́шинкин Т. Р. О действии сейсмической волны на подземный трубопровод. - *Изв. АН Узбек. ССР, сер. техн.*, 1971, 1, 37-42.
117. Ни́кишин Л.В., Ти́ораходжаев А.Н. Воздействие волны в грунте на подземный трубопровод. - *Изв. АН СССР, МТТ*, 1987, 1, 98-106.
118. Леви́шин А.Л. Поверхностные и каналные сейсмические волны. - *М.: Изд. Наука*, 1973. 115 с.
119. Miklowitz J. Recent developments in elastic wave propagation. - *Appl. Mech. Reviews*, 1960, vol. 13, No. 12, 865-878.
120. Зо́линский Н.В., Рейтма́н М.Г., Ша́пиро Г.С. Динамика деформируемых тел. В кн.: *Механика в СССР за 50 лет*, т. 3, М.: Изд. Наука, 1972, 291-323.
121. Scott R.A. Linear elastic wave propagation: An annotated bibliography. Part 1, Shock and vibration digest (Washington D.C.), 1978, vol. 10, Febr., No. 2, 25-41.
122. Scott R.A. Linear elastic waves propagation: An annotated bibliography, Part 2, Shock and vibration digest (Washington D.C.), 1978, vol. 10, March, No. 3, 11-39.
123. Ting T.C.T. Dynamic response of composites. - *Appl. Mech. Reviews*, 1980, vol. 33, No. 12, 1629-1635.
124. Pao Y.H. Elastic waves in solids. - *Journ. of Appl. Mechanics*, 1983, vol. 50, N4, 1152-1162.

Институт механики АН Армении  
Поступила в редакцию 30. 10. 1991