

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ ПРОCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA  
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՅԵՂԵՎՈՒԹՅԱՆ ԳԵՂԵՎՈՒԹՅԱՆ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ  
МЕХАНИКА  
MECHANICS

УДК 539.3

О ВЛИЯНИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КОЭФФИЦИЕНТ  
 ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ДВИЖУЩЕЙСЯ  
 ТРЕЩИНЫ

БАГДОЕВ А. Г. МОВСИСЯН Л. А.

Изучаются две антиплоские задачи полубесконечной трещины, движущейся с постоянной скоростью по направлению ее залегания в идеально-проводящей упругой среде. Начальное постоянное магнитное поле имеет по отношению к трещине произвольное направление. Для изотропной среды подобные задачи в отсутствие магнитного поля рассматривались [1, 2 и др.]. Роль магнитного поля приводит к явлениям типа анизотропии [3].

1. В плоскости  $xy$  трещина до момента  $t=0$  занимает отрицательную полуось ( $x \leq 0$ ) и, начиная с этого момента, движется с постоянной скоростью  $c$  по направлению оси  $x$ . На берегах трещины задано постоянное напряжение

$$\tau_{yz}|_{y=0} = T H(ct-x) H(t) \quad (1.1)$$

где  $H(z)$  — единичная функция.

Так как для антиплоской задачи нормальная к плоскости движения компонента начального магнитного поля не вызывает индукционных полей, будем считать, что магнитное поле имеет вид  $(H_1, H_2, 0)$ , который приводит к индуцированному полю

$$H_x = H_1, \quad H_y = H_2, \quad H_z = H_1 \frac{\partial w}{\partial x} + H_2 \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.2)$$

где  $w$  — перемещение по оси  $z$ .

Для силы Лоренца получится ненулевая компонента по оси  $z$ , равная

$$\left[ \left( H_1 \frac{\partial}{\partial x} + H_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 w \right] \quad (1.3)$$

тогда уравнение движения примет вид

$$\Delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{4\pi} \left[ H_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2H_1 H_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + H_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (1.4)$$

Учитывая выражение тензора Максвелла, для напряжения  $\tau_{yz}$  имеем:

$$\tau_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{H_2}{4\pi} \left( H_1 \frac{\partial w}{\partial x} + H_2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (1.5)$$

Таким образом, условия на оси  $x$  будут

$$G \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{H_2}{4\pi} \left( H_1 \frac{\partial w}{\partial x} + H_2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) = TH(ct-x)H(t), \quad x \leq ct \quad (1.6)$$

$$w=0, \quad x > ct$$

Вводя переменное  $\xi = x - ct$  и производя преобразования Лапласа и Фурье

$$\bar{w}(\lambda, y, s) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w \exp(-s(t+\lambda\xi)) d\xi dt \quad (1.7)$$

полученное из (1.4) уравнение относительно  $\bar{w}$  допускает решение

$$\bar{w} = c_1 \exp(\alpha sy) + c_2 \exp(-\alpha sy), \quad \operatorname{Re} \alpha \geq 0 \quad (1.8)$$

$$\alpha = \frac{1}{a_2^2} \left[ -a_{12}^2 \lambda + \sqrt{a_2^2 (1 - \lambda c)^2 - a_{12}^2} \right]$$

$$a_1^2 = b^2 + \frac{H_1^2}{4\rho\pi}, \quad a_2^2 = b^2 + \frac{H_2^2}{4\rho\pi}, \quad a_{12}^2 = \frac{H_1 H_2}{4\rho\pi}$$

$$b^2 = \frac{G}{\rho}, \quad a^2 = a_1^2 a_2^2 - a_{12}^4$$

Вводя функции  $\bar{T}_+$  и  $\bar{w}_-$ , аналитические соответственно в правой и левой полуплоскости  $\lambda$ , и удовлетворяя условиям (1.6), получим

$$(a_2^2 \alpha + a_{12}^2 \lambda) \bar{w} = -\frac{T}{\lambda \rho s^3} + \frac{\bar{T}_+}{\rho s^3} \quad (1.9)$$

$$\bar{w} = \bar{w}_-$$

Представив  $\bar{\alpha} = a_2^2 \alpha + \lambda a_{12}^2$  в виде

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_+ \bar{\alpha}_- = \sqrt{[a_2 + \lambda(a - a_2 c)][a_2 - \lambda(a - a_2 c)]} \quad (1.10)$$

и решая уравнение Винера-Хопфа, получим

$$\bar{T}_+ = \frac{T}{\lambda} \left[ 1 - \frac{\bar{\alpha}_+(\lambda)}{\bar{\alpha}_+(0)} \right], \quad \bar{w}_- = \frac{T}{\rho h s^3} \frac{1}{\bar{\alpha}_-(\lambda) \bar{\alpha}_+(0)} \quad (1.11)$$

В плоскости  $\lambda$ , проводя разрез от  $-\infty$  до  $-a_2/(a - a_2 c)$ , после обратных преобразований получим

$$\frac{\partial \tau_{yz}(\xi, 0, t)}{\partial t} = -2 \operatorname{Re} \frac{T}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-a_2/(a-a_2c)} \frac{\int_0^t \delta(t-\lambda\xi) \bar{\alpha}_+(\lambda)}{\lambda \bar{\alpha}_+(0)} d\lambda = \frac{T}{\pi t} \left[ \frac{t}{\xi} \left( \frac{a}{a_2} - c \right) - 1 \right]^{1/2}$$

$$\xi < t \left( \frac{a}{a_2} - c \right) \quad (1.12)$$

Для  $\tau_{yz}$  при  $y=0$  будем иметь

$$\tau_{yz}|_{y=0} = \frac{2T}{\pi} \left( Y - \operatorname{arctg} Y \right) \quad (1.13)$$

$$Y = \sqrt{\frac{1}{X} - 1}, \quad X = \frac{\xi}{t} \left( \frac{a}{a_2} - c \right)^{-1}$$

откуда для коэффициента интенсивности имеем

$$K = \frac{2T}{\pi} \sqrt{t} \left( \frac{a}{a_2} - c \right)^{1/2} \quad (1.14)$$

Из приведенной формулы видно, что магнитное поле увеличивает коэффициент интенсивности и наибольшее влияние оказывает, когда оно направлено по линии трещины, а в случае, когда оно перпендикулярно к трещине, его влияние сводится на нет. Следует отметить, что для металлов учет магнитного поля существенен для полей порядка  $10^5$  эрстед.

2. Теперь рассмотрим случай, когда на границе трещины задана сосредоточенная сила  $Q$ . Тогда вместо (1.6) будем иметь условия:

$$\begin{aligned} \tau_{yz}|_{y=0} &= Q^2(x)H(t), & x < ct \\ w|_{y=0} &= 0, & x > ct \end{aligned} \quad (2.1)$$

которые после преобразований дадут

$$\begin{aligned} (a_2^2 a + a_1^2 \lambda) \bar{w} &= \frac{Q}{\rho S^2 (1 - ic)} + \frac{1}{\rho S^2} \bar{T}_+ \\ \bar{w} &= \bar{w}_+ \end{aligned} \quad (2.2)$$

Факторизация здесь приводит к

$$\bar{T}_+ = \frac{Q}{ic - 1} \left| 1 - \frac{\bar{x}_+(\lambda)}{a_+(1/c)} \right| \quad (2.3)$$

что в свою очередь, дает выражение для  $\tau_{yz}$

$$\frac{d\tau_{yz}}{dt} \Big|_{y=0} = - \frac{Q}{\pi t} \left\{ \frac{a_2 c}{a} \left| \frac{t}{\xi} \left( \frac{a}{a_2} - c \right) - 1 \right| \right\}^{1/2} \frac{1}{\xi + ct} \quad (2.4)$$

Коэффициент интенсивности теперь будет

$$K = \frac{2Q}{\pi \sqrt{t}} \left| \frac{1}{c} - \frac{a_2}{a} \right|^{1/2} \quad (2.5)$$

Роль магнитного поля на коэффициент интенсивности такая же, что и в предыдущем примере.

В частности, при отсутствии магнитного поля получаем известные результаты.

# INFLUENCE OF MAGNETIC FIELD ON STRESS INTENSIVITY COEFFICIENT FOR MOVING CRACK

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

ՇԱՐԺՎՈՂ ՃԱՔԻ ԻՆՏԵՆՍԻՎՈՒԹՅԱՆ ԳՈՐԾԱԿՑԻ ՎՐԱ ԻՄԱԳԻՆԵՍԻԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

## Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Ուսումնասիրված էին հաստատուն ալիստիվայամբ շարժվող կիսաանվերջ, ճաքի երկու հակահարթ խնդիրներ (համասարաչափ բաշխված լարումներ և ճաքի ափերում կենտրոնացված ուժեր): Հաստատուն մագնիսական դաշտը ճաքի նկատմամբ ունի կամայական ուղղություն: Ցույց է տրված, որ մագնիսական դաշտը բերում է անիզոտրոպային հատուկ երևույթների, նա մեծացնում է ինտենսիվության գործակիցը և ամենամեծ ազդեցությունն ունի ճաքի ուղղությամբ ազդելու դեպքում:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Костров Б. В. Неуставовившееся распространение трещины продольного сдвига.— ПММ, 1966, т. 30, вып. 6, с. 1042—1050.
2. Freund L. B. Crack propagation in an Elastic Solid Subjected to General Loading.—III Stress Wave Loading. I. mech. and Phys. Solids, 1975, vol. 21, pp. 47—6.
3. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. Приближенное решение антиплоской анизотропной задачи о распространении трещины.—Механика (междуз сб. и тр.), Ереван, 1989, вып. 7, с. 48—55.

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию  
25.X.1990

УДК 539.3

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ВОЛН ЛЯВА С  
НЕОДНОРОДНЫМ СЛОЕМ

БЕЛУБЕКЯН М. В

Исследована задача распространения сдвиговой волны в однородном полупространстве контактирующим с неоднородным слоем (обобщение задачи Лява). Установлены условия существования поверхностной волны для произвольной неоднородности в предположении малости толщины слоя. Рассмотрены частные случаи неоднородности.

Впервые вопросы существования поверхностной сдвиговой волны для неоднородного упругого полупространства исследовались в [1]. Обзор дальнейших исследований приводится в [2]. Здесь рассматривается задача Лява в случае, когда полупространство однородное, а слой над полупространством является неоднородным по толщине. В предположении малости толщины слоя, получены условия существования поверхностной волны для произвольной неоднородности.

1. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  полуплоскость занимает область  $x_2 \geq 0$ , а слой над полуплоскостью — область  $-h \leq x_2 \leq 0$ . Предполагается, что компоненты упругого перемещения в направлениях  $x_1$  и  $x_2$  тождественно равны нулю, а компонент в направлении  $x_3$  является функцией координат  $x_1, x_2$  и времени  $t$ .

Уравнение движения в области  $x_2 > 0$  приводится к виду

$$\rho_2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) - \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

где  $u$  — перемещение в направлении  $x_3$ ,  $\mu_2 = \text{const}$  — модуль сдвига,  $\rho_2 = \text{const}$  — плотность материала среды.

Для области  $-h < x_2 < 0$  уравнения движения берутся в виде

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} = \rho(x_2) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \rho(x_2) > 0 \quad (1.2)$$

где  $v$  — упругое перемещение в направлении  $x_3$ ,  $\rho(x_2)$  — функция плотности материала слоя,  $\sigma_{31}$  и  $\sigma_{32}$  — касательные напряжения, которые согласно закону Гука определяются посредством деформации следующим образом:

$$\sigma_{31} = \mu(x_2) \frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad \sigma_{32} = \mu(x_2) \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \mu(x_2) > 0 \quad (1.3)$$

В дальнейшем, не нарушая общности, для функций неоднородности принимаются представления

$$\rho(x_2) = \rho_1 [1 + \gamma \varphi(x_2)], \quad \mu(x_2) = \mu_1 [1 + \varepsilon f(x_2)], \quad \varphi(0) = f(0) = 0 \quad (1.4)$$

Условия контакта на границе слоя и полупространства следующие:

$$u = v, \quad \mu_1 \frac{\partial v}{\partial x_2} = \mu_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \quad \text{при } x_2 = 0 \quad (1.5)$$

Кроме того, необходимо удовлетворить условию на свободной поверхности и условию затухания

$$\sigma_{33} = 0 \quad \text{при } x_2 = -h, \quad \lim_{x_2 \rightarrow \infty} u = 0 \quad (1.6)$$

С использованием (1.3), уравнение (1.2) переписывается в виде

$$\mu(x_2) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_2} - \rho(x_2) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) интегрируется в пределах от  $-h$  до 0 в предположении, что функция  $v$  вследствие малости толщины, не изменяется по координате  $x_2$ . Тогда, с учетом (1.5) и условия на свободной поверхности (1.6), получим следующее граничное условие:

$$\mu_1(h + \varepsilon a) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \mu_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} = \rho_1(h + \gamma b) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{при } x_2 = 0 \quad (1.8)$$

где

$$a = \int_{-h}^0 f(x_2) dx_2, \quad b = \int_{-h}^0 \varphi(x_2) dx_2$$

Таким образом, задача приводится к нахождению решения уравнения (1.1), удовлетворяющего граничному условию (1.8) и условию затухания при  $x_2 \rightarrow \infty$ .

2. Приведенная выше задача имеет решение вида

$$u = A \exp(-k \sqrt{1 - \tau} x_2) \exp(i\omega t - k x_1) \quad (2.1)$$

где

$$\tau = \omega^2 k^{-2} \rho_2 \mu_2^{-1} \quad (2.2)$$

— искомый безразмерный параметр, характеризующий квадрат скорости распространения поверхностной волны, который определяется из следующего дисперсионного уравнения:

$$L(\tau) = \beta k h (\tau \tau_1 - 1) - \sqrt{1 - \tau} = 0 \quad (2.3)$$

Здесь приняты обозначения

$$\beta = \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(1 + \frac{\varepsilon a}{h}\right), \quad \tau_1 = \frac{\rho_1 \mu_2}{\rho_2 \mu_1} \frac{h + \gamma b}{h + \varepsilon a} \quad (2.4)$$

Необходимо найти решение уравнения (2.3), удовлетворяющее условию затухания при  $x_2 \rightarrow \infty$ , то есть удовлетворяющего следующему неравенству:

$$0 < \tau < 1 \quad (2.5)$$

Аналогичная идея осреднения уравнения движения для тонкого однородного слоя ( $\epsilon = \gamma = 0$ ) была использована в [3, 4]. В этом случае показано, что уравнение (2.3) получается из точного дисперсионного уравнения задачи Лява при пренебрежении  $k^2 h^2$  по сравнению с единицей. Естественно предполагать, что и в случае неоднородного слоя уравнение (2.3) применимо для достаточно длинных (по сравнению с толщиной слоя) волн.

Легко показать, что функция  $L(\eta)$  (2.3) в интервале  $[0, 1]$  имеет следующие свойства:

$$L(0) < 0, \quad L(1) = \beta k h (\alpha - 1), \quad L'(\eta) > 0 \quad (2.6)$$

Отсюда следует, что для существования решения уравнения (2.3), удовлетворяющего условию (2.5), необходимо и достаточно выполнение условия

$$\alpha > 1 \quad (2.7)$$

Для задачи однородного слоя ( $\epsilon = \gamma = 0$ ), согласно (2.4) и (2.7), получается известное условие существования поверхностной волны Лява, независимо от толщины слоя.

3. В случае  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $\rho_1 = \rho_2$  выполняются условия теоремы Алексева А. А. [5], согласно которой для того, чтобы существовала поверхностная волна, необходимо и достаточно, чтобы существовало  $-h < x_2^* < 0$ , такое, что

$$\tau \varphi(x_2^*) \geq f(x_2^*) \quad (3.1)$$

В рассматриваемой здесь приближенной постановке аналогичное условие имеет вид

$$\tau \delta > \epsilon a \quad (3.2)$$

В работе [5] доказательство указанной теоремы приводится при условии, что функция модуля сдвига имеет непрерывную производную второго порядка при  $-h < x_2 < \infty$ . Однако указывается, что это ограничение не должно быть существенным. Отметим, что условие (3.2) получено при условии интегрируемости функций  $f(x_1)$ ,  $\varphi(x_1)$ .

Из сравнения (3.1) и (3.2) следует, что условие (3.2) является в общем случае лишь достаточным условием существования. Однако условие (3.2) может быть и необходимым для широкого класса функций с учетом малости толщины  $h$ .

Например, в случае степенной неоднородности [6, 7]

$$f(x_1) = \varphi(x_1) = x_1^n h^{-n}$$

условия (3.1) и (3.2) эквиваленты и приводят к одному и тому же условию существования поверхностной волны

$$(-1)^{\alpha_1} > (-1)^{\alpha_2}$$

В случае  $f(x_2) = x_2 h^{-1}$ ,  $\gamma = 0$  условие существования (2.7) принимает вид

$$\frac{\rho_1 \mu_2}{\rho_2 \mu_1} > 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Отсюда при  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $\rho_1 = \rho_2$  поверхностная волна существует, если  $\alpha > 0$ . Такой же результат следует из теоремы Алексееня, если считать ограничение на гладкость функции модуля сдвига несущественным.

## ON THE LOVE WAVES EXISTENCE CONDITION IN THE CASE OF NONHOMOGENEOUS LAYER

M. V. BELUBEKIAN

ԱՆՀԱՄԱՐԱԿԱՆ ԾՆՐՏՈՎ ԼՅՈՎԻ ԱՐԻՔՆԵՐԻ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Մ. Վ. ԲԵԼՍԵԿԻԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Հետազոտված է անհամասեռ շերտով կցված համասեռ կիսատարածությունում սահմանային ալիքների տարածման խնդիրը: Ծերտի բարակության պայմանի դեպքում ստացված է մակերևութային ալիքի գոյության պայման: Դիտարկված են անհամասեռության մասնավոր դեպքեր:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах.—М. Наука, 1981, 288 с.
2. Maugin G. A. Elastic Surface Waves with Transverse Horizontal Polarization. —In Advances in Applied Mechanics, ed. I W. Hutchinson, vol. 23. Acad. Press, New York, 1983, p. 373—434.
3. Murdoch A. I. The Propagation of Surface Wave in Bodies with Material Boundaries —J. Mech. and Phys. Solids, 1976, 24, №1, p. 137—146.
4. Белубекян М. В., Геворкян А. В. О магнитоупругих волнах Лява.—Матем. методы и физ.-мех. поля 1983, 18, с 55—57.
5. Алексееня А. А. О критерии существования волн Лява.—Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных—М. Наука, 1986, с 137—141 (Вычисл. сейсмология; вып. 22).
6. Kielezynski P. Propagation of Surface SH Waves in Nonhomogeneous Media.—J. Tech. Phys. 22, 1, 1981, p. 73—78.
7. Maugin G. A Shear Horizontal Surface Acoustic Waves on Solids.—Recent Dev. Surface Acoust. Waves, Proc. Eur. Mech. Colloq. 226, Nottingham Sept. 2—5, 1987 Berlin ets. 1988.

Институт механики АН Армении  
МНЦ «Ани»

Поступила в редакцию  
25.11.1990

УДК 534.1

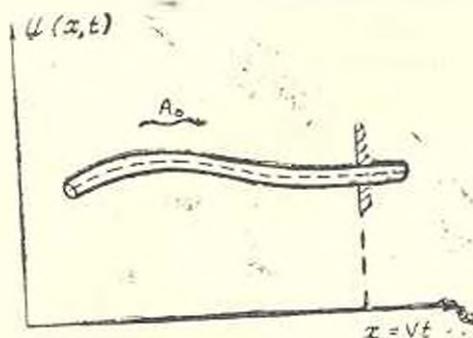
## ОДНОКРАТНОЕ ВЗАМОДЕЙСТВИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН С ДВИЖУЩИМСЯ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ

ТРУБИН М. В.

Рассмотрена задача об однократном взаимодействии изгибных волн в балке с движущимся закреплением. Вскрыт эффект преобразования энергии волн на движущемся закреплении посредством которого являются силы волнового давления. Приводится зависимость силы давления волн от скорости движения. На основе точного решения проанализированы качественно различные случаи волнообразования. Найдены первые интегралы задачи — законы сохранения энергии, волнового импульса и числа квантов волновой энергии.

Изучению динамического поведения упругих систем с движущимися закреплениями посвящено большое количество работ [1—3], в которых основное внимание уделяется постановкам краевых задач, определению собственных частот и форм колебаний. Наряду с этим, в работах [4—6] развивались волновые подходы к исследованию указанных систем, которые позволили вскрыть механизм преобразования энергии волн на движущихся закреплениях, показано, что динамическое поведение упругих систем с движущимися закреплениями определяется волновыми эффектами. В связи с этим представляет интерес выявление полного набора волновых эффектов и изучение особенностей их проявления с учетом конкретных моделей упругих систем. В данной работе проводится исследование волновых эффектов на примере простейшей задачи об однократном взаимодействии упругих волн с движущимся закреплением.

Рассмотрим отражение изгибных волн от абсолютно жесткого закрепления, движущегося с постоянной скоростью  $v$ , на примере балки, описываемой моделью Бернулли-Эйлера (фиг. 1).



Фиг. 1.

Пусть слева на движущееся закрепление падает гармоническая волна (фиг. 1), колебания балки ( $x \leq vt$ ) представим в виде суперпозиции волн

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^2 A_n \exp(i(\omega_n t - k_n x)) + A_0 \exp(i(\omega_0 t - k_0 x)) \quad (1)$$

где  $u(x,t)$  — поперечное отклонение балки,  $A_0, \omega_0, k_0, A_n, \omega_n, k_n$  — соответственно амплитуды, частоты и волновые числа падающей и вторичных волн. Из (1) и уравнения, описывающего колебания балки

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xxxx} = 0$$

где  $\alpha^2 = EJ/\rho F$ ,  $EJ$  — изгибная жесткость,  $\rho F$  — погонная плотность, для частот и волновых чисел следует дисперсионное уравнение

$$\omega_i^2 - \alpha^2 k_i^4 = 0 \quad (2)$$

После подстановки (1) в условия на движущемся закреплении

$$u|_{x=vt} = u_x|_{x=vt} = 0$$

получим кинематический инвариант

$$\omega_i - k_i v = \omega_0 - k_0 v, \quad i=1,2 \quad (3)$$

который означает равенство частот всех волн в системе координат, связанной с движущимся закреплением, а также систему линейных алгебраических уравнений, определяющих амплитуды отраженных волн

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^2 A_i = -A_0 \\ \sum_{i=1}^2 k_i A_i = -k_0 A_0 \end{cases}$$

Для выявления физически реализуемых решений потребуем выполнения условия излучения Мандельштама (для вторичных волн)

$$v_{gr i} < v, \quad i=1,2$$

и ограниченности решения на бесконечности

$$u|_{x \rightarrow \pm \infty} < |u| < \infty$$

которые на языке кинематики волн можно записать в виде

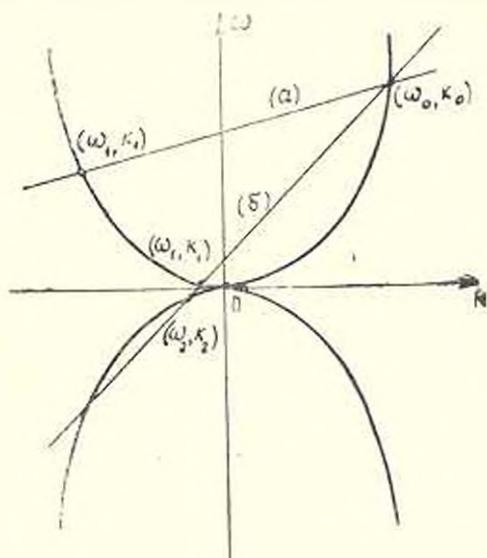
$$\frac{d\omega_i}{dk_i} < v, \quad \forall \operatorname{Im} k_i > 0 \quad (5)$$

Таким образом, задача кинематики (2), (3), (5) об определении частот и волновых чисел вторичных волн отделяется от задачи динамики (4), состоящей в нахождении амплитуд.

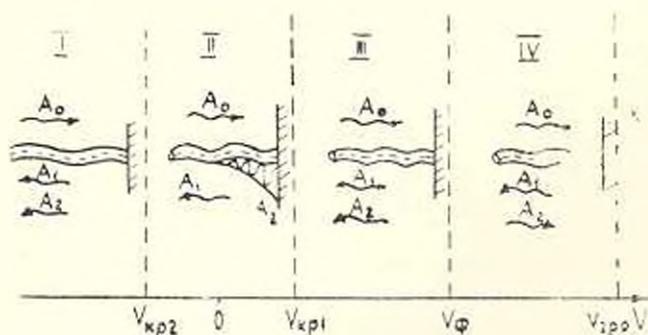
Графически проиллюстрируем решение задачи кинематики на плоскости  $\omega, k$ , где действительные частоты и волновые числа вторичных волн лежат на пересечении дисперсионной кривой (2) и прямой, изо-

бражающей кинематический инвариант (3) и проходящей через точку  $\omega_0, \kappa_0$  (фиг. 2).

В зависимости от скорости движения возможны качественно различные случаи волнообразования, которые представлены на (фиг. 3), где схематично изображены бегущие гармонические волны и колебания, экспоненциально спадающие по мере удаления от закрепления. Критические скорости, отложенные на оси  $v$  (фиг. 3), имеют значения



Фиг. 2.



Фиг. 3.

$v_{кр1} = v_{гр0}(\sqrt{2} - 1)$ ,  $v_{кр2} = v_{гр0}(-1 - \sqrt{2})$ , где  $v_{гр0} = 2ak_0$  — групповая скорость падающей волны,  $v_\phi = ak_0$  — фазовая скорость падающей волны. При малых скоростях движения  $v_{кр2} < v < v_{кр1}$  (фиг. 3 зона II, фиг. 2(a)) так же, как и при  $v=0$ , возникает одна отраженная волна

$$\omega_1 = \frac{v_{гр0}}{2} \left(1 - \frac{2v}{v_{гр0}}\right)^2; \quad k_1 = \frac{v}{a} - k_0; \quad A_1 = A_0 e^{i\omega_1 t} \left/ \left(1 - \frac{2v}{v_{гр0}}\right)\right.;$$

$$\varphi_1 = 2 \operatorname{arctg} \left( \sqrt{1 - \frac{2v}{v_{гг0}} - \frac{v^2}{v_{гг0}^2}} \left( 1 - \frac{v}{v_{гг0}} \right) \right)$$

и экспоненциально спадающее от закрепления колебание

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{v_{гг0}}{2} \left( 1 - \frac{2v}{v_{гг0}} - \frac{v^2}{v_{гг0}^2} + i \frac{2v}{v_{гг0}} \sqrt{1 - \frac{2v}{v_{гг0}} - \frac{v^2}{v_{гг0}^2}} \right) \\ k_2 &= ik_0 \left( \sqrt{1 - \frac{2v}{v_{гг0}} - \frac{v^2}{v_{гг0}^2}} + i \frac{v}{v_{гг0}} \right) \\ A_2 &= -A_0 e^{i\varphi_1} \left( \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}v}{v_{гг0}} \right) \left( 1 - \frac{2v}{v_{гг0}} \right) \\ \varphi_2 &= 2 \operatorname{arctg} \left( \sqrt{1 - \frac{2v}{v_{гг0}} - \frac{v^2}{v_{гг0}^2}} \left( \frac{2v}{v_{гг0}} \left( \frac{3}{2} - \sqrt{2} \right) + (\sqrt{2} - 1) \right) \right) \end{aligned} \quad (6)$$

С увеличением скорости движения  $v_{гг0} < v < v_{\phi}$  возникают две отраженные волны (фиг. 2(б), фиг. 3 зона III), одна из которых распространяется в сторону, противоположную движению закрепления, а другая — в ту же сторону, что и закрепление, отставая от него

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{v_{гг0}}{2} \left( 1 - \frac{2v}{v_{гг0}} \right)^2; \quad k_1 = \frac{v}{2} - k_0 \\ A_1 &= A_0 \left( 1 + \frac{v}{v_{гг0}} - \sqrt{\frac{v^2}{v_{гг0}^2} + \frac{2v}{v_{гг0}} - 1} \right) \left( 1 + \sqrt{\frac{v^2}{v_{гг0}^2} + \frac{2v}{v_{гг0}} - 1} - \frac{3v}{v_{гг0}} \right) \\ \omega_2 &= \frac{v_{гг0}}{2} \left( 1 - \frac{2v}{v_{гг0}} - \frac{v^2}{v_{гг0}^2} + \frac{2v}{v_{гг0}} \sqrt{\frac{v^2}{v_{гг0}^2} + \frac{2v}{v_{гг0}} - 1} \right) \\ k_2 &= k_0 \left( \sqrt{\frac{v^2}{v_{гг0}^2} + \frac{2v}{v_{гг0}} - 1} - \frac{v}{v_{гг0}} \right) \\ A_2 &= -A_0 \left( 1 - \frac{2v}{v_{гг0}} \right) \left( 1 - \frac{3v}{v_{гг0}} + \sqrt{\frac{v^2}{v_{гг0}^2} + \frac{2v}{v_{гг0}} - 1} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

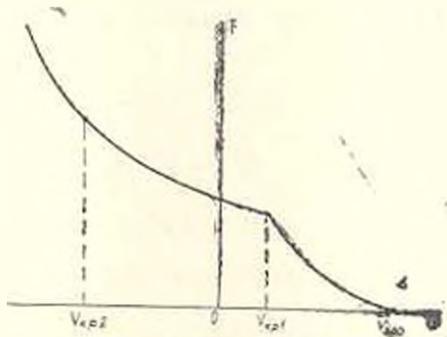
При переходе через  $v = v_{\phi}$  отраженные волны меняют направление распространения на противоположное (фиг. 3 зона IV). Параметры отраженных волн для  $v_{\phi} < v < v_{гг0}$  описываются (7). И наконец, случай движения закрепления навстречу волне со скоростью, большей  $|v_{гг0}|$ , изображен на фиг. 3 зона I, отраженные волны направлены в сторону движения закрепления, параметры которых определяются формулами (7). При  $v > v_{гг0}$  отраженных волн не возникает, так как падающая волна не может «догнать» закрепление.

Пусть на движущееся закрепление падает цуг гармонической волны длиной  $l_0$ . Учитывая, что время его взаимодействия с закреплением

$$\tau = \frac{l_0}{v_{гг0} - v}$$



Таким образом, использование волнового подхода позволило впервые вскрыть эффект преобразования энергии волн в балке с движущимся закреплением. Посредником этого преобразования выступают силы давления волн. На основе точного решения проанализированы



Фиг. 4.

качественно различные случаи волнообразования. Приводится зависимость силы волнового давления на закрепление от скорости движения. Найдены первые интегралы задачи в виде законов сохранения волновой энергии, волнового импульса и квантов волновой энергии. Полученные результаты наглядно интерпретируют особенности динамического поведения и могут быть использованы при проектировании систем, содержащих упругие элементы с движущимися закреплениями.

## ONE TIMES BENDING WAVES INTERACTION WITH MOOVING CLAMPING

M. V. TRUBIN

ՄԻՄԱՆ ԱՎԻՔՆԵՐԻ ՄԻԱՊԱՏԻՎ ՓՈՒՍԱԶՆԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ՇԱՐՎՎՈՂ ԱՄՐԱՑՄԱՆ ՀԵՏ

Մ. Վ. ՏՐՈՒԲԻՆ

### Ա մ փ ս փ ու մ

Դիտարկված է հեծանում ծռման ալիքների շարվող ամրացման հետ միապատիկ փոխազդեցության մասին խնդիրը: Բացահայտված է շարվող ամրացման վրա ալիքների էներգիայի փոխակերպման երևույթը, որի միջնորդը ալիքային ճնշման ուժերն են: Ստացված է ալիքների ճնշման ուժի կախումը շարժման արագությունից: Ճշգրիտ լուծման հիման վրա վերլուծված են ալիքազոյացման որակապես տարբեր դեպքեր: Ստացված են էներգիայի պահպանման և ալիքային իմպուլսի օրենքները, ինչպես նաև ալիքային էներգիայի քվանտների թվերը:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Светлицкий В. А.* Механика гибких стержней и нитей.—М.: Машиностроение. 1978. 222 с.
2. *Горошко О. А., Савин Г. П.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины.—Киев: Наукова Думка. 1971. 287 с.
3. *Мовсисян Л. А.* Колебания полубесконечной балки с перемещающимся концом.—Инж. журн. Механика твердого тела, 1966, №1, с. 174—176.
4. *Весницкий А. И., Потапов А. И.* Волновые явления в одномерных системах с движущимися границами.—Динамика систем Горьк. ун-та.—Горький, 1978, вып. 13, с. 38—88.
5. *Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Уткин Г. А.* Вывод естественных граничных условий для одномерных задач динамики упругих систем с движущимися закреплениями и нагрузками.—Дифференц. и интегр. уравнения: Сб. научн. работ Горьк. ун-та.—Горький, 1982, с. 75—80.
6. *Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Уткин Г. А.* Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками.—ПММ, 1983, т. 47, вып. 5, с. 862—866.
7. *Острооский Л. А.* Некоторые общие соотношения для волн на движущейся границе раздела двух сред.—ЖЭТФ, 1971, т. 61, № 2(8), с. 551—561.

Филиал Института машиноведения  
в Нижнем Новгороде

Послупила в редакцию  
18.1.1991



УДК 550.334

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С НЕРОВНОЙ ГРАНИЦЕЙ

АМБАРՉՄՅԱՆ Վ. Ա., ՇԵԿՕՅԱՆ Ա. Վ.

Рассмотрено распространение упругой волны и ее взаимодействие с неровной поверхностью. Получены формулы для колебаний неровной поверхности и двух случаях, когда на нее падает поперечная и продольная волна. Приведены аналитические выражения для плоской поверхности, которые сравниваются со случаями неровной поверхности.

В настоящее время достаточно полно рассмотрено отражение и преломление сейсмических волн в случае плоской границы [1—4].

Однако длины сейсмических волн обычно сравнимы с характерными размерами неровностей земной поверхности, поэтому модели с плоской земной поверхностью не всегда являются адекватными приближениями. Здесь существенно учитывать «шероховатость» земной поверхности. Вопросы отражения и преломления от неровной поверхности представляют, в частности, практический интерес для инженерной сейсмологии.

В настоящее время работ, где учитывается неровность границ среды, не очень много [6—8].

Целью настоящей работы является как-то дополнить этот пробел, изучая распространение, отражение, преломление от свободной неровной поверхности сейсмической волны, а также колебания неровной поверхности под воздействием сейсмической волны и получить простые выражения для перемещений поверхности Земли, удобные для применения на практике.

### 1. Общие уравнения и постановка задачи

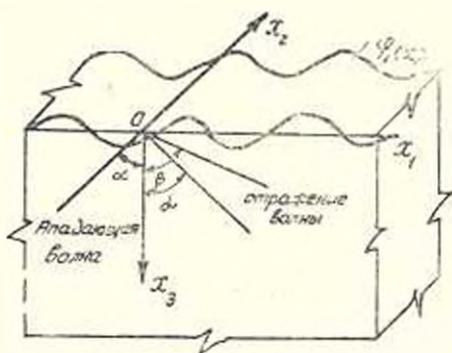
Рассматривается распространение сейсмической волны в полупространстве с неплоской поверхностью. Предполагается, что среда изотропна и однородна. Предполагается также, что интенсивность сейсмической волны так мала, что можно ограничиться линейной теорией. Задача решается для двумерного случая.

Уравнение границы поверхности задается функцией  $x_3 = \varphi(x_1)$ . Гвердос тело занимает полупространство  $x_3 > \varphi$ .

Предполагается, что под углом  $\alpha$  и направлении  $AO$ , распространяется гармоническая плоская волна (фиг. 1). Тогда, как известно [9], будут две отраженные волны — одна под углом  $\alpha$ , а другая под углом  $\beta$ . Если падающая волна продольная ( $P$ -волна), то угол отражения для отраженной  $P$ -волны будет  $\alpha$ , а для отраженной попереч-

ной волны— $\beta$ . Когда падающая волна поперечная (SV или SH-волна), тогда отраженная поперечная волна составляет с осью  $Ox_3$  угол  $\alpha$ , а отраженная продольная—угол  $\beta$ . Ось  $Ox_3$  направлена в глубину среды.

Уравнения движения упругой среды в потенциалах сводятся к двум следующим уравнениям [9]:



$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - C_1^{-2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} - C_2^{-2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

где  $\Phi$ —потенциал продольной волны,  $\psi$ —потенциал поперечной волны,  $C_1^2 = (\lambda + 2\mu)\rho^{-1}$ —квадрат скорости продольной волны,  $C_2^2 = \mu\rho^{-1}$ —квадрат скорости поперечной волны,  $\lambda$  и  $\mu$ —коэффициенты Ламе.

Перемещения выражаются через потенциалы следующим образом:

$$U_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad (1.3)$$

$$U_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (1.4)$$

Для дальнейших расчетов понадобятся также следующие выражения для компонент напряжений:

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \lambda \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (1.5)$$

$$\sigma_{33} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} + \lambda \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (1.6)$$

$$\sigma_{13} = \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} \right) \quad (1.7)$$

На поверхности  $x_3 = \varphi(x_1)$  напряжения исчезают

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = 0 \quad \text{при} \quad x_3 = \varphi(x_1) \quad (1.8)$$

## 2. Решение задачи при малоискривленной границе

Решить поставленную задачу для произвольной функции  $\varphi$  пред-

составляет значительную математическую трудность. Поэтому поставленная задача будет решена для малонескрявленной границы, будет использован метод возмущений, изложенный в работе [6]. Суть этого метода заключается в следующем: выбирают малый параметр, разлагают в ряд при  $x_3=0$  соответствующие величины в уравнениях (1.8). Таким образом, одна задача сводится к решению ряда задач. Первой задачей считается нулевое решение, соответствующее случаю плоской свободной границы

$$\sigma_{33} = \tau_{13} = 0 \text{ при } x_3 = 0$$

Во второй задаче учитываются вторые члены разложения в граничных условиях (1.8). Это соответствует первому приближению. В третьей задаче, которая соответствует второму приближению, учитываются третьи члены разложения. Аналогичным образом составляются и другие задачи более высоких приближений.

В этой работе будем ограничиваться первым приближением.

Предполагается, что: 1) глубина неровностей мала по сравнению с длиной падающей волны, 2) малы наклоны поверхности по отношению к средней плоскости.

Введем местную координатную систему  $x'_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) так, чтобы ось  $x'_3$  была направлена вдоль внутренней нормали к поверхности, а оси  $x'_1, x'_2$  были близки к направлениям соответственно, осей  $x_1$  и  $x_2$ . Тогда можно написать

$$x'_i = \alpha_{ik} x_k$$

причем  $\alpha_{ii}$  ( $i=1, 2, 3$ ) принимаются равными единице, а коэффициенты  $\alpha_{ik}$  ( $i \neq k$ ) считаются малыми первого порядка.

В новой координатной системе  $x'_i$  напряжения преобразовываются следующим образом:  $\sigma'_{33} = x_{3m} \alpha_{in} \sigma_{mn} = 0$ . Написав последнее выражение для  $\sigma'_{33}$  и  $\tau'_{13}$  до членов первого порядка малости и разлагая последнее в ряд по степеням  $\varphi$ , ограничиваясь членами первого порядка малости, получим следующие соотношения:

$$\sigma'_{33}(0) = - \left( \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \right)_{x_3=0} \varphi \quad (2.1)$$

$$\tau'_{13}(0) = \left( \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \right)_{x_3=0} \varphi - (\sigma_{11})_{x_3=0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad (2.2)$$

Таким образом, вторая задача сводится к решению системы уравнений (1.1) и (1.2) с неоднородными граничными условиями (2.1) и (2.2). Если в нулевом приближении, в плоскости  $x_3=0$ , напряжения исчезают, то в первом приближении они не исчезают, но малы и имеют порядок  $\varphi$ .

Решение нулевой задачи известно [9], поэтому приведем лишь окончательные выражения для смещения точек плоскости  $x_3=0$ , которые необходимы для дальнейших сравнений.

Для падающей продольной волны

$$U_1 = i \exp(i\zeta) (1 - Q_2 Q_3^{-1}) [k + Q_1 (2\mu k)^{-1}] A_{01} \quad \text{при } x_2 = 0 \quad (2.3)$$

$$U_2 = i \exp(i\zeta) [k_2 (1 - Q_1 Q_3^{-1}) + 2kk_2 Q_1 (k_3 \mu Q_3)^{-1}] A_{01} \quad \text{при } x_2 = 0 \quad (2.4)$$

где

$$Q_1 = \lambda (k^2 + k_2^2) + 2\mu k_2^2, \quad Q_2 = 2kk_2 - k_n Q_1 (2\mu k k_3)^{-1}$$

$$Q_3 = 2kk_2 + k_n Q_1 (2\mu k k_3)^{-1}, \quad \zeta = kx_1 - \omega t, \quad k_n = k^2 - k_2^2$$

$k_2 = k \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $k_3 = k \operatorname{ctg} \beta$  — волновое число падающей волны.  $\omega$  — частота,  $t$  — время,  $A_{01}$  — заданная амплитуда падающей волны.

Для падающей поперечной волны:

$$U_1 = -ik_3 A_{01} [1 - Q_2 Q_3^{-1} - 4k^2 (Q_1 Q_3)^{-1} \mu k_n] \exp(i\zeta) \quad \text{при } x_2 = 0 \quad (2.5)$$

$$U_2 = ik A_{01} [1 + Q_2 Q_3^{-1} + 4k_2 k_3 \mu k_n (Q_1 Q_3)^{-1}] \exp(i\zeta) \quad \text{при } x_2 = 0 \quad (2.6)$$

Приступим к решению задачи первого приближения. Для дальнейших расчетов необходимо преобразовать граничные условия (2.1) и (2.2). Подставляя в правые части выражений (2.1) и (2.2) соотношения (1.6) и (1.7), а потом решения нулевого приближения, формулы (2.1) и (2.2) примут следующий вид:

$$\sigma_{33}(0) = C(k) \varphi \exp(ikx_1) \quad (2.7)$$

$$\sigma_{31}(0) = \left[ T(k) \varphi + M(k) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right] \exp(ikx_1) \quad (2.8)$$

Конкретные виды функций  $C(k)$ ,  $T(k)$  и  $M(k)$  различны в зависимости от типа падающей волны (продольной или поперечной). Поэтому они будут приведены в дальнейшем изложении.

Решения системы уравнений (1.1) и (1.2) при граничных условиях (2.7) и (2.8) следует искать в следующем виде:

$$\Phi = (2\pi)^{-1/2} \exp(-i\omega t) \int_{-\infty}^{+\infty} [A_1 \exp(i\nu_1) + B_1 \exp(i\nu_2)] dk \quad (2.9)$$

$$\Psi = (2\pi)^{1/2} \exp(-i\omega t) \int_{-\infty}^{+\infty} [A_2 \exp(i\nu_3) + B_2 \exp(i\nu_4)] dk \quad (2.10)$$

где

$$\nu_1 = kx_1 + k_2 x_2, \quad \nu_2 = kx_1 - k_2 x_2, \quad \nu_3 = kx_1 + k_3 x_2, \quad \nu_4 = kx_1 - k_3 x_2.$$

Пусть падающая волна продольная, тогда в выражениях (2.9) и (2.10) следует подставить  $A_2 = 0$ . Учитывая соотношения (1.5) — (1.7) и подставляя решения (2.9) и (2.10) в граничные условия (2.7) и (2.8) и делая обратное преобразование Фурье, получатся следующие алгебраические соотношения:

$$-Q_1(A_1 + B_1) + 2\mu k k_3 B_2 = 0 \quad (2.11)$$

$$2k k_2 (B_2 - A_1) + k_n B_2 = H \mu^{-1} \quad (2.12)$$

где

$$G = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} C(k) \varphi dx_1 \quad (2.13)$$

$$H = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ T \varphi + M \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right] dx_1 \quad (2.14)$$

Решая систему алгебраических уравнений (2.11) и (2.12), для коэффициентов  $B_1$  и  $B_2$  получатся следующие соотношения:

$$B_1 = Q_2 Q_3^{-1} A_1 + H (\mu Q_2)^{-1} - k_n G (2\mu k k_3 Q_3)^{-1} \quad (2.15)$$

$$B_2 = (2\mu k k_3)^{-1} \{ Q_1 (1 + Q_2 Q_3^{-1}) A_1 + [1 -$$

$$- k_n (2\mu k k_3 Q_3)^{-1} Q_1] G + Q_1 H (Q_3 \mu)^{-1} \}$$

Для нахождения колебаний границы полупространства необходимо подставить решения (2.9) и (2.10), с учетом значений коэффициентов (2.15) и (2.16), в соотношения (1.3) и (1.4), тогда получится сумма нескольких интегралов.

Для расчета интегралов (2.13) и (2.14) нужно задать вид функции  $\varphi$ . Однако более удобно задать функцию искривленности границы в виде ряда Фурье. Предполагая, что  $\varphi$  удовлетворяет условиям для разложения в ряд, можно написать:

$$\varphi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_m \exp(img x_1) \quad (2.17)$$

где  $g = 2\pi\Lambda$ ,  $\Lambda$  — периоды неровностей в направлении оси координат  $x_1$ ,  $m \neq 0$ . Тогда, учитывая, что

$$\delta(g) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ig x_1) dx_1,$$

где  $\delta(g)$  — дельта-функция Дирака, для интегралов (2.13) и (2.14) получатся следующие выражения:

$$G = (2\pi)^{1/2} C(k) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi_m \delta(mg) \quad (2.18)$$

$$H = (2\pi)^{1/2} \left[ T(k) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi_m \delta(mg) + ig M(k) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m \varphi_m \delta(mg) \right] \quad (2.19)$$

Выводы формул для перемещений точек неплоской поверхности границы будут сделаны для случая  $m=1$ , в формулах (2.18) и (2.19).

Расчеты будут сделаны для фиксированных значений волновых чисел, поэтому будет положено, что

$$A_1 = (2\pi)^{1/2} A_{01} \delta(k - k_0) \quad (2.20)$$

где  $A_{01}$ ,  $\varphi_1$  — постоянные величины.

Интегрировать интегралы удается, когда  $g = \kappa - \kappa_0$ , а это означает, что длина неровностей поверхности сравнима с длиной падающей волны. Именно этот случай часто встречается на практике. Тогда для смещений поверхностных точек получаются следующие выражения:

$$U_1 = i \exp(-i\omega t) \{ k A_{01} \exp(i\nu_1) + k Q_3^{-1} | Q_2 A_{01} - C \varphi_1 k_n (2\mu k k_2)^{-1} + \\ + T \varphi_1 \mu^{-1} | \exp(i\nu_2) + (2\mu k)^{-1} | Q_1 T \varphi_1 (\mu Q_3)^{-1} + Q_1 (1 + Q_2 Q_3^{-1}) A_{01} + \\ + [1 - k_n Q_1 (2\mu k k_2 Q_3)^{-1}] C \varphi_1 | \exp(i\nu_1) \} \quad \text{при } x_3 = \varphi, \quad (2.21)$$

$$U_2 = i \exp(-i\omega t) \{ k_2 A_{01} \exp(i\nu_1) - k_2 Q_3^{-1} | Q_2 A_{01} - k_n \varphi_1 C (2\mu k k_2)^{-1} + \\ + \varphi_1 T \mu^{-1} | \exp(i\nu_2) + (2\mu k_2)^{-1} | Q_1 (1 + Q_2 Q_3^{-1}) A_{01} + \varphi_1 T k_2 Q_3 (\mu k_2 Q_3)^{-1} + \\ + [1 - k_n Q_1 (2\mu k k_2 Q_3)^{-1}] C \varphi_1 | \exp(i\nu_1) \} \quad \text{при } x_3 = \varphi \quad (2.22)$$

где

$$C(k) = 2ik_2 Q_3 Q_3^{-1} (k_n + 2kk_2) A_{01}, \quad T = -2ik_2 Q_3^{-1} | 4k^2 k_2^2 \mu + \\ + k_n Q_1 | A_{01}, \quad M = 8kk_2 Q_1 Q_3^{-1} A_{01}, \quad Q_1 = k^2(i + 2\mu) + k_2^2.$$

Сравнить полученные выражения (2.21) и (2.22) с соотношениями (2.3) и (2.4) можно только в точках  $x_3 = 0$ . Подставляя в выражения (2.21) и (2.22)  $x_3 = 0$ , получаются выражения, где только первые слагаемые совпадут с выражениями (2.3) и (2.4). Таким образом, колебания выбранных точек криволинейной границы сильно отличаются от колебаний этих же точек при плоской границе.

Пусть падающая волна поперечная, тогда в выражениях (2.9) и (2.10) следует подставить  $A_1 = 0$ . Поступая аналогичным образом, как это было сделано при  $A_2 = 0$ , можно получить систему алгебраических уравнений относительно  $B_1$  и  $B_2$ . Решая эти уравнения, для коэффициентов  $B_1$  и  $B_2$  получатся следующие выражения:

$$B_1 = 4\mu k k_2 k_n (Q_1 Q_3)^{-1} A_2 + 2kk_2 H (Q_1 Q_3)^{-1} - (1 - 4\mu k^2 k_2 k_2 Q_1^{-1} Q_3^{-1}) G Q_1^{-1} \\ B_2 = Q_2^{-1} Q_3^{-1} A_2 + 2kk_2 (Q_1 Q_3)^{-1} G + (\mu Q_2)^{-1} H$$

Аналогично, как это было сделано при падающей продольной волне, можно для смещения неровной поверхности получить следующие выражения:

$$U_1 = i \exp(-i\omega t) \{ [ Q_1 A_{01} + 2kk_2 C \varphi_2 Q_3^{-1} + \mu^{-1} \varphi_1 T ] Q_3^{-1} k_2 \exp(i\nu_1) - \\ - A_{01} k_2 \exp(i\nu_3) + [ 4\mu k k_2 k_n Q_3^{-1} A_{02} - (1 - 4\mu k^2 k_2 k_2 Q_1^{-1} Q_3^{-1}) C \varphi_1 - \\ - 2ikk_2 T \varphi_1 Q_3^{-1} | Q_1^{-1} k \exp(i\nu_2) \} \quad \text{при } x_3 = \varphi, \quad (2.23)$$

$$U_2 = i \exp(-i\omega t) \{ k A_{02} \exp(i\nu_1) + [ -4kk_2 \mu k_n Q_3^{-1} A_{01} + (1 -$$

$$-4\mu k^2 k_3 k_1 Q_1^{-1} Q_3^{-1} \varphi_1 C - 2k_2 T \varphi_1 Q_2^{-1} |k_3 Q_1^{-1} \exp(i\nu_3) + \\ + k Q_3^{-1} (Q_2 A_{02} + \varphi_2 T \mu^{-1} + 2k_2 k C \varphi_1 Q_1^{-1}) \exp(i\nu_3)\} \text{ при } x_1 = \varphi \quad (2.24)$$

где

$$C(k) = 2ik k_3 \mu |k_2 + k_3 + Q_2 Q_3^{-1} (k_2 - k_3)| A_{02} \\ T(k) = i_1 k_2 (4k^2 k_2^2 \mu Q_1^{-1} + k_3) (1 - Q_2 Q_3^{-1}) A_{02} \\ M(k) = 2\mu k k_3 (1 + Q_4 Q_1^{-1}) (Q_2 Q_3^{-1} - 1) A_{02}$$

Подставляя  $x_3 = 0$  и сравнивая с соотношениями (2.5) и (2.6), можно видеть, что как и в случае  $A_1 = 0$ , искривленность границы существенно меняет колебания выбранных точек свободной поверхности.

Нетрудно заметить, что полученные выражения (2.21) — (2.24) легко обобщить для различных значений  $m$ , однако из-за громоздкости формул здесь не приводятся.

С помощью формул (2.3) — (2.6), (2.21) — (2.24) можно вычислить горизонтальные и вертикальные перемещения неровной поверхности в точках  $x_1 = 0$  и оценить влияние неровностей свободной поверхности на колебания выбранных точек, сравнить их с колебаниями аналогичных точек плоской свободной поверхности. Результаты численных оценок приведены в таблице. Величины в таблице — безразмерные. Расчеты сделаны для грунта, для которого  $C_1^2 C_2^{-2} \approx 3$ . Случай  $k\varphi_1 = 0$  соответствует плоской поверхности полупространства.

Таблица

$k\varphi_1$	$ U_1 /kA_{01}$			$ U_3 /kA_{01}$		
	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$
0	2.3	4.74	2.16	10.43	4.43	1.9
0.1	0.66	3.593	1.728	10.41	4.58	2.11
0.2	3.62	2.716	1.296	10.39	4.72	2.33
0.3	6.58	1.839	0.864	10.36	4.87	2.54
0.4	9.54	0.962	0.432	10.34	5.02	2.76
0.5	12.5	0.085	0.01	10.31	5.16	2.97

Как видно из данных, приведенных в таблице, наличие неровностей поверхности, даже при малых значениях  $k\varphi_1$ , приводит к существенному изменению перемещений поверхности.

Авторы благодарят А. Г. Багдоева за ценные консультации, а также участников семинара «Волюновые процессы» Института механики АН Армении.

## THE PROPAGATION OF WAVES IN SEMI-SPACE WITH THE ROUGHNESS BOUNDARY

V. A. AMBARTSUMIAN, A. V. SHEKOYAN

ԱՐԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱՆՈՒՄԸ ՈՉ ՀԱՐԹ ԵՅՐ ՈՒՆԵՅՈՂ ԿՐՈՍԱՆՆԵՐԶ  
ՏԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Վ. Ա. ՀԱՐՈՒՐՅՈՒՄՅԱՆ, Ա. Վ. ՇԵԿՈՅԱՆ

Ա Վ Փ Ր Ո Փ Ո Ւ Մ

Քննարկվում է փոքր անհարթություններ ունեցող և յարումներից ազատ մակերևույթի ստիպանության դեպքում առաձգական ալիքների տարածման խնդիրը: Ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ մակերևույթի տատանման համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Уайт Дж Э. Возбуждение и распространение сейсмических волн.—М.: Недра, 1986. 264 с.
2. Aki K., Larner K. I. Surface motion of layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves.—J. Geophys. Res., 1970, v. 75, № 5, p. 953—954.
3. Саваренский Е. Ф. Сейсмические волны.—М.: Недра, 1972. 292 с.
4. Бреховских А. М., Годин О. А. Акустика глоистых сред.—М.: Наука, 1989. 425 с.
5. Белубекян М. В. О распространении упругих сдвиговых волн вдоль периодически неровной поверхности.—Докл. АН АрмССР, 1990, т. 90, № 2, с. 71—74.
6. Бреховских А. М. О распространении поверхностных рэлеевских волн вдоль неровной границы упругого тела.—Акуст. журн., 1959, т. 5, № 3, с. 282—289.
7. Campillo M., Bouchon M. Synthetic SH seismograms in a laterally varying medium by the discrete wavenumber method.—Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1985, v. 83, № 1, p. 307—317.
8. Gjoystdal H., Reinhardtsen J. E., Ursin B. Traveltime and wave front curvature calculations on three-dimensional inhomogeneous layered media with curved interfaces.—Geophys., 1984, v. 49, p. 1466—1494.
9. Новацкий В. Теория упругости.—М.: Мир, 1975. 872 с.

Երևանский архитектурно-строительный институт

Поступила в редакцию  
13.III.1991

УДК 539.374

## ОБ ОДНОЙ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

КИРАКОСЯН Р. М.

На примере ортотропных пластин предлагается один вариант уточненной теории анизотропных пластин переменной толщины, способной учитывать поперечные напряжения при удовлетворении поверхностных условий. Предлагаемая теория является обобщением теории С. А. Амбарцумяна на случай пластин переменной толщины.

Известно, что прочностные и упругие свойства современных материалов в поперечном направлении существенно уступают свойствам в направлении армирования. С другой стороны, оптимальное проектирование приводит к тонкостенным конструкциям переменной толщины. Эти обстоятельства выдвигают на первый план вопросы построения уточненных теорий анизотропных пластин и оболочек переменной толщины. Аналогичные вопросы при постоянной толщине обстоятельно рассмотрены в известных монографиях [1] и [2]. В монографии [3] приведены результаты обширных исследований по уточненной теории пластин и оболочек переменной жесткости, основанной на гипотезе прямой линии.

В настоящей статье на примере ортотропных пластин предлагается один вариант уточненной теории анизотропных пластин переменной толщины, способной учитывать поперечные касательные напряжения при удовлетворении поверхностных условий. Предлагаемая теория фактически является обобщением теории С. А. Амбарцумяна [2] на случай пластин переменной толщины.

1. Рассмотрим пластинку переменной толщины  $h$ , изготовленную из ортотропного упругого материала, главные направления которого параллельны осям прямоугольных декартовых координат  $x$ ,  $y$ , и  $z$ . Пусть на пластинку действуют поверхностные нагрузки с интенсивностями  $X^z$ ,  $Y^z$ ,  $Z^z$ , приведенными к единице площади срединной плоскости  $z=0$ . Здесь и в дальнейшем знаками « $-$ » и « $+$ » будем отмечать величины, относящиеся к поверхностям  $z = -h/2$  и  $z = +h/2$  соответственно. Условия крепления краев пластинки произвольны. Считая, что материал обладает слабыми упругими и прочностными свойствами в поперечном направлении, попытаемся построить для рассматриваемой пластинки переменной толщины уточненную теорию, учитывающую влияния напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  при удовлетворении соответствующих условий на поверхностях  $z = \pm h/2$ .

В основу предлагаемой теории ставятся следующие предположения:

- а) нормальное к срединной плоскости пластинки перемещение  $w$  не зависит от координаты  $z$ ;
- б) влияние нормального напряжения  $\sigma_z$  не учитывается;
- в) касательные напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  по толщине пластинки меняются по законам квадратичных трехчленов

$$\tau_{xz} = \varphi_1 + 2z\varphi_2 + z^2\varphi_3, \quad \tau_{yz} = \psi_1 + 2z\psi_2 + z^2\psi_3 \quad (1.1)$$

где  $\varphi_i$  и  $\psi_i$  — искомые функции координат  $x, y$ .

Направляющие косинусы внешних нормалей поверхностей пластинки  $\nu^-$  и  $\nu^+$  определяются формулами [4]

$$l^- = \cos(\nu^-, x) = l^+ = \cos(\nu^+, x) = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\sqrt{4 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}}$$

$$m^- = \cos(\nu^-, y) = m^+ = \cos(\nu^+, y) = -\frac{\frac{\partial h}{\partial y}}{\sqrt{4 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}} \quad (1.2)$$

$$n^- = \cos(\nu^-, z) = -n^+ = -\cos(\nu^+, z) = -\frac{2}{\sqrt{4 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}}$$

На каждой поверхности пластинки необходимо удовлетворить три условия. В силу предположения б) одно из этих условий отпадает, а остальные принимают вид:

$$\sigma_x^{\pm} \frac{\partial h}{\partial x} + \tau_{xy}^{\pm} \frac{\partial h}{\partial y} \pm 2\tau_{xz}^{\pm} = -2X^{\pm}$$

$$\tau_{xy}^{\pm} \frac{\partial h}{\partial x} + \sigma_y^{\pm} \frac{\partial h}{\partial y} \pm 2\tau_{yz}^{\pm} = -2Y^{\pm} \quad (1.3)$$

Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды при отсутствии объемных сил имеют вид [2]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

С учетом (1.1) и обобщенного закона Гука ортотропного материала можно написать:

$$\begin{aligned}
 e_{xz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = a_{33}\varphi_1 + za_{33}\varphi_2 + z^2a_{33}\varphi_3 \\
 e_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = a_{44}\psi_1 + za_{44}\psi_2 + z^2a_{44}\psi_3
 \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $a_{ij}$  — упругие постоянные материала,  $w$  — прогиб,  $u_x$  и  $u_y$  — перемещения пластинки вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно.

В рамках классической теории упругости законы распределения касательных напряжений (1.1) соответствуют линейному изменению напряжений  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $\tau_{xy}$ , а следовательно, и деформаций  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_{xy}$  по координате  $z$ . Соблюдая это соответствие и имея в виду (1.5), получим:

$$\begin{aligned}
 u_x &= u - z \frac{\partial w}{\partial x} + za_{33}\varphi_1, & u_y &= v - z \frac{\partial w}{\partial y} + za_{44}\psi_1 \\
 e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + za_{33} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, & e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + za_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\
 e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + z \left( a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + a_{33} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \\
 \tau_x &= B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v}{\partial y} - z \left( B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - B_{11}a_{33} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - B_{12}a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \\
 \tau_y &= B_{21} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial x} - z \left( B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{12}a_{33} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - B_{22}a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \\
 \tau_{xy} &= B_{33} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - z \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{33} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \right]
 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь  $u$ ,  $v$  — соответствующие перемещения срединной плоскости пластинки,  $B_{ij}$  — коэффициенты, которые выражаются через упругие постоянные материала с помощью известных формул [2].

На основе (1.1) и (1.7) внутренние усилия и моменты пластинки примут вид:

$$\begin{aligned}
 T_x &= h \left( B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right), & T_y &= h \left( B_{21} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
 S &= B_{33} h \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & N_x &= \frac{h}{12} \left( 12\tau_1 + h^2\epsilon_3 \right) \\
 N_y &= \frac{h}{12} \left( 12\psi_1 + h^2\epsilon_3 \right) \\
 M_x &= \frac{h^3}{12} \left( -B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{11}a_{33} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + B_{12}a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \\
 M_y &= \frac{h^3}{12} \left( -B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12}a_{33} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + B_{22}a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$H = B_{10} \frac{h^2}{12} \left( -2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial \tau_1}{\partial y} + a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \quad (1.9)$$

2. Выражения расчетных величин пластинки содержат девять неизвестных функций —  $\varphi_i$ ,  $\psi_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) и перемещения срединной плоскости  $u, v, w$ . Для определения этих неизвестных необходимо составить девять независимых уравнений со своими граничными условиями. Пять из них получаются из уравнений равновесия дифференциального элемента срединной плоскости [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= -X_2, & \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} &= -Y_2 \\ \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= -Z_2, & \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} &= N_x - hX_1 \\ & & \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} &= N_y - hY_1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{X^+ - X^-}{2}, & Y_1 &= \frac{Y^+ - Y^-}{2} \\ X_2 &= X^+ + X^-, & Y_2 &= Y^+ + Y^-, & Z_2 &= Z^+ + Z^- \end{aligned} \quad (2.2)$$

Остальные четыре уравнения получаются из поверхностных условий (1.3). Разрушающая система уравнений распадается на две самостоятельные системы, одна из которых относится к плоской задаче, а другая — к задаче изгиба пластинки. Эти системы имеют вид:

а) Плоская задача.

Уравнения равновесия —

$$\begin{aligned} h \left[ B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{21}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \left( B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \right. & \\ \left. + B_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + B_{21} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial y} &= -X_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} h \left[ B_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + \left( B_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + \right. & \\ \left. + B_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial y} + B_{21} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x} &= -Y_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из поверхностных условий следует

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{h} \left[ X_2 + \left( B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + B_{21} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial y} \right] \\ \psi_1 &= \frac{1}{h} \left[ Y_2 + \left( B_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial y} + B_{21} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

б) задача изгиба.

Уравнения равновесия—

$$3(4\varphi_1 + h^2\varphi_3) \frac{\partial h}{\partial x} + 3(4\psi_1 + h^2\psi_3) \frac{\partial h}{\partial y} + 12h \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) + h^2 \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \right) = -12Z_2 \quad (2.6)$$

$$h^2 \left[ B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - B_{11} a_{35} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - B_{66} a_{35} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - a_{44} (B_{12} - B_{66}) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \right] + 3h \left[ \left( B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - B_{11} a_{35} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - B_{12} a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \frac{\partial h}{\partial x} - B_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \frac{\partial h}{\partial y} \right] = 12X_1 - 12\varphi_1 - h^2 \varphi_3 \quad (2.7)$$

$$h^2 \left[ B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - B_{22} a_{44} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} - B_{66} a_{44} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - a_{55} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right] + 3h \left[ \left( B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{22} a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - B_{12} a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial y} + B_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right] = 12Y_1 - 12\psi_1 - h^2 \psi_3 \quad (2.8)$$

Из поверхностных условий следует

$$\varphi_3 = \frac{1}{h^2} \left\{ 4X_1 - 4\varphi_1 - h \left[ \left( B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - B_{11} a_{35} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - B_{22} a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + B_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial y} \right] \right\} \quad (2.9)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{h^2} \left\{ 4Y_1 - 4\psi_1 - h \left[ \left( B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{11} a_{35} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - B_{22} a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \frac{\partial h}{\partial y} + B_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right] \right\}$$

Подставляя (2.9) и (2.6) — (2.8), получим

$$h^2 \left\{ \left[ B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial h}{\partial x} + \left[ B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial h}{\partial y} \right\} + h \left\{ (C_x B_{11} + C_y B_{12}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \quad (2.10)$$



## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек.—М: Наука, 1974. 118 с.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин.—М: Наука, 1987. 360 с.
3. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости.—Киев: Наукова думка, 1981. 544 с.
4. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии.—М: Гостехиздат, 1956. 120 с.

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию  
11.1.1990

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ В  
 ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

БАГДАСАРЯՆ Դ. Ե., ԽԱՇԱՏՐՅԱՆ Դ. Մ.

В работе, исходя из магнитоупругой теории гибких пластины, изучены нелинейные колебания пластинки-полосы в продольном постоянном магнитном поле. Получено алгебраическое уравнение, которое связывает комплексную частоту и амплитуду колебаний.

Численным исследованием этого уравнения выявлено влияние амплитуды и магнитного поля на основные характеристики магнитоупругих колебаний.

1. Пусть упругая изотропная пластинка-полоса постоянной толщины  $2h$  отнесена к декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$  так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью  $x_1, x_2$ . Пластинка, занимающая область  $(0 \leq x_1 \leq a, -\infty < x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h)$ , изготовлена из проводящего материала и колеблется в вакууме при наличии внешнего постоянного магнитного поля с заданным вектором напряженности  $H_0(H_{01}, 0, 0)$ . Граничные условия на длинных сторонах пластинки ( $x_1=0, x_1=a$ ) таковы, что она колеблется по форме цилиндрической поверхности с образующими параллельными координатной линии  $Ox_2$  (все величины не зависят от координаты  $x_2$ ) магнитная проницаемость материала пластинки считается равной единице.

Будем пользоваться основными предположениями нелинейной теории пластины, считая справедливой гипотезу магнитоупругости тонких тел [1]. Будем считать также, что влиянием тангенциальных составляющих сил инерции и токов смещения на характеристики магнитоупругих колебаний пластинки можно пренебречь.

В силу принятых предположений система уравнений нелинейных магнитоупругих колебаний, полученная в работе [2], принимает вид.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{4\pi\sigma}{c} \left( \psi + \frac{H_{01}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) = \frac{h_1^- - h_1^+}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\nu(1-\nu^2)}{cE} \left( f + H_{01} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \left( \psi + \frac{H_{01}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) = 0$$

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2ch}{c} H_{01} \left( \psi + \frac{H_{01}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) =$$

$$-\frac{2Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right] \right\} = 0 \quad (1.1)$$

где  $u(x_1, t)$ ,  $w(x_1, t)$  — искомые перемещения точек срединной плоскости пластинки;  $\psi(x_1, t)$  — искомая тангенциальная компонента индуцированного в пластинке электрического поля,  $f(x_1, t)$  — искомая нормальная компонента индуцированного в пластинке магнитного поля  $\vec{h}(h_1, 0, f)$ ;  $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$  — цилиндрическая жесткость,  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\sigma$  — электропроводность,  $\rho$  — плотность материала пластинки;  $h_1^\pm$  — неизвестные граничные значения тангенциальной компоненты  $h_1(x_1, x_2, t)$  на поверхностях  $x_2 = \pm h$  пластинки.

Величины  $h_1^\pm$ , входящие в (1.1), определяются из решения уравнений Максвелла для окружающей среды

$$\operatorname{rot} \vec{h}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{h}^{(e)} = 0 \quad (1.2)$$

при граничном условии

$$h_1^{(e)} = f \quad (1.3)$$

на поверхности пластинки и условии затухания электромагнитных возмущений на бесконечности. При решении краевой задачи (1.2) — (1.3) принимается, что пластинка бесконечна. Тогда указанная краевая задача легко решается, а для неизвестных  $h_1^\pm$  получаются выражения

$$h_1^\pm = \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.4)$$

В (1.4)  $k$  — волновое число, которое, в зависимости от граничных условий на контуре пластинки и от напряженности внешнего магнитного поля, определяем асимптотическим методом решения соответствующей линейной задачи, предложенный в работе [3]. Причем, как показано в [3], ошибка, вносимая асимптотическим методом и предположением бесконечности пластинки при определении  $h_1^\pm$  и характеристик магнитоупругих колебаний, пренебрежимо мала.

Учитывая (1.4) из (1.1), путем исключения функции  $\psi$

$$\psi + \frac{H_{00}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{ck_0}{4\pi\sigma} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad k_0 = \frac{1+kh}{kh} \quad (1.5)$$

получим следующую систему дифференциальных уравнений, описывающую нелинейные колебания проводящей пластинки-полосы в продольном магнитном поле:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{(1-\nu^2)k_0}{4\pi E} \left( f + H_{00} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$$

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2\nu h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{khH_{00}k_0}{2\pi} \frac{\partial f}{\partial x_1} =$$

$$\left. - \frac{2Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right] = 0 \quad (1.1)$$

где  $u(x_1, t)$ ,  $w(x_1, t)$  — искомые перемещения точек срединной плоскости пластинки;  $\psi(x_1, t)$  — искомая тангенциальная компонента индуцированного в пластинке электрического поля,  $f(x_1, t)$  — искомая нормальная компонента индуцированного в пластинке магнитного поля  $\vec{h}(h, 0, f)$ ;  $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$  — цилиндрическая жесткость,  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\sigma$  — электропроводность,  $\rho$  — плотность материала пластинки;  $h_i^{\pm}$  — неизвестные граничные значения тангенциальной компоненты  $h_1(x_1, x_2, t)$  на поверхностях  $x_2 = \pm h$  пластинки.

Величины  $h_i^{\pm}$ , входящие в (1.1), определяются из решения уравнений Максвелла для окружающей среды

$$\text{rot} \vec{h}^{(e)} = \vec{j}, \quad \text{div} \vec{h}^{(e)} = 0 \quad (1.2)$$

при граничном условии

$$h_1^{(e)} = \vec{j} \quad (1.3)$$

на поверхности пластинки и условии затухания электромагнитных возмущений на бесконечности. При решении краевой задачи (1.2) — (1.3) принимается, что пластинка бесконечна. Тогда указанная краевая задача легко решается, и для неизвестных  $h_i^{\pm}$  получаются выражения

$$h_i^{\pm} = \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.4)$$

В (1.4)  $k$  — волновое число, которое, в зависимости от граничных условий на контуре пластинки и от напряженности внешнего магнитного поля, определяем асимптотическим методом решения соответствующей линейной задачи, предложенный в работе [3]. Причем, как показано в [3], ошибка, вносимая асимптотическим методом в предположении бесконечности пластинки при определении  $h_i^{\pm}$  и характеристик магнитоупругих колебаний, пренебрежимо мала.

Учитывая (1.1) из (1.1), путем исключения функции  $\psi$

$$\psi + \frac{H_{01}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{ck_0}{4\pi\epsilon} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad k_0 = \frac{1 + kh}{kh} \quad (1.5)$$

получим следующую систему дифференциальных уравнений, описывающую нелинейные колебания проводящей пластинки-полосы в продольном магнитном поле:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{(1-\nu^2)\rho_0}{4\pi\epsilon} \left( f + H_{01} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \frac{\partial j}{\partial x_1} = 0$$

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2\rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{hH_{01}\rho_0}{2\pi} \frac{\partial f}{\partial x_1} =$$

$$-\frac{2Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right] \right\} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - \frac{4-\nu}{k_0 \nu^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( j - H_{01} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (1.6)$$

В случае идеально проводящей пластинки  $\sigma \rightarrow \infty$  уравнения (1.6) принимают вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial x}{\partial x_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0$$

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - 2\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{E h \nu}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} -$$

$$-\frac{2Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right] \right\} = 0 \quad (1.7)$$

где

$$\gamma = \frac{(1-\nu^2) H_{01}^2}{2-E} \left( 1 - \frac{1}{kh} \right) \quad (1.8)$$

При решении конкретных задач к уравнениям (1.5) должны быть присоединены обычные условия закрепления краев пластинки и граничные условия для нормальной компоненты  $f$  индуцированного в пластинке магнитного поля на торцах пластинки. Если край пластинки неподвижен в поперечном направлении, то можно принять, что компонента  $\varphi$  индуцированного электрического поля на этом краю равна нулю [1].

Поэтому для рассматриваемой задачи, если принять, что края пластинки  $x_1=0$  и  $x_1=a$  в поперечном направлении неподвижны, то граничными условиями задачи помимо известных условий закрепления краев пластинки, согласно (1.5), будут также условия

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при } x_1=0, \quad x_1=a \quad (1.9)$$

Заметим, что нелинейные члены, входящие в (1.6), по своему происхождению, бывают двух типов: члены, характеризующие электродинамическую нелинейность (третий член первого уравнения системы (1.6)) и члены, характеризующие геометрическую нелинейность (второй член первого уравнения и четвертый член третьего уравнения системы (1.6)). Сказанное относится также к системе (1.7), описывающей нелинейные магнитоупругие колебания идеально проводящей пластинки. Как видно из первого уравнения системы (1.7), если  $\alpha = [(1-\nu^2)k_0 H_{01}^2 / 2-E] \ll 1$ , то третий член этого уравнения, учитывающий электродинамическую нелинейность, пренебрежимо мал по сравнению со вторым членом, учитывающим геометрическую нелинейность рассматриваемой задачи. Это заключение вытекает также из системы (1.6), если помимо  $\alpha \ll 1$  учесть также, что для реальных

проводящих материалов и конструкций  $\omega H_{01}^2 c^2 E \ll 1$ , где  $\omega$  — частота колебаний.

Таким образом, если пластинка не слишком тонкая ( $\kappa h \geq 10^{-3}$ ), а интенсивность внешнего магнитного поля не слишком велика ( $H_{01} \leq \leq 3 \cdot 10^4$  эрстед), то преобладающей является геометрическая нелинейность.

2. На основе уравнений (1.6) исследуем нелинейные магнитоупругие колебания пластинки-полосы, длинные стороны которой шарнирно оперты и неподвижны. Тогда граничными условиями задачи, согласно (1.9), будут:

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=0 \quad \text{при } x_1=0, \quad x_1=a \quad (2.1)$$

$$u(x_1, t)=0 \quad \text{при } x_1=0, \quad x_1=a \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0 \quad \text{при } x_1=0, \quad x_1=a \quad (2.3)$$

Принимая  $\alpha \ll 1$ , из первого уравнения системы (1.6), где нелинейные члены электромагнитного проникновения согласно условию  $\alpha \ll 1$  будут пренебрегаться, после удовлетворения граничным условиям (2.2), находим

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 = \frac{1}{2a} \int_0^a \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 \quad (2.4)$$

которое позволяет исключить функцию  $u$  из системы (1.6)

Остальные неизвестные функции  $w(x_1, t)$  и  $f(x_1, t)$ , удовлетворяющие граничным условиям (2.1) и (2.3), будем искать в виде

$$w = w(t) \sin \kappa x_1, \quad f = f(t) \cos \kappa x_1 \quad (2.5)$$

где  $\kappa = \pi/a$ ;  $w(t)$  и  $f(t)$  — неизвестные функции, подлежащие определению.

Подставляя (2.5) в третье уравнение системы (1.6), получим уравнение

$$\frac{df}{dt} + \frac{k_2 c^2}{4\pi a} f = k H_{01} \frac{dw}{dt} \quad (2.6)$$

которое представляет первое уравнение для определения неизвестных  $w(t)$  и  $f(t)$ .

Подставляя (2.5) во второе уравнение системы (1.6), и, применяя метод Галеркина, с учетом (2.4), получим второе уравнение относительно  $w(t)$  и  $f(t)$  в следующем виде:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \Omega_0^2 \left( 1 + \frac{3}{4k^2} w^2 \right) w + \frac{k k_2 H_{01}}{4\pi a} f = 0, \quad \Omega_0^2 = \frac{Dh^3}{2\gamma h} \quad (2.7)$$

где  $\Omega_0$  — частота собственных малых колебаний пластинки при отсутствии магнитного поля.

Наконец, из (2.6) и (2.7), путем исключения функции  $f(t)$ , приходим к следующему уравнению:

$$\left(1 + \frac{4\pi\epsilon}{k_0 k^2 c^2} \frac{d}{dt}\right) \left[ \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \Omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4h^2} \omega^2\right) \omega \right] + \frac{2H_0}{c^2} \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad (2.7)$$

описывающему нелинейные колебания пластинки-полосы конечной электропроводности в продольном постоянном магнитном поле.

3. Решение уравнения (2.8) представим в виде

$$\omega(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \quad (3.1)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — постоянные,  $\omega$  — частота колебаний.

Подставляя (3.1) в уравнение (2.8), и приравнявая к нулю коэффициенты при  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  (члены с утроенной частотой отбрасываются), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \Omega_1^2 - \gamma A^2) \omega A_1 + (\Omega_0^2 - \omega^2 + \gamma A^2) \omega A_2 &= 0 \\ \gamma_1 (\Omega_0^2 - \omega^2 + \gamma A^2) A_1 - (\omega^2 - \Omega_1^2 - \gamma A^2) \omega A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{k_0 k^2 c^2}{4\pi\epsilon}, \quad \Omega_1^2 = \Omega_0^2 - \frac{k_0 k^2}{4\pi\rho} H_{01} \\ \gamma &= \frac{9\Omega_0^2}{16h^2}, \quad A^2 = A_1^2 + A_2^2 \end{aligned}$$

$\Omega_1$  — частота малых магнитоупругих колебаний идеально проводящей пластинки в продольном магнитном поле,  $A$  — амплитуда магнитоупругих колебаний.

Требую, чтобы система (3.2) имела нетривиальное решение, получим следующее характеристическое уравнение:

$$\gamma_0 \Omega^3 - 9\Omega^2 + \gamma_0 (1 - \gamma_1 + 2,25 A^2) \Omega + \beta (1 + 2,25 A^2) = 0 \quad (3.3)$$

связывающее комплексную частоту нелинейных магнитоупругих колебаний с их амплитудой и напряженностью внешнего магнитного поля.

В (3.3) введены следующие безразмерные обозначения:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{4\pi\epsilon}{\Omega_0}, \quad \beta = \frac{k_0 c^2}{\gamma_0}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\Omega_0}, \\ \gamma_1 &= \frac{\Omega_1}{k}, \quad \gamma = \frac{\gamma_1^2}{c^2}, \quad \gamma_2 = \frac{H_{01}^2}{4\pi\rho}, \quad A_0 = \frac{A}{2h} \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_0$  — параметр, характеризующий проводимость материала пластинки,  $v_0$  — фазовая скорость распространения упругих волн в пластинке,  $\beta$  — величина, пропорциональная отношению скорости распространения электромагнитных волн в вакууме к фазовой скорости распространения упругих волн в пластинке,  $\gamma_1$  — величина, характеризующая напряженность заданного магнитного поля и численно равная скорости распространения электромагнитных волн Альвена,  $A$  — безразмерная амплитуда магнитоупругих колебаний пластинки.

При отсутствии магнитного поля ( $H_{01} = 0$ ) из (3.3) получается известная формула [4]

$$\frac{\omega^2}{\Omega_0^2} = 1 + 2,25A_0^2 \quad (3.4)$$

характеризующая амплитудно-частотные зависимости нелинейных колебаний и показывающая монотонно возрастающий характер указанной зависимости.

В случае же линейной задачи ( $I=0$ ) из (3.3) получается известное уравнение [1]

$$\sigma_0 \Omega^3 + 3\Omega^2 - \sigma_0(1 + 3\beta)\Omega + \beta = 0 \quad (3.5)$$

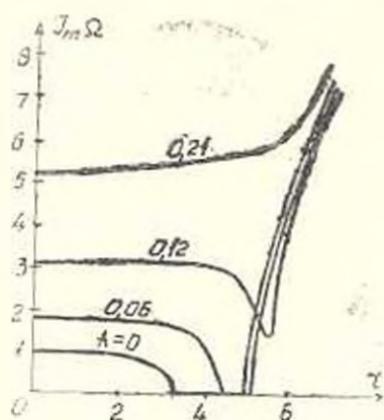
определяющее зависимость частоты малых магнитоупругих колебаний от величины напряженности внешнего магнитного поля. Исследование уравнения (3.5) показывает следующий характер этой зависимости [5]. Для сравнительно толстых пластин частота колебаний увеличивается с увеличением величины напряженности  $H_{01}$  магнитного поля. Для очень тонких пластин картина существенно меняется. В этом случае, начиная с некоторого значения  $H_{01}$ , при дальнейшем увеличении величины напряженности магнитного поля, частота малых колебаний быстро убывает, достигая нулевого уровня, который сохраняется в определенном интервале изменения  $H_{01}$ . Дальнейшее увеличение его значения приводит к резкому увеличению частоты колебаний пластинки. Для пластинки средней толщины зависимость частоты колебаний от  $H_{01}$  имеет экстремальный характер (существует точка минимума).

Ниже, на основе уравнения (3.3) проведено численное исследование с целью выявления влияния амплитуды колебания на указанную выше зависимость частоты магнитоупругих колебаний от величины напряженности магнитного поля, а также установлено влияние магнитного поля на амплитудно-частотную зависимость нелинейных колебаний.

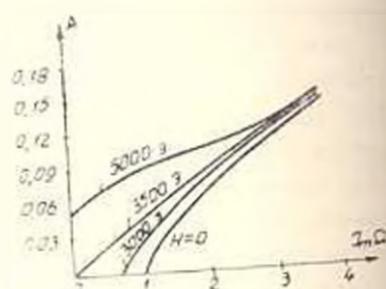
Для расчетов принято  $E=8 \cdot 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>,  $\nu=0,3$ ,  $\sigma=1,5 \cdot 10^{12}$  Г/сек,  $\rho=7,1 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup> (цинк),  $a=20$  см,  $h=0,025$  см,  $H_{01}=\tau \cdot 10^3$  э.

Размеры пластинки выбраны таким образом, чтобы для линейной задачи существовала область нулевых значений частоты магнитоупругих колебаний пластинки. Результаты расчетов представлены на фиг. 1, 2 и 3. Из фиг. 1 (где показана зависимость частоты магнитоупругих колебаний от величины напряженности магнитного поля при различных значениях амплитуды колебаний), видно, что с увеличением амплитуды колебаний ширина области нулевых значений частоты колебаний уменьшается и при определенном значении  $A_*$  полностью исчезает. При  $A_{01} > A > A_*$  зависимость частоты колебаний от  $H_{01}$  имеет экстремальный характер с точкой минимума. При дальнейшем увеличении амплитуды колебаний ( $A > A_{**}$ ) исследуемая зависимость  $\text{Im}\Omega$  от  $H_{01}$  становится монотонно-возрастающей. Аналогичный результат виден также из фиг. 2, где показана амплитудно-частотная зависимость колебаний пластинки при различных значениях величины напряженности магнитного поля. Из фиг. 2 видно, что если напряженность магнитного поля меньше некоторого зна-

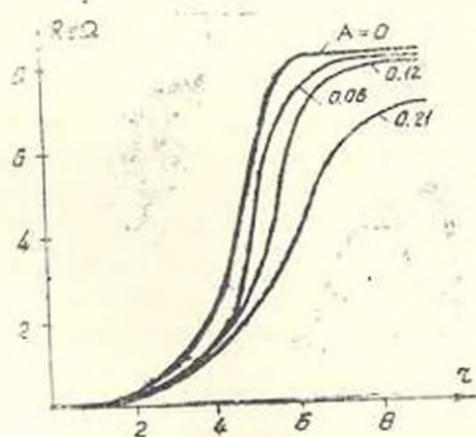
чения, то с увеличением  $A$  частота увеличивается, а если напряженность достаточно велика, то существует область изменения  $A$  ( $0 \leq A \leq A_*$ ), где  $\text{Im} \Omega = 0$ . При  $A > A_*$  зависимость вновь имеет возрастающий характер. На фиг. 3 показана зависимость коэффициента затухания магнитного прохождение от напряженности магнитного поля при



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

различных значениях амплитуды колебаний. Отсюда видно, что с увеличением  $H_{01}$  коэффициент затухания достаточно быстро увеличивается и, достигнув определенного значения, далее практически не изменяется. Влияние амплитуды колебаний уменьшает демпфирующее действие магнитного поля.

В заключение отметим, что если толщина пластинки такова, что при  $A=0$  зависимость частоты колебаний от  $H_{01}$  имеет монотонно возрастающий характер, то учет нелинейности колебаний приводит к существенному увеличению частоты колебаний и уменьшению затухания.

# NON-LINEAR VIBRATIONS OF CONDUCTIVE PLATES IN LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

G. E. BAGDASARIAN, G. M. KHACHATRIAN

## ՀԱՎՈՐԴԻՉ ՍԱՎԻ ՈՉ ԳՆԱՅԻՆ ՏՆՏՆԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԵՐԳԱՅՆԱԿԱՆ ԲԱԳՆԻՍՈՒԱԿԱՆ ԳԱՇՏՈՒՄ

Գ. Ե. ԲԱԳԴԱՍԱՐՅԱՆ, Գ. Մ. ԿԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

### Ա Վ Փ Ն Փ Ո Վ

Աշխատանքում, ելնելով ճկուն սավերի մագնիսաառնադուկանությունից, ստացվում է, որ ուղիղ երկարության հաստատուն մագնիսական դաշտում: Առաջված է հանրահաշվական հավասարում, որը կապ է ստեղծում առանձին կոմպլեքս հաճախության և ամպլիտուդի միջև: Այդ հավասարման լուծումը և ապագա արդյունքները մագնիսաառնադուկական տատանումների հիմնական բնութագրիչների վրա:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин — М. Наука, 1977.
2. Багдасарян Г. Е., Диноян Э. П. Основные уравнения и соотношения нелинейных магнитоупругих колебаний тонких электропроводящих пластинок — Изв. АН АрмССР, Механика, 1985, т. 38, № 2, с. 17—29.
3. Акопян П. Э., Багдасарян Г. Е. Колебания прямоугольной проводящей пластины в продольном магнитном поле — Изв. АН АрмССР, Механика, 1987, т. 40, № 3, с. 11—18.
4. Волымир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек — М. Наука, 1972.
5. Амбарцумян С. А. Некоторые особенности колебаний пластинок в магнитном поле — Изв. АН СССР, Механика твёрдого тела, 1983, № 4.

Երևանский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
28.I.1991

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ ТОКОНЕСУЩЕЙ НИТИ  
В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

КАЗАРЯН К. Б.

Выведены натуральные уравнения равновесного состояния нити, определяющие функции кривизны и кручения нити. Показано, что нить принимает форму различных винтовых линий. Определены условия, при которых возможны бифуркации равновесных состояний нити.

В работах [1, 2] исследована задача равновесия упругой нити в токе по внешнему магнитному полю. На основе методов теории бифуркации определены нетривиальные равновесные состояния и условия, при которых имеют место бифуркации равновесных состояний. В настоящей работе предложен иной подход к решению аналогичной задачи, связанной с определением натуральных уравнений пространственной кривой, соответствующей равновесным состояниям нити. Определены функции кривизны и кручения нити и показано, что нить под действием ponderomotorной силы взаимодействия тока с внешним магнитным полем может принять конечное число различных равновесных состояний в виде винтовых линий. Винтовые линии обвиваются вокруг цилиндра, образующие которого параллельны направлению вектора внешнего магнитного поля.

В работе [3] исследованы линейные колебания токонесущей нити в магнитном поле протекающего по ней тока. В [4] изучены нелинейные хаотические колебания токонесущей нити, растянутой механической силой и находящейся в продольном магнитном поле, параллельном току.

§1. Рассмотрим упругую гибкую нить длины  $L$ . По нити протекает электрический ток силы  $I_0$ . Нить находится во внешнем магнитном поле с постоянным вектором индукции  $\vec{B}_0$ . Нить закреплена в двух неподвижных точках, расстояние между которыми есть  $M_0$ . Эффекты самовоздействия токонесущей нити [3], обусловленные взаимодействием тока с собственным магнитным полем, не принимаются во внимание. Единственной силой, действующей на нить, является ponderomotorная сила Ампера (сила на единицу длины)

$$\vec{F}_0 = I_0 \vec{B}_0$$

Мы будем исходить из следующих векторных уравнений статической нити [5]:

$$\frac{dQ}{ds} + \vec{F}_0 = 0; \quad \vec{Q} \times \vec{\tau} = 0; \quad (\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}) = 1 \quad (1.2)$$

В (1.2)  $\vec{Q}$  есть вектор упругих внутренних натяжений (силы),  $s$  — координата длины дуги вдоль нити,  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  есть единичный вектор касательной к нити,  $\vec{r}$  — радиус-вектор точек нити. Так как вектор электрического тока всегда направлен по касательной к нити, то

$$\vec{J}_0 = i_0 \vec{\tau}$$

Из второго уравнения системы (1.1) имеем

$$\vec{Q} = Q_0 \vec{\tau} \quad (1.3)$$

Таким образом, нам следует решить векторное уравнение

$$\frac{d(Q_0 \vec{\tau})}{ds} + J_0 (\vec{\tau} \times \vec{B}_0) = 0 \quad (1.4)$$

со следующими граничными условиями закрепления нити:

$$\vec{\tau}(0) = 0; \quad \vec{r}(L) = \vec{M}_0 \quad (1.5)$$

Умножая уравнение (1.4) скалярно на вектор  $\vec{\tau}$ , получим

$$\vec{\tau} \cdot \frac{d(Q_0 \vec{\tau})}{ds} = \vec{\tau} \cdot \frac{dQ_0}{ds} + \frac{Q_0}{2} \frac{d\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}}{ds} = 0$$

откуда, в силу  $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$ , получим, что  $Q_0 = \text{const}$ . Умножая уравнение (1.4) скалярно на  $\vec{B}_0$ , получим

$$\left( \vec{B}_0 \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} (B_0 \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}) = 0; \quad \vec{B}_0 \cdot \vec{\tau} = \text{const} \quad (1.6)$$

Далее, умножая уравнение (1.4) векторно на  $\vec{B}_0$ , получим

$$\frac{d(\vec{\tau} \times \vec{B}_0)}{ds} + \frac{J_0}{Q_0} [(\vec{\tau} \cdot \vec{B}_0) \vec{B}_0 - B_0^2 \vec{\tau}] = 0 \quad (1.7)$$

Из (1.7) и (1.4) получим следующее уравнение относительно вектора  $\vec{\tau} \times \vec{B}_0$ :

$$\frac{d^2(\vec{\tau} \times \vec{B}_0)}{ds^2} + \lambda^2 (\vec{\tau} \times \vec{B}_0) = 0; \quad \left( \lambda^2 = \frac{J_0^2 B_0^2}{Q_0^2} \right) \quad (1.8)$$

Решением (1.8) является следующая функция:

$$\vec{B}_0 = \vec{A}_1 \sin s + \vec{A}_2 \cos s \quad (1.9)$$

Из (1.9)  $\vec{A}_1, \vec{A}_2$  есть произвольные постоянные векторы, перпендикулярные вектору  $\vec{B}_0$ ,  $\vec{A}_1 \cdot \vec{B}_0 = \vec{A}_2 \cdot \vec{B}_0 = 0$ . Принимая во внимание (1.4) и (1.9), получим следующее решение для вектора  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} = \rho \vec{B}_0 + \vec{A} B_0 \sin s + (\vec{A} \times \vec{B}_0) \cos s$$

где  $\rho$  есть произвольный скаляр,  $\vec{A}$  есть произвольный вектор, перпендикулярный к  $\vec{B}_0$ ,  $(\vec{B}_0 \cdot \vec{A}) = 0$

С учетом граничных условий (1.5) получим следующее искомого решение для радиус-вектора:

$$\vec{r} = \frac{(\vec{M}_0 \cdot \vec{B}_0) \vec{B}_0}{B_0^2 L} + \frac{\vec{F}}{2 \sin \frac{iL}{2}} \left[ \sin \frac{iL}{2} + \right. \quad (1.10)$$

$$\left. + \sin \left( s - \frac{iL}{2} \right) \right] + \frac{\vec{F} \times \vec{B}_0}{2 B_0 \sin \frac{iL}{2}} \left[ \cos \left( s - \frac{iL}{2} \right) - \cos \frac{iL}{2} \right]$$

где

$$\vec{F} = \vec{M}_0 - \frac{(\vec{M}_0 \cdot \vec{B}_0)}{B_0^2} \vec{B}_0$$

Отметим, что  $(\vec{F} \cdot \vec{B}_0) = 0$ , и, следовательно, функция  $\vec{r}(s)$  выражается посредством тройки взаимно-перпендикулярных векторов.

Для функции  $\vec{z}(s)$  имеем

$$\vec{z} = \frac{(\vec{M}_0 \cdot \vec{B}_0)}{B_0^2 L} + \frac{\vec{F}_\perp}{2 \sin \frac{iL}{2}} \cos \left( s - \frac{iL}{2} \right) - \quad (1.11)$$

$$- \frac{(\vec{F} \times \vec{B}_0)_\perp}{2 B_0 \sin \frac{iL}{2}} \sin \left( s - \frac{iL}{2} \right)$$

Из условия  $\vec{z}^2 = 1$  получим следующее уравнение, определяющее параметр  $i$  (натяжение  $Q_0$ ):

$$\frac{(\vec{M}_0 \cdot \vec{B}_0)^2}{L^2 B_0^2} - \frac{i^2 (\vec{M}_0 \times \vec{B}_0)^2}{4 B_0^2} \csc^2 \left( \frac{iL}{2} \right) = 1 \quad (1.12)$$

§2. На основе формул Френе для пространственной кривой для функций кривизны  $K(s)$  и кручения  $\chi(s)$  имеем

$$K(s) = \left| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right| = \frac{(\vec{M}_0 \times \vec{B}_0)_\perp^2}{2 B_0 \sin \frac{iL}{2}} \quad (2.1)$$

$$\chi(s) = \frac{\frac{dr}{ds} \cdot \left( \frac{d^2r}{ds^2} - \frac{d^2r}{ds'^2} \right)}{\left( \frac{d^2r}{ds^2} \right)^2} = \frac{(M_0 \cdot \vec{B}_0) L}{B_0 L}$$

Как видно из (2.1), функции кривизны и кручения не зависят от  $s$ , то есть они являются постоянными вдоль длины нити.

Исходя из постоянства этих функций, мы приходим к выводу, что нить в общем случае представляет собой в пространстве винтовую линию, вид которой определяется посредством параметра  $\lambda$ .

Рассмотрим отдельно конкретные частные случаи. Обозначим через  $\Theta$  угол между векторами  $\vec{B}_0$  и  $\vec{M}_0$ . Запишем условие (1.12) в виде

$$\frac{\gamma^2}{\sin^2 \gamma} \sin^2 \Theta = \frac{L^2}{M_0^2} - \cos^2 \Theta; \quad \left( \gamma = \frac{kL}{2} \right) \quad (2.2)$$

При  $\Theta \rightarrow 0$  (что соответствует случаю параллельности вектора магнитного поля линии, соединяющей точки закрепления) правая часть уравнения (2.2) стремится к  $L^2/M_0^2 - 1$ , и, следовательно,  $\gamma \rightarrow \pi m$  ( $m=1; 2; 3, \dots$ ) так, что

$$\lim_{\gamma \rightarrow \pi m} \left( \frac{\gamma^2}{\sin^2 \gamma} \sin^2 \Theta \right) = \frac{L^2}{M_0^2} - 1 \quad (2.3)$$

Из (2.3) для функций  $K$ ,  $\chi$  имеем

$$K = \frac{2M_0 \pi m}{L^2} \sqrt{\frac{L^2}{M_0^2} - 1}; \quad \chi = \frac{2M_0 \pi m}{L^2}$$

Для функции  $\vec{r}(s)$  в этом частном случае имеем следующее решение

$$\vec{r}(s) = \frac{M_0 \pi}{L} \hat{k} + \sqrt{1 - \frac{M_0^2}{L^2}} \frac{L}{2\pi m} \{ \hat{i} \sin(\lambda s - \pi m) + \hat{j} [\cos(\lambda s - \pi m) + (-1)^{m-1}] \} \quad (2.4)$$

где  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$  есть взаимно-перпендикулярные единичные векторы, причем вектор  $\hat{k}$  направлен вдоль магнитного поля  $\vec{B}_0$ .

Таким образом, в продольном магнитном поле нить принимает форму винтовой линии, обвитой вдоль цилиндра, образующие которого параллельны направлению магнитного поля. Причем имеется бесконечное дискретное множество бифуркационных состояний нити с натяжением  $Q_0 = L B_0 L / 2\pi m$ . Этот же результат получен в [1] на основе другого подхода. При  $M_0 = L$  мы имеем тривиальное решение  $\vec{r} = M_0 \varepsilon (L B_0)^{-1} \vec{B}_0$  при всех значениях параметра  $\lambda$ .

В случае, когда магнитное поле перпендикулярно вектору

$\vec{M}_0(\vec{B}_0 \cdot \vec{M}_0) = 0$ , функция кручения нити становится равной нулю, и, следовательно, нить является плоской кривой, а именно, дугой окружности с радиусом

$$R = L^2 \sin \eta / 2M_0 \eta^2 \quad (2.5)$$

В (2.5)  $\eta$  определяется из уравнения

$$\frac{\sin^2 \eta}{\eta^2} = \frac{M^2}{L^2} \quad (2.6)$$

Так как для дуги окружности с заданными длиной дуги  $L$  и длиной хорды  $M$ , радиус определяется однозначным образом, то из корней уравнения (2.6) имеет смысл только первый наименьший корень  $\eta_0 < \pi$ .

В остальных случаях, когда  $(\vec{B}_0 \cdot \vec{M}_0) \neq 0$ ;  $(\vec{B}_0 \times \vec{M}_0) \neq 0$ , нить также представляет собой винтовую линию, намотанную на цилиндр с образующими, параллельными вектору  $\vec{B}_0$ .

Кривизна и кручение нити определяются по формулам

$$K = \frac{2M_0 \sin^2 \Theta}{L^2} \frac{\eta^2}{\sin \eta}; \quad \tau = \frac{2M_0 \eta \cos \Theta}{L^2}$$

где  $\eta$  удовлетворяет уравнению (2.2).

Уравнение (2.2) имеет единственный корень, если

$$\frac{M_0^2 \sin^2 \Theta}{L^2 - M_0^2 \cos^2 \Theta} > \cos^2 \eta_1 = 0,046$$

где  $\eta_1$  есть наименьший положительный корень уравнения  $\text{tg } \eta = \eta$  ( $\eta_1 = 4,494$ ).

В остальных случаях, когда

$$\cos^2 \eta_{n-1} > \frac{M_0^2 \sin^2 \Theta}{L^2 - M_0^2 \cos^2 \Theta} > \cos^2 \eta_n \quad (n=1)$$

уравнение (2.2) имеет  $2n-1$  корней.

Таким образом, в этих случаях мы имеем дело с многозначными равновесными состояниями нити, то есть при заданных значениях поперечной силы  $F_0 = J_0 B_0$ , длин  $L$  и  $M_0$  нить может принять различные равновесные состояния в виде винтовой линии с натяжениями, для каждого состояния равными

$$Q_0 = \frac{J_0 B_0 L}{2\eta_n}$$

С другой стороны, в равновесных состояниях нити может быть реализована такая ситуация, что при различных значениях поперечной силы  $F_0$ , удовлетворяющих условию

$$F_0 \cos^2 \eta_n = \alpha_n = \text{const} \quad (n=1; 2; 3, \dots, 2n-1)$$

для разных реализуемых состояний равновесия в нити натяжение будет одинаковым и равным  $Q_0 = \alpha_0 L$ .

Отметим, что вопрос устойчивости бифуркационных состояний должен быть рассмотрен на основе анализа динамики нити, что требует отдельного изучения.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть угол между векторами  $\vec{B}_0$  и  $\vec{M}_0$  составляет  $\Theta = \pi/6$ . Тогда, при  $L/M_0 = \sqrt{3}$  нить принимает единственное равновесное состояние с натяжением  $Q_0 = J_0 B_0 L / 2\gamma_1$ ;  $\gamma_1 = 2,28$ . При  $L/M_0 = \sqrt{7}$  нить принимает три различных равновесных положения с натяжениями  $Q_0 = J_0 B_0 L / 2\gamma_i$ ;  $\gamma_1 = 2,58$ ,  $\gamma_2 = 1,12$ ;  $\gamma_3 = 4,91$ .

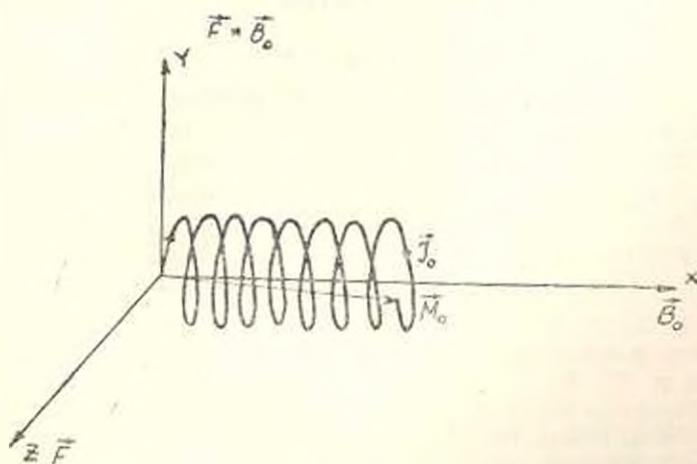
§3. Приведем теперь решение для нити в декартовой системе координат.

Введем в рассмотрение декартовую систему координат с осями  $\hat{i}_x, \hat{i}_y, \hat{i}_z$ , связанными с векторами  $\vec{F}, \vec{F} \times \vec{B}_0, \vec{B}_0$  следующим образом:

$$\hat{i}_x = \frac{\vec{B}_0}{B_0}; \quad \hat{i}_y = \frac{\vec{F} \times \vec{B}_0}{|\vec{F} \times \vec{B}_0|}; \quad \hat{i}_z = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} \quad (3.1)$$

в этой системе вектор  $\vec{M}$  расположен в плоскости  $(x, z)$ . Тогда в этой системе решение запишется в виде

$$\begin{aligned} x &= \frac{M_0 \cos \Theta}{2\pi} \varphi \\ y &= \frac{M_0 \sin \Theta}{2 \sin \gamma_1} \{ \cos[\gamma_1^{-1}(\varphi - \pi)] - \cos \gamma_1 \} \\ z &= \frac{M_0 \sin \Theta}{2 \sin \gamma_1} \{ \sin \gamma_1 + \sin[\gamma_1^{-1}(\varphi - \pi)] \} \end{aligned} \quad (3.2)$$



Фиг. 1.

где  $\varphi$  есть полярный угол  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  в плоскости  $(y, z)$ .

Исключив из (3.2) угол  $\varphi$ , мы получим решение пространственной кривой (фиг. 1) в виде функции  $w(x) = y(x) + iz(x)$ ;  $i = \sqrt{-1}$ ,  $0 \leq x \leq M_0 \cos \Theta$ ;

$$w(x) = \frac{M_0 \sin \Theta}{2 \sin \gamma_1} \left[ \exp i \gamma_1 \left( \frac{2x}{M_0 \cos \Theta} - 1 \right) - \exp(i \gamma_1) \right]$$

Длина нити определяется из условия

$$\int_0^{M_{\text{max}}} \sqrt{1 + \left| \frac{dw}{dx} \right|^2} dx = l.$$

Следует отметить, что если бы мы первоначально рассматривали данную задачу в произвольной декартовой системе координат, ставя целью определить уравнения нити, как функцию от координаты  $x$ , то мы бы имели дело с системой нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

В заключение укажем, что рассматриваемая задача в некотором смысле аналогична задаче движения заряженной частицы в магнитном поле, уравнения которой имеют вид [6]

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{e}{m_0 c} (\vec{v} \times \vec{B}_0) = 0; \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

где  $e$  — заряд,  $m_0$  — масса частицы,  $\vec{v}$  — скорость частицы.

## DETERMINATION OF THE CURRENT-CARRYING THREAD EQUILIBRIUM FORMS IN MAGNETIC FIELD

K. V. KAZARIAN

### ՄԱԿՆԻՍԱԿԱՆ ՊԱՇՏՈՒՄ ՀԱՍՏԱՐԱՍԱՐ ԹԵՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՆԻՐԻ ՋԵՎԵՐԻ ԲՆՈՐՈՇՈՒՄԸ

Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ա. Ճ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Արտածված են թեյի հաճախարակչի զիճակի բնական հաճախարանները, որոշված են թեյի կորոթչան և սյուրման ֆունկցիաները: Յուրջ են տրված, որ թեյն բնդունում է կանաչան պատասակային ղժերի ձև: Արտածված են այն պայմանները, երբ ճնարարը են թեյի հաճախարակչի զիճակների բիֆուրկացիաները:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Wolfe P. Equilibrium states of an elastic conductor in a magnetic field.—TAMS 278 (1983), p. 377—387.
2. Wolfe P. Bifurcation theory of an elastic conducting wire subject to magnetic Forces.—Technical report, MDS8-05-PW, TR88-65, (1988), p. 22.
3. Nowacki J. P. Vibrating string in a magnetic field.—Int. J. of Appl. electromag. netic in materials, 1, (1990), p. 127—133.
4. Kazarian K. V., Galoian V. Ts. Chaotic vibration of a current-carrying string in a magnetic field.—Proc. 28-th Polish solid mechanics conference, (1990), p. 115—117.
5. Савицкий В. А. Механика гибких стержней и нитей.—М.: Машиностроение, 1978, 221 с.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.—М.: Изд. Физико-мат. литер., 1960, 107 с.

Институт механики АН Армении

48

Поступила в редакцию

12.III.1991

УДК 532.517.2

ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА И ТЕПЛОТДАЧА СТРУКТУРНОЙ  
НЕСИММЕТРИЧНОЙ ЖИДКОСТИ

ПЕТРОСЯН Л. Г.

Дается решение задачи Куэтта в случае несжимаемой структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений. Рассмотрено распределение температуры в случае вынужденного коллективного течения вязкой несжимаемой несимметричной жидкости. Показано, что выделение тепла больше, чем для классических ньютоновских жидкостей, где внутреннее вращение не учитывается.

Задачу о движении жидкости между двумя параллельными плоскими стенками, из которых одна покоится, а другая движется в своей плоскости с постоянной скоростью (течение Куэтта) рассмотрена в работе [1]. В работе [2] рассмотрено распределение температуры для течения Куэтта. Вышеуказанные решения были основаны на классической теории континуума. Однако классическая точка зрения налагает сильные ограничения на пределы, в которых континуальное описание макроскопического поведения может успешно отражать тонкую структуру материала. Накопившиеся факты свидетельствуют о том, что классическая теория континуума Навье-Стокса не может точно предсказать поведение некоторого класса жидкостей и особенно течений через тонкие капилляры и узкие зазоры, так как не содержит механизма для объяснения наблюдаемых новых физических явлений. Такая потеря точности возможна на случаях, когда характерный размер системы (расстояние между плоскими стенками) сравним с характерной материальной длиной вещества, значение которой обусловлено средним размером молекул или зерен, содержащихся в среде [3].

Это обстоятельство (совместно с другими недостатками классической теории континуума) привело исследователей к разработке теории несимметричных жидкостей.

Все более очевидно, что разработанные в последнее время положения теории структурных жидкостей могут успешно описывать не-ньютоновские поведения реальных жидкостей. В этой теории введены два независимых кинематических векторных поля, одно из которых представляет поступательные движения частиц жидкости, а другое — угловые вращательные движения частиц, характеризующие внутренние степени свободы, соответствующие им моментные напряжения. В

\* К настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных этой тематике, о чем достаточно полно изложено в [3].

динамике структурных несимметричных жидкостей вращательные степени свободы учитываются путем введения в законы сохранения внутреннего «спиного» момента количества движения [3—12]. Характерным отличием теории структурных сред с несимметричным тензором напряжений является присутствие масштабных параметров. Эти жидкости реагируют на микровращательные движения и спиновую инерцию, поэтому могут воспринимать распределенные поверхностные и массовые пары сил.

В работе [13] в рамках модели [14] рассматривался нагрев микрополяридной жидкости за счет вязкой диссипации энергии при ее течении в плоском канале, когда одна из пластины движется относительно другой с постоянной скоростью, в случае нулевого перепада давления (простое течение Куэтта). Найдены выражения для полей скорости и микровращения, а также для функции вязкой диссипации энергии.

В настоящей работе дается решение задачи Куэтта в случае несжимаемой структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений. Рассмотрено распределение температуры с учетом тепла, возникающего вследствие трения.

## 1. Основные уравнения движения

Общая система уравнений вязкой несжимаемой жидкости с несимметричным тензором напряжений имеет вид [3, 6]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + 2\nu \nabla \cdot (\nabla \vec{v})^d + \nu_r \nabla \times [2\vec{\omega} - \nabla \langle \vec{v} \rangle] + \vec{f} \\ I \frac{d\vec{\omega}}{dt} &= 2\nu_r (\nabla \times \vec{v} - 2\vec{\omega}) + c_0 \nabla (\nabla \cdot \vec{\omega}) + 2c_d \nabla \cdot (\nabla \vec{\omega})^d + \\ &+ 2c_a \nabla \cdot (\nabla \vec{\omega})^a + \vec{c} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho$  — массовая плотность,  $p$  — давление,  $I$  — скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы,  $\vec{v}$  — вектор скорости точки,  $\vec{\omega}$  — вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума,  $\nu$  — кинематическая ньютоновская вязкость,  $\nu_r$  — кинематическая вращательная вязкость,  $c_0$ ,  $c_a$ ,  $c_d$  — коэффициенты моментной вязкости,  $d(\dots)/dt$  — полная производная по времени,  $\nabla$  — пространственный градиент,  $(\nabla \vec{v})^d$  и  $(\nabla \vec{\omega})^d$  — симметричные части соответствующих диад,  $(\nabla \vec{v})^a$  и  $(\nabla \vec{\omega})^a$  — антисимметричные диады,  $\vec{f}$  — вектор массовых сил,  $\vec{c}$  — вектор массового момента.

К активным массовым силам, входящим в уравнения движения, необходимо присоединить архимедову подъемную силу, возникающую вследствие изменений объема, связанных с нагреванием.

В работе [1] показано, что массовая сила, обусловленная архимедовой подъемной силой, одинакова по порядку своей величины с силами инерции и трения лишь в том случае, если соотношения между числом Грасгофа  $Gr = \frac{g \beta L^3 (\Delta T)_0}{\nu^2}$  и числом Рейнольдса  $R = \frac{V_0 L}{\nu}$  равно

$$Gr \approx R^2$$

Здесь  $g$  — ускорение свободного падения,  $\beta$  — коэффициент кубического расширения,  $(\Delta T)_0 = T_w - T_\infty$  — разность температур тела (стенки) и жидкости,  $L$  — характерная длина,  $V_0$  — характерная скорость.

Такое соотношение между числом Грасгофа и числом Рейнольдса может существовать только при очень малых скоростях течения и значительных разностях температур.

Анализ системы уравнений движения (1.1) показывает, что в случае модели структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений, учитывающей внутренние степени свободы, массовая сила, обусловленная архимедовой подъемной силой, одинакова по порядку своей величины с силами инерции и трения, если  $Gr \approx R^2$ , то есть учет вращения частицы жидкости не приносит ничего нового в нем.

Таким образом, архимедову подъемную силу в уравнениях (1.1) можно не учитывать при умеренно больших скоростях (при больших числах Рейнольдса) и при малых разностях температур [1]. Известно, что такие течения называются вынужденными конвективными течениями [1]. В случаях, когда архимедову подъемную силу в уравнениях движения (1.1) можно отбросить, а вязкости считать не зависящими от температуры, распределение скоростей становится независимым от распределения температуры.

## 2. Течение Куэтта

Особенно простое точное решение системы уравнений (1.1) получается для течения Куэтта, то есть для установившегося ламинарного течения между двумя параллельными плоскими стенками, из которых одна покоится, а другая движется в своей собственной плоскости с постоянной скоростью  $U$  (фиг. 1). Пусть расстояние между стенками равно  $h$ , скорость  $u$  направлена по оси  $x$ , составляющие скорости  $v$  и  $w$  всюду равны нулю, всюду равны нулю и составляющие угловой скорости  $\omega_x, \omega_y$ . Имеем

$$\begin{aligned} v = w = 0, \quad u = u(y) \\ \omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega(y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

В этом случае уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно

вию, а уравнения поступательного и вращательного движений (без учета архимедовой подъемной силы) сводятся к виду

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}$$

и

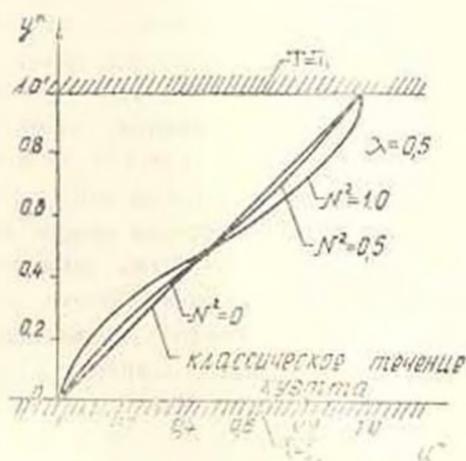
$$\frac{dp}{dx} = (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{d^2 u}{dy^2} + 2\gamma_2 \frac{d\omega}{dy} \quad (2.2)$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{c'_a + c'_d}{2\gamma_2} \frac{d^2 \omega}{dy^2} - 2\omega \quad (2.3)$$

Здесь

$$\gamma_1 = \rho_1 g, \quad \gamma_2 = \rho_2 g, \quad c'_a = \rho c_a, \quad c'_d = \rho c_d$$

Уравнения (2.2) и (2.3) являются линейными дифференциальными уравнениями относительно  $u(y)$  и  $\omega(y)$ .



Фиг. 1.

Предполагем, что жидкость прилипает к стенкам при  $y=0$  и  $y=h$ , тогда граничные условия для поступательной скорости и угловой скорости вращения частиц будут [3, 15]

$$u=0, \quad \omega=0 \quad \text{при } y=0$$

$$u=U, \quad \omega=0 \quad \text{при } y=h \quad (2.4)$$

Решение системы уравнений (2.2) и (2.3) с учетом граничных условий (2.4) имеет следующий вид:

$$u = \frac{1}{\gamma_1} \frac{dp}{dx} \left( \frac{y^2}{2} - \frac{N^2 h}{k} \frac{\text{ch}ky - 1}{\text{sh}kh} \right) - C \left| y - \frac{N^2}{k} \left[ \text{sh}ky - \frac{(\text{ch}ky - 1)(\text{ch}kh - 1)}{\text{sh}kh} \right] \right| \quad (2.5)$$

$$\omega = \frac{1}{2\tau} \frac{dp}{dx} \left( \frac{\text{sh}ky}{\text{sh}kh} h - y \right) - \frac{1}{2} C \left[ \text{ch}ky - \frac{\text{ch}kh - 1}{\text{sh}kh} \text{sh}ky - 1 \right] \quad (2.6)$$

Здесь

$$k = \frac{N}{l}, \quad N = \left( \frac{\tau_r}{\tau_l + \tau_r} \right)^{1/2}, \quad l = \left( \frac{c_a + c_d}{4\tau_l} \right)^{1/2}$$

а постоянная интегрирования  $C$  дается соотношением

$$C = \frac{1}{2} \left( \frac{h}{\tau} \frac{dp}{dx} - \frac{U}{\frac{h}{2} - \frac{N^2 \text{ch}kh - 1}{k \text{sh}kh}} \right) \quad (2.7)$$

В дальнейшем, для простоты решения, рассмотрим случай нулевого перепада давления (течение чистого сдвига). Тогда, для распределения поперечной скорости  $u$  и скорости вращения частицы  $\omega$  будем иметь

$$u^* = \frac{u}{U} = C^* \left\{ y^* - \frac{N^2}{\lambda} \left[ \text{sh}\lambda y^* - \frac{(\text{ch}\lambda y^* - 1)(\text{ch}\lambda - 1)}{\text{sh}\lambda} \right] \right\} \quad (2.8)$$

$$\omega^* = \frac{\omega h}{U} = \frac{1}{2} C^* \left[ \text{ch}\lambda y^* - \frac{\text{ch}\lambda - 1}{\text{sh}\lambda} \text{sh}\lambda y^* - 1 \right] \quad (2.9)$$

где

$$C^* = \frac{1}{1 - \frac{2N^2 \text{ch}\lambda - 1}{\lambda \text{sh}\lambda}}, \quad \lambda = kh, \quad y^* = \frac{y}{h}$$

В предельном случае  $N \rightarrow 0$  или  $\lambda \rightarrow \infty$  выражение безразмерной поперечной скорости (2.8) переходит к классическому решению

$$\lim_{\substack{N \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow \infty}} u^* = y^* \quad (2.10)$$

и (2.9) даст  $\omega = 0$ .

$\lambda$  — действительное число, характеризующее взаимосвязь между геометрией и свойствами жидкости, так как  $\tau$ ,  $\tau_r$ ,  $c_a$ ,  $c_d$  неотрицательны.

Для различных значений  $N$  (при  $\lambda = 0.5$ ) на фиг. 1 изображено отличие скорости от классического течения Куэтта.

Как видим, учет несимметричности тензора напряжений жидкости (микроструктуры) приводит к увеличению скорости в прилегающей к движущейся стенке половине и уменьшает в другой половине скорости по сравнению со скоростью течения классической ньютоновской жидкости. Причем, чем больше  $N$ , тем больше эти эффекты.

### 3. Составление уравнения энергии

Из уравнения «первого закона термодинамики» для систем с несимметричным тензором напряжений имеем [3]

$$\rho \frac{de}{dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v} + \rho \Phi + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad (3.1)$$

где

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T$$

Здесь  $e$ —удельная внутренняя энергия,  $\vec{q}$ —вектор потока тепла через границу площади в единицу времени за счет теплопроводности,  $\kappa$ —коэффициент теплопроводности,  $T$ —абсолютная температура,  $\Phi$ —скорость диссипации механической энергии (на единицу массы жидкости), вызываемой вязкостью жидкости.

Для скорости диссипации (в случае плоского течения) имеем [3]

$$\Phi = \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} + (c_a + c_d) \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] + \tau_r \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 4\omega \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 4\omega^2 \right] \quad (3.2)$$

В том случае, когда скорость движения жидкости мала по сравнению со скоростью звука, то возникающие в результате движения изменения давления настолько малы, что вызываемыми ими изменениями термодинамических величин можно пренебречь. При определении производных от термодинамических величин в этом случае давление надо считать постоянным. Тогда будем иметь следующее термодинамическое соотношение [16]

$$T \frac{ds}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} \quad (3.3)$$

где  $s$ —удельная энтропия,  $c_p$ —удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Используя уравнение сохранения энергии (3.1), соотношение (3.3) перепишем в виде

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa}{\rho c_p} \nabla^2 T + \frac{1}{c_p} \Phi \quad (3.4)$$

Здесь были использованы также термодинамическое соотношение Гиббса и уравнение неразрывности в форме [17]

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + p \frac{d(1/\rho)}{dt}, \quad \rho \frac{d(1/\rho)}{dt} = -\nabla \cdot \vec{v}$$

#### 4. Определение распределения температуры

Так как для задачи Куэтта скорость диссипации согласно (3.2) равна

$$\rho \Phi = (\tau + \tau_r) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \tau_r \left( \omega \frac{\partial u}{\partial y} + \omega^2 \right) + (c_a + c_d) \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2$$

то уравнение для распределения температуры (уравнение энергии (3.4)) примет вид

$$\begin{aligned} \rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + (\eta_1 + \eta_r) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \\ + 4\eta_r \left( \omega \frac{\partial u}{\partial y} + \omega^2 \right) + (c_a' + c_d') \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Очень простое решение для распределения температуры получается при следующих граничных условиях, определяющих температуру на стенках:

$$\begin{aligned} T = T_0 \quad \text{при } y=0 \\ T = T_1 \quad \text{при } y=h \end{aligned} \quad (4.2)$$

то есть при постоянном значении температуры вдоль каждой стенки.

Уравнение (4.1) при граничных условиях (4.2) дает для распределения температуры решение, не зависящее от  $x$ . Поскольку  $v=0$ , а  $T$  не зависит от  $x$ , вся левая часть уравнения (4.1), представляющая перенос тепла посредством конвекции, сводится к [1, 18]. Следовательно, возникающее при течении поле температуры обусловлено только теплопроводностью в поперечном направлении и теплом, образующимся вследствие трения. Отбросив в уравнении (4.1) члены, равные нулю, получим

$$\kappa \frac{d^2 T}{dy^2} = -(\eta_1 + \eta_r) \left( \frac{du}{dy} \right)^2 - 4\eta_r \left( \omega \frac{du}{dy} + \omega^2 \right) - (c_a' + c_d') \left( \frac{d\omega}{dy} \right)^2 \quad (4.3)$$

Вычисляя из (2.8) и (2.9) значения  $\omega^2$ , производных  $\frac{du}{dy}$ ,  $\frac{d\omega}{dy}$  и подставляя в уравнение (4.3), получим

$$\begin{aligned} \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{y}{h} + \frac{\chi C^{*2} U^2}{2\kappa(T_1 - T_0)} \frac{y}{h} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) + \frac{\eta C^{*2} U^2}{2\kappa(T_1 - T_0)} \frac{N^2}{U^2} \left\{ 4 \left( \operatorname{ch} \lambda \frac{y}{h} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{y}{h} \operatorname{ch} \lambda \right) - \frac{1}{2} \left( \operatorname{ch} 2\lambda \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \operatorname{ch} 2\lambda \right) \right\} \left[ 1 + \frac{(\operatorname{ch} \lambda - 1)^2}{\operatorname{sh}^2 \lambda} \right] + \\ + \frac{\operatorname{ch} \lambda - 1}{\operatorname{sh} \lambda} \left( \operatorname{sh} 2\lambda \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \operatorname{sh} 2\lambda \right) - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \left[ 7 - \frac{(\operatorname{ch} \lambda - 1)^2}{\operatorname{sh}^2 \lambda} \right] - \\ - \frac{4N^2}{1 - N^2} \frac{\operatorname{ch} \lambda - 1}{\operatorname{sh} \lambda} \left( \operatorname{sh} \lambda \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \operatorname{sh} \lambda \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Введя обозначение  $T_1 - T_0 = (\Delta T)_0$ , представим безразмерный параметр

$$\frac{\chi U^2}{\kappa(T_1 - T_0)}$$

в виде произведения [1]

$$\frac{\gamma U^2}{2(T_1 - T_0)} = \frac{\gamma c_p}{2} \frac{U^2}{c_p(\Delta T)_0} = \text{Pr} \cdot \text{Ec}$$

Следовательно, этот параметр может быть выражен через число Прандтля и через число Эккерта. Таким образом, в рассматриваемом случае, в котором конвекция тепла отсутствует, температурное поле зависит только от произведения  $\text{Pr} \cdot \text{Ec}$ .

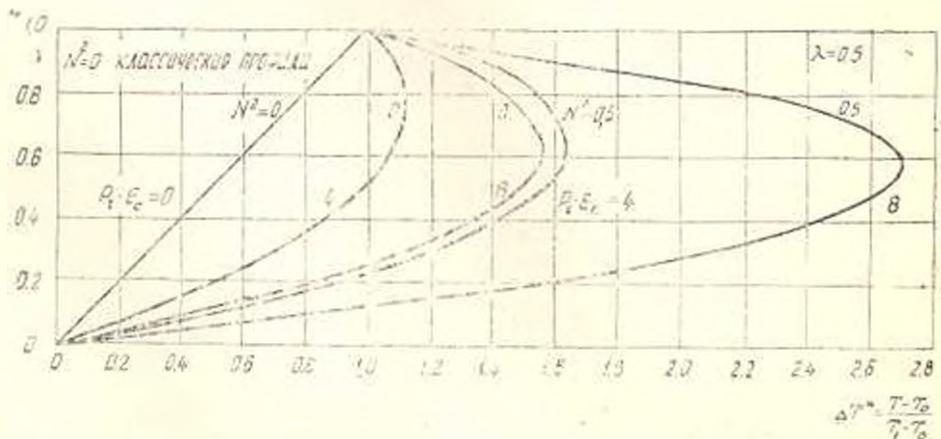
Окончательно для распределения температуры получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = & \frac{y}{h} + \frac{1}{2} \text{Pr} \cdot \text{Ec} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \frac{1}{2} \text{Pr} \cdot \text{Ec} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) (C^{**} - 1) + \\ & + \frac{1}{2} C^{**} \text{Pr} \cdot \text{Ec} \frac{N^2}{\lambda^2} \left\{ 4 \left( \text{ch} \lambda \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \text{ch} \lambda \right) - \frac{1}{2} \left( \text{ch} 2\lambda \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \text{ch} 2\lambda \right) \right\} \left[ 1 + \right. \\ & + \left. \frac{(\text{ch} \lambda - 1)^2}{\text{sh}^2 \lambda} \right] + \frac{\text{ch} \lambda - 1}{\text{sh} \lambda} \left( \text{sh} 2\lambda \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \text{sh} 2\lambda \right) - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \left[ 7 - \frac{(\text{ch} \lambda - 1)_x}{\text{sh}^2 \lambda} \right] - \\ & - \frac{4N^2}{1 - N^2} \frac{\text{ch} \lambda - 1}{\text{sh} \lambda} \left( \text{sh} \lambda \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \text{sh} \lambda \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из (4.5) видно, что распределение температуры складывается из двух частей. Первая часть соответствует решению классической ньютоновской жидкости [1], на эту часть налагается распределение, зависящее от тепла, возникающего вследствие несимметричности жидкости, то есть учета внутреннего вращения.

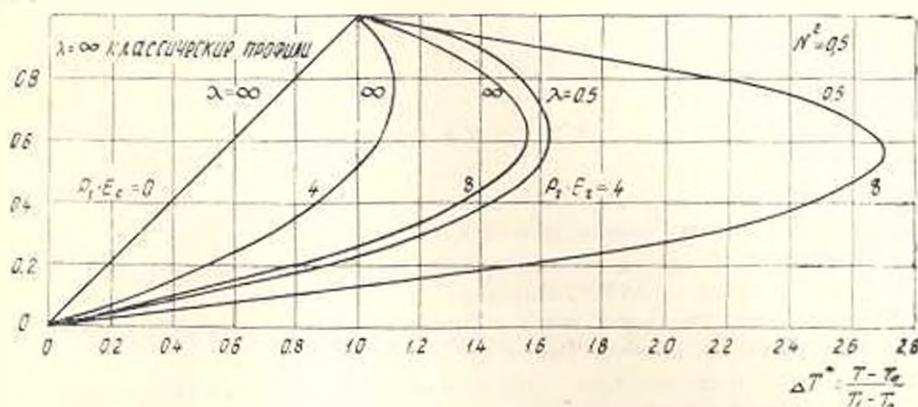
В предельном случае  $N \rightarrow 0$  или  $\lambda \rightarrow \infty$  выражение распределения температуры (4.4) сводится к классическому решению для течения Куэтта, полученное Г. Шлихтингом [1]

$$\lim_{\substack{N \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow \infty}} \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{y}{h} + \frac{\gamma U^2}{2\alpha(T_1 - T_0)} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$



Фиг. 2

Распределение температуры при течении Куэтта с учетом тепла, возникающего вследствие трения, для различных значений безразмерного параметра связи  $\lambda'$  (при  $\nu=0,5$ ,  $PrEc=0; 4; 8$ ) изображено на фиг. 2.



Фиг. 3.

Как видно из фиг. 2, выделение тепла здесь больше тепла для классических ньютоновских жидкостей.

На фиг. 3 показаны графики распределения безразмерной температуры при различных значениях параметра  $\lambda$  (при  $N^2=0,5$ ,  $Pr \cdot Ec = 0; 4; 8$ ).

Из графика видно, что чем ниже значение  $\lambda$ , тем более ярко выражены эффекты учета подструктуры жидкости на распределения температуры по сечению течения.

## THE COUETTE FLOW AND HEAT TRANSFER OF THE STRUCTURAL NONSYMMETRIC FLUID

I. G. PETROSIAN

ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔԱՅԻՆ ՈՂ ՍԻՄՏՐԻԿ ՀՆԱՌԻԿԻ ԿՈՒԵՏՏԻ ՀՈՍՔԸ ԵՎ ԶԵՐՄԱՏՎՈՒԹՅՈՒՆԸ

Է. Գ. ՊԵՏՐՈՍԻԱՆ

Ա Վ Փ Ո Վ Ո Մ

Տրված է Կուետտի խնդրի լուծումը ոչ սիմետրիկ լարման թենզորով անսիզմետրի կառուցվածքային հեղուկի դեպքում: Դիտարկված է ջերմաստիճանի

բաշխումը մածուցիկ անսեղմելի ոչ սիմետրիկ հեղուկի ստիպողական կոնվեկտիվ հոսքի դեպքում: Ցույց է արված, որ ջերմության անշատումը ազնվին է, քան նյութոսնյան դասական հեղուկների նմանը, որ ներքին պոսույտը հաշվի չի առնվում:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шлихтинг Л. Теория пограничного слоя.—М: Наука, 1974. 711 с.
2. Schlichting H. Einige exakte Lösungen für die Temperaturverteilung in einer laminaren Strömung.—ZAMM, 1951, Band 31, p. 78—83.
3. Петросян Л. Г. Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений.—Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984. 308 с.
4. Grad H. Statistical mechanics—Thermodynamics and fluid dynamics of systems, with an arbitrary number of Integrals.—Commun. pure. appl. math., 1952, vol. 5, № 4, p. 455—494.
5. Азро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В. Асимметрическая гидромеханика.—ИММ, 1965, т. 29, вып. 2, с. 297—308.
6. Нгуен Ван Дьеп, Листров А. Т. О неізотермической модели несимметричных жидкостей.—Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5, с. 132—136.
7. Петросян Л. Г. Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжений. 1. Основные уравнения.—Ученые записки, ЕГУ, 1976, № 3, с. 56—63.
8. Петросян Л. Г. Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжений. 2. Феноменологические уравнения. Перекрестные эффекты.—Ученые записки, ЕГУ, 1977, № 2, с. 74—80.
9. Петросян Л. Г. Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжений. 3. Пристеночный и приосевой эффекты в цуэлеплевском течении суспемии.—Ученые записки, ЕГУ, 1978, № 2, с. 46—54.
10. Петросян Л. Г. К построению модели магнитной гидродинамики несимметричных жидкостей.—Прикладная механика, 1976, т. 12, № 11, с. 103—109.
11. Петросян Л. Г. О модели электрогидродинамики с несимметричным тензором напряжений.—ЖГФ, 1979, т. 49, вып. 3, с. 481—487.
12. Петросян Л. Г. К построению неізотермической модели электрогидродинамики с несимметричным тензором напряжений.—Прикладная механика, 1980, т. 16, № 4, с. 108—114.
13. Мисун Н. П., Прохоренко П. П. Нагрев микрополяриной жидкости вследствие вязкой диссипации энергии в каналах. Ч. II. Течение Куэтта.—Инженерно-физический ж., 1981, т. XLVI, № 3, с. 393—398.
14. Eringen A. C. Theory of micropolar fluids.—J. Math. Mech., 1966, vol. 18, № 1, p. 1—18.
15. Петросян Л. Г. Об одной задаче пограничного слоя с моментными напряжениями.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1973, т. 26, № 3, с. 47—57.
16. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Гидродинамика.—М.: Наука, 1986. 736 с.
17. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика.—М.: Мир, 1964. 456 с.
18. Гребер Г., Эрк С., Гривуль У. Основы учения о теплообмене.—М.: Изд. иностран. лит., 1958. 366 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию  
4.X.1990