

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

Том 94 № 5

1993

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկ-
նածու (պատ. ֆաբրոտար), Է. Կ. ԱՅ-
ՐԻԿՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս,
Ա. Ա. ԻԱԼԱԼՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ լրբ.
անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադե-
միկոս Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ
ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ),
Գ. Ո. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ա-
կադեմիկոս, Գ. Մ. ՍԵՂՐԱԿՅԱՆ, Հայաս-
տանի ԳԱԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբա-
գիր), Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԻԼՅԱՆ, Հայաս-
տանի ԳԱԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՑԱ-
ՆԱՐՁՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.
АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв.
секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик
НАН Армении, В. О. КАЗАРЯН, ака-
демик НАН Армении (зам. отв. редак-
тора), Г. С. СААКЯН, академик
НАН Армении, Д. М. СЕДРАКЯН,
академик НАН Армении (отв. редак-
тор), А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. НАН
Армении, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН,
академик НАН Армении, В. В. ФА-
НАРДЖЯН, академик НАН Армении.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Մ Ա Թ Ե Մ Ա Տ Ի Կ Ա

Ս. Հ. Իսախանյան—Մոնոմորֆիզմի նորմալացումը ընդհանուր կատեգորիաներում	259
Ս. Ս. Իինսլյան—Համասեռ Գաուսյան պատահական դաշտի սպեկտրի գնահատականների ասիմպտոտիկ հատկությունները	264
Ա. Հ. Հովհաննիսյան—Հյուսիսային սկզբունքը, Պենլենի հատկությունները և ոչ գծային գիծերէնցրալ հավասարումները	270
Ա. Ս. Հասրաթյան, Գ. Վ. Սարգսյան—Հոկալ Օրեի տիպի պայմաններին քաղաքային գրառների որոշ համիլտոնյան հատկությունները	274
Վ. Հ. Միխայելյան—Խմբերի վերաբերյալ ընդհանուր ընդհանուր նույնությունների մասին	277

Կ Ի Ր Ա Ռ Ա Կ Ա Ն Մ Ա Թ Ե Մ Ա Տ Ի Կ Ա

Վ. Կ. Բրուսյան—Ոչ ստացիոնար համակարգերի համասեռ արձակումն ըստ ելքի հետադարձ կապերի կիրառման	281
Յու. Հ. Շուրուբյան—Ազատ մասնակի-կոմուտատիվ կիսախմբերի հետքերի զուգահեռացումը	289

Ե Ր Կ Ր Ա Ր Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Մ. Ա. Սարյան, Ա. Վ. Վարդանյան—Ալկալային-բազիտ-գերբազիտային դիատրեմայի հայտնաբերումը Վեդու օֆիոլիտային գոտում	294
--	-----

Ի Կ Ո Ւ Ո Ւ Կ Ի Ա

Ս. Կ. Մեծալեզ, Ի. Հ. Իևազյան—Մարգագետնային ֆիտոցենոզների էներգետիկ ներառվորությունների մասին	299
--	-----

Ֆ Ի Գ Ի Ո Ւ Ո Ւ Կ Ի Ա

Մ. Վ. Պապարյան, Վ. Յ. Վանցյան, Ս. Ա. Մարկոսյան, Ս. Վ. Ֆանաբջյան—Մոլդախոզուկի միզամորանի ութմիկ կենսաէլեկտրական հատկանիշները	303
Ն. Ն. Մելիսյան, Ա. Մ. Վիլիկոսյան—Կատվի կիսագնդերի մազանոթների վիճակի անալիզը ադրենալինի ազդեցության տակ	307
Բովանդակություն 94-րդ հատորի	312

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- С. Г. Далалян* — Нормализации мономорфизма в общих категориях 259
М. С. Гиновян — Асимптотические свойства оценок спектра однородного гауссовского поля 264
А. О. Оганесян — Принцип Гюйгенса, свойство Пенлеве и линейные дифференциальные уравнения 270
А. С. Асратян, Г. В. Саркисян — Некоторые гамильтоновы свойства графов с локальными условиями типа Оре 274
В. Г. Микаелян — О тождествах конечных расширений групп 277

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

- В. К. Брутян* — Однородное развязывание нестационарных систем применением обратных связей по выходу 281
Ю. Г. Шукурян — Распараллеливание следов свободных частично-коммутативных полугрупп 289

ГЕОЛОГИЯ

- М. А. Сатиан, А. В. Варданян* — Обнаружение щелочно-базит-ультрабазитовой диатремы в Вединской офиолитовой зоне 294

ЭКОЛОГИЯ

- Б. Х. Межунц, Р. Г. Ревизян* — Об энергетической возможности луговых фитоценозов 299

ФИЗИОЛОГИЯ

- К. В. Казарян, В. Ц. Ванцян, С. А. Маркоян, С. В. Фанарджян* — Ритмогенные биоэлектрические свойства мочеочника морской свинки 303
Н. Н. Мелкоян, А. М. Чилингарян — Микрорегиональный анализ состояния капилляров полушарий мозга кошек при воздействии адреналина 307
Содержание 94-го тома 312

CONTENTS

MATHEMATICS

- S. H. Dalalian* — On normalization of a monomorphism in general categories 259
- M. S. Glnovian* — Asymptotic properties of estimates of spectrum of Gaussian homogeneous field 264
- A. H. Hovhannissian* — Huygens' principle, Painleve property and nonlinear differential equations 270
- A. S. Asratian, G. S. Sarkisian* — Some hamiltonian properties of graphs with local Ore's type conditions 274
- V. H. Mkaelian* — About identity of finite extension of groups 277

APPLIED MATHEMATICS

- V. K. Brutian* — Similar decoupling of non-stationary systems with application of feedback 289
- Yu. H. Shoukourian* — Parallelization of traces in partially commutative semigroup 299

GEOLOGY

- M. A. Satian, A. V. Vardanian* — A find of alkaline-basite-ultrabasite diatreme in Vedy ophiolite zone and perspective of diamond searching 294

ECOLOGY

- B. Kh. Mezhunts, R. H. Revustan* — On energetics possibility of meadow phytocoenosis 299

PHYSIOLOGY

- K. V. Kazarian, V. Ts. Vantsian, S. A. Marcostan, C. V. Funarjian* — Rhythmogenous bioelectrical properties of the guinea-pig ureter 303
- N. N. Melnonian, A. N. Chilingarian* — The microregional analysis the brain capillars condition of the cat on the adrenalin influence 307
- Contents of volume 94 312

Сдано в набор 11. 03. 1994. Подписано к печати 2. 08. 1994

Формат 70×108^{1/16}. Бумага № 1, сыктывкарская. Высокая печать. Печ. лист 4,0

Усл. печ. л. 5,6. Усл. кр. отт. 5,6. Учет. изд. л. 4,21. Тираж 200. Заказ № 28

Цена 30 драма

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24 г. II эт. к. 1, тел. 27-36-95.

Издательство Национальной академии наук Армении,

375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24 г.

Типография Издательства Национальной академии наук Армении,

375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24.

УДК 593

С. Г. Далалян

Нормализации мономорфизма в общих категориях

(Представлено академиком НАН Армении Р. В. Амбарцумяном 9/VI 1993)

Вводится понятие нормализации мономорфизма в общих категориях, устанавливается условие его существования. Доказывается, что степень сепарабельности мономорфизма $A \rightarrow B$ в мономорфизме $A \rightarrow W$ равна индексу группы изотропии его нормализации $A \rightarrow C$ в W относительно группы изотропии мономорфизма $A \rightarrow W$.

В этой заметке все морфизмы мономорфны. Такие категории можно получить, если из произвольной категории отбросить все морфизмы, не являющиеся мономорфизмами. По поводу обозначений, определений общекатегорных понятий регулярности, нормальности, степени сепарабельности, группы изотропии и т. п., а также результатов категорной теории Галуа можно обратиться к (1, 2).

Предложение 1. Если морфизм $A \rightarrow C$ нормален в морфизме $A \rightarrow W$, то все элементы S^1 обратимы, т. е. «изотропная подгруппа S^1 совпадает с изотропной группой G^1 .

Для произвольного $\gamma \in S^1$ имеем $u = \chi W = \chi \gamma W$ при некотором $\sigma \in W$. По определению нормальности χ в W существует автоморфизм γ' такой, что $\gamma \sigma = \gamma' \sigma$. Отсюда $\gamma = \gamma'$ в силу мономорфности σ .

Далее предполагается, что все левые делители морфизма $A \rightarrow W$ регулярны в нем (стандартная ситуация, когда $A \rightarrow W$ — регулярное замыкание объекта A). В частности, u регулярно в себе. Тогда u также нормально в W , следовательно, $S^u = G^u$.

Нормальным замыканием или **нормализацией** морфизма $A \rightarrow B$ в морфизме $A \rightarrow W$ называется морфизм $A \rightarrow C$, нормальный в W , делящийся на φ и делящий всякий другой морфизм, удовлетворяющий этим двум условиям.

Предложение 2. В случае существования нормализация $A \rightarrow C$ морфизма $A \rightarrow B$ в $A \rightarrow W$ определяется однозначно с точностью до изоморфизма объекта C .

Пусть $A\chi' C$ также является нормализацией χ в u . Тогда $\chi' = \chi\sigma'$ и $\chi = \chi'\sigma$ при подходящих морфизмах $C\sigma' C'$ и $C'\sigma C$. Подставляя значение χ' из первого равенства во второе, получаем $\chi = \chi\sigma'\sigma$, откуда в силу нормальности χ согласно предложению 1 $\sigma'\sigma \in G^1$. Легко проверяется, что если композиция мономорфизмов обратима, то сами мономорфизмы обратимы.

Подобъект $C\omega W$ называется *инвариантным* относительно эндоморфизма $W\omega W$, если ω перестановочен с ω , т. е. $\omega\omega = \gamma\omega$ при подходящем эндоморфизме γ объекта C .

Предложение 3. *Морфизм $A\chi C$ нормален в AuW тогда и только тогда, когда существует G^u -инвариантный подобъект $C\omega W$ такой, что $u = \chi\omega$.*

По определению, если χ нормально в u , то морфизмы из множества частных $\chi \setminus u$ отличаются на автоморфизм объекта C , т. е. определяют единственный подобъект ω объекта W , удовлетворяющий равенству $u = \chi\omega$. Из свойства единственности такого подобъекта следует его инвариантность относительно всех автоморфизмов из G^u .

Обратно, пусть для χ существует G^u -инвариантный подобъект $\omega \in \chi \setminus u$. Тогда в силу регулярности любого левого делителя в u для произвольного $\omega' \in \chi \setminus u$ имеем $\omega' = \omega\omega$ с $\omega \in G^u$. Ввиду G^u -инвариантности ω при подходящем эндоморфизме $C\gamma C$ $\gamma\omega = \omega\omega$. Аналогично $\omega\omega^{-1} = \gamma'\omega$, причем $\gamma' = \gamma^{-1}$, ибо $\gamma'\gamma\omega = \omega$, $\gamma\gamma'\omega = \omega$.

Из доказанного в частности следует, что G^u -инвариантный подобъект $\omega \in \chi \setminus u$ определяется однозначно.

Из определения нормализации немедленно следует

Предложение 4. *Левый делитель $A\varphi B$ морфизма AuW имеет нормализацию в u тогда и только тогда, когда семейство всех G^u -инвариантных подобъектов $C'\omega' W$, ассоциированных с делящимися на φ и нормальными в u морфизмами $A\chi' C$, имеет наименьший элемент $C\omega W$. При этом нормализация φ в u представляется любым морфизмом $\chi \in u/\omega$.*

Теорема 1. *Для существования нормализации в морфизме AuW его левых делителей достаточно, чтобы в ординале (упорядоченном классе) $P_u(W)$ подобъектов объекта W , содержащих подобъект u , были определены пересечения произвольных семейств G^u -инвариантных подобъектов.*

Поскольку семейство G^u -инвариантных подобъектов из $P_u(W)$ не пусто (ибо содержит тотальный подобъект 1_W), доказательство теоремы 1 сводится к предложению 4 при условии, что

(i) для данного морфизма $A\varphi B$ пересечение $C\omega W$ всех G^u -инвариантных подобъектов $C_i\omega_i W$, левые частные $\chi_i \in u/\omega_i$, по которым делятся на φ , само G^u -инвариантно;

(ii) $\chi \in u/\omega$ делится на φ .

G^u -инвариантность ω следует из нижеприводимого общего утверждения.

Предложение 5. Семейство $P^G(W)$ подобъектов объекта W , инвариантных относительно действия заданной группы G автоморфизмов объекта W , замкнуто относительно пересечений и объединений подобъектов.

Справедливость предложения 5 очевидна, если учесть, что при изотонном преобразовании класса подобъектов $P(W)$ объекта W

$$P(W) \xrightarrow{\omega} P(W), \quad \omega \circ \omega_1 = \omega \circ \omega_2,$$

ассоциированном с автоморфизмом $W \rightarrow W$, образы пересечения и объединения подобъектов совпадают соответственно с пересечением и объединением их образов. Этот факт легко устанавливается с использованием отображения ω^{-1} .

Проверим, что χ делится на φ .

Для произвольного $v \in \varphi \setminus u$ и любого i имеем $\varphi \varphi_i \omega_i = \varphi v$. В силу регулярности φ в u найдется автоморфизм $\omega_i \in G^u$ такой, что $v = \varphi_i \omega_i \omega_i$. Подставляя это значение v в предыдущее равенство и используя нормальность φ_i в u , найдем автоморфизм γ_i , удовлетворяющий равенству $\gamma_i \omega_i = \omega_i \omega_i$. Значит $v = \varphi_i \gamma_i \omega_i$, т. е. $v \leq \omega_i$ при всех i . Следовательно, $v \leq \omega$ и $v = \varphi \omega$. Из равенств $\chi \omega = u = \varphi v = \varphi \varphi \omega$ заключаем, что $\chi = \varphi \varphi$.

Согласно предложению 5 в случае существования пересечений в ординале $P_u(W)$ его подкласс $P_u^G(W)$ при $G = G^u$ образует систему замыканий и нормализация любого левого делителя $A \varphi B$ морфизма $A u W$ в u задается как $\chi \in u/\omega$, где ω — замыкание произвольного подобъекта $v \in \varphi \setminus u$ в указанной системе замыканий.

Подобъекты $C \omega W$ и $C \omega' W$ называются сопряженными, если $\omega' = \omega \omega$, $\omega \in \text{Aut } W$, и G -сопряженными, если ω принадлежит подгруппе G группы автоморфизмов $\text{Aut } W$.

Предложение 6. Если кратный $A \varphi B$ морфизм $A \chi C$ нормален в $A u W$, то любой морфизм $v \in \varphi \setminus u$ делится на каждый морфизм $\omega \in \chi \setminus u$.

Пусть $\psi \in \varphi \setminus \chi$. Тогда $u = \varphi v = \varphi \psi \omega$ и по регулярности φ в u имеем $v = \psi \omega \omega$ с $\omega \in G^u$. В силу нормальности χ в u существует автоморфизм γ такой, что $\omega \omega = \gamma \omega$. Поэтому $v = \psi \gamma \omega$.

Следствие. Подобъект ω содержит объединение всех подобъектов $v \in \varphi \setminus u$, которые в силу регулярности φ в u сопряжены друг к другу.

Предложение 7. Объединение ω всех подобъектов $v \in \varphi \setminus u$ определяет морфизмы $\chi \in u/\omega$, нормальные в u .

Согласно предложению 3 достаточно показать, что подобъект w G^u -инвариантен. Так как все подобъекты $v \in \varphi \setminus u$ G^u -сопряжены, $w = \bigcup_{\omega' \in G^u} v\omega'$ и для любого $\omega \in G^u$, имеем

$$w\omega_* = \bigcup_{\omega' \in G^u} (v\omega')\omega_* = w.$$

Теорема 2. *Нормализация в морфизме AuW его произвольного левого делителя существует, если $P_u(W)$ — полная решетка относительно объединений.*

К соотношению теорем 1 и 2 заметим, что поскольку ординал $P_u(W)$ имеет наименьший элемент u и наибольший элемент 1_W , следующие условия для него эквивалентны:

- i) $P_u(W)$ — полная решетка по пересечениям;
- ii) $P_u(W)$ — полная решетка по объединениям;
- iii) $P_u(W)$ — полная решетка.

В случае, когда ординал $P_u(W)$ — конечный (в частности, если конечна изотропная группа G^u), слово „полная“ не несет нагрузки. Укажем одно применение нормализаций.

Теорема 3. *Если $A\gamma C$ — нормализация $A\varphi B$ в AuW и ψ — произвольный элемент $\varphi \setminus \gamma$, то степень сепарабельности морфизма φ в u равна индексу изотропной группы G^ψ в изотропной группе G^γ : $\text{sep}_u \varphi = (G^\gamma : G^\psi)$.*

По определению степень сепарабельности φ в u равна мощности множества левых частных $\varphi \setminus u$. Зафиксируем некоторый морфизм $w \in \varphi \setminus u$. Ввиду регулярности φ в u для любого $v \in \varphi \setminus u$ существует автоморфизм $\omega \in G^u$ такой, что $v = \varphi w\omega$. Морфизм w перестановочен с ω в силу нормальности φ в u , так что $w\omega = \gamma w$ с $\gamma \in \text{Aut } C$. Поэтому множество $\varphi \setminus u$ исчерпывается морфизмами $\psi\gamma w$, где вследствие мономорфности w $\gamma \in G^\gamma$. Для того, чтобы указанные композиции были попарно различны, необходимо и достаточно, чтобы γ пробегало множество левых классов смежности $G^\psi \setminus G^\gamma$.

Следствие. *Степень сепарабельности нормального морфизма равна мощности его изотропной группы.*

Конструкция нормализации полезна и в двойственной ситуации, когда вместо мономорфизмов рассматриваются эпиморфизмы категории.

Ереванский государственный университет

Մոնոմորֆիզմի նորմալացումը բնդհանուր կատեգորիաներում

Ընդհանուր կատեգորիաներում ներմուծվում է մոնոմորֆիզմի նորմալացման հասկացությունը, ստացվում են նրա գոյության բավարար պայմանները: Ապացուցվում է, որ $A \in B$ մոնոմորֆիզմի սեսյարաբելության աստիճանը $A \in W$ մոնոմորֆիզմում հավասար է $\varphi \in \varphi \setminus \setminus$ մոնոմորֆիզմի իզոտրոպ խմբի ինդեքսին φ -ի $A \in C$ նորմալացման իզոտրոպ խմբում:

ЛИТЕРАТУРА - ՄԱՇԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 С. Г. Далалян, Изв. АН Армении. Математика, т. 28, № 4 (1992). 2 С. Г. Далалян, Изв. АН Армении. Математика, т. 28, № 6 (1992).

УДК 519.22

М. С. Гиновян

Асимптотические свойства оценок спектра
 однородного гауссовского поля

(Представлено академиком НАН Армении Р. В. Амбарцумяном 10/VIII 1993)

1. *Введение.* Пусть $X(u)$, $u = (u_1, \dots, u_n) \in U$ — однородное гауссовское случайное поле со средним нуль и спектральной плотностью (с. п.) $f(\lambda) = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, т. е.

$$EX(u) = 0$$

$$EX(u)X(v) = r(u-v) = \int e^{i(u-v, \lambda)} f(\lambda) d\lambda, \quad u, v \in U. \quad (1)$$

Здесь и далее $u-v = (u_1 - v_1, \dots, u_n - v_n)$, $(u, \lambda) = u_1 \lambda_1 + \dots + u_n \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots$, $r(u)$ — корреляционная функция поля $X(u)$.

Мы будем рассматривать сразу два случая: случай дискретного параметра (д. п.), $U = \{u: u = (u_1, \dots, u_n), u_k = 0, \pm 1, \dots, k = \overline{1, n}\}$ и случай непрерывного параметра (н. п.), $U = R_n$.

В случае н. п. будем дополнительно предполагать, что поле $X(u)$, $u \in U$, измеримо и среднеквадратически непрерывно. Интегрирование в (1), как и во всех интегралах с опущенными пределами, ведется по множеству $Q_n = [-\pi, \pi]^n = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), -\pi \leq \lambda_k < \pi, k = \overline{1, n}\}$ в случае д. п. и по R_n в случае н. п.

Спектр поля $X(u)$ характеризуется линейным функционалом $L(f)$ (см. (1.2)):

$$L(f) = \int \varphi(\lambda) f(\lambda) d\lambda \quad (2)$$

где $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ некоторая интегрируемая функция.

Заметим, что если $\varphi(\lambda)$ является индикатором n -мерного интервала $[-\pi, \mu_1] \times \dots \times [-\pi, \mu_n]$, то $L(f) = F(\mu)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $F(\mu)$ — спектральная функция поля $X(u)$, а если $\varphi(\lambda) = \exp[i(\lambda, u)]$, то $L(f) = r(u)$.

Известной оценкой для функционала $L(f)$ является статистика L_T (см. ((2.3))):

$$L_T = \int \varphi(\lambda) I_T(\lambda) d\lambda \quad (3)$$

где $I_T(\lambda)$ — периодограмма, построенная по выборке $\{X(u), 0 < u_k < T_k, k = \overline{1, n}\}$ объема $T = (T_1, \dots, T_n)$, т. е.

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n |T|} \left| \sum_{u_1=1}^{T_1} \dots \sum_{u_n=1}^{T_n} X(u) e^{-i(\lambda, u)} \right|^2 \quad \text{в случае д. п.}$$

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n |T|} \left| \int_0^{T_1} \dots \int_0^{T_n} X(u) e^{-i(\lambda, u)} \right|^2 \quad \text{в случае н. п.,}$$

$$|T| = T_1 \dots T_n.$$

В данной заметке исследуются асимптотические (при неограниченно возрастающем объеме выборки) свойства статистики L_T . Указываются достаточные условия на функции $f(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$, при которых: 1) L_T является асимптотически несмещенной и среднеквадратически состоятельной оценкой для функционала $L(f)$ и 2) L_T имеет асимптотически нормальное распределение. Выясняется также скорость сходимости к нулю смещения $K_T = E(L_T) - L(f)$.

Заметим, что все указанные свойства оценки L_T выводятся из приводимой ниже теоремы 1 об асимптотическом поведении следа произведения теплицевых операторов, являющейся многомерным аналогом теоремы Ф. Аврама (4).

Заметим также, что статистика L_T допускает спектральное представление (см. (3.6)):

$$L_T = \frac{1}{(2\pi)^n |T|} \iiint G_T(\lambda, u) G_T(u, \mu) \varphi(u) du Z(d\lambda) Z(d\mu), \quad (4)$$

где

$$G_T(\lambda, \mu) = \prod_{k=1}^n G_{T_k}(\lambda_k, \mu_k), \quad (5)$$

$$G_{T_k}(\lambda_k, \mu_k) = \sum_{v=1}^{T_k} e^{iv(\lambda_k - \mu_k)} \quad \text{в случае д. п.} \quad (6)$$

$$G_{T_k}(\lambda_k, \mu_k) = \int_0^{T_k} e^{iu(\lambda_k - \mu_k)} du \quad \text{в случае н. п.} \quad (7)$$

$Z(d\lambda)$ — стохастическая мера, участвующая в спектральном представлении поля $X(u)$:

$$X(u) = \int e^{i(\lambda, u)} Z(d\lambda).$$

2. *Теплицевы операторы.* Пусть

$$L_p = L_p(J_n) = \left\{ f: \|f\|_p = \left(\int_{J_n} |f(\lambda)|^p d\lambda \right)^{1/p} < \infty \right\} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$L_\infty = L_\infty(J_n) = \{ f: \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f(\lambda)| < \infty \}.$$

Обозначим через P_T интегральный оператор в $L_2(Q_n)$ с ядром (5), (6), и через \bar{P}_T — интегральный оператор в $L_2(R_n)$ с ядром (5), (7). Заметим, что P_T является ортопроектором в $L_2(Q_n)$ на подпространство тригонометрических полиномов от n -переменных степени $\leq T = (T_1, \dots, T_n)$, а \bar{P}_T — ортопроектором в $L_2(R_n)$ на подпространство целых функций от n -переменных экспоненциального типа степени $\leq T = (T_1, \dots, T_n)$, сужение которых на R_n принадлежит $L_p(R_n)$.

Для функций $\psi(\lambda) \in L_1(Q_n)$ и $\bar{\psi}(\lambda) \in L_1(R_n)$ определим усеченные теплицевы операторы:

$$A_T(\psi) = P_T \psi P_T \quad \text{и} \quad \bar{A}_T(\bar{\psi}) = \bar{P}_T \bar{\psi} \bar{P}_T.$$

В случае д. п. имеет место следующий n -мерный аналог теоремы Ф. Аврама (*).

Теорема 1. Пусть $\psi_k(\lambda) \in L_{p_k}(Q_n)$, $1 \leq p_k < \infty$, $k = \overline{1, m}$.

Тогда

а) если $\nu = \sum_{k=1}^m p_k^{-1} \leq 1$, то

$$\lim_{|T| \rightarrow \infty} \frac{1}{|T|} \operatorname{tr} \left[\prod_{k=1}^m A_T(\psi_k) \right] = (2\pi)^{n(m-1)} \int_{Q_n} \prod_{k=1}^m \psi_k(\lambda) d\lambda;$$

б) если $\alpha > 1$ и $\alpha \geq \nu$, то

$$\lim_{|T| \rightarrow \infty} \frac{1}{|T|^\alpha} \operatorname{tr} \left[\prod_{k=1}^m A_T(\psi_k) \right] = 0.$$

Здесь и далее $\operatorname{tr}[A]$ обозначает след оператора A , а запись $|T| \rightarrow \infty$ означает, что $T_k \rightarrow \infty$ для всех $k = \overline{1, n}$.

В случае н. п. имеет место аналогичный результат с заменой $A_T(\psi)$ и Q_n на $\bar{A}_T(\bar{\psi})$ и R_n соответственно. Далее также мы приводим формулировки результатов только в случае д. п., в случае н. п. верны аналогичные результаты с соответствующими изменениями формулировок.

Основным аппаратом, сводящим исследование асимптотических свойств статистики L_T к теореме 1, является следующая хорошо известная формула: (см. (*, 6)):

$$\chi_s = 2^{s-1} (s-1)! \frac{\text{tr} [A_T(f) A_T(\varphi)]^s}{|T|^{s^2}}, \quad (8)$$

где $\chi_s = \text{sim}_s(L_T)$ обозначает s -й семивариант величины L_T .

3. Асимптотические свойства оценки L_T . Из теоремы 1 с учетом формулы (8) легко выводится следующая

Теорема 2. Пусть $f(\lambda) \in L_{p_1}$, $\varphi(\lambda) \in L_{p_2}$, $1 \leq p_1, p_2 < \infty$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1$. Тогда L_T является асимптотически несмещенной оценкой для $L(f)$, т. е.

$$\lim_{|T| \rightarrow \infty} E(L_T) = L(f) \quad (9)$$

Заметим, что теорема 2 ранее другим методом была установлена в (1, 2).

Накладывая дополнительные ограничения на функции $f(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ можно оценить скорость сходимости в (9). Приведем один результат такого характера. Будем говорить, что функция $\psi(\lambda) = \psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ принадлежит классу Лишица $\text{Lip}(a_1, \dots, a_n; p)$, ($0 < a_k \leq 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $k = \overline{1, n}$), если

$$\omega_p(\psi; \delta_1, \dots, \delta_n) \leq C \cdot \sum_{k=1}^n \delta_k^{a_k}, \quad \delta_k > 0,$$

где

$$\omega_p(\psi; \delta_1, \dots, \delta_n) = \sup_{\substack{|h_k| < \delta_k \\ k = \overline{1, n}}} |\psi(\cdot + h) - \psi(\cdot)|_p$$

модуль непрерывности функции $\psi(\lambda)$ в L_p .

Теорема 3. Пусть $f(\lambda) \in \text{Lip}(a_1, \dots, a_n; p)$, $\varphi(\lambda) \in \text{Lip}(b_1, \dots, b_n; q)$, $1 \leq p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $0 < a_j, b_j \leq 1$, $j = \overline{1, n}$.

Тогда

$$|K_T| \leq \begin{cases} C \cdot \sum_{k=1}^n T_k^{-(a_k + b_k)}, & \text{если } a_k + b_k < 1 \\ C \cdot \sum_{k=1}^n T_k^{-1} \ln T_k, & \text{если } a_k + b_k = 1 \end{cases}$$

где $K_T = E(L_T) - L(f)$.

Следующая теорема дает представление об асимптотике дисперсии оценки L_T .

Теорема 4. Пусть $f(\lambda) \in L_{p_1}$, $\varphi(\lambda) \in L_{p_2}$, $1 \leq p_1, p_2 < \infty$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < \frac{1}{2}$. Тогда

$$\lim_{|T| \rightarrow \infty} |T| E(L_T - E(L_T))^2 = (2\pi)^n \int f^2(\lambda) \varphi^2(\lambda) d\lambda$$

Из теорем 2 и 4 получаем:

Теорема 5. В условиях теорем 4 L_T является среднеквадратически состоятельной оценкой для $L(f)$, т. е.

$$\lim_{|T| \rightarrow \infty} E(L_T - L(f))^2 = 0.$$

Теорема 6. В условиях теоремы 4 статистика L_T имеет асимптотически $N(0, \sigma^2)$ нормальное распределение, т. е.

$$\sqrt{|T|} (L_T - E(L_T)) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2), \quad |T| \rightarrow \infty,$$

где

$$\sigma^2 = (2\pi)^2 \int f^2(\lambda) \varphi^2(\lambda) d\lambda.$$

Привлекая известные теоремы вложения классов Липшица, Бессова и Никольского в класс L_p (см. (8, 9)), можно получить «локальные» достаточные условия для асимптотических свойств оценки L_T . Приведем соответствующий результат только для классов Липшица $Lip(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \rho)$.

Теорема 7. Если в условиях теоремы 3 $\bar{\alpha} + \bar{\beta} > \frac{1}{2}$, где

$$\bar{\alpha} = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^{-1} \right)^{-1}, \quad \bar{\beta} = \left(\sum_{k=1}^n \beta_k^{-1} \right)^{-1},$$

то утверждения теорем 4-6 остаются справедливыми.

Замечание. Для случайных процессов ($n=1$) в (5-7) было установлено, что при условии $\bar{\alpha} + \bar{\beta} > \frac{1}{2}$ статистика L_T является асимптотически нормальной оценкой для функционала $L(f)$, т. е. $\sqrt{|T|} (L_T - L(f)) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$, $|T| \rightarrow \infty$. Для случайных полей аналогичное утверждение не верно, так как в этом случае случайные величины $\sqrt{|T|} (L_T - E(L_T))$ и $\sqrt{|T|} (L_T - L(f))$ имеют различные асимптотические распределения.

Институт математики

Национальной академии наук Армении

Մ. Ս. ԳԻՆՈՎՅԱՆ

Համասեռ Գաուսյան պատահական դաշտի սպեկտրի գնահատականների ասիմպտոտիկ հատկությունները

Դիցուք $X(u)$, $u = (u_1, \dots, u_n) \in U$, դրսյական միջինով և $f(\lambda) = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ սպեկտրալ խտությունը համասեռ Գաուսյան պատահական դաշտ է: Այս դաշտի սպեկտրը բնութագրվում է $L(f) = \int \varphi(\lambda) f(\lambda) d\lambda$

գծային ֆունկցիոնալով, որտեղ $\varphi(t) = \varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, ինչ-որ հանրագումարի ֆունկցիա է: Հոդվածում, որպես $L(f)$ ֆունկցիոնալի գնահատական, դիտարկվում է $L_T = \int \varphi(t) I_T(t) d\lambda$ ստատիստիկան, որտեղ $I_T(t)$ -ն $X(u)$ դաշտի պերիոդապրաման է: Հետազոտվում է L_T -ի ստատիստիկ հատկությունները: Բերված են բավարար պայմաններ, որոնց զեպքում L_T -ն հանդիսանում է ստատիստիկ անշեղծի և միջին քառակուսային իմաստով ունակ գնահատական: $L(f)$ -ի համար, հետազոտվում է նաև $K_T = E(L_T) - L(f)$ շեղման զրոյին ձգտելու արագությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ

- ¹ P. Бенткус и др., Литовский мат. сб., т. 13, № 1 (1974). ² P. Бенткус и др., Литовский мат. сб., т. 14, № 3 (1974). ³ И. А. Ибрагимов, Теория вероятностей и ее применения т. 8, № 4 (1963). ⁴ F. Augat, Probability Theory and Related Fields, v. 79, № 1 (1988). ⁵ М. С. Гиновян, Теория вероятностей и ее применения, т. 33, № 2 (1988). ⁶ М. С. Гиновян, Теория вероятностей и ее применения, т. 33, № 4, (1988). ⁷ М. С. Гиновян, ДАН АрмССР, т. 89, № 1 (1989). ⁸ В. Н. Коляда, Мат. сб., т. 127 (109), № 3 (1985): ⁹ С. М. Никольский, Приближение функции многих переменных и теоремы вложения, Наука, М., 1977.

УДК 517.94

А. О. Оганесян

Принцип Гюйгенса, свойство Пенлеве и линейные дифференциальные уравнения

(Представлено чл.-корр. НАН Армении А. Б. Нерсисяном 12/VIII 1993)

1^o. Задача описания всех линейных гиперболических уравнений, удовлетворяющих принципу Гюйгенса, известна как проблема Адамара. Сформулированная еще в 20-х годах нашего столетия, эта проблема, несмотря на усилия многих известных математиков (исторический обзор см. (1, 2)), до сих пор полностью не решена. Первый значительный вклад в решение этой проблемы внес сам Адамар (3), который описал элементарное (фундаментальное) решение задачи Коши для гиперболического уравнения

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{l=1}^n b^l(x) u_{x_l} + c(x) u = 0 \quad (1)$$

$$u|_S = f, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_S = g. \quad (2)$$

Здесь S — пространственно-подобное многообразие размерности $(n-1)$, а $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ — производная в направлении нормали ν к S .

Определение 1. Уравнение (1) удовлетворяет принципу Гюйгенса, если значение решения задачи Коши (1), (2) с произвольными начальными данными в каждой точке x зависит от начальных данных только на пересечении многообразия S с характеристическим конусом с вершиной в точке x_0 .

Элементарное решение уравнения (1), согласно теории Адамара, — это решение, имеющее особенность вдоль некоторой (действительной или мнимой) поверхности. Ответ на вопрос, какой должна быть эта поверхность, дает важная теорема Леру и Делассю (см. (3)): всякая сингулярная поверхность, представляющая решение линейного уравнения (1) с гладкими коэффициентами, должна быть характеристической поверхностью.

Адамар выделил среди этих поверхностей характеристический конд

$$\Gamma(x, x_0) = 0, \quad (3)$$

с вершиной в точке x_0 , где $\Gamma(x, x_0)$ — квадрат геодезического расстояния между точками x и x_0 в n -мерном римановом пространстве с метрикой, порожденной коэффициентами $g^{ij}(x)$. Если искать элементарное решение уравнения (1) в виде

$$u = \Gamma^p \sum_{\nu=0}^{\infty} U_{\nu} \Gamma^{\nu} \quad (4)$$

с гладкими коэффициентами U_{ν} ($\nu = 1, 2, \dots$) и $U_0 = 1$, то непосредственные вычисления дают

$$p = -\frac{n-2}{2}; \quad (5)$$

$$\left(\nu - \frac{n-2}{2}\right) U_{\nu} = -\frac{U_0}{4s^{\nu}} \int_0^s \frac{\tau^{\nu-1} L[U_{\nu-1}]}{U_0} d\tau. \quad (6)$$

Здесь интегрирование ведется вдоль геодезической кривой, соединяющей x_0 с x . При этом параметр s выбирается так, что точке x_0 соответствует значение $s = 0$.

Из формул (5), (6) следует, что для нечетных n p — не целое число и все U_{ν} однозначно определяются. Для четных n p — целое число и $U_{\frac{n-2}{2}}$ определяется только при выполнении условия согласования*

$$L\left[U_{\frac{n-2}{2}}\right] = 0. \quad (7)$$

В случае же, когда условие (7) не выполняется, в элементарном решении появляется логарифмическая особенность

$$u = \Gamma^{-\frac{n-2}{2}} \sum_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}} U_{\nu} \Gamma^{\nu} - \ln \Gamma \sum_{\nu=\frac{n-1}{2}}^{\infty} U_{\nu} \Gamma^{\nu - \frac{n-2}{2}}. \quad (8)$$

Пользуясь представлениями решений задачи Коши через коэффициенты элементарных решений (4), (8), Адамар доказал, что для нечетных n нет гюйгенсовых уравнений⁽³⁾. Если же n — четное, то отсутствие логарифмического члена в элементарном решении (8) (т. е. выполнение условия (7)) эквивалентно выполнимости принципа Гюйгенса для уравнения, формально сопряженного к (1). Это утверждение принято называть критерием Адамара.

2°. Возникает естественный вопрос: какое свойство нелинейных уравнений является обобщением понятия гюйгенсовости? Для ответа на этот вопрос дадим, следуя⁽⁴⁾, определение свойства Пенлеве.

Пусть

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (9)$$

является $(n - 1)$ -мерной поверхностью.

Определение 2. Дифференциальное уравнение с частными производными (не обязательно линейное) обладает свойством Пенлеве, если для произвольного решения, представимого в окрестности многообразия (9) в виде

$$u = \Phi^p \sum_{i=0}^{\infty} U_i \Phi^i$$

с гладкими коэффициентами U_i , p является целым числом.

Из определения 2 следует, что при наличии свойства Пенлеве особенность решения должна быть полюсом. Сравнение с вышележащим приводит к следующему результату.

Теорема 1. Уравнение (1) обладает свойством Пенлеве тогда и только тогда, когда формально сопряженное к нему уравнение удовлетворяет принципу Гюйгенса.

Заметим, что в качестве поверхности (9) для уравнения (1) может служить только характеристическая поверхность. При этом достаточно ограничиться рассмотрением только характеристических коноидов, так как любая характеристическая поверхность «соткана» из би-характеристик, каждую из которых можно «вложить» в соответствующий коноид. Поэтому наличие на такой поверхности отличных от полюсов особенностей решений приведет к появлению таких же особенностей на коноидах.

Тест Пенлеве играет большую роль в теории нелинейных интегрируемых методом обратной задачи рассеяния уравнений. Теорема 1 указывает на тесную связь принципа Гюйгенса с такими уравнениями. К такому выводу приводит и анализ результатов работ (2), (3) и (6).

В (2, 3) рассматриваются уравнения вида

$$u_{tt} - u_{xx} - \sum_{i=2}^{n-2} a_i(x-t) u_{y_i y_i} + a_1(x-t) b(y_1) u = 0. \quad (10)$$

Строятся функции $b(y_1) = b(y_1, \gamma_1, \dots, \gamma_l)$, зависящие от y_1 и произвольных постоянных $\gamma_1, \dots, \gamma_l$, для которых уравнение (10) удовлетворяет принципу Гюйгенса. Эти функции оказываются рациональными решениями уравнений в иерархии (7) уравнений Кортевега—де Фриза.

$$u_k = X_k(u) \quad k = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где операторы X_k записаны в переменной y_1 .

Теорема 2. Пусть уравнение (10) удовлетворяет принципу Гюйгенса. Тогда существуют рациональные функции $\psi_k(\gamma_1, \dots, \gamma_l)$ такие, что $b(y_1, \gamma_1, \dots, \gamma_l)$ является решением уравнений (11), где

$$\frac{\partial}{\partial t_k} = \sum_{j=1}^n \gamma_{kj} \frac{\partial}{\partial \tau_j}$$

Дальнейший анализ критерия Адамара показывает, что теорема 2 дает необходимое, но отнюдь не достаточное условие гюйгенсовости уравнения (10).

Сравнение с результатами работы (7) показывает тесную связь принципа Гюйгенса и биспектральной проблемы.

Межвузовский центр по прикладным
проблемам математики

Ա. Ն. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Հյուլգեներսի սկզբունքը, Պենլեի Բատկուրյունը և ոչ գծային
դիֆերենցիալ հավասարումները

Հոդվածում ուսումնասիրվում է Հյուլգենսի սկզբունքի կապը Պենլեի հատկության հետ երկրորդ կարգի հիպերբոլական տիպի հավասարումների համար: Ցույց է տրվում, որ Պենլեի հատկությունը նշված դասի հավասարման համար համարժեք է Հյուլգենսի սկզբունքին համալուծ հավասարման համար: Նկարագրված է Հյուլգենսի սկզբունքի և Կորտեկեզ դե Ֆրիզի հավասարումների հերթադիտման միջև տեղի ունեցող կապը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 P. Günther, Huygens' Principle and Hyperbolic Equations. Academic Press, 1988. 2 Н. Х. Ибрагимов, А. О. Оганесян, УМН, т. 46, № 3 (1991). 3 Ж. Адамар. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. Наука, М., 1978. 4 J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevale, J. Math. Phys., v. 24, № 3 (1983). 5 А. О. Оганесян. Изв. АН АрмССР. Математика, т. 25, № 5 (1990). 6 M. Adler, J. Moser, Comm. Math. Phys., v. 61, p. 1-30 (1978). 7 J. P. Zubelli, F. Magli, Comm. Math. Phys., v. 141, p. 329-351 (1991).



УДК 519.1

А. С. Асратян, Г. В. Саркисян

Некоторые гамильтоновы свойства графов
с локальными условиями типа Оре

(Представлено чл.-корр. НАН Армении Ю. Г. Шукурьяном 14/VIII 1993)

Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Все понятия, не определенные в работе, можно найти в (1).

Для графа $G = (V, E)$ введем обозначения: $d(x)$ — степень вершины x , $d(x, y)$ — расстояние между вершинами x, y , $N(x) = \{y \in V / xy \in E\}$. Простой цикл длины k обозначается через C_k . Цикл C_3 называется треугольником. Гамильтоновым циклом графа G называется простой цикл, содержащий все вершины графа G . Граф, имеющий гамильтонов цикл, называется гамильтоновым. Граф $G = (V, E)$ называется панциклическим, если G содержит C_k для каждого k , $3 \leq k \leq |V|$. Цепь, соединяющая две различные вершины x и y графа G , называется (x, y) -цепью. Простая (x, y) -цепь называется гамильтоновой, если включает все вершины G . Граф $G = (V, E)$ называется пансвязным, если для любой пары различных вершин x, y существует простая (x, y) -цепь длины k для любого k , $d(x, y) < k < |V| - 1$.

Граф $G = (V, E)$ называется гамильтоново связным, если для любой пары различных вершин x, y существует гамильтоновая (x, y) -цепь.

Для графов H_1 и H_2 , через $H_1 \subseteq H_2$, будет обозначаться тот факт, что H_1 и H_2 имеют одинаковые множества вершин и H_1 является подграфом H_2 .

Следующая теорема является классической в теории гамильтоновых графов.

Теорема 1 (2). Пусть $G = (V, E)$ — граф с $|V| \geq 3$, где $d(u) + d(v) \geq |V|$ для каждой пары несмежных вершин u, v . Тогда G гамильтонов.

В работе (1) получено обобщение теоремы 1.

Теорема 2 (3). Пусть $G = (V, E)$ — связный граф с $|V| \geq 3$, где $d(u) + d(v) \geq |N(u) \cup N(v) \cup N(w)|$ для каждой тройки вершин u, v, w с $d(u, v) = 2$ и $w \in N(u) \cap N(v)$. Тогда G — гамильтонов.

Обозначим через L_0 множество графов, удовлетворяющих условиям теоремы 2.

В работах (4,5) было доказано следующее:

Теорема 3 (4). Граф $G = (V, E)$ из множества L_0 является панциклическим за исключением случая, когда $|V| = 2n$ и $G = K_{n,n}$ для $n \geq 2$.

Теорема 4 (5). Граф $G = (V, E)$ из множества L_0 гамильтоново связан тогда и только тогда, когда G 3-связан и $G \in M_1$, где $M_1 = \{G \in L_0 \mid K_{n,n} \subseteq G \subseteq K_n + \bar{K}_n, \text{ для некоторого } n \geq 3\}$.

В настоящей работе получены некоторые циклические свойства графов из множества L_0 , а также обобщение теоремы 2.

Пусть $M_2 = \{K_{n,n}, n \geq 2\}$.

Утверждение 1. Граф G из множества L_0 является двудольным тогда и только тогда, когда $G \in M_2$.

Теорема 5. Пусть $G = (V, E) \in L_0 \setminus M_2$. Тогда для любого ребра, не принадлежащего треугольнику, и для любого целого числа $k, 4 \leq k \leq |V|$, существует простой цикл длины k , содержащий это ребро.

Ясно, что если граф G из множества L_0 является пансвязным, то он 3-связан и каждое его ребро принадлежит треугольнику. Однако эти условия не являются достаточными для пансвязности G .

Например, граф $G_n = (V_n, E_n)$ с $n \geq 2$,

$$V_n = \{v_1, v_2, \dots, v_{2n}, u_1, u_2, \dots, u_{2n-1}\}$$

$$E_n = \{u_i v_j \mid 1 \leq i < 2n - 1, 1 < j \leq 2n\} \cup \{v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_{2n-1}, v_{2n}\}$$

3-связан и каждое ребро принадлежит треугольнику. Но граф G_n не является пансвязным, так как вершины v_1 и v_2 не связаны цепью длины 3.

Однако верна следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $G = (V, E)$ 3-связный граф из множества L_0 такой, что любое ребро графа G принадлежит треугольнику. Тогда для каждой пары вершин x, y с $d(x, y) \geq 3$ существует простая (x, y) -цепь длины k , для любого $k, d(x, y) \leq k \leq |V| - 1$.

В связи с теоремой 6 отметим, что для любого целого числа $t \geq 2$ в L_0 существует граф с диаметром t .

Теорема 7. Пусть $G = (V, E)$ произвольный граф из множества $L_0 \setminus M_2$ и $l(x)$ обозначает длину минимального цикла, содержащего вершину x . Тогда для любой вершины $x \in V$ и любого целого числа $k, l(x) \leq k \leq |V|$, существует простой цикл длины k , содержащий вершину x .

Замечание. Если $G \in L_0$, то $3 \leq l(x) \leq 4$ для каждой вершины x графа G .

Утверждение 2. Если $G \in L_0 \setminus M_2$, то G содержит хотя бы один треугольник.

Ясно, что теорема 3, доказанная в (4), является следствием из теоремы 7 и утверждения 2.

К сожалению, для связного графа G условие: $d(u) + d(v) \geq |N(u) \cup N(v) \cup N(w)| - 1$ для каждой тройки вершин u, v, w с $d(u, v) \geq 2$ и $w \in N(u) \cap N(v)$ — не является достаточным для гамильтоновости G . Более того, это условие не достаточно даже для существования гамильтоновой цепи в G . Однако при некоторых условиях возможно получить обобщение теоремы 2.

Пусть $M_2 = \{G \in K_{n-1, n} \subseteq G \subseteq K_{n-1} + \bar{K}_n \text{ для некоторого } n \geq 3\}$.

Теорема 8. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф с $|V| \geq 3$, где $|N(u) \cap N(v)| \geq 2$ и $d(u) + d(v) \geq |N(u) \cup N(v) \cup N(w)| - 1$, для каждой тройки вершин u, v, w с $d(u, v) = 2$ и $w \in N(u) \cap N(v)$. Тогда или G — гамильтонов, или $G \in M_2$.

Доказательство теоремы 8 конструктивно: используется алгоритмический метод, предложенный в работе (3). Другое доказательство теоремы 8, основанное на мощностных соображениях, предложено в работе (6).

Отметим, что теорема 8 является обобщением теоремы 2, так как в любом графе $G \in L_0$ выполнено условие: $|N(u) \cap N(v)| \geq 2$ для каждой пары вершин u, v с $d(u, v) = 2$.

Ереванский государственный университет

Ա. Ս. ՀԱՍՐԱԹՅԱՆ, Գ. Վ. ՍԱՐԴՍՅԱՆ

Լոկալ Օրեի տիպի սրբաբաններին բաղադրող գրաֆների որոշ համիլտոնյան հատկություններ

$G = (V, E)$ գրաֆի համար մտցնենք հետևյալ նշանակումները՝ $d(x) — x$ գագաթի աստիճան, $d(x, y) — x$ և y գագաթների հեռավորությունը G -ում, $N(x) = \{y \in V \mid xy \in E\}$:

Ներկա աշխատանքի հիմնական արդյունքը հետևյալն է

Թեորեմ. Ինքուր $G = (V, E)$ -ն \exists կապակցված գրաֆ է, որտեղ յուրաքանչյուր կող պատկանում է եռանկյանը և

$$d(u) + d(v) \geq |N(u) \cup N(v) \cup N(w)|$$

ամեն մի u, v, w գագաթների եռյակի համար, որտեղ՝ $d(u, v) = 2$ և $w \in N(u) \cap N(v)$: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր x, y գագաթների գույզի համար, որտեղ $d(x, y) \geq 3$, գոյություն ունի x -ը և y -ը միացնող k երկարության պարզ շղթա ամեն մի k ամբողջ թվի համար.

$$d(x, y) \leq k \leq |V| - 1:$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 Ф. Харари, Теория графов. Мир, М., 1973. 2 O. Ore, Amer. Math. Monthly, v. 67, p. 55 (1960). 3 A. S. Hasratian, N. K. Khachatryan, J. of Combinatorial Theory, B49, № 2, p. 287—291 (1990). 4 А. С. Асратян, Г. В. Саркисян, Дискретная математика, т. 3, вып. 4, с. 91—104 (1991). 5 А. S. Asratian, Preprint of Twente University, 1993. 6 А. S. Asratian, H. J. Broersma, J. van den Heuvel e. a., Preprint of Twente University, 1993.

ЛДК 512.4

В. Г. Микаелян

О тождествах конечных расширений групп.

(Представлено чл.-корр. НАН Армении А. Б. Нерсисяном 12/IX 1993)

В качестве основных понятий, с помощью которых автором изучаются тождества расширений групп, являются следующие \ast -произведения. Пусть G, H — группы, VU — многообразия групп (терминологию см. в (1)).

Определение 1. Обозначим через $V \circ G$ многообразие, порожденное расширениями групп из V посредством группы G .

Определение 2. Обозначим через $H \circ U$ многообразие, порожденное всеми расширениями группы H посредством групп из U .

Иногда, если не будет ясно, какое из произведений имеем в виду, будем говорить «го-произведение» и «ло-произведение». Всегда выполняются

$$V \circ F_-(\text{Var } G) = V \cdot \text{Var } G, \quad F_-(\text{Var } H) \circ U = \text{Var } H \cdot U$$

(где справа стоят обычные произведения). Поэтому ставится вопрос, когда справедливы равенства

$$V \circ G = V \cdot \text{Var } G, \quad H \circ U = \text{Var } H \cdot U$$

для конечных H или G .

Для абелевых го-произведений полный ответ дает следующая

Теорема 1. Пусть $G_t = \text{gr } \{x \in G \mid x^t = e\}$. Если n есть период группы G , то пусть $r^{*(p)}$ есть наибольшая степень простого числа p , делящая n . A — многообразии всех абелевых групп, A_n — подмногообразии групп периодов, делящих n . Тогда для любой абелевой группы G

а) если G не имеет конечного периода, то $V \circ G = V \cdot \text{Var } G = V \cdot A$ для любого $V \cdot A$;

б) если G имеет период n , то равенство $V \circ G = V \cdot \text{Var } G = V \cdot A_n$:

1) всегда имеет место, при $V = A$,

2) при $V = A_m$ имеет место тогда и только тогда, когда для всех простых p , делящих m и n , мощности факторов $G_{p, r^{*(p)}} / G_{p, r^{*(p)}-1}$ бесконечны.

Эта теорема не распространяется на неабелев случай. Например, для любых различных простых p, q, r , $(A_p \cdot A_q) \cdot Z_r \neq A_p \cdot A_q \cdot A_r$, хотя $(p \cdot q, r) = 1$.

Следующая теорема показывает, что абелевость G тоже существенна. Эта теорема автором была доказана сначала для абелевых, нильпотентных и некоторых других многообразий. Затем с помощью одного замечания А. Ю. Омшанского она была распространена им на регулярные многообразия. (П. Нейман ⁽²⁾ назвал многообразие регулярным, если ни для какого $n \geq 1$ его свободную группу ранга n нельзя вложить в свободную группу ранга $n-1$. Регулярными являются в частности все локально разрешимые многообразия).

Теорема 2. Для любого регулярного многообразия V и любой неабелевой конечной группы G имеет место

$$V \circ G \neq V \cdot \text{Var } G.$$

Доказательство основано на лемме.

Лемма 1. Пусть $W = V \circ G$, а W и V есть вербальные подгруппы в F_n , соответствующие многообразиям W и V . Тогда для любого n имеет место равенство $W(F_n) = \bigcap V(N)$, где пересечение берется по всем нормальным подгруппам N группы F_n , таким, что F_n/N изоморфна подгруппе в G .

Если многообразие V порождается своей свободной группой ранга r и не порождается V -свободной группой ранга $r-1$, то r называется базисным рангом V . Если V не порождается группой $F_n(V)$ ни для какого n , то V называется многообразием бесконечного базисного ранга. Легко заметить, что если $V \cdot U$ имеет базисный ранг r , то $V \cdot F_n(U) = V \cdot U$.

Поэтому из теоремы 2 получаем

Следствие. Если V регулярное неединичное многообразие, а U — локально конечное и неабелевое, то $V \cdot U$ является многообразием бесконечного базисного ранга.

Последний факт есть обобщение теоремы Г. Хигмена (4.8 из ⁽³⁾, случай $V = A_p$) и теоремы А. Л. Шмелькина и А. Н. Красильникова (№ 2 из ⁽¹⁾, V нильпотентно).

В некоторых случаях можно в явном виде указать тождества, отделяющие $V \circ G$ от $V \cdot \text{Var } G$ (или $H \cdot U$ от $\text{Var } H \cdot U$, т. е. такие, которые выполняются в $V \circ G$, но не в $V \cdot \text{Var } G$ (в $H \cdot U$, но не в $\text{Var } H \cdot U$).

Пример 1. $Z_p \cdot A_p$ нильпотентно класса 2, $A_p \cdot Z_p$ нильпотентно класса p , но A_p^2 ненильпотентное многообразие.

Пример 2. Пусть G — конечная неабелевая разрешимая группа, V — нильпотентное многообразие класса c , причем экспонента V имеет хотя бы один простой делитель, не делящий $|G|$. Индуктивно определяется тождество, названное Пауэном «тождеством абсолютного ранга» ⁽⁵⁾,

$$w_i^d = x, \dots, w_{i+1}^d = \prod ((w_i^d)^{x \circ (1) \dots \circ (2d)})^{sgn \sigma}$$

где произведение берется по всем подстановкам σ множества символов $\{1, 2, \dots, 2d\}$. Тождеством, отделяющим $V \circ G$ от $V \cdot \text{Var } G$, будет $w_1^k \equiv 1$, где l — длина разрешимости $V \circ G$ (т. е. не больше суммы длин V и G), $k = |G|$.

Пример 3. Пусть V — кроссово многообразие, т. е. $V = \text{Var } A$, где A конечная группа, а G — конечная неабелева группа. Определим „тождество главного централятора“ (⁶):

$$v_2 = [x_1, x_2, (x_1^{-1} \cdot x_2)^{y_{1,2}}] \equiv 1;$$

$$v_n = [v_{n-1}, x_n^{y_n}, (x_1^{-1} \cdot x_n)^{y_{1,n}}, \dots, (x_{n-1}^{-1} \cdot x_n)^{y_{n-1,n}}] \equiv 1,$$

при $n > 2$

(v_n есть слово от $\frac{1}{2}(n-1)(n+4)$ переменных $x_1, \dots, x_n, y_2, \dots, y_n, y_{i,j}, 1 \leq i < j \leq n$). Тождеством, отделяющим $V \circ G$ от $V \cdot \text{Var } G$, будет $v_n \equiv 1$, для любого n , большего чем $|A|^{|G|}$.

Пример 4. Если U неабелево кроссово многообразие, экспонента которого не делится на простое число p , то $Z_p \circ U$ от $A_p \cdot U$ отделяется тождеством

$$\prod_{i=1}^p (u^{y_{i(1)} \dots y_{i(2k)}})^{\text{sgn } \pi} \equiv 1,$$

где произведение берется так же, как и в примере 2.

Положим

$$(\dots (V \circ G_1) \circ \dots) \circ G_k = V \circ G_1 \circ \dots \circ G_k,$$

$$H_k \circ H_{k-1} \circ \dots \circ (H_1 \circ U) \circ \dots = H_k \circ \dots \circ H_1 \circ U.$$

Определение 3. а) Назовем многообразие D го-разложимым, если из равенства $D = V \circ G$ следует, что $G = \{e\}$, или $\text{Var } G = D$ и V — тривиальное многообразие.

б) Выражение $D = V \circ G_1 \circ \dots \circ G_k$ назовем го-разложением, если V есть го-неразложимое многообразие, а G_i есть группы, отличные от $\{e\}$.

в) Многообразие D назовем го-разложимым, если для него существует го-разложение.

Аналогично определяются l_0 -неразложимость и т. д. Нильпотентное многообразие может быть го-разложимым, например $A_p \circ Z_p$. го-неразложимыми являются все абелевы многообразия, а также те нильпотентные многообразия, экспонента которых делится на два различных простых числа. Абелево многообразие может быть l_0 -разложимым. Например пусть n — любое четное число, не делящееся на 4, тогда $A_n = Z_2 \circ A_{\frac{n}{2}}$.

Однозначность o -разложений нарушается в обоих o -произведениях.

В случае l_0 -произведения можно говорить о существовании l_0 -разложения. Действительно,

Теорема 3. Для любого множества $\{G_i | i \in \mathbb{N}\}$ нетривиальных групп и для любых многообразий U_k , $k = 1, 2, \dots$ объединение по k произведений вида $U_k \circ G_1 \circ \dots \circ G_k$ порождает многообразие всех групп.

Такое утверждение неверно для l_0 -произведений. Пусть H совершенная группа, т. е. без центра, и все автоморфизмы H внутренние. Положим $H_1 \cong H$, $U_k = \text{Var } H$. Тогда для любого k выполняется

$$V = H_k \circ \dots \circ H_1 \circ V.$$

В заключение автор хочет выразить искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Александру Юрьевичу Ольшанскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Վ. Հ. ՄԻՔԱՅԵՆՅԱՆ

Խմբերի վերջավոր բնդրայնումների նույնությունների մասին

Սահմանվում են $V \circ G$ և $H \circ U$ արտադրյալները: Արելյան խմբերի դեպքում լիովին նկարագրվում են այն հնարավորությունները, երբ $V \circ G = V \circ \text{Var } G$: Նշանակալիորեն ուժեղացնելով Գ. Հիգմանի, Ա. Լ. Շմելկինի և Ա. Ն. Կրասիլնիկովի արդյունքները կառուցված է անվերջ բազիսային ռանգի բազմաձևությունների մի լայն դաս: Բերված են $V \circ G$ և $V \circ \text{Var } G$, $H \circ U$ և $\text{Var } H \circ U$ բազմաձևությունները իրարից բաժանող նույնությունների օրինակներ: Դիտարկվում են l_0 - և l_0 -բերվողության հնարավորությունները երկու արտադրյալների համար: Հնդ որում դրական պատասխան ստացվում է երկրորդ արտադրյալի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ X. Heilmann, Многообразие групп. Мир, М., 1979. ² P. M. Neumann, Arch. Math., v. 16, p. 6–21 (1955). ³ G. Higman, Quart. J. Math. Oxford, v (2), 10, p. 165–178 (1959). ⁴ А. Н. Крассилюков, А. Т. Шмелкин, Алгебра и логика, т. 20, № 5, с. 546–544 (1981). ⁵ M. B. Powell, Quart. J. Math. Oxford, v. (2), 15, p. 131–148 (1954). ⁶ L. S. Kovacs, M. F. Neumann, Proc. Roy. Soc. London, A, v. 292, p. 530–536 (1966).

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 62—501.12

В. К. Брутян

Однородное развязывание нестационарных систем
с применением обратных связей по выходу

(Представлено чл.-корр. НАН Армении Ю. Г. Шукурьяном 18/VIII 1993)

Постановка задачи. Рассмотрим систему, описываемую уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + D(t)u(t), & x(t_0) &= x_0, \\ y(t) &= H(t)x(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $x(t)$ — n -мерный вектор состояния, $u(t)$ и $y(t)$ — m -мерные векторы входных (управляемых) и выходных (наблюдаемых) координат, соответственно. Система (1) рассматривается на конечном промежутке времени $T = [t_0, t_1]$. A , D и H — матрицы соответствующих размеров. Предполагается, что элементы этих матриц являются действительными функциями времени и дифференцируемы любое число раз на интервале T .

Закон управления, который представляет интерес, имеет вид (1')

$$u(t) = C(t)x(t) + Q(t)\xi(t), \quad (2)$$

где $\xi(t)$ — m -мерный вектор входных переменных, $C(t)$ и $Q(t)$ — невырожденные матрицы.

Задача состоит в том, чтобы выбрать такой закон управления, при котором достигается развязка переходных процессов системы (1), то есть замкнутая система имеет диагональную матрицу фундаментальных решений.

Предварительные замечания. В данной задаче важную роль играет оператор

$$N_A(\cdot) = \frac{d}{dt}(\cdot) + (\cdot)A(t). \quad (3)$$

Аргументами этого оператора могут быть любые матрицы. Обозначим через $N_A^i(\cdot)$ композицию этого оператора. Пусть $h_1(t), \dots, h_m(t)$ есть m строк матрицы $H(t)$. Определим целочисленную функцию времени

$l_s(t)$ как наименьшее неотрицательное число i для каждого момента времени $t \in T$, такую, что $N_A^i(h_s)(t) D(t) \neq 0$, $s = 1, 2, \dots, m$. Здесь предполагается, что каждая функция $l_s(t)$ есть константа l_s , и пусть $l^* = \min l_s$. В общем случае можно считать функциями $l_s(t)$ постоянными на подынтервалах общего интервала T .

По существу задачи развязывания линейных нестационарных систем встречались в работах (2-5). В (2-4) показано, что необходимыми и достаточными условиями существования развязывающего закона управления является условие, согласно которому матрицы

$$D^*(t) = \begin{bmatrix} N_A^{l_1}(h_1)(t) & D(t) \\ \cdot & \cdot \\ N_A^{l_m}(h_m)(t) & D(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

являются невырожденными для каждого момента времени $t \in T$. Показано также, что если матрица $D^*(t)$ невырождена в каждой точке $t \in T$ и $l_1 = l_2 = \dots = l_m = l^*$, то

$$l^* \leq (n - m) m. \quad (5)$$

Кроме того, если пара (A, H) однородно наблюдаема на интервале T с индексом наблюдаемости η , то тогда

$$l^* < \eta - 1. \quad (6)$$

В настоящей работе основное внимание уделяется развязке каскадных систем (1.5).

Развязка переходных процессов каскадных систем. Рассмотрим фильтры с m входами и выходами, описываемые системой уравнений (1.7).

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= B(t) z(t) + F(t) v(t), & z(t_0) &= 0, \\ g(t) &= \Phi(t) z(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Определим параметры фильтров $p_j(t)$ как наименьшее отрицательное число i такое, что $N_B^i(f_j)(t) F(t) \neq 0$, где $f_j(t)$ есть i -тая строка матрицы $\Phi(t)$, $j = 1, \dots, m$. Предположим, что $p_j(t)$ есть константа p_j для всех $t \in T$ и пусть $p^* = \min_j p_j$.

Известно, что если фильтр (7) соединен каскадно с (1) так, что $u(t) = g(t)$, то результирующая система описывается уравнениями (1.4)

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}(t) \tilde{x}(t) + \tilde{D}(t) v(t), & \tilde{x}(t_0) &= \tilde{x}_0, \\ y(t) &= \tilde{H}(t) \tilde{x}(t), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}(t) = \begin{bmatrix} A(t) & D(t) \Phi(t) \\ 0 & B(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{H}(t) = [H(t) \ 0],$$

и при этом для любых неотрицательных целых чисел i и ν верны соотношения (4)

$$N_B^i(N_A^\nu(h_j)(t)D(t)\Phi(t))(t)F(t) = \begin{cases} 0, & i < p^*, \\ N_A^\nu(h_j)(t)D(t)N_B^{p^*}(\Phi)(t)F(t), & i = p^*, \end{cases} \quad (9)$$

$$v(t) = \bar{C}(t)\bar{x}(t) + \bar{Q}(t)\xi(t) = C_1(t)x(t) + C_2(t)z(t) + \bar{Q}(t)\xi(t), \quad (10)$$

где $\bar{Q}(t)$ невырожденная матрица для каждого момента времени $t \in T$.

Развязывание нестационарной системы с помощью обратных связей. Предположим, что каскадная система, составленная из (1) и (7), охватывается обратными связями по соответствующим выходам. Если предположить, что $p_1 = p_2 = \dots = p_m = p^*$, то можно доказать следующие положения.

Лемма. Для любого неотрицательного целого числа i справедлива формула

$$\frac{d^i y(t)}{dt^i} = N_A^i(H)(t)x(t) + \sum_{k=0}^{i-1} N_B^k(N_A^{i-k-1}(H)(t)D(t)\Phi(t))(t)z(t) + \sum_{\nu=0}^{i-2} \frac{d^\nu}{dt^\nu} \left[\sum_{k=0}^{i-\nu-2} N_B^k(N_A^{i-\nu-k-2}(H)(t)D(t)\Phi(t))(t)F(t)v(t) \right]. \quad (11)$$

Доказательство леммы приведено ниже.

Теорема 1. Пусть пара (A, H) однородно наблюдаема на интервале T с индексом наблюдаемости η и пусть обе матрицы: $D^*(t)$ (см. формулу (4)) и $F^*(t)$ являются невырожденными в каждый момент времени $t \in T$. Тогда, если для фильтра выполняется условие $p^* \geq \eta - l^* - 2$, то существует развязывающий закон управления

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\eta-1} \hat{C}_{1i}(t) d^i y(t)/dt^i + \hat{C}_2(t)z(t) + \hat{Q}(t)\xi(t), \quad (12)$$

где $\hat{Q}(t)$ — невырожденная матрица.

Доказательство теоремы 1 приведено ниже.

По аналогии с (6) при условиях теоремы 1 имеем $l^* < \eta - 1$, и следовательно, $\eta - l^* - 2 \in (-1, 0, 1, 2, \dots)$.

Следствие. Если для системы (1) справедливы гипотезы теоремы 1 и, кроме того, $\eta - l^* - 2 = -1$, то для развязывания не требуется наличия фильтров. Если $\eta - l^* - 2 = 0$, то тогда можно использовать фильтр $\hat{x}(t) = v(t)$.

Доказательство этого следствия также смотри ниже.

При выполнении условий теоремы 1, а также в силу (5) имеем

$$\eta - l^* - 2 \leq p^* \leq (n - m)/m.$$

Таким образом, нижняя граница для требуемого порядка фильтра согласно теореме 1 определяется неравенством $n_0 \geq m(\gamma - l^* - 1)$. Чтобы применить фильтр низкого порядка, требуется получить соотношение между параметрами ρ^* и n_0 для систем различных классов ('). Существует один класс фильтров, который легко использовать для произвольной системы. Пусть

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} F' &= [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1], \\ \Phi &= [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0], \end{aligned} \quad (13)$$

где каждый элемент 1 и 0 матриц B , F и Φ либо единичная, либо нулевая матрицы размером $m \times m$, соответственно. Если каждая строка и столбец матрицы B содержит μ матриц размера $m \times m$, то можно вычислить, что $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = \rho^* = \mu - 1$ и $n_0 = m\mu$. Фильтр, удовлетворяющий условиям (13), имеет не меньший порядок. Однако его преимуществом является применимость к различным системам и отсутствие производных от выходных переменных в развязывающем законе управления.

Теорема 2. Пусть пара (A, H) однородно наблюдаема на интервале T с индексом наблюдаемости η , и пусть матрица $D^*(t)$ невырождена на интервале T . Тогда, если фильтр определяется матрицами (13) и имеет порядок $n_0 = m(\eta - 1)$, то существует закон управления

$$v(t) = C_1(t)y(t) + C_2(t)z(t) + Q(t)\xi(t), \quad (14)$$

который развязывает переходные процессы составной системы.

Заметим, что эти результаты обобщаются на случай, когда в нижней строке матрицы B стоят блоки матриц B_i размера $m \times m$.

Доказательство теоремы 2 также приводится ниже.

Доказательство леммы. Воспользуемся методом математической индукции. Для $i=0$ результат тривиален. Предположим, что формула (11) верна для $i=0, 1, \dots, i_1$. Пусть $i = i_1 + 1$. Дифференцируя производную $d^i y(t)/dt^i$, получим выражение

$$\begin{aligned} d^{i+1}y(t)/dt^{i+1} &= [dN_A^i(H)/dt]x + N_A^i(H)(Ax + D\Phi z) + \\ &+ \sum_{k=0}^{i-1} \left\{ [dN_B^k(N_A^{i-k-1}(H)D\Phi)/dt]z + N_B^k(N_A^{i-k-1}(H)D\Phi)(Bz + Fv) \right\} + \\ &+ \sum_{\sigma=0}^{i-2} d^{\sigma+1} \left[\sum_{k=0}^{i-\sigma-2} N_B^k(N_A^{i-\sigma-k-2}(H)D\Phi)Fv \right] dt^{\sigma+1}, \end{aligned}$$

из которого нетрудно получить искомое выражение (11).

Доказательство теоремы 1. Используя определение числа l^* , из равенства (11) получим

$$d^l y/dt^l = N_A^l(H) x + \sum_{k=0}^{l-1} N_B^k(N_A^{l-k-1}(H) D\Phi) z + \\ + \sum_{s=0}^{l-2} d^s \left| \sum_{k=0}^{l-2-s-l^*-2} N_B^k(N_A^{l-s-k-2}(H) D\Phi) F v \right| dt^s.$$

Если $p^* \geq \eta - l^* - 2$, то $N_B^k(\Phi) F = 0$, $k = 0, 1, \dots, \eta - l^* - 3$. Используя этот факт, а также формулу (9), приходим к условию

$$N_B^k(N_A^{l-s-k-2}(H) D\Phi) F = 0,$$

где $k = 0, 1, \dots, \eta - l^* - 3$; $i = 0, 1, \dots, \eta - 1$; $s = 0, 1, \dots, \eta - 3$.

Таким образом,

$$d^l y/dt^l = N_A^l(H) x + \sum_{k=0}^{l-1} N_B^k(N_A^{l-k-1}(H) D\Phi) z,$$

$$l = 0, 1, \dots, \eta - 1.$$

После подстановки этого выражения в формулу (12) требуется показать, что существуют матрицы \hat{C}_2 и \hat{C}_{1i} , $i = 0, 1, \dots, \eta - 1$ такие, что закон управления

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\eta-1} \hat{C}_{1i} \left| N_A^i(H) x + \sum_{k=0}^{i-1} N_B^k(N_A^{i-k-1}(H) D\Phi) z \right| + \hat{C}_2 z + \hat{Q} \xi \quad (15)$$

развязывает составную систему. Итак, существует закон управления в форме (10). Приравнявая (10) и (15), получим

$$C_1 = \sum_{i=0}^{\eta-1} \hat{C}_{1i} N_A^i(H), \quad (16)$$

$$C_2 = \sum_{i=0}^{\eta-1} \hat{C}_{1i} \sum_{k=0}^{i-1} N_B^k(N_A^{i-k-1}(H) D\Phi) + \hat{C}_2, \quad \tilde{Q} = \hat{Q}. \quad (17)$$

Так как пара (A, H) однородно наблюдаема с индексом η , то существует по крайней мере одна совокупность \hat{C}_{1i} , $i = 0, 1, \dots, \eta - 1$,

которая удовлетворяет формуле (16). Тогда матрицу \hat{C}_2 можно получить из соотношения (17). Таким образом, получим развязывающий закон управления требуемой формы, что и требовалось доказать.

Доказательство следствия. Если $\eta - l^* - 2 = -1$, то тогда $l^* = \eta - 1$ и, таким образом, $N_A^i(H) D = 0$, $i = 0, 1, \dots, \eta - 2$.

Используя это условие в соотношении (11), получим $d^l y/dt^l = N_A^l(H) x$. Итак, развязывающий закон управления в форме (2)

можно представить в виде

$$u = \sum_{i=0}^{\eta-1} \hat{C}_{1i} d^i y/dt^i + \hat{Q} \xi.$$

Если $\eta - l^* - 2 = 0$, то тогда можно принять, что $\rho^* = 0$, и следовательно, можно применить фильтр $z = v$.

Доказательство теоремы 2. Так как выход системы является входом для фильтра, то фильтр можно описать системой уравнений (1.7.8)

$$\dot{u}_1 = u_2, \quad \dot{u}_2 = u_3, \dots, \dot{u}_{\eta-1} = v, \quad u_1 = u.$$

Вектор состояния фильтра можно представить как $z' = [u_1, u_2, \dots, u_{\eta-1}]$. Нетрудно также показать, что для фильтра $\rho^* = \eta - 2$ и $F^* = N_R^{\eta-2}(\Phi)F = I$. В соответствии с теоремой 1 составная система может быть развязана с помощью закона управления

$$v = \sum_{i=0}^{\eta-1} \hat{C}_{1i} d^i y / dt^i + \hat{C}_2 z + Q\xi,$$

который можно представить в виде

$$\dot{u}_{\eta-1} = \sum_{i=0}^{\eta-1} \hat{C}_{1i} d^i y / dt^i + \sum_{i=0}^{\eta-2} \hat{C}_{2i} d^i u_1 / dt^i + \hat{Q}\xi. \quad (18)$$

Целесообразно рассмотреть такой вариант фильтра, для которого в законе управления не требуется производных от выходных координат $y(t)$ (9). Пусть $\hat{u}_1 = u_1 - G_0 y$, где $G_0 = \hat{C}_{1, \eta-1}$. Тогда уравнение (18) можно представить как

$$\begin{vmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_{\eta-2} \\ \hat{u}_{\eta-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hat{C}_{2,0} & \hat{C}_{2,1} & \hat{C}_{2,2} & \dots & \hat{C}_{2, \eta-2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{\eta-2} \\ \hat{u}_{\eta-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_{\eta-2} \\ G_{\eta-1} \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} Q\xi, \quad (19)$$

где G_j — нестационарные матрицы размера $m \times m$, $j = 1, \dots, \eta - 1$ такие, что

$$G_j = \hat{C}_{1, \eta-j-1} + \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{r=0}^{j-1} \binom{\eta + k - j - 1}{\eta - j - 1} \hat{C}_{2, \eta-j-1+k-r} d^k G_r / dt^k$$

и $\hat{C}_{2, \eta-1} = 1$. В таком случае закон управления имеет форму, заданную выражением (14).

Пример. Рассмотрим систему (10)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & \exp(t) \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t),$$

для которой $n = 3$, $m = 2$. Прямые вычисления дают $l_1 = 1$, $l_2 = 0$, $\eta = 2$, $l^* = 0$, матрица $D^*(t)$ невырождена. Поэтому система может быть развязана с помощью обратных связей. Так как $\eta - l^* - 2 = 0$, то в соответствии со следствием выбираем фильтр второго порядка, описываемый уравнением $\dot{z}(t) = v(t)$. В этом случае система определяется уравнениями:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \exp(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

Теперь можно развязывающий закон управления представить в форме (10), где

$$\bar{Q}(t) = D^{*-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\exp(-t) \\ 0 & \exp(t) \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -1 & \exp(-t) & 0 \\ 0 & -\exp(-t) & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \exp(t) \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Развязывающий закон управления в форме (12) можно получить из соотношений (16) и (17). В данном примере имеем

$$\begin{bmatrix} -1 & \exp(-t) & 0 \\ 0 & -\exp(-t) & 0 \end{bmatrix} = \hat{C}_{10}(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \hat{C}_{11}(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и следовательно,

$$\hat{C}_{10}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_{11}(t) = \begin{bmatrix} \exp(-t) & 0 \\ -\exp(-t) & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда равенство (17) имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 - \exp(-t) \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \hat{C}_2(t) + \begin{bmatrix} \exp(-t) & 0 \\ -\exp(-t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \exp(t) \end{bmatrix}$$

и поэтому

$$\hat{C}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \exp(t) \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Окончательно получим

$$v(t) = \hat{C}_{10}(t) y(t) + \hat{C}_{11}(t) \dot{y}(t) + \hat{C}_2(t) z(t) + \bar{Q}(t) \xi(t).$$

Чтобы получить закон управления в форме (14), используем процедуру, изложенную при доказательстве теоремы 2. Пусть $\hat{u}(t) = u(t) - G_0(t) y(t)$, где

$$G_0(t) = \widehat{C}_{11}(t) = \begin{bmatrix} \exp(-t) & 0 \\ -\exp(-t) & 0 \end{bmatrix}$$

Используя равенство (19), получим

$$\widehat{u}(t) = \widehat{C}_{20}(t) \widehat{u}(t) + G_1(t) y(t) + Q(t) \xi(t),$$

где

$$\widehat{C}_{20}(t) = \widehat{C}_2(t), \quad G_1(t) = \widehat{C}_{10}(t) + \widehat{C}_{20}(t) G_0(t) - G_0(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Таким образом,

$$\widehat{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \exp(-t) \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \widehat{u}(t) + \begin{bmatrix} 1 & -\exp(-t) \\ 0 & \exp(-t) \end{bmatrix} \xi(t),$$

и следовательно, развязывающий закон управления имеет вид

$$u(t) = \widehat{u}(t) + G_0(t) y(t).$$

Ереванский институт народного хозяйства

Վ. Կ. ԲՐՈՒՅԱՆ

Ոչ ստացիոնար համակարգերի համասեռ արձակումն ըստ ելքի
հետադարձ կապերի կիրառման

Դիտարկվում է գծային ոչ ստացիոնար համակարգերի անցումային պրոցեսների արձակման խնդիրը հետադարձ կապերի օպտիմիզամբ: Խնդրում պահանջվում է ընտրել այնպիսի կառավարման օրենք, որում իրագործվում է համակարգերի հակազդումների առանձնացում, այսինքն փակ համակարգերը ունենում են ֆունկցիոնալ լուծումների անկյունաղծային մաստիցներ: Դիտարկվում է նաև բազմաշափ մուտքերով և ելքերով ֆիլտր, որը կասկադային եղանակով միացված է ուսումնասիրվող համակարգի հետ: Կազմածո համակարգի անցումային պրոցեսների արձակման խնդրի լուծման համար ենթադրվում է, որ գծային համակարգի բոլոր ելքերը հանդիսանում են ֆիլտրի մուտքեր և այդ նկատառումով հաշվարկվում է կառավարման օրենքը, որը առանձնացնում է կազմածո համակարգի անցումային պրոցեսները: Դիտարկվում է թվային օրինակ:

ЛИТЕРАТУРА — ՓՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. К. Брутян, Основные аспекты теории не-прерывных марковских систем и ее приложения. Ашгадан, Ереван, 1934. - *W. M. Wonham, SIAM J. Control, v. 2, № 13, p. 424-437 (1961).*
- ² *E. Warren Michael, K. Mitter Sanjoy, Int. J. Contr., v. 21, № 2, p. 177-192 (1975).*
- ³ *N. Viswanadham, Int. J. Contr., v. 21, № 3, p. 451-463 (1975).*
- ⁴ Р. Е. Калман, М. Арбуз, П. Филб, Очерки по математической теории систем, Мир, М., 1971.
- ⁵ А. И. Мороз, Курс теории систем, Высшая школа, М., 1987.
- ⁶ В. К. Брутян, Автоматика и телемеханика, № 7, с. 51-61, 1980.
- ⁷ В. К. Брутян, ДАН Армении, т. 22, № 4, с. 154-161 (1991).
- ⁸ Л. Заде, Ч. Дезоер, Теория линейных систем, Наука, М., 1970.
- ⁹ В. К. Брутян, Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, № 6, с. 27-36, 1980.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 681.3.06

Член-корреспондент НАН Армении Ю. Г. Шукурян

Распараллеливание следов
свободных частично-коммутативных полугрупп

(Представлено 2/IX 1993)

В настоящей работе исследуется задача оптимального распараллеливания последовательных представлений элементов (следов) свободных частично-коммутативных полугрупп ⁽¹⁾. Предпосылкой для постановки этой задачи послужили, с одной стороны, результаты по описанию параллельных процессов с помощью элементов свободных частично-коммутативных полугрупп ⁽²⁾, по полугрупповой эквивалентности дискретных преобразователей (полугруппы невырожденных операторов) ⁽³⁾ и, с другой стороны, — работы по оптимизации линейных участков для горизонтальных микропрограмм ⁽⁴⁾ и программ с архитектурой VLIW ⁽⁵⁾. Ниже показывается, что в общем случае задача является *NP*-полной. Однако ее можно решить за полиномиальное время, если зафиксировать мощность множества образующих.

Пусть $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ — конечный алфавит, Y^* — свободная полугруппа с единицей e , порожденная множеством Y . Пусть $I \subseteq Y \times Y$ — антирефлексивное, симметричное отношение независимости на Y . Тогда полугруппа G с единицей e , порожденная множеством Y и заданная конечным числом определяющих соотношений $y_i y_j = y_j y_i$ для всех пар (y_i, y_j) , принадлежащих отношению I , называется свободной частично-коммутативной полугруппой. Для краткости будем пользоваться обозначением $G(Y, I)$. Полугруппа $G(Y, I)$ является фактор-полугруппой полугруппы Y^* по наименьшей конгруэнции \equiv , порожденной отношением I , а элементы G называются следами ⁽⁶⁾.

В дальнейшем для произвольного слова q , $q \in Y^*$, через $[q]$ обозначим его класс эквивалентности по отношению \equiv . Если $g = [q]$ для слова q , $g \in G$, то будем говорить, что g задано своим последовательным представлением q через образующие. Обозначим через $d_y(q)$ число вхождений буквы y в слово q и назовем слово q из Y^* простым, если $d_y(q) = 1$ для каждой буквы y этого слова.

Слово q из Y^* назовем блоком ширины $|q|$, где $|q|$ — длина слова q , если q — простое слово и любые две буквы q принадлежат отношению I (попарно перестановочны). Через $\lambda(q)$ обозначим множество букв, входящих в q .

Пусть $q \in Y^*$ и $g = [q]$ (иногда для указания полугруппы будем использовать обозначение $[q]_G$), тогда длиной $|g|$ следа g назовем длину $|q|$ слова q . Заметим, что все последовательные представления следа g имеют одинаковую длину. Представление $q = q_1 q_2 \dots q_t$ следа g назовем блочным, если q_i блок, $1 \leq i \leq t$. Число $s(q) = \max |q_i|$ назовем шириной, а число $m(q) = t$ — длиной блочного представления $q_1 q_2 \dots q_t$.

Следующая лемма является переформулировкой предложения 2.8 из (1).

Лемма. Любой след g , $g \neq e$, свободной частично-коммутативной полугруппы $G(Y, I)$ имеет единственное (каноническое) блочное представление $q_1 q_2 \dots q_{t(g)}$, для которого справедливо условие: для любой буквы $y \in \lambda(q_{i+1})$, $1 \leq i < t(g)$, существует буква $y' \in \lambda(q_i)$ такая, что $(y, y') \in I$.

Пусть k — целое положительное число, $G(Y, I)$ — свободная частично-коммутативная полугруппа. Обозначим через $B_G(g, k)$ множество всех блочных представлений следа $g \in G$ с шириной не большей, чем k . Задача распараллеливания следов в свободных частично-коммутативных полугруппах формулируется следующим образом.

Задача распараллеливания следов. Даны свободная частично-коммутативная полугруппа $G(Y, I)$, целое положительное число k и слово $q \in Y^*$. Требуется построить блочное представление $q_0 \in B_G([q], k)$ такое, что

$$m(q_0) = \min \{m(q'), q' \in B_G([q], k)\}$$

Как будет показано ниже, эта задача тесно связана с задачей составления расписания с отношением предшествования, формулируемой следующим образом (2).

Задача составления минимального расписания с отношением предшествования. Даны множество $E = \{E_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ заданий, частичный порядок $<$ на E , число процессоров $k \geq 1$. Требуется построить такое расписание $\alpha: E \rightarrow \{1, 2, \dots, \omega_\alpha\} \subseteq \mathbb{N}$, что для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $|\alpha^{-1}(i)| \leq k$, где $\alpha^{-1}(i) = \{E_j \in E | \alpha(E_j) = i\}$, и из $E_i < E_j$ следует $\alpha(E_i) < \alpha(E_j)$, а ω_α минимально.

Имеет место следующая

Теорема 1 (2). Задача составления минимального расписания с отношением предшествования NP-полна.

Покажем, что задача составления минимального расписания с отношением предшествования сводится (полиномиально) к задаче рас-

параллеливания следов в свободных частично-коммутативных полугруппах. Это будет означать, что справедлива следующая

Теорема 2. *Задача распараллеливания следов в свободных частично-коммутативных полугруппах NP-полна.*

Пусть $E = \{E_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ — множество заданной. \leq — частичный порядок на E , k — число процессоров, α — минимальное расписание. Будем предполагать, что последовательность E_1, E_2, \dots, E_n является результатом топологической сортировки множества E , т. е. такого линейного упорядочения, при котором из $E_i < E_j$ следует $i < j$ (⁹).

Введем в рассмотрение алфавит E , отношение $I_{(E, \leq)}$ независимости на E , полагая, что $(E_i, E_j) \in I_{(E, \leq)}$ тогда и только тогда, когда пара (E_i, E_j) не принадлежит отношению \leq .

Покажем, что для свободной частично-коммутативной полугруппы $H = G(E, I)$, числа k и слова $q = E_1 E_2 \dots E_n$, если $q_0 = w_1 w_2 \dots w_{\omega(q)}$ является минимальным блочным представлением, то отображение $\alpha: E \rightarrow \{1, 2, \dots, \omega(q_0)\}$ такое, что $\alpha^{-1}(i) = \lambda(w_i)$, является минимальным расписанием для E, \leq, k . Действительно, $|\lambda(w_i)| \leq k$, так как $q_i \in B_{H, I}(|q|, k)$. Далее, если $E_i < E_j$, $i < j$ и $q = q_1 E_i q_2 E_j q_3$. Поэтому $E_i \in \lambda(w_s)$, где $s < l$. Минимальность легко показать от противного. Пусть α_0 — минимальное расписание и $\omega(\alpha_0) < \omega(q_0)$, тогда слово $q(\alpha_0) = w(\alpha_0^{-1}(1)) w(\alpha_0^{-1}(2)) \dots w(\alpha_0^{-1}(\omega(\alpha_0)))$, где $w(\alpha_0^{-1}(i))$ — блок, составленный из букв подмножества $\alpha_0^{-1}(i)$, будет принадлежать $B_{H, I}(|q|, k)$ и иметь длину, меньшую, чем q_0 .

Связь указанных задач говорит о трудности решения задачи распараллеливания следов в общем случае. Для задачи составления расписаний известно, что она разрешима за полиномиальное время, если $k = 2$ и \leq — общего вида, если k произвольно, а условия \leq представимы в виде «леса» и в ряде других случаев (³). Однако для случая, когда \leq — общего вида, а k фиксировано, ($k \geq 3$)-сложность задачи не установлена (⁸). Оказывается, что для задачи распараллеливания следов путем фиксации мощности порождающего множества можно выделить класс подзадач, разрешимых за полиномиальное время.

Пусть m — фиксированное число и H_m — класс свободных частично-коммутативных полугрупп $G(Y, I)$ таких, что $|Y| = m$.

Теорема 3. *Задача распараллеливания следов для полугрупп из класса H_m может быть решена за время*

$$O\left(\left[\frac{n+m}{m}\right]^{2m}\right),$$

где n — длина следа.

Покажем, что задача сводится к нахождению кратчайшего пути из одного источника в ориентированном графе, определяемом исходным представлением следа.

Пусть g — фиксированный след полугруппы $G(Y, I)$ из H_m , заданный своим последовательным представлением q , и

$$D_O(g) = \{h \in G \mid \exists f \in G, hf = g\}$$

Покажем, что $|D_O(g)| \leq |D_{\tilde{O}}(\tilde{g})|$, где \tilde{O} — свободная коммутативная полугруппа над Y , а $\tilde{g} = [q]_{\tilde{O}}$. Допустим, что $h \in D_O(g)$. Тогда существуют два слова w и v такие, что $[w]_O = h$, $wv \in [q]_O$ и слово wv получается из q путем перестановки некоторых букв. Очевидно, что в \tilde{O} также справедливо $wv \in [q]_{\tilde{O}}$, так как в $[q]_{\tilde{O}}$ входят все и только все те слова, которые получаются из q путем всевозможных перестановок букв. Поэтому след \tilde{h} , определяемый представлением w , является делителем \tilde{g} , т. е. $\tilde{h} \in D_{\tilde{O}}(\tilde{g})$.

Пусть $h_1, h_2 \in D_O(g)$ и $h_1 \neq h_2$. Рассмотрим каноническое представление $q_1 q_2 \dots q_{t(g)}$ элемента $g = [q]_O$. Понятно, что для любого делителя $h \in D_O(g)$ существует i , $1 \leq i \leq t(g)$, такое, что каноническое представление h равно $q_1 q_2 \dots q_{i-1} s_i$, где $q_0 = e$ и s_i — слово, составленное из букв некоторого подмножества $\delta_i \in \lambda(q_i)$.

Пусть $|h_1| \neq |h_2|$, тогда

$$h_1 = [q_1 q_2 \dots q_{i-1} s_i^{(1)}]_O, \quad h_2 = [q_1 q_2 \dots q_{i-1} s_i^{(2)}]_O,$$

где $s_i^{(1)}, s_i^{(2)}$ — слова, составленные из букв подмножеств $\delta_i^{(1)}, \delta_i^{(2)}$ множества $\lambda(q_i)$. Поскольку $h_1 \neq h_2$, то слово $s_i^{(1)}$ не может быть получено из $s_i^{(2)}$ путем перестановки произвольной пары букв, так как $\delta_i^{(1)}$ и $\delta_i^{(2)}$ принадлежат множеству $\lambda(q_{i+1})$ букв блока q_i .

Рассмотрим элементы $\tilde{h}_1 = [q_1 q_2 \dots q_{i-1} s_i^{(1)}]_{\tilde{O}}$ и $\tilde{h}_2 = [q_1 q_2 \dots q_{i-1} s_i^{(2)}]_{\tilde{O}}$.

Из вышеуказанного непосредственно следует, что $\tilde{h}_1 \neq \tilde{h}_2$. В случае, когда $|h_1| = |h_2|$, очевидно, что $\tilde{h}_1 \neq \tilde{h}_2$.

Обозначим через \tilde{g}_n такой элемент \tilde{O} , для которого $|\tilde{g}_n| = n = |q|$ и $|D_{\tilde{O}}(\tilde{g}_n)| = \max |D_{\tilde{O}}(\tilde{g})|$, где максимум берется по всем элементам из \tilde{O} , имеющим длину n . Учитывая, что слова длины n , представляющие элементы \tilde{O} , могут быть записаны в виде $y_1^{n_1} y_2^{n_2} \dots y_m^{n_m}$, где $\sum_{i=1}^m n_i = n$, а максимальное количество делителей достигается при максимуме произведения $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_m + 1)$, получим, что

$$\left(\frac{n+m}{m}\right)^m \geq |D_o(g_o)| \geq n+1.$$

Правая часть соответствует $|D_{Y_o}([q]_{Y_o})|$.

Построим ориентированный граф с множеством вершин $D_o(g)$, с источником $g_o = [e]$ и дугами (h, hy) , $h \in D_o(g)$, $y \in Y$, если $hy \in D_o(g)$. Добавим ребра (h, hb) где b — блок ширины не больше k , если $hb \in D_o(g)$. Тогда кратчайший путь из g_o в g в построенном графе даст решение задачи распараллеливания следа g . Учитывая, что вычисление кратчайшего пути из одного источника в ориентированном графе из s вершин занимает $O(s^2)$ времени (⁹), получаем утверждение теоремы.

Институт проблем информатики и автоматизации
Национальной академии наук Армении

Յու. 2. ՇՈՒՔՈՒՐՅԱՆ

Ազատ մասնակի-կոմուտատիվ կիսախմբերի հետևերի զուգահեռացումը

Դիցուք $G(Y, I)$ ազատ մասնակի կոմուտատիվ կիսախումբ է, որը որոշված է Y այբուբենով և $I \subseteq Y \times Y$ անտրոնֆլեքսիվ, սիմետրիկ անկախություն հարաբերությունով: Կիսախմբի g տարրը (հետքը) կոչվում է k , $k \in \{1, 2, \dots\}$ լայնության բլոկ, եթե g ունի $q = y_1 y_2 \dots y_s$ ներկայացում և կամայական (i, j) , $(i \neq j)$ զույգի համար $(y_i, y_j) \in I$: Հետքի $q = h_1 h_2 \dots h_s$ ներկայացումը բլոկային է, եթե կամայական $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ համար h_i բլոկ է: Զուգահեռացման խնդիրը հետևյալն է՝ տրված q ներկայացմամբ տարրի h և k բնական թվի համար կառուցել այնպիսի $q = h_1 h_2 \dots h_s$ բլոկային ներկայացում, որ $|h_i| \leq k$ և s -ը մինիմալ է: Ցույց է տրված, որ խնդիրը NP -լրիվ է սակայն կամայական m ֆիքսած թվի համար, եթե $|Y| \leq m$ խնդիրը կարելի է լուծել բազմանդամային ժամանակում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Ж. Латлеман. Гол-группы и комбинаторные приложения. Мир, М., 1985.
² A. Mazurkiewicz. Trails, -histories, graphs: instances of processes modulo. Lecture Notes in Computer Science 173, Springer, Berlin, 1984. ³ А. А. Лемичевский, Кибернетика, № 1, 1967. ⁴ J. A. Fisher, IEEE Trans. Computers, v. C-30, № 7, p. 478—490 (1981). ⁵ A. Nikolau, J. A. Fisher, IEEE Trans. Computers, v. C-33, p. 968—970 (1984). ⁶ V. Diekert, Theory Comput. Sci., v. 74, № 1, p. 3—18 (1990). ⁷ J. D. Ullman, Computer and system sciences, v. 10, p. 384—393 (1975). ⁸ М. Герра, М. Джолман, Computer and system sciences, v. 10, p. 384—393 (1975). ⁹ А. Ахоу, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман, Построение и анализ вычислительных алгоритмов, Мир, М., 1979:

УДК 552.33+552.321.6 (5)

М. А. Сатнан, А. В. Варданян

Обнаружение щелочно-базит-ультрабазитовой диатремы в Вединской офиолитовой зоне

(Представлено академиком НАН Армении С. В. Григоряном 31/V 1992)

Атипичные для офиолитовых зон высокощелочные базит-ультрабазитовые продукты вулканизма в форме диатрем выявлены в ряде регионов (Сирия и др.) и представляют несомненный интерес для воссоздания картины развития магматизма и поисков алмазов.

Диатрема диаметром до 0,5 км обнаружена при картировании ядра Ерахской антиклинали. Ее контуры отбиваются двумя магнитометрическими профилями. Породы диатремы вскрыты скважинами на глубину не менее 60 м. Диатрема выполнена туфами и туффизитами щелочно-базит-ультрабазитового состава и секущей туфы кольцевой дайкой диаметром до 0,25 км, мощностью до 3—5 м, в раздувах до 10 м, состав пород которой в западном и северном сегментах камптонитовый: к юго-востоку дайка расщепляется на несколько мелких, завершаясь на юге крупным выходом камптомончикитов, сужающимся к западу вдоль широтного разлома. Возраст пород диатремы определяется как сеноман-туронский по радиологическим датировкам туфов (К/Аг 102—95 млн. лет) и дайки (97—92 млн. лет), по несогласному и с разрывом их перекрытию базальными конгломератами граувакковой формации, палеонтологически датируемой позднеконьякским временем, по прорыву породами диатремы позднеюрских-неокомских базальтовых порфиритов, содержащих остатки аммонитов берриаса и радиологически датируемых (К/Аг) в 140—152 млн. лет. Базальтовые порфириты контактируют по широтному надвигу со слагающими южную часть ядра антиклинали шаровидными афировыми толентовыми и субщелочными базальтами и гналокластитами. Афировые базальты включают линзы буднированных микритовых известняков, иногда радиоляритов, кристаллических известняков с остатками кораллов поздней юры-валанжина. Базальты секутся субвулканическими мелкими телами трахитов (К/Аг 130 млн. лет) и овальными в плане, диаметром до 2—5 м доломитами карбонатитового типа, обогащенными цирконием, изредка и фосфором. Наиболее южная полоса выходов пород ядра антиклинали представлена серпентинитовым меланжем, в составе которого обнару-

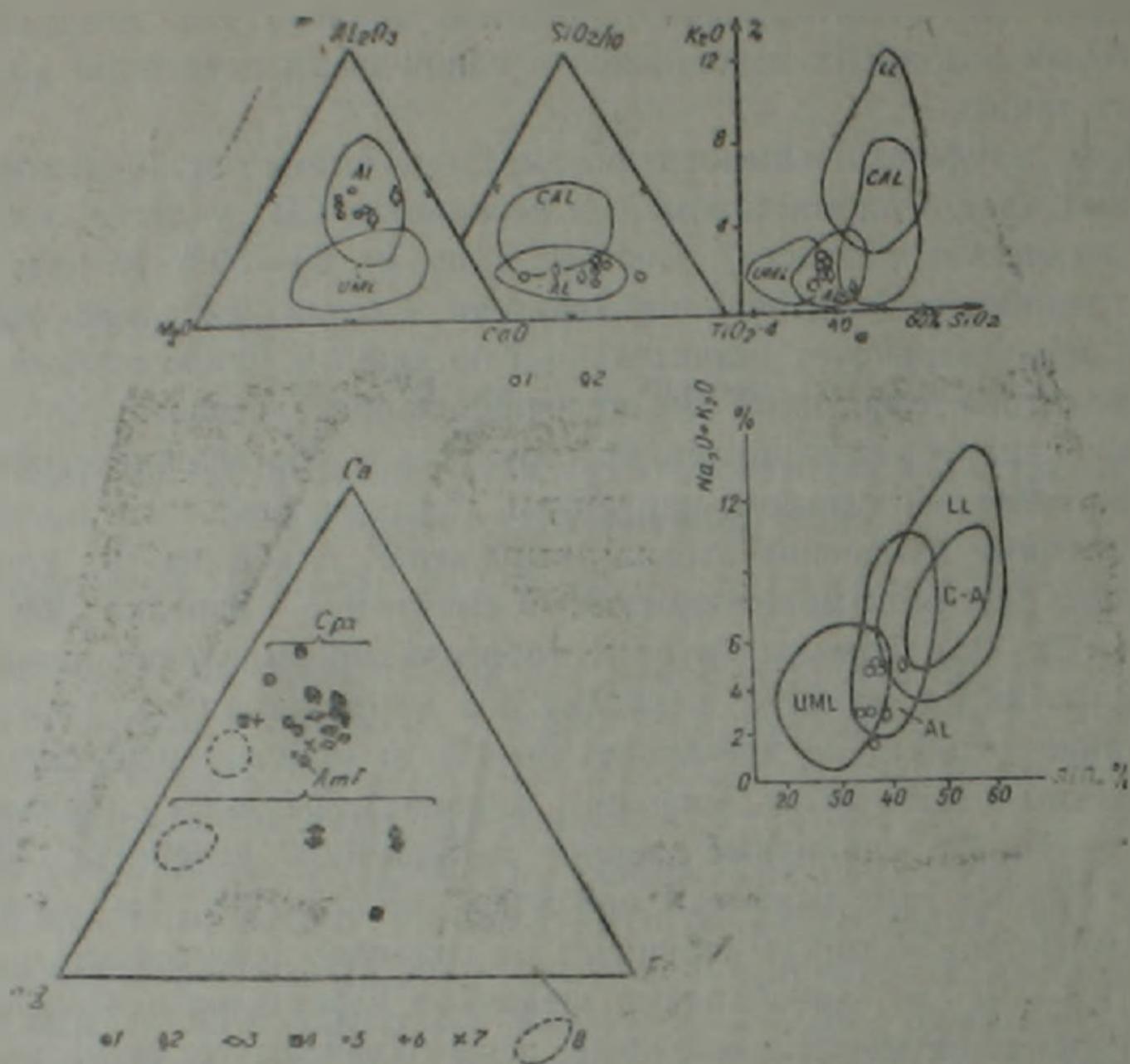
живаются крупные глыбы кристаллических известняков с остатками кораллов низов раннего мела, возможно, и поздней юры, базальтов, радиологически (K/Ar) датируемых от позднего триаса (?) до поздней юры, микритовых розоватых известняков с единичными остатками конодонт позднего триаса.

Туфы и туффизиты выполнения диатремы имеют голубовато-зеленый и зеленый цвет. Они массивные, на небольшом СВ участке слоистые (эпикластические разности). Состоят туфы на 65—80% из витрокластичности гравийно-псаммитовой размерности. Состав витрокластичности от зерна к зерну варьирует значительно и по данным микронзондового анализа трахитово-тефритовый до щелочнопикробазальтового. Для витрокластичности характерна глобулярная структура и обогащение в пределах контуров глобулей титаном, марганцем, железом, щелочами и магнием.

Вторичные изменения стекла выражены альбитом и хлоритом ($i=33$ мол.%), монтмориллонитом, К-сметитом, изредка биотитом ($Mg-v=32-35$), обычны крупные таблитчатые выделения анальцима, реже встречаются цеолиты, карбонат. Из фенокристаллов, суммарное содержание которых не превышает 3—4% от стекла, определены клинопироксены (титан-авгит, омфацит, диопсид), реликты оливина, биотит ($Mg-v=45$), единичные зерна титанистого керсутита ($TiO_2=5,1\%$), кроме того выявлены ортоклаз, анортотоклаз. Из литокластов, размерность которых варьирует от гравийно-псаммитовой до глыбовой (0,5—0,7 см), преобладают щелочные керсутитовые базальтовые порфириты, чаще миндалекаменные, реже отмечены трахиты, диабазы, в северном секторе—мафические щелочные и субщелочные габбро, единичные обломки амфиболитов, (эподиабазов). Радиологически (K/Ar) возраст габбро определен в 140—155 млн. лет, базальтов— в 105—154 млн. лет. Изредка отличаются обломки мелкозернистых известняков с витрокластической примесью, сходных с позднеюрскими. Наибольший интерес представляют особенно частые в южном секторе трубки взрыва, ксенолиты карбонатитов—сёвитов. Они встречены также в ксенолитах базальтов и датируются (K/Ar) по тремолиту прожилков в 144 млн. лет. До 20% туфа, особенно в северном сегменте диатремы, составляет карбонатный цемент, разнозернистый, местами отчетливо радиально-лучистый—англобулярный с высоким содержанием редких земель, циркония, некоторых рудных элементов. Предполагается, что большая часть карбонатного цемента первично магматическая.

По химическому составу туфы и туффизиты характеризуются низкой кремнеземистостью (таблица), повышенной щелочностью, магниальностью, титанистостью, высоким содержанием летучих. Они сходны по химическому составу с лампрофирами кольцевой дайки и на дискриминационной диаграмме Рока для лампрофиров (рисунок, А) составы туфов занимают поля щелочных лампрофиров. Своеобразные составы стекла—главного компонента туфов позволяют предполагать, что они возникли из расплавов на уровне верхней метасоматизированной мантии, с вовлечением расплавов промежуточных камер корового

разреза. Очевидно, что поля составов клинопироксенов удалены от мантийных (рисунок, Б).



Химические составы по: од диатремы и клинопироксенов амфиболов
 А—Диаграмма химических составов лампрофиров и пород диатремы
 Ераха: 1 — составы туфов (и туффизитов); 2 — составы лампрофиров и
 мончикитов дайки поля CAL — и известково-щелочных AL — щелочных,
 UML — ультраосновных лампрофиров, LL — лампроитов (4). Б — диаграмма
 (Ca—Mg—Fe) составов клинопироксенов и амфиболов из пород диатремы
 и прочих: 1 — туфы (и туффизиты); 2 — дай и мончикитов и кимтонитов;
 3 — санниты, силлы; 4 — карбонатиты, 5 — пикродолериты верховья
 р. Веди (по автору); 6 — вердолит Сатанахачского массива, Севан (-);
 7 — лампрофиры Мегриского плутона (по Б. Меликсетяну);
 8 — мантийные ксенолиты в кайнозойских базальтах Сирни (3)

Итак, диатрема возникла на постофиолитовом, поздне меловом этапе, по структурной позиции она размещена в пределах северного края Иранской плиты, развивавшейся в палеозое — раннем триасе в субплатформенном режиме.

Активизация плиты в связи с интраконтинентальным рифтогенезом ее края выразилась в возникновении в поздней юре — раннем мелу «атипичной» офиолитовой ассоциации, а в позднем мелу — трубки (глубок) взрыва щелочно-базит-ультрабазитового состава. В сочетании с ранними находками в аллювии р. Веди мелких алмазов, а в составе пород выполнения трубки взрыва муассанита, Ti-керсутита, омфацита, циркона, граната, графита — важнейших аксессуариев, а также карбонатитовых небольших выходов и ксенолитов, — все эти признаки указыва-

ют на перспективы поисков в Вединской зоне алмазов в породах тру-
бок взрыва. *а закон Кнеланде?*

Химический состав магматических пород выполнения диатремы

Окислы	К-2/1	К-4/12	БЕ-138	БЕ-107	БЕ-74	Б-29	БЕ-76	БЕ-136
SiO ₂	37,58	39,50	36,46	35,80	36,31	36,37	43,45	39,57
TiO ₂	3,34	6,84	2,66	1,54	3,04	2,74	2,09	3,48
Al ₂ O ₃	12,41	13,51	14,49	14,71	12,89	12,63	16,13	14,92
Fe ₂ O ₃	7,37	6,05	7,11	5,62	11,17	9,43	—	6,88
FeO	1,42	3,97	3,40	3,44	2,55	2,15	11,64	5,68
MnO	0,14	0,23	0,28	0,12	0,18	0,25	0,40	0,22
CaO	9,03	8,61	7,56	12,25	7,84	6,44	10,29	10,57
MgO	8,06	10,55	8,00	9,38	9,64	9,90	4,69	10,72
P ₂ O ₅	0,46	0,50	0,41	0,41	0,39	0,78	1,14	0,36
Na ₂ O	0,60	0,80	1,70	1,50	1,90	2,59	4,15	1,00
K ₂ O	2,50	1,00	3,10	1,50	3,10	2,23	0,92	2,00
H ₂ O	5,34	3,30	3,28	2,64	3,02	3,14	0,67	2,27
п. п. п.	1,99	0,53	4,99	4,58	1,31	6,35	4,96	0,15
CO ₂	9,06	5,01	7,04	6,86	7,00	4,80	—	2,55
Сумма	99,30	100,40	100,48	100,35	100,34	99,80	100,43	100,37

Примечание: туфы и туффзиты (№ К-2/1, К-4/12 — южной части диатремы, БЕ-138, БЕ-104 — северной половины диатремы), № БЕ-74, БЕ-29 — западная половина, № БЕ-76 — камптонит. № БЕ-136 — кампто-мончикит и кольцевой д. йкн.

Авторы благодарят за содействие в работе А. Х. Мнацаканян, Л. П. Плюсинну и В. И. Ваганова.

Институт геологических наук
Национальной академии наук Армении

Մ. Ա. ՍԱԹՅԱՆ, Ա. Վ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

Ալկալային-բազիտ-գիբրազիտային դիատրեմայի հայտնաբերումը
Վեդու օֆիոլիտային գոտում

Համալրոֆիրները դիատրեման 0,5 կմ տրամագծով բաղկացած է լիթո-
վիտրոկլաստիկ տուֆերից և տուֆիզիտներից, ինչպես նաև լամպրոֆիրային
կազմույթյան շրջանաձև դաշկաչից: Վիտրիկ նյութը ամբողջությամբ ունի
տեֆրիտային կազմ և ղեմննտացած է ապոգլորուլյար կառուցվածքի առաջ-
նային մազմատիկ կարբոնատով: Ֆենոքրիստալները (1—3%) տիտան — ալ-
գիտ, օմֆացիտ, դիոպսիդ, օլիվինի մնացուկներ, տիտանային կերսուտիտ
բիոտիտ, օրթոկլազ, անօրթոկլազ, ուղեկից միներալներ՝ բրոմիդներ, իդրներ
(ցածր բրոմայնություն), ցիրկոն, նոնաքար մուաստնիտ, գրաֆիտ: Մնա-
ցուկներ տուֆերում. ալկալային բազալտային պորֆիրիտներ (120—150 մլն.

տարի), արկայային գարրոներ, հազվադեպ կարբոնատիտներ (սևիտներ), ոլիվինային բազալտներ, դիարադներ, կրաքարեր:

Մագմատիկ օջախները տեղադրված են վերին պատյանի մետասոմատիկ մակերևութում և կեղևում:

Տուֆերը հեռանկարային են արմաստի որոնումների համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Կ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ ՈՒ Ն

- 1 М. А. Сатян, А. В. Варданян, Б. В. Бойнагрян, Изв. АН АрмССР. Науки о Земле, т. 42, № 6, с. 3—11 (1989). 2 В. Л.: Егоян, Верхнемеловые отложения юго-западной части Армянской ССР, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1955. 3 К. Б. Кепежинская, В. В. Кепежинская и др., ДАН СССР, т. 319, № 3, с. 713—716 (1991). 4 N. H. S. Rock, J. Petrol., № 27, р. 1, р. 155—196 (1986). 5 М. А. Сатян, Г. А. Ханзадян, Изв. АН АрмССР. Науки о Земле, т. 40, № 5, с. 64—67, (1987). 6 Р. Е. Геворкян, Тезисы докл. республ. конф. молодых научн. сотр. Армении, Ереван, с. 22—23 (1973). 7 Ф. Р. Каминский, Алмазоносность некемберлитовых изверженных пород, Недра, М., 1984.

УДК 582.4/9:574.4

Б. Х. Межунц, Р. Г. Ревазян

Об энергетической возможности луговых фитоценозов

(Представлено академиком НАН Армении В. О. Казаряном 26/III 1993)

Ежегодно на поверхность Земли попадает 5×10^{20} ккал солнечной энергии, около половины которой составляет фотосинтетическая активная радиация (ФАР), поглощаемая зелеными растениями. Однако, как показали результаты многочисленных исследований, фитоценозы наземных растений аккумулируют всего лишь 1% ФАР Солнца, хотя теоретически они могут связывать в органических соединениях около 20% поглощенной ФАР (1,2).

В настоящее время о масштабах аккумулированной солнечной энергии, из-за недостаточной изученности энергетической возможности растений, судят по выходу сухой фитомассы, принимая при этом, что 1 г сухого вещества содержит примерно 4 ккал энергии. Однако, на наш взгляд, необходимо учитывать величину удельной калорийности разных видов растений, составляющих фитоценоз (3-6). Фотосинтетическую деятельность фитоценозов реально можно оценивать лишь путем прямого измерения их энергоемкости.

Исследования проводили в сухостепном, лугостепном и альпийском поясах Гегамского хребта. В сухостепном поясе (с. Ариндж Абовянского района, 1350 м над ур. м.) был выбран целинный межсадовый участок площадью около 5 га, который используется в качестве пастбища лишь осенью и зимой. В лугостепном поясе (ок. 1900—2100 м над ур. м.) исследования проводились на сенокосах, охвативших юго-западную, западную и северо-восточную склоны хребта, а в альпийском поясе—на пастбищах, находящихся выше 2800 м над ур. м. Учет надземной и подземной фитомасс проводили по методике, описанной в (7).

Энергию, аккумулированную в растительном веществе, определяли с помощью калориметра марки ВЛ-08М, предназначенного для измерения теплоты сгорания твердого и жидкого топлива. На основании учета фитомасс основных групп луговых растений (злаки, бобовые, разнотравье) и их средней удельной калорийности подсчитана энергоемкость опытных фитоценозов.

В табл. 1 обобщены результаты многолетних измерений калорийности, проведенных в трех климатических зонах. Дисперсионный анализ, проведенный по методике Б. А. Доспехова (8), показал, что между средними значениями калорийности растительных образцов, в пределах одной и той же климатической зоны, имеется существенное различие. Относительно широкий диапазон колебаний удельной калорийности, наблюдаемый в сухостепной зоне (где определения проводили в течение всего вегетационного периода), на наш взгляд, обусловлен сменой низкокалорийных эфемерных форм высококалорийными многолетними растениями. Сказанное подтверждается следующими данными: удельная калорийность эфемеров *G. tuberosum* L., *R. oxyspermus* M. B. и *H. scirpifolium* Desf. в течение вегетации менялась в пределах 3,2–4,3, а многолетних разнотравных растений — 4,2–4,9 ккал/г (роды *Tanacetum*, *Euphorbia*, *Achillea*).

Таблица 1

Удельная калорийность растительных групп (ккал/г, среднее за 1989–1992 гг.)

Наименование образца	Биоклиматическая зона		
	сухостепная	лугостепная	альпийская
Надземная фитомасса	4,0	3,9	4,3
в том числе: бобовые	—	4,0	4,5
злаки	4,2	4,0	4,4
разнотравье	4,3	3,9	4,2
опод	3,5	3,7	4,1
Подземная фитомасса	3,6	3,6	4,1
НСР ₀₅ (при F _φ = 2,74)	5,95	4,08	3,60

В условиях сухостепной зоны удельная калорийность надземной фитомассы, на уровне фитоценозов, в течение вегетации превышала удельную калорийность подземных органов растений. Однако эта тенденция, по-видимому, обнаруживается не у всех видов. Так, например, калорийность корней *T. Schelkovnikovy* L. и *R. oxyspermus* M. B. в период плодоношения была несколько выше калорийности надземных вегетативных органов.

Условия произрастания растений заметно отразились и на величине калорийности у основных групп луговой растительности (злаки, бобовые, разнотравье). Как видно из приведенных данных (табл. 1), в лугостепном и альпийском поясах представители разнотравных групп по величине удельной калорийности несколько уступали бобовым и злаковым формам, а в сухостепном поясе наблюдалась обратная картина. Это частично объясняется тем, что на опытном участке сухостепной зоны доминировали высококалорийные виды из семейства сложноцветных и молочайных.

Исследуемые фитоценозы, находясь на разных высотных поясах Гегамского хребта, существенно отличались друг от друга как по почвенно-климатическим условиям, так и по степени воздействия на них антропогенных факторов. С этой точки зрения в наиболее благоприятных условиях находились опытные участки лугостепной зоны, расположенные на высоте 1900—2100 м н. у. м. Из данных табл. 1 видно, что по удельной калорийности растения, произрастающие в лугостепной зоне, несколько уступали представителям сухостепной и альпийской зон. Повышение энергетического уровня растений в степях и альпийских лугах, несомненно, способствует лучшему их приспособлению к суровым условиям существования.

Таблица 2

Энергоемкость луговых фитоценозов, млн, ккал г

Биоклиматическая зона	Надземная фитомасса	Подземная фитомасса	Весь фитоценоз
Сухостепная	9,0	50,0	59,0
Лугостепная	40,0	110,0	150,0
Альпийская	7,0	110,0	117,0

Луговые фитоценозы отличались друг от друга также по величине энергоемкости надземных и подземных частей (табл. 2). Например, энергоемкость надземной фитомассы сенокосов лугостепей в 4,4 и 5,7 раза превысила соответствующую таковую надземных органов растений, произрастающих в условиях сухостепной и альпийской зон. Представители фитоценоза сухостепного пояса по величине энергоемкости подземной фитомассы в 2,2 раза уступали растениям двух остальных фитоценозов.

Основываясь на данных литературных источников (9, 10), можно допустить, что фитоценозы сухостепного, лугостепного и альпийского поясов Гегамского хребта в период вегетации поглощают соответственно: 6,5, 4,5 и 2,5 млрд. ккал/га ФАР Солица. Как показывают приведенные данные, в надземной фитомассе накапливалось лишь 7—40 млн. ккал/га или около 0,3—1% ФАР. Основная часть поглощенной энергии сосредоточена в подземных органах и в дальнейшем используется для роста и формирования надземных ассимилирующих органов.

Существенные различия в величинах энергоемкости надземных и подземных органов растений альпийских пастбищ и сухостепного пояса обусловлены разными факторами. В альпийской зоне в результате слабого роста надземных органов основная масса фотосинтетических продуктов перемещается в корни, а в сухостепной зоне относительно сильный рост надземных органов обуславливает интенсивный расход корнями синтезируемых ассимилятов.

Таким образом, результаты исследований дают определенное представление о величине удельной калорийности луговых растений и энер-

госемкости пастбищ и сенокосов. В частности, удельная калорийность травяных растений колебалась в пределах 3,2—4,9 ккал/г, при этом диапазон колебаний зависит как от состава травянистых форм, так и от почвенно-климатических условий. Можно считать установленным, что с ухудшением экологических условий удельная калорийность растений повышается. Выявлено также, что 73—94% поглощенной фиточенозами солнечной энергии накапливается в подземных органах.

Лаборатория биогеохимии Центра экологоноосферных исследований Национальной академии наук Армении

Բ. Խ. ՄԵԺՈՒՆՑ, Ռ. Ն. ԻՆՎԱՋՅԱՆ

Մարգագետնային ֆիտոցենոզների էներգետիկ հնարավորությունների մասին

Աշխատանքում բերվում են փորձնական տվյալներ Գեղամա լեռնաշղթայի շոր-տափաստանային, մարգագետնա-տափաստանային և ալպյան գոտիների պայմաններում խոտաբույսերի կալորիականության և ֆիտոցենոզների էներգատարողության վերաբերյալ:

Փորձերի արդյունքները ցույց են տվել, որ խոտաբույսերի տեսակարար կալորիականությունը, կախված բուսական նմուշի կազմից և կլիմայական պայմաններից, տատանվել է 3,2—4,9 կկալ/գ-ի սահմաններում: Բացահայտվել է նաև, որ կլիմայական պայմանների լարվածության ուժեղացմանը զուգընթաց բարձրանում է խոտաբույսերի տեսակարար կալորիականությունը:

Մոտավոր հաշվարկներով ֆիտոցենոզների կողմից կլանվող արևային էներգիայի 73—94% (մոտ 50—110 մլն. կկալ/հ) կուտակվում է բույսերի ստորգետնյա օրգաններում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 А. А. Ничипорович, Фотосинтез и вопросы продуктивности растений, Изд-во АН СССР, М., 1963. 2 А. А. Ничипорович, Световое и углеродное питание растений, Изд-во АН СССР, М., 1955. 3 В. Н. Голубев, Л. В. Махаева, С. К. Кожевникова, Ботанический журн., т. 52, № 9 (1967). 4 А. Н. Зироян, Флора, растительность и растительные ресурсы, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1985. 5 Х. Кочев, Д. Гуркова, Фитология, № 3, София, 1975 (на болг. яз.). 6 E. F. Colley, Ecology, v. 42, № 3, Du ham (USA), 1961. 7 Методы изучения биологического круговорота в различных природных зонах, Мысль, М., 1978. 8 Б. А. Доспехов, Методика полевого опыта, Колос М., 1973. 9 А. Н. Зироян, Биол. журн. Армении, т. 37, № 3 (1984). 10 Р. А. Карташян, А. М: Мхитарян, Тр: ЗакНИИГ, вып. 39 (45), Гидрометеиздат, Л., 1970.

ФИЗИОЛОГИЯ

УДК 611.61.617.621

К. В. Казарян, В. Ц. Ванцян, С. А. Маркосян, С. В. Фанарджян

Ритмогенные биоэлектрические свойства мочеточника
морской свинки

(Представлено академиком НАН Армении В. В. Фанарджяном 18/VIII 1992)

Характерной особенностью гладкомышечной ткани мочеточника (кошки, крысы, морской свинки) в условиях *in situ* является наличие специализированной высокоавтономной зоны, выполняющей роль водителя ритма (пейсмекера) (1-2), расположенной в области верхушки пиелоуретерального соустья. В основе деятельности пейсмекера лежат ритмичные медленноволновые нераспространяющиеся процессы, которые при продвижении вдоль мочеточника переходят в спайк-овые распространяющиеся разряды (2).

Вместе с тем в экспериментах, проведенных на изолированных мочеточниках морской свинки, наряду с известным околопочечным ритмоводителем отмечено наличие спонтанно активных клеток и в околопузырной зоне мочеточника (3), хотя в процентном отношении количество ритмогенных мышц из этой области было несколько меньше (60—65%).

В настоящей работе предпринята попытка изучить ритмогенные свойства околопузырной области мочеточника морской свинки в условиях *in situ*.

Исследование проводилось на 25 морских свинках массой 500—600 г, наркотизированных внутривенно нембуталом (40—50 мг/кг веса).

Животное на станке фиксировали в положении брюхом кверху, обнажали почку и мочеточник. Регистрацию биоэлектрической активности мочеточника проводили из трех различных отделов органа. Биопотенциалы пейсмекерной области мочеточника отводили монополярным серебряным электродом из области пиелоуретерального соустья. Индифферентный электрод устанавливали в толще паренхимы почки.

Для регистрации активности дистальных участков мочеточника, в том числе и околопузырной области, соответствующие части органа отделяли от прилегающих тканей и устанавливали на биполярных электродах. На протяжении всего эксперимента поддерживались необходи-

мые условия подогрева брюшной области, которая периодически орошалась вазелиновым маслом.

Ингибирование пейсмекерной активности либо проводимости мочеточника достигалось локальным охлаждением соответствующей области органа. Катехоламины в необходимых концентрациях (10^{-4} М) вводили непосредственно в бедренную вену.

Биоэлектрическую активность мочеточника регистрировали на электроэнцефалографе.

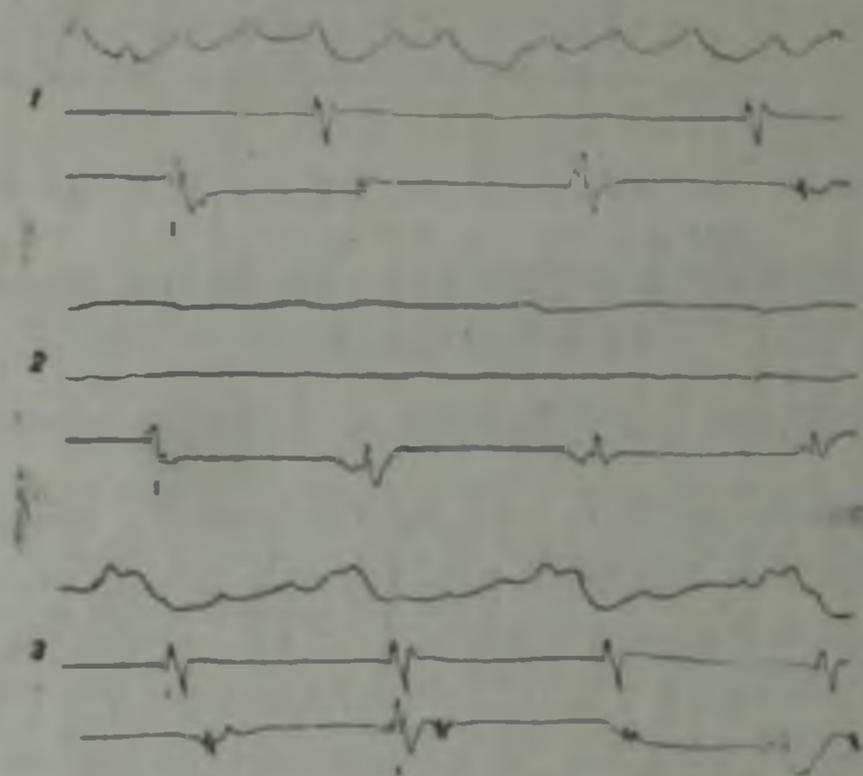


Рис. 1. Влияние спонтанной электрической активности околопочечной области мочеточника морской свинки на ритмогенез околопузырной области. Активность каждой зоны мочеточника представлена соответственно: верхняя линия (околопочечная область), средняя линия (проходящий спайк), нижняя (околопузырная область). 1—собственная активность околопузырной области при наличии проходящей волны из околопочечного пейсмекера; 2—ингибирование активности околопочечной зоны; 3—восстановление активности. Стрелками указана собственная активность околопузырной зоны. Калибровка: 1 мВ, 2 с.

На рис. 1 показана электрическая активность мочеточника морской свинки, полученная при одновременной регистрации биопотенциалов из трех различных областей органа. Максимальная частота активности, как правило, наблюдается в отделе ритмоводителя околопочечной области. По мере продвижения вдоль мочеточника она несколько затухает и в околопузырной области отмечается более редкий ритм возбудительно-сократительных волн.

В 30—40% случаев из околопузырной зоны мочеточника наряду с проходящими из околопочечной области спайками отмечался и собственный ритм (рис. 1, 1), причем частота спайков в данном участке, как правило, меньше по сравнению с околопочечным пейсмекером.

Ранее было показано, что ингибирование основного околопочечного ритмоводителя либо нарушение проводимости мочеточника кошки позволяло проявить ритмогенные возможности околопузырного отдела мочеточника (4). Действительно, при этих условиях исчезают проходящие спайки, учащается собственный ритм околопузырной области (рис. 1, 2). Восстановление же работы околопочечного ритмоводителя

и проводимости между двумя крайними областями мочеточника приводит к нарушению собственного ритма и навязывает ритм околопочечного пейсмекера (рис. 1, 3).

В следующей серии экспериментов выявление ритмогенных свойств исследуемой зоны мочеточника морской свинки проводилось при действии таких стимуляторов гладкомышечной ткани, как катехоламины. Введение норадреналина приводило к возникновению активности в исходно неактивной околопузырной зоне (рис. 2, 2) либо учащению собственного ритма в указанной области мочеточника (не показано). Эффект адреналина на выявление собственного ритма околопузырной области менее выражен по сравнению с норадреналином.

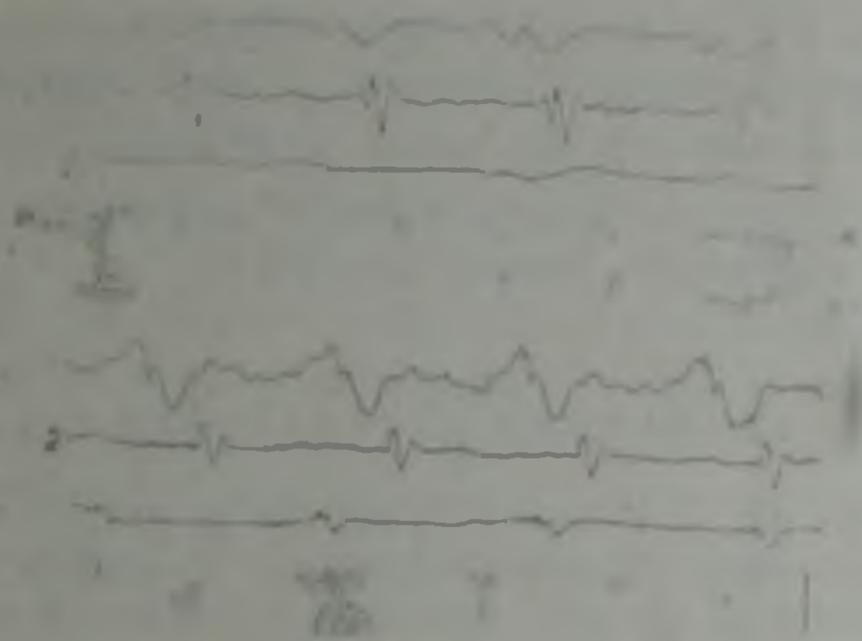


Рис. 2. Влияние норадреналина ($10^{-4}M$) на активность околопузырной области мочеточника морской свинки. Активность каждой зоны мочеточника представлена соответственно, верхняя линия (околопочечная зона), средняя (проходящий спайк), нижняя (околопузырная область). Собственный ритм в околопузырной зоне отсутствует. 1—в околопузырную зону спайковые разряды не распространяются; 2—влияние норадреналина (через 1 мин). Стрелками указаны собственная активность околопузырной зоны. Калибровка: 1 мВ, 2 с.

Таким образом, после околопочечного пейсмекера наиболее выраженными ритмогенными свойствами обладает околопузырная область мочеточника.

При нормальных физиологических условиях на целом мочеточнике наблюдается строгая корреляция между участком околопочечной зоны, регулирующим спайковые возбуждительно-сократительные волны до мочевого пузыря, и другими отделами мочеточника (1-3). Возможно, ритмоводители данного органа, расположенные в противоположных участках проводящей системы, способны при угнетении основного околопочечного ритмоводителя генерировать собственные потенциалы действия, что и может обуславливать возникновение эффекта везико-уретерального рефлюкса (антиперистальтических волн от мочевого пузыря к почке) (5)

Институт физиологии им. Л. А. Орбели
Национальной академии наук Армении

Մովախոզուկի միզածորանի ուրմի կենսաէլեկտրական հատկանիշները

Աշխատանքում ուսումնասիրվել է ժովախոզուկի միզափամփուշտի մոտ գտնվող շրջանի ութմածին հատկանիշները *in situ* եղանակով: Հայտնաբերվել է, որ երիկամի պեյսմեկերից հետո ութմածին հատկանիշներով օժտված է նաև միզափամփուշտի մոտ գտնվող շրջանը:

Ճիզիոլոգիական նորմալ պայմաններում նկատվում է երիկամային պեյսմեկերի կոռեկցիա նշված օրգանի մյուս մասերի հետ: Հնարավոր է, որ ութմի տարածողները, որ տեղակայված են փոխադրող համակարգի հակառակ կողմում, հիմնական երիկամային պոտենցիալի բացակայության դեպքում ընդունակ են ծնելու սեփական գործողության պոտենցիալներ, որով և պայմանավորված է վեգիկոորետերալ ռեֆլյուկսի առաջացումը (միզափամփուշտից դեպի երիկամից գնացող հակառակ ալիք):

Միզածորանի ուսումնասիրվող գոտու ութմածին հատկանիշների հայտնաբերման համար օգտագործվել են այնպիսի գրգռիչներ, ինչպիսիք են կատեխոլամինները (ադրենալին, նորադրենալին):

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ M. Kobayashi, Am. J. Physiol., v. 216, № 5, p 1279—1285 (1969). ² С. А. Бакунц, Вопросы физиологии мочеточников, Наука, Л., 1970. ³ К. В. Казарян, А. С. Тираян, Р. Р. Акопян, Физиол. журн. СССР, т. 76, № 10, с. 1459—1465 (1990). ⁴ К. В. Казарян, В. Ц. Ванцян, Физиол. журн. СССР, т. 77, № 10 (1991). ⁵ Ю. А. Пытель, Материалы 3-го Всесоюзн. съезда урологов, Минск, с. 88—95 (1984).

ФИЗИОЛОГИЯ

УДК 612.135:615.45:615.739.16

Н. Н. Мелконян, А. М. Чилингарян

Микрорегиональный анализ состояния капилляров
полушарий мозга кошек при воздействии адреналина

(Представлено академиком НАН Армении В. В. Фанарджяном 9/XI 1992)

При изучении влияния на организм физиологически активных веществ и фармакологических препаратов особый интерес представляет реакция гемомикрососудов на эти вещества. Это связано с тем, что подавляющее большинство лекарственных препаратов доставляется в организм и ткани кровью. По-видимому, в этом случае решающее значение имеют гематотканевые отношения между кровью и органами клетками, которые реализуются только на уровне микроциркуляторного русла (1-4). Однако необходимо отметить, что проблема выяснения физиологических механизмов регулирования органного микроциркуляторного русла все еще остается нерешенной.

Целью настоящего исследования было с помощью гистоангиологического метода (5) изучить изменения, происходящие в капиллярном звене микроциркуляторного русла полушарий мозга (область сигмовидной извилины) под влиянием адреналина. Выбор капилляров в качестве объекта исследования обусловлен тем, что диаметр их для данного органа более или менее постоянен и создается возможность выявления изменений в просвете этих сосудов при различных воздействиях.

Было проведено 10 опытов на 10 наркотизированных нембуталом (60 мг/кг) кошках. В глубоком наркотическом сне животным внутривенно вводили адреналин в терапевтических дозах (10 мг/кг). Через 1 мин животных декапитировали и извлекали головной мозг. Кусочки мозга фиксировали в 5%-ном формалине 24 ч при комнатной температуре. Из кусочков мозга готовили замороженные срезы толщиной 150 мкм. Полученные срезы обрабатывали по «кальций-аденозинтрифосфатному» безынъекционному методу (6) при рН буфера 11,3 с инкубацией срезов от 1 до 3 ч. После заключения препаратов в глицерин-желатину проводили морфометрические исследования капиллярного русла. Диаметр капилляров измеряли винтовым окулярным микрометром (ОКХ15, ОБХ40). Измеряли просвет 100 капилляров на срезе органа каждого животного или 10 полей зрения (в каждом поле

зрения по 10 капилляров). Статистическая обработка данных проводилась по Ермолаеву ($P < 0,001$). Для контроля использовали 10 наркотизированных кошек, которым не вводился адреналин.

Результаты морфометрических исследований срезов, обработанных «кальций-аденозинтрифосфатным» безынъекционным методом (°), показывают, что средний диаметр капилляров полушарий мозга в области сигмовидной извилины у контрольных животных составляет $6 \pm 0,13$ мкм. После воздействия адреналином просвет капилляров суживается в среднем до $5,6 \pm 0,06$ мкм. Результаты исследований на экспериментальных животных показывают, что адреналин вызывает слабоконстрикторную реакцию капилляров полушарий мозга кошек в среднем на 6,6%. Приведенные выше данные—средние значения диаметров капилляров являются показателем общего функционального состояния капиллярного русла органа и не позволяют выявить функциональное состояние отдельных микрорегионов сосудистого русла органа. Поэтому был проведен подсчет закрытых, резко суженных, нормальных (просвет которых соответствует среднему значению диаметра капилляров в контроле) и расширенных капилляров в каждом поле зрения. Изменение величины просвета капилляров более чем на 1,5–2 мкм от величины среднего значения диаметра капилляров в контроле принимали за сужение или расширение. При анализе общего количества измеренных капилляров у десяти исследованных кошек во всех исследованных полях насчитали 8 капилляров с просветом 2 мкм; 121—с просветом, суженным до 4,5 мкм; 355—с просветом, соответствующим контрольному (6 мкм), и 96 расширенных капилляров с просветом более 7,5 мкм. Иное соотношение наблюдается при анализе данных в разных микрорегионах в отдельности.

В табл. 1 и 2 представлено соотношение капилляров разных диаметров в десяти полях зрения двух микрорегионов. В первом (табл. 1) количество расширившихся капилляров преобладает над количеством суженных (24:18), но более половины от общего количества (58 из 100) измеренных капилляров не изменили просвет. Во втором (табл. 2) общее количество суженных капилляров (41) значительно преобладает над расширившимися.

Как видно из таблиц, в 1-ом микрорегионе общее количество расширившихся капилляров (24) преобладает над количеством суженных (18). Более половины (58) общего количества (100) капилляров не изменили просвет. А из десяти полей 1-го микрорегиона только в одном поле наблюдается резко выраженное сужение капилляров (90%). Во 2-ом микрорегионе в девяти полях из десяти наблюдается резкое сужение капилляров, и только в одном поле имеются расширенные капилляры. Количество суженных капилляров значительно преобладает над количеством расширенных. Более половины (56/58) исследованных капилляров в обоих микрорегионах имеют просвет в пределах нормы.

Общее же состояние микроциркуляторного русла и в 1-ом и во 2-ом микрорегионах можно считать мало изменившимся.

Таблица 1

Реакция капилляров полушария мозга кошки в десяти полях двух микрорегионов после воздействия адреналином

Таблица 2

1-ый микрорегион					2-ой микрорегион				
Поле	Количество капилляров				Поле	Количество капилляров			
	закрытые	суженные	нормальные	расширенные		закрытые	суженные	нормальные	расширенные
1	—	9	—	1	1	2	2	6	—
2	—	3	6	1	2	—	2	6	—
3	—	—	9	1	3	1	5	4	—
4	—	1	3	6	4	—	3	7	2
5	—	1	8	1	5	—	3	6	1
6	—	—	7	3	6	1	5	4	—
7	—	—	4	6	7	—	3	7	—
8	—	3	4	3	8	—	4	6	—
9	—	1	9	—	9	2	5	3	—
10	—	—	8	2	10	—	3	7	—
		18	54	24		6	35	56	3

Таблица 3

Величина провета капилляров в десяти полях одного микрорегиона у контрольных животных

Поле	В одном поле 10 капилляров		
	нормальные	суженные	расширенные
1	5	5	—
2	8	2	—
3	7	3	—
4	6	4	—
5	3	7	—
6	6	4	—
7	8	1	1
8	9	—	1
9	5	2	3
10	3	1	6
	60%	29%	11%

Различия в диаметрах капилляров наблюдаются не только в различных микрорегионах, но и в различных полях одного и того же региона микроциркуляторного русла органа. Например, если сравнить 4-е и 9-е поля 1-го микрорегиона, то в 4-ом поле преобладает количество

капилляров с расширенным просветом, а в 9-ом диаметр капилляров в пределах нормы. В 4-ом и 9-ом полях 2-го микрорегиона другое соотношение—в 4-ом преобладает количество «нормальных» капилляров, а в 9-ом—количество капилляров с суженным просветом. Если исходить из состояния каждого отдельно взятого капилляра в каждом поле, выясняется, что циркуляция крови в разных микрорегионах происходит неоднозначно. При анализе состояния капилляров в различных микрорегионах у контрольных животных также наблюдается неоднозначность просвета капилляров. Однако в сравнении с показателями, полученными при воздействии адреналина, различие в просвете капилляров слабо выражено.

При изучении влияния адреналина на внутриорганный капиллярное звено микроциркуляторного русла полушарий мозга, кроме установления среднего значения диаметра капилляров, проводилось сопоставление подвижности капилляров в разных микрорегионах. Удалось установить значительные отличия в подвижности капилляров различных микрорегионов. Среднее же значение диаметра капилляров является показателем общего функционального состояния капиллярного русла органа. Полученные данные показывают важность проведения микрорегионального анализа функционального состояния капиллярного русла органа, так как оно неоднозначно в различных регионах микроциркуляторного русла. Очевидно, это отличие обусловлено различным уровнем метаболизма и функционального состояния микрорегионов. Различие в диаметрах капилляров в одном микрорегионе зависит от реакции прекапиллярных артериол, а также от наличия сократительных белков (актомиозина, миозина) в эндотелиальных клетках стенки капилляра.

Институт физиологии им. Л. А. Орбели
Национальной академии наук Армении

Ե. Ե. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ, Ա. Մ. ԶԻԼԻՆԳԱՐՅԱՆ

Կատվի կիսազնդեցի մազանոթների վիճակի անալիզը ադրենալինի ազդեցության տակ

Կատվի նեոորդանային մազանոթային հունի վրա ադրենալինի ազդեցության ուսումնասիրման ժամանակ բացի մազանոթների միջին տրամաչափի ցուցանիշներից առանձին միկրոշրջաններում տարվել է համեմատական ուսումնասիրություն մազանոթների շարժողականության փոփոխականության վերաբերյալ: Պարզվել է, որ տարբեր միկրոշրջաններում տեղի է ունենում մազանոթների շարժողականության նկատելի տարբերություն:

Մազանոթների միջին տրամաչափը հանդիսանում է օրդանի մազանոթային հունի ընդհանուր ֆունկցիոնալ վիճակի ցուցանիշ: Լեյսպիսով, ուսումնասիրելով ադրենալինի ազդեցությունը միկրոցիրկուլյատոր հունի վրա, անհրաժեշտ է հաշվի առնել տարբեր միկրոշրջաններում մազանոթների ֆունկցիոնալ վիճակի նկատելի տարբերությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 Я. Л. Караганов и др., Тр. 2-го Моск. гос. мед. ин-та им. И. И. Павлова, т. 4, вып. 2, с. 7—26 (1976). 2 В. В. Куприянов, Архив анат., гистол. эмбриол., т. 62, вып. 3, с. 14—24 (1972). 3 Г. И. Мchedlishvili, Бюл. эксп. биол. и мед., т. 49, № 5, с. 10—15 (1960). 4 А. М. Чернух, Микроциркуляция, Медицина, М., 1975. 5 А. М. Чилингарян, ДАН АрмССР, т. 82, № 1, с. 46—48 (1986).

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Վ. Վ. Ոսկանյան, Ռ. Խալիլի—Որոշ երկչափանի նորմավորված տարածությունների միջև Բանախ-Մազուրի հեռավորությունը 3

Կ. Վ. Կասպախյան—Ոտոխաստիկ ապրոքսիմացիայի պրոցեդուրաների մասին, Մարտինգալային մոտեցում 67

Ի. Ռ. Վարչամով—Վերջավոր դաշտերում օպերատորների մի դասի մասին 73

Ս. Ա. Նիզիյան—Ծրագրավորման չեզոքների ֆունկցիոնալ կոնցեպցիա 131

Ա. Կ. Բաղդասարյան—Տարբեր չափողականությունների ներդրման մի թեորեմի մասին 138

Կ. Վ. Շահրազյան, Մ. Ա. Մովսիսյան—Հարահոսի կայունության խնդրի լուծումը, հիմնված պրոցեսների դեկոմպոզիցիայի վրա 142

Վ. Գ. Մելիքոնյան—Բաշխական կավարների քվադրանոյնություններ և պայմանական գերնոյնություններ 195

Յ. Ա. Խալալյան—Հաջորդականությունների ասիմպտոտիկ բաշխման մասին 200

Կ. Ա. Նավասարդյան—Կրկնակի Ուոլշի շարքերի միակության բազմությունների և շրո-շարքերի գործակիցների վերաբերյալ 206

Յ. Ա. Շամոյան, Մ. Ա. Զախարյան—Ներկայացման որոշ հարցեր զնդում հարմունիկ ֆունկցիաների կշռային տարածություններում 210

Կ. Վ. Վիլսոնյան—Բիցաձեռի հայտնի օրինակից ծնված օպերատորային փնջերի սպեկտրալ հատկությունների մասին 217

Ո. Հ. Դալալյան—Մոնոմորֆիզմի նորմալացումը ընդհանուր կատեգորիաներում 259

Մ. Ս. Գինովյան—Համասեռ Գաուսյան պատահական դաշտի սպեկտրի գնահատականների ասիմպտոտիկ հատկությունները 264

Ա. Հ. Հովհաննիսյան—Հյուգենսի սկզբունքը, Պենլենի հատկությունները և ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումները 270

Ա. Ս. Հասրաբյան, Գ. Վ. Սաբախյան—Լոկալ Օրեի տիպի պայմաններին բավարարող գրաֆների որոշ համիլտոնյան հատկությունները 274

Վ. Հ. Միլայեյան—Խմբերի վերջավոր ընդլայնումների նոյնությունների մասին 277

ՀԱՇՎՈՂԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Հ. Բ. Ներսիսյան, Ս. Ա. Ծիրունյան—Մասնակի տյուպլիցյան կորիզով բազմաչափ ինտեգրալ հավասարումների լուծման արագ ալգորիթմ 11

Հ. Բ. Ներսիսյան, Կ. Ս. Դաբրինյան—Ներդրման մեթոդ ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների լուծման համար 83

Հ. Բ. Ղաբրիյան—Տյուպլիցյան տիպի կորիզով երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման թվային լուծման արագ ալգորիթմներ 223

ՈՐԱԳՐԱՎՈՐՈՒՄ ԵՎ ՀԱՇՎՈՂԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Մ. Հ. Մխիթարյան—Տյուպլիցյան տիպի կորիզով երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծման ալգորիթմի զուգահեռ-հոսքային մեկնարանումը 88

Վ. Ա. Վարդանյան—Լրիվ ստուգիչ տեսության բարդության մասին մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների համար 93

Ս. Ն. Մաբկոսյան, Հ. Հ. Համբարձումյան—Կանալային ուղեգծմանը վերաբերող մի քանի խնդիրների բարդության վերաբերյալ 231

Վ. Կ. Բուստյան—Ոչ ստացիոնար համակարգերի համասեռ լարակումն ըստ ելքի հետադարձ կապերի կիրառման 281

Յու. Հ. Շուրոյան—Ազատ մասնակի-կոմուտատիվ կիսախմբերի հետքերի դուդահեռացումը 289

ԻՆԵՆԱՆԻԿԱ

Մ. Վ. Բելոպեկյան, Լ. Ռ. Մկրտչյան — Սալի ազատ տատանումների խնդրում ընդ-
լայնական սահմանի և պտտման ինեքսիայի հաշվառման հարցի շուրջը 237

ԱՌԱՋԿԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Մ. Ս. Մկրտչյան, Ս. Մ. Մխիբարյան — Առաձգականության տեսության պարբ-
րական կոնտակտային և խառը խնդիրների ինտեգրալ հավասարման շրջման քանաձևի
մասին 17

Ն. Ս. Մելիքովյան — Ծզր դուրս եկող ուղղաձիգ ճաքով առաձգական կիսահարթու-
թյան երկու կոշտ դրոշմներով հակահարթ ճնշման մասին 24

Ա. Ս. Խովմասյան — Զերմաառաձգական գոտու սահմանային շերտը և նրա փո-
խազդեցությունը ներքին լարվածադեֆորմացիոն վիճակի հետ 98

Մ. Ս. Մկրտչյան, Ս. Մ. Մխիբարյան — Երկայնական սահմանի ժամանակ համուղղ-
ված ճաքերի պարբերական համակարգով քաղաղրյալ առաձգական անվերջ մարմնի
լարվածային վիճակի վերաբերյալ խնդրի շուրջը 104

Մ. Ս. Մկրտչյան, Ս. Մ. Մխիբարյան — Երկայնական սահմանի ժամանակ համ-
ուղղված ճաքերի պարբերական համակարգով քաղաղրյալ առաձգական անվերջ մարմնի
լարվածային վիճակի վերաբերյալ խնդրի լուծումը օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդով 147

ՖԻԶԻԿԱ

Ֆ. Վ. Գասպարյան, Կ. Հ. Աղասարյան — Ներքին ուժեղացման նոր մեխանիզմ
կոմպենսացված կիսահաղորդից պատրաստված ինժեկցիոն ֆոտոդիոդներում 29

Վ. Հ. Ջրբաչյան — Խոտորումների տեսության շարքերի գումարումը երկու մակար-
դակների դեպքում 110

Վ. Մ. Հարությունյան, Խ. Վ. Ներկարարյան — Կիսահաղորդիչ-ճեղքը-կիսահաղորդիչ
կառուցվածքի հատկություններն ու կիրառման հնարավորությունները 243

ԱՍՏՂԱՖԻԶԻԿԱ

Ա. Գ. Սեդրակյան, Գ. Մ. Սեդրակյան — Պտտվող նեյտրոնային աստղերի դինամի-
կայի հավասարումները մրրիկների ծովան հաշվառմամբ 37

ԳԵՈՄԵՏՐԻԿԱ

Վ. Բ. Գամոյան, Հ. Վ. Կեռոզյան — Շերտաձև հանքամարմնի բնական էլեկտրա-
կան դաշտը 43

ՍԵՑՍՄՈՒՐԳԻԱ

Ս. Ս. Դաբրինյան, Ս. Ն. Նազարբեքյան, Ա. Ա. Հովսեփյան — Սպիտակ քաղաթի
տարածքի ելակետային սեյսմիկականության մասին 154

ՆՐԿԻՐԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Մ. Ա. Սարյան — Սեյսմագիստրոկաֆիաները Սևանի հատակային նստվածքներում 160

Մ. Ա. Սարյան, Ա. Վ. Վաբդանյան — Արկալային-բազիտ-գեորագիտային դիատրե-
մայի հայտնաբերումը Վեդու օֆիոլիտային գոտում 294

ԷԿՈԼՈԳԻԱ

Ռ. Հ. Ինևազյան — Տեխնոգեն-անոմալ ագրոլանդաֆունների ծանր մետաղներով ազ-
տոտվածության և դրանց դետոքսիկացիայի սկզբունքների մասին 165

Ի. Խ. Մեծունց, Ռ. Հ. Ինևազյան — Մարգագետնային ֆիտոցենոզների լանդշաֆտի
հնարավորությունների մասին 299

ՄՈՒԵԿՈՒԼԱՅԻՆ ԿԵՆՍԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Մ. Սեդրակյան, Գ. Ա. Մեացականյան, Ա. Ս. Կալաչյան, Ժ. Ա. Կժոյան, Ա. Ա. Հարությունյան, Կ. Կ. Ղաբաչյան — R-պլազմիդի ազդեցությունը Salmonella derby բջիջների սպիտակուցային սպեկտրի վրա 49

ԲԻՈՔԻՄԻԱ

Ա. Ա. Աղաբալյան, Լ. Ու. Նազարով, Հ. Ի. Բազիյան, Է. Ռ. Հակոբյան, Ա. Հ. Բազդասարյան, Գ. Ա. Կեռզյան, Գ. Ա. Վուխաչյան, Ի. Ա. Ղաբաչյան — Իրկթեյ ՌևՅ որպես վերջի հյուսվածքներում վնասակարգման և ուսպարացիոն պրոցեսները խթանող գործոն 173

ԲՈՒԳՍԵՐԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Վ. Վ. Ղազարյան — Մառերի ձմեռող ընձուղների և արմատների պահեստային սօսիմիլատներով ոչ հավասար հարստացումը կախված աճման պայմաններից 249

ՄԻԶԱՏԱԲՈՒԹՅՈՒՆ

Մ. Յու. Գալաչյան, Մ. Գ. Վոլկովիչ — Ոսկերգեզների Spieroptera Solier (Coeloptera, Buprestidae) սեռի նոր տեսակ Հարավային Ղազախստանից 54

ՏՂԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Է. Ս. Հարությունյան — Hypoaspis Can., 1884 s. l. սեռի Laelaptidae Berlese, 1892 (Parasitiformes) ընտանիքի նոր տեսակներ 115

Է. Ս. Հարությունյան — Նոր տեսակ Macrochelidae Vlitzhum, 1930 ընտանիքի Neopodocinum Oud., 1912 սեռից (Parasitiformes, Mesostigmata) 178

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Վ. Բ. Ֆանաբոյան, Ե. Վ. Պապոյան, Օ. Վ. Կեռզյան, Վ. Հ. Պուլսոյան — Ներքին ձիթապտղակորիզի փոխհատուցող ղերը առնետների մոտ ինստրուկտիվ ուսուցանողի միջակման ժամանակ տեսաթմբի փորակողմնային կորիզի վնասումից հետո 59

Ք. Ի. Հարությունյան — SP₉₋₁₁-ի ներփառոթային ներարկման ազդեցությունը առնետների որգանիզմի շերմային հոմեոստազի վրա 119

Ի. Բ. Մելիքսեբյան, Ջ. Հ. Մարտիրոսյան, Հ. Մ. Չիլինգարյան — Ֆիքսացիայի տարրեր ժամկետներում ուղեղի տարրեր կառուցվածքներում օրթոֆոսֆատների ուսուցանողությունը մասին 128

Ա. Հ. Բանտիկյան, Հ. Պ. Քոսոյան — Կամրջաուղեղիկային պրոյեկցիայի էլեկտրաֆիզիոլոգիական վերլուծությունը 181

Ք. Ռ. Հարությունյան, Լ. Ա. Ուսուցիչ — Օրգանիզմի շերմային հոմեոստազի սոմատոթրոպինային կարգավորումը 186

Մ. Ի. Նուբարյան, Ա. Ա. Պետրոսյան, Ս. Շ. Մարտիրոսյան — Վերարտադրության ընդհանուր կարգավորող համակարգում թուլությունների էպիֆիզի ներգրավման հնարավոր ուղիների մասին 190

Է. Ա. Կոբկոտյան, Ա. Կ. Մելիքյան, Ա. Ս. Ամատունի — Ուղեղարնի ամինէրգիկ գոյացությունների ազդեցությանը ենթարկվող առնետի ուղեղիկի ֆաստիզիալ կորիզի ներքինների ֆունային լմպուլսային ակտիվությունը 256

Ք. Վ. Ղազարյան, Վ. Ց. Վանցյան, Ս. Ա. Մարտիրոսյան, Ս. Վ. Ֆանաբոյան — Մոլախոզուկի միգրանտների ուսուցանող կենսաէլեկտրական հատկանիշները 303

Ն. Ն. Մելիքյան, Ա. Մ. Չիլինգարյան — Կատվի կիսագնդերի մազանոթների վիճակի անալիզը աղբնալիների ազդեցության տակ 307

СОДЕРЖАНИЕ 94-го тома

МАТЕМАТИКА

В. В. Восканян, Р. Халди—Расстояние Банаха—Мазура между некоторыми двумерными нормированными пространствами	3
К. В. Гаспарян—О процедурах стохастической аппроксимации. Мартингальный подход	67
Р. Р. Варшамов—Об одном классе операторов в конечных полях	73
С. А. Нигиян—Функциональная концепция языков программирования	131
А. Г. Багдасарян — Об одной теореме вложения разных измерений	138
К. В. Шахбазян, С. А. Мовсисян—Решение задачи стабилизации конвейера, основанное на декомпозиции процессов	142
В. Г. Мелконян — Квазитождества и условные сверхтождества дистрибутивных решеток	195
Ф. А. Талалаян — Об асимптотическом распределении последовательностей	200
К. А. Навасардян — О коэффициентах нуль-рядов и множествах единственности для двойных рядов Уолша	206
Ф. А. Шамоян, М. А. Закирян — Некоторые вопросы представления в весовых пространствах гармоничных в шаре функций	210
Г. В. Вирабян — О спектральных свойствах операторных пучков, порожденных известным примером Бицадзе	217
С. Г. Далалян — Нормализации мономорфизма в общих категориях	259
М. С. Гиновян — Асимптотические свойства оценок спектра однородного гауссовского поля	261
А. О. Оганесян — Принцип Гюйгенса, свойство Пенлеве и линейные дифференциальные уравнения	270
А. С. Асратян, Г. В. Саркисян — Некоторые гамильтоновы свойства графов с локальными условиями типа Ore	274
В. Г. Микаелян — О тождествах конечных расширений групп	277

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

А. Б. Нерсесян, С. А. Цирунян—Быстрый алгоритм решения многомерного уравнения с частично треплицевым ядром	11
А. Б. Нерсесян, К. С. Дарбинян—Метод погружения для решения нелинейных интегральных уравнений	83
А. Б. Гарибян — Быстрые алгоритмы численного решения интегрального уравнения второго рода с ядром треплицева типа	223

ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ТЕОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН

М. А. Мхитарян—Параллельно-поточная интерпретация алгоритма решения интегрального уравнения второго рода с ядром треплицева типа	88
--	----

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

В. А. Варданян—О сложности полных проверяющих тестов для монотонных булевых функций	93
С. Е. Маркосян, О. А. Амбарцумян — Об NP полноте некоторых задач, относящихся к канальной трассировке	231
В. К. Брутян — Однородное развязывание нестационарных систем с применением обратных связей по выходу	281
Ю. Г. Шукирян — Распараллеливание следов свободных частично-коммутативных полугрупп	289

МЕХАНИКА

- М. В. Белубекян, Л. Р. Мкртчян — К вопросу учета поперечных сдвигов и инерции вращения в задаче свободных колебаний пластины 237

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- М. С. Мкртчян, С. М. Мхитарян—О формуле обращения интегрального уравнения периодических контактных и смешанных задач теории упругости 17

- Н. С. Мелкумян—Об антиплоском вдавливании двух жестких штампов в упругую полуплоскость с вертикальной выходящей на границу трещиной 24

- А. Б. Товмасын—Погранслои термоупругой полосы и его взаимодействие с внутренним напряженно-деформированным состоянием 98

- М. С. Мкртчян, С. М. Мхитарян—К задаче о напряженном состоянии составного упругого бесконечного тела с периодической системой коллинеарных трещин при продольном сдвиге 104

- М. С. Мкртчян, С. М. Мхитарян — Решение задачи о напряженном состоянии составного упругого бесконечного тела с периодической системой коллинеарных трещин при продольном сдвиге методом ортогональных многочленов 147

ФИЗИКА

- Ф. В. Гаспарян, Г. Г. Агасарян—Новый механизм внутреннего усиления в инжекционных фотодиодах из компенсированного полупроводника 29

- В. А. Джрбашян—Суммирование рядов теории возмущений в случае двух уровней 110

- В. М. Арутюнян, Х. В. Неркарарян — Свойства и возможности применения структуры полупроводник—зазор—полупроводник 243

АСТРОФИЗИКА

- А. Д. Седракян, Д. М. Седракян—Уравнение динамики вращающейся нейтронной звезды с учетом изгиба вихрей 37

ГЕОФИЗИКА

- В. Б. Гамоян, А. В. Геворкян—Естественное электрическое поле пластообразного рудного тела 37

СЕЙСМОЛОГИЯ

- С. С. Дарбинян, С. Н. Назаретян, А. А. Овсепян — Об исходной сейсмичности территории г. Спитак 154

ГЕОЛОГИЯ

- М. А. Сатиан — Сейсмодислокации в донных осадках Севана 160

- М. А. Сатиан, А. В. Варданян — Обнаружение щелочно-базит-ультрабазитовой диатремы в Вединской офиолитовой зоне 294

ЭКОЛОГИЯ

- Р. Г. Ревазян — О токсичности тяжелых металлов в техногенно-аномальных агроландшафтах и принципах их детоксикации 165

- Б. Х. Межунц, Р. Г. Ревазян — Об энергетической возможности луговых фитоценозов 299

МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ

- А. М. Седракян, Г. А. Мнацаканян, А. С. Калачян, Ж. А. Кцоян, А. А. Арутюнян, К. Г. Карагезян—Влияние R-плазмиды на белковый спектр клеток *Salmonella derby* 49

БИОХИМИЯ

- А. С. Агабалян, Л. У. Назаров, А. Р. Базиан, Э. Б. Акопян, А. А. Багдасарян, Г. А. Геворкян, Г. А. Чухаджян, Р. А. Захарян — дРНК как фактор, стимулирующий регенеративные и репаративные процессы в ренальных тканях 173

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

- В. В. Казарян — О неравномерном обогащении запасными ассимилятами зимующих побегов и корней древесных в зависимости от условий произрастания 249

ЭНТОМОЛОГИЯ

- Ю. М. Калашян, М. Г. Волкович—Новый вид златки рода *Sphenoptera* Soller (*Coleoptera*, *Vuprestidae*) из Южного Казахстана 54

АКАРОЛОГИЯ

- Э. С. Арутюнян—Новые виды рода *Hypocaspis* Can., 1884 s. l. семейства *Laelarptidae* Berlese 1892 (*Parasitiformes*) 115

- Э. С. Арутюнян — Новый вид рода *Neorofolium* Oudemans, 1902 семейства *Macrocheilidae* Vitzthum, 1930 (*Parasitiformes*, *Mesostigmata*) 178

ФИЗИОЛОГИЯ

- В. В. Фанарджян, Е. В. Папоян, О. В. Геворкян, В. Н. Погосян—Компенсаторная роль нижней оливы при выработке инструментальных рефлексов у крыс после разрушения вентролатерального ядра таламуса 59

- К. Р. Арутюнян—Влияние внутрижелудочкового введения SP_{5-11} на температурный гомеостаз организма у крыс 119

- И. Б. Меликсетян, Дж. А. Мартиросян, А. М. Чилингарян—О реакционноспособности ортофосфатов в различных структурах мозга при разных сроках фиксации 123

- А. О. Бантикян, О. П. Косоян — Электрофизиологический анализ мосто-мозжечковой проекции 181

- К. Р. Арутюнян, Л. А. Саакова — Соматотропиновая регуляция температурного гомеостаза организма 186

- М. Б. Назарян, А. А. Петросян, С. Ш. Мартиросян — О возможных путях включения эпифиза птиц в общую регулируемую систему репродукции 190

- Э. А. Коркотян, А. К. Меликян, А. С. Аматыни — Фооновая импульсная активность фастигальных нейронов мозжечка крысы, испытывающих влияния аминергических структур ствола мозга 253

- К. В. Казарян, В. Ц. Ванцян, С. А. Маркосян, С. В. Фанарджян — Ритмогенные биоэлектрические свойства мочеточника морской свинки 303

- Н. Н. Мелконян, А. М. Чилингарян — Микрорегиональный анализ состояния капилляров полушарий мозга кошек при воздействии адреналина 307

CONTENTS of volume 94

MATHEMATICS

<i>V. V. Voskanyan, R. Khalidi</i> — The Banach—Mazur distance between some two-dimensional normed spaces	3
<i>K. V. Gasparian</i> — On a stochastic approximation procedures. Martingale approach	67
<i>R. R. Varshamor</i> — On a class of operators in finite fields	73
<i>S. A. Niglyan</i> — Functional conception of programming languages	131
<i>A. G. Bagdassarian</i> — About one embedding theorem of different dimension	138
<i>K. V. Shakhbazian, S. A. Movsisyan</i> — The solution of pipe-line stabilization problem founded on process decomposition	142
<i>V. G. Melkonian</i> — Quasi-identities and conditional hyperidentities of distributive lattices	195
<i>F. A. Talalian</i> — On the asymptotic distribution of successions	200
<i>K. A. Navasardian</i> — On coefficients of null-series and on sets of uniqueness of double Walsh system	206
<i>F. A. Shamoyan, M. A. Zakarian</i> — Some problems of representation in weighted spaces of functions harmonic in a ball	210
<i>G. V. Virabian</i> — On the spectral properties of polynomial pencils, generated by famous Bialze example	217
<i>S. H. Dalalian</i> — On normalization of a monomorphism in general categories	259
<i>M. S. Ginoulan</i> — Asymptotic properties of estimates of spectrum of Gaussian homogeneous field	264
<i>A. H. Hovhannisian</i> — Huygens' principle, Painleve property and nonlinear differential equations	270
<i>A. S. Asratian, G. V. Sarkisian</i> — Some hamiltonian properties of graphs with local Ore's type conditions	274
<i>V. H. Mikaelian</i> — About identity of finite extension of groups	277

COMPUTER MATHEMATICS

<i>H. B. Nersessian, S. A. Tsruntan</i> — Fast solution algorithm for integral equations with partly Toeplitz kernels	11
<i>H. B. Nersessian, K. S. Darbinian</i> — Immersion method for solution of nonlinear integral equations	83
<i>H. B. Gharibian</i> — Fast algorithms for numerical solution of integral equation of second kind with Teoplitz-like kernel	223

PROGRAMMING AND THEORY OF COMPUTERS

<i>M. A. Mkhitarian</i> — Parallel-flow interpretation of the algorithm of second-class integral equation with the kernel of Toeplitz type solving	89
--	----

APPLIED MATHEMATICS

<i>V. A. Vardanian</i> — On the complexity of complete detecting tests for monotone Boolean functions	93
<i>S. E. Markosian, H. H. Hambartsumian</i> — On NP completeness of some problems concerning channel routing	231
<i>V. K. Brutlan</i> — Similar decoupling of non-stationary systems with application of feedback	289
<i>Yu. H. Shoukourian</i> — Parallelization of traces in partially commutative semigroup	299

MECHANICS

- M. V. Be'ubekian, L. R. Mkr'ichian* — On the account of shear strains and rotation inertia in the problem of free vibrations of a plate 237

THEORY OF ELASTICITY

- M. S. Mkr'ichian, S. M. Mkhitarian* — On formula of treatment of integral equation of periodical contact and mixed problems of theory of elasticity 17
- N. S. Melkounian* — About anti-flat pressing of two stiff punches into an elastic half-plane with a vertical, coming to boundary 24
- A. B. Toumasian* — The boundary layer of thermoelastic strip and interaction with the internal stress-strain state 98
- M. S. Mkr'ichian, S. M. Mkhitarian* — The problem on stress condition of the composite elastic nonfinite body with the periodical system of collinear cracks during longitudinal displacement 104
- M. S. Mkr'ichian, S. M. Mkhitarian* — The solution of the problem on stress condition of the composite elastic nonfinite body with periodical system of collinear cracks during the longitudinal displacement by the method of orthogonal polynomials 147

PHYSICS

- F. V. Gasparian, G. H. Aghasarian* — A new internal amplification mechanism in the injection photodiodes made of compensated semiconductor 29
- V. A. Dyrhashtan* — Summing up of perturbation theory series in the case of two levels 110
- V. M. Harutyunian, Kh. V. Nerkararian* — Semiconductor-cleft-semiconductor structures properties and applications possibilities 243

ASTROPHYSICS

- G. D. Sedrakian, D. M. Sedrakian* — Dynamic equation of rotation of Neutron stars with vertex 37

GEOPHYSICS

- V. B. Ganoyan, A. V. Gevorkian* — Natural electric field of stratum ore body 43

SEISMOLOGY

- S. S. Darbinian, S. N. Nazaretian, A. A. Houseplan* — On starting seismology Spitac's territory 154

GEOLOGY

- M. A. Sattian* — Seismic dislocations in bottom sediment of Sevan 160
- M. A. Sattian, A. V. Vardanian* — A kind of alkaline-basite-ultrabasite diatreme in Vedy ophiolite zone and perspective of diamond searching 294

ECOLOGY

- R. G. Revazian* — On toxicity of the heavy metals in the technogen-anomal agrolandscaphites and their detoxication principles 165
- B. Kh. Mezhunts, R. H. Revasian* — On energetics possibility of meadow phytocoenosis 299

MOLECULAR BIOLOGY

- A. M. Sadrakian, G. A. Mna'sakanian, H. S. Kalachian, G. A. Kiznyan, A. A. Arutunian — The influence of R-plasmid on the protein of *Salmonella derby* 94

BIOCHEMISTRY

- A. S. Agabalian, L. U. Nazarov, A. R. Bizian, E. B. Hakopian, A. A. Bagdasarian, G. A. Gevorkian, G. A. Chukhajian, R. A. Zacharian — dsRNA, as a factor, stimulating regenerative and reparative processes in wounds tissue 173

PLANT PHYSIOLOGY

- V. V. Kazarian — On the trees' shoots and roots at the winter by spare assimilates depending on growth conditions 249

ENTOMOLOGY

- M. Yu. Kalashian, M. G. Volkovitch — A new species of the jewel-beetles of the genus *Sphenoptera* Soller (Coleoptera, Buprestidae) from South Kazakhstan 54

ACAROLOGY

- E. S. Arutunian — New species of the genus *Hypoaspis* Can., 1884 s. l. of the family Laelapidae Berlese, 1892 (Parasitiformes) 115
E. S. Arutunian — A new species of the genus *Neopodocinum* Oudemans, 1912 of the family Macrochelidae Vitzthum, 1930 (Parasitiformes, Mesostigmata) 178

PHYSIOLOGY

- V. V. Fanardjian, E. V. Popyan, O. V. Gevorkian, V. I. Pogossian — The compensatory role of the inferior olive in instrumental conditioned rats after destruction of the ventrolateral thalamic nucleus 59
K. R. Harutunian — SP₉₋₁₁ Intraventricular injection influence on temperature homeostasis of rats' organism 119
I. B. Melicsetian, J. A. Martirosian, A. M. Chilingarian — Reactionability of orthophosphates in different structures of the cerebrum during various periods of fixation 132
A. H. Bantikyan, H. P. Kosoyan — Electrophysiological analysis of ponto-cerebellar projection 181
K. R. Harutunian, L. A. Sahakova — The somatotropin regulation of temperature homeostasis of the organism 186
M. B. Nazarian, A. A. Petrosian, S. Sh. Martirosian — On the possible ways for including of bird epiphys in general regulating system of reproduction 190
E. A. Korkotian, A. K. Melkian, A. S. Amatuni — Background impulse activity of fastigial neurons of the rat cerebellum affected by influence of aminergic structures of brainstem 253
K. V. Kazarian, V. Ts. Vantsian, S. A. Marcosian, C. V. Fanaritan — Rhythmogenous bioelectrical properties of the zulea-pig ureter 303
N. N. Melconian, A. M. Chilingarian — The microregional analysis the brain capillars condition of the cat on the adrenalin influence 307