

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԲԸ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1991

К РАСПРОСТРАНЕНИЮ ТРЕЩИНЫ В СОСТАВНОМ АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А.

Բագդոև Ա.Գ., Մովսիսյան Լ.Ա. Բաղադրյալ աֆիզոտրոպ տարածությունում ճաքի տարածման մասին

Bagdoyev A.G., Movsisian L.A. About crack propagation in compound anisotropic space

Դիտարկվում է տարբեր առանձնահատկություններով երկու աֆիզոտրոպ կիսատարածություններից յաղկացած տարածությունում, ճաքի տարածման ճակատարք խնդիրը: Խնդիրը լուծվում է Վրենը-Հոպֆի մեթոդով: Ճաքի եզրերում որոշվում է լարումների ինտենսիվության գործակիցը և ճառարերակաց տեղափոխությունները:

Изучается антиплоская задача о распространении трещины в пространстве, состоящем из двух полупространств с различными анизотропными упругими свойствами. Задача решается методом Винера-Хопфа. Определяется коэффициент интенсивности напряжений и относительные перемещения у берегов трещины.

Изучается антиплоская задача о распространении трещины в пространстве, состоящем из двух полупространств с различными анизотропными упругими свойствами. Аналогичная задача для однородной среды (анизотропной) рассматривалась в [1]. В [2] изучалось распространение трещины в вязкоупругом составном пространстве (изотропном).

1. Пусть при $t = 0$ в полуплоскостях (xy) , представляющих границы трещины, начинает действовать постоянное сдвиговое напряжение T , которое вызывает раскрытие и распространение трещины с постоянной скоростью c .

Уравнения движения для компонент перемещений, перпендикулярных к плоскости (xy) , запишутся [1]

$$\begin{aligned}
 a_{11}^{(i)2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + 2a_{12}^{(i)2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} + a_{22}^{(i)2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \\
 \tau_{xz}^{(i)} &= a_{44}^{(i)2} \frac{\partial u_i}{\partial x} + a_{45}^{(i)2} \frac{\partial u_i}{\partial y} \\
 \tau_{yz}^{(i)2} &= a_{45}^{(i)2} \frac{\partial u_i}{\partial x} + a_{55}^{(i)2} \frac{\partial u_i}{\partial y} \\
 a_{11}^{(i)2} &= \frac{a_{44}^{(i)}}{\rho_i}, \quad a_{22}^{(i)2} = \frac{a_{55}^{(i)}}{\rho_i}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$a_{12}^{(1)2} = \frac{a_{45}^{(1)}}{\rho_1}.$$

Тогда граничные условия на $y = 0$ будут иметь вид:

$$\tau_{yz}^{(1)} = TH(c t - x) H(t), \quad x \leq ct \quad (1.2)$$

$$u^{(1)} = u^{(2)}, \quad \tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)}, \quad x > ct.$$

Введем новую переменную $\xi = x - ct$ и сделаем преобразования Лапласа и Фурье по t и ξ

$$\bar{u}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} u_1 \exp[-s(t + \lambda \xi + \alpha_1 y)] dt d\xi \quad (1.3)$$

Тогда из (1.1) и (1.2) можно получить

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{yz} &= (a_{12}^{(1)2} \lambda + \alpha_1 a_2^{(1)2}) s u_1 \\ &= \frac{T}{s^2 \rho_1} \left(\frac{1}{\lambda} + T_+(\lambda) \right) \\ \bar{u}_1 - u_{1-} s^{-3} &= \bar{u}_2 - u_{2-} s^{-3} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $T_+(\lambda)$ и u_{i-} - преобразования от $\tau_{yz}(x, 0, t)$ и $u_i(x, 0, t)$ соответственно на правой и левой осях ξ и аналитичные в правой и левой полуплоскостях λ

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{a_2^{(1)2}} \left[-a_{12}^{(1)2} \lambda \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{a_{12}^{(1)2} (1 - \lambda c)^2 - a^{(1)2} \lambda^2} \right] \\ a^{(1)2} &= a_1^{(1)2} a_2^{(1)2} - a_{12}^{(1)4} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Систему (1.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta u_- &= T \left(\frac{1}{\lambda} + T_+(\lambda) \right) K \\ K &= K_+ K_- = \frac{\rho_2 \gamma_2 - \rho_1 \gamma_1}{\rho_2 \gamma_2 \rho_1 \gamma_1} \\ \gamma_1 &= \sqrt{a_2^{(1)2} (1 - \lambda c)^2 - a^{(1)2} \lambda^2} \\ \Delta u_- &= s^3 (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Решая (1.6) методом Винера-Хопфа, можно получить

$$T_+(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{K_+(0)}{K_-(\lambda)} \right) \quad (1.7)$$

Для определения $K_{\pm}$ представим K в виде

$$K = \frac{1 - \xi}{\rho_1 \gamma_1} L(\lambda) = \frac{1 - \xi}{\rho_1 \gamma_1 - \gamma_{1+}} L_+ L_-$$

$$\xi = \frac{\rho_1 \gamma_1(\infty)}{\rho_2 \gamma_2(\infty)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{a_2^{(1)2} c^2 - a^{(1)2}}{a_2^{(2)2} c^2 - a^{(2)2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$L_{\pm}(\lambda) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - \frac{1}{2}i}^{\infty - \frac{1}{2}i} \frac{\ln L(\lambda')}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \right] \quad (1.8)$$

Для вычисления последнего интеграла, принимая $a_2^{(2)} > a_2^{(1)}$, проведя разрезы в комплексной плоскости λ от $-a_2^{(2)}$ до $-a_2^{(1)}$ и от $a_2^{(1)}$ до $a_2^{(2)}$ и воспользовавшись представлением

$$\gamma_{1+} \gamma_{1-} = \sqrt{[a_2^{(1)} + \lambda(a^{(1)} - a_2^{(1)}c)][a_2^{(1)} - \lambda(a^{(1)} + a_2^{(1)}c)]}$$

можно получить [3]

$$L_+(\lambda) = \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_{b_1}^{b_2} \operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{X_1}{X_2}} \frac{d\lambda'}{\lambda' - \lambda} \right] \quad (1.9)$$

где для $i = 1, 2$,

$$X_i = [(\lambda'c - 1)a_2^{(i)}]^2 - (\lambda'a_2^{(i)})^2$$

$$K_+(\lambda) = L_+(\lambda) \frac{\sqrt{1 - \xi}}{\rho_1 \gamma_{1+}} \quad b_1 = -\frac{a_2^{(1)}}{a^{(1)} - a_2^{(1)}c}$$

$$\gamma_{1+} = \sqrt{a_2^{(1)} + \lambda(a^{(1)} - a_2^{(1)}c)} \quad (1.10)$$

Подставляя (1.4) в (1.7), получим

$$\tau_{yz} = \frac{T}{\lambda s^2} \frac{K_+(0)}{K_+(\lambda)} \quad (1.11)$$

Представляет интерес значение τ_{yz} в точке $\xi = +0$ ($\lambda \rightarrow \infty$), которое дает величину коэффициента интенсивности напряжений

$$\tau_{yz}(\lambda \rightarrow \infty) = \frac{T}{\sqrt{\lambda b_1} s^2} L_+(0) \quad (1.12)$$

Используя обратное преобразование Фурье [4]

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\xi} \Gamma(1/2)} & \xi \geq 0 \\ 0 & \xi < 0 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{s\lambda}} \quad (1.13)$$

можно получить

$$\tau_{yz}(\xi \rightarrow 0, 0, t) = \frac{L_+(0) T \sqrt{t}}{\sqrt{\xi} \Gamma(1/2) \Gamma(3/2)} \frac{\sqrt{a^{(1)} - a_2^{(1)} c}}{\sqrt{a_2^{(1)}}} \quad (1.14)$$

2. Для определения Δu_- , из (1.6) имеем

$$\Delta u_- = \frac{T}{\lambda} K_+(0) K_-(\lambda) \quad (2.1)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta \bar{u} = \bar{u}_1 - \bar{u}_2 = - \frac{T}{\rho_1 s^3 \sqrt{(-\lambda)^2}} \\ \times \frac{(1-\xi) L_+(0) L_-(\lambda)}{\gamma_{1+}(0) [a^{(1)} - a_2^{(1)} c]^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Величина обратного преобразования Фурье этой разности при $\xi = 0$ будет ($L(\infty) = 1$)

$$\delta \bar{u} = \frac{2 T \sqrt{-\xi}}{\rho_1 s^{3/2} \Gamma(1/2)} \frac{(1-\xi) L_+(0)}{\gamma_{1+}(0) [a^{(1)} - a_2^{(1)} c]^{1/2}} \quad (2.3)$$

Оттуда для разности перемещений получится

$$\begin{aligned} u_1(\xi \rightarrow 0, 0, t) - u_2(\xi \rightarrow 0, 0, t) = \frac{2 T (-\xi t)^{1/2}}{\rho_1 \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})} \\ \times \frac{(1-\xi) L_+(0)}{[a_2^{(1)} (a^{(1)} - a_2^{(1)} c)]^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

3. Для получения условия распространения первоначально неподвижной трещины воспользуемся условием Ирвина [5]. Поэтому вычислим энергию на единицу длины по ξ на продолжении трещины

$$\frac{\Delta U|_{y=0}}{\Delta x} \geq 2\sigma \quad (3.1)$$

где σ - энергия разрушения.

$$\Delta U|_{y=0} = \int_0^{\Delta x} \tau_{yz}(y=0)(u_1 - u_2)\xi \rightarrow \xi - \Delta x d\xi \quad (3.2)$$

Подставляя (1.14) и (2.4) в (3.2), получим

$$\frac{\tau^2 L^2(0)(1-\xi)}{\rho_1 \pi^2 a_2^{(1)}} = \sigma \quad (3.3)$$

Из (3.3) и (1.9) при $c = 0$ получится условие возникновения трещины. Интересно отметить, что для однородной среды $\xi = 1$ (3.3) вырождается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. Приближенное решение антиплоской анизотропной задачи о распространении трещины. - *Механика, междуз. сб. н.тр.*, вып.7, 1989, с.48-56.
2. Coussy O. A moving Crack Problem Along the Interface of the Viscoelastic Media. - *Int. J. Engng. Sci.*, vol. 25, 1987, 5, pp. 609-620.
3. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. - М.: Изд.-во иностр. лит., 1962. 279 с.
4. Бейтмен Г. и Эрдейи П. Таблицы интегральных преобразований. Т.1. - М.: Наука, 1969. 343 с.
5. Седов Л.Н. Механика сплошной среды. Т.2. - М.: Наука, 1970. 568 с.

Институт механики АН Армении
Поступила в редакцию 24.12.1990

ГЛУНИ. В.Ц., ОГАНИСЯН З.Б.

Q

рода, I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя,

$$\lambda = \frac{2R^2}{h} \omega \sqrt{\frac{3\rho(1-\nu^2)}{E}}$$

- приведенная частота собственных колебаний.

Наиболее общие осесимметричные граничные условия на краю $r = \text{const}$ представляются в виде

$$w = A_{11}^{(i)} T_n + A_{12}^{(i)} M_n$$

$$\frac{dw}{dr} = A_{21}^{(i)} T_n + A_{22}^{(i)} M_n \quad \text{при } r = \text{const.} \quad (1.3)$$

где $i = 1$ соответствует внешнему, а $i = 2$ — внутреннему краю

$$M_n = -\frac{D}{R^2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right)$$

- изгибающий момент

$$T_n = -\frac{D}{R^3} \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right)$$

- поперечное усилие при $r = \text{const}, z = 0$.

2. Рассмотрим кольцевую пластинку с внутренним диаметром R_0 , тогда условия (1.3) можно представить в виде

$$w = \alpha_{11} \frac{d^3 w}{dr^3} + \alpha_{12} \frac{d^2 w}{dr^2}$$

$$\frac{dw}{dr} = \alpha_{21} \frac{d^3 w}{dr^3} + \alpha_{22} \frac{d^2 w}{dr^2} \quad \text{при } r = 1 \quad (2.1)$$

$$w = \beta_{11} \frac{d^3 w}{dr^3} + \beta_{12} \frac{d^2 w}{dr^2}$$

$$\frac{dw}{dr} = \beta_{21} \frac{d^3 w}{dr^3} + \beta_{22} \frac{d^2 w}{dr^2} \quad \text{при } r = \frac{R_0}{R} = r_0 \quad (2.2)$$

где $\alpha_{mn} = \alpha_{mn}(D, R)$, $\beta_{mn} = \beta_{mn}(D, R, r_0)$ — подлежащие определению безразмерные коэффициенты упругого опирания краев данной пластинки, причем

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha_{11} \\ \beta_{11} \end{cases} &= -\frac{D}{R^3} \left(A_{11} + \frac{r \nu R D A_{12}^{(1)} A_{21}^{(1)} A_{21}^{(1)} - A_{11}^{(1)} A_{21}^{(1)}}{R^3 r^2 + r \nu R D A_{22}^{(1)} - A_{21}^{(1)}} \right) \\ \begin{cases} \alpha_{12} \\ \beta_{12} \end{cases} &= -\frac{D}{R^3} \left(\frac{1}{r} A_{11}^{(1)} + R A_{12}^{(1)} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{(r\nu R D A_{12}^{(1)} - A_{11}^{(1)})(r R A_{22}^{(1)} - A_{21}^{(1)})}{r(R^3 r^2 + r\nu R D A_{22}^{(1)} - A_{21}^{(1)})}$$

$$\begin{cases} \alpha_{21} \\ \beta_{21} \end{cases} = - \frac{D r^2 A_{21}^{(1)}}{R^3 r^2 + r\nu R D A_{22}^{(1)} - A_{21}^{(1)}}$$

$$\begin{cases} \alpha_{22} \\ \beta_{22} \end{cases} = - \frac{r D (A_{21}^{(1)} + r R A_{22}^{(1)})}{R^3 r^2 + r\nu R D A_{22}^{(1)} - A_{21}^{(1)}}$$

при $r = \text{const.}$

Здесь $i = 1$ соответствует краю $r = 1$, а $i = 2$ — краю $r = r_0$.

В случае шарнирного опирания края $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$, $\alpha_{22} = -r/\nu$, ($r = \text{const.}$) а в случае жесткой заделки $\alpha_{mn} = 0$.

Характеристическое уравнение для определения λ , в силу (1.2), (2.1), (2.2) получается в виде

$$|a_{ij}(\lambda, \alpha_{mn}, \beta_{mn})| = 0, \\ (i, j = 1, 2, 3, 4; m, n = 1, 2); \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} a_{1j} &= P_j^{(0)}(\lambda) - \alpha_{11} P_j^{(3)}(\lambda) - \alpha_{12} P_j^{(2)}(\lambda) \\ a_{2j} &= \lambda P_j^{(1)}(\lambda) - \alpha_{21} P_j^{(3)}(\lambda) - \alpha_{22} P_j^{(2)}(\lambda) \\ a_{3j} &= P_j^{(0)}(r_0 \lambda) - \beta_{11} P_j^{(3)}(r_0 \lambda) - \beta_{12} P_j^{(2)}(r_0 \lambda) \\ a_{4j} &= \lambda P_j^{(1)}(r_0 \lambda) - \beta_{21} P_j^{(3)}(r_0 \lambda) - \beta_{22} P_j^{(2)}(r_0 \lambda) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$P_1^{(k)}(\lambda r) = \frac{d^k}{dr^k} J_0(\lambda r) = J_0^{(k)}(\lambda r)$$

$$P_2^{(k)}(\lambda r) = \frac{d^k}{dr^k} Y_0(\lambda r) = Y_0^{(k)}(\lambda r)$$

$$P_3^{(k)}(\lambda r) = \frac{d^k}{dr^k} I_0(\lambda r) = I_0^{(k)}(\lambda r)$$

$$P_4^{(k)}(\lambda r) = \frac{d^k}{dr^k} K_0(\lambda r) = K_0^{(k)}(\lambda r)$$

Из (2.3) в случае жесткой заделки краев ($r = r_0, r = 1$) получается уравнение

$$\begin{vmatrix} J_0(\lambda) & Y_0(\lambda) & I_0(\lambda) & K_0(\lambda) \\ J_0^{(1)}(\lambda) & Y_0^{(1)}(\lambda) & I_0^{(1)}(\lambda) & K_0^{(1)}(\lambda) \\ J_0(r_0 \lambda) & Y_0(r_0 \lambda) & I_0(r_0 \lambda) & K_0(r_0 \lambda) \\ J_0^{(1)}(r_0 \lambda) & Y_0^{(1)}(r_0 \lambda) & I_0^{(1)}(r_0 \lambda) & K_0^{(1)}(r_0 \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.5)$$

первые четыре корня которого при $r_0 = 0,1$ есть

$$\lambda_1 = 5.22 ; \quad \lambda_2 = 8.68 ; \quad \lambda_3 = 12.2 \quad \lambda_4 = 15.7$$

В общем случае, когда на краях пластинки заданы условия типа (1.3), можно найти $\alpha_{\text{мл}}$, $\beta_{\text{мл}}$ и корни характеристического уравнения (2.3).

В случае обратной задачи, когда заданы λ_p , из (2.3) можно определить $\alpha_{\text{мл}}$, $\beta_{\text{мл}}$, а следовательно, восстановить граничные условия (1.3). Здесь необходимо знание восьми значений λ_p , и решение системы восьми уравнений (2.3) относительно $\alpha_{\text{мл}}$, $\beta_{\text{мл}}$.

В случае сплошной пластинки, из условия ограниченности решения в центре ($r = 0$) (4.2) представляется в виде

$$w(r) = a_1 J_0(\lambda r) + a_3 I_0(\lambda r)$$

где a_1 , a_3 подлежат определению из граничных условий (2.1).

Характеристическое уравнение (2.3) упрощается и представляется в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11}(\lambda, \alpha_{\text{мл}}) & a_{13}(\lambda, \alpha_{\text{мл}}) \\ a_{21}(\lambda, \alpha_{\text{мл}}) & a_{23}(\lambda, \alpha_{\text{мл}}) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

Отсюда в случае жесткой заделки края пластинки получается уравнение

$$\begin{vmatrix} J_0(\lambda) & I_0(\lambda) \\ J_0^{(1)}(\lambda) & I_0^{(1)}(\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.8)$$

первые четыре корня которого есть

$$\lambda_1 = 3.20 ; \quad \lambda_2 = 6.31 ; \quad \lambda_3 = 9.44 \quad \lambda_4 = 12.6 \quad (2.9)$$

Здесь для восстановления граничных условий на краю пластинки достаточно задать четыре значения λ_p .

Из (2.8) для определения искомых $\alpha_{\text{мл}}$, при заданных четырех значениях λ_p , получается система уравнений

$$Bx = yc + d \quad (2.10)$$

где

$$B = ||b_{ij}|| \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

$$y = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

$$x = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{21} \end{vmatrix} \quad c = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{vmatrix} \quad d = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{vmatrix}$$

$$b_{11} = J_0^{(1)}(\lambda_1) I_0^{(3)}(\lambda_1) - I_0^{(1)}(\lambda_1) J_0^{(3)}(\lambda_1)$$

$$b_{12} = J_0^{(1)}(\lambda_1) I_0^{(2)}(\lambda_1) - I_0^{(1)}(\lambda_1) J_0^{(2)}(\lambda_1)$$

$$b_{13} = J_0^{(3)}(\lambda_1) I_0(\lambda_1) - I_0^{(3)}(\lambda_1) J_0(\lambda_1)$$

$$b_{14} = J_0^{(2)}(\lambda_1) I_0(\lambda_1) - I_0^{(2)}(\lambda_1) J_0(\lambda_1)$$

$$c_1 = J_0^{(1)}(\lambda_1) I_0(\lambda_1) - I_0^{(1)}(\lambda_1) J_0(\lambda_1)$$

$$d_1 = J_0^{(1)}(\lambda_1) I_0(\lambda_1) - I_0^{(1)}(\lambda_1) J_0(\lambda_1)$$

3. Рассмотрим некоторые конкретные реализации предложенного алгоритма восстановления граничных условий.

Пусть искомые условия на краях кольцевой пластинки можно представить в виде

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{dw}{dr} &= A_{22}^{(1)} M_{22} \quad \text{при} \quad r = 1 \\ w = 0, \quad \frac{dw}{dr} &= A_{22}^{(2)} M_{22} \quad \text{при} \quad r = r_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

откуда

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{dw}{dr} &= \alpha_{22} \frac{d^2 w}{dr^2} \quad \text{при} \quad r = 1 \\ w = 0, \quad \frac{dw}{dr} &= \beta_{22} \frac{d^2 w}{dr^2} \quad \text{при} \quad r = r_0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{22} &= - \frac{D A_{22}^{(1)}}{R^2 + D \nu A_{22}^{(1)}} \\ \beta_{22} &= - \frac{D r_0 A_{22}^{(2)}}{R^2 r_0 + D \nu A_{22}^{(2)}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

В рассмотренном частном случае, имея два значения λ_p , для определения искомых α_{22} , β_{22} получается система

$$\begin{aligned} c_{11} \alpha_{22} + c_{12} \beta_{22} &= c_{13} \alpha_{22} \beta_{22} + d_1 \\ c_{21} \alpha_{22} + c_{22} \beta_{22} &= c_{23} \alpha_{22} \beta_{22} + d_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} c_{11} &= \lambda_1 s_{12}^{(1)}; & c_{12} &= \lambda_1 s_{21}^{(1)}; \\ c_{13} &= \lambda_1^2 s_{22}^{(1)}; & d_1 &= s_{11}^{(1)}; \end{aligned}$$

$$s_{ik}^{(i)} = \begin{vmatrix} J_0(\lambda_i) & Y_0(\lambda_i) & I_0(\lambda_i) & K_0(\lambda_i) \\ J_0^{(i)}(\lambda_i) & Y_0^{(i)}(\lambda_i) & I_0^{(i)}(\lambda_i) & K_0^{(i)}(\lambda_i) \\ J_0(r_0 \lambda_i) & Y_0(r_0 \lambda_i) & I_0(r_0 \lambda_i) & K_0(r_0 \lambda_i) \\ J_0^{(i)}(r_0 \lambda_i) & Y_0^{(i)}(r_0 \lambda_i) & I_0^{(i)}(r_0 \lambda_i) & K_0^{(i)}(r_0 \lambda_i) \end{vmatrix} \quad (i=1,2)$$

Если система (3.4) при заданных λ_p не имеет действительных решений, то рассмотренные λ_p не являются собственными значениями данной краевой задачи ни при каких граничных условиях. В случае, когда система (3.4) допускает две пары действительных решений, необходимо проверить возможность осуществления этих граничных условий. С этой целью определяется отношение $\delta = w/w_0$ для задачи изгиба рассмотренной пластинки под действием постоянного давления при полученных граничных условиях (w) и при жесткой заделке края (w_0). Если это отношение больше единицы, то полученные граничные условия реальны.

Рассмотрим конкретные примеры: пусть $r_0 = 0.1$, $\lambda_1 = 4.92$, $\lambda_2 = 8.38$ против $\lambda_1 = 5.22$; $\lambda_2 = 8.68$; для пластинки с жестко заделанными краями. В этом случае получается

$$\alpha_{22} = -8.09 \cdot 10^{-2}, \beta_{22} = -2.19 \cdot 10^{-4}; \delta(0.5) = 1.3;$$

или

$$\alpha_{22} = -2.17 \cdot 10^{-3}, \beta_{22} = 0.388; \delta(0.5) = 1.3$$

Полученные оба условия имеют смысл, т. к. $\delta > 1$. Отличие граничных условий от жесткой заделки заметно, т. к. прогибы пластинки на 30% увеличиваются.

Здесь заданные λ_p обеспечиваются поочередным ослаблением или усилением закрепления краев

$$|\alpha_{22}^{(1)}| > |\alpha_{22}^{(2)}|, \quad \beta_{22}^{(1)} < \beta_{22}^{(2)}$$

В случае $r_0 = 0.1$, $\lambda_1 = 4.61$, $\lambda_2 = 7.89$, получается

$$\alpha_{22} = 0.405 \cdot 10^{-2}, \beta_{22} = -5.09 \cdot 10^{-2}; \delta(0.5) = 0.23;$$

$$\alpha_{22} = -0.221, \beta_{22} = -2.13 \cdot 10^{-4}; \delta(0.5) = 1.6;$$

и только вторые значения α_{22} , β_{22} имеют смысл.

Пусть теперь край $r = r_0$ жестко заделан, а на краю $r = 1$ имеются условия

$$w = \alpha_{11} \frac{d^3 w}{dr^3}, \quad \frac{dw}{dr} = \alpha_{22} \frac{d^2 w}{dr^2} \quad (3.5)$$

где α_{11} , α_{22} подлежат определению по заданным двум значениям.

В этом случае для определения искомых α_{11} , α_{22} получается система

$$\begin{aligned} c_{11} \alpha_{11} + c_{12} \alpha_{22} &= c_{13} \alpha_{11} \alpha_{22} + d_1 \\ c_{21} \alpha_{11} + c_{22} \alpha_{22} &= c_{23} \alpha_{11} \alpha_{22} + d_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$c_{11} = \lambda_1^2 s_{31}^{(i)}; \quad c_{12} = \lambda_1 s_{02}^{(i)};$$

$$c_{22} = \lambda_1^4 s_{32}^{(i)}; \quad d_1 = s_{01}^{(i)};$$

$$x_{k0}^{(i)} = \begin{vmatrix} J_0^{(k)}(\lambda_1) & Y_0^{(k)}(\lambda_1) & I_0^{(k)}(\lambda_1) & K_0^{(k)}(\lambda_1) \\ J_0^{(e)}(\lambda_1) & Y_0^{(e)}(\lambda_1) & I_0^{(e)}(\lambda_1) & K_0^{(e)}(\lambda_1) \\ J_0(r_0 \lambda_1) & Y_0(r_0 \lambda_1) & I_0(r_0 \lambda_1) & K_0(r_0 \lambda_1) \\ J_0^{(1)}(r_0 \lambda_1) & Y_0^{(1)}(r_0 \lambda_1) & I_0^{(1)}(r_0 \lambda_1) & K_0^{(1)}(r_0 \lambda_1) \end{vmatrix}$$

$$(i = 1, 2)$$

В конкретном случае, когда $r_0 = 0.1$, $\lambda_1 = 5.08$, $\lambda_2 = 8.45$ получается

$$\alpha_{11} = 5.50 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{22} = -2.58 \cdot 10^{-2}, \quad \delta(0.5) = 1.15;$$

или

$$\alpha_{11} = -1.04 \cdot 10^{-2}, \quad \alpha_{22} = -8.60 \cdot 10^{-2}, \quad \delta(0.5) = 0.44;$$

Очевидно, что вторые значения α_{11} , α_{22} лишены смысла, т.к. $\delta(0.5) < 1$. Однако и здесь возможна пара λ_1 , λ_2 , которая может реализоваться при двух различных вариантах граничных условий. Так, например, при $r_0 = 0.1$, $\lambda_1 = 4.86$, $\lambda_2 = 8.21$ получается

$$\alpha_{11} = 2.44 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{22} = -9.28 \cdot 10^{-2}, \quad \delta(0.5) = 1.33;$$

или

$$\alpha_{11} = 8.92 \cdot 10^{-3}, \quad \alpha_{22} = -4.26 \cdot 10^{-2}, \quad \delta(0.5) = 1.87;$$

Здесь заданные λ_p обеспечиваются поочередным ослаблением или усилением граничных условий

$$|\alpha_{22}^{(1)}| > |\alpha_{22}^{(2)}|, \quad \alpha_{11}^{(1)} < \alpha_{11}^{(2)}$$

В случае сплошной пластинки ($r_0 = 0$), при $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$, $\lambda_4 = 12$ из (2.10) получается

$$\alpha_{11} = 7.69 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{22} = -9.18 \cdot 10^{-2},$$

$$\alpha_{12} = -6.60 \cdot 10^{-3},$$

$$\alpha_{21} = 7.93 \cdot 10^{-4}, \quad \delta(0) = 1.3$$

Полученные здесь граничные условия реальны, т.к. $\delta(0) > 1$. Закрепление края существенно ослаблено. Прогибы увеличиваются на 30%.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Тимошенко С., Янг Д., Уивер У. *Колебания в инженерном деле.* -М.:Машиностроение, 1985, 472 с
- 2 Бидерман В. *Прикладная теория механических колебаний.* -М.: Высшая школа, 1972, 414 с.

Институт механики АН Армении
Ереванский государственный университет
Поступила в редакцию 16.05.1991.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, БЛИЗКИХ ПО ФОРМЕ К ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ

КУКУДЖАНОВ С. Н.

Կուկուշանով Մ.Ն., ձեռով գլանալիճի՝ մուս, պատմում մակերեսային
ունեցող բազալթների կալուցանության որոշ նախքեր

Kukudjanov S.N., Some problems of shells' stability with a form near to cylindrical
Կուկուճյան Ս.Գ., Կազմային մակերևույթից համասեռ առաջա-
քայլված նորմալ ճնշման տակ զանգված ինչպես մաշ թաղանթի
էզերերին կիրառված նորմալ և շաշափող ճիգերի ազդեցության
զեպքում, ձեռվ զլանայինին մաս պտմման թաղանթի կայունության
նարքեր: Ուորի թաղանթների տեսության հիման վրա ստացված
են միջին երկարության թաղանթների կայունության լաճող
մաթեմատիկոմք: Հետազոտվում է միջին մակերևույթի ճնշի տարրեր
տեսքերի ազդեցությունը կրիտիկական ճնշման վրա:

Рассматриваются вопросы устойчивости гонимых оболочек вращения, близких по форме к цилиндрическим, находящихся под действием нормального давления, равномерно распределенного по боковой поверхности, а также нормальных и сдвигающих усилий, приложенных к краям оболочки. На основании теории положит оболочки получено разрешающее уравнение устойчивости оболочек средней длины

Рассматривается устойчивость тонких оболочек вращения, близких по форме к цилиндрическим, находящимся под действием нормального давления, равномерно распределенного по боковой поверхности, а также нормальных и сдвигающих усилий, приложенных к краям оболочки. Предполагается, что форма образующей срединной поверхности оболочки описывается достаточно гладкой, знакопостоянной функцией. На основании теории пологих оболочек получено разрешающее уравнение устойчивости оболочек средней длины. Приведенное уравнение более общее в сравнении с [1] и отличается дополнительным членом, который может иметь такой же порядок, как и другие члены уравнения. Критическая нагрузка определяется как наименьшее собственное число данного уравнения.

Исследовано влияние формы образующей срединной поверхности оболочки на критическое давление. Рассмотрены оболочки как положительной, так и отрицательной гауссовой кривизны. Приведены формулы и кривые зависимости критического давления от геометрических параметров оболочки. Дана формула для определения критического числа волн. Показано, что малые отклонения от цилиндрической формы (порядка толщины) существенно влияют на критическую нагрузку.

1. Рассмотрим оболочки, у которых срединная поверхность образована вращением некоторой достаточно гладкой кривой вокруг оси z_0 .

прямоугольной системы координат x_0, y_0, z_0 с началом в середине отрезка оси вращения (фиг.1). При этом радиус поперечного сечения срединной поверхности оболочки определяется равенством

$$R = r + \delta F(\xi) \quad (1.1)$$

где $\xi = z_0 / r$; $F(\xi)$ — положительная, достаточно гладкая функция, заданная на интервале $(-l/r, l/r)$ такая, что $F(\xi = \pm l/r) = 0$, $\max F(\xi) = 1$; $L = 2l$, r , h — длина, радиус и толщина оболочки; δ — максимальное отклонение от цилиндрической формы. При $\delta > 0$ образующая срединной поверхности имеет форму выпуклости, а при $\delta < 0$ — вогнутости. Рассматриваются оболочки средней длины $\{2\}$ и считается, что δ^2/r^2 , $\delta^2/l^2 \ll 1$.

Уравнение срединной поверхности в параметрическом представлении имеет вид

$$x_0 = R(\xi) \cos \varphi, \quad y_0 = R(\xi) \sin \varphi, \quad z_0 = r \xi \quad (1.2)$$

где φ — угловая координата. Отсюда нетрудно получить, что коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности будут $A^2 = r^2 + \delta^2 (F')^2$, $B^2 = [R(\xi)]^2$. На основании сделанных предположений в выражении A можно пренебречь вторым членом. Следовательно,

$$A \approx r, \quad B = R(\xi) \quad (1.3)$$

Главные радиусы кривизны имеют вид

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = -\frac{R''}{r^2}, \quad k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R(\xi)} \quad (1.4)$$

За основные уравнения устойчивости принимаем уравнения, соответствующие теории пологих оболочек

$$\nabla^4 w - E h \nabla_k^2 w = 0, \quad D \nabla^4 w - \nabla_k^2 \psi - Z = 0 \quad (1.5)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right]$$

$$\nabla_k^2 = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{B}{A} k_2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A}{B} k_1 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right]$$

$$Z = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(T_1^0 \frac{B}{A} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(T_2^0 \frac{A}{B} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(S^0 \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(S^0 \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right] \quad (1.6)$$

T_1^0 , T_2^0 — докритические меридиональное и окружное усилия; S^0 — сдвигающее усилие. Для рассматриваемых оболочек средней длины, близких по форме к цилиндрическим, потеря устойчивости основной формы рингоидов сопровождается слабовыраженным волнообразованием в осевом направлении в сравнении с окружным, поэтому справедливо отношение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \ll \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}, \quad (f = w, \Psi) \quad (1.7)$$

Подставляя в выражение (1.6) равенства (1.3), (1.4) и используя соотношения (1.7), а также близость R и r , получаем

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^3} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{(-R'')}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], \quad \nabla = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (1.8)$$

Используя выражения (1.8) для системы (1.5), получаем следующее разрешающее выражение:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\left(-\frac{R''}{r} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right] \\ + \left(-\frac{R''}{r} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + \left(\frac{R''}{r} \right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \\ - \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(i_1^0 \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(i_2^0 \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(s^0 \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(s^0 \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$\varepsilon = \frac{h^2}{12r^2(1-\nu^2)}, \quad i_1^0 = \frac{T_1^0}{Eh}, \quad s^0 = \frac{S^0}{Eh}$$

2. Для рассматриваемых оболочек докритическое напряженное состояние предполагается безмоментным и, следовательно, определяется на основании уравнений

$$\begin{aligned} (T_1^0 R)_\xi' + T_2^0 R = 0, \quad \frac{R}{R_1} T_1^0 + T_2^0 + Rq = 0 \\ (RS_\xi^0)' + R'S^0 = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из второго уравнения этой системы получаем

$$T_2^0 = - \left(\frac{R}{R_1} T_1^0 + Rq \right) \quad (2.2)$$

Подставляя это выражение в первое уравнение системы (2.1) и используя равенства (1.4), имеем

$$(T_1^0)_\xi' + a(\xi) T_1^0 + b(\xi) = 0 \quad (2.3)$$

$$a(\xi) = \left[\frac{R}{R_1} + R'' \frac{(-R'')}{r^2} \right], \quad R = r \left[1 + \delta \frac{F(\xi)}{r} \right]$$

$$b(\xi) = R'q \quad (2.4)$$

Общее решение уравнения (2.3), как известно, имеет вид

$$T_1^0 = \exp \left(- \int a(\xi) d\xi \right) \left[C + \int b(\xi) \exp \left(\int a(\xi) d\xi \right) d\xi \right] \quad (2.5)$$

упростим выражение (2.5), пренебрегая величинами второго порядка малости, учитывая, что $(\delta/r)^2 \ll 1$. Согласно выражению (2.4) получаем

$$\begin{aligned} \int a(\xi) d\xi &= \frac{\delta}{r} \rho(\xi) \\ \rho(\xi) &= F + \frac{\delta}{r} \left(F^2 + \int F'(\xi) F''(\xi) d\xi \right) \\ \exp \left(\int a(\xi) d\xi \right) &= \exp \left(\frac{\delta}{r} \rho(\xi) \right) \\ &\approx 1 + \frac{\delta}{r} \rho(\xi) = \rho_1(\xi) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \int b(\xi) \exp \left(\int a(\xi) d\xi \right) d\xi &= q\delta Q(\xi) \\ Q(\xi) &\approx F \left(1 + \frac{\delta}{2r} F \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Следовательно, равенство (2.5) можно представить в виде

$$T_1^0 = \frac{C + q r \frac{\delta}{r} Q(\xi)}{\rho_1(\xi)} \quad (2.8)$$

Если по краю оболочки приложено продольное усилие P :

$$T_1^0 \left(\xi = \frac{l}{r} \right) = P,$$

тогда

$$C = \rho_1 \left(\frac{l}{r} \right) P - q r \frac{\delta}{r} Q \left(\frac{l}{r} \right)$$

и, следовательно,

$$T_1^0 = P \rho_1 \left(\frac{l}{r} \right) / \rho_1(\xi) + \frac{q\delta}{\rho_1(\xi)} \left[Q(\xi) - Q \left(\frac{l}{r} \right) \right] \quad (2.9)$$

где $\rho_1(\xi)$, $Q_1(\xi)$ определяются соответственно равенствами (2.6), (2.7). Подставляя выражение (2.9) в равенство (2.2), получаем

$$\begin{aligned} T_2^0 &= -Rr \left[\frac{\delta}{r} F''(\xi) \left(P \rho_1 \left(\frac{l}{r} \right) / \rho_1(\xi) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q r}{\rho_1(\xi)} \left[Q(\xi) - Q \left(\frac{l}{r} \right) \right] \right] + q r \end{aligned}$$

В случае, если $P = 0$, то

$$T_1^0 = \frac{q\delta}{\rho_1(\xi)} \left[Q(\xi) - Q\left(\frac{l}{r}\right) \right]$$

$$T_2^0 = -\frac{qR}{\rho_1(\xi)} \left[1 + \left(\frac{\delta}{r}\right)^2 F''(\xi) \left[Q(\xi) - Q\left(\frac{l}{r}\right) \right] \right] \quad (2.10)$$

Пренебрегая во втором равенстве (2.10) вторым членом в сравнении с единицей и учитывая, что в рассматриваемых случаях $F\left(\frac{l}{r}\right) = 0$, получаем

$$T_1^0 = \frac{q\delta}{\rho_1(\xi)} Q(\xi), \quad T_2^0 = qR \quad (2.11)$$

Если по краю оболочки приложено сдвигающее усилие: $S^0\left(\frac{l}{r}\right) = S_0$, то, как известно, получаем $S^0 = S_0 \frac{r^2}{R^2}$.

В случае $q \neq 0, P = 0$, на основании соотношений (1.7), (2.11) получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(T_1^0 \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \ll T_2^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \quad (2.12)$$

Кроме того, учитывая близость R и r , можно принять $T_2^0 \approx qR$.

3. Рассмотрим оболочку, когда ее образующая определяется параболической функцией

$$F(\xi) = 1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \xi^2$$

Тогда учитывая соотношения (2.12), для случая $q \neq 0, P = 0, s^0 = 0$ уравнение (1.9) принимает вид

$$\epsilon \frac{\partial^3 w}{\partial \rho^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 4 \frac{\delta r}{l^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \rho^2} + 4 \frac{\delta^2 r^2}{l^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4} - \frac{qr}{Eh} \frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4} = 0 \quad (3.1)$$

Это уравнение отличается от уравнения, приведенного в [1], дополнительным четвертым членом, который согласно соотношению (1.7) может быть одного порядка с предыдущим членом этого уравнения. Поэтому оценим влияние этого члена.

Рассмотрим случай, когда края оболочки свободно оперты. В работе [1] показано, что выражения

$$u = A \sin(\lambda_m \xi) \sin(n\varphi), \quad v = B \cos(\lambda_m \xi) \cos(n\varphi), \\ w = C \cos(\lambda_m \xi) \sin(n\varphi) \quad (3.2)$$

с точностью до малых величин удовлетворяют этим граничным условиям.

Подставляя выражение (3.2) в уравнение (3.1), получаем

$$l^0 = \epsilon n^2 + \lambda_m^4 n^{-6} + 4 \frac{\delta r}{l^2} \lambda_m^2 n^{-4} + 4 \frac{\delta^2 r^2}{l^4} n^{-2}$$

$$l^0 = \frac{qr}{Eh}, \quad \lambda_m = \frac{m\pi r}{2l} \quad (3.3)$$

Без последнего слагаемого эта формула совпадает с формулой [1], а без двух последних слагаемых — с известной формулой для цилиндрической оболочки средней длины [2]. Из формулы (3.3) нетрудно видеть, что последний член влияет в сторону увеличения значения критического давления как для выпуклых, так и для вогнутых оболочек.

Найдем критическое значение $l^0 = l_c$, которое является наименьшим значением l^0 в зависимости от m и n .

Из выражения (3.3) нетрудно видеть, что при $\delta > 0$ наименьшее значение l^0 в зависимости от m будет при $m = 1$.

В случае $\delta < 0$ аналогично [1] нетрудно показать, что $m = 1$.

Обозначим $l^2 = x$, тогда выражение (3.3) примет вид

$$l^0 = cx + \lambda_1^4 x^{-3} + 4 \frac{\delta r}{l} \lambda_1^2 x^{-2} + 4 \frac{\delta^2 r^2}{l^4} x^{-1}$$

Определим минимум величины l^0 , как непрерывной функции от x ($x > 0$). Из выражения $(l^0)_x = 0$ получаем

$$x^4 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (3.4)$$

$$c = -4 \frac{\delta^2 r^2}{l^4} \epsilon^{-1}, \quad d = -8 \frac{\delta r}{l^2} \lambda_1^2 \epsilon^{-1}$$

$$e = -3 \lambda_1^4 \epsilon^{-1} \quad (3.5)$$

Известно, что корни уравнения (3.4) совпадают с корнями двух уравнений

$$x^2 + A_{\pm} \frac{x}{2} + y - \frac{d}{A_{\pm}} = 0$$

$$A_{\pm} = \pm \sqrt{8y - 4c} \quad (3.6)$$

$$x_{1,2} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \pm \sqrt{\frac{d}{\sqrt{8\alpha}} - \frac{\alpha}{2}}$$

$$x_{3,4} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \pm \sqrt{-\frac{d}{\sqrt{8\alpha}} - \frac{\alpha}{2}}$$

$$\alpha = y - \frac{\epsilon}{2} \quad (3.7)$$

где y — какой-либо действительный корень кубического уравнения

$$8y^3 - 4cy^2 - 8ey + (4c\epsilon - d^2) = 0 \quad (3.8)$$

Произведя замену переменной

$$z = y - \frac{\epsilon}{6} \quad (3.9)$$

приведем уравнение (3.8) к виду

$$z^3 + 3pz + 2q = 0 \quad (3.10)$$

$$q = -2 \left(\frac{\delta r}{l^2} \right)^2 \left[\lambda_1^4 - \frac{4}{27} \frac{\delta r}{l^2} \varepsilon^{-1} \right] \varepsilon^{-2}$$

$$p = \left[\lambda_1^4 - \frac{4}{9} \frac{\delta^4 r^4}{l^8} \varepsilon^{-1} \right] \varepsilon^{-1} \quad (3.11)$$

Если принять, что

$$(\pi/4)^4 \varepsilon \gg (\delta/l)^4 \quad (3.12)$$

то выражения (3.11) принимают вид

$$p = \lambda_1^4 \varepsilon^{-1}, \quad q = -2 \left(\frac{\delta r}{l^2} \right)^2 \lambda_1^4 \varepsilon^{-2} \quad (3.13)$$

Так как дискриминант уравнения (3.10) больше нуля, то имеем один действительный корень этого уравнения

$$z = \frac{2}{\pi} \lambda_1^2 \left(\frac{\pi}{2} \varepsilon^{-2} \right)^{1/3} \left[\sqrt[3]{2 \frac{\delta^2}{l^2} + \sqrt{4 \frac{\delta^4}{l^4} + \frac{\pi^4}{16} \varepsilon}} + \sqrt[3]{2 \frac{\delta^2}{l^2} - \sqrt{4 \frac{\delta^4}{l^4} + \frac{\pi^4}{16} \varepsilon}} \right]$$

используя условие (3.12), это выражение можно упростить

$$z = \frac{4}{3} \frac{\delta^2 r^2}{l^4} \varepsilon^{-1} \quad (3.14)$$

Тогда на основании (3.7), (3.9), (3.14) имеем

$$\alpha = z - \frac{c}{3} = \frac{8}{3} \frac{\delta^2 r^2}{l^4} \varepsilon^{-1} \quad (3.15)$$

Подставляя значения d и α согласно равенствам (3.5), (3.15) в выражения (3.7) получаем, что при $\delta < 0$ положительным корнем является только корень x_1 , а при $\delta > 0$ - только корень x_3 . В результате получаем

$$n_{\pm}^2 = \left[\sqrt{1.732 \varepsilon^{1/2} - 0.54 \left(\frac{\delta}{l} \right)^2} \pm 0.736 \frac{\delta}{l} \right] \lambda_1 \varepsilon^{-1/2} \quad (3.16)$$

Индекс (+) соответствует $\delta > 0$, а (-) - $\delta < 0$.

Следовательно, с точностью до малых величин получаем формулы для $n_{\pm}$, совпадающие с формулами [1]. Отсюда следует, что дополнительный член практически не влияет на критическое число волн.

При $\delta = 0$ из выражения (3.16) получаем известную формулу для цилиндрической оболочки $n_{\pm}^2 = 4\sqrt{3} \lambda_1^2 \varepsilon^{-1/4}$.

Оценим теперь количественное влияние дополнительного члена $\frac{4 \delta^2 r^2}{l^4 n^2}$ на величину критической нагрузки, определяемую формулой (3.3). Рассмотрим оболочку с геометрическими параметрами $l/r = 1$, $h/r = 10^{-2}$, $\delta/r = 10^{-2}$ и $\delta/r = -10^{-2}$. В этих случаях относительное расхождение с данными работы [1] составляет величина всего 2 - 3 %, тогда как для $\delta/r = 3 \cdot 10^{-2}$ расхождение составляет уже 12 %, а при $\delta/r = -3 \cdot 10^{-2}$ около 85 %. Следовательно, учет дополнительного члена может существенно повлиять на величину критической нагрузки и особенно, для вогнутых оболочек.

4. Рассмотрим другой практически интересный случай, когда

$$F(\xi) = [1 - (\frac{r}{l})^2 \xi^2]^2 \quad (4.1)$$

при этом, в отличие от предыдущего случая, $F'(\pm l/r) = 0$. В данном случае уравнение (1.10) будет с переменными коэффициентами.

Рассмотрим граничные условия свободного опирания. Учитывая, что коэффициенты уравнения зависят только от переменной ξ , а также, что имеется полная симметрия задачи в осевом направлении, ограничимся решением в виде ряда

$$w = \sin(n\varphi) \sum_{m=1,3,\dots} A_m \cos(\lambda_m \xi), \quad \lambda_m = \frac{m\pi r}{2l} \quad (4.2)$$

При решении использовался метод Бубнова - Галеркина. В результате процесса ортогонализации получаем следующую систему однородных алгебраических уравнений, записанную в матричном виде:

$$(C - \lambda E) A = 0, \quad C = [C_{im}], \quad A = [A_i]$$

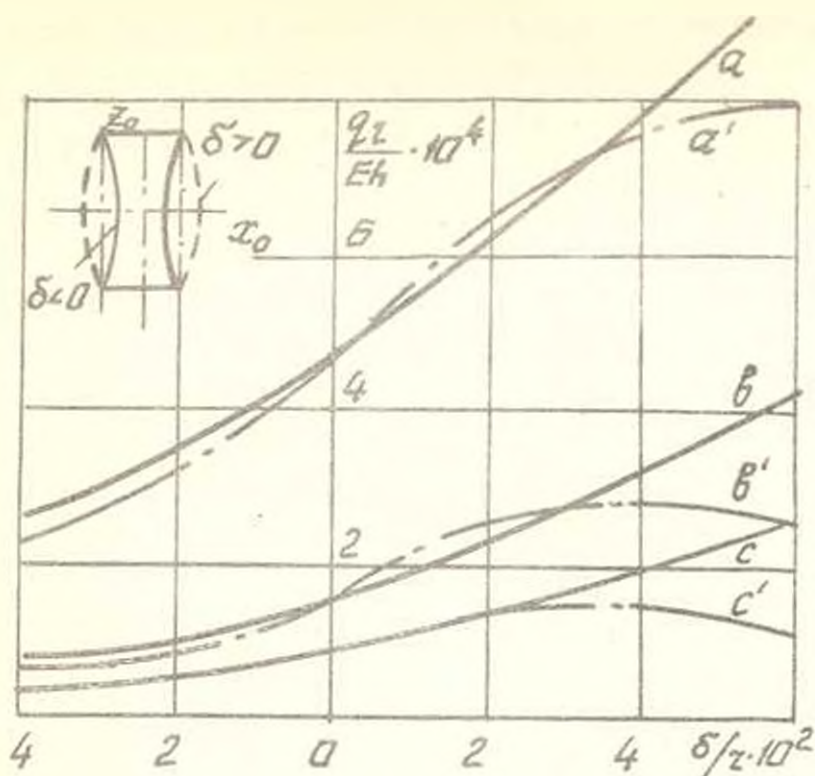
$$E = I, \quad \lambda = \frac{qr}{Eh}$$

$$C_{im} = \delta_{i,m} \theta_i + \Delta_{i,m} (1 - \delta_{i,m}), \quad i, m = 1, 3, 5, \dots$$

$$\theta_i = \epsilon n^2 + \lambda_i^4 n^{-6} + R_i, \quad \epsilon = \frac{h^2}{12r^2(1-\nu^2)}, \quad \lambda_i = \frac{i\pi r}{2l}$$

$$\Delta_{i,m} = 48 \frac{\delta}{r} \left(\frac{r}{l}\right)^4 (-ma_{m,i} + c_{m,i}) m n^{-4} + \frac{768}{\pi^4} \left(\frac{\delta}{r}\right)^2 \left(\frac{r}{l}\right)^4 (-a_{m,i} + 3b_{m,i}) n^{-2}$$

$$R_i = 12\pi^2 \frac{\delta}{r} \left(\frac{r}{l}\right)^4 \frac{1}{ln^6} + 16 \left(\frac{\delta}{r}\right)^2 \left(\frac{r}{l}\right)^4 \left[\left(\frac{12}{\pi^2 i^2} - 1\right) + \frac{9}{3} \left[1 - \frac{20}{\pi^2 i^2} \left(1 - \frac{6}{\pi^2 i^2}\right) \right] \right] n^{-2}$$



Фиг.1

$$a_{m,i} = \frac{\cos \frac{(m+i)\pi}{2}}{(m+i)^2} + \frac{\cos \frac{(m-i)\pi}{2}}{(m-i)^2}$$

$$c_{m,i} = \frac{\cos \frac{(m+i)\pi}{2}}{(m+i)} + \frac{\cos \frac{(m-i)\pi}{2}}{(m-i)}$$

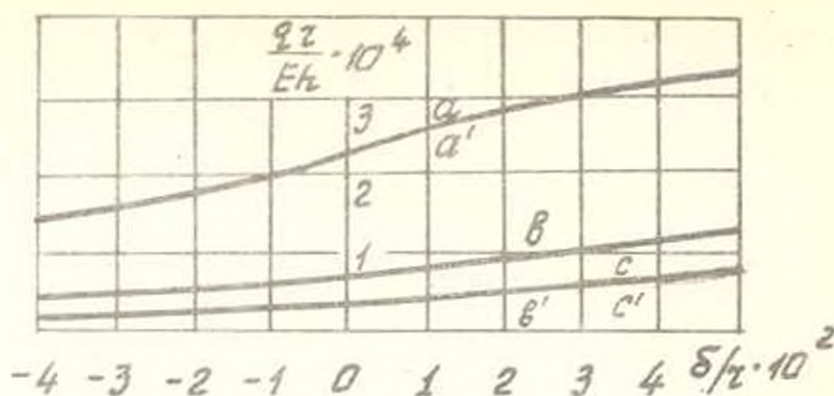
$$b_{m,i} = \cos \frac{(m+i)\pi}{2} \frac{(m+i)^2 - 6\left(\frac{2}{\pi}\right)^2}{(m+i)^4} + \cos \frac{(m-i)\pi}{2} \frac{(m-i)^2 - 6\left(\frac{2}{\pi}\right)^2}{(m-i)^4}$$

Таким образом, задача нахождения критической нагрузки сводится к определению наименьшего собственного значения матрицы $|C_{mi}|$ в зависимости от параметра n .

Ограничиваясь во втором приближении двумя членами ряда, получаем следующее выражение для меньшего корня:

$$\lambda^{(2)}(n) = \frac{\theta_1(n) + \theta_3(n)}{2} - \frac{\sqrt{[\theta_3(n) - \theta_1(n)]^2 + 4\Delta_{13}^2}}{2}$$

Учитывая интервалы убывания и возрастания функций θ_1 , θ_2 , Δ_{13} , нетрудно получить, что наименьшее значение $\lambda(n)$ ре-



Фиг.2

аллизуется в интервале $\mu_{\pm} \leq \mu \leq \mu_{03}$, где $\mu_{\pm}$ определяется равенством (3.16), а $\mu_{03} = \frac{3\pi r}{2l} \varepsilon^{-1/4}$.

Дальнейшие приближения рассчитывались на ЭВМ. Проведенные расчеты показали, что для получения практически точных результатов (когда расхождение между предыдущим и последующим приближениями составляет величина порядка 1%) для оболочек средней длины достаточно ограничиться вторым-третьим приближениями ($m = 1, 3, 5$).

На основании проведенных расчетов построены кривые зависимости qr/Eh от δ/r ($\delta > 0$ соответствует выпуклым оболочкам, а $\delta < 0$ — вогнутым). На фиг.1 для $l=r$ ($L=2l$) и различных толщин $\frac{h}{r} \cdot 10^2 = 1, 2, 3$, приведены соответственно кривые а, б, с, для формы образующей (3.1) и кривые а', б', с' для формы (4.1). Нетрудно заметить, что влияние различных форм образующих становится более существенным по мере уменьшения толщины и увеличения амплитуды отклонения δ для выпуклых оболочек, в то время как для вогнутых оболочек этого практически не происходит. На фиг.2 приведены кривые, когда $l=2r$ ($L=4r$), $\frac{h}{r} \cdot 10^2 = 1, 2, 3$ при этом кривые, соответствующие формам (3.1) и (4.1), практически сливаются, так как с увеличением длины оболочки влияние на критическую нагрузку различия форм образующей уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Даревский В.М. Устойчивость оболочки, близкой по форме к цилиндрической. Проблемы расчета пространственных конструкций. - М.: 1980, с. 35-45.
2. Волымир А.С. Устойчивость деформируемых систем. - М.: Физматгиз, 1967. 984 с.

Институт математики АН Грузии им. А.М. Размадзе
Поступила в редакцию 23.01.1991

О ПРЕДВЕСТНИКАХ ТЕКТОНИЧЕСКИХ КОРОВЫХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Мкртчян М.С., Тоноян В.С., Хачикян А.С.

Մկրտչյան Մ.Ս., Տոնոյան Վ.Ս., Խաչիկյան Ա.Ս. Հնդկաստանի կեղևային երկրաշարժերի կանխագշտման մասին

Khachikian A.S., Tonoyan V.S., Mkrtchian M.S. On the prediction of tectonic crust earthquakes

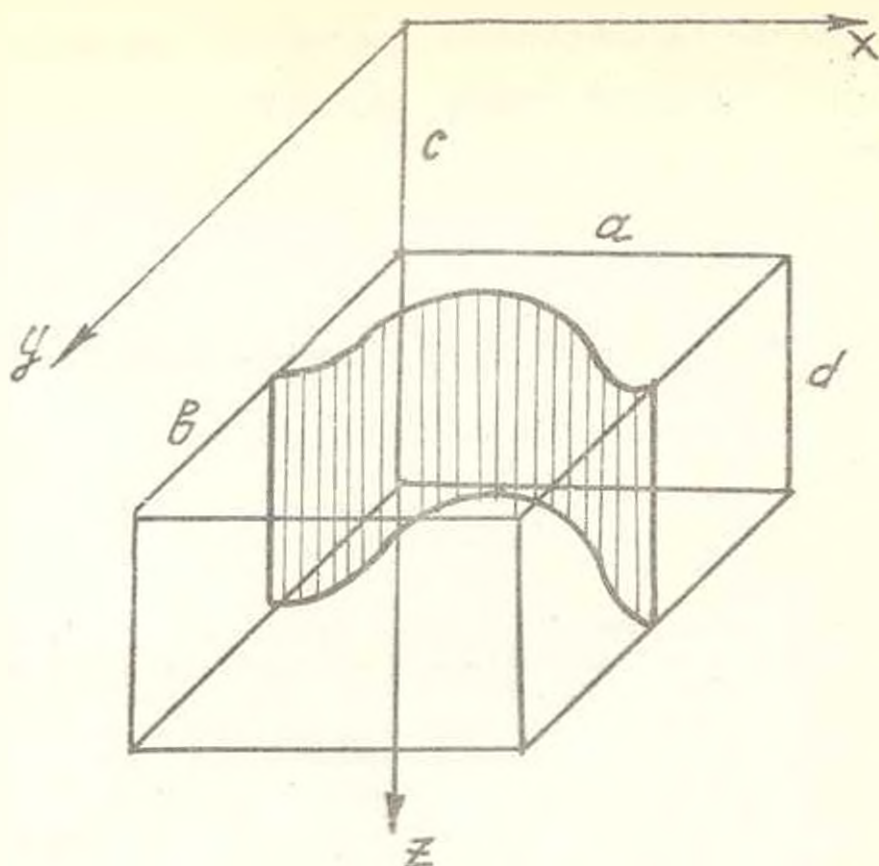
Փորձարկվում է առանգականության տեսությամբ չվազրիստանի խճիրր առանգական կիսամարմնության ճամար, որի լարվածային զննարկմանը զինակը զրգովում է ճրա ինչ-որ կերպարությամբ տեղի ունեցող ծավալային զննարկման ճեղհանքով ընդգծվում է և՛ ազատ մակերևույթի տեղափոխությունները, որոնք դրանում են որպես տեղանկան կեղևային երկրաշարժի կանխագշտման:

Рассматривается квазистатическая задача теории упругости для упругого полупространства, напряженно-деформированное состояние которого возмущается вследствие объемных деформаций с заданной интенсивностью, происходящих в некоторой подобласти полупространства. Определяются перемещения свободной поверхности, которые рассматриваются как предвестники корового тектонического землетрясения.

Идентификация инструментально наблюдаемых предвестников тектонических коровых землетрясений (деформации земной коры, форшоки, сейсмическая активность, изменения некоторых геохимических, электрических и магнитных параметров) остается пока неразрешимой задачей, хотя есть определенный прогресс в отношении долгосрочных предвестников. Взаимосвязь различных предвестников устанавливается лишь статистически или интуитивно. Отсутствие определенного алгоритма интерпретации и сравнительной оценки временного хода значений не только предвестников различной физической природы, но и одного и того же предвестника, но наблюдаемого на разных расстояниях от предполагаемого эпицентра, является основным препятствием в решении задачи идентификации предвестников землетрясений.

В настоящей работе делается попытка представить комплекс некоторых наблюдаемых предвестников как прямое проявление определенного единого возмущающего процесса, происходящего в земной коре.

Представим земную кору в виде упругого полупространства, свободного от поверхностной нагрузки. Для простоты считаем полупространство однородным и изотропным, свободным от воздействия объемных сил. Пусть в некоторой подобласти Ω полупространства начинается возмущение напряженно-деформированного состояния полупространства в соответствии с принятой гипотезой о физической природе и механике очага землетрясения. Примем, что возмущения представляют собой объемные деформации с интенсивностью $\epsilon(P, t)$ (P — точка полупространства, t — время). Примем также, что изменения $\epsilon(P, t)$



Фиг.1.Схема возмущенной области

во времени так медленны, что можно пренебречь инерционными членами в уравнениях движения.

Вследствие этих предположений приходим к квазистатической задаче определения напряженно - деформированного состояния упругого полупространства (фиг.1) при граничных условиях

$$\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \text{ при } z = 0, t \geq 0 \quad (1)$$

и заданных объемных деформациях $\epsilon(P, t)$. Решение этой задачи известно [1,2,3].

Введем в рассмотрение потенциал перемещений

$$\psi = - \frac{1}{4\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\epsilon(P, t) dV(Q)}{r(P, Q)}$$

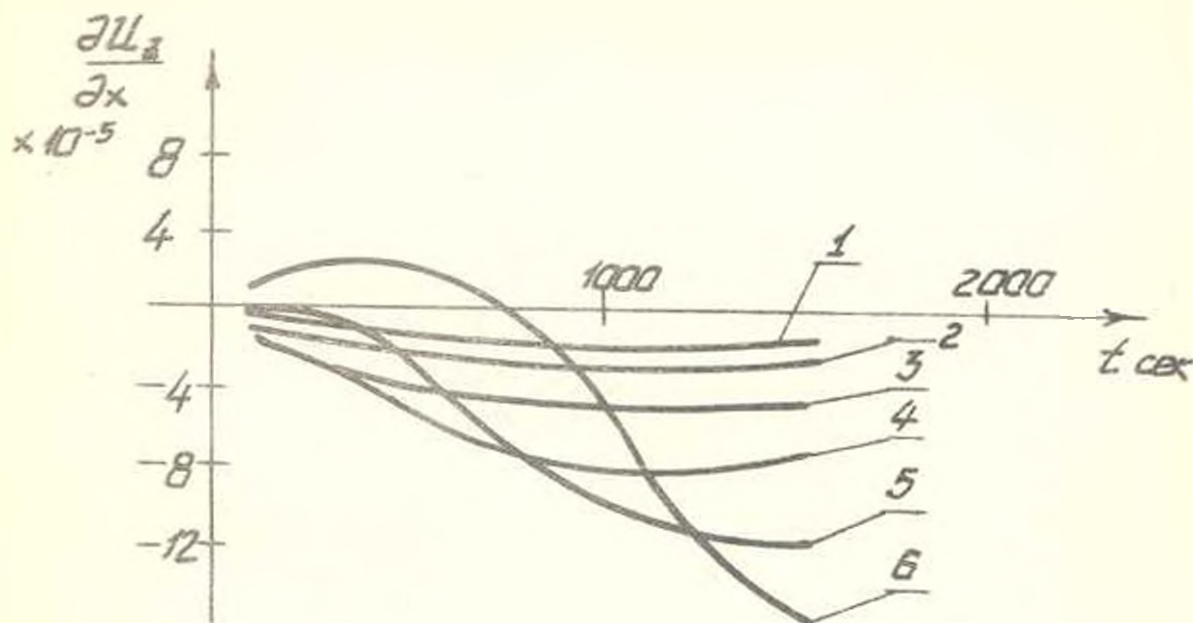
являющийся решением уравнения Пуассона

$$\Delta \psi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \epsilon(P, t) dV(Q) \delta(P-Q)$$

и бигармоническую функцию Лява

$$\varphi = - \int_0^\infty (1-2\nu-\alpha z) D(\alpha) \exp(-\alpha z) J_0(\alpha r) d\alpha$$

Следуя [1,2] решение искомой задачи представляется в виде комбинации



Фиг.2. Зависимость $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ от времени в точках $z=0; y=5 \cdot 10^3$ км; $x = -10^4; -5 \cdot 10^3; 0; 5 \cdot 10^3; 10^4; 1.5 \cdot 10^4$ км; на кривых 1-6 соответственно, $a=b=c=d=10^4$ км; $v=10$ м/сек., $k=10^{-7}$

этих двух функций. Удовлетворяя граничным условиям (1), для перемещений точек полупространства получим:

$$u_x = A \int_{\Omega} (x-\alpha) \left[R_1^{-3} + (3-4\nu) R_2^{-3} - 6z(z+\gamma) R_2^{-5} \right] \varepsilon d\omega$$

$$u_y = A \int_{\Omega} (y-\beta) \left[R_1^{-3} + (3-4\nu) R_2^{-3} - 6z(z+\gamma) R_2^{-5} \right] \varepsilon d\omega$$

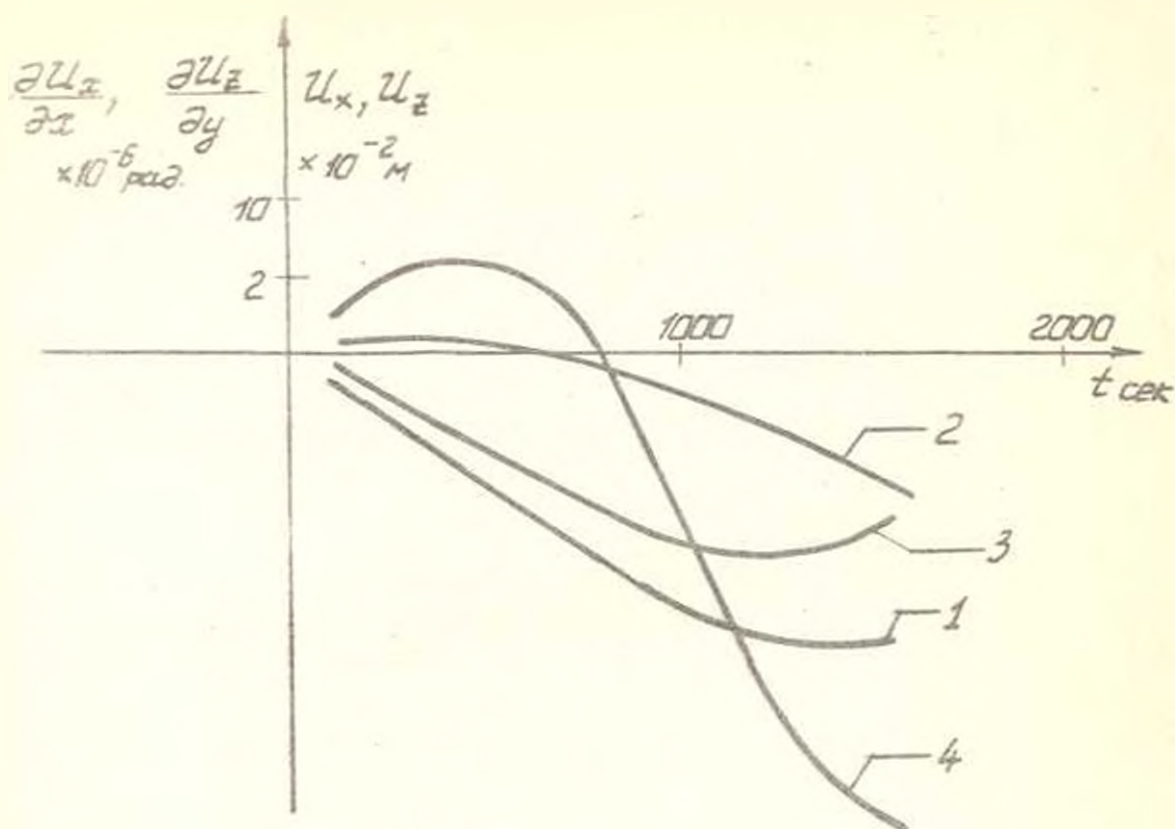
$$u_z = A \int_{\Omega} \left[\frac{(z-\gamma)}{R_1^3} - \frac{(z+\gamma)(3-4\nu)}{R_2^3} - 6z \frac{(z+\gamma)^2}{R_2^5} + \frac{2z}{R_2^3} \right] \varepsilon d\omega$$

где ν — коэффициент Пуассона, $d\omega = d\alpha d\beta d\gamma$

$$R_{1,2} = \left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z \mp \gamma)^2 \right]^{1/2}, \quad A = \frac{1}{4\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu}$$

Напряжения выражаются формулами

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \left[\lambda \varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu) \varepsilon \right] \delta_{ij}$$



Фиг.3. Зависимость от времени: 1-вертикального перемещения u_z ; 3-наклонов $\frac{\partial u_z}{\partial y}$ при $k = 1.5 \cdot 10^{-7}$, $y = 0$; 4 - наклонов $\frac{\partial u_z}{\partial x}$ при $y = 2.5 \cdot 10^4$ км, $b = 5 \cdot 10^4$ км, $d = 2 \cdot 10^3$ км; для всех кривых $x = 1.5 \cdot 10^4$; остальные параметры как на рис.2.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = x, y, z$$

λ, μ — коэффициенты Ламе.

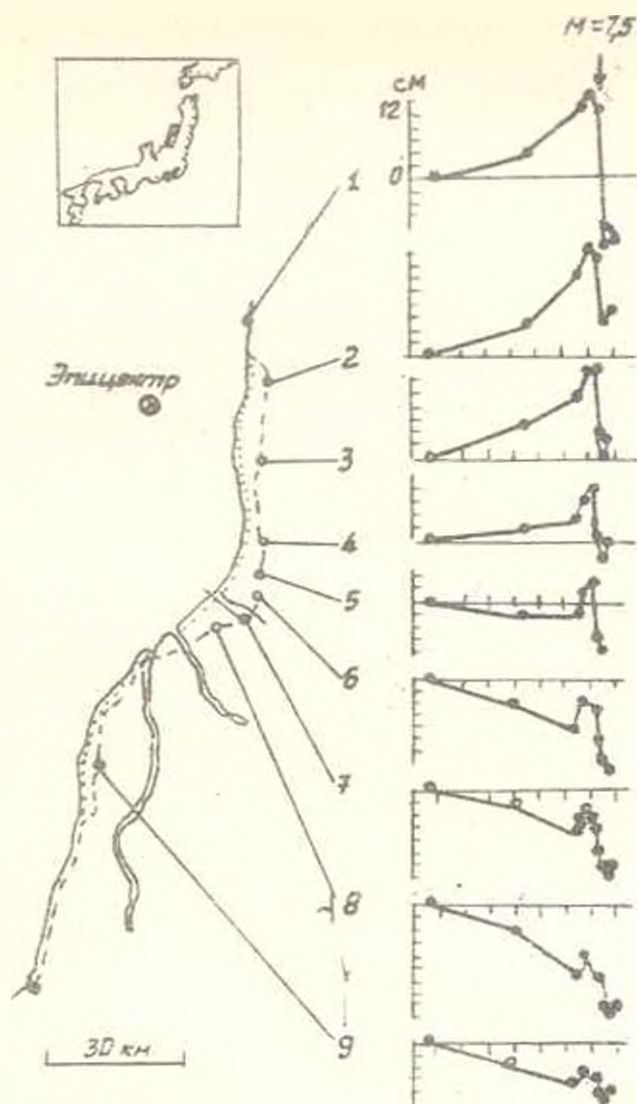
Выберем, для примера, $\epsilon(P, t)$ в виде гладкой полуволны с линейно нарастающей амплитудой, движущейся параллельно оси ox с постоянной скоростью.

$$\epsilon(P, t) = kt \left[1 - \cos \frac{\pi}{a} (x - vt) \right], \quad vt \leq x \leq a + vt$$

$$\epsilon(P, t) = 0, \quad vt > x \quad \text{или} \quad x > a + vt$$

k, a, v — постоянные.

Некоторые результаты вычислений показаны на фиг. 1-3. На фиг. 4-5

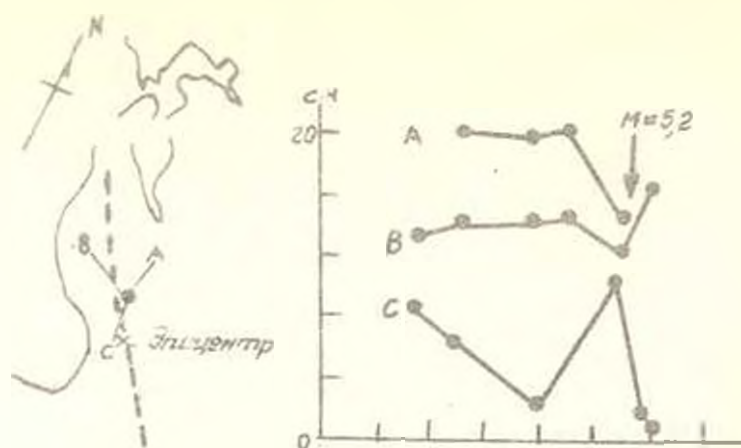


Фиг.4. Временные вариации вертикального смещения нивелирных реперов вдоль побережья Японского моря до и после землетрясения Ниигата 1964г. при фиксированной станции Касинадзаки. Стрелка указывает время землетрясения с магнитудой 7.5. Воспроизводится по работе [5].

приведены графики изменений реально зафиксированных значений предвестников перед землетрясениями, заимствованные из работ [4,5]. Результаты вычислений значений предвестников по вышеприведенным формулам в статическом случае приведены в [3].

Как можно заметить, поведение вычисленных предвестников вполне очевидно и поддается интерпретации (фиг.2). Также вполне понятны и предсказуемы изменения поведения предвестников в этой модельной задаче при изменении параметров задачи (фиг.3).

Если рассмотреть характер кривых реально зафиксированных предвестников (фиг.4-5), то ясно, что отдельно взятые кривые описывают такие же процессы, как и вычисленные по условиям модельной задачи предвестники. Отметим, что это подобие утверждается также авторами работ [6,7], анализируя решение задачи об упругом полупространстве с упругим включением эллипсоидальной формы с отличающимся от основного материала модулем сдвига. К сожалению,



Фиг.5 Изменение расстояний, связанное с землетрясением 1964г. в Корралитосе на севере Калифорнии. Воспроизводится по работе [4].

недостаточность опубликованных данных о предвестниках не позволяет подробно анализировать происшедшие землетрясения с обсуждаемой позиции с интерпретацией совокупности всех зафиксированных предвестников.

Представление предвестников в виде проявления определенного возмущающего процесса может оказаться полезным не только при интерпретации реально зафиксированных предвестников, но и для повышения эффективности наблюдений путем организации наблюдений именно в тех местах, где по теоретическим расчетам изменение предвестников является наиболее информативным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Луры А.И. Пространственные задачи теории упругости. - М.: ГИТТЛ, 1955. 492 с.
2. Новацкий В. Вопросы термоупругости. - М.: Изд. АН СССР, 1962. 364 с.
3. Хачикян А.С. О прогнозе тектонических землетрясений. Докл. АН А, 1991, т. 92, п. 5, с. 201-205.
4. Рикитакс Т. Предсказание землетрясений. - М.: Мир, 1979. 388 с.
5. Моги К. Предсказание землетрясений. - М.: Мир, 1988. 382 с.
6. Добровольский И.П., Зубков С.И., Мичкин В.И. Обобщенке размерю зоны проявления предвестников землетрясений. - В сб.: Моделирование предвестников землетрясений. - М.: Наука, 1980. с. 7-44.
7. Добровольский И.П. Деформирование земной коры при подготовке землетрясений. - Прогноз землетрясений, N 11, 1989, с. 25-37.

Институт механики АН Армении
Поступила в редакцию 28.06.1991

НЕСИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Петросян Л.Г.

Պետրոսյան Լ.Գ. Կլոր գլանային խողովակում մեղուկի չհաստատված հոսքի ոչ սիմետրիկ մոդելը

Petrosian L.G. A nonsymmetric model for liquid non-steady flow in circular cylindrical tube

Կլոր գլանային խողովակում չհաստատված հոսքի մասին խնդրի լուծման համար օգտագործված է ոչ սիմետրիկ լարման թեցզորով կառուցվածքային մեղուկի մեխանիկայի մոդելը։ Ստացված են աճալիտիկ արտահայտություններ արագության և մասնիկի պտտման անկյունային արագության համարժեքով և, որ ստացիոնար հոսքի հաստատման ժամանակը փոքրացում է կախված մեղուկի միկրոստրուկտուրայից։ Այս առումով մեղուկի դասակարգման տեսության արդյունքների համեմատությամբ։

Использована модель структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений к решению задачи о неустановившемся течении в неограниченной круглой трубе. Получены аналитические выражения для скорости и угловой скорости вращения частиц. Установлено, что время установления стационарного режима течения уменьшается (в зависимости от микроструктуры жидкости) по сравнению с результатами классической теории ньютоновской жидкости.

Рассмотрим неустановившееся течение вязкой несимметричной жидкости в неограниченной круглой трубе радиуса R . Будем считать жидкость несжимаемой ($\rho = \text{const.}$). Полагая, что во все время движения скорости жидких частиц направлены параллельно оси трубы oz (траектории всех частиц прямолинейно-параллельно оси oz), будем иметь $u_r = u_\varphi = 0$. Тогда из уравнения неразрывности найдем, что $u_z = w$ не зависит от z .

Решение этой задачи было дано в работе И.С.Громски [1]. Указанное решение было основано на классической теории континуума. Однако классическая точка зрения налагает сильные ограничения на пределы, в которых континуальное описание макроскопического поведения может успешно отражать тонкую структуру материала. Накопившиеся факты свидетельствуют о том, что классическая теория континуума Навье-Стокса не может точно предсказать поведение некоторого класса жидкостей и особенно течений через тонкие капилляры и узкие зазоры, так как не содержит механизма для объяснения наблюдаемых новых физических явлений. Такая потеря точности возможна в случаях, когда характерный размер системы (радиус трубы) сравним с характерной материальной длиной вещества, значение которой обусловлено средним размером молекул

или зерен, содержащихся в среде [2].

Это обстоятельство (совместно с другими недостатками классической теории континуума) привело исследователей к разработке теории несимметрических жидкостей.

Все более очевидно, что разработанные в последнее время положения теории структурных жидкостей могут успешно описывать неньютоновские поведения реальных жидкостей. К настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных этой тематике, о чем достаточно полно изложено в работе [2]. В этой теории введены два независимых кинематических векторных поля, одно из которых представляет поступательные движения частиц жидкости, а другое - угловые или вращательные движения частиц, характеризующие внутренние степени свободы, соответствующие им моментные напряжения [2-11]. Характерным отличием теории структурных сред с несимметричным тензором напряжений является присутствие масштабных параметров. Эти жидкости реагируют на микровращательные движения и спиновую инерцию, поэтому могут воспринимать распределенные поверхностные и массовые пары сил.

В настоящей работе применена теория континуума с несимметричным тензором напряжений к решению задачи о неустановившемся движении несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе.

Общая система уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости с несимметричным тензором напряжений имеет вид [2,5]

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + 2\nu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v})^d + \nu_r \nabla \times \{ 2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{v} \} + \mathbf{f} \quad (2)$$

$$I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = 2\nu_r (\nabla \times \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) + c_0 \nabla \nabla \boldsymbol{\omega} + 2c_d \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{\omega})^d + 2c_a \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{\omega})^a + \mathbf{s} \quad (3)$$

Здесь ρ - массовая плотность, p - давление, I - скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы, $\mathbf{v}$ - вектор скорости точки, $\boldsymbol{\omega}$ - вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, ν - кинематическая ньютоновская вязкость, ν_r - кинематическая вращательная вязкость, c_0 , c_d и c_a - коэффициенты моментной вязкости, $d(\dots)/dt$ - полная производная по времени, ∇ - пространственный градиент, $(\nabla \mathbf{v})^d$ и $(\nabla \boldsymbol{\omega})^d$ - симметричные части соответствующих диад, $(\nabla \mathbf{v})^a$ и $(\nabla \boldsymbol{\omega})^a$ - антисимметричные диады $\mathbf{f}$ - вектор массовой силы, $\mathbf{s}$ - вектор массового момента.

Для компонентов поступательной скорости и угловой скорости вращения частиц имеем

$$\begin{aligned} u_r &= u_\varphi = 0, & u_z &= w(r, t) \\ \omega_r &= \omega_z = 0, & \omega_\varphi &= \omega(r, t) \end{aligned} \quad (4)$$

Если пренебречь массовыми силами и массовыми моментами, то уравнения поступательного движения и вращательного движения представятся в виде

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$$

$$r \frac{\partial w}{\partial t} = (\nu + \nu_r) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + 2\nu_r \frac{\partial}{\partial r} (r\omega) - \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (5)$$

$$I \frac{\partial \omega}{\partial t} = (c_o + c_d) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\omega}{r} \right) - 2\nu_r \frac{\partial w}{\partial r} - 4\nu_r \omega \quad (6)$$

Из (5) следует, что перепад давления $\partial p / \partial z$ не зависит от координаты z и может быть только функцией времени t . Мы будем рассматривать случай, когда жидкость в начальный момент $t = 0$ находится в покое, а установившийся в этот момент перепад давления $\partial p / \partial z$ не меняется ($\partial p / \partial z = \text{const}$).

Предполагаем, что жидкость прилипает к границе трубы при $r = R$, тогда начальные и граничные условия для поступательной скорости и угловой скорости вращения частиц будут [2]

$$\text{при } t = 0, \quad w = 0, \quad \omega = 0$$

$$\text{при } r = R \quad (t > 0) \quad w = 0, \quad \omega = 0 \quad (7)$$

Принимая во внимание плавность течения, согласно идеи работы [12] инерционные члены в уравнениях движения несимметричной жидкости (5) и (6) заменим приближенными выражениями, то есть ускорения $\partial w / \partial t$ и $\partial \omega / \partial t$ заменим их средними по радиусу значениями. Оценка степени точности идеи осреднения работы [12] для задачи И.С.Громеки в случае классической ньютоновской жидкости приведена в [13]. Такая оценка степени точности для другой задачи приведена в работе [14]. Эти оценки показали практическую приемлемость этого способа.

$$\varphi(t) = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{\partial w}{\partial t} dr \quad (8)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{\partial \omega}{\partial t} dr \quad (9)$$

При таком осреднении уравнения (5) и (6) примут следующий вид:

$$r \varphi(t) = (\nu + \nu_r) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + 2\nu_r \frac{\partial}{\partial r} (r\omega) - \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (10)$$

$$0 = (c_o + c_d) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\omega}{r} \right) - 2\nu_r \frac{\partial w}{\partial r} - 4\nu_r \omega \quad (11)$$

Нетрудно убедиться, что осреднения вращательного ускорения вызванного проекцией псевдовектора ω , необходимо произвести по диаметру трубы. Тогда $\psi(t) = 0$, а это означает, что в уравнении вращательного движения ускорения вращения частиц не учитываются.

Разрешая (10) относительно $\partial w / \partial r$, получаем

$$\frac{\partial w}{\partial r} = (\nu + \nu_r)^{-1} \left[\frac{1}{2} r \varphi(t) - 2\nu_r \omega + \frac{1}{2\rho} r \frac{\partial p}{\partial z} \right] + C_1 r^{-1} \quad (12)$$

Подстановка $\partial w / \partial r$ в уравнение (11) дает

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) \omega = Pr + \frac{2\nu_r}{c_a + c_d} \frac{1}{r} C_1 + \Phi \varphi(t) r \quad (13)$$

где

$$k = \left(\frac{4\nu}{\nu + \nu_r} \frac{\nu_r}{c_d + c_a} \right)^{1/2}$$

$$P = \frac{\nu_r}{(\nu + \nu_r)(c_a + c_d)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\Phi = \frac{\nu_r}{(\nu + \nu_r)(c_a + c_d)} \quad (14)$$

Общее решение уравнения (14) есть

$$\omega = C_2 I_1(kr) + C_3 K_1(kr) - \left[P \frac{1}{k^2} + \Phi \varphi(t) \frac{1}{k^2} \right] r - \frac{2\nu_r}{c_a + c_d} \frac{C_1}{k^2} \frac{1}{r} \quad (15)$$

где $I_1(kr)$ и $K_1(kr)$ -модифицированные цилиндрические (бесселевы) функции первого порядка первого и второго родов.

Подставляя (15) в (12) и интегрируя, получим

$$\omega = 2\nu_r(\nu_r + \nu)^{-1} k^{-1} \left[-C_2 I_0(kr) + C_3 K_0(kr) \right] + \frac{1}{4\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial z} r^2 + \frac{\nu + \nu_r}{\nu} C_1 \ln r + \frac{1}{4\nu} \varphi(t) r^2 + C_4 \quad (16)$$

где $I_0(kr)$ и $K_0(kr)$ -модифицированные цилиндрические (бесселевы) функции нулевого порядка первого и второго родов; C_1 , C_2 , C_3 и C_4 - функции от времени.

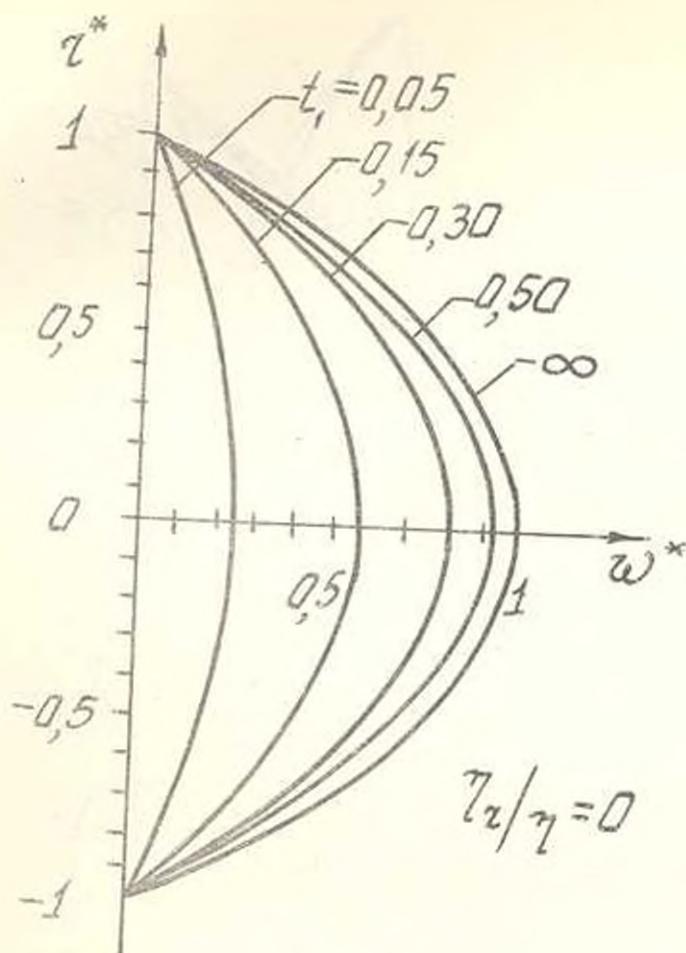
Значения поступательной скорости ω и скорости вращения частицы ω должны быть ограниченными на оси трубы при $r = 0$. Так как $K_0(kr)$, $K_1(kr)$ и $\ln r$ не ограничены при $r = 0$, то должны быть C_1 , $C_3 = 0$. Тогда

$$\omega = C_2 I_1(kr) - \frac{1}{4\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial z} r - \frac{1}{4\nu} \varphi(t) r \quad (17)$$

$$\omega = -\frac{2\nu_r}{\nu_r + \nu} \frac{1}{k} C_2 I_0(kr) + \frac{1}{4\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial z} r^2 + \frac{1}{4\nu} \varphi(t) r^2 + C_4 \quad (18)$$

Используя граничные условия (7) из (17) и (18), определяем C_2 и C_4 и приходим к решению

$$\omega = - \left[r - \frac{I_1(\lambda r^*)}{I_1(\lambda)} \right] \left[\frac{R}{4\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{R}{4\nu} \varphi(t) \right] \quad (19)$$



Фиг.1

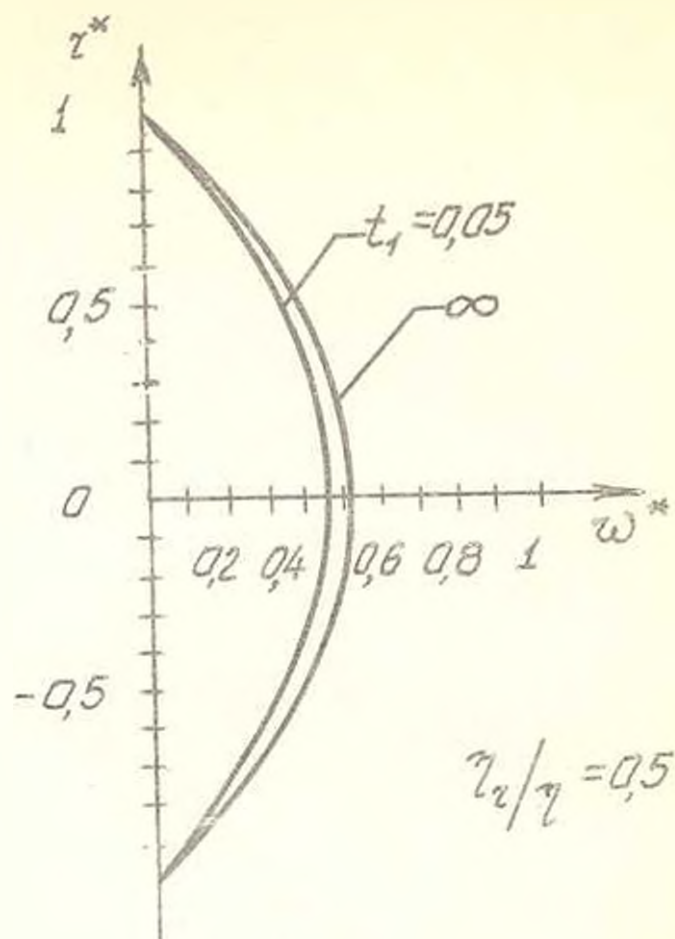
$$w = \left(1 - r^{*2} + \frac{2\nu_r}{\nu + \nu_r} \frac{1}{\lambda} \frac{I_0(\lambda r^*) - I_0(\lambda)}{I_1(\lambda)} \right) \times \left[w_0 - \frac{r^2}{4\nu} \varphi(t) \right] \quad (20)$$

где

$$w_0 = - \frac{R^2}{4\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad r^* = \frac{r}{R}, \quad \lambda = kR = \left(\frac{4\nu}{\nu + \nu_r} \frac{\nu_r}{c_0 + c_d} \right)^{1/2} R \quad (21)$$

Здесь w_0 — максимальная по сечению скорость на оси трубы в классическом сечении Пуазейля.

Определив из (20) $\partial w / \partial t$, подставив в правую часть (8) и интегрируя, получим



Фиг.2

$$\varphi(t) = C_5 \exp\left(-\frac{6\nu}{\alpha R^2} t\right) \quad (22)$$

где

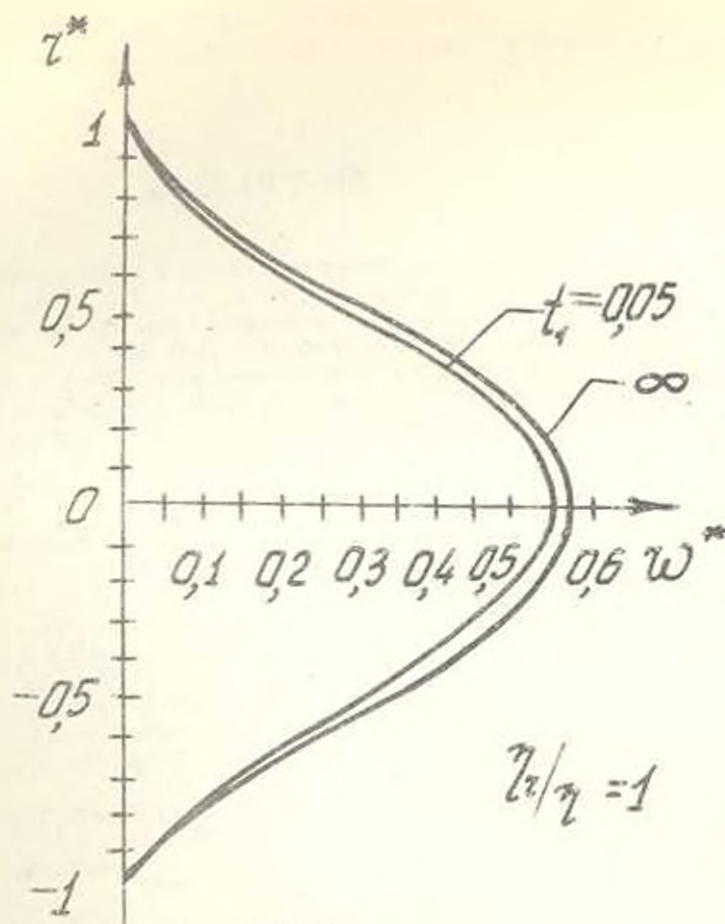
$$\alpha = 1 + \frac{3\nu_r}{\nu + \nu_r} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{I_1(\lambda)} \left[I_0(\lambda) + \frac{1}{R} \int_0^R I_0(kr) dr \right] \quad (23)$$

Постоянную интегрирования C_5 находим из начального условия для w . Так как при $t = 0$ $w = 0$, то из уравнения (20) и (22) находим

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \exp\left(-\frac{6\nu}{\alpha R^2} t\right) \quad (24)$$

Из (24) значение $\varphi(t)$ подставляя в (20), получаем

$$w^* = \frac{w}{w_0} = \left(1 - r^2 + \frac{2\nu_r}{\eta + \eta_r} \frac{1}{\lambda} \frac{I_0(\lambda r^*) - I_0(\lambda)}{I_1(\lambda)} \right) \times [1 - \exp(-6\alpha t_1)] \quad (25)$$



Фиг.3

где $\eta = \rho \nu$, $\eta_r = \rho \nu_r$.

Здесь $t_1 = \eta_1 / \rho R^2$ — критерий Фурье. Решение (25) переходит в классическое при $\eta_r = 0$, и (19) дает $\omega = 0$, а (23) — $\alpha = 1$ (13).

Так как ν , ν_r , c_a , c_d не отрицательны, поэтому λ — действительное число (безразмерная величина, характеризующая взаимосвязь между геометрией и свойствами жидкости).

Воспользуясь формулой (25), вычислим расход жидкости

$$Q^* = \frac{Q}{Q_0} = \left[1 - \frac{8\eta_r}{\eta + \eta_r} \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda}{2} \frac{I_0(\lambda)}{I_1(\lambda)} - 1 \right) \right] \times \left[1 - \operatorname{схр}(-6\alpha t_1) \right] \quad (26)$$

где $Q_0 = -\frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\partial p}{\partial z}$.

Здесь Q_0 — расход жидкости в классическом течении Гагена-Пуазейля.

В пределе при $t = \infty$ решения (25) и (26) переходят в решения стационарной задачи [2].

Профили скоростей для различных значений η_r / η (при $\lambda = 1$), показаны на фиг. 1, 2, 3.

Как видно из приведенных графиков, с увеличением значений η , η уменьшается время установления стационарного режима течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках. - Казань: Изд. Универс. типографии, 1882. 31 с.
2. Петросян Л.Г. Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений. - Ереван: Изд.-во ЕГУ. 1984. 308 с.
3. Grad H. Statistical Mechanics-Thermo-dynamics and fluid dynamics of systems with an arbitrary number of Integrals. - *Comm. pure appl. math.*, 1952, vol. 5, N 4, p. 455-494.
4. Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Кузнецкий Е.В. Асимметрическая гидромеханика. - ПММ, 1965, т. 29, вып. 2, с. 297-308.
5. Нгуен Ван Дьен, Листров А.Т. О изотермической модели несимметричных жидкостей. - ИАН СССР, МЖГ, 1967, п. 5, с. 132-136.
6. Петросян Л.Г. Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения. 1. Основные уравнения. - Уч. записки, ЕГУ, 1976, п. 3, с. 56-63.
7. Петросян Л.Г. Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения. 2. Феноменологические уравнения. Перекрестные эффекты. - Уч. записки, ЕГУ, 1977, N 2, с. 74-80.
8. Петросян Л.Г. Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения. 3. Пристеночный и приосевой эффекты в ламинарном течении суспензии. - Уч. записки, ЕГУ, 1978, N 22, с. 46-54.
9. Петросян Л.Г. К построению модели магнитной гидродинамики несимметричных жидкостей. - ПМ, 1976, т. 12, N 11, с. 103-109.
10. Петросян Л.Г. О модели электрогидродинамики с несимметричным тензором напряжений. - ЖГФ, 1979, т. 49, вып. 3, с. 481-487.
11. Петросян Л.Г. К построению изотермической модели электрогидродинамики с несимметричным тензором напряжений. - ПМ, 1980, т. 16, N 4, с. 108-114.
12. Слезкин Н.А., Тарг С.М. Обобщенные уравнения Рейнольдса. - ДАН СССР, 1946, т. 3, с. 205-208.
13. Аббасов А.А., Мирзаджанзаде А.Х. Приближенное решение задачи о нестационарном движении вязко-пластичной среды в круглой цилиндрической трубе. - Изв. АН СССР, ОТН, 1955, N 12, с. 122-124.
14. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. - М. -Л.: ГИТТЛ, 1951. 420 с.

Ереванский государственный университет
Поступила в редакцию 19.12.1990