

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1991

УДК 624.074-433.042.8

О КОЛЕБАНИЯХ И УСТОЙЧИВОСТИ ДЛИННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДВЕРЖЕННЫХ ДЕЙСТВИЮ КРУЧЕНИЯ И ДАВЛЕНИЯ

КУКУДЖАНОВ С. И.

Исследовано влияние предварительного действия нагрузок кручения и нормального давления (как внешнего, так и внутреннего) на спектральные характеристики длинных ортотропных цилиндрических оболочек. Рассмотрен также вопрос устойчивости.

Вопросы о собственных несимметричных колебаниях и устойчивости длинных ортотропных цилиндрических оболочек, находящихся под предварительным действием крутящих моментов (применяемых по торцам оболочки) и нормального давления, недостаточно освещены в литературе. Для ортотропных оболочек средней длины вопрос устойчивости подробно изучен в работе [1].

Исследование проведено на основании полубезмоментной теории достаточно хорошо, отражающей физическую суть явления [2]. При решении учитывались главные граничные условия. Ввиду того, что точное удовлетворение всем граничным условиям в задачах колебания и устойчивости цилиндрических оболочек, подверженных действию кручения, представляет определенные трудности, обычно, считается возможным удовлетворение главным граничным условиям. Решения, полученные таким образом, для определения низших частотных и критических характеристик длинных оболочек является достаточно хорошим приближением для решений, соответствующих свободному опиранию краев [3, 4].

В работе получены формулы и кривые для определения низших частот длинных оболочек от величины крутящего момента, нормального давления, геометрии и параметров ортотропии оболочки, а также кривые зависимости критических крутящих моментов от нормального давления (как внешнего, так и внутреннего). В предельном случае достаточно длинных изотропных оболочек на основании полученных зависимостей получаем формулу Тимошенко для критического момента [5].

Используя основные допущения полубезмоментной теории и пренебрегая влиянием продольной компоненты сил инерции [6], получаем основное уравнение относительно радиального перемещения

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^1}{\partial \varphi^1} \left(\frac{\partial^1 w}{\partial \varphi^1} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right) + \frac{E_1}{E_2} \frac{\partial^1 w}{\partial \xi^1} - I_2^0 \left(\frac{\partial^1 w}{\partial \varphi^0} - \frac{\partial^1 w}{\partial \varphi^1} \right) - \right. \\ & \left. - S_2^0 \left(\frac{\partial^1 w}{\partial \xi^1 \partial \varphi^1} - \frac{\partial^1 w}{\partial \xi^1 \partial \varphi^2} \right) - \frac{\rho R^2}{E_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^1 w}{\partial \varphi^1} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\xi = \frac{h^2}{12R^2}, \quad \varphi = \frac{s^0}{E_2} = -\frac{qR}{E_2 h}, \quad s^0 = \frac{\tau^0}{E_2} = \frac{M}{2\pi R^2 E_2 h} \quad (2)$$

φ^0, φ^1 — касательное и окружное нормальное напряжения исходного состояния; M, q — крутящий момент и давление; R, l, h — радиус, длина, толщина оболочки; ξ, φ — безразмерные координаты в осевом и окружном направлениях ($\xi = x/R$).

Определение собственных колебаний предварительно напряженной оболочки сводится к нахождению ненулевых решений уравнения (1) при краевых условиях

$$w(0, \varphi, t) = w(l, \varphi, t) = 0, \quad l = l/R \quad (3)$$

Решение для собственных колебаний предварительно напряженных оболочек представим в виде ряда

$$w = e^{i\omega t} \sum_{m,n} \sin i_{m\xi} [A_{mn} \sin n(\varphi - \gamma\xi) + B_{mn} \cos n(\varphi - \gamma\xi)] \quad (4)$$

где $i_m = \frac{m\pi R}{l}$. В разложении (4) члены с косинусоидальным множителем осевого направления отсутствуют в связи с граничными условиями (3).

Выражение (4) представим в виде

$$\begin{aligned} w = e^{i\omega t} \sum_{mn} \left\{ \frac{A_{mn}}{2} (\cos[n(\varphi - \gamma\xi) - i_{m\xi}] - \cos[n(\varphi - \gamma\xi) + i_{m\xi}]) + \right. \\ \left. + \frac{B_{mn}}{2} (\sin[n(\varphi - \gamma\xi) + i_{m\xi}] - \sin[n(\varphi - \gamma\xi) - i_{m\xi}]) \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя (5) в уравнение (1), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{mn} \{ A_{mn} \Psi(n, -m) \cos[n(\varphi - \gamma\xi) - i_{m\xi}] - A_{mn} \Psi(n, m) \cos[n(\varphi - \gamma\xi) + i_{m\xi}] + \\ + B_{mn} \Psi(n, m) \sin[n(\varphi - \gamma\xi) + i_{m\xi}] - B_{mn} \Psi(n, -m) \sin[n(\varphi - \gamma\xi) - i_{m\xi}] \} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Psi(n, \pm m) = 4n^4(n^2 - 1)^2 + \frac{E_1}{E_2} n^4 + S_2^0 n^2 - n^2(n^2 - 1) + I_2^0 n^2(n^2 - 1) - \\ - \Omega_2 n^2(n^2 + 1), \quad \mu_{\pm} = \pm n\gamma + i_m, \quad \Omega_2 = \rho R^2 E_2^{-1} \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} A_{mn} [\Psi(n, -m) - \Psi(n, m)] = 0, \quad A_{mn} [\Psi(n, -m) + \Psi(n, m)] = 0 \\ B_{mn} [\Psi(n, m) - \Psi(n, -m)] = 0, \quad B_{mn} [\Psi(n, m) + \Psi(n, -m)] = 0 \end{aligned}$$

Следовательно, для любой пары m, n должно иметь место равенство

$$W(n, m) = 0, \quad W(n, -m) = 0 \quad (7)$$

Таким образом, для существования нетривиального решения уравнения (1) при крайних условиях (3) необходимо и достаточно, чтобы нашлись целые m, n , удовлетворяющие условиям (7).

Соотношения (7) представляют собой следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \Omega_1 \omega^2 &= \frac{\epsilon n^2 (n^2 - 1)^2}{n^3 + 1} + \frac{E_1}{E_2} \frac{(-n\gamma + i_m)^4}{n^2 (n^2 + 1)} + \frac{2s_2^0 (-n\gamma + i_m) n (n^2 - 1)}{n^2 + 1} + \\ &\quad + \frac{t_2^0 n^2 (n^2 - 1)}{n^2 + 1} \\ \Omega_2 \omega^2 &= \frac{\epsilon n^2 (n^2 - 1)^2}{n^3 + 1} + \frac{E_1}{E_2} \frac{(-n\gamma - i_m)^4}{n^2 (n^2 + 1)} + \frac{2s_2^0 (-n\gamma - i_m) n (n^2 - 1)}{n^2 + 1} + \\ &\quad + \frac{t_2^0 n^2 (n^2 - 1)}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \Omega_1 \omega^2 &= \frac{\epsilon n^2 (n^2 - 1)^2}{n^3 + 1} + \frac{E_1}{E_2} \frac{(n\gamma)^4 + 6(n\gamma)^2 i_m^2 + i_m^4}{n^2 (n^2 + 1)} - \frac{2s_2^0 (n\gamma) n (n^2 - 1)}{n^2 + 1} - \\ &\quad - \frac{t_2^0 n^2 (n^2 - 1)}{n^2 + 1} \end{aligned} \quad (8)$$

$$(E_1/E_2) \{ (n\gamma)^4 + (n\gamma) i_m^2 \} - \frac{s_2^0}{2} n^2 (n^2 - 1) = 0 \quad (9)$$

На основании формулы (8) нетрудно заметить, что наименьшая частота и зависимости от m реализуется при $m=1$.

Упростим выражение (8), используя равенство (9), тогда

$$\Omega_2 \omega^2 = \frac{\epsilon n^2 (n^2 - 1)^2}{n^3 + 1} + \frac{E_1}{E_2} \frac{i_1^4 + 2i_1^2 z^2 - 3(z\gamma)^4}{n^2 (n^2 + 1)} + \frac{t_2^0 n^2 (n^2 - 1)}{n^2 + 1} \quad (10)$$

Введем обозначения

$$n\gamma = z, \quad s_2^0/s_2 = \bar{s}_2, \quad t_2^0/t_* = \bar{t}_2, \quad s_* = \frac{(12\epsilon)^{1/4}}{3\sqrt{2}}, \quad t_* = 3z \quad (11)$$

тогда формула (10) и соотношение (9) примут вид

$$\Omega_2 \omega^2 = \frac{\epsilon n^2 (n^2 - 1)^2}{n^3 + 1} + \frac{E_1}{E_2} \frac{i_1^4 + 2i_1^2 z^2 - 3z^4}{n^2 (n^2 + 1)} + \frac{3\bar{t}_2 \epsilon n^2 (n^2 - 1)}{n^2 + 1} \quad (12)$$

$$z^4 + 3pz + 2q = 0, \quad p = \frac{i_1^2}{3}, \quad q = -\frac{E_2}{E_1} s_2 n^2 (n^2 - 1) s_*, \quad (13)$$

Представим E_1 и E_2 в следующем виде (x_1, x_2 — независимые параметры)

$$E_1 = x_1 E, \quad E_2 = x_2 E$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{t}_2 &= \frac{\bar{t}}{\alpha_1}, \quad \bar{t} = \frac{t^0}{t_k}, \quad t^0 = -\frac{qR}{Eh} \\ q &= -\frac{\bar{s}}{\alpha_1} n^2 (n^2 - 1) s_0, \quad \bar{s} = \frac{s^0}{s_n}, \quad s^0 = \frac{\tau^0}{E} \end{aligned} \quad (14)$$

Так как дискриминант уравнения (13) $D > 0$, то имеем одно действительное решение

$$z = u_1 + u_2, \quad u_{1,2} = (-q \pm \sqrt{q^2 + p^3})^{1/3} \quad (15)$$

В частности, на основании выражений (12), (13) для изотропной оболочки ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) при $t^0 = s^0 = 0$ имеем $\gamma = 0$ и известную формулу $\Omega_0^2 = [n^2(n^2 - 1)^2 + 1] / [n^2(n^2 + 1)]^{-1}$, $\Omega = \Omega_0 R^2 E^{-1}$.

Введем геометрический параметр

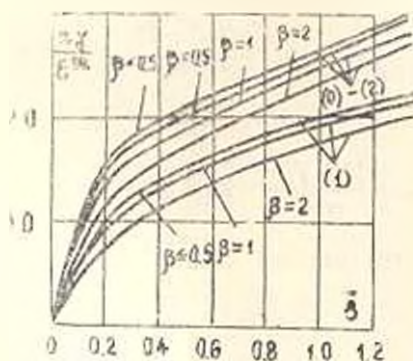
$$\beta = (R^2 - 1)^{1/2} \quad (16)$$

и рассмотрим оболочки для различных β .

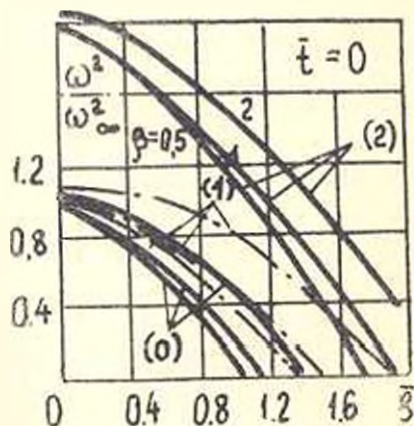
Выражение $n\gamma$ на основании (14), (15) имеет вид

$$\begin{aligned} n\gamma &= \left\{ \sqrt[3]{2(12)^{1/3} \frac{\bar{s}}{\alpha_1} + \sqrt{2(12)^{2/3} \left(\frac{\bar{s}}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{3}\right)^3}} \right\}^{1/3} + \left\{ \sqrt[3]{2(12)^{1/3} \frac{\bar{s}}{\alpha_1} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{2(12)^{2/3} \left(\frac{\bar{s}}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{3}\right)^3}} \right\}^{1/3} \end{aligned} \quad (17)$$

На фиг. 1 представлены кривые изменения значений $n\gamma$ в зависимости от предварительного сдвигающего напряжения \bar{s} (при $n=2$), когда $\beta = 0,5; 1; 2$ для различных значений ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) (0), ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$) (1), ($\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$) (2).



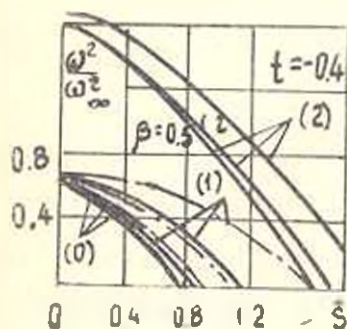
Фиг. 1.



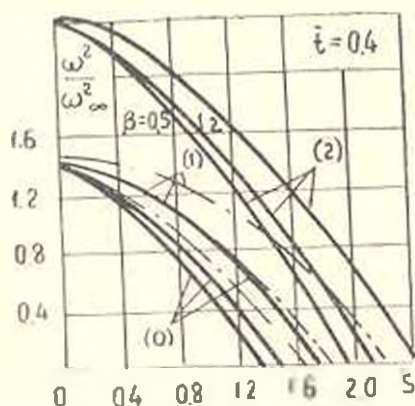
Фиг. 2.

На фиг. 2, 3, 4 приведены кривые изменения частоты ω в зависимости от \bar{s} для случаев (0), (1), (2), когда $\bar{t} = 0$; $-0,4; 0,4$ (положительные значения \bar{t} соответствуют внутреннему давлению; отрицательные — внешнему давлению). По оси ординат на этой фигуре

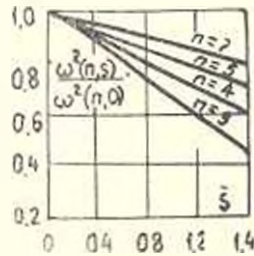
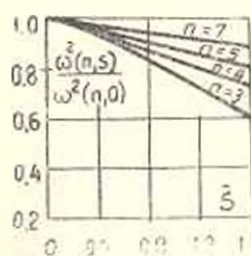
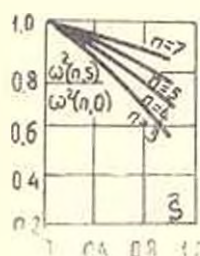
отложена безразмерная частота ω^2/ω_∞^2 ($\omega_\infty^2 = \Omega^2 - \frac{36}{5}$), а по оси абсцисс—безразмерная величина \bar{s} . Критические нагрузки получаются как точки пересечения с осью абсцисс кривых, выражающих зависимость наименьшей частоты от нагрузки.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

На основании формулы (15), аналогичным образом, нетрудно определить значения n_* при $n=3, 4, 5, \dots$. Подставляя эти значения n и n_* для фиксированных значений $\sigma_1, \sigma_2, \bar{s}, \bar{t}$ в формулу (12), получаем соответствующие значения ω . В частности, на фиг. 5 приведены кривые изменения частоты в зависимости от \bar{s} при $n=3, 4, 5, \dots$ для $\bar{s}=0,5; 1; 2$ (при $\bar{t}=0,4$), для случаев (0), (1), (2). При этом соответствующие частотные кривые (для фиксированного n), в отличие от нижней частоты, для приведенных значений \bar{s} практически сливаются. Аналогичным образом нетрудно построить кривые и для иных значений исследуемых параметров.

Таким образом, показана степень влияния параметров ортотропичности на частотные характеристики предварительно закрученной оболочки как при действии внешнего, так и внутреннего давления. На основании приведенных кривых нетрудно заметить, что влияние параметров E_1 и E_2 на частотные характеристики в зависимости от значений нормального давления и крутящих моментов различно: если при малых

значениях \bar{s} большую роль оказывает величина радиального модуля упругости E_2 , то по мере возрастания \bar{s} роль продольного модуля упругости E_1 возрастает и тем больше, чем больше параметр β . Отмечено существенное влияние исследуемых факторов на низшие частоты и сравнительно слабое на высшие частоты.

На основании соотношений (12), (13) нетрудно получить критические зависимости для \bar{s} и \bar{t} (для различных значений α_1 и α_2).

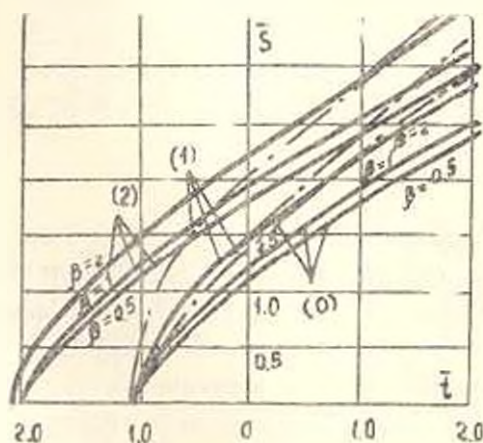
При $\omega=0$ из этих формул получаем

$$t = \alpha_1 \frac{n^2 - 1}{3} + \alpha_2 \frac{\alpha_1^4 + 2\alpha_1(n_1^2 - 3(n_1))}{3n^4(n^2 - 1)}, \quad \bar{t} = \frac{t^0}{t_*}, \quad t^0 = -\frac{qR}{Eh} \quad (18)$$

$$(n_1)^4 + \alpha_1(n_1) - \alpha_1^{-1} \frac{\bar{s}}{2} n^4(n^2 - 1)s_* = 0, \quad \bar{s} = \frac{s^0}{s_*}, \quad s^0 = \frac{\tau^0}{E} \quad (19)$$

В частности, при $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ и $s^0 = 0$ на основании (18), (19) имеем $n_1^4 = 0$ и $\bar{t} = \frac{1}{3} \{ (n^2 - 1) + \alpha_1^4 [n^4(n^2 - 1)]^{-1} \}$, откуда для достаточно длинных оболочек, при $n=2$, получаем известную формулу $t_* = 3\tau$.

Согласно формуле (19) получаем зависимость $n_1(\bar{s})$. Поэтому, задавая \bar{s} , для фиксированного n получаем соответствующее значение n_1 . Подставляя это значение n_1 (при $n=2$) в формулу (18), получаем соответствующее критическое значение t_* . На фиг. 6, для вышерассмотренных случаев (0), (1), (2) приведены зависимости $t_*(\bar{s}_*)$ для $\beta = 0,5$; 1; 2.



Фиг. 6.

При $\bar{t} = 0$, $n = 2$ уравнение (18) принимает вид

$$3\alpha_1 z^2 - 2\alpha_2 z - (\alpha_1^4 \alpha_1 + 12\alpha_2 \alpha_2) = 0$$

Положительный корень этого уравнения имеет вид

$$z = \frac{\alpha_1^4}{3} \left[1 + \sqrt{1 + 3 \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1 + 4}{\alpha_1^2 - 1} \right)} \right] \quad (20)$$

Если принять, что

$$(z_1/z_2)^{1/2} z_1^{-1/2} \leq 12 \quad (21)$$

то формула (20) принимает вид

$$z = \frac{z_1^2}{3} \left[1 + 12\sqrt{3} \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^{1/2} \frac{1}{z_1^2 z^{-1/2}} \right] \quad (22)$$

Подставляя это значение u в формулу (19), имеем

$$S^0 = z_1^{1/2} z_2^{3/4} \frac{(12z)^{3/4}}{3\sqrt{2}} \left[1 + \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{1/2} \frac{z_1 z^{-1/2}}{12\sqrt{3}} \right] \left[1 + 4 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{1/2} \frac{z_1 z^{-1/2}}{12\sqrt{3}} \right] \quad (23)$$

При рассмотрении достаточно длинных оболочек, когда

$$(z_1/z_2)^{1/2} z_1 z^{-1/2} \leq 0,5 \quad (24)$$

формула (23) упрощается и принимает вид

$$S^0 = z_1^{1/2} z_2^{3/4} \frac{(12z)^{3/4}}{3\sqrt{2}} \quad (25)$$

При $z_1 = z_2 = 1$ из (25) получаем известную формулу Тимошенко для критического крутящего момента достаточно длинных оболочек, где влияние граничных условий не учитывалось [5]. Следовательно, отсюда получаем, что при выполнении неравенства (24), граничными условиями можно пренебречь. При этом учитывалось, что неучтенные граничные условия практически мало существенны, так как наибольшее расхождение между критическими сдвигающими усилиями для длинных оболочек для граничных условий: $w = u = 0$ и $w = T_1 = 0$ составляет величина около 10% [7], тогда как условия по w , S , w_{xx} , w_{xx} являются несущественными [8], [9]. В то же время, из работы [4] следует, что критическое сдвигающее усилие, полученное при удовлетворении главных граничных условий $w = 0$, дает достаточно хорошую аппроксимацию результатов как для граничных условий свободного опирания, так и жесткого закрепления.

Рассмотренные вопросы представляют существенный интерес при динамических расчетах предварительно закрученных длинных ортотропных оболочек, подверженных действию нормального давления.

ABOUT VIBRATIONS AND STABILITY OF LONG ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS UNDER ACTION OF TORSION AND PRESSURE

S. N. KUKUDJANOV

ԱՌՐՈՐԴԱՆ ԵՎ ՀԱՇՎԱՆ ԱՉԳԵՑՈՒԹՅԱՆԸ ԵՆԻՓԱԿ ԵՐԿԱՐ ՕՐԲԻՏՏՐԱԳ
ՓԱՆԱՅԻՆ ԹԱԳԱՆԵՐԻՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ս. Ն. ԿՈՒԴՅԱՆՈՎ

Ս. Ս. Փ. Ս. Փ. Ս. Փ.

Հետազոտված է ուղիղանի և նորմալ ճնշման (իջնագետ արտաքին, աշխարհ
էլ ևերքին) նախնական զործող բեռների ազդեցությունը երկար օրբիտորալ

այանային թաղանթների սպեկտրայ բնութագրիչները գիտարկված է նաև հայտնության հարցը:

Հետազոտումը կատարված է կիսաանմոճենա տեսության շրման վրա: Հոսման ժամանակ հաշի են առնվել զխազոր եզրային պայմանները: Մտադված են ցածր հաճախականությունների որոշման համար բանաձևեր՝ կախված պատող մոմենտի, նորմալ մնշման, երկրաչափության և թաղանթի որթարտադրայի պարամետրերից. ինչպես նաև կրիտիկական պատող մոմենտների նորմալ ճնշումից կախվածության կորերը:

LITERATURE

1. Диринский В. М., Ахметжанов С. Ч. Устойчивость цилиндрической ортотропной оболочки при кручении и нормальном движении. Прочность цилиндрических оболочек.—М.: Госиздат оборон. промыш., 1959, с. 95—108.
2. Тимошенко С. П. Тorsion thin-walled cylinders.—М.: Сизпромиз, 1962, 344 с.
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник, Г. З. Под редак. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко.—М.: Машиностроение, 1968, 567 с.
4. Тимошенко С. П. К вопросу об устойчивости цилиндрической оболочки при кручении.—Прикл. механика, 1960, 16, № 9, с. 132—134.
5. Тимошенко С. П. Устойчивость стержневых систем.—М.-Л.: Гостехиздат, 1955, 565 с.
6. Кикриджия С. И. Влияние тангенциальных граничных условий на собственные колебания предварительно-напряженной ортотропной цилиндрической оболочки.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 5, с. 19—26.
7. Алузян Н. А. Критическая нагрузка длинной цилиндрической круговой оболочки при кручении.—Прикл. матем. и мех., 1954, т. 18, вып. 1, с. 27—34.
8. Yamaai N., Kodama S. Buckling of circular cylindrical shells under torsion.—Rept. Inst. High Speed Mech. Japan, Rept. 1: 1965—1966, v. 17, № 168, pp. 171—184; Rept. 2: 1966—1967, v. 18, № 17, pp. 121—142.
9. Batdorf S. B., Stein M., Schilderout M. Critical stress of thin-walled cylinders in torsion.—NACA, Techn. Note, 1947, № 1344.

Институт математики
АН Грузии

Поступил в редакцию
13 III 1999

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЯМ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

Л. А. ДАВТЯН

Рассматривается устойчивость и колебания многослойной прямоугольной пластинки. Причем, в одном случае слои пластинки повернуты симметрично относительно срединной плоскости пластинки, а в другом — антисимметрично. В обоих случаях получена критическая сжимающая нагрузка и исследуется зависимость критической нагрузки от расположения слоев пластинки относительно друг друга.

Исследуются устойчивость и свободные колебания многослойной прямоугольной пластинки. Материал слоев один и тот же, ортотропный, слои повернуты друг относительно друга на некоторый угол. Причем, в одном случае они повернуты симметрично относительно срединной плоскости пластинки, а в другом — антисимметрично. Оба эти случая изучаются в отдельности.

1. В случае симметричного расположения слоев уравнение устойчивости пластинки при одностороннем сжатии будет

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1)$$

где для моментов и изменений кривизны имеем

$$\begin{aligned} M_1 &= D_{11} \varepsilon_1 + D_{12} \varepsilon_2 + D_{16} \varepsilon_6 \\ M_2 &= D_{12} \varepsilon_1 + D_{22} \varepsilon_2 + D_{26} \varepsilon_6 \\ H &= D_{16} \varepsilon_1 + D_{26} \varepsilon_2 + D_{66} \varepsilon_6 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \varepsilon_6 = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.3)$$

Приведенные цилиндрические жесткости определяются, как [1]

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{2h^3}{3} \sum_{k=1}^n [k^3 - (k-1)^3] B_{ij}^{(k)} \\ K_{ij} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где упругие коэффициенты каждого слоя выражаются через начальные характеристики материала следующим образом [2; 3]:

$$B_{11}^{(k)} = B_{11} \cos^4 \varphi_k + 2(B_{12} + 2B_{66}) \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + B_{22} \sin^4 \varphi_k$$

$$B_{22}^{(k)} = B_{11} \sin^4 \varphi_k + 2(B_{12} + 2B_{66}) \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + B_{22} \cos^4 \varphi_k$$

$$B_{12}^{(k)} = B_{12} + [B_{11} + B_{22} - 2(B_{12} + 2B_{66})] \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k$$

$$B_{66}^{(k)} = B_{66} + [B_{11} + B_{22} - 2(H_{12} + 2B_{66})] \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k$$

$$B_{11}^{(k)} = \frac{1}{2} [B_{22} \sin^4 \varphi_k - B_{11} \cos^2 \varphi_k + (B_{12} + 2B_{66}) \cos 2\varphi_k] \sin 2\varphi_k \quad (1.5)$$

$$B_{22}^{(k)} = \frac{1}{2} [B_{22} \cos^2 \varphi_k - B_{11} \sin^2 \varphi_k - (B_{12} + 2B_{66}) \cos 2\varphi_k] \sin 2\varphi_k$$

Рассмотрим пластинку, все стороны которой свободно оперты

$$w=0 \quad M_1=0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad x=a \quad (1.6)$$

$$w=0 \quad M_2=0 \quad \text{при} \quad y=0 \quad y=b \quad (1.7)$$

Решение (1.1) ищем в виде следующих тригонометрических рядов, удовлетворяющих граничным условиям (1.6) и (1.7):

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin^{l_m} x \sin^{l_n} y \quad (1.8)$$

$$M_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin^{l_m} x \sin^{l_n} y$$

$$M_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin^{l_m} x \sin^{l_n} y \quad (1.9)$$

$$H = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} \cos^{l_m} x \cos^{l_n} y, \quad l_m = \frac{m\pi}{a}, \quad l_n = \frac{n\pi}{b}$$

В [4] подобная задача решена другим методом—методом малого параметра.

При (1.8) и (1.9) все граничные условия удовлетворяются точно, однако, если исходить из (1.2) и (1.8), то соотношения (1.2) будут верны везде кроме границы.

Подставляя (1.8), (1.9) в (1.1)–(1.3), при этом учитывая, что

$$\begin{aligned} \sin^{l_m} x &= \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_{pm} \cos^{l_p} x \\ \cos^{l_m} x &= \sum_{p=1}^{\infty} \delta_{pm} \sin^{l_p} x \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\gamma_{pm} = \frac{2m[1-(-1)^{p+m}]}{\pi(m^2-p^2)}, \quad \delta_{pm} = \frac{2p[1-(-1)^{p+m}]}{\pi(p^2-m^2)}$$

в окончательном виде для a_{mn} получим

$$\begin{aligned} & a_{pq} [(D_{11}^2 \gamma_p^2 + D_{22}^2 \gamma_q^2) \gamma_p^2 + (D_{11}^2 \delta_p^2 + D_{22}^2 \delta_q^2) \delta_q^2 + 4D_{66}^2 \gamma_p^2 \delta_q^2 - P_1 \gamma_p^2] = \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{mn} \delta_{pm} \delta_{qn} \gamma_p \gamma_q [D_{11} (\gamma_p^2 + \gamma_q^2) + D_{22} (\delta_p^2 + \delta_q^2)] \end{aligned} \quad (1.11)$$

Критическую нагрузку получим, приравняв определитель этой бесконечной системы нулю. Беря конечный определитель, относительно

по P получим алгебраическое уравнение. Значение критической нагрузки можно уточнить, повышая порядок определителя.

Рассмотрим четырехслойную пластинку из стеклотекстолита КАСТ-В, которая имеет следующие упругие постоянные:

$$\begin{aligned} E_1 &= 21,5 \text{ ГПа}; \quad E_2 = 12,3 \text{ ГПа} \\ G &= 2,07 \text{ ГПа}; \quad \nu_1 = 0,19; \quad \nu_2 = 0,11 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Так как упругие свойства материала пластинки в ее плоскости в различных направлениях разные, то значение критической нагрузки будет различным в зависимости от расположения слоев.

Поэтому можно найти те положения слоев пластинки, при которых критическая нагрузка будет наибольшей.

Таблица 1

$$\bar{P} = \frac{Pb^2}{E_1 D_{11}^0}$$

	0	15	30	45	60	75	90
0	2,918	2,938	2,975	2,980	2,934	2,868	2,835
	2,918	2,937	2,976	2,981	2,935	2,866	2,835
15	3,027	3,033	3,064	3,073	3,035	2,970	2,931
	3,063	3,084	3,112	3,127	3,080	3,012	2,980
30	3,254	3,260	3,250	3,298	3,262	3,195	3,167
	3,327	3,349	3,348	3,391	3,341	3,276	3,245
45	3,314	3,324	3,352	3,361	3,325	3,259	3,228
	3,364	3,385	3,423	3,429	3,382	3,313	3,282
60	2,995	3,036	3,259	3,072	3,035	2,943	2,936
	3,012	3,058	3,289	3,101	3,055	2,987	2,954
75	2,556	2,574	2,610	2,617	2,581	2,503	2,475
	2,560	2,581	2,691	2,624	2,584	2,509	2,477
90	2,337	2,354	2,391	2,399	2,351	2,286	2,254
	2,337	2,357	2,392	2,401	2,354	2,286	2,254

В табл. 1 приведены значения безразмерной критической нагрузки $\bar{P} = \frac{Pb^2}{E_1 D_{11}^0}$ в зависимости от углов поворота слоев. Вычисления проводились во втором приближении для пластинки $\frac{a}{b} = 0,7$. D_{11}^0 — жесткость пластинки при совпадении координатных систем. Относительно которых рассчитываем жесткости.

В каждой клетке таблицы во вторых строках помещены \bar{P} , если формально принять $D_{11} D_{22} \rightarrow 0$.

Из таблицы видно, что:

а) наибольшая критическая нагрузка получается при $\varphi_1 = \varphi_2 = 45^\circ$, то есть фактический многослой превращается в один слой;

б) ортотропное решение (пренебрежение D_{66}) приводит к увеличению критической нагрузки.

2. В случае антисимметричного расположения слоев пластинки, помимо моментов, в срединной плоскости появляются также тангенциальные усилия [1], то есть пластинка претерпевает изгиб и плоскую деформацию. Поэтому, здесь уравнение устойчивости (1.1) должно быть дополнено еще системой

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

Усилия и моменты выражаются формулами:

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + K_{12}\varepsilon_{12}, & T_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + K_{22}\varepsilon_{12} \\ S &= C_{66}w + K_{26}\varepsilon_1 + K_{26}\varepsilon_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= D_{11}\varepsilon_1 + D_{12}\varepsilon_2 + K_{12}\varepsilon_{12}, & M_2 &= D_{12}\varepsilon_1 + D_{22}\varepsilon_2 + K_{22}\varepsilon_{12} \\ H &= D_{66}\varepsilon_{12} + K_{26}\varepsilon_1 + K_{26}\varepsilon_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$K_{ij} = h^3 \sum_{k=1}^N \{k^2 - (k-1)^2\} B_{ij}^{(k)}, \quad C_{ij} = 2h \sum_{k=1}^N B_{ij}^{(k)} \quad (2.5)$$

Подставляя (2.2)–(2.5) в (1.1) и (2.1), получим

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3K_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - K_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \\ C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 3K_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - K_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + K_{12} \left(3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) - \\ - K_{26} \left(3 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + P \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \end{aligned}$$

Решение системы (2.6) ищем в виде

$$u = f \sin n_m \cos n_y y, \quad v = \varphi \cos n_m \sin n_y y, \quad w = \psi \sin n_m \sin n_y y \quad (2.7)$$

удовлетворяющем граничным условиям

$$\begin{aligned} u = S = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad x = a \\ v = S = 0 \quad \text{при} \quad y = 0; \quad y = b \end{aligned} \quad (2.8)$$

После подстановки (2.7) в (2.6), получим систему алгебраических уравнений относительно f, φ, ψ . Приравняв определитель этой системы нулю, для сжимающего усилия получим следующее выражение:

$$\frac{\rho b^3}{2D_{11}} = \frac{1}{D_{11}} \left[\frac{m^2}{c^2} D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22} \frac{c^2}{m^2} - \frac{\left(C_{11} \frac{m^2}{c^2} C_{66} \right) \left(3K_{10} + K_{10} \frac{m^2}{c^2} \right)^2 + \left(C_{66} \frac{m^2}{c^2} + C_{22} \right) \left(3K_{10} \frac{m^2}{c^2} + K_{20} \right)^2 \frac{c^2}{m^2}}{\left(C_{11} \frac{m^2}{c^2} + C_{66} \right) \left(C_{66} \frac{m^2}{c^2} + C_{22} \right) - (C_{12} + C_{66})^2 \frac{m^2}{c^2}} - \frac{2(C_{12} + C_{66}) \left(3K_{10} \frac{m^2}{c^2} + K_{20} \right) \left(3K_{20} + K_{10} \frac{m^2}{c^2} \right)}{\left(C_{11} \frac{m^2}{c^2} + C_{66} \right) \left(C_{66} \frac{m^2}{c^2} + C_{22} \right) - (C_{12} + C_{66})^2 \frac{m^2}{c^2}} \right] \quad (2.9)$$

По формуле (2.9) критическая нагрузка определяется обычным образом: устанавливается число m для данного $c = \frac{a}{b}$, которое удовлетворяет (2.9) минимальное значение ($n=1$).

Числовой пример для четырехслойной пластинки здесь рассмотрен для материала (1.12); $c=0.7$.

Таблица 2

$$\bar{P} = \frac{\rho b^3}{2D_{11}}$$

$\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$	0	15	30	45	60	75	90
0	2.918 2.918	2.923 2.938	2.958 2.976	2.966 2.981	2.918 2.935	2.859 2.866	2.835 2.835
15	2.763 3.063	2.929 3.084	2.926 3.122	2.939 3.127	2.968 3.080	2.910 3.012	2.859 2.980
30	3.161 3.327	3.181 3.349	3.041 3.318	3.064 3.391	3.129 3.344	3.002 3.276	3.043 3.245
45	3.231 3.364	3.201 3.385	3.220 3.423	2.850 3.429	3.284 3.382	3.156 3.313	3.155 3.262
60	2.862 3.012	2.853 3.058	3.111 3.289	2.868 3.301	2.789 3.055	2.763 2.987	2.832 2.954
75	2.501 2.540	2.504 2.581	2.525 2.619	2.489 2.624	2.417 2.584	2.360 2.509	2.439 2.477
90	2.337 2.337	2.345 2.357	2.370 2.392	2.386 2.401	2.340 2.354	2.281 2.286	2.254 2.254

В табл. 2 приведены значения критической нагрузки $\bar{P} = \frac{\rho b^3}{2D_{11}}$ и как в табл. 1, во вторых строках каждой клетки помещены \bar{P} без учета плоской задачи на изгиб ($K_{10}=K_{20}=0$).

Как и в предыдущем пункте, ортотропное решение (пренебрежение K_{66}) дает завышенное значение критической нагрузки. Аналогичный результат получен и в [5], но там пакет ортотропный — углы поворота слоев 0° или 90° .

3. Рассмотрим свободные колебания свободно опертой пластинки при симметричном расположении слоев. Уравнение колебаний будет:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} = \frac{\rho h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

где моменты и изменения кривизмы определяются из (1.2) и (1.3). Решение (3.1) ищем в виде

$$w = \sin \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin i_m \sin p_n y \quad (3.2)$$

$$M_1 = \sin \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin i_m \sin p_n y$$

$$M_2 = \sin \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin i_m \sin p_n y \quad (3.3)$$

$$H = \sin \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} \cos i_m \cos p_n y$$

удовлетворяющих условиям (1.6) и (1.7).

Подставляя (3.2), (3.3) в (1.2), (1.3) и (3.1), для a_{mn} аналогично 1-ому пункту получим:

$$a_{pq} \left[(D_{12}^2 + D_{12}^2) i_p^2 + (D_{12}^2 + D_{22}^2) i_q^2 + 4 D_{12}^2 i_p^2 i_q^2 - \frac{\rho h}{g} \omega^2 \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2 a_{mn} i_m i_n \delta_{mq} \delta_{pn} [D_{12} (i_p^2 + i_m^2) + D_{22} (i_q^2 + i_n^2)] \quad (3.4)$$

Значение собственных частот получим, приравнявая определитель этой бесконечной системы нулю. Оно также будет зависеть от ориентаций слоев пластинки.

В табл. 3 приведено изменение безразмерной частоты основного тона $\left(\bar{\omega}^2 = \frac{2 \rho^2 b^4 g h}{\pi^2 g D_{11}} \right)$ в зависимости от углов поворота слоев. Вычисления проводились во втором приближении для четырехслойной пластинки материала (1.12), $\nu = 0.7$.

Во вторых строках табл. 3 помещены значения $(\bar{\omega}^2)$ при $D_{12} = D_{12} = 0$.

Из таблицы видно, что как и при задаче устойчивости:

а) наибольшая частота собственных колебаний получается при $(\varphi_1 = \varphi_2 = 45^\circ)$;

б) ортотропное решение приводит к увеличению частот.

$$\bar{\sigma} = \frac{2\sigma^2 b^2 \eta h}{\pi^2 E D_{11}^2}$$

	0	15	30	45	60	75	90
0	11.908 11.908	11.990 11.993	12.147 12.152	12.168 12.172	11.978 11.979	11.693 11.694	11.564 11.564
15	12.388 12.517	13.517 13.698	12.552 12.735	12.543 12.755	12.423 12.575	11.638 11.782	12.027 12.159
30	13.340 13.584	13.370 13.672	13.342 13.658	13.534 13.833	13.381 13.655	13.106 13.367	12.988 13.238
45	13.573 13.738	14.611 13.827	13.736 13.960	13.770 13.983	13.617 13.807	13.315 13.523	13.218 13.390
60	12.237 12.727	12.413 12.459	13.825 13.408	12.561 12.642	12.253 12.470	12.046 12.150	11.843 12.049
75	10.435 10.441	10.510 10.524	10.661 10.685	10.686 10.706	10.357 10.549	10.232 10.240	10.104 10.110
90	9.531 9.531	9.612 9.616	9.759 9.763	9.791 9.796	9.598 9.599	9.330 9.331	9.201 9.201

ON BUCKLING AND VIBRATION OF RESTANGULAR MULTILAYER ANISOTROPIC PLATES

A. T. DAVTIAN

ՈՒՎՆԱԿՅՈՒՆ ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՍԱՎԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ
ԵՎ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Թ. ԴԱՎԻՅԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Վ

Կիսաորկվում են բազմաշերտ ուղղանկյուն սաղի կայունությունն ու տատանումները: Ընդ որում, սաղի շերտերը շրջված են սաղի միջին հարթության նկատմամբ մի ղեպքում սիմետրիկ, մյուս ղեպքում՝ հակասիմետրիկ: Երկու ղեպքում էլ ստացվել է կրիտիկական սեղմող թևեր և տատանասիրվել է կրիտիկական ուժի կախումը սաղի շերտերի՝ միմյանց նկատմամբ դասավորությունից: Սաղի ազատ տատանումները դիտարկվում են շերտերի սիմետրիկ դասավորության ղեպքում: Ստացված է տատանումների սեղմական հաճախականության կախումը սաղի շերտերի՝ միմյանց նկատմամբ պատշաճ անկյունից: Բերված են թվային օրինակներ:



ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л. А. Некоторые задачи вязкоупругих анизотропных слоистых пластин и оболочек.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1989, т. 42, №3, с. 37—44.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек.—М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки.—М.: Гостехтеориздат, 1957. 164 с.
4. Мовсисян Л. А., Саркисян В. С. Об одном способе определения критических нагрузок анизотропных пластинок.—Изв. АН СССР, Инженерный журнал, 1965, т. 5, вып. 4.
5. Джонс Р. М. Устойчивость и колебания прямоугольных несимметричных слоистых пластинок с перекрестным армированием.—Ракетная техника и космонавтика, 1973, т. 11, №12, с. 32—40.

Кафедра учебно-консультационный пункт ЕрПИ

Поступила в редакцию
1 XII.1989

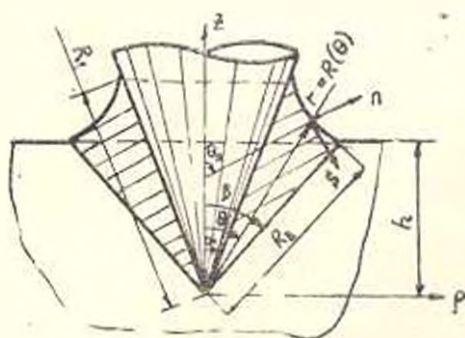
УДК 539.374

ВВИНЧИВАНИЕ ЖЕСТКОГО КОНУСА В ПЛАСТИЧЕСКИ ОРТОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

АКОПЯН А. Т.

Рассматривается жестко-пластическое течение пластически ортотропного материала, когда жесткий шероховатый конус ввинчивается в полупространство. Материал полупространства подчиняется соотношениям Мизеса-Хилла, главные оси анизотропии совпадают с осями сферической системы координат, с центром на вершине конуса.

Рассматривается течение пластически ортотропного материала, когда жесткий шероховатый конус, вращаясь вокруг своей оси, внедряется с постоянной скоростью в полупространство (фиг. 1). Материал полупространства считается несжимаемым, идеально жесткопластическим и подчиняется соотношениям пластически ортотропного тела Мизеса-Хилла [1]. Принимается, что главные оси анизотропии совпадают с осями сферической системы координат, центр которой помещен в вершине конуса. На контактной конической поверхности возникают касательные напряжения, значения и направления которых, главным образом, зависят от шероховатости этой поверхности.



Фиг. 1.

Аналогичная задача для изотропного материала рассмотрена в работе [2]. В работе [3] рассмотрено внедрение жесткого клина в анизотропное полупространство. Вдавливание жесткого штампа в анизотропную пластическую среду рассмотрено в [4]. Исследование проникания тонкого твердого тела в трансверсально-изотропную среду проведено в [5]. В работе [6] рассмотрено ввинчивание жесткого цилиндрического тела в пластически анизотропную трубу.

1. В случае осесимметричного течения дифференциальные уравнения равновесия в сферической системе координат в обычных обозначениях имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2z_r - z_\theta - z_\varphi + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial z_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [(z_\theta - z_r) \operatorname{ctg} \theta - 3\tau_{r\theta}] &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial z_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (3\tau_{r\varphi} + 2z_r \operatorname{ctg} \theta) &= 0\end{aligned}\quad (1.1)$$

Зависимости между компонентами тензора скоростей деформаций, скоростей перемещений и напряжений

$$\begin{aligned}z_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = \Omega [H_0(z_r - z_\theta) + G_0(z_r - z_\varphi)] \\ z_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \Omega [F_0(z_\theta - z_\varphi) + H_0(z_\theta - z_r)] \\ z_\varphi &= \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \theta = \Omega [G_0(z_\varphi - z_r) + F_0(z_\varphi - z_\theta)] \\ 2\gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} = \Omega N_{r\theta} \\ 2\gamma_{r\varphi} &= \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} = \Omega M_{r\varphi} \\ 2\gamma_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{w}{r} \operatorname{ctg} \theta = \Omega L_{\theta\varphi}\end{aligned}\quad (1.2)$$

Условие текучести Мингеса-Хилла берем в виде

$$F_0(z_\theta - z_\varphi)^2 + G_0(z_\varphi - z_r)^2 + H_0(z_r - z_\theta)^2 + L_0^2 \gamma_{\theta\varphi}^2 + M_0^2 \gamma_{r\varphi}^2 + N_0^2 \gamma_{r\theta}^2 = 1 \quad (1.3)$$

Исходя из (1.2) — (1.3), компоненты напряжений удобно представить в виде

$$\begin{aligned}z_r &= z_0 + \frac{1}{\Omega} (Fz_\theta - Gz_\varphi) \\ z_\theta &= z_0 - \frac{1}{\Omega} [H z_r + (G + H) z_\varphi]\end{aligned}\quad (1.4)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2}{\Omega} N_{r\theta}, \quad \tau_{r\varphi} = \frac{2}{\Omega} M_{r\varphi}, \quad \tau_{\theta\varphi} = \frac{2}{\Omega} L_{\theta\varphi}$$

где

$$\Omega = [(F + H)\epsilon^2 + 2H\epsilon_r z_\theta + (G + H)\epsilon_\varphi^2 + 4L_{\theta\varphi}^2 + 4M_{r\varphi}^2 + 4N_{r\theta}^2]^{1/2}$$

$$F = \frac{F_0}{\Delta}, \quad G = \frac{G_0}{\Delta}, \quad H = \frac{H_0}{\Delta}, \quad L = \frac{1}{L_0}, \quad N = \frac{1}{N_0}, \quad M = \frac{1}{M_0}$$

$$\Delta = F_0 G_0 + G_0 H_0 + H_0 J_0$$

Полагаем, что пластическая область, образующаяся вокруг жесткого конуса с углом $\psi = \alpha$, ограничивается некоторой конической поверхностью с углом $\psi = \beta$, положение которой подлежит определению в ходе решения задачи. Далее, принимается, что область пластического течения ограничивается поверхностью $r = R(\theta)$, свободной от внешних нагрузок, форму которой также следует определить. В этой области свойства материала считаются пластически ортотропными, появляющиеся вследствие пластической деформации материала (деформационная анизотропия).

Для определенности принимаем, что вращение конуса происходит в сторону уменьшения азимутальной координаты φ . Допускается, что в пластической области радиальная скорость перемещения имеет положительное направление r .

На контактной поверхности между конусом и средой задаем условия:

$$\tau_{\theta 1} = m_1, \quad \tau_{\theta 2} = q_1, \quad v = V_0 \sin \alpha \quad (\psi = \alpha) \quad (1.5)$$

Здесь V_0 — заданная скорость внедрения конуса, m_1 и q_1 — положительные постоянные, значения которых считаются заданными и зависят от характера и степени шероховатости конической поверхности соответственно в радиальном и окружном направлениях.

На граничной поверхности пластической зоны $\psi = \beta$ принимаем нормальную скорость перемещения непрерывной, а тангенциальную — разрывной. Тогда полагаем [7]

$$v = 0, \quad \tau_{\theta 1} = -\infty, \quad \tau_{\theta 2} = \infty \quad (\psi = \beta) \quad (1.6)$$

Имеем также условие равенства объема внедренной части конуса объему вытесняемого материала.

2. В пластической области компоненты напряжений и скорости перемещений можно выразить через неизвестные функции $f(\theta)$ и $\psi(\theta)$

$$\sigma_r = \sigma_1 - G f' \sqrt{1 - \psi^2/N} \sqrt{(G+H)f'^2 + 4L\psi'^2 + 4M\psi^2}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_0 - (G+H)f' \sqrt{1 - \psi^2/N} \sqrt{(G+H)f'^2 + 4L\psi'^2 + 4M\psi^2}$$

$$\sigma_\varphi = -p_1 + A \ln \frac{r}{R_1} - (G+H) \int \frac{f \operatorname{ctg} \psi \sqrt{1 - \psi^2/N} d\theta}{\sqrt{(G+H)f'^2 + 4L\psi'^2 + 4M\psi^2}} - 3 \int \tau d\theta$$

$$\tau_{r\theta} = 2L\psi' \sqrt{1 - \psi^2/N} \sqrt{(G+H)f'^2 + 4L\psi'^2 + 4M\psi^2} \quad (2.1)$$

$$\tau_{r\varphi} = -2M\psi' \sqrt{1 - \psi^2/N} \sqrt{(G+H)f'^2 + 4L\psi'^2 + 4M\psi^2}, \quad \tau_{\theta\varphi} = \tau$$

$$u = -f' \sin \theta - 2f \cos \theta, \quad v = 2f \sin \theta, \quad w = 2\psi \sin \theta$$

где p_1 , β , $R_1 = R(\alpha)$, A — неизвестные постоянные.

Приведенные выражения (2.1) будут решениями системы уравнений (1.1)–(1.3), если f , ψ , и τ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 f'' + 3f' \operatorname{ctg} \theta + \frac{f}{\sqrt{N(N-\tau^2)}} \sqrt{(G+H)f'^2 + 4L\tau'^2 + 4M\tau^2} &= 0 \\
 \left| \frac{2L\tau' \sqrt{1-\tau^2/N} \sin^2 \theta}{\sqrt{(G+H)f'^2 + 4L\tau'^2 + 4M\tau^2}} \right|' - \frac{6M\tau' \sqrt{1-\tau^2/N} \sin^2 \theta}{\sqrt{(G+H)f'^2 + 4L\tau'^2 + 4M\tau^2}} &= 0 \\
 \tau' + \tau \operatorname{ctg} \theta + (H-G) \frac{f \sqrt{1-\tau^2/N}}{\sqrt{(G+H)f'^2 + 4L\tau'^2 + 4M\tau^2}} + A &= 0
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

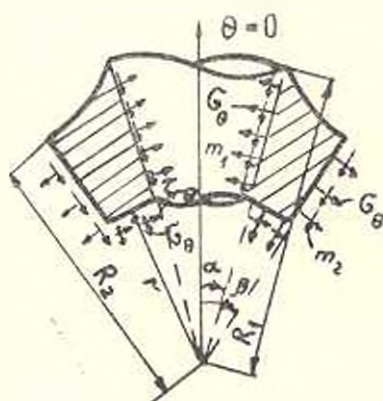
Согласно (1.5) -- (1.6) для этой системы уравнений находим граничные условия

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{V_0}{2}, \quad \frac{2L\tau'}{\sqrt{(G+H)f'^2 + 4L\tau'^2 + 4M\tau^2}} = \frac{q_1}{\sqrt{1-m_1^2}N} \quad (\theta = \alpha) \\
 f &= 0, \quad \tau' \rightarrow \infty \quad (\theta = \beta) \\
 \tau(2) &= m_1, \quad \tau(3) = -m_2
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

В формуле (2.3) из (2.1), переходя к пределу $\theta \rightarrow \beta$ и учитывая что при этом $\tau' \rightarrow \infty$, имеем зависимость между $m_1 = -\tau(\beta)$ и $q_2 = \tau_2(\beta)$

$$m_2 = \sqrt{N(1-q_2^2/L)} \quad (2.4)$$

3. Рассмотрим равновесие конической трубы, занимающей пластическую область $r \leq r_0 \leq R(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ (фиг. 2). Приравняв нулю сумму проекций всех сил, действующих на поверхностях мысленно выделенного тела в направлении оси $\theta=0$, а также приравняв нулю сумму моментов всех сил относительно этой оси и учитывая, что поверхность $r=R(\theta)$ свободна от внешних сил, получим



Фиг. 2.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{R_1} [\tau_0(r, \alpha) \sin \alpha - m_1 \cos \alpha] \sin \alpha r dr - \int_0^{R_2} [\tau_0(r, \beta) \sin \beta + m_2 \cos \beta] \times \\
 \times \sin \beta r dr - \int_0^{R_1} [\tau_0(r, \theta) \cos \theta - \tau_0(\theta) \sin \theta] r^2 \sin \theta d\theta = 0
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\int_{r_1}^{R_1} q_1 \sin^2 \alpha r^2 dr - \int_{r_1}^{R_1} q_2 \sin^2 \beta r^2 dr + \int_0^{\beta} \tau_{rz}(\theta) r^3 \sin^2 \theta d\theta = 0 \quad (3.2)$$

Здесь $R_2 = R(\theta)$.

Подставляя в (3.1) выражения компонент напряжений и производя интегрирование, получаем

$$p_1 = \frac{m_1 \sin 2\alpha + \nu^2 m_2 \sin 2\beta}{2(\nu^2 \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha)} + \frac{\nu^2 \sin^2 \beta (D + A \ln \nu)}{\nu^2 \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha} - \frac{A}{2} \quad (3.3)$$

$$r = R_1, R_1$$

$$D = -(G + H) \int \frac{f' \operatorname{ctg} \theta \sqrt{1 - \nu^2 N} d\theta}{\sqrt{(G + H)f'^2 + 4L\psi^2 - 4M\psi^2}} - 3 \int \tau d\theta$$

Далее, интегрируя почленно второе уравнение (2.2) по θ , находим

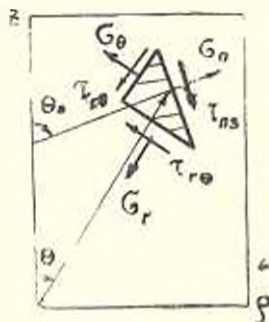
$$3 \int_0^{\beta} \tau_{rz} \sin^2 \theta d\theta = q_1 \sin^2 \alpha - q_2 \sin^2 \beta$$

Подставляя в (3.2), получаем

$$q_2 = \frac{q_1 \sin^2 \alpha}{\nu^2 \sin^2 \beta} \quad (3.4)$$

Кроме функций f , ψ , τ остается определить также функцию $R(\theta)$ и параметр β .

4. При определении формы свободной поверхности $r = R(\theta)$ игнорируем роль окружного компонента касательного напряжения в процессе формирования этой поверхности по отношению к остальным компонентам σ_n и $\tau_{n\theta}$. Из условия равновесия элемента вблизи свободной поверхности $r = R(\theta)$ в меридиональной плоскости на площадке с нормалью n (фиг. 3) имеем [8]



Фиг. 3.

$$\sigma_n = \sigma_r(R, \theta) \cos^2 \theta_n + \sigma_\theta(R, \theta) \sin^2 \theta_n + \tau_{r\theta}(\theta) \sin 2\theta_n$$

$$\tau_{n\theta} = [\sigma_\theta(R, \theta) - \sigma_r(R, \theta)] \sin \theta_n \cos \theta_n + \tau_{r\theta}(\theta) \cos 2\theta_n \quad (4.1)$$

где $\theta_n = \theta_n - \theta$, а θ_n — угол между нормалью и положительным направлением z . Пусть параметрическое уравнение линии пересечения свободной поверхности с меридиональной плоскостью задано в виде $\rho = \rho(\theta)$, $z = z(\theta)$.

Тогда

$$\sin \theta_n = -z' / \sqrt{\rho'^2 + z'^2}, \quad \cos \theta_n = \rho' / \sqrt{\rho'^2 + z'^2} \quad (4.2)$$

Вводя функцию

$$R(\theta) = \frac{h}{\cos \theta} \exp(z/\theta) \quad (4.3)$$

где $h = V_0 t = R_0 \cos \theta$, причем h — заданная глубина, t — время внедрения, и переходя к полярной системе координат $\rho = R \sin \theta$, $z = R \cos \theta$, из (4.2) получаем

$$\operatorname{tg} \theta_n = (\operatorname{tg} \theta - z') / (1 - z' \operatorname{tg} \theta) \quad (4.4)$$

Аналогично с [2] составим выражение

$$T = \tau_n^2 + \tau_s^2$$

и определим R из условия минимума T по θ_n . Дифференцированием и использованием (4.1) находим

$$\partial T / \partial \theta_n = 2(\tau_s + \tau_0) \tau_{ns} \quad (4.5)$$

Полагая $\tau_s + \tau_0 < 0$ и приравнявая нулю (4.5), находим $\tau_{ns} = 0$.

Тогда

$$\theta_n = \theta + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} [2\tau_{r0}(\tau_s - \tau_0)] \quad (4.6)$$

Для этих значений θ_n из (4.5) определяем

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \theta_n^2} = -(\tau_s - \tau_0) [(\tau_s - \tau_0)^2 + 4\tau_{r0}^2] > 0$$

Следовательно, функция T получает минимальное значение при таком определении θ_n . На поверхности $r = R(\theta)$ имеем $\tau_{n1} = 0$, а нормальное напряжение

$$\tau_n(\theta) = \tau_n(R, \theta) = \frac{1}{2} [\tau_s - \tau_0 + \sqrt{(\tau_s - \tau_0)^2 + 4\tau_{r0}^2}] \quad (4.7)$$

Подставляя (4.6) в (4.4), определяем z' , а затем, учитывая выражение компонентов напряжений (2.1), из (4.3) находим

$$R(\theta) = \frac{h}{\cos \theta} \exp \left\{ 2 \times \right. \\ \left. \times \int_0^\theta \frac{\tau' (G + H) f'^2 + 4L\psi'^2 + 4M\psi'^2 d\theta}{\sqrt{[G^2(1 - z^2/N) + 4(G + H)^2] f'^2 + 16\psi^2(L\psi'^2 + M\psi'^2) - G^2 \sqrt{1 - z^2/N}}} \right\} \quad (4.8)$$

Соответственно, будем иметь

$$= \exp \left\{ -2 \times \right.$$

$$\times \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{(G+H)^2 + 4L\psi^2 + 4M\psi^2 d\psi}}{\sqrt{[G^2(1-\psi^2/N) + 4(G-H)\psi^2]f'^2 + 16\psi^2(L\psi^2 + M\psi^2) - GF\sqrt{1-\psi^2/N}}} \Big|$$

5. Из условия сохранения количества масс

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \psi^2 dz = \frac{1}{3} R_0^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

Переходя к полярным координатам, получаем

$$\int_0^{\pi} \psi^2 \sin^3 \theta (1 - \alpha' \operatorname{ctg} \theta) d\theta = \frac{1}{3 \alpha'} \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

Исключая α' при помощи интегрирования по частям, приходим к уравнению

$$\left| \exp \left\{ 6 \times \right. \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{(G+H)^2 + 4L\psi^2 + 4M\psi^2 d\psi}}{\sqrt{[G^2(1-\psi^2/N) + 4(G-H)\psi^2]f'^2 + 16\psi^2(L\psi^2 + M\psi^2) - GF\sqrt{1-\psi^2/N}}} \Big| \times \\ & \times \sin^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (5.1)$$

которое вместе с системой уравнений (2.2), при граничных условиях (2.3) определяет функции f , ψ , α и параметры β и A .

Сила давления конуса на среду равна

$$P = -2\pi \sin^2 \alpha \int_0^{R_0} [\alpha(r, z) \sin \alpha - m_1 \cos \alpha] r dr$$

Условное напряжение, приходящееся на основание внутренней части конуса, то есть $p = P/\pi R_0^2 \sin^2 \alpha$, назовем удельным давлением. После вычисления интеграла получаем

$$p = \frac{m_1 \sin 2\alpha - m_2 \alpha^2 \sin 2\beta}{2(\alpha^2 \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha)} + \frac{\alpha^2 \sin^2 \beta (D + A \ln \alpha)}{\alpha^2 \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha} + m_2 \operatorname{ctg} \alpha \quad (5.2)$$

Зависимость между силой давления и глубиной внедрения имеет вид

$$p = \frac{\pi p \sin^2 \alpha}{\alpha^2 \cos^2 \beta} h^2 \quad (5.3)$$

Вращающий момент будет

$$M^* = \frac{2}{3} q_2 \sin^2 \alpha R_1^3$$

6. Вводя новые функции $\omega(\theta)$ и $s(\theta)$ при помощи зависимостей

$$f' = \frac{\tau}{s}, \quad \tau' = -2 \frac{\sqrt{G+H+4Ms^2}}{2sL \sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L}} \quad (6.1)$$

система (2.2) сводится к системе дифференциальных уравнений канонического вида

$$\begin{aligned} s' &= 3s \operatorname{ctg} \theta - \frac{\sqrt{G+H+4Ms^2}}{\sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L}} \left(\frac{m}{2L} + \frac{\tau s}{N} \right) \\ \omega' &= -2\omega \operatorname{ctg} \theta - \frac{6Ms}{\sqrt{G+H+4Ms^2}} \sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L} \\ \tau' &= -A - \tau \operatorname{ctg} \theta + \frac{H-G}{\sqrt{G+H+4Ms^2}} \sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L} \\ A' &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

при граничных условиях

$$\omega(2) = q_1, \quad \omega(3) = q_2, \quad \tau(2) = m_1, \quad \tau(3) = -m_2 \quad (6.3)$$

Формулы компонент напряжений (2.1) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \tau_0 + \frac{G}{\sqrt{G+H+4Ms^2}} \sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L} \\ \tau_r &= \tau_0 + \frac{G+H}{\sqrt{G+H+4Ms^2}} \sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L}, \quad \tau_{\theta} = \tau \\ \sigma_z &= -p_1 + A \ln \frac{r}{R_2} + (G+H) \int \frac{\sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L}}{\sqrt{G+H+4Ms^2}} \operatorname{ctg} \theta d\theta - 3 \int \tau d\theta \\ \tau_{\theta z} &= \frac{2Ms}{\sqrt{G+H+4Ms^2}} \sqrt{1-\tau^2/N-\omega^2/L}, \quad \tau_{\theta r} = \omega \end{aligned} \quad (6.4)$$

Форма свободной поверхности определяется из (4.8)

$$R(\theta) = \frac{h}{\cos \theta} \exp \left| 2 \times \right. \quad (6.5)$$

$$\left. \times \int_0^\theta \frac{\sqrt{G+H+4Ms^2} d\theta}{\sqrt{G^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{L} \right) + \left| 4(G+H) - \frac{G^2}{N} + 16Ms^2 \right| \tau^2 + G \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{N} - \frac{\omega^2}{L}}}} \right|$$

Из уравнения (5.1) имеем

$$\int \exp \left| 6 \times \right. \quad (6.6)$$

$$\times \int_0^{\theta} \frac{\sqrt{G+H+4Ms^2} d\theta}{\sqrt{G^2\left(1-\frac{\omega^2}{L}\right) + \left|4(G+H) - \frac{G^2}{N} + 16Ms^2\right| z^2 + G} \sqrt{1-\frac{z^2}{N} - \frac{\omega^2}{L}}} \Bigg|_{\theta=0}^{\theta} \\ \times \sin\theta d\theta = \frac{1}{2} \sin^2\theta \cos\theta$$

Удельное давление определяется согласно (5.2), причем

$$= \exp \left\{ -2 \int_0^{\theta} \frac{\sqrt{G+H+4Ms^2} d\theta}{\sqrt{G^2\left(1-\frac{\omega^2}{L}\right) + \left|4(G+H) - \frac{G^2}{N} + 16Ms^2\right| z^2 + G} \sqrt{1-\frac{z^2}{N} - \frac{\omega^2}{L}}} \right\} \\ D = (G+H) \int_0^{\theta} \frac{\sqrt{1-\frac{z^2}{N} - \frac{\omega^2}{L}} \operatorname{ctg}\theta d\theta}{\sqrt{G+H+4Ms^2}} - 3 \int_0^{\theta} -d\theta \quad (6.7)$$

На поверхности $r=R(\theta)$ нормальные напряжения будут

$$\sigma_r(\theta) = -p_s - 3 \int_0^{\theta} -d\theta + (G+H) \int_0^{\theta} \frac{\sqrt{1-\frac{z^2}{N} - \frac{\omega^2}{L}} \operatorname{ctg}\theta d\theta}{\sqrt{G+H+4Ms^2}} + \\ + \frac{\sqrt{G^2\left(1-\frac{\omega^2}{L}\right) + \left|4(G+H) - \frac{G^2}{N} + 16Ms^2\right| z^2 + G} \sqrt{1-\frac{z^2}{N} - \frac{\omega^2}{L}}}{2\sqrt{G+H+4Ms^2}} \\ - 2A \int_0^{\theta} \frac{\sqrt{G+H+4Ms^2} d\theta}{\sqrt{G^2\left(1-\frac{\omega^2}{L}\right) + \left|4(G+H) - \frac{G^2}{N} + 16Ms^2\right| z^2 + G} \sqrt{1-\frac{z^2}{N} - \frac{\omega^2}{L}}}$$

Согласно полученному решению из свободной поверхности вследствие приближенного удовлетворения граничным условиям на этой поверхности «появляются» внешние нагрузки. Влияние этих нагрузок на напряженное состояние пластической области вдали от свободной поверхности полагаем несущественным.

Из дифференциальных уравнений (6.1), определяя функции $f(\theta)$ и $\psi(\theta)$ при граничных условиях $f(x) = V_0$, $2. f(\theta) = 0$ и подставляя в выражения скоростей перемещений (2.1), находим

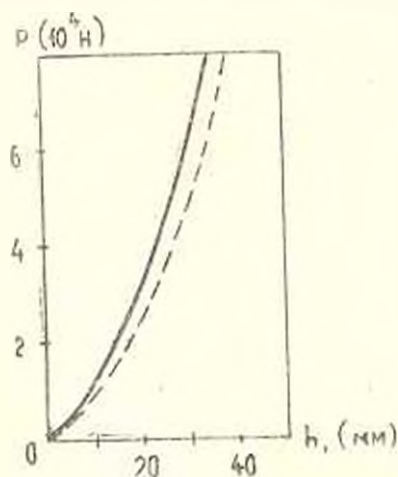
$$u = \frac{V_0}{2l(x)} \cdot \frac{\sin\theta}{s(\theta)} \exp\left(-\frac{1}{2l} \int_0^{\theta} \frac{\sqrt{G+H+4Ms^2}}{\sqrt{1-\frac{z^2}{N} - \frac{\omega^2}{L}}} \frac{\omega}{s} d\theta\right) - V_0 \frac{f(\theta)}{l(x)} \cos\theta$$

$$v = V_0 \frac{f(\theta)}{l(x)} \sin\theta, \quad w = -V_0 \frac{\sin\theta}{l(x)} \exp\left(-\frac{1}{2l} \int_0^{\theta} \frac{\sqrt{G+H+4Ms^2}}{\sqrt{1-\frac{z^2}{N} - \frac{\omega^2}{L}}} \frac{\omega}{s} d\theta\right)$$

где

$$f(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{1}{s(x)} \exp\left(-\frac{1}{2l} \int_0^{\theta} \frac{\sqrt{G+H+4Ms^2}}{\sqrt{1-\frac{z^2}{N} - \frac{\omega^2}{L}}} \frac{\omega(z)}{s(z)} d\theta\right) dx$$

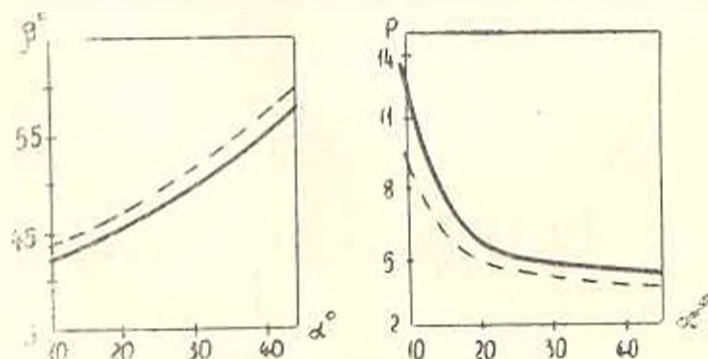
Численное решение задачи (6.2), (6.3), (6.6), (3.4) получено с помощью следующего алгоритма. Задается значение $q_1=0$ с учетом (2.1) методом пристрелки [9], решается двухточечная краевая задача (6.2), (6.3) для выбранного значения параметра β . Затем проверяется условие (6.6). Путем варьирования параметра β достигается удовлетворение условия (6.6). Потом с учетом (6.7) проверяется условие



Фиг. 4.

(3.4). Путем варьирования значения параметра α достигается удовлетворение условия (3.4). В итоге удовлетворяются одновременно все условия задачи (6.2), (6.3), (6.6), (3.4), тем самым определяем функции τ , ω , s и параметры λ , β . На основании проведенных численных расчетов на фиг. 4 построены графики силы давления по формуле (5.31) для изотропного (пунктирная линия) и для анизотропного (сплошная линия) материалов при следующих значениях параметров задачи:

$\frac{G}{N} = 6.5$; $\frac{H}{N} = 2.5$; $\frac{L}{N} = 1.5$; $\frac{M}{N} = 0.5$; $m_1 = 0.5$; $q_1 = 0.6$; $\alpha = 30^\circ$. Из графика видно влияние анизотропии на силу давления. Для тех же значений параметров анизотропии на фиг. 5 построены графики $\beta(\alpha)$ и $\rho(\alpha)$ для изотропного и анизотропного (сплошная линия) материалов.



Фиг. 5.

В случае изотропного материала параметры анизотропии принимают значения $\frac{G}{N} = \frac{H}{N} = 2$, $\frac{I}{N} = \frac{M}{N} = 1$. Проведено также численное исследование о границах изменения параметра α . При $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ параметр β получает значения $\beta \geq \frac{\pi}{2}$, что не допустимо согласно постановке задачи, так как в этом случае $R_1 \rightarrow \infty$. Это зависит также от параметров анизотропии и значений параметров m_1 и q_1 . Для всех рассмотренных и численных исследований параметров при $\alpha < 80^\circ$ такого явления не наблюдалось, то есть полученное решение для таких углов раствора конуса вполне применимо.

SCREWING OF A RIGID CONE IN PLASTIC ORTHOTROPIC HALF-SPACE

A. G. HAKOBIAN

ԿՈՆՑ ԿՈՆԻ ՆԵՐՓՏՈՒՏԱԿՈՆԻՄԸ ՓԼԱՍՏԻԿՈՐԻՆԻ ՕՐԹՈՏՐՈՊ

ԿՈՍՍԱՐԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻՋ

Ա. Գ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Ա. Մ. Փ. և Փ. և Փ. և Փ.

Դիտարկվում է շրջափակարեն օրթոտրոպ նյութի կոշտ-պլաստիկական շտապումը, երբ անշարժ մակերևույթ կոշտ կոնը ներադրուցվում է կիսաօրթոտրոպիկ մեք: Որոշվել են ձգող ուժը, պատույ մեմբրանը, պլաստիկ դեֆորմացիաների տիրույթը և կիսաօրթոտրոպիկ արտադրված մակերևույթի ձևը:

LITERATURE

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности.—М: Гостехиздат, 1956. 407 с.
2. Задоян М. А. Вдавливание жесткого конуса в идеальное жесткопластическое трехмерное пространство. Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела.—М: Наука, 1984. с. 110—121.
3. Нодиков С. С. Вдавление жесткого конуса в анизотропное полупространство. Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением. Тула: ТПИ, 1980. с. 23—26.
4. Дудукиленко В. В. О вдавливании жесткого штампа в анизотропную пластичную среду.—ПММ, 1960, т. 24, № 5, с. 962—969.
5. Багдасян А. Г., Ванцян А. А. Исследование вдавливания тупого твердого тела в трансверсально-изотропную среду.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1987, 10, № 4, с. 3—6.
6. Ахоян А. Г. Вдавливание жесткого цилиндрического тела в пластически анизотропную трубу.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1986, т. 39, № 6, с. 25—38.

- 7 Качанов Л. М. Основы теории пластичности.—М.: Наука, 1969. 420 с.
- 8 Ивлев Д. Д., Еринов Л. В. Метод возмущений в теории упруго-пластического тела.—М.: Наука, 1978. 208 с.
- 9 Холл Дж., Уатс Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: Мир, 1979. 312 с.

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию
19.X 1990

Р
Л
ЛН
С
N
Ф

УДК 539.376

О ФИЗИКО-ВЕРОЯТНОСТНОМ ПОДХОДЕ К ПРОБЛЕМЕ
ВЯЗКО-ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

ԱՐՄԵՆՅԱՆ Բ. Ա., ՐՈԴԻՈՆՈՎ Ա. Փ.

Предложен параметр повреждаемости, который определяется разрыхлением материала. Вероятностная трактовка последнего позволяет связать его с функцией надежности образца как системы. На основе этого параметра сформулирован общий критерий вязко-хрупкого разрушения. Дано сравнение с результатами длительных испытаний на разрушение образцов из полиметакрилата в условиях ползучести. В рамках модели обсуждаются также статистические аспекты проблемы длительного разрушения.

Параметр повреждаемости $0 \leq \omega \leq 1$ (или сплошности $\phi = 1 - \omega$) Качанова-Работнова [1, 2] был введен в теорию ползучести для описания хрупких разрушений. При этом авторы не приписывали этому параметру явного физического содержания и рассматривали его как некоторую меру накопления различного рода дефектов. Другие авторы связывают параметр ω с разрыхлением (необратимым изменением плотности ρ) материала. Развивая это направление, будем считать $\omega = \omega(\rho)$, где $\rho = \rho(t)$.

С другой стороны, рассматривая процесс разрушения с позиций теории надежности, время до разрушения образца t_p , как системы, определяется следующей формулой [3]:

$$t_p = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (1)$$

где $R(t)$ — функция надежности, представляющая собой вероятность того, что к моменту времени t система не потеряет свою работоспособность. Учитывая и здесь физику явления, придем к зависимости $R = R(\rho)$, где $\rho = \rho(t)$. Таким образом, величина $R(\rho)$ — это вероятность того, что образец, как система, не разрушится при заданном уровне ρ . Аналогично этому можно предположить, что ω — это вероятность того, что образец разрушится при заданном уровне ρ . Поэтому R и ω являются вероятностями обратных событий, что означает

$$\omega(\rho) = 1 - R(\rho) \quad (2)$$

Чтобы получить конкретное аналитическое выражение для параметра ω , воспользуемся некоторыми свойствами функции $R(\rho)$. С этой целью примем предположения, согласующиеся с самим понятием ве-

роятности как меры, определенной на некоторой системе подмножеств. Во-первых, предположим, что $R(\rho_0)=1$ (где ρ_0 — начальная плотность материала образца), то есть считается, что в начально-естественном состоянии материал надежен с вероятностью равной „единице“. Во-вторых, примем, что выполняется свойство аддитивности: если $\rho=\rho_1+\rho_2$, то $R(\rho)=R(\rho_1+\rho_2)=R(\rho_1)+R(\rho_2)$. Из этих двух предположений сразу вытекает, что функция $R(\rho)$ является линейной и имеет вид:

$$R(\rho) = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (3)$$

Из формулы (3) следует и другой естественный результат: $R=0$ при $\rho=0$, то есть при нулевой плотности образец разрушается с вероятностью „единица“.

Рассматривая ползучесть цилиндрического стержня, растягиваемого заданной нагрузкой P , и вводя текущий коэффициент поперечной деформации $\omega = -\epsilon_r/\epsilon_x = -\epsilon_r/\epsilon_x$ ($\epsilon_x = \ln l/l_0$ — продольная, ϵ_r, ϵ_x — поперечная деформация стержня, l_0 — начальная, l — текущая длина стержня), закон сохранения массы можно записать в виде [4], $\rho/\rho_0 = \exp(-(1-\omega)\epsilon)$ (здесь и далее введено обозначение $\epsilon = \epsilon_x$). С учетом этой формулы имеем

$$R(t) = \exp[-(1-\omega)\epsilon] \quad (4)$$

Внося (4) в (2), получим

$$\omega = 1 - \exp[-(1-\omega)\epsilon] \quad (5)$$

Из (5) следует, что $\omega=0$ при $\epsilon=0$. Формально из (5) следует также и другой результат: $\omega=1$ при $\epsilon \rightarrow \infty$. Хотя этот результат и согласуется с предположением Хиффа, однако достижение этого предела практически невозможно, так как образец разрушится значительно быстрее, не достигая нулевой плотности для поперечного сечения, и при ограниченной величине поперечной деформации.

Для функции надежности (1) интенсивность отказов $\lambda(t)$ вычисляется по формуле

$$\lambda(t) = -\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = -\frac{d}{dt} \ln R(t) = \frac{d}{dt} [(1-\omega)\epsilon] \quad (6)$$

При $\omega = \text{const}$ из (6) следует $\lambda(t) = (1-\omega)\dot{\epsilon}$, то есть интенсивность отказов пропорциональна скорости ползучести. Это положение согласуется с принятым в работах [5, 6] предположением $\dot{\epsilon} = a\epsilon$ ($a = \text{const}$). В то же время, являясь более общей, формула (6) точнее описывает кинетику процесса разрушения.

Рассмотрим закон ползучести, описывающий все участки кривых ползучести. Согласно [2, 6] имеем

$$\dot{\epsilon} = B_1 \sigma^n (1-\omega)^{-k} = B_2 \sigma^n e^{2\omega n} (1-\omega)^{-k} = B_2 \sigma^n e^{(2\omega n + k)(1-\omega)} \quad (7)$$

где B, m, n, k — постоянные (для упрощения расчетов далее считаем

и натуральным числом), $\sigma_0 = P/F_0$, F_0 — начальная площадь поперечного сечения образца.

Интегрируя уравнение (7) при условии $t=0$, $\epsilon=0$, будем иметь приближенно:

$$\epsilon(t) = \frac{1}{2m_0 + (1-2\nu)k} \left[-(n+1) \ln \left| 1 - \frac{(2m_0 + (1-2\nu)k)^{n+1} B \sigma_0^n t}{n!} \right| \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (8)$$

Внося (8) в (4), получим выражение для функции надежности:

$$R(t) = \begin{cases} \exp \left(-2 \left[-(n+1) \ln \left(1 - \frac{t}{t_*} \right) \right]^{\frac{1}{n+1}} \right), & t \leq t_*, \\ 0, & t > t_*, \end{cases} \quad (9)$$

где

$$t_* = \frac{1-2\nu}{2m_0 + (1-2\nu)k}, \quad t_* = \frac{n!}{B \sigma_0^n [2m_0 + (1-2\nu)k]^{n+1}}$$

Математическое ожидание срока службы или время до разрушения образца, как системы, определяется по формуле [3] и равно [6]

$$t_p = \int_0^\infty R(t) dt = \frac{n!}{B \sigma_0^n [2m_0 + (1-2\nu)k]^{n+1}} \quad (10)$$

Соотношение (10) следует рассматривать как критерий длительной прочности, связывающий напряжение с математическим ожиданием срока службы материала. Можно показать, что этот критерий описывает всю кривую длительной прочности, охватывая, как предельные, области вязкого и хрупкого разрушений. Чтобы иметь возможность сравнивать с известными критериями, примем далее $n=0$. Тогда при $\nu=1/2$ из (10) следует критерий вязкого разрушения Хоффа

$$t_p = \frac{1}{m B \sigma_0^m} \quad (11)$$

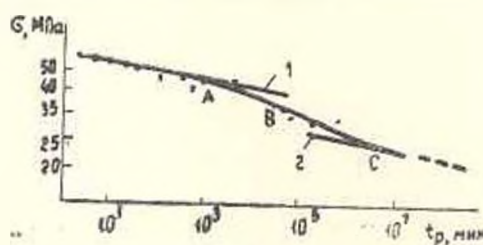
Другой предельный случай — чисто хрупкое разрушение [4] — получим из (10) при $\nu=0$

$$t_p = \frac{1}{(k+1) B \sigma_0^k} \quad (12)$$

На практике критерий Хоффа хорошо работает в области относительно больших напряжений. На фиг. 1 в координатах $\ln \sigma_0 - \ln t_p$ этот критерий отмечен прямой линией 1. Критерий хрупкого разрушения (12) изображен на этой фигуре прямой 2, параллельной 1.

Общий критерий (10) представлен на фиг. 1 кривой ABC, расположенной между прямыми 1 и 2. При больших напряжениях эта кривая асимптотически приближается к критерию Хоффа, при малых напряжениях асимптотой служит критерий (12). Пунктирной линией указана область возможного прогнозирования работоспособности материала.

ла. Точками на фигуре отмечены результаты опытов продолжительностью от нескольких минут до пяти лет образцов из полиметилметакрилата в условиях ползучести. При построении теоретической кривой длительной прочности были использованы следующие значения коэффициентов [7]: $m=17,2$, $B=3,6 \cdot 10^{-22}$ [МПа] $^{-17,2}$ [мин] $^{-1}$, $k=160$, $n=0$, на участке ABC кривой длительной прочности принято $\nu=0,35$.



Фиг. 1.

В заключение обратим внимание на следующее обстоятельство. Нетрудно показать, что дисперсия времени до разрушения определяется следующей приближенной формулой:

$$Dt_p = 2 \int_0^{\infty} t R(t) dt - t_p^2 = 2t_p^2 J - t_p^2 \quad (13)$$

где

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x} (1 - e^{-x}) \exp(-\alpha |n+1| x^{1/(n+1)}) dx$$

Из (13) вытекают два важных следствия, касающихся статистических вопросов разрушения. В опытах наблюдается незначительный разброс значений времени до разрушения (а также других характеристик) в области вязких разрушений. Однако этот разброс становится значительным с переходом в область хрупких разрушений. Физическая картина здесь вполне ясна. В случае вязких разрушений определяющими являются процессы вязкого течения, которые локализуются в определенных плоскостях скольжения и придают процессу разрушения детерминированный характер. Этот вывод подтверждается теоретически. Действительно, при $\nu=1/2$ из (13) следует $Dt_p=0$.

В области хрупких разрушений статистика процесса определяется дефектной структурой, которая наводится в материал в процессе длительной нагрузки. Наблюдаемый при этом значительный разброс величин времени до разрушения является следствием случайного характера распределения этих дефектов. Соответствующая величина дисперсии времени до разрушения следует из (13) при $\nu=0$, $k \neq 0$. При этом дисперсия определяется коэффициентом k , который был введен в уравнение теории ползучести вместе с параметром повреждаемости и поэтому является также характеристикой меры «охрупчивания» материала.

ABOUT PHYSICAL-PROBABILISTIC APPROACH TO THE PROBLEM OF VISCOUS-BRITTLE DESTRUCTION

R. A. ARUTUNIAN, A. F. RODIONOV

ՄԱՍՈՒՑԻԿ-ՓԻՐՈՒՆ ԲԱՅԲԱՅՄԱՆ ԽՆԴԻՐԻ ՖԻԶԻԿԱ-ՀԱՎԱՆԱԿԱՆԱՑԻՆ
ՄՈՏԵՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ի. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ա. Ֆ. ԻՐԻՈՆՈՎ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Առաջարկված է փնտափածության պարամետր, որը որոշվում է նյութի փխրունացումով: Վերջինս համահավասարվող մեկնարանությունը թույլ է տալիս նրան կապել նմուշի հոսափության ֆունկցիայի հետ՝ որպես համակարգի Այզ պարամետրի հիման վրա ձևակերպված է մածուցիկ-փխրուն ջայթյաման ընդունուր հայտանիշ: Մոդելի շրջանակներում ընկարկված է նաև երկարատև ջայթյաման խնդիրը՝ վիճակագրական տեսանկյունից:

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы механики разрушения—М. Наука, 1971. 311 с.
2. Работнов Ю. И. Ползучесть элементов конструкций—М. Наука, 1966. 752 с.
3. Гнеденко Б. В., Белаяв В. В., Соловьев А. И. Математические методы в теории надежности—М.: Наука, 1965. 524 с.
4. Арутюнян Р. А. О закономерностях разрушения и разрушения в условиях ползучести // Теоретическая и прикладная механика—София—1986. XVII—№3.—с. 76—79.
5. Арутюнян Р. А. Оценка надежности конструктивных сплавов в условиях высокотемпературной ползучести // Пробл. прочности.—1988. №3, с. 19—21.
6. Арутюнян Р. А., Родионов А. Ф. О влиянии разрушения в условиях ползучести // Сб. Проблемы механики разрушения—Калинин. Калинин. гос. ун-тет.—1987. с. 9—13.
7. Арутюнян Р. А. О хрупком разрушении в условиях ползучести // Пробл. прочности.—1986. №11, с. 30—32.

Математико-механический факультет
Ленгосуниверситета

Поступила в редакцию
18 IV 1990

УДК 539.4

МОДЕЛЬ ДЕФОРМАТИВНОСТИ И ПРОЧНОСТИ
ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА С УЧЕТОМ
НЕПРЯМОУГЛЫЙНОСТИ ВОЛОКОН

СИМОНЯН А. М.

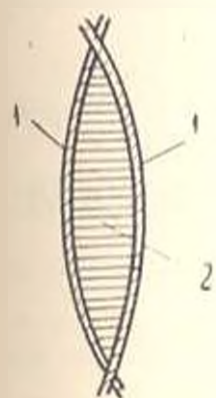
Строится модель деформирования и разрушения волокнистого композита. Принимается, что наполнитель представляет собой систему первоначально искривленных волокон, воспринимающих всю внешнюю нагрузку, при этом связующее препятствует выпрямлению волокон, содействуя вовлечению их в работу. Принимая, что количество волокон неограниченно велико, строятся детерминированные соотношения для описания деформативных и прочностных свойств композита на основе упругих и прочностных свойств волокон с учетом их разброса по стохастически заданной криволинейности, а также на основе упругих свойств связующего и его прочности на сдвиг.

Как известно, прочность однонаправленно-армированного композита вдоль волокон, зачастую, существенно ниже прочности наполнителя, и, следовательно, вопрос о повышении реализации прочности наполнителя в композите актуален. Согласно простейшему расчету, основанному на законе смесения композита лишь 1—2,5% [1] от внешней растягивающей нагрузки воспринимается связующим, то есть вид связующего и технология отверждения или термообработки композита практически не влияют на долю нагрузки, воспринимаемой волокнами. Однако, как показывают эксперименты, технология изготовления композита существенно влияет на его упругие и прочностные свойства, причем влияние это имеет место не только за счет изменения пористости связующего и, следовательно, изменения фактического коэффициента армирования по объему.

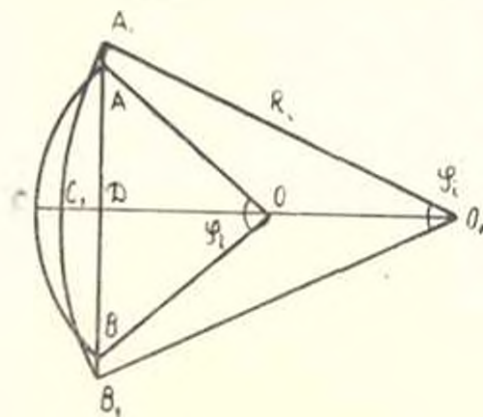
В настоящей работе природа сопротивления композита растяжению вдоль волокон представляется следующим образом. Принимается, что наполнитель представляет собой систему первоначально искривленных волокон [2], воспринимающих всю внешнюю нагрузку, при этом связующее препятствует выпрямлению волокон, содействуя вовлечению их в работу. После разрушения какого-либо волокна оно выключается из работы по некоторой длине, определяемой свойствами компонентов композита и их сцеплением. Принимая, что количество волокон в композите неограниченно велико, строятся детерминированные соотношения для описания деформативных и прочностных свойств композита на основе упругих и прочностных свойств волокон с учетом их разброса и стохастически заданной криволинейности, а также на основе упругих свойств связующего и его прочности на сдвиг.

1. Рассмотрим растягиваемый элемент (фиг. 1), состоящий из симметрично искривленных по дуге полок (1) с заполнением (2) из связующего. На фиг. 2 половина этого элемента показана до (АСВД) и после (А₁С₁В₁Т₁) деформации.

Для продольной деформации элемента ϵ имеет место следующее выражение:



Фиг. 1.



Фиг. 2.

$$\epsilon = \frac{AA_1 + BB_1}{AB} = \frac{R_1 \sin \frac{\varphi_1}{2}}{R_1 \sin \frac{\varphi_1}{2}} - 1 \quad (1.1)$$

Для деформации полки ϵ_1 и деформации связующего ϵ_2 очевидны следующие выражения:

$$\epsilon_1 = \frac{\widetilde{A_1B_1} - \widetilde{AB}}{\widetilde{AB}} = \frac{R_1 \varphi_1}{R_1 \varphi_1} - 1$$

$$\epsilon_2 = \frac{\widetilde{C_1D_1} - \widetilde{CD}}{\widetilde{CD}} = \frac{R_1 \sin^2 \frac{\varphi_1}{4}}{R_1 \sin^2 \frac{\varphi_1}{4}} - 1 \quad (1.2)$$

Используя приближения для малых углов

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}; \quad \sin^2 x \approx x^2 - \frac{x^4}{3}$$

в применении к $\frac{\varphi_1}{2}$ и $\frac{\varphi_1}{4}$, получим следующее соотношение:

$$\epsilon_2 = -\frac{12}{\varphi_1^2} (1 - \epsilon_1) \quad (1.3)$$

Используя условие равновесия для волокна с диаметром

$$P_i = -\lambda_i R \varepsilon_i \quad (1.4)$$

и принимая, что волокна и связующее деформируются упруго, получим

$$\varepsilon_i = \frac{4P_i}{\pi E_i \delta_i^3}; \quad \varepsilon_i = \frac{\varepsilon_c(1-\mu_c^2)}{E_c} \quad (1.5)$$

где E_i , E_c и μ_c — модули упругости i -го волокна и связующего и коэффициент Пуассона связующего, соответственно.

Уравнение (3) переписывается так:

$$P_i \left(\frac{1-\mu_c^2}{\pi R_i E_c} - \frac{48}{\pi^2 E_i \delta_i^3} \right) = \frac{12}{\pi^2} \varepsilon_i \quad (1.6)$$

(Заметим, что ε_i однозначно определяется отношением разницы длин волокна l_i и элемента l к длине элемента, независимо от R_i

$$\frac{h_i}{l} = \frac{l_i - l}{l} = \frac{R_i \gamma_i - 2R_i \sin \frac{\gamma_i}{2}}{2R_i \sin \frac{\gamma_i}{2}} \approx \frac{\gamma_i^2}{24}$$

что позволяет формулу (6) переписать так

$$P_i = \varepsilon \left(\frac{4}{\pi E_i \delta_i^3} + \frac{2h_i(1-\mu_c^2)}{\pi R_i l E_c} \right)^{-1} \quad (1.7)$$

Ясно, что формула (1.7) сохраняется и для случая элементов с несколькими волокнами.

2. Рассмотрим систему из параллельно соединенных элементов с некоторой длиной l при условии, что все эти элементы имеют одну и ту же кривизну ($R_i \equiv R$), при этом, как показано выше, могут быть моделированы элементы с произвольным $\frac{h_i}{l}$ с помощью подбора φ_i и длины полувоины l_i . Естественно принять, что для деформационного поведения такой системы не важно, в каком соседстве друг с другом находятся волокна с тем или иным искривлением и они могут рассматриваться расположенными хаотически (фиг. 3).

Из условия равновесия такой системы имеем

$$\sum_N P_i = F_0 \quad (2.1)$$

где F_0 и σ — площадь поперечного сечения и среднее напряжение системы элементов, N — количество элементов. Положим, что можем пренебречь разбросом упругих свойств и сечений волокон ($E_i \equiv E_0$, $\delta_i \equiv \delta$). При подстановке в уравнение (2.1) соотношения (1.7) и при использовании очевидного $\sum F_i = \sum F_0$, где λ — коэффициент армирования по объему, получим

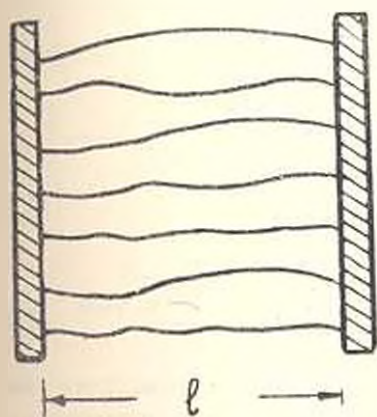
$$\sigma = \varepsilon \frac{\lambda E_0}{N} \sum_N \left(1 + \frac{\pi \lambda \delta (1-\mu_c^2)}{2Rl} \frac{E_0}{E_c} \right)^{-1} \quad (2.2)$$

В предположении, что число элементов N неограниченно велико, из соотношения (2.2) получим

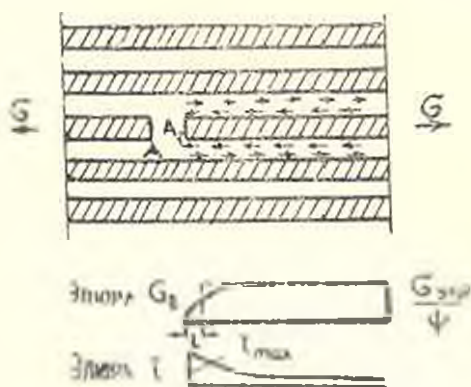
$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{2RE_c}{\pi b} \int_0^{\infty} \rho \left(\frac{2RE_c x}{\pi b E_b (1 - \nu_c^2)} \right) \frac{dx}{1+x} \quad (2.3)$$

где ρ — плотность распределения $\frac{h_i}{l}$. Очевидно $\rho(y)=0$ при $y < 0$.

Соотношение (2.3) сохраняется для любой системы элементов по длине образца и, следовательно, описывает деформационные свойства однонаправленно-армированного композита вдоль волокна до начала разрушения волокон. Правая часть соотношения (2.3) представляет собой эффективное значение модуля упругости композита, зависящее от распределения $\frac{h_i}{l}$, определяющего криволинейность волокон, а также и от модуля упругости связующего, сопротивляющегося выпрямлению волокон.



Фиг. 3



Фиг. 4.

3. Как известно, после разрыва волокна в композите при удалении от точки разрыва волокно это оказывается нагруженным благодаря сопротивлению сдвигу связующего. Ниже, аналогично [3], приведем простейший расчет напряжений в волокне и в связующем в области разрыва. На фиг. 4 схематически показано волокно, разорванное в точке A_1 , причем до разрыва точки A и A_1 находились на одной вертикали. Перемещение точки A_1 вправо тормозится касательными напряжениями, передающимися через связующее. Принимая, что неразорванные волокна деформируются одинаково независимо от расстояния их от разорванного волокна, получим соотношение

$$u_A - u_{\text{ср}} = \Delta \gamma \quad (3.1)$$

где Δ — толщина прослойки связующего, u_A и $u_{\text{ср}}$ — перемещения точек разорванного волокна и неразорванных волокон, соответственно.

Дифференцируя уравнение (3.1) по z и используя очевидные соотношения

$$\frac{du_{\text{уср}}}{dz} = \frac{\sigma_{\text{уср}}}{E_k}, \quad \frac{du_n}{dz} = \frac{\sigma_n}{E_n}, \quad \tau = \frac{\tau}{G_c}$$

получим

$$\frac{\sigma_n}{E_n} = \frac{\sigma_{\text{уср}}}{E_k} = \frac{\tau}{G_c} \frac{d\tau}{dz} \quad (3.2)$$

Используя условие равновесия элемента волокна

$$\tau = \delta \frac{d\sigma_n}{dz} \quad (3.3)$$

а также очевидное условие $\frac{d\sigma_{\text{уср}}}{dz} = 0$, получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2\tau}{dz^2} - \tau^2 \delta = 0, \quad \tau = \sqrt{\frac{G_c}{\delta E_n}} \quad (3.4)$$

Решая уравнения (3.4) и (3.3) при краевых условиях $\tau|_{z=L} = 0$,

$\sigma_n|_{z=0} = 0$, $\sigma_n|_{z=L} = \frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi}$, получим

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi} \left(1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{G_c}{\delta E_n}} z\right) \right) \\ \tau &= \frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi} \sqrt{\frac{G_c \delta}{\Delta E_n}} \exp\left(-\sqrt{\frac{G_c}{\delta E_n}} z\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

при этом

$$\tau_{\text{max}} = \tau|_{z=0} = \frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi} \sqrt{\frac{G_c \delta}{\Delta E_n}} \approx \sigma_{\text{уср}} \sqrt{\frac{G_c}{E_n}} \sqrt{\frac{1}{\phi(1-\phi)}} \quad (3.6)$$

формулы (3.5) и (3.6) имеют место в случае упругого поведения связующего. В случае же проявления пластических свойств значения напряжений τ будут меньшими, то есть если адгезионная прочность и прочность связующего на сдвиг превышает значение (3.6), то опасность распространения продольной трещины и постепенного выключения всего волокна из работы не имеет места. Заменим напряженное состояние волокна ступенчато-изменяющимся (на фиг. 4 показано штриховыми линиями) путем смещения напряжений вдоль волокна так, чтобы площадь упоры напряжений была бы той же, что обеспечило бы адекватность вклада волокна в восприятие композитом внешней нагрузки. При этом длина условно ненагруженной части волокна L , которую будем считать длиной неэффективной части волокна, определится по формуле

$$L = \frac{\int_0^L \left(\frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi} - \sigma_n(z) \right) dz}{\frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi}} = \sqrt{\frac{\delta \Delta E_n}{G_c}} \quad (3.7)$$

4. Рассмотрим теперь процесс разрушения композита. Образец из композита представим составленным из звеньев с длиной $2L$, каждое из которых представляет собой систему параллельно соединенных изогнутых волокон, находящихся в матрице связующего; при этом будем полагать, что разрыв волокна приводит к выключению его из работы в пределах звена, не влияя на его напряженное состояние вне пределов звена.

При этом для любого из звеньев соотношение (2.2) заменится следующим:

$$\sigma = \frac{2E_c}{N} \sum_i \left(1 - \frac{\pi \delta h_i (1 - \mu_c^2) E_b}{2Rl E_c} \right)^{-1} \quad (4.1)$$

где суммирование проводится по n элементам i , для которых выполняется условие

$$P_b \leq |\sigma_n| F_b$$

где $|\sigma_n|$ — прочность волокон, или, что то же,

$$\frac{h_i}{l} \geq 2 \left(1 - \frac{|\sigma_n|}{E_n} \right) \frac{RE_c}{\pi \delta |\sigma_n| (1 - \mu_c^2)} \quad (4.2)$$

Устремляя число N волокон к бесконечности, получим

$$\sigma = \frac{2RE_c}{\pi \delta (1 - \mu_c^2)} \int_0^{\epsilon} \rho \left(\frac{2RE_c x}{\pi \delta E_n (1 - \mu_c^2)} \right) \frac{dx}{1+x}, \quad \epsilon < \frac{|\sigma_n|}{E_n} \quad (4.3)$$

$$\sigma = \frac{2RE_c}{\pi \delta (1 - \mu_c^2)} \int_0^{\epsilon} \rho \left(\frac{2RE_c x}{\pi \delta E_n (1 - \mu_c^2)} \right) \frac{dx}{1+x}, \quad \epsilon > \frac{|\sigma_n|}{E_n}$$

Эти соотношения описывают деформационное поведение композита для любого слоя, а следовательно, и для всего образца в целом, если прочность волокна $|\sigma_n|$ детерминирована, то есть можно пренебречь разбросом его экспериментальных значений или, что то же, прочность волокна не зависит от его длины. Разрушение композита будет иметь место при достижении деформации $\epsilon_{\text{пред.}}$, при которой соблюдается условие $\frac{d\sigma}{d\epsilon} = 0$, что соответствует условию

$$\int_0^{\frac{E_n \epsilon_{\text{пред.}}}{|\sigma_n|} - 1} \rho \left(\frac{2RE_c x}{(1 - \mu_c^2) \pi \delta E_n} \right) \frac{dx}{1+x} = \left[\frac{2RE_c}{\pi \delta E_n (1 - \mu_c^2)} \left(\frac{E_n \epsilon_{\text{пред.}}}{|\sigma_n|} - 1 \right) \right] \quad (4.4)$$

Значение прочности композита σ_k определяется по формуле

$$\sigma_k = \epsilon_{\text{пред.}} \frac{2RE_c}{\pi \delta (1 - \mu_c^2)} \rho \left[\frac{2RE_c}{\pi \delta E_n (1 - \mu_c^2)} \left(\frac{E_n \epsilon_{\text{пред.}}}{|\sigma_n|} - 1 \right) \right] \quad (4.5)$$

где $\varepsilon_{\text{пред}}$ удовлетворяет условию (4.4).

Положим, что прочность волокна имеет разброс. Пусть $g_1(|z|)$ — плотность распределения прочности волокна, имеющего некоторую длину l . Аналогично [3], можно сказать, что плотность распределения прочности волокна с длиной $2l$ определится по формуле

$$g_{2l}(|z|) = \frac{2l}{l} g_1(|z|) \left| \int_0^z g_1(x) dx \right|^{\frac{n}{l}-1} \quad (4.6)$$

Условие (4.2) теперь может рассматриваться лишь в вероятностном аспекте. Можно сказать, что плотность распределения правой части

$$(4.2) \quad y = \frac{2RE_c}{\pi^2[\sigma_s(1-p_c^2)]} \left(z - \frac{|z_s|}{E_s} \right) \quad \text{определится по формуле}$$

$$g_{2l}(y, z) = \frac{2RE_c}{\pi^2 \left(\frac{2RE_c}{\pi^2 E_s(1-p_c^2)} + y \right)^2 (1-p_c^2)} g_{2l} \left(\frac{E_s z}{1 + y(1-p_c^2)} \frac{\pi^2 E_s}{2RE_c} \right) \quad (4.7)$$

Основное соотношение (4.1) запишется так:

$$z = \varepsilon E_s \int_0^{\infty} \frac{g_1(x)}{1 + \frac{\pi^2 E_s(1-p_c^2)x}{2RE_c}} \int_0^z g_{2l}(y, x) dy dx \quad (4.8)$$

Формула (4.8) описывает деформационные свойства при растяжении вдоль волокон однонаправленно-армированного композита вплоть до разрушения в зависимости от упругих свойств наполнителя и связующего, разброса в прочности волокна, определяемой плотностью распределения $g_{2l}(|z|)$, от криволинейности волокон, определяемой плотностью распределения $\varepsilon \left(\frac{k}{l} \right)$ и от длины L неэффективной части волокна.

Прочность композита может быть определена по формуле (4.8), где вместо ε подставляется значение его, соответствующее выполнению условия $\frac{d\varepsilon}{dz} = 0$. При этом, естественно, адгезионная прочность

соединения волокна со связующим должна превосходить значение (3.6).

5. Полученные результаты позволяют сделать некоторые рекомендации по изготовлению композита. Использование связующего с высоким модулем упругости на сжатие приводит к более равномерному вовлечению волокон в работу при растяжении и, как это вытекает из формулы (2.2), к повышению модуля упругости и прочности композита. С другой стороны, у высокомодульного связующего обычно велик и модуль сдвига, что приводит к увеличению касательного напряжения (3.6) в окрестности разорванного волокна, что угрожает распространению трещины параллельной армированию. Таким образом, использование более жесткого связующего имеет смысл при обеспечении достаточно высокой адгезионной прочности и прочности связующего на

сдвиг. Как вытекает из формулы (3.6), уменьшение касательных напряжений τ_{max} может быть достигнуто также увеличением модуля упругости наполнителя E_c или приближением коэффициента армирования φ к 0,5. При этом, однако, согласно формуле (3.7), увеличивается длина неэффективной части L , что, как это видно из формулы (4.6), приводит к смещению $\sigma_{22}(|=|)$, а следовательно, и $\sigma_{22}(y, x)$, согласно (3.7), влево. Чем меньше разброс данных о прочности волокон, тем меньше влияние L на деформационные и прочностные свойства композита.

Если модуль упругости y связующего относительно невелик, то, вследствие относительно высоких значений L , важно иметь наполнитель по возможности однородный по длине, например, в виде волокон большого диаметра, при этом опасность возникновения трещины вдоль волокна незначительна.

Плотность распределения непрямолинейности $\rho\left(\frac{h}{l}\right)$ может регулироваться шириной натягиваемой ленты; на него влияет также и усилие натяга при намотке или укладке. Прессование, естественно, на функцию $\rho\left(\frac{h}{l}\right)$ не влияет. Практическое определение $\rho\left(\frac{h}{l}\right)$ соответственно тому или иному технологическому режиму, вообще говоря, затруднительно, но может быть осуществлено с помощью честного выжигания композита и определения свободных поперечных перемещений волокон на выжженной длине. Определение $g(|=|)$ может быть осуществлено на основе гистограммы прочности, построенной на образцах волокон или группы волокон с длиной l .

STRAIN AND STRENGTH MODEL OF FIBROUS COMPOSITS TAKING ACCOUNT CURVATURE OF FILAMENTS

A. M. SIMONIAN

ԲԵԼՐԱՍԵՐԻ, ԿՈՄԲՈՂԵՏԻ ԳԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆ ԵՎ ԱՐՄՐՈՒԹՅԱՆ ՄՈԴԵԼԸ
ԻՆԵՐԿՆԵՐԻ ՈՉ ՈՒՂՎԱԳՆԱՅՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱԽՈՒՄՈՎ

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆԻԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ Մ

Կառուցվում է թելիկային կոմպոզիտի ղեֆորմացման և բալրուման մոդելը: Ընդունվում է, որ լցանյութը «փշրնալեն» ծոված թելիկների համակարգ է, որն ընդունում է ամրոզչ առաաբին բեռը, ընդ որում կապակցողն արգելակում է թելիկների ուղղմանը՝ ռմանդակելով նրանց ներգրավմանը աշխատանքի մեջ: Ընդունելով, որ թելիկների քանակն անսահմանափակ մեծ է, կոմպոզիտի ղեֆորմատիվ և ամրային հատկությունների նկարագրման

Համար կառուցվում են որոշող աննշանայիններ՝ թերիկների տառադրական և ամրային հատկությունների հիման վրա, հաշվի առնելով ստորաասիկորեն տրված կորագծով նրանց ջրվածությունը, խնայելու նաև կապակցողի տառադրական և սառչի ամրության հատկությունները:

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладра А. М., Булавс Ф. И. Прочность армированных пластиков.—М.: Химия, 1982. 213 с.
2. Гиль А. Н. О континуальных теории композиционных материалов с мелкомасштабными некристаллическими и структуре.—Докл. АН СССР, 1983, 268, №2, с. 307—313.
3. Розен Б. Механика упрочнения композиция и Волокнистые композиционные материалы.—М.: Мир, 1967. с. 51—97.

СКТБ КМ АН Армянии

Поступила в редакцию
6.IX.1989

УДК 532.517.3

РАЗВИТИЕ ЛАМИНАРНОГО НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ВХОДНОМ УЧАСТКЕ КРУГЛОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ

САРУХАՅԱՆ Ա. Մ.

Сформулирована задача начального участка нестационарного ламинарного течения в круглой цилиндрической трубе. Получены формулы распределения скорости как по длине и по поперечному сечению стационарного потока в начальном участке, так и по поперечному сечению в стабилизированном нестационарном потоке.

Исследование неустановившегося ламинарного течения вязкой жидкости на входном участке круглой цилиндрической трубы имеет практическое и теоретическое значения. Соответствующая стационарная задача рассмотрена во многих работах. Нестационарное течение рассматривалось лишь в некоторых работах. Используя линейную аппроксимацию и приближение, предложенное С. М. Таргом в работе [1], рассмотрено пульсирующее течение на входном участке, правомерность которого подтверждается экспериментально [2]. Рассматривая влияние периодического возмущения на пограничный слой плоской пластины, в работе [3] дается аппроксимирующее решение для входного участка цилиндрической трубы.

Воспользовавшись гипотезой автомодельности профилей скорости в пограничном слое и уравнения импульсов в [1], дается решение задачи при произвольном распределении скоростей на входе трубы. Аналогичная задача решена также в работе [5] методом численного интегрирования уравнения Навье-Стокса. Используя линейную аппроксимацию, предложенную С. М. Таргом, и приближение для малых времен в работе [6], решена задача о развитии течения на входном участке круглой трубы при разгонном движении жидкости.

В настоящей работе сделана попытка получить решение задачи в общем виде. Система аппроксимирующих дифференциальных уравнений, описывающая нестационарную задачу осесимметричного движения несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе, имеет вид

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) = 0 \quad (3)$$

$$U_s = \frac{2}{R^3 \Delta T} \int_0^R \int_0^{\Delta t} r v_z dr dt \quad (4)$$

где ось oz направлена вдоль оси трубы и начало отсчета совмещено с центром начала трубы.

v_z, v_r — составляющие вектора скорости в направлении координат z, r ;

$$v_z = v_z(z, r, t), \quad v_r = v_r(z, r, t) \quad (5)$$

p — давление, зависящее от z и t , которое следует из уравнения (2), то есть

$$p = p(z, t) \quad (6)$$

ρ — плотность жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости; U_s — осредненная по времени средняя скорость живого сечения; R — радиус трубы; t — время.

Уравнения (1), (2), (3) на начальном участке имеют следующие граничные и начальные условия:

$$v_z = 0, \quad \text{при } r = R \quad (7)$$

$$v_z = \frac{1}{2}(r), \quad v_r = 0, \quad \text{при } z = 0, \quad (0 \leq r < R, t = 0) \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} \rightarrow 0, \quad v_r \rightarrow 0, \quad v_z \rightarrow v' \quad \text{при } z \rightarrow \infty \quad (9)$$

Здесь $v' = v'(r, t)$ является решением уравнения нестационарного осесимметричного одномерного течения вязкой жидкости

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial r} \right) \quad (10)$$

при крайних условиях (7) и (8)

Общее решение уравнения (1) при крайних условиях (7), (8), (9) ищем в виде суммы

$$v_z(z, r, t) = U(z, r, t) + \varphi(z, t) \quad (11)$$

где $U(z, r, t)$ — общее решение однородного уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \quad (12)$$

$\varphi(z, t)$ — частное решение неоднородного уравнения (1)

Общее решение уравнения (12) ищем в виде

$$U(z, r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(z, t) J_0 \left(\mu_k \frac{r}{R} \right) \quad (13)$$

Здесь $J_0 \left(\mu_k \frac{r}{R} \right)$ — бесселевы функции первого рода нулевого порядка;

$C_k(z, t)$ — неизвестные коэффициенты

Подставим значение $U(z, r, t)$ из (13) в уравнение (12) и приравняв соответствующие коэффициенты для определения неизвестных коэффициентов $C_k(z, t)$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} C_k(z, t) + U_0 \frac{\partial}{\partial z} C_k(z, t) = -\frac{\lambda_k^2}{R^2} C_k(z, t) \quad (14)$$

Решение этого уравнения представим в виде

$$C_k(z, t) = C_k(t) \exp\left(-\frac{\lambda_k^2}{R \cdot R_c} z\right) \quad (15)$$

где $R_c = \frac{U_0 R}{\gamma}$, тогда для определения $C_k(t)$ получим уравнение

$$\frac{dC_k(t)}{dt} = 0 \quad (16)$$

то есть $C_k(t) = C_k = \text{const}$. Следовательно,

$$C_k(z, t) = C_k \exp\left(-\frac{\lambda_k^2}{R \cdot R_c} z\right) \quad (17)$$

Имея виду соотношение (17), общее решение задачи примет вид

$$v_z(z, r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right) \exp\left(-\frac{\lambda_k^2}{R \cdot R_c} z\right) + \varphi(z, t) \quad (18)$$

Чтобы определить неизвестную функцию $\varphi(z, t)$, умножим обе части уравнения (3) на $r dr$ и проинтегрируем по r в пределах от 0 до R . Тогда, принимая во внимание условия прилипания жидкости к стенке трубы, получим

$$\int_0^R r \frac{\partial v_z}{\partial z} dr = 0 \quad (19)$$

Подставляя из (18) значение v_z в уравнение (19), получим соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} - \int_0^R r \frac{\lambda_k^2}{R \cdot R_c} C_k J_0\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right) \exp\left(-\frac{\lambda_k^2}{R \cdot R_c} z\right) dr + \int_0^R r \frac{\partial}{\partial z} \varphi(z, t) dr = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial z} \varphi(z, t) = +2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2}{R \cdot R_c} C_k J_1(\lambda_k) \exp\left(-\frac{\lambda_k^2}{R \cdot R_c} z\right) \quad (20)$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\varphi(z, t) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{\lambda_k} J_1(\lambda_k) \exp\left(-\frac{\lambda_k^2}{R \cdot R_c} z\right) + C_0(r, t) \quad (21)$$

Здесь $C_0(r, t)$ — постоянная интегрирования. Имея виду значение

$\varphi(z, t)$ из (21), окончательно для $v_z(z, r, t)$ получим формулу

$$v_z(z, r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp\left(-\frac{\lambda_k^2}{R^2 + R_0^2} z\right) \left[J_0\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right) - \frac{2J_1(\lambda_k)}{\lambda_k} \right] + C_0(r, t) \quad (22)$$

Значение $C_0(r, t)$ определяется из условия (10). Подставляя в (22) $z \rightarrow \infty$, для $C_0(r, t)$ получим

$$C_0(r, t) = v'(r, t) \quad (23)$$

$v'(r, t)$ является решением уравнения (10) при краевых условиях (7) и (8), которое пишется в виде суммы

$$v'(r, t) = U_1(r, t) + U_2(r, t) \quad (24)$$

где $U_1(r, t)$ — решение задачи, учитывающее действие перепада давления при нулевых начальных и граничных условиях; $U_2(r, t)$ — то же влияние стенок трубы и начальное распределение скоростей.

Для нестационарного осесимметричного течения $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$, откуда следует, что давление в каждый момент времени во всех живых сечениях имеет одну и ту же величину. Это возможно, если

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial z} = f(t) \quad (25)$$

Из определения функции U_1 следует, что она является решением неоднородного уравнения

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} \right) + f(t) \quad (26)$$

при нулевых начальных и граничных условиях

$$U_1(r, t) = 0, \quad \text{при } r = R, \quad t > 0 \quad (27)$$

$$U_1(r, t) = 0, \quad \text{при } t = 0, \quad 0 \leq r < R \quad (28)$$

U_2 — решением однородного уравнения

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} \right) \quad (29)$$

при условиях

$$U_2(r, t) = 0, \quad \text{при } r = R, \quad t > 0 \quad (30)$$

$$U_2(r, t) = \varphi(r), \quad \text{при } t = 0, \quad 0 \leq r < R \quad (31)$$

Общее решение уравнения (29) ищем в виде:

$$U_2(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp\left(-q_k^2 \frac{r^2}{R^2} t\right) J_0\left(\frac{q_k}{R} r\right) \quad (32)$$

где q_k — корни функции Бесселя нулевого порядка; b_k — постоянный коэффициент, значение которого определяется по формуле

$$b_k = \frac{2}{R^2 J_1(q_k)} \int_0^R r J_0\left(q_k \frac{r}{R}\right) z(r) dr \quad (33)$$

Решение неоднородного уравнения (26) ищем в виде ряда Фурье-Бесселя по собственным функциям задачи

$$U_k(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) J_0\left(q_k \frac{r}{R}\right) \exp\left(-q_k^2 \frac{z}{R^2} t\right) \quad (34)$$

при этом t является параметром.

Для определения значения коэффициентов $A_k(t)$ функцию $f(t)$ разложим в ряд Фурье-Бесселя

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2f(t) J_0\left(q_k \frac{r}{R}\right)}{q_k J_1(q_k)} \quad (35)$$

Тогда уравнение (26) с учетом (34) и (35) примет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} A'_k(t) J_0\left(q_k \frac{r}{R}\right) \exp\left(-q_k^2 \frac{z}{R^2} t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2f(t) J_0\left(q_k \frac{r}{R}\right)}{q_k J_1(q_k)} \quad (36)$$

Уравнение (36) существует при условии

$$A'_k(t) \exp\left(-q_k^2 \frac{z}{R^2} t\right) = \frac{2f(t)}{q_k J_1(q_k)}$$

откуда

$$A_k(t) = \frac{2}{q_k J_1(q_k)} \int_0^t f(t) \exp\left(-q_k^2 \frac{z}{R^2} t\right) dt = \frac{2[F(t) - F(0)]}{q_k J_1(q_k)} \quad (37)$$

где

$$F(t) = \int_0^t f(t) \exp\left(-q_k^2 \frac{z}{R^2} t\right) dt$$

Таким образом, общее решение $v(r, t)$, после подстановки значений U_1 и U_2 , имеет вид

$$v(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(q_k \frac{r}{R}\right) \left[b_k + \frac{2[F(t) - f(0)]}{q_k J_1(q_k)} \right] \exp\left(-q_k^2 \frac{z}{R^2} t\right) \quad (38)$$

Подставляя значение постоянного излучения из (38) и (22), окончательно для $v_2(z, r, t)$ получим выражение

$$v_2(z, r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp\left(-\frac{z_k^2}{R \cdot R_c} z\right) \left[J_0\left(q_k \frac{r}{R}\right) - \frac{2f_1(t_k)}{q_k} \right] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(q_k \frac{r}{R}\right) \left[v_k + \frac{2[F(t) - f(0)]}{q_k J_1(q_k)} \right] \exp\left(-q_k^2 \frac{z}{R^2} t\right) \quad (39)$$

Значение собственного числа задачи определяется из граничного условия при $R=r$, $v_2(z, r, t)=0$, тогда

$$J_0(\lambda_k) - \frac{2J_1(\lambda_k)}{\lambda_k} = 0$$

или

$$J_2(\lambda_k) = 0 \quad (40)$$

Следовательно, собственные числа задачи λ_k есть корни функции Бесселя первого рода второго порядка. Из краевого условия (8) и уравнения (39) имеем

$$\psi_2(r) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left[J_0\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right) - \frac{2J_1(\lambda_k)}{\lambda_k} \right] \quad (41)$$

где

$$\psi_1(r) = \psi(r) - \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(q_k \frac{r}{R}\right) \left[b_k - \frac{2F(0)}{q_k J_1(q_k)} \right] \quad (42)$$

Из последнего равенства видно, что постоянные числа C_k являются коэффициентами разложения функции $\psi_2(r)$ в ряд Фурье-Бесселя.

Система нормализованных ортогональных функций, соответствующих собственным функциям с весом r , имеет вид

$$\Phi_k\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_k} \left[1 - \frac{J_0\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right)}{J_0(\lambda_k)} \right] \quad (43)$$

Для определения значения коэффициентов C_k , обе части равенства (41) умножим на $\lambda_k \frac{r}{R} \Phi_k\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right)$ и проинтегрируем по r , от 0 до R получим

$$C_k = \int_0^R \frac{\lambda_k}{R} 2\sqrt{2} \left[1 - \frac{J_0\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right)}{J_0(\lambda_k)} \right] \psi_2(r) dr \quad (44)$$

Закон распределения давления вдоль оси трубы можно определить из уравнения (1), подставляя в нем значение $v_2(z, r, t)$.

Начальные и граничные условия при этом будут: $p=p_0$ при $z=0$, $t \geq 0$, $p=p$ при $z=z$, $t > 0$.

Таким образом, получена расчетная формула распределения скоростей при нестационарном ламинарном движении на входном участке круглой цилиндрической трубы для общего случая, когда начальные и граничные условия имеют общий вид. Исходя из общего решения для заданного начального и граничного условия, можно получить решения частных задач, вычислив при этом соответствующие коэффициенты.

DEVELOPMENT OF LAMINAR NON-STEADY FLOWING OF VISCOUS FLUID ON THE CIRCULAR CYLINDRICAL PIPE INLET PART

A. A. SARLKHANIAN

ՄԱՌԹՈՅԻՎ ՀԵՂՈՒԿԻ ՎԶԱՍՏԱՏՎԱԾ ԼԱՄԻՆԱՐ ՇՈՐՃՄԱՆ ԶԱՐԿԱՑՈՒՄԸ
ՎԵՐ ԳԼՆԱՅԻՆ ԽՈՂԱՎԱԿԻ ՄՈՒՏՔԱՄԱՐԻՄ

Ա. Ա. ՍԱՐԽԱՆԻԱՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. ո. ո.

Չեղեկարկված է կլոր զլանալին խողովակի մուտքի տեղամասում հաս-
տատված լամինար շարժման զարգացման խեղիքը:

Խնդրի լուծումը փնտրվում է երկու դեմքերի տեսքով: Գումարեկներին
մեկը հանդիսանում է համասեռ հալասարման լուծումը անհամասեռ եզրա-
յին պայմանների դեպքում, իսկ մյուսը՝ անհամասեռ հալասարման լուծումը
համասեռ եզրային պայմանների դեպքում:

Ստացված են արագություն փոփոխման սրինաչափությունները ինչպես
մուտքի տեղամասի այնպես էլ շարժման կայունացված տեղամասերի համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Atabek H. B., Chang C. C. Oscillatory flow near the entry of a circular tube — ZAMP, 1961, v. 12, № 3, p. 185—201.
2. Atabek H. B., Chang C. C. Measurement of laminar oscillatory flow in the inlet length of a circular tube. — Phys. Med. Biol., 1964, v. 9, № 2, p. 219—227.
3. Акоста А. Влияние нестационарности течения на измерение расхода на входе в трубу. — Тр. американского общ. инж. мех. — теоретические основы инж. расч. М. «Мир», 1976, №3, с. 341—342.
4. Acula X. J. R. Analysis of suddenly started laminar flow in the entrance region of a circular tube. — Appl. Sci. Res., 1969, v. 21, p. 248—259.
5. Ноблессе, Фарелл. Нестационарное осевое течение на начальном участке трубы. — Прикладная механика, 1973, №3, с. 30—36.
6. Айнола Л. Я., Руустал Э. А. Развитие течения на входном участке круглой трубы при разгонном движении жидкости. — Тр. Таллинского политех. института. Таллин, 1983, № 593, с. 95—107.

Երևանский политехнический
институт

Поступила в редакцию
19 III 1990

УДК 532.516

О НЕСИММЕТРИЧНОЙ МОДЕЛИ КРУГОВОГО ДВИЖЕНИЯ
ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМСЯ ЦИЛИНДРАМИ

И. П. ПРОСЯН Д. Т.

Использована модель структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений к решению задачи о движении жидкости между двумя вращающимися цилиндрами. Получены аналитические выражения для скорости, угловой скорости, касательного напряжения трения между цилиндрическими слоями, а также для суммарного момента относительно оси вращения сил трения на каком-нибудь радиусе окружности. Влияние учета микроструктуры проиллюстрировано на графиках.

Задачу о движении жидкости между двумя вращающимися круговыми цилиндрами впервые решил Ньютон [1]. При решении этой задачи Ньютон исходил из равновесия сил вязкости, а не из моментов. На эту ошибку указал Стокс [2], который дал правильное решение задачи. Вышеуказанные решения были основаны на классической теории континуума. Однако классическая точка зрения налагает сильные ограничения на пределы, в которых континуальное описание макроскопического поведения может успешно отражать тонкую структуру материала. Накопившиеся факты свидетельствуют о том, что классическая теория континуума Навье-Стокса не может точно предсказать поведение некоторого класса жидкостей и особенно течений через тонкие капилляры и узкие зазоры, так как не содержит механизма для объяснения наблюдаемых новых физических явлений. Такая потеря точности возможна в случаях, когда характерный размер системы (разность радиусов коаксиальных цилиндров) сравним с характерной материальной данной вещества, значение которой обусловлено средним размером молекул или зерен, содержащихся в среде [3].

Это обстоятельство (совместно с другими недостатками классической теории континуума) привело исследователей к разработке теории несимметрических жидкостей.

Все более очевидно, что разработанные в последнее время положения теории структурных жидкостей могут успешно описывать непьютоновские поведения реальных жидкостей*. В этой теории введены два независимых кинематических векторных поля, одно из которых представляет поступательные движения частиц жидкости, а другое — угловые или вращательные движения частиц, характеризующие внутренние степени свободы, соответствующие им моментные напряжения [3–12]. Характерным отличием теории структурных сред с несимметричным тензором напряжений является присутствие масштабных пара-

* К настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных этой тематике, и чем достаточно полно изложено в работе [3].

метров. Эти жидкости реагируют на микровращательные движения и спиновую инерцию, поэтому могут воспринимать распределенные поверхностные и массовые пары сил.

В работе [13] в рамках модели [14] рассматривалось течение микрополярированной жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами, из которых внутренний цилиндр неподвижен, а внешний вращается с постоянной угловой скоростью. Найдены выражения для полей скорости и микровращения.

В настоящей работе применена теория континуума с несимметричным тензором напряжений к решению задачи плоского движения несжимаемой жидкости между двумя вращающимися с разными угловыми скоростями коаксиальными цилиндрами.

Общая система уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости с несимметричным тензором напряжений имеет вид [3, 6]

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + 2\nabla \cdot (\nabla \vec{v})^d + \nabla \nabla \times (2\vec{\omega} - \nabla \times \vec{v}) + \vec{f} \quad (2)$$

$$\rho \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 2\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v} - 2\vec{\omega}) + c_0 \nabla (\nabla \cdot \vec{\omega}) + 2c_s \nabla \cdot (\nabla \vec{\omega})^d + 2c_a (\nabla \vec{\omega})^a - \vec{c} \quad (3)$$

Здесь ρ — массовая плотность, p — давление, I — скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы, \vec{v} — вектор скорости точки, $\vec{\omega}$ — вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, η — кинематическая ньютоновская вязкость, ν — кинематическая вращательная вязкость, c_0 , c_s и c_a — коэффициенты моментной вязкости, $d(...)/dt$ — полная производная по времени, ∇ — пространственный градиент, $(\nabla \vec{v})^d$ и $(\nabla \vec{\omega})^d$ — симметричные части соответствующих див, $(\nabla \vec{v})^a$ и $(\nabla \vec{\omega})^a$ — антисимметричные дивы, \vec{f} — вектор массовой силы, \vec{c} — вектор массового момента.

Воспользуемся цилиндрическими координатами r, φ, z . Рассмотрим стационарное движение несжимаемой несимметричной жидкости между концентрическими цилиндрами (фиг. 1). Тогда траектории всех частиц представляют собой дуги концентрических окружностей.

Пусть внутренний цилиндр имеет радиус R_1 и вращается с угловой скоростью Ω_1 , а внешний имеет радиус R_2 и вращается с угловой скоростью Ω_2 . Тогда вектор скорости и вектор угловых скоростей будут иметь форму

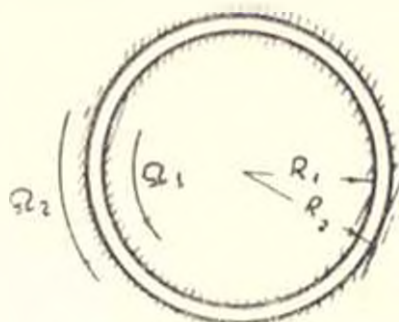
$$\vec{v} = v[0, v_\varphi(r), 0] \quad (4)$$

$$\vec{\omega} = \omega[0, 0, \omega(r)]$$

Действием массовых сил и массовых моментов пренебрегаем. Уравнение неразрывности (1) удовлетворяется тождественно и дает

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Таким образом, скорость каждой частицы вдоль ее траектории будет оставаться неизменной. Эта скорость может изменяться лишь при переходе от одной частицы к другой.



Фиг. 1.

Уравнения поступательного движения (2) и вращательного движения (3) дают

$$\frac{v_z^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

$$(\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_z}{r} \right) - 2\gamma_r \frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \quad (8)$$

$$(c_1 - c_2) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + 2\gamma_r \frac{\partial(rv_z)}{\partial r} - (\gamma_1 + \gamma_2) r \omega = 0 \quad (9)$$

Здесь $\gamma = \gamma_r$, $\gamma_\varphi = \gamma_\theta$, $c_1 = c_{1\varphi}$, $c_2 = c_{2\varphi}$. Заметим, что благодаря тождествам (1) и (5), квадратичные члены инерции из основных уравнений, относящихся к искомым v_z и ω , выпали, и задача о круговом движении вязкой несжимаемой несимметричной жидкости стала линейной. Дифференцируя уравнение (6) по z и учитывая уравнение (7), получим

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

то есть круговое движение вязкой несжимаемой несимметричной жидкости является плоско-параллельным.

Из уравнения (8) следует, что

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const} \quad (11)$$

Равенство (11) означает, что перепад давления вдоль траектории постоянен. Уравнения (8) и (9) для определения скорости v_r и ω при учете равенства (10) и (11) будут представляться в виде

$$(\gamma_i + \gamma_r) \frac{d}{dr} \left(\frac{dv_\phi}{dr} + \frac{v_\phi}{r} \right) - 2\gamma_r \frac{d\omega}{dr} = \frac{C}{r} \quad (12)$$

$$(c_a' + c_d') \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) + 2v_\phi \frac{d(rv_\phi)}{dr} - 4\gamma_r \omega r = 0 \quad (13)$$

Уравнение (12) можем представить в виде

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(rv_\phi)}{dr} \right] - 2 \frac{\gamma_r}{\gamma_i + \gamma_r} \frac{d\omega}{dr} = \frac{C}{\gamma_i + \gamma_r} \frac{1}{r} \quad (14)$$

Разрешая (14) относительно $d(rv_\phi)/dr$, получаем

$$\frac{d(rv_\phi)}{dr} = (\gamma_i + \gamma_r)^{-1} (2\gamma_r \omega r + C r \ln r) + C_1 r \quad (15)$$

Подстановка $d(rv_\phi)/dr$ в уравнение (13) дает

$$\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} - k^2 \omega = -P \ln r - \frac{2\gamma_r}{(c_a' + c_d')} C_1 \quad (16)$$

где

$$k = \left(\frac{4\gamma_i}{\gamma_i + \gamma_r} \frac{\gamma_r}{c_a' + c_d'} \right)^{1/2}, \quad P = \frac{2\gamma_r C}{(c_a' + c_d')(\gamma_i + \gamma_r)} \quad (17)$$

Общее решение уравнения (16) есть

$$\omega = C_2 I_0(kr) + C_3 K_0(kr) + \frac{C}{2\gamma_i} \ln r + \frac{\gamma_i + \gamma_r}{2\gamma_i} C_1 \quad (18)$$

где $I_0(kr)$ и $K_0(kr)$ — модифицированные цилиндрические функции нулевого порядка первого и второго родов, C_2 и C_3 — произвольные константы интегрирования. Подставляя (18) в (15) и интегрируя, получим

$$v_\phi = 2\gamma_i (\gamma_i + \gamma_r)^{-1} k^{-1} [C_2 I_1(kr) - C_3 K_1(kr)] + \\ + \frac{C}{2\gamma_i} r \left[\ln r - \frac{1}{2} \right] + \frac{\gamma_i + \gamma_r}{2\gamma_i} C_1 r + C_4 r^{-1} \quad (19)$$

где $I_1(kr)$ и $K_1(kr)$ — модифицированные цилиндрические функции первого порядка первого и второго родов, C_4 — произвольная константа интегрирования.

Мы предполагаем, что жидкость прилипает к стенкам внутреннего и внешнего цилиндров при $r=R_1$ и $r=R_2$, тогда граничные условия для поступательной скорости и угловой скорости вращения частиц будут

$$\begin{aligned} \text{при } r=R_1 \quad v_r &= \Omega_1 R_1, \quad \omega=0 \\ \text{при } r=R_2 \quad v_r &= \Omega_2 R_2, \quad \omega=0 \end{aligned} \quad (20)$$

Для давления на основании равенства (11) и уравнения (6) будем иметь

$$p = C_2 + \rho \int \frac{v_z^2}{r} dr + C_3 \quad (21)$$

Мы видим, что давление при изменении угла φ будет многозначной функцией. Для устранения этой многозначности надо положить

$$C = 0 \quad (22)$$

Используя граничные условия (20) и равенство (22) из (18) и (19), получим выражения для определения постоянных C_1 , C_2 , C_3 и C_4 и приходим к решению

$$v_z^* = \frac{v_z}{\Omega_1 R_1} = \frac{2N^2}{\lambda} [C_2^* I_1(\lambda r^*) - C_3^* K_1(\lambda r^*)] + C_1^* r^* + \frac{C_4^*}{r^*} \quad (23)$$

$$\omega^* = \frac{\omega R_1}{\Omega_1 R_1} = C_2^* I_0(\lambda r^*) + C_3^* K_0(\lambda r^*) + C_1^* \quad (24)$$

где

$$C_1^* = \frac{C_1}{\Omega_1} = \left(1 - \frac{\Omega_2 R_2^2}{\Omega_1 R_1^2}\right) \left[I_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) K_0(\lambda) - I_0(\lambda) K_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) \right] A \quad (25)$$

$$C_2^* = \frac{C_2}{\Omega_1} = - \left(1 - \frac{\Omega_2 R_2^2}{\Omega_1 R_1^2}\right) \left[K_0(\lambda) - K_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) \right] A \quad (26)$$

$$C_3^* = \frac{C_3}{\Omega_1} = \left(1 - \frac{\Omega_2 R_2^2}{\Omega_1 R_1^2}\right) \left[I_0(\lambda) - I_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) \right] A \quad (27)$$

$$C_4^* = \frac{C_4}{\Omega_1 R_1^2} = 1 + \left\{ \frac{2N^2}{\lambda} \left\{ \frac{1}{\lambda} - \left[I_1(\lambda) K_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) + I_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) K_1(\lambda) \right] \right\} - \right. \\ \left. - \left[I_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) K_1(\lambda) - I_1(\lambda) K_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) \right] \right\} \left(1 - \frac{\Omega_2 R_2^2}{\Omega_1 R_1^2}\right) A \quad (28)$$

$$A^{-1} = \left[I_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) K_1(\lambda) - I_1(\lambda) K_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) \right] \left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2}\right) - \frac{2N^2}{\lambda} \left\{ \left[I_1(\lambda) K_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + I_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) K_1(\lambda) \right] + \frac{R_2}{R_1} \left[I_0(\lambda) K_1\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) + K_0(\lambda) I_1\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) \right] - \frac{2}{\lambda} \right\} \quad (29)$$

$$r^* = \frac{r}{R_1}, \quad N^2 = \frac{\gamma_r}{\gamma_1 + \gamma_r}, \quad \lambda = \left(\frac{4\gamma_1 - \gamma_r}{\gamma_1 + \gamma_r c_a^2 + c_{il}^2} \right)^{1/2}, \quad R_1 = k R_2 \quad (30)$$

Здесь была использована формула Ломмеля—Ганкеля

$$I_0(\lambda) K_1(\lambda) - I_1(\lambda) K_0(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$$

Решение (23) переходит в классическое при $\gamma_r = 0$ [15]

$$v_z = \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \left[(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) r - \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{r} \right]$$

и (24) дает $m=0$.

Обобщенную гипотезу Ньютона-Навье-Стокса для изотропных несжимаемых жидкостей с несимметричным тензором напряжений имеет вид [3, 16]

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} - \gamma_i(v_{j,i} + v_{i,j}) + \gamma_r(v_{i,j} - v_{j,i}) + 2\gamma_m\epsilon_{mij}\omega_m$$

откуда касательное напряжение силы вязкости для кругового движения представится в виде

$$\tau_{\theta\theta} = (\gamma_i + \gamma_r) \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - (\gamma_i - \gamma_r) \frac{v_\theta}{r} - 2\gamma_m\omega_\theta \quad (31)$$

Здесь δ_{ij} — тензор Кронекера, ϵ_{mij} — тензор Левы-Чивиты.

Подставляя значения γ_i из (23) и ω из (24) с учетом (26) — (28), получим

$$\tau_{\theta\theta} = -2\gamma \frac{C_1}{r^2} - 2\gamma N^2 \left[C_2 \frac{1}{kr} I_1(kr) - C_3 \frac{1}{kr} K_1(kr) \right] \quad (32)$$

Вычислим момент всех сил вязкости, распределенных по какой-либо окружности радиуса r относительно оси симметрии.

Обозначая этот момент через M , будем иметь

$$M = \int_0^{2\pi} \tau_{\theta\theta} r^2 d\varphi$$

Подставляя выражение $\tau_{\theta\theta}$ из (32), получим выражение момента сил вязкости в виде

$$M = -4\pi\gamma \left[C_1 + N^2 [C_2 I_1(r^*) + C_3 K_1(r^*)] \frac{r^* R_1^2}{r} \right] \quad (33)$$

Выражение момента сил вязкости в случае классической ньютоновской жидкости имеет вид [15]

$$M_{\text{нз}} = -4\pi\gamma \frac{\Omega_1 \left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) R_2^2}{\left(\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1 \right)}$$

Для обсуждения результатов удобнее формулу (33) представить в безразмерном виде

$$M^* = \frac{M}{M_{\text{нз}}} = \left[C_1^* + N^2 [C_2^* I_1(r^*) + C_3^* K_1(r^*)] \frac{r^*}{r} \right] \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) \left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^{-1} \quad (34)$$

Структурная несимметричная жидкость, помимо обычных безразмерных параметров, встречающихся в теории ньютоновской жидкости, обладает новыми скалярными константами, связанными с учетом вращательного движения частиц. Несимметричная жидкость характеризуется тремя физическими константами γ , γ_r и $(C_2 + C_3)$ в отличие от

классической ньютоновской жидкости, которая характеризуется лишь одной константой вязкости [3]. Параметр ν_r имеет размерность вязкости. Поскольку он появляется в результате учета вращательного движения частиц, то естественно его называть вязкостью вращательного движения или просто вращательной вязкостью [17]. ν_r характеризует сопротивление вращательным движениям подобно тому, как сдвиговая ньютоновская вязкость характеризует сопротивление поступательным движениям. Константа $(c_a + c_r)$ имеет размерность $[\nu]$ [18], и с ее помощью можно составить параметр $l = \left(\frac{c_a + c_r}{4\nu} \right)^{1/2}$, который имеет размерность длины. Параметр l может быть отождествлен с некоторой характеристикой вещества, зависящей от размера молекул (подструктуры).

Структурные несимметричные жидкости характеризуются двумя безразмерными параметрами.

Параметр связи N , определенной формулой

$$N = \left(\frac{\nu_r}{\nu + \nu_r} \right)^{1/2}$$

характеризует связь уравнений (2) поступательного и (3) вращательного движений. При $\nu_r \rightarrow 0$ $N \rightarrow 0$; тогда эти уравнения разделяются и уравнение поступательного движения (2) сводится к обычному уравнению Навье-Стокса.

Второй важный безразмерный параметр L представляет собой отношение зазора между стенками внешнего и внутреннего цилиндров $e = R_2 - R_1$ к характерной материальной длине l , то есть

$$L = \frac{e}{l} \quad \left(\text{или} \quad l = NL \frac{R_2}{R_2 - R_1} \right).$$

Это число характеризует взаимосвязь между геометрией и свойствами жидкости.

Можно ожидать, что эффекты несимметричности жидкости будут значительными, когда либо l велико (что соответствует большому размеру подструктуры вещества), либо зазор между цилиндрами e мало.

Большое значение L означает большой зазор между цилиндрами или малую характерную материальную длину l . В этом случае влияние микроструктуры жидкости незначительно. Здесь, по-видимому, представляет интерес второй случай, когда зазор между цилиндрами e мало и сравнимо с l .

На фиг. 2 показаны графики зависимости безразмерного момента всех сил вязкости, распределенного по окружности $r^* = 1.01$, относительно оси симметрии, от N^2 при различных значениях параметра (расчеты были выполнены для $R_2/R_1 = 1.02$ и $\Omega_2/\Omega_1 = 5$). График показыва-

1. *Полюгон И.* Математические начала натуральной философии (перевод А. П. Крыловой).—Изд. Морской Академии, 1913. 436 с.
2. *Stokes G. G.* On the Theories of Internal Friction of Fluids in Motion.—Trans. Camb. Phil. Soc., 1845, vol. 8, p. 287—305.
3. *Петросян Л. Г.* Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений.—Ереван: Изд-во ЕГУ, 1964. 308 с.
4. *Grad H.* Statistical Mechanics—Thermo—Dynamics and fluid dynamics of systems with an arbitrary number of Integrals.—Commun. pure appl. math., 1952, vol. 5, no. 4, p. 455—494.
5. *Аро Э. Л., Брайсан А. Н., Крашinsky Е. В.* Асимметрическая гидромеханика.—ПММ, 1965, т. 29, вып. 2, с. 297—308.
6. *Нисен Ван Диеп, Ахтаров А. Т.* О неизотермической модели несимметричных жидкостей.—ИАН СССР. МЖГ. 1967, №5, с. 132—136.
7. *Петросян Л. Г.* Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения. 1. Основные уравнения.—Уч. зап. ЕГУ, 1976, №3, с. 56—63.
8. *Петросян Л. Г.* Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения. 2. Феноменологические уравнения. Перекрестные эффекты.—Уч. записки, ЕГУ, 1977, №2, с. 74—80.
9. *Петросян Л. Г.* Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения. 3. Пристеночный и приосевой эффекты в пузайлаевском течении суспензии.—Уч. записки, ЕГУ, 1978, №2, с. 46—54.
10. *Петросян Л. Г.* К построению модели магнитной гидродинамики несимметричных жидкостей.—ПМ, 1976, т. 12, №11, с. 133—109.
11. *Петросян Л. Г.* О модели электрогидродинамики с несимметричным тензором напряжений.—ЖТФ, 1979, т. 49, вып. 3, с. 481—487.
12. *Петросян Л. Г.* К построению неизотермической модели электрогидродинамики с несимметричным тензором напряжений.—ПМ. 1980, т. 16, №4, с. 108—114.
13. *Arfman T., Cakmak A. S., Hill L. R.* Flow of micropolar fluids between two concentric cylinders.—Phys. Fluids, 1967, v. 10, № 12, p. 2545—2550.
14. *Eringen A. C.* Theory of micropolar fluids.—J. Math. Mech. 1966, v. 16, no. 1, p. 1—18.
15. *Сазыкин И. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости.—М.: ГИИТЛ. 1955. 519 с.
16. *Петросян Л. Г.* К вопросу течения структурных жидкостей в окрестности критической точки.—Уч. записки, ЕГУ. 1980, №1, с. 24—30.
17. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика.—М.: Мир, 1964. 456 с.

Ереванский Государственный

Поступила в редакцию
14.IX.1990.

ИНФОРМАЦИЯ

О 8-ой конференции молодых ученых Института механики АН Армении

В феврале 1991 года в Доме симпозиумов АН Армении (Араз-кан) была проведена 8-ая конференция молодых ученых Института механики АН Армении.

Для участия в работе конференции помимо молодых ученых-механиков Армении был приглашен ряд молодых ученых из различных центров СССР.

Научная тематика конференции, в основном, относилась к проблемам механики деформируемого твердого тела. Были прочтены доклады по динамическим и статическим задачам теории упругости по вопросам теории электромагнитоупругости, по оптимизации тонкостенных конструкций, теории оболочек и пластин.

Лучшими докладами были признаны: «О предельной поверхности длительной прочности материалов» — Мусасяни С. Л.;

«К изгибу вязкоупругой анизотропной пластинки, находящейся в нестационарном температурном поле» — Брутян Э. Х.;

«К асимптотическому решению смешанной краевой задачи для термоупругой полосы» — Товмасян А. Б.

Конференция была организована при спонсорстве научно-производственного кооператива при Институте механики АН Армении «МИКРО-90».

Материалы конференции опубликованы Издательством АН Армении.

СОВЕТ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ ИНСТИТУТА МЕХАНИКИ
АН АРМЕНИИ