ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

1991

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ

Մեխանիկա 44, № 1, 1991 Механика

УДК 62-50

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КРИВОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

БАГДАСАРЯН Ю.М., ХАЧАТРЯН А.М.

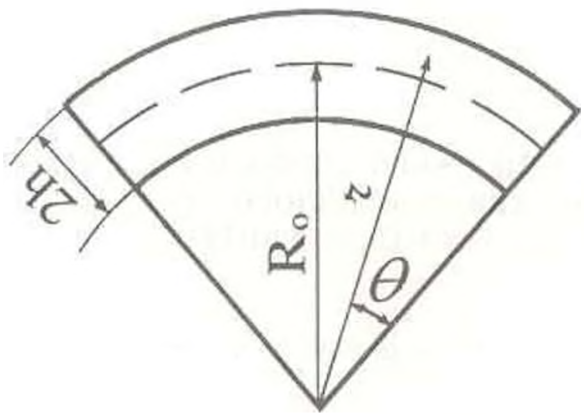
Рассмотрен вопрос точного определения напряженно-деформированного состояния плоского криволинейного стержня с цилиндрической анизотропией. Решение задачи представлено в виде суммы двух решений—незатухающего и типа пограничного слоя. Полученное решение в нулевом приближении сравнивается с классическими уравнениями Кирхгоффа-Клебша.

Асимптотический метод интегрирования широко применялся для решения задач теории упругости как для изотропного, так и для анизотропного тела. Впервые этот метод был разработан применительно к пластинам К. Фридрихсом и Р. Дресслером [1] и А.Л. Гольденвейзером [2]. В последующем, А.Л. Гольденвейзером разработан асимптотический метод определения напряженно-деформированного состояния произвольных изотропных оболочек [3,4]. А.Л. Агаловян распространил асимптотический метод на анизотропные пластинки и оболочки [5–7].

В работе [8] методом асимптотического интегрирования построено решение уравнений теории упругости для кривого стержня из изотропного материала с плоской осевой линией, а в работе [9] рассмотрена задача об изгибе тонкого изотропного бруса. Подробно рассмотрены первые два приближения. Показано, что первое приближение в [8] совпадает с решением, найденным по теории Кирхгоффа-Клебша.

В работах [10,11] решена плоская задача для ортотропного и анизотропного прямоугольников, на продольных сторонах которых заданы значения напряжений, а на торцах —различные комбинации торцевых условий. Проведен анализ влияния отношений главных модулей упругости на применимость гипотезы о недеформируемых нормалях.

1. В настоящей работе, исходя из уравнений теории упругости, рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния плоского криволинейного стержня с цилиндрической анизотропией без принятия каких-либо гипотез и допущений. Предполагается, что стержень имеет постоянную ширину $2h$, ограничен в плане двумя дугами концентрических



Фиг.1

окружностей радиусов R_1 и R_2 ($R_{1,2} = R_0 \mp h$). Ось анизотропии проходит нормально к этой плоскости через общий центр окружностей (фиг.1). На криволинейных сторонах стержня заданы значения напряжений, а на торцах— различные комбинации торцевых условий.

$$\sigma_{r\theta} = \pm\sqrt{h/R_0}\,Y^{\pm}(\theta), \quad \sigma_r = \pm Z^{\pm}(\theta) \text{ при } r = R_0 \pm h \qquad (1.1)$$

Применяется асимптотический метод интегрирования. Решение задачи представляется в виде суммы двух решений: незатухающего и типа пограничного слоя, излагается процедура их сопряжения.

Для решения задачи введем безразмерную координатную систему ζ, φ по формулам

$$\zeta = (r - R_0)/h, \; \varphi = \theta/\varepsilon \qquad (1.2)$$

где $\varepsilon = (h/R_0)^{1/2}$ — малый параметр. После этих преобразований соответствующие уравнения теории упругости анизотропного тела в полярных координатах будут содержать малый параметр. Эта система сингулярно возмущенная, следовательно, ее решение складывается из двух типов решений: внутреннего и пограничного слоя.

Решение внутренней задачи будем искать в виде [2-4]

$$Q = \varepsilon^{-q} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s Q^{(s)} \qquad (1.3)$$

Q—любое из напряжений и безразмерных перемещений $V = v/R_0$, $W = w/R_0$, причем $Q^{(s)} \equiv 0$ при $s < 0$, q—целое положительное число и выбирается следующим образом:

$$q = 2 \text{ для } \sigma_\theta, W, \quad q = 1 \text{ для } \sigma_{r\theta}, V$$

$$q = 0 \text{ для } \zeta \tag{1.4}$$

Подставляя (1.3) в вышеуказанные уравнения, с учетом (1.4) получим систему

$$\frac{\partial \sigma_r^{(s)}}{\partial \zeta} - \sigma_\theta^{(s)} + \zeta \frac{\partial \sigma_r^{(s-2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(s)}}{\partial \varphi} + \sigma_r^{(s-2)} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_\theta^{(s)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(s)}}{\partial \zeta} + \zeta \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(s-2)}}{\partial \zeta} + 2\sigma_{r\theta}^{(s-2)} = 0$$

$$\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{11}\sigma_r^{(s-4)} + a_{12}\sigma_\theta^{(s-2)} + a_{16}\sigma_{r\theta}^{(s-3)} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \varphi} + W^{(s)} = a_{12}\sigma_r^{(s-2)} + a_{22}\sigma_\theta^{(s)} + a_{26}\sigma_{r\theta}^{(s-1)} +$$

$$+\zeta(a_{12}\sigma_r^{(s-4)} + a_{22}\sigma_\theta^{(s-2)} + a_{26}\sigma_{r\theta}^{(s-3)})$$

$$\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \zeta \frac{\partial V^{(s-2)}}{\partial \zeta} - V^{(s-2)} + \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \varphi} = a_{16}\sigma_r^{(s-3)} + a_{26}\sigma_\theta^{(s-1)} + a_{66}\sigma_{r\theta}^{(s-2)} +$$

$$+\zeta(a_{16}\sigma_r^{(s-5)} + a_{26}\sigma_\theta^{(s-3)} + a_{66}\sigma_{r\theta}^{(s-4)})$$

Проинтегрировав систему (1.5) по ζ, получим

$$W^{(s)} = w^{(s)}(\varphi) + w^{*(s)}(\varphi, \zeta)$$

$$V^{(s)} = -\frac{dw^{(s)}}{d\varphi}\zeta + v^{(s)}(\varphi) + v^{*(s)}(\varphi, \zeta) \tag{1.6}$$

$$\sigma_\theta^{(s)} = -\frac{1}{a_{22}} \frac{d^2 w^{(s)}}{d\varphi^2}\zeta + \frac{1}{a_{22}}\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(s)}}{d\varphi}\right) + \sigma_\theta^{*(s)}(\varphi, \zeta)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(s)} = \frac{1}{2a_{22}} \frac{d^3 w^{(s)}}{d\varphi^3}\zeta^2 - \frac{1}{a_{22}}\left(\frac{dw^{(s)}}{d\varphi} + \frac{d^2 v^{(s)}}{d\varphi^2}\right)\zeta + \tau_{r\theta 0}^{(s)} + \sigma_{r\theta}^{*(s)}(\varphi, \zeta)$$

$$\sigma_r^{(s)} = -\frac{1}{6a_{22}} \frac{d^4 w^{(s)}}{d\varphi^4}\zeta^3 + \frac{1}{2a_{22}} \frac{d^3 v^{(s)}}{d\varphi^3}\zeta^2 +$$

$$+\frac{1}{a_{22}}\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(s)}}{d\varphi}\right)\zeta - \frac{d\tau_{r\theta 0}^{(s)}}{d\varphi}\zeta + \tau_{r0}^{(s)} + \sigma_r^{*(s)}(\varphi, \zeta)$$

Величины со звездочками—известные функции и определяются по формулам:

$$w^{*(s)} = \int_0^\zeta \left(a_{11}\sigma_r^{(s-4)} + a_{12}\sigma_\theta^{(s-2)} + a_{16}\sigma_{r\theta}^{(s-3)}\right) d\zeta$$

$$v^{*(s)} = \int_0^\zeta \left(a_{16}\sigma_r^{(s-3)} + a_{26}\sigma_\theta^{(s-1)} + a_{66}\sigma_{r\theta}^{(s-2)}\right) d\zeta + \int_0^\zeta \zeta \left(a_{16}\sigma_r^{(s-5)} + a_{26}\sigma_\theta^{(s-3)} +\right.$$

$$\left. + a_{66}\sigma_{r\theta}^{(s-4)}\right) d\zeta + \int_0^\zeta \left(-\frac{\partial w^{*(s)}}{\partial \varphi} - \zeta \frac{\partial V^{(s-2)}}{\partial \zeta} + V^{(s-2)}\right) d\zeta$$

$$\sigma_\theta^{*(s)} = \frac{1}{a_{22}}\left[w^{*(s)} + \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial\varphi} - \left(a_{12}\sigma_r^{(s-2)} + a_{26}\sigma_{r\theta}^{(s-1)}\right) - \right. \tag{1.7}$$

$$\left. -\zeta\left(a_{12}\sigma_r^{(s-1)} + a_{26}\sigma_{r\theta}^{(s-3)} + a_{22}\sigma_\theta^{(s-2)}\right)\right]$$

$$\sigma_{r\theta}^{*(s)} = -\int_0^\zeta \left(\frac{\partial\sigma_\theta^{*(s)}}{\partial\varphi} + \zeta\frac{\partial\sigma_{r\theta}^{(s-2)}}{\partial\zeta} + 2\sigma_{r\theta}^{(s-2)}\right)d\zeta$$

$$\sigma_r^{*(s)} = \int_0^\zeta \left(\sigma_\theta^{*(s)} - \frac{\partial\sigma_{r\theta}^{*(s)}}{\partial\varphi} - \zeta\frac{\partial\sigma_r^{(s-2)}}{\partial\zeta} - \sigma_r^{(s-2)}\right)d\zeta$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.1), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $w^{(s)}$ и $v^{(s)}$:

$$\frac{1}{a_{22}}\left(\frac{d^2v^{(s)}}{d\varphi^2} + \frac{dw^{(s)}}{d\varphi}\right) = p^{(s)} \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{a_{22}}\left(\frac{1}{3}\frac{d^4w^{(s)}}{d\varphi^4} + w^{(s)} + \frac{dv^{(s)}}{d\varphi}\right) = q^{(s)}$$

где

$$p^{(s)} = -Y^{(s)} + \frac{1}{2}\left(\sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta = 1) - \sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta = -1)\right)$$

$$q^{(s)} = Z_2^{(s)} + \frac{dY_2^{(s)}}{d\varphi} - \frac{1}{2}\left[\sigma_r^{*(s)}(\zeta = 1) - \sigma_r^{*(s)}(\zeta = -1) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta = 1)}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta = -1)}{\partial\varphi}\right] \tag{1.9}$$

$$Z_{1,2}^{(s)} = 1/2\left(Z^{+(s)} \mp Z^{-(s)}\right), \quad Y_{1,2}^{(s)} = 1/2\left(Y^{+(s)} \pm Y^{-(s)}\right)$$

$$Z^{\pm(0)} = Z^\pm, \ Y^{\pm(0)} = Y^\pm, \ Z^{\pm(s)} = Y^{\pm(s)} = 0 \ \text{при } s > 0$$

а также определим неизвестные функции $\tau_{r\theta 0}^{(s)}$ и $\tau_{r0}^{(s)}$

$$\tau_{r\theta 0}^{(s)} = Y_2^{(s)} - 1/2\left(\sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta = 1) + \tau_{r\theta}^{*(s)}(\zeta = -1)\right) - \frac{1}{2a_{22}}\frac{d^3w^{(s)}}{d\varphi^3} \tag{1.10}$$

$$\tau_{r0}^{(s)} = Z_1^{(s)} - 1/2\left(\sigma_r^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_r^{*(s)}(\zeta = -1)\right) - \frac{1}{2a_{22}}\frac{d^3v^{(s)}}{d\varphi^3}$$

Таким образом, все величины будут определены, если будут известны $v^{(s)}$ и $w^{(s)}$.

Если в соотношениях (1.5), (1.6) перейти к усилиям и моментам, то получим уравнения, которые по структуре похожи на уравнения Кирхгоффа-Клебша, но имеют сравнительно простой вид [12]

$$\frac{dQ^{(s)}}{d\varphi} - N^{(s)} = -2Z_1^{(s)} - 2Z_2^{(s-2)}$$

$$\frac{dN^{(s)}}{d\varphi} + Q^{(s-2)} = -2Y_2^{(s)} - 2Y_1^{(s-2)} \tag{1.11}$$

$$\frac{dM^{(s)}}{d\varphi} - Q^{(s)} = -2Y_1^{(s)} - 2Y_2^{(s-2)}$$

$$N^{(s)} = \frac{2}{a_{22}}\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(s)}}{d\varphi}\right) + N^{*(s)},\ M^{(s)} = -\frac{2}{3a_{22}}\frac{d^2w^{(s)}}{d\varphi^2} + M^{*(s)} \tag{1.12}$$

$$Q^{(s)} = -\frac{2}{3a_{22}}\frac{d^3w^{(s)}}{d\varphi^3} + 2Y_2^{(s)} - \left(\sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta = -1)\right) + Q^{*(s)}$$

где

$$N^{(s)} = \int_{-1}^{1}\sigma_\theta^{(s)}d\zeta,\ M^{(s)} = \int_{-1}^{1}\sigma_\theta^{(s)}\zeta d\zeta,\ Q^{(s)} = \int_{-1}^{1}\sigma_{r\theta}^{(s)}d\zeta$$

$$N^{*(s)} = \int_{-1}^{1}\sigma_\theta^{*(s)}d\zeta,\ M^{*(s)} = \int_{-1}^{1}\sigma_\theta^{*(s)}\zeta d\zeta,\ Q^{*(s)} = \int_{-1}^{1}\sigma_{r\theta}^{*(s)}d\zeta \tag{1.13}$$

Во втором уравнении (1.11), в нулевом приближении, отсутствует слагаемое Q, которое присутствует в классических уравнениях. Это слагаемое при асимптотическом подходе появляется, начиная с приближения $s = 2$. По сравнению с классическими, при $s = 2$ меняются также виды нагрузок. Следовательно, с асимптотической точки зрения классические уравнения Кирхгоффа-Клебша не являются последовательными. Поэтому, если мы хотим учитывать члены порядка $O(\varepsilon^2)$, то необходимо использовать более точные уравнения равновесия (1.11), а в соотношениях упругости (1.12) оставлять члены такого же порядка.

Асимптотический подход имеет то преимущество, что позволяет получить формулы для определения всех величин, в том числе и для определения напряжения σ_r, которое обычно пренебрегается в классической теории.

2. Для построения решения типа пограничного слоя вблизи торца $\theta = 0$ в уравнениях теории упругости, преобразованных по формулам (1.2), сделаем новую замену переменных по формуле $t = \theta/\varepsilon^2 = (R_0\theta)/h$. Решение полученной системы отыщем в виде функций типа пограничного слоя [7]

$$R_p = \varepsilon^{\chi_p}\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^s R_p^{(s)}(\zeta)\exp(-\lambda t) \tag{2.1}$$

выбирая непротиворечивые значения χ_p следующим образом:

$$\chi_{\sigma_i} = \chi,\ \ \chi_{u_i} = \chi + 2 \tag{2.2}$$

где σ_i—любое из напряжений, u_i—любое из безразмерных перемещений, χ определяется при рассмотрении вопроса взаимодействия погранслоя с внутренним напряженным состоянием.

Подставляя (2.1) с учетом (2.2) в вышеуказанные уравнения и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$\frac{d\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta} - \lambda\sigma_{r\theta p}^{(s)} + \zeta\frac{d\sigma_{rp}^{(s-2)}}{d\zeta} + \sigma_{rp}^{(s-2)} - \sigma_{\theta p}^{(s-2)} = 0$$

$$-\lambda\sigma_{\theta p}^{(s)} + \frac{d\sigma_{r\theta p}^{(s)}}{d\zeta} + \zeta\frac{d\sigma_{r\theta p}^{(s-2)}}{d\zeta} + 2\sigma_{r\theta p}^{(s-2)} = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{dw_p^{(s)}}{d\zeta} = a_{11}\sigma_{rp}^{(s)} + a_{12}\sigma_{\theta p}^{(s)} + a_{16}\sigma_{r\theta p}^{(s)}$$

$$-\lambda v_p^{(s)} + w_p^{(s-2)} = a_{12}\sigma_{rp}^{(s)} + a_{22}\sigma_{\theta p}^{(s)} + a_{26}\sigma_{r\theta p}^{(s)} +$$

$$+\zeta\left(a_{12}\sigma_{rp}^{(s-2)} + a_{22}\sigma_{\theta p}^{(s-2)} + a_{26}\sigma_{r\theta p}^{(s-2)}\right)$$

$$-\lambda w_p^{(s)} + \frac{dv_p^{(s)}}{d\zeta} + \zeta\frac{dv_p^{(s-2)}}{d\zeta} - v_p^{(s-2)} =$$

$$= a_{16}\sigma_{rp}^{(s)} + a_{26}\sigma_{\theta p}^{(s)} + a_{66}\sigma_{r\theta p}^{(s)} + \zeta\left(a_{16}\sigma_{rp}^{(s-2)} + a_{26}\sigma_{\theta p}^{(s-2)} + a_{66}\sigma_{r\theta p}^{(s-2)}\right)$$

Из системы (2.3), выразив все величины через напряжение $\sigma_{rp}^{(s)}$, получим

$$\sigma_{r\theta p}^{(s)} = \frac{1}{\lambda}\frac{d\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta} + \sigma_{r\theta p}^{*(s)}, \quad \sigma_{\theta p}^{(s)} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta^2} + \sigma_{\theta p}^{*(s)} \tag{2.4}$$

$$v_p^{(s)} = -\left(\frac{a_{22}}{\lambda^3}\frac{d^2\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta^2} + \frac{a_{26}}{\lambda^2}\frac{d\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta} + \frac{a_{12}}{\lambda}\sigma_{rp}^{(s)}\right) + v_p^{*(s)}$$

$$w_p^{(s)} = -\left(\frac{a_{22}}{\lambda^4}\frac{d^3\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta^3} + \frac{2a_{26}}{\lambda^3}\frac{d^2\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta^2} +\right.$$

$$\left. + \frac{a_{66}+a_{12}}{\lambda^2}\frac{d\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta} + \frac{a_{16}}{\lambda}\sigma_{rp}^{(s)}\right) + w_p^{*(s)}$$

где

$$\sigma_{r\theta p}^{*(s)} = \frac{1}{\lambda}\left(\zeta\frac{d\sigma_{rp}^{(s-2)}}{d\zeta} + \sigma_{rp}^{(s-2)} - \sigma_{\theta p}^{(s-2)}\right)$$

$$\sigma_{\theta}^{*(s)} = \frac{1}{\lambda}\left(\zeta\frac{d\sigma_{r\theta p}^{(s-2)}}{d\zeta} + 2\sigma_{r\theta p}^{(s-2)}\right) + \frac{1}{\lambda}\frac{d\sigma_{r\theta p}^{*(s)}}{d\zeta}$$

$$v_p^{*(s)} = \frac{1}{\lambda}\left[w_p^{(s-2)} - \zeta\left(a_{12}\sigma_{rp}^{(s-2)} + a_{22}\sigma_{\theta p}^{(s-2)} + a_{26}\sigma_{r\theta p}^{(s-2)}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(a_{22}\sigma_{\theta p}^{*(s)} + a_{26}\sigma_{r\theta p}^{*(s)}\right)\right]$$

$$w_p^{*(s)} = \frac{1}{\lambda}\left[\zeta\frac{dv_p^{(s-2)}}{d\zeta} - v_p^{(s-2)} + \frac{dv_p^{*(s)}}{d\zeta} - a_{26}\sigma_{\theta p}^{*(s)} - a_{66}\sigma_{r\theta p}^{*(s)} - \right.$$

$$\left. -\zeta\left(a_{16}\sigma_{rp}^{(s-2)} + a_{26}\sigma_{\theta p}^{(s-2)} + a_{66}\sigma_{r\theta p}^{(s-2)}\right)\right] \tag{2.5}$$

Для определения $\sigma_{rp}^{(s)}$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$a_{22}\frac{d^4\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta^4} + 2a_{26}\lambda\frac{d^3\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta^3} + \lambda^2(a_{66}+2a_{12})\frac{d^2\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta^2} + \tag{2.6}$$

$$+2a_{16}\lambda^3\frac{d\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta}+a_{11}\lambda^4\sigma_{rp}^{(s)}=q_p^{(s)}$$

где

$$q_p^{(s)}=\lambda^4\left(\frac{dw_p^{*(s)}}{d\zeta}-a_{12}\sigma_{\theta p}^{*(s)}-a_{16}\sigma_{r\theta p}^{*(s)}\right) \tag{2.7}$$

Кроме того, напряжения $\sigma_{rp}^{(s)}$ и $\sigma_{r\theta p}^{(s)}$ должны удовлетворять условиям отсутствия напряжений на криволинейных сторонах стержня, то есть

$$\sigma_{rp}^{(s)}=\sigma_{r\theta p}^{(s)}=0 \text{ при } \zeta=\pm1 \tag{2.8}$$

Решение уравнения (2.6) состоит из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, то есть

$$\sigma_{rp}^{(s)}=\sigma_{r1}^{(s)}+\sigma_{r2}^{(s)} \tag{2.9}$$

В зависимости от вида корней соответствующего (2.6) характеристического уравнения [13]

а) $\alpha+i\beta,\ \alpha-i\beta$

б) $\alpha_1+i\beta_1, \alpha_2+i\beta_2\ (\beta,\beta_{1,2}>0)$

общее решение однородного уравнения будет иметь вид:

а) $\sigma_{r1}^{(s)}=e^{\alpha\lambda\zeta}[(C_1^{(s)}+\zeta C_2^{(s)})\cos\beta\lambda\zeta+(C_3^{(s)}+\zeta C_4^{(s)})\sin\beta\lambda\zeta]$ (2.10)

б) $\sigma_{r1}^{(s)}=e^{\alpha_1\lambda\zeta}(C_1^{(s)}\cos\beta_1\lambda\zeta+C_2^{(s)}\sin\beta_1\lambda\zeta)+$

$$+e^{\alpha_2\lambda\zeta}(C_3^{(s)}\cos\beta_2\lambda\zeta+C_4^{(s)}\sin\beta_2\lambda\zeta) \tag{2.11}$$

Используя решение (2.10) или (2.11), удовлетворив условиям (2.8) при $s=0$, получим однородную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных констант $C_i^{(0)}$. Из условия существования нетривиального решения получим трансцендентное уравнение для определения λ. Решение $\sigma_{r1}^{(0)}$, а также все остальные напряжения и перемещения можно представить по формулам (2.4), в каждом из двух случаев, в виде

$$\sigma_{r1}^{(0)}=A_n^{(0)}F_n(\zeta),\ \sigma_{r\theta}^{(0)}=\lambda_n^{-1}A_n^{(0)}F_n',\cdots \tag{2.12}$$

Тогда из условия (2.8), как следствие, получим, что функция и ее производная должны удовлетворять условиям

$$F_n(\pm1)=F_n'(\pm1)=0 \tag{2.13}$$

Функции $F_n(\zeta)$, а также трансцендентные уравнения для определения λ_n приведены в работе [11], здесь они не приводятся.

Для последующих приближений, то есть для $s>0$ имеем, что $q_p^{(s)}\neq0$ и, следовательно, отлично от нуля и частное решение $\sigma_{r2}^{(s)}$. Поэтому становится невозможным удовлетворение условиям (2.8) при $s>0$, так как определитель алгебраической системы равен нулю. Чтобы удовлетворить условиям (2.8) при $s > 0$, необходимо привлечь новое решение внутренней задачи, которое взяло бы на себя "добавочные" нагрузки ($s > 0$)

$$Z^{\pm(s)} = -\sigma_{r2}^{(s)}(\pm 1),\ \ Y^{\pm(s)} = -\left(\frac{1}{\lambda_n}\frac{d\sigma_{r2}^{(s)}}{d\zeta}\bigg|_{\zeta=\pm 1} + \sigma_{r\theta_p}^{*(s)}(\pm 1)\right)$$

Аналогичным образом строится решение типа пограничного слоя вблизи торца $\theta = \Theta$. Если отсчет вести от торца $\theta = 0$, данные этого погранслоя получаются из приведенного формальной заменой t на $t_1 = (\Theta - \theta)R_0/h$.

Найденное в работе решение типа пограничного слоя вместе с решением внутренней задачи позволяют более точно удовлетворять условиям на торцах. Сопряжение этих двух типов решений можно осуществить одним из способов, изложенных в [11].

3. В заключение, в качестве иллюстрации, рассмотрим задачу определения поля напряжений в круговом кольце из изотропного материала, подверженному действию равномерного внутреннего и внешнего давлений. Решение этой полярно-симметричной задачи с помощью функции напряжения можно найти, например, в [14]. С помощью формул (1.6)–(1.10), полагая $Z^+ = -p_0$, $Z^- = p_i$, и ограничиваясь первыми несколькими приближениями, будем иметь

$$\sigma_r = [Z_1 + \zeta Z_2]_I - \left[\frac{h}{R_0} Z_2(\zeta^2 - 1)\right]_{II} + \left[\frac{h^2}{6R_0^2} Z_2(5+\nu)(\zeta^3 - \zeta)\right]_{III} + \cdots$$

$$\sigma_\theta = \left[\frac{R_0}{h} Z_2\right]_I + \left[Z_1 - Z_2\zeta\right]_{II} + \left[\frac{h}{6R_0} Z_2((1-\nu)+ \right. \tag{3.1}$$

$$\left. +3(3+\nu)\zeta^2)\right]_{III} + \left[\frac{h^2}{6R_0^2} Z_2((5+3\nu-2\nu^2)\zeta - (11+7\nu)\zeta^3)\right]_{IV} + \cdots$$

Таблица 1

h/R_0	ζ	$\sigma_r \times p^{-1}$				$\sigma_\theta \times p^{-1}$			
		одно прибл.	два прибл.	три прибл.	точное решение	два прибл.	три прибл.	четыре прибл.	точное решение
0,2	-1	-3	-3	-3	-3	4	4,353	4,402	4,2
	-0,5	-2,5	-2,35	-2,337	-2,24	3,5	3,606	3,598	3,44
	0	-2	-1,8	-1,8	-1,704	3	3,023	3,023	2,904
	0,5	-1,5	-1,35	-1,363	-1,304	2,5	2,606	2,614	2,504
	1	-1	-1	-1	-1	2	2,353	2,303	2,2
0,1	-1	-3	-3	-3	-3	9	9,176	9,188	9,1
	-0,5	-2,5	-2,425	-2,422	-2,38	8,5	8,553	8,551	8,48
	0	-2	-1,9	-1,9	-1,85	8	8,012	8,012	7,95
	0,5	-1,5	-1,425	-1,353	-1,395	7,5	7,553	7,557	7,49
	1	-1	-1	-1	-1	7	7,127	7,114	7,1

Сравнение с точным решением показывает, что первое приближение для σ_r и первые два приближения для σ_θ совпадают с соответствующими первыми членами ряда Тейлора точного решения, если в точном решении заранее пренебречь членами порядка $(h/R_0)^2$.

В табл.1 приведены результаты численного расчета при $p_1 = 3p$, $p_0 = p$, $h/R_0 = 0{,}2;\ 0{,}1$.

Из табл.1 видно, что максимальные отклонения значений напряжений σ_r и σ_θ от точного решения составляют соответственно 5,6% и 4,8% при $h/R_0 = 0{,}2$ и 2,7% и 0,97% при $h/R_0 = 0{,}1$.

INVESTIGATION OF STRESS-STRAIN STATE OF A CURVED BAR BY ASYMPTOTIC INTEGRATION METHOD

Yu.M.BAGDASARIAN, A.M.KHACHATRIAN

ԿՈՐ ՁՈՂԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ-ԴԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ ՎԻՃԱԿԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ

Յու.Մ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Ա.Մ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է գլանային անիզոտրոպիայով օժտված կոր ձողի հարթ լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակի ճշգրիտ որոշման հարցը:

Խնդրի լուծումը ներկայացված է երկու տեսակ լուծումների գումարով՝ հիմնական լարվածային վիճակը բնութագրող լուծման եւ սահմանային շերտի տիպի: Հիմնական լարվածային վիճակը բնութագրող հավասարումները զրոյական մոտավորությունում համեմատված են Կիրխհոֆ-Կլեբշի դասական հավասարումների հետ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedrichs K.O., Dressler R.F. A boundary-layer theory for elastic plates. — Comm.Pure and Appl.Math., 1961, v.14, no.1, pp.1-33.
2. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. — ПММ, 1962, т.26, вып.4, с.668-686.
3. Гольденвейзер А.Л. О двумерных уравнениях общей линейной теории тонких упругих оболочек.—В сб. Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М.: Наука, 1969, 692с.
4. Гольденвейзер А.Л. Погранслой и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки.—ПММ, 1969, т.33, вып.6, с.996-1028.
5. Агаловян Л.А. К теории изгиба ортотропных пластин.—МТТ, 1966, но.6, с.116-121.
6. Агаловян Л.А. О некоторых соотношениях линейной теории анизотропных оболочек и возможностях их уточнения.—МТТ, 197[illegible], но.1, с.109-120.
7. Агаловян Л.А. О погранслое ортотропных пластинок.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1973, т.24, но.2, с.27-43.

8. Понятовский В.В. Асимптотические разложения в линейной теории плоских стержней.— В кн.:Проблемы механики твердого деформированного тела. Л., 1970, с.341-351.

9. Понятовский В.В. Асимптотическая теория изгиба кривого бруса.—В кн.: Исследования по упругости и пластичности, но.9, Изд.ЛГУ, 1973, с.81-93.

10. Агаловян Л.А., Хачатрян Ш.М. Асимптотический анализ напряженно- деформированного состояния ортотропной полосы.—Уч.записки ЕГУ, 1977, но.1, с.22-30.

11. Хачатрян Ш.М. К определению напряженно-деформированного состояния анизотропной полосы.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т.29, но.6, с.19-32.

12. Прочность. Устойчивость. Колебания. Том I. Справочник в трех томах. Под ред.И.А. Биргера и Я.Г. Пановко.—М.:Машиностроение, 1968, 831 с.

13. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела.—М.:Наука, 1977, 416с

14. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости.— М.:Наука, 1979, 560 с.

Московский коммерческий институт
Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию
20. IV.1990

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ

Մեխանիկա 44, № 1, 1991 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ЩЕЛЬЮ

ДОБОРДЖГИНИДЗЕ Л.Г.

Исследована контактная задача для бесконечной плоскости из нелинейного упругого материала гармонического типа с одной прямолинейной щелью. Заданное на бесконечности поле напряжений считается однородным. Вращение на бесконечности отсутствует. Трением и смятием на участке соприкасания пренебрегаем и считаем ширину щели малой. С использованием комплексных представлений полей упругости элементов через две аналитические в рассматриваемой физической области функции комплексного аргумента, задача приведена к характеристическому сингулярному уравнению первого рода. Получено точное решение задачи.

Исследуется контактная задача для бесконечной плоскости из нелинейно упругого материала гармонического типа [1] с одной прямолинейной щелью. Заданное на бесконечности поле напряжений считается однородным. Вращение там отсутствует. Трением и смятием на участке соприкасания пренебрегаем и ширину щели считаем малой [2].

1. Пусть рассматриваемая физическая область S представляет собой плоскость переменной $z = x + iy$, разрезанную вдоль прямолинейного отрезка $L_1 = [-b; b]$ действительной оси L. На бесконечности реализуется однородное поле напряжений: $X_x^{(\infty)} = N_1$, $Y_y^{(\infty)} = N_2$, $X_y^{(\infty)} = 0$. Под действием этих нагрузок средние участки берегов щели придут в соприкосновение вдоль некоторого наперед неизвестного отрезка $L_2 = [-a; a]$ $(a < b)$. Оставшуюся вне линии контакта часть L_1 обозначим через $L_3 = [-b; -a[\cup]a; b]$.

Граничные условия задачи будут иметь вид [3]

$$Y_y^+ = Y_y^-,\ X_y^+ = X_y^- = 0,\ v^+ - v^- = \delta \text{ на } L_2 \tag{1.1}$$

$$Y_y^+ = Y_y^-,\ X_y^+ = X_y^- = 0 \text{ на } L_3 \tag{1.2}$$

где Y_y, X_x, X_y—компоненты тензора напряжений Коши, u, v—упругие смещения, δ—ширина щели до деформации.

Для решения задачи используем комплексные представления [4]

$$X_x + Y_y + 4\mu = \frac{\lambda + 2\mu}{\sqrt{J}} q\Omega(q),\ Y_y - X_x - 2iX_y = -\frac{4(\lambda + 2\mu)}{\sqrt{J}} \frac{\Omega(q)}{q} \frac{\partial z^*}{\partial z} \frac{\partial z^*}{\partial \bar{z}} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial z} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\varphi'^2(z) + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\overline{\varphi'(z)}}{\varphi'(z)}, \frac{\partial z^*}{\partial \bar z} = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\varphi(z)\overline{\varphi''(z)}}{\overline{\varphi'^2(z)}} - \overline{\psi'(z)}\right] \tag{1.4}$$

$$u + \mathrm{i}v = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\int \varphi'^2(z)dz + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\varphi(z)}{\overline{\varphi'(z)}} + \overline{\psi(z)}\right] - z \tag{1.5}$$

где

$$\sqrt{J} = \frac{\partial z^*}{\partial z}\frac{\overline{\partial z^*}}{\partial z} - \frac{\partial z^*}{\partial \bar z}\frac{\overline{\partial z^*}}{\partial \bar z}, q = 2\left|\frac{\partial z^*}{\partial z}\right|, \Omega(q) = q - \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \tag{1.6}$$

$\varphi(z)$, $\psi(z)$ — аналитические в рассматриваемой области S функции комплексного аргумента $z = x + \mathrm{i}y$, λ, μ— упругие постоянные Ламе, $z^* = z + u + \mathrm{i}v$.

Согласно формулам (1.5) работы [4] следует, что при больших $|z|$ и условиях задачи имеют место представления

$$\varphi(z) = a_0 z + O(z^{-1}), \psi(z) = b_0 z + O(z^{-1}) \tag{1.7}$$

где a_0 и b_0 — известные постоянные

$$a_0 = \left[\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{2\mu(N_1+N_2) + N_1N_2 + 4\mu^2}{\lambda(N_1+N_2) - N_1N_2 + 4\mu(\lambda+\mu)}\right]^{1/2}$$

$$b_0 = \frac{(\lambda+2\mu)(N_1-N_2)}{\lambda(N_1+N_2) - N_1N_2 + 4\mu(\lambda+\mu)} \tag{1.8}$$

Кроме того,

$$\varphi'(z) \neq 0 \text{ в } S + L \tag{1.9}$$

Согласно (1.1), (1.2) и условиям задачи, из (1.3), (1.4) следует на L равенство

$$\overline{\varphi(x)}\varphi''(x) - \varphi'^2(x)\psi'(x) = \frac{(Y_y - X_x)\,|\,\varphi'^2(x)\,|}{X_x + Y_y + 4\mu}\left(1 + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,|\,\varphi'^2(x)\,|\right) \tag{1.10}$$

С использованием (1.10) из (1.3), (1.4) получим

$$X_x = Y_y + \gamma \text{ на } L \tag{1.11}$$

где

$$\gamma = \frac{4\mu(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)a_0^2b_0}{[\mu a_0^2 + (\lambda+\mu)(1-b_0)][\mu a_0^2 + (\lambda+\mu)(1+b_0)]} \tag{1.12}$$

Учитывая (1.11) в (1.3), после некоторых приведений получим

$$|\,\varphi'^2(x)\,| = F(x) \text{ на } L \tag{1.13}$$

где

$$F(x) = \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{(Y_y+2\mu)(Y_y+2\mu+\gamma)}{(\lambda+2\mu)(2Y_y+\gamma+4\mu) - (Y_y+2\mu+\gamma)} \tag{1.14}$$

Согласно (1.13) и (1.1), (1.2), для определения голоморфной в S функции $\varphi'(z)$ будем иметь следующие граничные условия:

$$|\,\varphi'^2(x)\,|^{\pm} = F_*^{\pm}(x) \text{ на } L \tag{1.15}$$

где

$$F_*(x) = \begin{cases} \frac{\lambda+\mu}{\mu} \frac{(N(x)+2\mu)(N(x)+2\mu+\gamma)}{(\lambda+2\mu)(2N(x)+\gamma+4\mu)-(N(x)+2\mu)(N(x)+2\mu+\gamma)} = G_1(x) \text{ на } L_2 \\ \frac{2(\lambda+\mu)(2\mu+\gamma)}{\lambda\gamma+4\mu(\lambda+\mu)} = G_2(x) \text{ на } L_3 \end{cases} \tag{1.16}$$

Через $F_*^+(x)$, $F_*^-(x)$ обозначены граничные значения функции $F_*(x)$ слева и справа в точке x линии L_1. Мы будем считать, что эти значения удовлетворяют условию Гельдера на L_1, а искомая функция $\varphi'(z)$ является кусочно-голоморфной в области S.

Решение класса h_0 этой задачи (решение неограниченное в точках $-b, b$), удовлетворяющее при достаточно больших $|z|$ условию (1.7), имеет вид [5]

$$\varphi'(z) = \exp \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi i \sqrt{z^2 - b^2}} \int_{-a}^{a} \frac{F_0(x)\sqrt{x^2 - b^2}dx}{x - z} + G(z) \right] \tag{1.17}$$

где $G(z)$—известная функция

$$G(z) = \frac{2F_1 z}{\pi i \sqrt{z^2 - b^2}} \int_{a}^{b} \frac{\sqrt{x^2 - b^2}dx}{x^2 - z^2} + \frac{(\ln a_0^2)z}{\sqrt{z^2 - b^2}} \tag{1.18}$$

$F_0(x)$—заданная на L_2 неизвестная, $F_1(x)$—заданная на L_3 известная функции:

$$F_0(x) = \ln G_1(x), \quad F_1(x) = \ln G_2(x) \tag{1.19}$$

Под $\sqrt{z^2 - b^2}$ подразумевается голоморфная ветвь, изменяющаяся на разрезанной вдоль L_1 плоскости. Для отмеченной ветви

$$\sqrt{z^2 - b^2} = z + O(1) \tag{1.20}$$

при достаточно больших $|z|$.

Обратимся теперь к формуле (1.5). Продифференцируем ее по x и в полученном равенстве учтем (1.10). Тогда будем иметь на L

$$1 + u'_x + iv'_x = \left[\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{|\varphi'^2(x)|} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left(1 + \frac{\mu |\varphi'^2(x)|}{\lambda + \mu} \right) \frac{\gamma}{(2Y_y + \gamma + 4\mu)|\varphi'^2(x)|} \right] \varphi'^2(x) \tag{1.21}$$

Согласно условиям задачи и последнего равенства (1.1) из (1.21) получим

$$\mathrm{Im}\varphi'^{2+}(x) = \mathrm{Im}\varphi'^{2-}(x) \text{ на } L_2 \tag{1.22}$$

Из (1.17), согласно известным соотношениям Сохоцкого-Племеля, определяем предельные значения функции $\varphi'(z)$ на L_2 и полученные выражения внесем в (1.22). Тогда после некоторых рассуждений и приведений получим

$$\int_{-a}^{a} \frac{F_0(x)\sqrt{b^2 - x^2}dx}{x - x_0} = -2F_1 x_0 \int_{a}^{b} \frac{\sqrt{b^2 - x^2}dx}{x^2 - x_0^2} - (\pi \ln a_0^2)x_0 = P(x_0) \tag{1.23}$$

где $F_0(x)$, $F_1(x)$ определяются формулами (1.19).

Вычислим определенный интеграл в правой части (1.23). Тогда будем иметь

$$P(x_0) = Ax_0 + Q(x_0) \tag{1.24}$$

где A—постоянная

$$A = 2F_1\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{a}{b}\right) - \pi \ln a_0^2 \tag{1.25}$$

а

$$Q(x_0) = -2F_1\sqrt{b^2 - x_0^2}\ln\left[\frac{\sqrt{(1-\frac{a^2}{b^2})(b^2 - x_0^2)} + (b - \frac{ax_0}{b})}{\sqrt{b^2 - a^2} + \sqrt{b^2 - x_0^2}} - \frac{\sqrt{a + x_0}}{\sqrt{a - x_0}}\right] \tag{1.26}$$

F_1—постоянная, определяемая согласно (1.16), (1.19).

Введем обозначение

$$F^*(x) = F_0(x)\sqrt{b^2 - x^2} \tag{1.27}$$

Тогда для определения функции $F^*(x)$ на $L_2 = [-a; a]$ получим следующее неоднородное характеристическое сингулярное интегральное уравнение первого рода

$$\int_{-a}^{a} \frac{F^*(x)dx}{x - x_0} = Q(x_0) \tag{1.28}$$

Согласно условиям задачи мы должны искать решение класса $h(-a; a)$ (решение, ограниченное в точках $-a, a$) этого уравнения. Такое решение, как известно, имеет вид [5]

$$F^*(x_0) = \frac{\sqrt{a^2 - x_0^2}}{\pi^2}\int_{-a}^{a}\frac{Q(x)dx}{\sqrt{a^2 - x^2}(x - x_0)} \tag{1.29}$$

при выполнении условия разрешимости

$$\int_{-a}^{a}\frac{Q(x)dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \tag{1.30}$$

Согласно (1.26) очевидно, что в нашем случае это условие выполняется автоматически.

Учитывая в правой части (1.29) функцию (1.26), после вычисления полученного определенного интеграла и с учетом (1.27) находим искомую функцию $F_0(x)$ в виде

$$F_0(x) = \alpha\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{b^2 - x^2}} \tag{1.31}$$

где α—постоянная, определяемая формулой

$$\alpha = \frac{1}{\pi}\left[2\left(\pi - \arcsin\frac{a}{b} - \operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right)\ln\frac{2(\gamma+\mu)(\gamma+2\mu)}{\lambda\gamma + 4\mu(\lambda+\mu)} - \pi\ln a_0^2\right] \tag{1.32}$$

Учитывая это выражение в (1.19), на основании первого равенства (1.16) находим выражение для определения контактного давления $N(x)$ на $L_2 = [-a; a]$ в виде

$$N(x) = \frac{1}{2(1+A_0)}\left[2(\lambda+2\mu)A_0\left(1+\sqrt{1+\frac{\gamma^2(1+A_0)^2}{4(\lambda+2\mu)^2A_0^2}}\right) - (\gamma+4\mu)(1+A_0)\right] \tag{1.33}$$

где

$$A_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\exp(F_0(x)) \tag{1.34}$$

Из (1.33) следует

$$\lim_{x\to\pm a} N(x) = \mu\left(\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4\mu^2}} - 1\right) - \frac{\gamma}{2} \tag{1.35}$$

Отметим, что при одноосном однородном сжатии, т.е. когда $Y_y^{(\infty)} = N_0$, $X_x^{(\infty)} = 0$, $X_y^{(\infty)} = 0$, будем иметь: $\gamma = -N_0$.

Достаточно простой вид формула (1.33) имеет при $b_0 = 0$ ($N_1 = N_2 = N_0$). В указанном случае

$$N(x) = \frac{2\mu\left[\exp\left((\ln a_0^2)\sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}}\right) - 1\right]}{1+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\exp\left[(\ln a_0^2)\sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}}\right]} \quad \text{при} \quad |x| \le a \tag{1.36}$$

Из этой формулы очевидно, что

$$\lim_{x\to\pm a} N(x) = 0$$

Вернемся теперь к формуле (1.17) и внесем в ее правой части найденное значение (1.31). Тогда после некоторых вычислений и приведений получим при $\forall z \in S$

$$\varphi'(z) = \exp\left\{\frac{(A-\alpha\pi)z + \alpha\pi\sqrt{z^2-a^2}}{2\pi\sqrt{z^2-b^2}} + \right.$$

$$\left. + \ln\left[\frac{\sqrt{(1-\frac{a^2}{b^2})(b^2-z^2)} + (b-\frac{az}{b})}{\sqrt{(1-\frac{a^2}{b^2})(b^2-z^2)} + (b+\frac{az}{b})}\frac{\sqrt{a+z}}{\sqrt{a-z}}\right]\right\} \tag{1.37}$$

Другую искомую функцию $\psi(z)$ определяем после этого из (1.10) известным способом. Поле упругих элементов в области S можно определить из (1.3)–(1.6) операциями вычислительного характера. В частности, значения нормальных напряжений на прямой симметрии трещины можно определить по формуле

$$N(x) = \frac{\mu(\lambda+2\mu)\mid\varphi'^2(x)\mid}{\lambda+\mu+\mu\mid\varphi'^2(x)\mid} - 2\mu - \frac{\gamma}{2} +$$

$$+\sqrt{\frac{\mu^2(\lambda+2\mu)^2\mid\varphi'^2(x)\mid^2}{(\lambda+\mu+\mu\mid\varphi'^2(x)\mid)^2} + \frac{\gamma^2}{4}} \tag{1.38}$$

при $\forall x \in L$.

Из (1.38) согласно (1.37) следует, что нормальные напряжения $Y_y = N(x)$ в окрестности концов разреза $[-b; b]$ (при $|x| \geq b$) принимают конечные значения.

2. Перейдем к задаче определения параметра a, характеризующего полудлину участка контакта. Для этого используем последнее равенство условия (1.1) и представим его в виде

$$\delta = \int_a^x [v'^-(x) - v'^+(x)]dx \tag{2.1}$$

или, согласно (1.21) в виде

$$\delta = \int_a^b \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \frac{1}{|\varphi'^2(x)|} + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma(\lambda+\mu+\mu\,|\,\varphi'^2(x)\,|)(\mathrm{Im}\varphi'^{2-}(x) - \mathrm{Im}\varphi'^{2+}(x))}{(\lambda+2\mu)(2Y_y+\gamma+4\mu)\,|\,\varphi'^2(x)\,|} \right] dx \tag{2.2}$$

Подставляя сюда предельные значения функции $\varphi'(z)$, определяемые согласно (1.37) и выполняя указанные операции, получим, наконец,

$$\delta = 2\int_a^b \left[\left(\frac{\mu F(x)}{\lambda+2\mu} + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \right) \sin \frac{(A-\pi\alpha)x + \pi\alpha\sqrt{x^2-a^2}}{2\pi\sqrt{b^2-x^2}} \right] dx \tag{2.3}$$

Это равенство представляет собой трансцендентное уравнение для определения параметра a.

Аналогично исследуется задача в случае конечного числа прямолинейных разрезов.

CONTACT PROBLEM OF NON-LINEAR ELASTIC PLANE WITH A RECTANGULAR SLIT

L.G. DOBORJGINIDZE

ՈՒՂՂԱԳԻԾ ՃԵՂՔՈՎ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Լ.Գ. ԴՈԲՈՐՋԳԻՆԻՁԵ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ուսումնասիրված է հարմոնիկ տիպի ոչ գծային առաձգական նյութից եւ մեկ ուղղագիծ ճեղք ունեցող անվերջ հարթության համար կոնտակտային խնդիր:

Անվերջությունում տրված լարումների դաշտը համարվում է համասեռ եւ պտույտը բացակայում է: Հպման տեղամասում շփումը եւ տրորումը արհամարված են, իսկ ճեղքի լայնությունը ընդունված է փոքր: Առաձգական էլեմենտների դաշտերի կոմպլեքս ներկայացումների օգնությամբ խնդիրը բերված է առաջին սեռի բնութագրիչ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման: Ստացված է խնդրի ճշգրիտ լուծումը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости.—М.:Наука, 1980. 512 с.
2. Моссаковский В.И., Загубиженко П.А. Об одной смешанной задаче теории упругости для плоскости, ослабленной прямолинейной щелью.—Докл.АН СССР, 1954, т.94, №3, с.409–412.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.—М.:Наука, 1966. 707с.
4. Добορджгинидзе Л.Г. Одна плоская обратная задача нелинейной теории упругости.—Изв. АН СССР. МТТ, 1985, №3, с.183-185.
5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.—М.:Наука, 1968. 511с.

Грузинский политехнический институт

Поступила в редакцию 18. XII.1989

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ

Մեխանիկա 44, № 1, 1991 Механика

УДК 539.3:534.2

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ИЗГИБА ТОНКОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ

МКРТЧЯН Л.Р.

Рассматривается поперечный изгиб пьезокерамической пластинки-полосы, находящейся в электрическом поле. При решении применяется классическая теория пластин. Проводился численный анализ применимости гипотез Кирхгоффа и уточненной теории в задачах электроупругого изгиба пьезоэлектрических пластин.

Точное решение задачи о поперечном изгибе толстой изотропной плиты, удовлетворяющей граничным условиям типа Навье, было исследовано в [1,2]. Для трансверсально-изотропной плиты в отсутствии пьезоэффекта задача была решена в [3]. В [4] дано общее решение, удовлетворяющее условиям Навье, для пьезокерамической толстой пластины-полосы, которая находится в электрическом поле, так что на верхней лицевой плоскости потенциал равен $\varphi_B(x,y)$, а на нижней—$\varphi_H(x,y)$. На боковых плоскостях $\varphi = 0$.

В настоящей работе рассматривается напряженно-деформированное состояние пьезокерамической пластинки-полосы, находящейся в электрическом поле. Пластинка изгибается поперечной нагрузкой $p(x,y)$. При решении применяется классическая теория пластин [5]. На электрическое поле гипотезы не налагаются. Приводится численное сравнение полученных результатов с результатами при наложении гипотез на потенциал φ [7,8,9] и с точным решением.

1. Пусть поперечно-поляризованная пластинка с толщиной h нагружена поперечной нагрузкой $p(x,y)$, приложенной к верхней плоскости пластинки. Пластинка находится в электрическом поле, так что на верхней лицевой плоскости потенциал поля равен $\varphi_0(x,y)$, а на нижней—$\varphi = 0$. На торцах пластинки потенциал поля равен нулю.

Выберем систему прямоугольных декартовых координат так, чтобы плоскость (x,y) совпадала со срединной плоскостью пластинки.

На основе кинематической гипотезы Кирхгоффа можно записать:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\varepsilon_{12} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.1)$$

где u, v, w—перемещения срединной плоскости.

Примем также, что потенциал поля можно представить в виде

$$\varphi = H(z)V(x, y) \quad (1.2)$$

На торцах пластинки имеем следующие граничные условия:

$$x = 0, a \qquad \omega = 0,\ M_x = 0,\ \varphi = 0$$

$$y = 0, b \qquad \omega = 0,\ M_y = 0,\ \varphi = 0 \quad (1.3)$$

где a, b—размеры пластинки.

На внешнюю нагрузку и потенциал поля наложим лишь такие ограничения, которые позволили бы представить их в виде двойного ряда Фурье:

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\varphi_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{0mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad (1.4)$$

2. Определяющие соотношения будем использовать в виде

$$\varepsilon_{ij} = s^E_{ijkl}\sigma_{kl} - g_{kij}D_k$$

$$E_k = g_{kij}\sigma_{ij} + \eta^T_{kl}D_l \quad (2.1)$$

где s^E_{ijkl}—упругие податливости при нулевом электрическом поле; g_{kij}—пьезоэлектрические постоянные; η^T_{kl}—диэлектрические постоянные при постоянном напряженном состоянии.

Предположим, что в выражении E_3 можно принять $\sigma_{33} = 0$. Тогда на основе (2.1) и гипотез Кирхгоффа можно записать:

$$\sigma_{11} = A_1\left(\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + A_2\left(\frac{\partial v}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - A_3\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\sigma_{22} = A_2\left(\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + A_1\left(\frac{\partial v}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - A_3\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (2.2)$$

$$D_3 = A_3\left(\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + A_3\left(\frac{\partial v}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + A_5\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\sigma_{12} = A_4\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{\Delta}(g^2_{31} - s^E_{11}\eta^T_{33}),\ A_4 = \frac{1}{2(s^E_{11} - s^E_{12})}$$

$$A_2 = \frac{1}{\Delta}(-g^2_{31} + s^E_{12}\eta^T_{33}),\ A_5 = \frac{1}{\Delta}(s^2_{11} - s^2_{12})$$

$$A_3 = \frac{g_{31}}{\Delta}(s_{12}^E - s_{11}^E)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & g_{31} \\ s_{12} & s_{11} & g_{31} \\ -g_{31} & -g_{31} & -\eta_{33} \end{vmatrix}$$

Из условий статической эквивалентности, вместо напряжений удобно ввести внутренние силы и моменты, отнесенные к единице длины срединной плоскости [4].

Обратимся к уравнениям равновесия. Интегрируя их по z в пределах от $-h/2$ до $h/2$, умножая первые два уравнения на z и интегрируя по z—опять же в пределах от $-h/2$ до $h/2$ с учетом (2.2) получим известные уравнения равновесия пластинки во внутренних силах и моментах. Здесь уравнения плоской задачи и задачи изгиба разделяются

$$\left[A_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_2 + A_4)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]h - A_3\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0$$

$$\left[A_1\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (A_2 + A_4)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_4\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]h - A_3\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = 0$$

$$\frac{h^3}{12}A_1\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \frac{h^3}{6}(A_2 + 2A_4)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \tag{2.3}$$

$$+\frac{h}{2}A_3\left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2}\right) - A_3\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\int\limits_{-h/2}^{h/2}\varphi dz = p(x,y)$$

$$N_1 = -\left[A_1\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (A_2 + 2A_4)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right]\frac{h^3}{12} -$$

$$-A_3\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\frac{h}{2} + A_3\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\varphi dz$$

$$N_2 = -\left[A_1\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (A_2 + 2A_4)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right]\frac{h^3}{12} -$$

$$-A_3\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\frac{h}{2} + A_3\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\varphi dz$$

Присоединяя уравнение электростатики,

$$\frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial y} + \frac{\partial D_3}{\partial z} = 0 \tag{2.4}$$

после некоторых преобразований окончательно получим следующую систему с учетом (1.2), (2.1), (2.2):

$$(A_7 - A_3A_6)H(z)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) + A_5H''(z)V - \tag{2.5}$$

$$-A_6\left(\frac{z^2}{2}-\frac{h^2}{8}\right)\left[A_1\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+2(A_2+A_4)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\right]-$$

$$-A_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=-A_3A_6\frac{1}{h}\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}\right)\left(z+\frac{h}{2}\right)$$

$$\frac{h^3}{12}A_1\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+\frac{h^3}{6}(A_2+2A_4)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}-$$

$$-A_3\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)-\int\limits_{-h/2}^{h/2}H(z)dz=p-\frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}\right)$$

Решим систему (2.5) для пластинки-полосы (случай плоской деформации относительно плоскости (x,y)). Функции w и V будем искать в виде

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}E_m\sin\frac{m\pi x}{a},\ V=\sum_{m=1}^{\infty}F_m\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{2.6}$$

В дальнейшем будем иметь дело только с характерными членами разложений в ряды.

Тогда система (2.5) примет вид:

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4\frac{h^3}{12}A_1E_m+\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2A_3\int\limits_{-h/2}^{h/2}H_m(z)dz=$$

$$=p_m+\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\frac{h}{2}A_3\varphi_{0m}$$

$$(A_3A_6-A_7)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2H_m(z)+A_5H_m''(z)-\frac{1}{2}A_6A_1E_m\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right)+$$

$$+A_3\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2E_m=A_3A_6\frac{1}{h}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\varphi_{0m}\left(z+\frac{h}{2}\right) \tag{2.7}$$

где $H_m(z)=F_mH(z)$, $A_6=g_{15}/\eta_{11}$, $A_7=1/\eta_{11}$.

Решение второго уравнения системы (2.7) следующее:

$$H_m(z)=C_1e^{sz}+C_2e^{-sz}+B_1z^2+B_2z+B_3 \tag{2.8}$$

где введены обозначения:

$$s=\frac{m\pi}{a}\sqrt{\frac{A_7-A_3A_6}{A_5}}>0$$

$$C_1=-\frac{\varphi_{0m}+B_2h}{4\mathrm{sh}(\frac{h}{2}s)}+\frac{\varphi_{0m}-2B_3-B_1\frac{h^2}{2}}{4\mathrm{ch}(\frac{h}{2}s)} \tag{2.9}$$

$$C_2=\frac{\varphi_{0m}+B_2h}{4\mathrm{sh}(\frac{h}{2}s)}+\frac{\varphi_{0m}-2B_3-B_1\frac{h^2}{2}}{4\mathrm{ch}(\frac{h}{2}s)}$$

$$B_1 = \frac{A_1 A_6 E_m (\frac{m\pi}{a})^2}{2(A_3 A_6 - A_7)}, \quad B_2 = \frac{A_3 A_6 \varphi_{0m}}{h(A_3 A_6 - A_7)}$$

$$B_3 = -\frac{A_1 A_5 A_6 E_m}{(A_3 A_6 - A_7)^2} + \frac{A_1 A_6 (\frac{m\pi}{a})^2 E_m h^2 + 8A_3 E_m - 4A_3 A_6 \varphi_{0m}}{8(A_7 - A_3 A_6)}$$

Подставляя выражение $H_m(z)$ в первое уравнение системы (2.7), можем найти E_m:

$$E_m = \left[p_m + \frac{h}{2} A_3 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \varphi_{0m} + A_3 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{((4-s)A_3 A_6 - 2A_7)\varphi_{0m}}{2(A_3 A_6 - A_7)s}\right] \times$$

$$\times \left\{ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \frac{h^3}{12} A_1 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 A_3 \left[\frac{A_1 A_6 (\frac{m\pi}{a})^2}{12(A_3 A_6 - A_7)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{A_1 A_5 A_6 h}{(A_3 A_6 - A_7)^2} + \frac{A_3 h}{A_3 A_6 - A_7}\right]\right\}^{-1} \tag{2.10}$$

Тогда можем найти прогиб w по (2.6), напряжения по (2.2) и потенциал электрического поля.

3. В работе [10] для электрических составляющих сопряженного поля предлагается гипотеза

$$E_z = E_0(x, y) + zE_1(x, y) \tag{3.1}$$

адекватная гипотезам Кирхгоффа-Лява. В [7,8,9] принимается гипотеза относительно потенциала φ, с целью решения задач с использованием уточненных теорий, для пьезокерамических оболочек и пластин (см.3.2).

В нижеследующих табл.1 и 2 для пьезокерамики CdS приведено численное сравнение максимального прогиба и максимального значения потенциала электрического поля φ_{max} при $z = 0$ данной задачи (б) с результатами: а) точного решения; в) решения этой задачи, с использованием гипотез Кирхгоффа для деформаций и со следующей гипотезой для потенциала поля:

$$\varphi = \frac{8}{h^3} f(z) \Phi_1(x) + \frac{2z(z + \frac{h}{2})}{h^2} \varphi_0 \sin \frac{\pi x}{a} \tag{3.2}$$

где Φ_1—искомая функция, характеризующая электростатический потенциал, а

$$f(z) = \frac{1}{8}(h^2 - 4z^2)$$

г) решение этой задачи на базе уточненной теории [6], только вместо известного предположения $\varepsilon_{33} = 0$, принимается $\varepsilon_{33} = d_{33} E_3$. Для потенциала φ принимается (3.2) [7,8].

Численное сравнение делается при $m = 1$ для случаев:

а) $\varphi_{0m} = 10^6 B$ $\quad p_m = 0$

б) $\varphi_{0m} = 0$ $\quad p_m = 10^7 \text{Н}/\text{м}^2$

при относительных толщинах $h/a = 0,05; 0,1; 0,333$ для пьезокерамики CdS (s_{ik}^E—м^2/Н: $s_{11} = 2,22 \cdot 10^{-11}$; $s_{12}^E = -0,87 \cdot 10^{-11}$; $s_{13}^E = -0,8 \cdot 10^{-11}$; $s_{33}^E = -2,19 \cdot 10^{-11}$; $s_{44}^E = 7 \cdot 10^{-11}$; ε_{ik}^T— Ф/м: $\varepsilon_{11}^T = 8,22 \cdot 10^{-11}$; $\varepsilon_{33}^T = 9,11 \cdot 10^{-11}$;

Таблица 1

$u_{3\max}$(м)	а		б		в		г	
h/a	$\varphi_{01} = 0$ $p_1 = 10^7$	$\varphi_{01} = 10^6$ $p_1 = 0$	$\varphi_{01} = 0$ $p_1 = 10^7$	$\varphi_{01} = 10^6$ $p_1 = 0$	$\varphi_{01} = 0$ $p_1 = 10^7$	$\varphi_{01} = 10^6$ $p_1 = 0$	$\varphi_{01} = 0$ $p_1 = 10^7$	$\varphi_{01} = 10^6$ $p_1 = 0$
0,05	6,210908 10^{-3}	1,0642 10^{-4}	5,779814 10^{-3}	1,0151403 10^{-4}	5,55548 10^{-3}	1,0066103 10^{-4}	6,010908 10^{-3}	1,053953 10^{-4}
0,1	7,94575 10^{-4}	4,6982 10^{-5}	6,944324 10^{-4}	3,419477 10^{-5}	6,93485 10^{-4}	3,00732 10^{-5}	7,296349 10^{-4}	3,841553 10^{-5}
0,333	2,504129 10^{-5}	1,67346 10^{-5}	1,621156 10^{-5}	1,371614 10^{-6}	1,241466 10^{-5}	0,627452 10^{-6}	1,774971 10^{-5}	2,538813 10^{-6}

Таблица 2

$u_{3\max}(B)$	а		б		в		г	
h/a	$\varphi_{01} =$ [illegible] $p_1 = 10^7$	φ_{01} [illegible] $p_1 = 0$	$\varphi_{01} = 0$ $p_1 = 10^7$	$\varphi_{01} = 10^6$ $p_1 = 0$	$\varphi_{01} = 0$ $p_1 = 10^7$	$\varphi_{01} =$ [illegible] $p_1 = 0$	$\varphi_{01} = 0$ $p_1 = 10^7$	$\varphi_{01} = 10^6$ $p_1 = 0$
0,05	3,4982	4,89875 10^5	3,027861	5,041772 10^5	2,091029	5,0911 10^5	2,96452	5,0818 10^5
0,1	6,21	4,254588 10^5	4,35457	5,672619 10^5	1,040797	6,0174 10^5	2,43206	5,847 10^5
0,333	32,384524	4,139258 10^5	23,79372	5,034892 10^5	2,90285	5,52831 10^5	19,36622	5,42705 10^5

d_{ik}—Кл/Н: $d_{31} = -0,566 \cdot 10^4$; $d_{33} = -1,133 \cdot 10^4$; $d_{15} = -1,566 \cdot 10^4$; $\rho = 4,82 \cdot 10^3$кг/м^3).

Анализ численных сравнений может привести к следующим заключениям:

1. Сравнивая результаты точного решения с результатами случая, когда использованы гипотезы Кирхгоффа для деформаций, а на потенциал электрического поля гипотеза не налагается, видно, что в присутствии пьезоэффекта относительно максимального прогиба гипотеза Кирхгоффа дает хорошие результаты при $h/a \leq 0,005$.

Например, при относительной толщине $h/a = 0,1$, когда на пластинку-полосу наложена лишь нагрузка p_1 ($\varphi_{01} = 0$), максимальный прогиб, полученный во втором случае, меньше максимального прогиба на 12,6%, а когда имеем только потенциал φ_{01} ($p_1 = 0$), то разница составляет 27%.

При возрастании относительной толщины разница увеличивается.

2. Сравним случаи б) и в). В случае (б) на электрическое поле гипотезы не налагаются, а в случае (в) принята гипотеза (3.2). Относительно деформаций в обоих случаях принята классическая теория пластин. Из табл.1 и 2 видно, что при принятии гипотез Кирхгоффа, относительно максимального прогиба и относительно максимального значения потенциала поля наиболее близкие результаты к точному решению даст случай (б).

3. Сравним численные результаты случаев (в),(г). В обоих случаях принята гипотеза относительно потенциала электрического поля, но в первом случае задача решена с использованием классической теории пластин, а во втором— с использованием уточненной теории [6,7,8]. Из таблиц видно, что и относительно максимального прогиба, и относительно максимального значения потенциала поля лучшие результаты, близкие к точному решению, дает уточненная теория.

Например, при относительной толщине $h/a = 0,1$, когда действует лишь нагрузка p_1 ($\varphi_{01} = 0$), точный максимальный прогиб равен $7,94575 \cdot 10^{-4}$м. Решая по уточненной теории, получаем, что $u_{3\,max} = 7,296349 \cdot 10^{-4}$м, а используя гипотезы Кирхгоффа—$u_{3\,max} = 6,92485 \cdot 10^{-4}$м.

4. Из табл.2 можно заметить, что, когда задан только потенциал φ_0, при всех толщинах самые близкие результаты к точному решению относительно максимального значения потенциала поля дает случай, когда приняты гипотезы Кирхгоффа, а на электрическое поле гипотезы не налагаются.

ABOUT SOME CASE OF BENDING OF THIN PIEZOCERAMIC PLATE-STRIP

MKRTCHIAN L.R.

ԲԱՐԱԿ ՊԻԵԶՈԿԵՐԱՄԻԿԱԿԱՆ ՍԱԼ-ՇԵՐՏԻ ԾՌՄԱՆ ՄԻ ԴԵՊՔԻ ՄԱՍԻՆ

Լ.Ռ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է էլեկտրական դաշտում գտնվող պիեզոկերամիկական սալ-շերտի ընդլայնական ծռումը: Խնդիրը լուծելիս օգտագործված է սալերի դասական տեսությունը: Էլեկտրական դաշտի վրա հիպոթեզներ չեն դրված:

Բերված է սալերի էլեկտրոառաձգական ծռման խնդիրներում Կիրխհոֆի հիպոթեզների եւ ճշգրտված տեսության կիրառելիության թվային անալիզը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов Б.Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты.—Вестник Моск Ун-та,М.:Изд-во МГУ, сер. мат.мех., 1957, но.2, с.25-34.
2. Levinson M. The simply supported restangular plate, an exact, three dimentional linear elasticity solution.— Gournal of Elasticity, 1985, v.15. no,3, pp.383-392.
3. Пискунов В.Г., Сипетов В.С., Туйметов Ш.Ш. Изгиб толстой трансверсально-изотропной плиты поперечной нагрузкой.—Прикл.механика (Киев), 1987, т.23. но.11, с.21–26.
4. Мкртчян Л.Р. Поперечный изгиб толстой пластины-полосы, изготовленной из пьезоэлектрического материала.—Материалы докл. IV симпоз."Теоретические вопросы магнитоупругости". Ереван, ЕГУ, 1989, с.138-143.
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин.—М.:Наука, 1967.
6. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки.—М.:Гостехтеориздат, 1957.
7. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи изгиба и колебания пьезокерамических пластин.—Механика, межвуз.сб., Ереван, ЕГУ, 1987, но.6, с.5-39.
8. Ambartsumian S.A., Belubekian M.V. The bending and vibration of piezoelectric ceramic plates. Electromagnetomechanical interactions in deformable solids and structures.—Proceeding of the IUTAM Symposium held in Tokyo, Japan, 1986, pp.59-68.
9. Рудницкий С.И., Шульга Н.А. Об одном варианте прикладной теории пьезокерамических оболочек.—Прикл.механика, 1986, т.22, но.3, с.24-30.
10. Борисейко В.А., Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Соотношения электроупругости для пьезокерамических оболочек вращения.—Прикл.механика, 1976, т.12, но.2, с.26-33.

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию
20. VI.1990

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ

Մեխանիկա 44, № 1, 1991 Механика

УДК 534.222

ОТРАЖЕНИЕ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНЫ ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ СРЕДЫ

БАГДОЕВ А.Г., ШЕКОЯН А.В.

Изучено отражение пучка с гауссовским профилем от свободной поверхности среды. Предполагается, что среда изотропная, однородная, предварительно деформированная, нелинейная. В отношении, связывающем тензоры напряжений и деформации, учитываются временные производные первого порядка тензора напряжений и временные производные третьего порядка включительно тензора деформации. Для замороженных и равновесных случаев выведены несвязанные уравнения для квазипродольных падающих и отраженных волн. В приближении узких пучков получены аналитические решения.

1. Постановка задачи. Пусть имеется предварительно деформированная нелинейная реологическая полубесконечная изотропная однородная среда, которая имеет вязкость с внутренними осцилляциями. На достаточно большой глубине генерируется возмущение, которое направлено снизу вверх. Цель данной статьи— выяснить как это возмущение распространяется и отражается от свободной поверхности.

Уравнение движения среды и связи между тензорами напряжений, деформаций и компонентами вектора смещения имеют следующий вид:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k},\quad u_i^*=u_i^0+u_i \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ik}+a_1\delta_{ik}\dot\sigma_{ll}+a_2\dot\sigma_{ik}+a_2\dot\sigma_{ki}=\lambda\delta_{ik}\varepsilon_{ll}+2\mu\varepsilon_{ik}+\frac{A}{4}\Big[e_{li}(e_{lk}+e_{kl})+e_{kl}(e_{li}+e_{il})\Big]+$$
$$+\frac{B}{2}\Big[e_{lm}(e_{lm}+e_{ml})\delta_{ik}+2e_{ll}(e_{ki}+e_{ik})\Big]+Ce_{ll}^2\delta_{ik}+b_1\dot\varepsilon_{ll}\delta_{ik}+2b_2\dot\varepsilon_{ik}+d_1\delta_{ik}\ddot\varepsilon_{ll}+$$
$$+2d_2\ddot\varepsilon_{ik}+n_1\delta_{ik}\dddot\varepsilon_{ll}+2n_2\dddot\varepsilon_{ik} \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_{ik}=\frac{1}{2}(e_{ik}+e_{ki}+e_{li}e_{lk}),\quad e_{ik}=\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_i^0}{\partial x_k} \tag{1.3}$$

где ρ—начальная плотность среды, u_i^*, u_i^0 и u_i—соответственно компоненты полного, начального и возмущенного вектора смещения, ε_{ik}—тензор деформации, x_k—лангранжевые координаты, σ_{ik}—лангранжевый антисимметричный тензор напряжений, a_1 и a_2—времена релаксации, λ и μ—коэффициенты

Ламе, A, B, C—нелинейные модули третьего порядка, b_1, b_2, d_1, d_2, n_1 и n_2—параметры внутренних осцилляторов, δ_{ik}—тензор Кронекера, u_i^0 считаем известным, $\partial u_i^0/\partial x_k = \text{const}$, уравнения (1.1) в нулевом порядке удовлетворяются.

Координатная система выбирается следующим образом: оси ox_1 и ox_2 находятся в плоскости границы среды, а ось ox_3 направлена в глубь среды. Вдоль оси ox_3 распространяется возмущение. Предполагается, что в плоскости $x_3 = 0$ истинные напряжения $\sigma'_{ik} = 0$. Предполагается также, что на некоторой глубине образованное возмущение имеет гауссовский профиль. В плоскости, где образовывается предварительное возмущение, $u_3 \neq 0$, а $u_1 = u_2 = 0$, то есть в среде образовывается квазипродольное возмущение.

В настоящее время опубликовано достаточно много работ о распространении нелинейных упругих волн в бесконечной среде [1–5]. Связь (1.2) для случая, когда не учитываются физическая нелинейность и предварительная деформированность среды, предложена в качестве модели грунтов в статье [2]. В различных областях исследований представляет интерес рассмотреть граничную задачу с нелинейными уравнениями движения среды. Число публикаций по данной теме незначительно.

В выбранной среде существуют "замороженные" и "равновесные" волны. Рассмотрим их отдельно.

2. "Равновесные" волны. За достаточно большое время волновое поле приходит в равновесное состояние. Главными членами в уравнении (1.2) следует считать σ_{ik} и ε_{ik}, которые берутся за основу при упрощениях. Пользуясь известным методом в теории дифракции волн [6], принимаются следующие порядки:

$$u_3 \sim \delta^2,\ \frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2} \sim \delta^{-1/2}, a_1, a_2, b_1, b_2 \sim \delta^2$$

$$d_1, d_2 \sim \delta^3,\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \sim \delta,\ n_1, n_2 \sim \delta^4.$$

Уравнение (1.1) записывается в перемещениях, для чего исключаются σ_{ik} и ε_{ik}, пользуясь выражениями (1.2) и (1.3). Вышепринятые порядки для коэффициентов означают, что вязкость, дисперсия и диссипация считаются малыми.

Величины $\dot{\sigma}_{ik}$ исключаются с помощью главных членов уравнения (1.2).

Уравнения для u_1 и u_2 упрощаются до членов $\delta^{1/2}$, а уравнение для u_3—до δ, тогда они примут следующий вид:

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_3^2},\ (j = 1, 2) \tag{2.1}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + 2a_2 \rho \frac{\partial^3 u_3}{\partial t^3} + F_1 \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^2 \partial t} + N_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + P_1 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) +$$
$$+ G_1 \Delta_1 u_3 + M_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - (d_1 + d_2) \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_3^2 \partial t^2} - (n_1 - n_2) \frac{\partial^5 u_3}{\partial x_3^2 \partial t^2} = 0 \tag{2.2}$$

где $F_1 = a_1(2\mu + 3\lambda) - b_1 - 2b_2$, $N_1 = -\lambda - 2\mu - (2A + 6B + 2C)\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$,
$P_1 = -\lambda - \mu - (\frac{3}{4}A + 2B + 2C)\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$, $G_1 = -\mu - (\frac{1}{2}A + 3B + 2C)\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$,

$M = -\lambda - 2\mu - 2A - 6B - 2C$, $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

В линейном одномерном случае из уравнений (2.2) следует, что в среде распространяется продольная волна со скоростью

$$v^2 = -N_1 \rho^{-1}$$

Решение системы (2.1)-(2.2) следует искать в виде суммы двух величин падающей и отраженной волны. В работах [7,8] показано, что уравнения для падающей и отраженной в первом порядке волны расщепляются.

Вводя новую переменную $\tau_1 = \tau - t$, $\tau = x_3 v^{-1}$, исключая из системы (2.1)-(2.2) функции u_1 и u_2, для падающей продольной волны получится следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \tau_1} - \frac{1}{2} L(\psi) = -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left[\Gamma \psi \frac{\partial \psi}{\partial \tau_1} + D \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau_1^2} + d \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau_1^3} + n \frac{\partial^4 \psi}{\partial \tau_1^4} \right] \qquad (2.3)$$

где $\psi = \frac{\partial u_3}{\partial \tau_1}$, $L = -Q_n v^2 N_1^{-1} \Delta_1 \psi$, $\Gamma = 1/2 M_1 N_1^{-1}$, $D = -\frac{\mathcal{P} v^3}{2} N_1^{-1}$,
$d = -(d_1 + +d_2) v (2N_1)^{-1}$, $n = (n_1 + n_2) v (2N_1)^{-1}$, $\mathcal{P} = 2a_2 \rho + F_1 v^{-2}$,
$Q_n = P_1 (\lambda + \mu) v^{-2} (\rho - \mu v^{-2})^{-1}$.

Для уравнения отраженной волны вводится переменная $\tau_2 = -\tau - t$. Аналогично, как это было сделано при выводе уравнения (2.3), можно получить следующее уравнение для $\psi_2 = u_3/\tau_2$:

$$-\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \tau_2 \partial t} - \frac{1}{2} L(\psi_2) = -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \tau_2} \left[-\Gamma \psi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau_2} + D \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \tau_2^2} + d \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \tau_2^3} + n \frac{\partial^4 \psi_2}{\partial \tau_2^4} \right] \qquad (2.4)$$

Решение уравнения (2.3), ввиду наличия дисперсии и диссипации, ищется в следующем виде:

$$\psi = \frac{1}{2} \Big\{ A_1(\tau, t) \exp[(-\nu + i\alpha)\tau_1 - (\nu + i\omega)t] +$$

$$+ A_2(\tau, t) \exp[2(-\nu + i\alpha)\tau_1 + 2(\nu + i\omega)t] + \text{к.с.} \Big\} \qquad (2.5)$$

где A_1 и A_2—медленно меняющиеся амплитуды, соответственно первой и второй гармоники, ν—коэффициент поглощения, а ω—приращение к основной частоте α.

Подставляя (2.5) в уравнение (2.3) и приравнивая к нулю коэффициенты у соответствующих экспонент, можно получить уравнения для амплитуд A_1 и A_2. Приравнивая к нулю наиболее по порядку недифференцируемые члены в уравнении для первой гармоники, получим уравнения линейной дисперсии и затухания

$$\omega = -\frac{d}{v} \alpha^3, \; \nu = \alpha^4 n v^{-1} - D \alpha^2 v^{-1}$$

Здесь и далее будет рассмотрен стационарный случай. При выполнении неравенства $\omega\tau \gg 1$ и $\omega \ll \alpha$, в уравнении для амплитуды A_2 можно пренебречь дифференцируемыми членами. Тогда для величины A_2 получится алгебраическое уравнение. Исключая функцию A_2, для амплитуды первой гармоники получится следующее уравнение:

$$\left(3i\omega + i\alpha + \nu + 2n\alpha^4 v^{-1}\right)\frac{\partial A_1}{\partial \tau} + Q_n v^2 N_1^{-1}\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_1}{\partial r}\right) =$$

$$= \alpha^4(2v^2)^{-1}(1 + 8i\nu\alpha)(-12\omega\alpha + 24ni\alpha^5 v^{-1} + 4i\nu\alpha)^{-1}\Gamma^2 e^{-2\nu\tau} \mid A_1 \mid^2 A_1 \quad (2.6)$$

Выражение (2.6)—это известное уравнение модуляций аксиально-симметричного пучка в цилиндрических координатах. Для нахождения его асимптотического решения в приближении узких пучков, следует делать преобразование, как в статье [9]. Подстановкой в уравнение (2.6) $A_1 = a\exp(i\varphi)$, разделяя мнимые и действительные части, получаются два уравнения для величин a и φ, решение которых ищется при пренебрежении линейной диссипацией в следующем виде:

$$a = a_0 f_1^{-1}\exp\left[-\frac{1}{2}r^2(r_1 f_1)^{-2}\right], \varphi = \sigma_1(\tau) + \frac{1}{2}r^2 R_1^{-1}(\tau) \qquad (2.7)$$

где f_1—безразмерная ширина пучка падающей волны, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f_1}{d\tau^2} = M f_1^{-3} \qquad (2.8)$$

где

$$M = 4Q_n v^2 N_1^{-1}\alpha^{-1}(1-3\xi)^{-2}\Big[-Q_n v^2 N_1^{-1}\alpha^{-1} r_1^{-4} +$$

$$+\left(\frac{1}{4}\chi_2^2 a_0^4 \alpha^{-2} - \frac{1}{2}\chi_1 a_0^0 \alpha^{-1} r_1^{-2}\right)\Big], \ \xi = -\omega\alpha^{-1}$$

$$\chi_1 = \zeta(3\xi\alpha^2 + 8\nu^2\alpha^2 + 48n\alpha^5\nu v^{-1})$$

$$\chi_2 = -\zeta(\nu\alpha + 6n\alpha^5 v^{-1} + 24\nu\alpha^3\xi)$$

$$\zeta = \frac{1}{8}\Gamma^2 v^{-2}\left[9\xi^2 + (6n\alpha^3 v^{-1} + \nu\alpha^{-1})^2\right]^{-1}$$

Неизвестные функции σ_1 и R_1 можно легко найти по известной функции f_1.

Уравнение (2.8) следует решать с граничными условиями:

$$f_1(q) = 1, \ \frac{df_1(q)}{d\tau} = \frac{A_3}{R_1(q)} - \frac{\chi_2 a_0^2}{2\alpha(1-3\xi)}, \ A_3 = \frac{2Q_n v^2}{N_1\alpha(1-3\xi)} \qquad (2.9)$$

$x_3 = qv$—плоскость, где образовывается гауссовский пучок, a_0 и r_1—амплитуда и радиус в этой плоскости.

Решение уравнения (2.8), с учетом граничных условий (2.9), имеет следующий вид:

$$f_1^2(\tau) = [f_1'(q) + M] + \left[\tau - q + \frac{f_1'(q)}{f_1'^2(q) + M}\right]^2 + \frac{M}{f_1'^2(q) + M} \qquad (2.10)$$

Решение уравнения (2.4) ищется в следующем виде:

$$\psi_2 = \frac{1}{2}\Big\{B_1(\tau_1, t)\exp[(\nu + i\alpha)\tau_2 - (-\nu + i\omega)t] +$$

$$+ B_2(\tau_1 t)\exp[2(\nu + i\alpha)\tau_2 - 2(\nu + i\omega)t] + \text{к.с.}\Big\} \tag{2.11}$$

где B_1 и B_2 — медленно меняющиеся амплитуды отраженной волны, соответственно первой и второй гармоники.

Подставляя выражение (2.11) в уравнение (2.4) и делая аналогичные вычисления, как в случае падающей волны, получаются следующие уравнения модуляции и дисперсионные соотношения:

$$\left(+i\alpha - 3i\omega + \nu + 2n\alpha^4 v^{-1}\right)\frac{\partial B_1}{\partial \tau} - \frac{1}{2}L(B_1) = \frac{\Gamma^2\alpha^4(1 + 8i\alpha\nu) \mid B_1 \mid^2 B_1 e^{-2\nu\tau}}{8v^2[3\omega\alpha + i\nu\alpha + 6in\alpha^5 v^{-1}]} \tag{2.12}$$

$$\omega = \frac{d}{v}\alpha^3, \nu = \frac{n}{v}\alpha^4 - \frac{D}{v}\alpha^2 \tag{2.13}$$

Уравнение (2.12) с точностью до коэффициентов совпадает с уравнением (2.6). Поэтому решение уравнения можно найти аналогичным образом. Разделяя мнимые и действительные части, решение для b и φ можно искать в виде (2.7), где следует заменить a_0 на b_0, f_1 на f_2, r_1 на r_0, σ_1 на σ_2 и R_1 на R_2. Уравнение для f_2, имеющий вид (2.8), следует решать со следующими граничными условиями:

$$R_2(0) = -R_1(0),\ f_2(0) = f_1(0),\ f_3'(0) = -A_3' R_2^{-1} -$$

$$-\frac{1}{2}\chi_2 b_0^2\alpha^{-1}(3\xi + 1).\ A_3' = 2Q_n v^2(N_1\alpha)^{-1}(1 + 3\xi)^{-1} \tag{2.14}$$

Тогда функцию f_2 можно представить в следующем виде:

$$f_2^4(\tau) = \left\{\tau + \frac{[c_1 f_1(0) - M]^{1/2}}{f_2'^2(0) + M}\right\}^2 + \frac{M}{f_2'^2(0) + M} \tag{2.15}$$

В решении (2.15) неопределенной остается амплитуда b_0. Так как заданной считается амплитуда a_0, то необходимо найти связь между амплитудами a_0 и b_0. Эту связь можно найти из граничного условия: напряжения на поверхности — нули. Для решения граничной задачи следует пользоваться методом возмущений граничных условий. Ограничиваясь в качестве первого приближения самыми большими членами, граничные условия примут следующий вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i} = 0 \ (i = 1, 2) \text{ при } x_3 = 0$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = 0 \tag{2.16}$$

Решения системы уравнений (2.16) следует искать в виде падающей и отраженной волны для смещения u_3 и в виде только отраженной волны для поперечных смещений. Эти решения имеют вид квазимонохроматической волны типа первого слагаемого выражений (2.5). Подставляя эти решения в уравнения (2.16), получим новую систему уравнений относительно амплитуд. Если пренебрегать дифференцированными членами в этой системе уравнений, получится $A_1 = B_1$. Это соответствует известному результату, который получается если распространяется монохроматическая волна [10]. Для учета вклада медленно меняющихся амплитуд, следует подставить $B_1 = A_1 + \varepsilon$, где ε—некоторая неизвестная функция. Тогда связь между амплитудами падающей и отраженной волн примет следующий вид:

$$B_1 = A_1 - \frac{2i}{k}\frac{\partial A_1}{\partial x_3} + \frac{2\lambda}{(\lambda+2\mu)k_1 k}\Delta_1 A_1$$

где k и k_1—волновые числа. Из последнего выражения, после разделения мнимых и действительных частей, легко найти связь между a_0 и b_0.

3. "Замороженные" волны. Исходные уравнения (1.1) и (1.2) допускают также динамические процессы, где изменения быстры, поэтому основными членами уравнения (1.2) следует считать σ_{ik} и ε_{ik}. Тогда, следуя статье [6], принимаются следующие порядки:

$$u_3 \sim \delta^2,\ \frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2} \sim \delta^{-1/2},\ \frac{\partial}{\partial x_3},\ \frac{\partial}{\partial t} \sim \delta^{-1},\ d_1, d_2 \sim \delta^2,\ n_1, n_2 \sim \delta^3.$$

Вышепринятые порядки для коэффициентов означают, что вязкость, дисперсия и диссипация считаются малыми.

Уравнения (1.1) записыватся в перемещениях и упрощаются, используя вышеуказанные порядки. В уравнениях для u_1 и u_2 сохраняются члены, имеющие порядок до $\delta^{1/2}$, а в уравнении для u_3—до δ^0, тогда получатся следующие уравнения:

$$G\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i \partial x_3} + T\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} + a_2\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0,\ \ (i = 1,2) \tag{3.1}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + F\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^2 \partial t} + N\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + P\frac{\partial}{\partial t}\Delta_\perp u_3 +$$
$$+a_2\rho\frac{\partial^3 u_3}{\partial t^3} - (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - (d_1+d_2)\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_3^2 \partial t^2} - (n_1+n_2)\frac{\partial^5 u_3}{\partial x_3^2 \partial t^3} +,$$
$$+M_2\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^2 \partial t}\right) = 0 \tag{3.2}$$

где

$G = a_1(2\mu + 3\lambda) + a_2(\lambda + \mu) - b_1 - b_2 + \Big|3B(2a_1 + a_2) + A(2a_1 + \frac{3}{2}a_2) + +2C(3a_1 + a_2)\Big|\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$, $T = 2a_2\mu - b_2$, $F = a_2(\lambda + 2\mu) + a_1(2\mu + 3\lambda) + 2a_1\Big(A + +5B + 3C\Big)\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} + 2\Big(A + 3B + C\Big)\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} - b_1 - 2b_2$, $N = a_2(\lambda + \mu) + +a_1(2\mu + 3\lambda) + +2a_1(2B + 3C) + a_2\Big(\frac{3}{4}A + B + 2C\Big)\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} - b_1 - b_2$, $p = a_2\mu + a_2\Big(B + \frac{3}{4}A\Big)\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} - b_2$, $M_2 = 2a_1(A + 5B + 3C) + 2a_2(A + C + 2B) - b_1 - 2b_2$

В линейном однородном случае из уравнений (3.1) и (3.2) следует, что в среде распространяется продольная волна со скоростью $v_1^2 = F(a_2\rho)^{-1}$.

Аналогично равновесному случаю, уравнения (3.1)–(3.2) расщепляются на уравнения для падающих и отраженных волн. Для падающей и отраженной волн эти уравнения имеют соответственно следующий вид:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t\partial\tau_1}-\frac{1}{2}L_2(\psi_1)=-v_1^{-1}\frac{\partial}{\partial\tau_1}\left[H\psi_1+d\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\tau_1^2}+n\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\tau_1^3}+\Gamma_2\psi_1\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau_1}\right] \tag{3.3}$$

$$-\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t\partial\tau_2}-\frac{1}{2}L_2(\psi_2)=-v_1^{-1}\frac{\partial}{\partial\tau_2}\left[H\psi_1+d\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\tau_2^2}+n\frac{\partial^3\psi_2}{\partial\tau_2^3}+\Gamma_2\psi_2\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau_2}\right] \tag{3.4}$$

где $L_2=v_1^2Q_2F^{-1}\Delta_\perp v_i\,(i=1,2)$, $H=-\frac{1}{2}N_2v_1^3F^{-1}$, $d=\frac{1}{2}(d_1+d_2)v_1F^{-1}$, $n=-\frac{1}{2}(n_1+n_2)v_1F^{-1}$.

Решение уравнения (3.3) ищется в виде (2.5). Выполняя аналогичные вычисления, как при выводе уравнения (2.6), получатся следующие уравнения для линейной дисперсии, затухания и амплитуды первой гармоники:

$$\omega_1=-\frac{n}{v_1}\alpha_1^3,\ \nu_1=Hv_1^{-1}-dv_1^{-1}\alpha_1^2$$

$$\left(i\alpha_1-\nu_1+3i\omega_1-2d\alpha_1^2v_1^{-1}\right)\frac{\partial A_1}{\partial\tau}-\frac{1}{2}L_2(A_1)=$$

$$=\frac{\Gamma_2^2}{2v_1}\alpha^4\left(1+8i\alpha_1\nu_1\right)\left(-12i\alpha\nu_1-12\omega_1\alpha_1-16d\alpha_1v_1^{-1}\right)^{-1}e^{-2\nu_1\tau}\mid A_1\mid^2A \tag{3.5}$$

Поступая аналогичным образом, как в пункте 2 в случае "равновесной" волны, можно получить уравнение типа (2.8), где коэффициенты χ_1 и χ_2 будут иметь следующий вид:

$$\chi_1=\frac{1}{2}\xi_1\left[6\xi_1\alpha^2-8\alpha^2\nu_1(\nu_1+3d\alpha^3v_1^{-1})\right],\ \xi_1=-\frac{\omega_1}{\alpha}$$

$$\chi_2=\xi_1\left[48\alpha^3\xi_1+(\nu_1+3d\alpha^2v_1^{-1})\alpha\right]$$

$$\xi_1=\frac{\Gamma_2^2}{2v_1}\left[36\xi_1^2+(\nu_1\alpha^{-1}+3d\alpha v_1^{-1})^2\right]^{-1}$$

Это уравнение следует решать с учетом граничных условий (2.9), тогда оно примет вид (2.10).

Решение уравнения (3.4) следует искать в виде (2.11) и аналогичным образом получим уравнение типа (2.12) и (2.13). В данном случае они будут иметь следующий вид:

$$\left(+i\alpha-\nu_1-3i\omega_1-2d\alpha^2v_1^{-1}\right)\frac{\partial B_1}{\partial\tau}-\frac{1}{2}L_2(B_2)=\frac{\Gamma_2^2}{16}\alpha^4\left(1+8i\alpha\nu_1\right)\times \tag{3.6}$$

$$\times\left(5\omega_1\alpha--3i\alpha\nu_1-3id\alpha^3v_1^{-1}\right)^{-1}v_1^{-2}e^{-2\nu_1\tau}\mid B_1\mid^2B_1,\ \omega_1=\frac{n}{v_1}\alpha^3,\ \nu_1=-\frac{H}{v_1}+\frac{d\alpha^2}{v_1}$$

Аналогично можно получить решение типа (2.15) с учетом граничных условий (2.14), где однако величины χ_1 и χ_2 имеют следующий вид:

$$\chi_1=\xi_2\left[-5\xi_1-24\alpha\nu_1\left(\frac{\nu_1}{\alpha}+\frac{d\alpha}{v_1}\right)\right],\ \chi_2=\xi_2\left[-40\alpha\nu_1\xi_1+\right.$$

$$+3\left(\frac{\nu_1}{\alpha}+\frac{d\alpha}{v_1}\right)\Big],\ \xi_2=\frac{\Gamma_1\alpha^2}{16v_1^2}\left[25\xi_1^2+9\left(\frac{\nu_1}{\alpha}+\frac{d\alpha}{v_1^2}\right)^2\right]^{-1}$$

Связь между амплитудами падающей и отраженной волны такая же, как в "равновесном" случае.

Таким образом, в двух возможных вариантах — "равновесном" и "замороженном", удалось найти аналитические решения в рамках теории узких пучков для системы нелинейных уравнений с линейными граничными условиями.

QUASIMONOCHROMATIC NON-LINEAR WAVE REFLECTION FROM FREE SURFACE OF MEDIUM

BAGDOEV A.G, SHEKOYAN A.V.

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՔՎԱԶԻՄՈՆՈՔՐՈՄԱՏԻԿ ԱԼԻՔԻ ԱՆԴՐԱԴԱՐՁՈՒՄԸ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ԱԶԱՏ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆԻՑ

Ա.Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա.Վ. ՇԵԿՈՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է նախապես դեֆորմացված, համասեռ,իզոտրոպ, մածուցիկ միջավայրում ազատ հարթությունից ոչ գծային առաձգական ալիքի գաուսյան փնջի անդրադարձման խնդիրը եւ գտնված են նրա ասիմպտոտիկական լուծումները՝ գծային եզրային պայմանի դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В.В. Основы линейной теории упругости. -Л.-М.: Гостехтеориздат, 1948. 212с.
2. Николаевский В.Н. К изучению волн в сейсмоактивных средах.—В сб.: Проблемы нелинейной сейсмики. М.:Наука, 1987, с.170-202.
3. Зволинский Н.В. Волновые процессы в неупругих средах.— В кн.:Колебания грунта и сейсмический эффект при землетрясениях.(Вопросы инженерной сейсмологии, вып.23). М.:Наука, 1982, с.4-19.
4. Энгельбрехт Ю.К., Нигул У.К. Нелинейные волны деформаций.— М.:Наука, 1981. 256 с.
5. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.—М.:Мир, 1977. 622 с.
6. Bagdoev A.G., Shekoyan A.B. Focusing on nonlinear ultrasonic waves in viscous thermoelastic materials with spherical inclusions.—Phys.stat.sol(a), 1985, v.89, pp.499-507.
7. Hunter J.K., Keller J.B. Weakly nonlinear high frequency waves.—Communications on pure and applied mathem., 1983, v.36, no.5, pp.547-558.
8. Carbonaro P. High frequency waves in quasilinear invisid gasodinamics.—ZAMP, 1986, v.37, no.1, p.43-52.

9. Багдоев А.Г., Шекоян А.В. Нелинейные стационарные волны модуляции в пьезодиэлектриках с шаровыми включениями.—Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1987, т.40, но.5, с.14-23.
10. Новацкий В. Теория упругости.—М.:Мир. 1987. 871 с.

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию
15. IX.1989

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ

Մեխանիկա 44, № 1, 1991 Механика

УДК 539.6

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗРЯДНЫХ ТОКОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБРАЗЦАХ

АРЕШЯН Г.Л., ВАНЦЯН А.А., ПИЛИПОСЯН Г.Т.

Получены аналитические выражения для плотности и полного тока в зависимости от времени разряда конденсатора через металлический цилиндр. Аналитические решения выявляют затухающий характер колебательного процесса и позволяют с большой точностью рассчитывать скин-слой, а также вычислить силу Лоренца. Теоретические результаты подтверждены экспериментально.

Результаты теоретических и экспериментальных изучений позволяют определить поля напряжений в цилиндрических телах, находящихся под импульсным воздействием электрического разрядного тока. Появляется также возможность рассчитывать температурные поля.

Изучению влияния разрядных токов на разные физические явления, в том числе и на процесс проникания тонких твердых тел в металлические среды, посвящен ряд работ [1-6 и др.].

В этих работах показано, что разрядный ток по направлению проникания приводит к значительному увеличению силы сопротивления, действующей на проникающее тело. В [1] показано, что лоренцова сила, сжимающая среду вокруг оси проникания, значительна и надо ее учитывать.

Для теоретической оценки пинч-эффекта разрядного тока необходимо знать распределение тока внутри образца как по радиальной координате, так и по времени.

1. Теоретическая модель. Используются цилиндрические координаты. Ось z совмещена с геометрической осью цилиндрического проводника. Начало координат совмещено с центром одного торцевого сечения цилиндрического проводника радиуса r_0 и длины l.

Ввиду симметрии вектор плотности тока $\bar{\delta}(r,t)$ имеет только z составляющую ($\delta_r = 0$, $\delta_\varphi = 0$, $\delta_z = \delta$). Причем, $\partial\delta/\partial\varphi = 0$. Пренебрегая торцевыми эффектами и рассматривая одномерную задачу, принимается, что $\partial\delta/\partial z = 0$.

На основе уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\bar{H} = \bar{\delta} + \frac{\partial\bar{D}}{\partial t},\ \operatorname{rot}\bar{E} = -\mu\mu_0\frac{\partial\bar{H}}{\partial t}$$

$$\vec{\delta} = \gamma\vec{E},\ \vec{E} = \rho\vec{\delta},\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E},\ \gamma = \rho^{-1} \tag{1.1}$$

пренебрегая токами смещения, в одномерном случае исключая из (1.1) $\vec{H}$, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} - \mu\mu_0\gamma\frac{\partial E}{\partial t} = 0 \tag{1.2}$$

При получении уравнения (1.2) принято, что μ, ε, γ—постоянные.

Уравнение (1.2) с учетом (1.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \delta}{\partial r} - \mu\mu_0\gamma\frac{\partial \delta}{\partial t} = 0 \tag{1.3}$$

Переходя к переменным в комплексной плоскости Лапласа

$$\delta(r,p) = \int_0^\infty \delta(r,t)e^{-pt}dt$$

с учетом того, что $\delta(r,0) = 0$, из (1.3) можно получить

$$\frac{\partial^2\delta(r,p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\delta(r,p)}{\partial r} - p\mu\mu_0\gamma\delta(r,p) = 0 \tag{1.4}$$

где $p = \alpha + i\beta$—комплексный параметр.

Введя обозначение

$$a^2 = -p\mu\mu_0\gamma$$

решение (1.4) можно представить в виде

$$\delta(r,p) = C_1 J_0(ar) + C_2 Y_0(ar)$$

где $J_0(a,r)$ и $Y_0(a,r)$—функции Бесселя первого и второго родов.

Так как при $r = 0$ плотность тока должна быть конечной, то $C_2 = 0$ и решение (1.4) примет вид

$$\delta(r,p) = C_1 J_0(ar),\ E(r,p) = C_1\rho J_0(ar) \tag{1.5}$$

С учетом того, что $H(r,t) = 0$ при $t = 0$, из системы (1.1) следует

$$\frac{\partial E(r,p)}{\partial r} = p\mu\mu_0 H(r,p),\ H(r,p) = \frac{C_1\rho}{p\mu\mu_0}\frac{\partial J_0(ar)}{\partial r}$$

или с учетом свойств бесселевых функций для напряженности магнитного поля можно записать

$$H(r,p) = \frac{C_1}{a}J_1(ar) \tag{1.6}$$

Полный ток через проводник радиусом r_0 можно записать в виде

$$I(t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}\delta(r,t)rdrd\varphi = 2\pi C_1\int_0^{r_0}\delta(r,t)rdr$$

или в операторной форме

$$I(p) = 2\pi \int_0^{r_0} \delta(r,p) r dr = 2\pi C_1 \int_0^{r_0} J_0(ar) r dr$$

Интегрируя, получим

$$I(p) = \frac{2\pi r_0 C_1}{a} J_1(ar_0) \tag{1.7}$$

Операторное сопротивление проводника длиной l с учетом (1.5) и (1.7) следует записать в виде $[u(r_0,p) = lE(r_0,p)]$

$$z(p) = \frac{u(r_0,p)}{I(p)} = \frac{l\rho a J_0(ar_0)}{2\pi r_0 J_1(ar_0)} \tag{1.8}$$

или

$$z(p) = R\frac{\lambda J_0(\lambda)}{2J_1(\lambda)},\ R = \frac{\rho l}{\pi r_0^2},\ \lambda = \mathrm{i}\sqrt{\mu\mu_0\gamma p}\, r_0 \tag{1.9}$$

где R—активное сопротивление цилиндрического проводника постоянному току.

Если конденсатор емкостью C и начальным напряжением u_0 разряжается на сопротивление $z(p)$, то можно записать соотношение

$$u(p) = \frac{u_0}{p} - \frac{1}{pC} I(p)$$

или, с учетом (1.8)

$$\left[\frac{1}{pC} + z(p)\right] I(p) = \frac{u_0}{p}$$

откуда, учитывая (1.9), следует

$$I(p) = \frac{Cu_0}{1 + pRC\frac{\lambda J_0(\lambda)}{2J_1(\lambda)}} \tag{1.10}$$

Для полного тока можно записать

$$I(t) = \frac{u_0}{R} L^{-1}\left\{\frac{1}{\frac{1}{RC} + p\frac{\lambda J_0(\lambda)}{2J_1(\lambda)}}\right\} \tag{1.11}$$

где L^{-1}—обратное преобразование Лапласа.

Использовав (1.5), (1.7) и исключив постоянную C_1, после введения обозначения $\bar{r} = r/r_0$ с учетом (1.9) и (1.10) для плотности тока будем иметь

$$\delta(r,p) = \frac{Cu_0}{\pi r_0^2} \frac{\lambda J_0(\lambda\bar{r})/2J_1(\lambda)}{1 + pRC\lambda J_0(\lambda)/2J_1(\lambda)}$$

Переходя к переменной t, для полного тока и плотности тока получим соответственно

$$I(t) = \frac{u_0}{2\pi R\mathrm{i}} \int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \frac{e^{pt}}{\frac{1}{RC} + p\frac{\lambda J_0(\lambda)}{2J_1(\lambda)}} dp \tag{1.12}$$

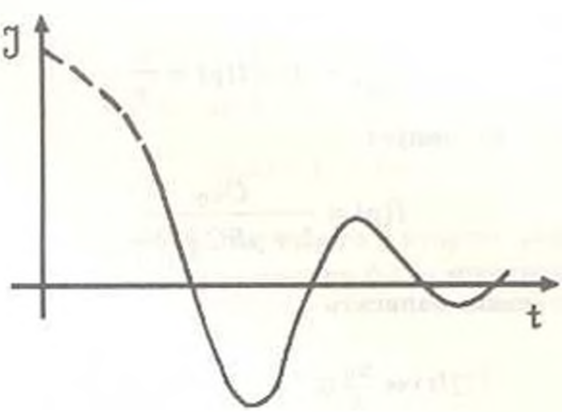
$$\delta(r,t) = \frac{u_0}{2\pi R r_0^2}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\frac{\lambda J_0(\lambda\bar{r})}{2J_1(\lambda)}e^{pt}}{\frac{1}{RC}+p\frac{\lambda J_0(\lambda)}{2J_1(\lambda)}}dp \tag{1.13}$$

Анализ подынтегрального выражения (1.13) в случае $\bar{r} \to 0$ крайне затруднителен, так как аргумент бесселевых функций $\lambda = i\sqrt{\mu\mu_0\sigma\gamma p}\, r_0$ включает комплексную переменную p, которая в процессе интегрирования пробегает значения $-i\infty \le p \le +i\infty$. Это обстоятельство не дает возможности разложить в асимптотические ряды функции $J_1(\lambda)$ и $J_0(\lambda)$ для любых значений λ. Для малых аргументов можно показать, что подынтегральное выражение приводится к виду

$$\frac{Ae^{pt}}{p^2+2\xi\omega_0 p+\omega_0^2}$$

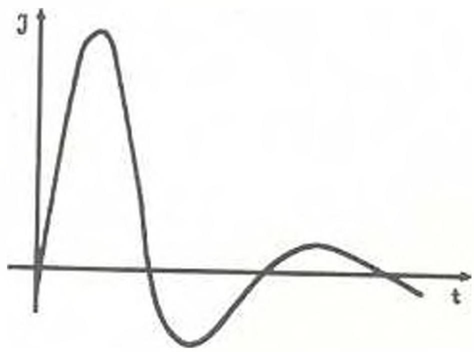
где $\omega_0^2 = \frac{16}{5}\frac{1}{RC\mu\mu_0\gamma r_0}$, $\xi = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{16}\frac{1}{RC}\mu\mu_0\gamma r_0^2}}$. В этом случае зависимость $\delta(t)$ для $\bar{r} \Longrightarrow 0$ представлена на фиг.2, что подтверждается численными расчетами.

Интегралы (1.12) и (1.13) вычислены численно. Результаты численных расчетов для интеграла (1.12) приведены на фиг.1, рядом, на фиг.2 приведена осциллограмма для полного тока.

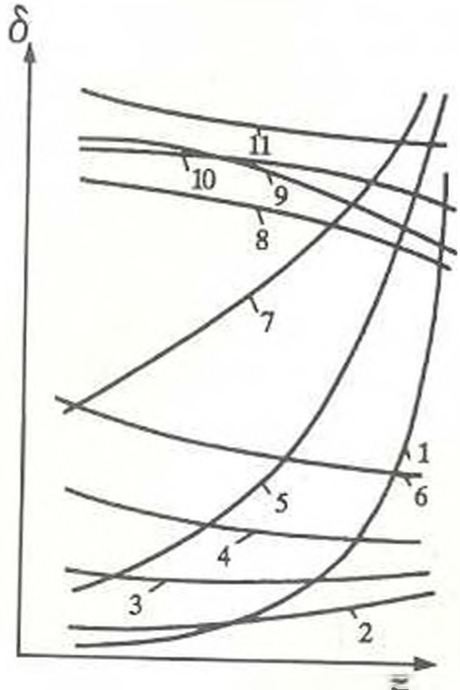


Фиг. 1.

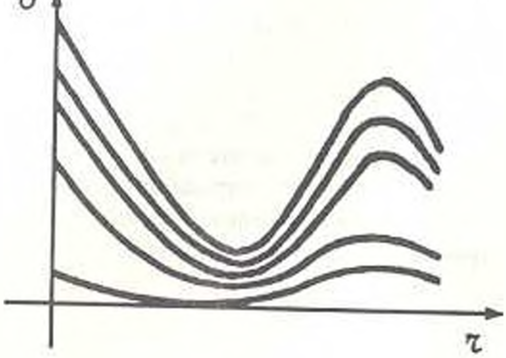
2. Экспериментальные исследования. Как видно из фиг.1 и 2, численные результаты отличаются от экспериментальных данных лишь в начальной стадии. Численные значения интеграла (1.13) приведены на фиг.3. При малых сопротивлениях цепи—$R \sim 10^{-9} \div 10^{-7}$ ом (кривые 1,5,7, фиг.3) преобладают поверхностные токи, при этом $C = 6 \cdot 10^{-2}$ Ф. С увеличением сопротивления цепи до $\sim 6 \cdot 10^{-6}$ ом со временем токи стремятся к оси цилиндра (кривые 4,9,11). При $t \sim 2 \cdot 10^{-3} \div 4 \cdot 10^{-2}$ осевые токи становятся преобладающими



Фиг.2



Фиг.3



Фиг.4

(кривые 6,10). В [3] были проведены эксперименты по определению распределения плотности тока внутри цилиндрического металлического образца. Замеры разностей потенциалов между двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными оси цилиндра, проводились методом зондирования на разном расстоянии от оси. На фиг.4 показаны результаты замеров для плотности тока в зависимости от r. Измерения проводились на двухлучевых запоминающих осциллографах С8-17. Одновременное наличие приосевых и приповерхностных токов на осциллограмме объясняется тем, что каналы у осциллографа работают независимо друг от друга и зафиксировали значения напряжения в разных точках для разных времен.

Таким образом, подробное изучение результатов численных расчетов (которые из-за громоздкости не приводятся) и экспериментальных данных показывают, что при разряде конденсатора по цилиндрическому короткому проводнику для плотности тока имеет место колебательный процесс как по координате r, так и по времени. Если учесть, что при прохождении тока на заряд действует лоренцова сила, то можно сказать, что для времен $\sim 10^{-9} \div 10^{-7}$ сек в приповерхностном слое образуется ударная волна, сходящаяся к оси. Для времен $\sim 10^{-6} \div 10^{-4}$ амплитуда волны имеет максимальное значение на оси цилиндра. Таким образом, имеет место обратный скин-эффект.

Авторы выражают благодарность Г.Е.Багдасаряну.

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF DISCHARGE CURRENTS DISTRIBUTION IN CYLINDRICAL SPACEMENS

ARESHIAN G.L., VANTSIAN A.A., PILIPOSIAN G.T.

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՆՄՈՒՇՆԵՐՈՒՄ ՊԱՐՊՄԱՆ ՀՈՍԱՆՔՆԵՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ՏԵՍԱԿԱՆ ԵՎ ՓՈՐՁՆԱԿԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Գ.Լ. ԱՐԵՇՅԱՆ, Ա.Ա. ՎԱՆՑՅԱՆ, Գ.Տ. ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ խտության եւ լրիվ հոսանքի համար, կախված մետաղական գլանով կոնդենսատորի պարպման ժամանակից: Անալիտիկ լուծումները բացահայտում են տատանողական պրոցեսի մարող բնույթը եւ թույլ են տալիս մեծ ճշտությամբ հաշվել սկին-շերտը, ինչպես նաեւ Լորենցի ուժը: Տեսական արդյունքները հաստատված են փորձով:

Տեսական եւ փորձնական հետազոտությունների արդյունքները թույլ են տալիս էլեկտրական պարպման հոսանքի ազդեցության տակ գտնվող գլանային մարմիններում որոշել լարումների դաշտը: Հնարավոր է դառնում նաեւ հաշվել ջերմաստիճանային դաշտերը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Ванцян А.А. Влияние разрядных токов на динамические процессы в металлических образцах.—В сб.Пробшемы динамики взаимодействия деформированных сред. Ереван, 1984.
2. Багдоев А.Г., Ванцян А.А. Проникание тонких тел в металлы.— Изв.АН СССР, МТТ, 1982, но.2.
3. Багдоев А.Г., Ванцян А.А., Пахалов В.В. Определение распределения токов и упругих полей при импульсном разряде в металлах.—Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1986, т.39, но.1.
4. Багдоев А.Г., Ванцян А.А. Влияние разрядных токов на механические явления в металлических образцах.—Изв. АН СССР, МТТ, 1988, но.3.
5. Сагомонян А.Я. Динамика пробивания преград.— М.: Изд. МГУ, 1988.
6. В сб.Взрывающиеся проволочки, Москва, 1963.

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию
17. V.1990

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ

Մեխանիկա 44, № 1, 1991 Механика

УДК 534.13:536.246

О СВОБОДНЫХ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

ОГАНЯН Г.Г.

Рассматривается задача о влиянии тепловых эффектов на свободные малые колебания газового пузырька в несжимаемой жидкости в линейной упрощенной постановке. Выделены два режима колебаний, реализующихся при термодинамических поведениях газа в пузырьке, примыкающих к изотермическому и адиабатическому. Выведены простые формулы для вычисления величин декремента затухания за счет теплообмена при квазиизотермическом и квазиадиабатическом режимах колебаний. Для водо-воздушной и водо-гелиевой смесей проведено сравнение полученных результатов с известными, и, тем самым, получены интервалы изменения радиуса пузырька, в которых колебательные режимы различны.

Важность учета тепловых эффектов, существенно влияющих на собственную частоту колебаний, показана в [1,2]. Аналогичная задача в нелинейной постановке численно исследовалась в [3,4]. В [5] в точной линейной постановке изучалась динамика парогазового пузырька в жидкости. Известно, что при адиабатическом и изотермическом предельных термодинамических поведениях газового пузырька тепловой поток от пузырька в жидкость отсутствует. Однако, в реальных газожидкостных смесях может происходить интенсивный теплообмен за счет динамического взаимодействия газового пузырька с окружающей жидкостью, при этом количество тепла, отданное в процессе сжатия пузырьком в жидкость, не равно обязательно количеству тепла, полученному пузырьком от жидкости в процессе расширения [6]. Тем самым, может иметь место диссипация кинетической энергии смеси за счет необратимого межфазного теплообмена. Различные физические процессы, влияющие на диссипацию энергии, рассмотрены в [2,7,8].

В настоящей работе аналитически исследуется подобная [3] линейная задача в упрощенной постановке. Выделены два режима колебаний, реализующиеся при термодинамических поведениях газа в пузырьке, близких (но не совпадающих) к изотермическому и адиабатическому. Выведены простые формулы для вычисления величин декремента затухания за счет теплообмена. Для двух видов газожидкостных смесей проведено сравнение полученных результатов с известными [2,3,5].

1. **Основные уравнения.** Пусть сферически-симметричный одиночный газовый пузырек находится в безграничной несжимаемой идеальной жидкости. Учитывая, что в газе величина коэффициента теплопроводности k_2 намного меньше аналогичного коэффициента в жидкости, будем считать, что теплообмен пузырька с жидкостью обусловлен лишь тепловым сопротивлением газа и поэтому температуру жидкости примем постоянной. Полагая, что эффекты дробления отсутствуют и не происходит изменения сферической формы пузырька, ограничимся рассмотрением малых гармонических колебаний. Принимая, что газ подчиняется уравнению состояния калорически совершенного газа, уравнения, описывающие радиальное движение сферически-симметричного газового пузырька, возьмем в виде [6]

$$P_2 - P_1 = \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2}\rho_1 \left(\frac{dR}{dt}\right)^2, \ \rho_1 = \text{const} \tag{1.1}$$

$$P_2 = c_{v2}(\gamma - 1)\rho_2 T_2, \ \rho_2 R^3 = \text{const}, \ \ \gamma = c_{p2}/c_{v2}$$

$$\frac{dP_2}{dt} + \frac{3\gamma P_2}{R}\frac{dR}{dt} + \frac{3(\gamma-1)k_2 \mathrm{Nu}}{2R^2}(T_2 - T_0) = 0$$

Здесь индексы 1 и 2 отнесены соответственно к жидкости и газу, P—давление, ρ—плотность, R—радиус пузырька, T—температура, $T_0 = \text{const}$—температура жидкости, t—время, c_p и c_v—удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме, Nu—безразмерное число Нуссельта. Последнее уравнение из системы (1.1) обеспечивает однородное изменение давления газа в пузырьке.

При свободных колебаниях давление P_1 в жидкости вдали от пузырька не меняется, то есть $P_1 = P_0 = \text{const}$. Предположим, что в любой момент времени отклонения параметров колебания от соответствующих значений в невозмущенном состоянии малы

$$P_2 = P_0(1 + \varepsilon P_2'), \ \rho_2 = \rho_{20}(1 + \varepsilon \rho_2'), \ R = R_0(1 + \varepsilon R'), \ T_2 = T_0(1 + \varepsilon T_2')$$

После линеаризации систему (1.1) можно свести к одному уравнению относительно возмущения радиуса пузырька

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d^2 R}{d\tau^2} + \omega_{ar}^{*2} R\right) = -\nu_T \left(\frac{d^2 R}{d\tau^2} + \omega_{ir}^{*2} R\right) \tag{1.2}$$

Здесь штрихи опущены и введены обозначения

$$\omega_{ar}^{*2} = \frac{3\gamma P_0}{\rho_1}\frac{t_*^2}{R_0^2}, \ \omega_{ir}^{*2} = \frac{3P_0}{\rho_1}\frac{t_*^2}{R_0^2}, \ \nu_T = \frac{3\gamma}{2}\frac{t_*}{t_T}\mathrm{Nu} = \frac{6\pi\gamma \mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}$$

$$\mathrm{Pe} = \frac{2R_0^2 \omega_r}{\lambda_2} = 2\omega_r t_T, \ \tau = \frac{t}{t_*}, \ t_* = \frac{2\pi}{\omega_r}, \ t_T = \frac{R_0^2}{\lambda_2}$$

где λ_2—коэффициент температуропроводности газа, t_T—время тепловой релаксации, t_*—период пульсации пузырька. Из (1.2) следуют предельные уравнения, описывающие изотермический и адиабатический режимы свободных колебаний пузырька. Первый из них реализуется при больших значениях параметра ν_T ($\nu_T \to \infty$), который соответствует малым значениям числа Пекле

(Pe$\to$ 0). Оставляя в (1.2) правую часть уравнения, получим искомое уравнение, из которого следует формула резонансной частоты Миннаерта для изотермического режима колебаний пузырька:

$$\omega_{ir} = \frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{3P_0}{\rho_1}} \equiv \frac{1}{t_*}\omega^*_{ir}$$

Второй из предельных режимов реализуется при очень больших значениях числа Пекле (Pe$\to\infty$). Удерживая в (1.2) левую часть уравнения, приходим ко второму предельному уравнению, из которого следует формула Миннаерта для адиабатического режима колебаний

$$\omega_{ar} = \frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_1}} \equiv \frac{1}{t_*}\omega^*_{ar}$$

Решение уравнения (1.2) будем искать в виде $R \sim A\exp(k\tau)$, где $A =$const и k удовлетворяет характеристическому уравнению

$$k^3 + \nu_T k^2 + \omega^{*2}_{ar} + \nu_T\omega^{*2}_{ir} k = 0 \qquad (1.3)$$

Для получения приближенных аналитических зависимостей решение уравнения (1.3) будем искать для двух режимов колебаний, примыкающих (но не совпадающими) к изотермическому и адиабатическому.

2. Квазиизотермический режим ($\nu_T > 1$). При изотермическом режиме имеем

$$k = k_0 = \pm i\omega^*_{ir}$$

Решение уравнения (1.3) ищем в виде ряда по обратным степеням безразмерного большого параметра ν_T

$$k = k_0 + k_1/\nu_T + k_2/\nu_T^2 + k_3/\nu_T^3 + \cdots$$

подстановка которого в уравнение (1.3) и последующее приравнивание членов при одинаковых степенях $1/\nu_T$ дает

$$k_1 = -\frac{\gamma-1}{2}\omega^{*2}_{ir},\ k_2 = \pm i\frac{(\gamma-1)(5-\gamma)}{8}\omega^{*3}_{ir},\ k_3 = \frac{(\gamma-1)(2-\gamma)}{2}\omega^{*4}_{ir}$$

Ограничиваясь рассматриваемым приближением, решение уравнения (1.2) с начальным условием $\tau = 0$, $R = 0$ запишем в виде

$$R = A\exp\left[-\frac{\gamma-1}{2\nu_T}\omega^{*2}_{ir}\left(1 - \frac{(2-\gamma)}{\nu_T^2}\omega^{*2}_{ir}\right)\tau\right]\sin\left[\omega^*_{ir} + \frac{(5-\gamma)(\gamma-1)}{8\nu_T^2}\omega^{*3}_{ir}\right]\tau$$

Видно, что в исследуемом режиме колебаний учет теплообмена приводит к увеличению собственной частоты. Часто [1,5–8] затухающие колебания за счет теплообмена характеризуют декрементом затухания Λ_T, который в рассматриваемом режиме определяется формулой

$$\Lambda_{iT} = \frac{8\pi(\gamma-1)[9\gamma^2\mathrm{Nu}^2 - (2-\gamma)\mathrm{Pe}^2]\mathrm{Pe}}{[216\gamma^3\mathrm{Nu}^2 + 3\gamma(\gamma-1)(5-\gamma)\mathrm{Pe}^2]\mathrm{Nu}}$$

$$\mathrm{Pe} = 2\omega_{ir} t_T \tag{2.1}$$

Если термодинамическое поведение газа в пузырьке является изотермическим, то теплообмен практически отсутствует ($\mathrm{Pe} \to 0$) и поэтому $\Lambda_{iT} = 0$. Подчеркнем, что в представленной формуле определения числа Пекле входит не частота реализующихся колебаний, а резонансная частота, означающая, что число Pe характеризуется через параметры состояния газожидкостной смеси. Вспоминая определения времени тепловой релаксации t_T (времени выравнивания температуры неравномерно нагретого газового пузырька) и периода пульсации пузырька t_*, имеем формулу

$$\frac{t_T}{t_*} = \frac{\mathrm{Pe}}{4\pi} \tag{2.2}$$

В формулах (2.1), (2.2) необходимо задавать связь между числами Pe и Nu. Для этого воспользуемся результатом работы [5], в которой на основе точной постановки линейной задачи о теплообмене газового пузырька при малых радиальных пульсациях получена формула

$$\mathrm{Nu} = \frac{2\omega^* \mathrm{Kh}(\omega^*)}{\omega^* - 3\mathrm{Kh}(\omega^*)}, \quad \mathrm{Kh}(\omega^*) = \sqrt{\omega^*}\,\mathrm{cth}\sqrt{\omega^*} - 1 \tag{2.3}$$

Полагая $\omega^* = \omega^*_{ir}$ и используя разложение

$$\mathrm{cth} z = \frac{1}{z} + \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + \frac{2z^5}{945} - \cdots + \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n-1} + \cdots, \quad z < \pi$$

где B_{2n}—числа Бернулли, равные $B_0 = 1$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $B_8 = -1/30$, $B_{10} = 5/66$, $B_{12} = -691/273$, ограничимся первыми семью слагаемыми. При $\omega^*_{ir} = \mathrm{Pe}/2 < \pi^2$ в табл.1 приведены результаты расчетов значения Nu для конкретных двух видов газожидкостной смеси. Видно, что при увеличении радиуса пузырька, приводящего к увеличению его поверхности, происходит улучшение теплообмена, характеризуемого безразмерным параметром Pe. При этом квазиизотермический режим колебаний реализуется

Таблица 1

R_0 (м)	водо-воздушная		водо-гелиевая	
	ω^*_{ir}	Nu	ω^*_{ir}	Nu
$3 \cdot 10^{-7}$	0,247	10	0,03	10
$5 \cdot 10^{-7}$	0,412	10,12	0,051	10
$7 \cdot 10^{-7}$	0,547	10,16	0,071	10
$1 \cdot 10^{-6}$	0,824	10,23	0,1	10
$3 \cdot 10^{-6}$	2,47	10,67	0,3	10
$5 \cdot 10^{-6}$	4,12	10.86	0,51	10,07
$7 \cdot 10^{-6}$	5,75	10,89	0,71	10,2
$1 \cdot 10^{-5}$	8,24	10,6	1,01	10,28
$3 \cdot 10^{-5}$	24,7	10	3,04	10,8
$5 \cdot 10^{-5}$	41,2	10	5,06	10,89

для водо-воздушной смеси в интервале $5\cdot10^{-7}$м $< R_0 \leq 7\cdot10^{-6}$м, а для водо-гелиевой смеси — в интервале $5\cdot10^{-6}$м$< R_0 \leq 5\cdot10^{-5}$м. Действительно, согласно табл.1, из формулы (2.2) следует неравенство

$$t_T < t_*$$

означающее, что время тепловой релаксации меньше характерного макроскопического времени — периода пульсации пузырька. Иными словами, тепло от пузырька в жидкость передается в течение короткого времени в сравнении с характерным макроскопическим. Такой режим близок к изотермическому и потому назовем его квазиизотермическим. При мелких пузырьках, а именно, $R_0 \leq 5\cdot10^{-7}$м для водо-воздушной смеси и $R_0 \leq 5\cdot10^{-6}$м для водо-гелиевой смеси из (2.2) имеем

$$t_T \ll t_*$$

Такое неравенство характерно для изотермического процесса [6] и потому термодинамический режим поведения газа в пузырьке практически можно считать изотермическим, при этом Nu$\approx$ 10. Если в этом предельном режиме полагать Pe$\ll$ 1, то из (2.1) следует формула для декремента затухания колебаний пузырька, полученная в [8].

3. Квазиадиабатический режим ($\nu_T < 1$). Решение уравнения (1.3) будем искать в виде степенного ряда по малому параметру ν_T

$$k = k_0 + k_1\nu_T + k_2\nu_T^2 + k_3\nu_T^3 + \cdots$$

Подставив искомое решение в уравнение (1.3) и приравняв члены при одинаковых степенях ν_T, находим

$$k_0 = \pm i\omega_{ar}^*,\ k_1 = -\frac{\gamma-1}{2\gamma},\ k_2 = \mp\frac{(3+\gamma)(\gamma-1)}{8\gamma^2}\frac{1}{\omega_{ar}^*},\ k_3 = \frac{\gamma-1}{2\gamma^3}\frac{1}{\omega_{ar}^{*2}}$$

Тогда решение уравнения (1.2) с начальным условием $\tau = 0$, $R = 0$ запишется в виде

$$R = A\exp\left[-\frac{\gamma-1}{2\gamma}\nu_T\left(1-\frac{\nu_T^2}{\gamma^2}\frac{1}{\omega_{ar}^{*2}}\right)\tau\right]\sin\left[\left(\omega_{ar}^* - \frac{(3+\gamma)(\gamma-1)}{8\gamma^2}\frac{1}{\omega_{ar}^*}\nu_T^2\right)\tau\right]$$

В рассматриваемом режиме учет теплообмена приводит к уменьшению частоты собственных колебаний пузырька, при этом декремент теплового затухания Λ_{aT} выразится формулой

$$\Lambda_{aT} = \frac{24\pi(\gamma-1)(\mathrm{Pe}^2-9\mathrm{Nu}^2)\mathrm{Nu}}{[8\mathrm{Pe}^2-9(3+\gamma)(\gamma-1)\mathrm{Nu}^2]\mathrm{Pe}},\ \mathrm{Pe} = 2\omega_{ar}t_T \qquad (3.1)$$

В табл.2 приведены значения ω_{ar}^* в зависимости от радиуса пузырька для вышерассмотренных газожидкостных смесей.

Для водо-воздушной смеси при $R_0 \geq 5\cdot10^{-5}$м и для водо-гелиевой смеси при $R_0 \geq 3\cdot10^{-4}$ из табл.2 видно, что $\omega_{ar}^* =$Pe/2 $\gg$ 1. Зависимость Nu от числа Pe снова определим формулой (2.3), которая для рассматриваемого режима колебаний упрощается до вида

$$\mathrm{Nu} = \sqrt{\mathrm{Pe}} \qquad (3.2)$$

Таблица 2

R_0 (м)	ω^*_{ar}	
	водо-воздушная	водо-гелиевая
$3 \cdot 10^{-5}$	29,3	3,94
$5 \cdot 10^{-5}$	48,8	6,54
$7 \cdot 10^{-5}$	68,3	9,16
$1 \cdot 10^{-4}$	97,5	13,09
$3 \cdot 10^{-4}$	292,6	39,26
$5 \cdot 10^{-4}$	487,7	65,44
$7 \cdot 10^{-4}$	682,8	91,62
$1 \cdot 10^{-3}$	975,4	130,6
$3 \cdot 10^{-3}$	2926	392
$5 \cdot 10^{-3}$	4877	654
$7 \cdot 10^{-3}$	6828	916

Таким образом, с увеличением поверхности пузырька происходит усиление процесса теплообмена, при этом квазиадиабатический режим затухания колебаний реализуется для водо-воздушной смеси в интервале $5 \cdot 10^{-5}$м$\leq R_0 <$ $< 3 \cdot 10^{-3}$м, а для водо-гелиевой смеси—в интервале $3 \cdot 10^{-4}$м$\leq R_0, 5 \cdot 10^{-2}$м. Действительно, из формул (3.1) и (2.2) следует $t_T > t_*$, означающее, что время тепловой релаксации больше периода колебания пузырька. Иными словами, тепло от пузырька в жидкость передается в течение большого времени в сравнении с макроскопическим. Такой режим более близок к адиабатическому и потому назовем его квазиадиабатическим.

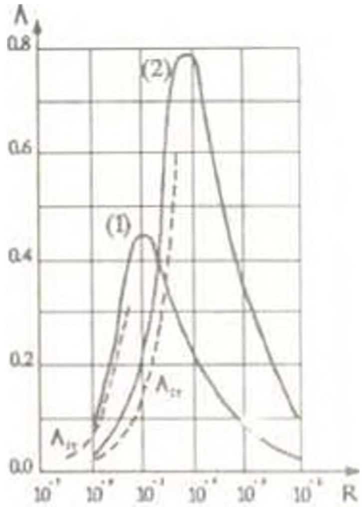
Для более крупных пузырьков вне приведенных интервалов имеет место $t_T \gg t_*$, то есть тепло передается в течение бесконечно большого времени в сравнении с макроскопическим характерным временем колебательного процесса. Такой процесс теплообмена совпадает с определением [6] адиабатического процесса и поэтому в таких пузырьках термодинамическое поведение газа можно считать адиабатическим.

Учитывая связь (3.2), при Pe$\gg 9$ величину декремента теплового затухания (3.1) можно определить упрощенной формулой

$$\Lambda_{aT} = 3\pi(\gamma - 1)\mathrm{Pe}^{-1/2}$$

которая совпадает с выражением, полученным в [5,6,8].

На фиг.1 приведены зависимости декрементов затухания от величины радиуса пузырька для водо-воздушной (1) и водо-гелиевой (2) смесей. Сплошные кривые, заимствованные из [1,5,6], соответствуют точному решению, а пунктирные кривые —формуле (2.1), по которой вычислены Λ_{iT}. Видно, что в интервале $7 \cdot 10^{-7}$м$\leq R_0 \leq 7 \cdot 10^{-6}$м для первой и второй смеси $5 \cdot 10^{-6}$м$\leq R_0 \leq$ $\leq 5 \cdot 10^{-5}$м Λ_{iT} и Λ качественно совпадают, а количественно отличаются ровно в γ раз. В этих интервалах термодинамическое поведение газа в пузырьке является квазиизотермическим. Для квазиадиабатического режима колебаний в интервалах $5 \cdot 10^{-5}$м$\leq R_0 \leq 3 \cdot 10^{-3}$м для первой и $3 \cdot 10^{-4}$м$\leq R_0 \leq 1 \cdot 10^{-2}$м для второй смесей кривые, соответствующие Λ_{aT}, вычисленным по формуле (3.1), практически не отличаются от сплошных и потому не приведены.



Фиг.1

ON FREE SMALL OSCILLATIONS OF GASE-BUBBLE IN INCOMPRESSIBLE FLUIDS

OHANIAN G.G

ԱՆՍԵՂՄԵԼԻ ՀԵՂՈՒԿՈՒՄ ԳԱԶԻ ՊՂՊՋԱԿԻ ԱԶԱՏ, ՓՈՔՐ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Գ.Գ. ՕՀԱՆՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է անսեղմելի հեղուկում գազի պղպջակի ազատ, փոքր տատանումների վրա ջերմային էֆեկտների ազդեցության խնդիրը, որը ուսումնասիրված է գծային պարզեցված դրվածքով:

Պղպջակում, գազի թերմոդինամիկական վիճակից կախված, առանձնացված են տատանումների երկու ռեժիմ, որոնք մոտ են (բայց չեն համընկնում) իզոթերմին եւ ադիաբատին: Ստացված են ջերմափոխանակությամբ բնորոշվող մարման դեկրեմենտի մեծությունը հաշվելու պարզ բանաձեւեր: Ջուր-օդ եւ ջուր-հելիում խառնուրդների համար կատարված է ստացված եւ հայտնի արդյունքների համեմատությունը: Գտնված են պղպջակի շառավիղների չափերի այն միջակայքը, որտեղ տատանողական ռեժիմը կարելի է համարել քվազիիզոթերմ եւ քվազիադիաբատ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Чопмен Р.Б., Плессет М.С. Тепловые эффекты при свободном колебании газовых пузырьков.—Теор.основы инж.расчетов, 1971, т.93, но.3, с.37-40.
2. Devin Ch. Survey of thermal, radiation and viscous damping of pulsation air bubbles in water.— J.Acoust.Soc.Amer., 1959, v.31, no.12, pp.1654-1667.
3. Нигматулин Р.И., Хабеев Н.С. Теплообмен газового пузырька с жидкостью.—МЖГ 1974, но.5, с.94-100.
4. Ивченко В.М., Приходько Н.А., Сирый В.С. Численное решение задачи охлаждения пузырька горячего газа в жидкости.—Гидромеханика. Респ.межвед.сб., 1971, но.19, с.9-14.
5. Нигматулин Р.И., Хабеев Н.С. Динамика и теплообмен парогазовых пузырьков с жидкостью.— Некоторые вопросы механики сплошной среды (посвящ. 70-летию акад. Л.И. Седова). М.: Институт механики МГУ, 1978, с.229-243.
6. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. I.—М.:Наука, 1987, 464 с.
7. Ван-Вейнгарден Л. Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа.—Реология суспензий.—М.:Мир, 1975, с.68-103.
8. Нигматулин Р.И., Хабеев Н.С. Декременты затухания колебаний и эффективные коэффициенты теплообмена пузырьков, радиально пульсирующих в жидкости.—МЖГ, 1988, но.6, с.80-87.

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию
20. IV.1990

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ
Մեխանիկա 44, № 1, 1991 Механика

УДК 532.5+536.24

ТЕПЛООБМЕН ПРИ ПЛОСКОМ ТЕЧЕНИИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ЖИДКОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

ПЕТРОСЯН Л.Г.

Рассматривается теплообмен в случае установившегося ламинарного плоского течения структурной несимметричной несжимаемой жидкости в окрестности критической точки. Показано, что учет микроструктуры жидкости увеличивает толщину теплового пограничного слоя, формируемого вблизи поверхности твердого тела, имеющей иную температуру, что изменяет интенсивность теплообмена между жидкостью и телом, по сравнению с ньютоновскими жидкостями.

В основу континуумов с внутренней структурой введены дополнительные континуальные переменные, помимо обычных лагранжевого смещения, плотности и температуры. Для этих континуумов характерны локальные вращательные степени свободы наряду с трансляционными, присущими и обычной классической жидкости.

В динамике структурных (несимметричных) жидкостей вращательные степени свободы учитываются путем введения в законы сохранения внутреннего "спинного" момента количества движения.

В основу нижеизложенной работы положена модель с тремя вращательными степенями свободы, где локальное вращение рассматривается как кооперативный молекулярный процесс, характеризуемый в каждой точке среды среднемолекулярным моментом количества движения и моментом инерции [1].

Рассмотрим теплообмен при установившемся ламинарном плоскопараллельном течении несимметричной несжимаемой вязкой жидкости в окрестности критической точки (фиг.1). Течение возле этой точки характеризуется тем, что притекающая из бесконечности к плоской стенке, поставленной поперек течения, жидкость разделяется на потоки, направленные в противоположные стороны от критической точки.

Задача плоскопараллельного течения структурной жидкости вблизи критической точки рассматривалась в работе [2], где автор исходил из приближенных уравнений пограничного слоя. Это привело к независимости решения от начального потока протекающей жидкости, кроме того, это исключило возможность определения распределения давления по потоку [3,4]. Точное решение уравнений движения структурных несимметричных жидкостей приведено в работе [5–8]. Задача теплообмена в окрестности критической точки для несимметричных жидкостей рассматривалась в работах [9,10], где авторы исходили из приближенных уравнений динамического и теплового пограничных слоев.

Ниже рассматривается точное решение уравнений движения и теплообмена (энергии) структурных несимметричных жидкостей.

1. Основные уравнения движения. Общая система уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости с несимметричным тензором напряжений имеет вид [8,11]

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + 2\nu\nabla \cdot (\nabla\vec{v})^d + \nu_r\nabla \times [2\vec{\omega} - \nabla \times \vec{v}] + \vec{f}$$

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 2\nu_r(\nabla \times \vec{v} - 2\vec{\omega}) + c_0\nabla \cdot (\nabla\vec{\omega}) + 2c_d\nabla \cdot (\nabla\vec{\omega})^d +$$

$$+2c_a\nabla \cdot (\nabla\vec{\omega})^a + \vec{c} \qquad (1.1)$$

Здесь ρ—массовая плотность жидкости, p—давление, I—скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы, $\vec{v}$—вектор скорости точки, $\vec{\omega}$—вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, ν—кинематическая ньютоновская вязкость, ν_r—кинематическая вращательная вязкость, c_0, c_d, c_a—коэффициенты моментной вязкости, $d(\cdots)/dt$—полная производная по времени, ∇—пространственный градиент, $(\nabla\vec{v})^d$ и $(\nabla\vec{\omega})^d$—симметричные части соответствующих диад, $(\nabla\vec{v})^a$ и $(\nabla\vec{\omega})^a$—антисимметричные диады, $\vec{f}$—вектор массовой силы, $\vec{c}$—вектор массового момента.

К активным массовым силам, входящим в уравнения движения, необходимо присоединить архимедову подъемную силу, возникающую вследствие изменений объема, связанных с нагреванием.

В работе [4] показано, что массовая сила, обусловленная архимедовой подъемной силой, одинакова по порядку своей величины с силами инерции и трения лишь в том случае, если соотношение между числом Грасгофа $G_r = g\beta L^3(\Delta T)_0/\nu^2$ и числом Рейнольдса $R = V_0L/\nu$ равно $G_r \approx R^2$, где g—ускорение свободного падения, β—коэффициент кубического расширения, $(\Delta T)_0 = T_w - T_\infty$—разность температур тела(стенки) и жидкости, L—характерная длина, V_0—характерная скорость.

Такое соотношение между числом Грасгофа и числом Рейнольдса может существовать только при очень малых скоростях течения и значительных разностях температур.

Анализ системы уравнения (1.1) показывает, что в случае модели структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений, учитывающей внутренние степени свободы, массовая сила, обусловленная архимедовой подъемной силой, одинакова по порядку своей величины с силами трения и инерции, если $G_r \approx R^2$, то есть учет вращения частицы жидкости не приносит ничего нового.

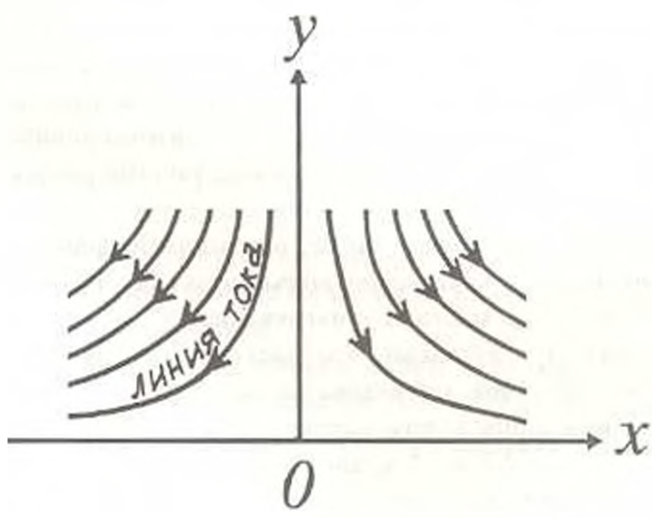
Таким образом, архимедову подъемную силу в уравнениях (1.1) можно учитывать при умеренно больших скоростях (при больших числах Рейнольдса) и при малых разностях температур [4]. Известно, что такие течения называются вынужденными конвективными течениями [4]. В случаях, когда архимедову подъемную силу в уравнении движения (1.1) можно отбросить, а вязкости считать не зависящими от температуры, распределение скоростей становится независимым от распределения температуры.

2. Плоскопараллельное течение в окрестности критической точки. Установившееся ламинарное плоскопараллельное течение несжимаемой несимметричной жидкости в окрестности критической точки (фиг.1) были рассмотрены в работах [5-8].

Для распределения u, v (u, v—проекции поступательной скорости точки соответственно на оси x, y) и ω (ω—проекция вектора угловой скорости вращения частицы на оси z), а также распределения давления имеем [5-8]

$$\left(1+\frac{\nu_r}{\nu}\right)f''' + ff'' - f'^2 + 1 = -2\frac{\nu_r}{\nu}\varphi' \tag{2.1}$$

$$\left(1+\frac{\nu_r}{\nu}\right)f'' + ff' - p_1' = -2\frac{\nu_r}{\nu}\varphi \tag{2.2}$$



Фиг.1

$$\frac{\gamma}{\nu}\varphi'' - \frac{4\nu_r}{Ia_0} + f\varphi' - f'\varphi - \frac{2\nu_r}{Ia_0}f'' = 0, \ \left(\gamma = \frac{c_a + c_d}{I}\right) \tag{2.3}$$

При получении решения (2.1)-(2.3) были введены безразмерные переменные

$$x^* = x\left(\frac{a_0}{\nu}\right)^{1/2}, \ y^* = y\left(\frac{a_0}{\nu}\right)^{1/2}, \ u^* = \frac{u}{(a_0\nu)^{1/2}}$$

$$v^* = \frac{v}{(a_0\nu)^{1/2}}, \quad \omega^* = \frac{\omega}{a_0}, \quad p^* = \frac{p}{\rho a_0 \nu} \tag{2.4}$$

а решение искалось в виде

$$u^* = x^* f'(y^*), \; v^* = -f(y^*), \; \omega^* = x^* \varphi(y^*)$$

$$p^* = p_0^* - [x^{*2} - p_1(y^*)] \tag{2.5}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по y^*; $f(y^*)$, $\varphi(y^*)$, $p_1(y^*)$—искомые функции y^*; p_0^*—безразмерное давление в критической точке (давление торможения), a_0—параметр с размерностью, обратный времени, характеризующий начальный поток.

Давление p в произвольной точке потенциального течения определяется из уравнения Бернулли и равно

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2}(U^2 + V^2) = \frac{\rho}{2} a_0^2 (x^2 + y^2)$$

где $U = a_0 x$, $V = -a_0 y$—составляющие скорости потенциального течения (без трения) несжимаемой жидкости в окрестности критической точки.

Граничными условиями, которым должны удовлетворять функции $f(y^*)$, $p_1(y^*)$, будут [4]

$$f(0) = f'(0) = p_1(0) = 0, \; f'(\infty) = 1 \tag{2.6}$$

Можно представить, что на стенке угловая скорость вращения частиц $\omega(0)$ равна нулю (условие прилипания), а на большем расстоянии от стенки, при $y = \infty$ будет $\omega(\infty) = 0$ [5,8,12,13].

Тогда

$$\varphi(0) = 0, \; \varphi(\infty) = 0 \tag{2.7}$$

Численные решения системы дифференциальных уравнений (2.1) и (2.3) при граничных условиях (2.6) и (2.7) для различных значений ν_r/ν, γ/ν, ν_r/Ia_0 выполнены на ЭВМ. Результаты этих решений приведены в работах [5,6,8].

Анализ указанных численных решений показывает, что учет локальных вращательных степеней свободы частицы среды (несимметричность тензора напряжений) приводит к увеличению толщины динамического пограничного слоя по сравнению с ньютоновскими жидкостями, причем, чем больше отношение ν_r/ν, тем больше толщина пограничного слоя [6,8].

3. Составление уравнения энергии. Из уравнения "первого закона термодинамики" для систем с несимметричным тензором напряжений имеем [8]

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p\nabla \cdot \bar{v} + \rho\Phi + \nabla \cdot (\chi \nabla T) \tag{3.1}$$

где

$$\bar{q} = -\chi \nabla T$$

Здесь ε—удельная внутренняя энергия, $\bar{q}$—вектор потока тепла через единицу площади в единицу времени за счет теплопроводности, χ—коэффициент теплопроводности, T—абсолютная температура, Φ—скорость диссипации механической энергии (на единицу массы жидкости), обусловленная вязкостью жидкости.

$$v^* = \frac{v}{(a_0\nu)^{1/2}}, \ \omega^* = \frac{\omega}{a_0}, \ p^* = \frac{p}{\rho a_0 \nu} \tag{2.4}$$

а решение искалось в виде

$$u^* = x^* f'(y^*), \ v^* = -f(y^*), \ \omega^* = x^* \varphi(y^*)$$

$$p^* = p_0^* - [x^{*2} - p_1(y^*)] \tag{2.5}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по y^*; $f(y^*)$, $\varphi(y^*)$, $p_1(y^*)$—искомые функции y^*; p_0^*—безразмерное давление в критической точке (давление торможения), a_0—параметр с размерностью, обратный времени, характеризующий начальный поток.

Давление p в произвольной точке потенциального течения определяется из уравнения Бернулли и равно

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2}(U^2 + V^2) = \frac{\rho}{2} a_0^2 (x^2 + y^2)$$

где $U = a_0 x$, $V = -a_0 y$—составляющие скорости потенциального течения (без трения) несжимаемой жидкости в окрестности критической точки.

Граничными условиями, которым должны удовлетворять функции $f(y^*)$, $p_1(y^*)$, будут [4]

$$f(0) = f'(0) = p_1(0) = 0, \ f'(\infty) = 1 \tag{2.6}$$

Можно представить, что на стенке угловая скорость вращения частиц $\omega(0)$ равна нулю (условие прилипания), а на большем расстоянии от стенки, при $y = \infty$ будет $\omega(\infty) = 0$ [5,8,12,13].

Тогда

$$\varphi(0) = 0, \ \varphi(\infty) = 0 \tag{2.7}$$

Численные решения системы дифференциальных уравнений (2.1) и (2.3) при граничных условиях (2.6) и (2.7) для различных значений ν_r/ν, γ/ν, ν_r/Ia_0 выполнены на ЭВМ. Результаты этих решений приведены в работах [5,6,8].

Анализ указанных численных решений показывает, что учет локальных вращательных степеней свободы частицы среды (несимметричность тензора напряжений) приводит к увеличению толщины динамического пограничного слоя по сравнению с ньютоновскими жидкостями, причем, чем больше отношение ν_r/ν, тем больше толщина пограничного слоя [6,8].

3. Составление уравнения энергии. Из уравнения "первого закона термодинамики" для систем с несимметричным тензором напряжений имеем [8]

$$\rho \frac{de}{dt} = -p\nabla \cdot \bar{v} + \rho\Phi + \nabla \cdot (\chi \nabla T) \tag{3.1}$$

где

$$\bar{q} = -\chi \nabla T$$

Здесь e—удельная внутренняя энергия, $\bar{q}$—вектор потока тепла через единицу площади в единицу времени за счет теплопроводности, χ—коэффициент теплопроводности, T—абсолютная температура, Φ—скорость диссипации механической энергии (на единицу массы жидкости), обусловленная вязкостью жидкости.

В том случае, когда скорость движения жидкости мала по сравнению со скоростью звука, то возникающие в результате движения изменения давления настолько малы, что вызываемыми ими изменениями термодинамических величин можно пренебречь. При определении производных от термодинамических величин в этом случае давление надо считать постоянным. Тогда будем иметь следующее термодинамическое соотношение [11]:

$$T\frac{ds}{dt} = c_p\frac{dT}{dt} \tag{3.2}$$

где s — удельная энтропия, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Используя уравнение сохранения энергии (3.1), соотношение (3.2) перепишем в виде

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\chi}{\rho c_p}\nabla^2 T + \frac{1}{c_p}\Phi \tag{3.3}$$

Здесь были использованы также термодинамическое соотношение Гиббса и уравнение неразрывности в форме [15]

$$T\frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + p\frac{d(1/\rho)}{dt}, \quad \rho\frac{d(1/\rho)}{dt} = \nabla\cdot\vec{v}$$

4. Распределение температуры в окрестности критической точки. Рассмотрим процесс теплообмена неограниченного стационарного плоского потока жидкости с постоянными физическими свойствами и пластины T_0 =const, расположенной нормально к направлению его скорости в окрестности критической точки.

Для плоского течения в окрестности критической точки уравнение энергии (3.3) (уравнение распределения температуры) примет вид

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \chi\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \rho\Phi \tag{4.1}$$

Пренебрегая теплом, возникающим вследствие трения ($\Phi = 0$), получим автомодельное решение для уравнения энергии (4.1).

Имея в виду (2.4), дополнительно введем безразмерную температуру в форме

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \tag{4.2}$$

где T_∞ — температура на большом расстоянии от тела.

Тогда уравнение энергии (4.1), без учета вязкой диссипации, в безразмерной форме запишется так:

$$u^*\frac{\partial\theta^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial\theta^*}{\partial y^*} = \frac{1}{P_r}\left(\frac{\partial^2\theta^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2\theta^*}{\partial y^{*2}}\right) \tag{4.3}$$

Здесь $P_r = \nu/a = \nu c_p\rho/\chi$ — число Прандтля.

Решение уравнения (4.3) будем искать в форме (2.5), дополнительно приняв

$$\theta^* = \theta^*(y^*) \tag{4.4}$$

Подставляя первое и второе выражения равенств (2.5) и (4.4) в уравнение (4.3), находим

$$\theta^{*''} + P_r f \theta^{*'} = 0 \qquad (4.5)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по y^*; $\theta^*(y^*)$—искомая функция y^*.

Граничными условиями для температуры будут

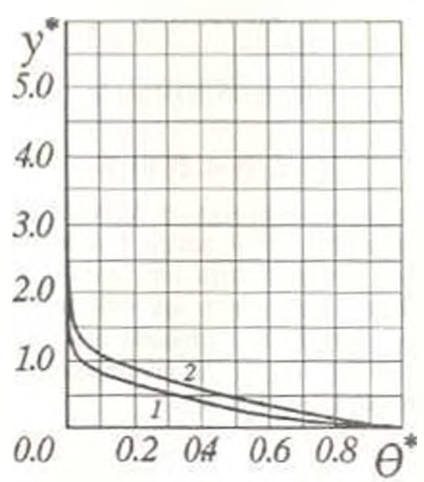
$$T = T_w \quad \text{при} \quad y = 0$$

$$T = T_\infty \quad \text{при} \quad y = \infty$$

Тогда граничными условиями для искомой функции $\theta^*(y^*)$ будут

$$\theta^* = 1 \quad \text{при} \quad y^* = 0$$

$$\theta^* = 0 \quad \text{при} \quad y^* = \infty \qquad (4.6)$$



Фиг.2

Численные решения системы дифференциальных уравнений (2.1), (2.3) и (4.5) при граничных условиях (2.6), (2.7) и (4.6) для различных значений ν_r/ν, γ/ν, ν_r/Ia_0, и числа P_r выполнены на ЭВМ.

Результаты этих решений для распределения безразмерной температуры проиллюстрированы на фиг.2. Кривая 1 построена для $P_r = 10$ ($-\theta^{*'} = 1,3390$) и $\nu_r/\nu = \gamma/\nu = \nu_r/Ia_0 = 0$ (классический профиль—ньютоновская жидкость); кривая 2 построена для $P_r = 10$ ($-\theta^{*'} = 1,0267$) и $\nu_r/\nu = 4,5$; $\gamma/\nu = 1,5$; $\nu_r/Ia_0 = 0,75$.

Как видно из фиг.2, учет микроструктуры жидкости увеличивает толщину теплового пограничного слоя, формируемого вблизи поверхности твердого тела, имеющей иную температуру, что изменяет интенсивность теплообмена между жидкостью и телом по сравнению с ньютоновскими жидкостями.

Таким образом, распределение температуры в пограничном слое несимметричной жидкости сильно отличается от соответствующей кривой для ньютоновской жидкости. Следовательно, учет локальных степеней свободы частицы среды (несимметричность тензора напряжения) приводит существенному изменению характера теплообмена стенкой и обтекающей ее жидкостью, что имеет важное практическое значение.

HEAT TRANCFER UNDER PLANE FLOWING OF NON-SYMMETRIC FLUID IN THE NEIGHBOURHOOD OF CRITICAL POINT

PETROSIAN L.G.

ՋԵՐՄԱՓՈԽԱՆԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ԿԵՏԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔՈՒՄ ՈՉ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՀԵՂՈՒԿԻ ՀԱՐԹ ՀՈՍՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Լ.Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկված է ջերմափոխանակությունը կրիտիկական կետի շրջակայքում կառուցվածքային ոչ սիմետրիկ անսեղմելի հեղուկի հաստատված լամինար հարթ շարժման դեպքում: Ցույց է տրված, որ հեղուկի միկրոկառուցվածքի հաշվառումը մեծացնում է այլ ջերմաստիճան ունեցող պինդ մարմնի մակերեսի շրջակայքում ձեւավորվող ջերմային սահմանային շերտի հաստությունը, որը փոխում է հեղուկի եւ մարմնի միջեւ ջերմափոխանակման ինտենսիվությունը՝ նյուտոնյան հեղուկների համեմատությամբ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. **Аэро Э.Л., Булыгин А.Н.** Гидромеханика жидких кристаллов. — Итоги науки и техники, серия Гидромеханика, М.: 1973, т.7, с.106-123.
2. **Peddison J.Jr., McNitt R.P.** Boundary-layer theory for a micropolar fluid.—Recent Advances in Engineering Science, 1968, v.5, pp.405-426.
3. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости.— М.:Мир, 1973, 760 с.
4. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя.—М.: Наука, 1974, 711 с.
5. **Петросян Л.Г.** К построению модели магнитной гидродинамики несимметричных жидкостей.—Прикл.Механика, 1976, т.12, но.11, с.103-109.
6. **Петросян Л.Г.** К вопросу течения структурных жидкостей в окрестности критической точки.—Уч.зап.ЕГУ, 1980, но.1, с.24-30.
7. **Petrosjan L.G.** Konstruktion eines Modeles der Magnetohydrodynamik asymmetrischer Flüssigkeiten. — Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebeite Mathematics Abstracts, Berlin, Heidelberg, New-York, 1978, Band 366, pp.462-464.
8. **Петросян Л.Г.** Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений.—Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984, 308с.

9. **Gorla R.S.R.** Thermal boundary layer of a micropolar fluid at a stagnation point.— Int.J.Eng.Sci., 1980, v.18, no.4, pp.611-617.

10. **Ramachandran P. Subhadra, Matur M.N.** Heat transfer in the stagnation point flow of a micropolar fluid.—Acta Mech., 1980, v.36, no.3-4, pp.247-261.

11. **Нгуен Ван Дьеп, Листров А.Т.** О неизотермической модели несимметричных жидкостей.—Изв.АН СССР. Механика жидкости и газа, 1967, no.5, с.132-136.

12. **Петросян Л.Г.** Об одной задаче пограничного слоя жидкости с моментными напряжениями.—Изв АН Арм ССР. Механика, 1973, т.26, no.3, с.47-57.

13. **Петросян Л.Г** Осесимметричное течение несимметричной несжимаемой вязкой электропроводной жидкости вблизи критической точки в магнитном поле.— Уч.записки ЕГУ, 1980, no.2, с.36-41.

14. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Гидродинамика.—М.: Наука, 1986, 736 с.

15. **Де Гроот С., Мазур П.** Неравновесная гидродинамика.—М.: Мир, 1964, 456 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 7. VII.1989