

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՑԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ  
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր .

Д О К Л А Д Ы

Том 94 № 4

1993

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՉՈՒՄԻԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկ-  
նածու (պատ. Բարտոլոմայ), Է. Գ. ԱՅ-  
ՐԻԿՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս,  
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ թղթ-  
անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադե-  
միկոս Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ  
ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ),  
Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ա-  
կադեմիկոս, Ի. Մ. ՍԵՂՈՒԿՅԱՆ, Հայաս-  
տանի ԳԱԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբա-  
գիր), Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱՅԵԼՅԱՆ, Հայաս-  
տանի ԳԱԱ ակադեմիկոս, Վ. Բ. ՅԱ-  
ՆԱՐՉՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.  
АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв.  
секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик  
НАН Армении, В. О. КАЗАРЯН, ака-  
демик НАН Армении (зам. отв редак-  
тора), Г. С. СААКЯН, академик  
НАН Армении, Д. М. СЕДРАКЯН,  
академик НАН Армении (отв. редак-  
тор), А. А. ТАЛАЛЯН, чл-корр. НАН  
Армении, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН,  
академик НАН Армении, В. В. ФА-  
НАРДЖЯН, академик НАН Армении.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՑԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

Ե Ր Ե Վ Ա Ն

Е Р Е В А Н

## Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

### ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Վ. Գ. Մելիքոյան—Բաշխական կավարների քվադրատայնութիւններ և պայմանա- կան գերնայնութիւններ . . . . .	195
Յ. Ա. Խալալյան—Հաջորդականութիւնների ասիմպտոտիկ բաշխման մասին . . . . .	200
Կ. Ա. Նավասարդյան—Կրկնակի Ուոլշի շարքերի միակութիւնը բազմութիւնների և հրո-շարքերի գործակիցների վերաբերյալ . . . . .	206
Յ. Ա. Շամոյան, Մ. Ա. Ջաֆարյան—Ներկայացման որոշ հարցեր գնդում հարմո- նիկ ֆունկցիաների կշռային տարածութիւններում . . . . .	210
Ի. Վ. Վիրաբյան—Բիցաձեւի հայտնի օրինակից ծնված օպերատորային փնջերի սպիկտրալ հատկութիւնների մասին . . . . .	217

### ՀԱՇՎՈՂԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Հ. Բ. Վարիբյան—Տյուպլիցյան տիպի կորիզով երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավա- սարման թվային լուծման արագ ալգորիթմներ . . . . .	223
---	-----

### ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ս. Ե. Մարկոսյան, Հ. Հ. Համբարձումյան—Կանալային ուղեգծմանը վերաբերող մի քանի խնդիրների բարդութիւնի վերաբերյալ . . . . .	231
---	-----

### ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Մ. Վ. Բելյուբեկյան, Լ. Ռ. Մկրտչյան—Սալի ազատ տատանումների խնդրում ընդ- լայնական սահմանների և պտտման ինտեգրալի հաշվառման հարցի շուրջը . . . . .	237
---	-----

### ՖԻԶԻԿԱ

Վ. Մ. Հաբուսյան, Խ. Վ. Ներկարարյան—Կիսահաղորդիչ-ճեղքը-կիսահաղորդիչ կառուցվածքի հատկութիւններն ու կիրառման հնարավորութիւնները . . . . .	243
---	-----

### ԲՈՒՅՍԵՐԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Վ. Վ. Ղազարյան—Ծառերի ձմեռող ընձյուղների և արմատների պահեստային ասիմիլատներով ոչ հավասար հարստացումը կախված անձան պայմաններից . . . . .	249
--	-----

### ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Է. Ա. Կուրկոտյան, Ա. Կ. Մելիքյան, Ա. Ս. Աւետուհի—Ուղեղաբնի ամինէրգիկ գոյացութիւնների ազդեցութեանը ենթարկվող առնետի ուղեղիկի ֆաստիգիալ կորիզի նեյրոնների ֆունկցիոնալ վարկութիւնը . . . . .	256
---	-----

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

- В. Г. Мелконян* — Квазитожества и условные сверхтождества дистрибутивных решеток . . . . . 195
- Ф. А. Талалян* — Об асимптотическом распределении последовательностей . . . . . 200
- К. А. Навасардян* — О коэффициентах нуль-рядов и множествах единственности для двойных рядов Уолша . . . . . 206
- Ф. А. Шамоян, М. А. Закарян* — Некоторые вопросы представления в весовых пространствах гармоничных в шаре функций . . . . . 210
- Г. В. Вирабян* — О спектральных свойствах операторных пучков, порожденных известным примером Бицадзе . . . . . 217

### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

- А. Б. Гарибян* — Быстрые алгоритмы численного решения интегрального уравнения второго рода с ядром теплицева типа . . . . . 223

### ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

- С. Е. Маркосян, О. А. Амбарцумян* — Об NP полноте некоторых задач, относящихся к канальной трассировке . . . . . 231

### МЕХАНИКА

- М. В. Белубекян, Л. Р. Мкртчян* — К вопросу учета поперечных сдвигов и инерции вращения в задаче свободных колебаний пластины . . . . . 237

### ФИЗИКА

- В. М. Арутюнян, Х. В. Неркарарян* — Свойства и возможности применения структуры полупроводник—зазор—полупроводник . . . . . 243

### ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

- В. В. Казарян* — О неравномерном обогащении запасными ассимилятами зимующих побегов и корней древесных в зависимости от условий произрастания . . . . . 249

### ФИЗИОЛОГИЯ

- Э. А. Коркотян, А. К. Меликян, А. С. Аматыни* — Фоновая импульсная активность фасцигальных нейронов мозжечка крысы, испытывающих влияния аминергических структур ствола мозга . . . . . 253

## CONTENTS

### MATHEMATICS

- V. G. Melkonian* — Quasi-identities and conditional hyperidentities of distributive lattices . . . . . 195
- F. A. Tuzanian* — On the asymptotic distribution of successions . . . . . 200
- K. A. Navasardian* — On coefficients of null-series and on sets of uniqueness of double Walsh system . . . . . 205
- F. A. Shumoyan, M. A. Zukurian* — Some problems of representation in weighted spaces of functions harmonic in a ball . . . . . 210
- G. V. Virabian* — On the spectral properties of polynomial pencils, generated by famous Bitsadze example . . . . . 217

### COMPUTER MATHEMATICS

- H. B. Gharibian* — Fast algorithms for numerical solution of integral equation of second kind with Teoplitz-like kernel . . . . . 223

### APPLIED MATHEMATICS

- S. E. Markosian, H. H. Hambartsumian* — ON NP completeness of some problems concerning channel routing . . . . . 231

### MECHANICS

- M. V. Belubekian, L. R. Mertschian* — On the account of shear strains and rotation inertia in the problem of free vibrations of a plate . . . . . 237

### PHYSICS

- V. M. Harutyunian, Kh. V. Nerkarartan* — Semiconductor-cleft-semiconductor structures properties and applications possibilities . . . . . 243

### PLANT PHYSIOLOGY

- V. V. Kazarian* — On the trees' shoots and roots at the winter by spare assimilates depending on growth conditions . . . . . 249

### PHYSIOLOGY

- E. A. Korkotian, A. K. Melkian, A. S. Amatuni* — Background impulse activity of fastigial neurons of the rat cerebellum affected by influence of aminergic structures of brainstem . . . . . 253

Сдано в набор 29.11.1993 г. Подписано к печати 24.06.1994 г.  
 Формат 70 × 108<sup>1/16</sup>. Бумага № 1, сыктывкарская. Высокая печать. Печ. лист 4.0.  
 Усл. печ. л. 5.6. Усл. кр. отт. 5.6. Учет. изд. л. 4.01. Тираж 2.0. Заказ № 141.  
 Цена 3 драма.

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г, III эт., к. 13, т. 27-36-95

Издательство Национальной академии наук Армении.

375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Национальной академии наук Армении.

375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24.

ISSN 011-1330 Доклады НАН Армении. 1993, Т. 91, № 4, с. 193-256

УДК 512.57

В. Г. Мелкоян

Квазитождества и условные сверхтождества  
 дистрибутивных решеток

(Представлено академиком НАН Армении Р. Р. Варшавским 16/X 1992)

Формально условным сверхтождеством (квазисверхтождеством) называется формула 2-й степени вида

$$\forall F_1, \dots, F_m \forall x_1, \dots, x_n (\pi_1 = \sigma_1 \& \tau_1 = \sigma_2 \& \dots \& \tau_{s-1} = \sigma_s \rightarrow \tau_s = \sigma_{s+1})$$

где  $\pi_1, \sigma_1, \dots, \pi_{s-1}, \sigma_{s-1}$  — некоторые термы от предметных переменных  $x_1, \dots, x_n$  и от функциональных переменных  $F_1, \dots, F_m$  (\*).

Условная формула\* называется условным T-сверхтождеством, если  $\|F_1\|, \dots, \|F_m\| \subseteq T$ .

Рангом условного сверхтождества назовем мощность множества  $\{F_1, \dots, F_m\}$ . В условном сверхтождестве (тождестве) равенства, до знака импликации, назовем посылаем, а равенство после знака импликации — заключением.

Пусть  $U = \langle B; \Sigma \rangle$  — некоторая T-алгебра в смысле (\*). Будем говорить, что в  $U$  выполняется условное T-сверхтождество

$$\forall F_1, \dots, F_m \forall x_1, \dots, x_n (\pi_1 = \sigma_1 \& \dots \& \tau_s = \sigma_s \rightarrow \tau_{s+1} = \sigma_{s+1}),$$

если всякий раз, когда каждая функциональная переменная из  $F_1, \dots, F_m$  заменяется любой операцией соответствующей arity из  $\Sigma$ , получаем квазитождество, истинное в  $U$ .

Мы будем рассматривать условные сверхтождества, имеющие место в многообразии  $D$  дистрибутивных решеток.

Через  $hq_i$  обозначим множество тех условных сверхтождеств, истинных в  $D$ , ранг которых  $< 2$ . Цель настоящей работы — найти базис для  $hq_i$ .

1. Связь между условными сверхтождествами и квазитождествами. 1.1. Квазитождество называется тривиальным, если в его посылаках и заключении имеется лишь один символ операции.

\* Для краткости условные сверхтождества иногда записываются без кванторной приставки.

Любое тривиальное квазитождество, имеющее место в классе  $D$  дистрибутивных решеток, выполняется и в классе  $SL$  всех полурешеток.

Доказательство вытекает из того факта, что любая полурешетка вкладывается в некоторую дистрибутивную решетку ([3], с. 148).

1.2. Если  $\alpha$  является квазитождеством (термом), то назовем ретрактом  $\alpha$  и обозначим через  $\text{ret}(\alpha)$  тривиальное квазитождество (терм), которое получается от  $\alpha$ , заменой знака  $\cdot$  знаком  $+$ .

Квазитождество  $\alpha$ , имеющее место в  $D$ , назовем  $D$ -регулярным, если в  $D$  имеет место также и  $\text{ret}(\alpha)$ .

Через  $\text{rqi}$  обозначим множество всех  $D$ -регулярных квазитождеств.

1.3. Если  $\alpha$  квазитождество, то трансформацией  $h$  называется условное сверхтождество  $H(\alpha)$ , которое получается от  $\alpha$ , заменой  $(+) \rightarrow F_1$  и  $(\cdot) \rightarrow F_2$ , где  $F_1, F_2$  — бинарные функциональные переменные. Если  $x = \{\alpha_k | k \in K\}$  — некоторое семейство квазитождеств, то обозначим  $H(x) = \{H(\alpha_k) | k \in K\}$ .

Легко заметить, что  $H(\text{rqi}) = \text{hqi}$ .

1.4. Утверждение. Если семейство квазитождеств  $x = \{\alpha_k | k \in K\}$  является базисом для  $\text{rqi}$ , то  $H(x)$  будет базисом для  $\text{hqi}$ .

2. Квазимногообразие  $PDQ$  дистрибутивных квазирешеток.

2.1. Пусть  $A(+)$  некоторая полурешетка. Будем говорить, что в  $A(+)$  элементы  $a, b \in A$  находятся в отношении  $a \sim \langle + \rangle \sim b$ , если либо  $a \pm \langle b$ , либо  $b \pm \langle a$ .

Допустим, что  $U(+, \cdot)$  некоторая биполурешетка. Скажем, что в  $U(+, \cdot)$  выполняется условие конечного кручения, если для любых  $a, b \in U$  имеет место  $a \sim \langle + \rangle \sim b \Leftrightarrow a \sim \langle \cdot \rangle \sim b$ .

Будем говорить, что в биполурешетке  $U(+, \cdot)$  выполняется условие кручения, если в любой подалгебре  $U(+, \cdot)$  выполняется условие конечного кручения.

2.2. Алгебра  $U(+, \cdot)$  называется дистрибутивной квазирешеткой ( $^b$ ), если она удовлетворяет следующим тождествам:

$$\begin{array}{lll} x \cdot x = x, & x + x = x & (\text{Id}) \\ x \cdot y = y \cdot x, & x + y = y + x & (\text{com}) \\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), & (x + y) + z = x + (y + z) & (\text{ass}) \\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, & x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z) & (\text{dis}) \end{array}$$

Через  $L_3^b$  обозначим следующую 3-элементную алгебру:

+	a	b	∞
a	a	b	∞
b	b	b	∞
∞	∞	∞	∞

·	a	b	∞
a	a	a	∞
b	a	b	∞
∞	∞	∞	∞

Нетрудно проверить, что  $L_2^*$  является дистрибутивной квазирешеткой, в которой не выполняется условие конечного кручения.

2.3. Напомним определение суммы Плонки (<sup>6</sup>).

Пусть  $(U_i | i \in I)$  является семейством алгебр типа  $\tau$ , индексированных по элементам верхней полурешетки  $I$ . Пусть для каждой пары  $i, j \in I$ , где  $i \leq j$  в  $I$ , дан гомоморфизм  $h_{ij}: U_i \rightarrow U_j$ , так что  $h_{ii}$  — это идентичное отображение  $U_i$  в себя, а

$$i \leq j \leq k \Rightarrow h_{ik} = h_{jk} h_{ij}. \quad (2.3.1)$$

Тогда совокупность  $\langle I, (U_i | i \in I), (h_{ij} | i, j \in I; i \leq j) \rangle$  называется направленной системой алгебр. Суммой Плонки этой системы называется алгебра  $U$  типа  $\tau$ , носителем которой является  $\bigcup U_i$ , а ее операции определяются следующим образом:

$$f_i^u(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) = f_i^k(h_{i_1 k}(a_{i_1}), \dots, h_{i_n k}(a_{i_n})), \quad (2.3.2)$$

где  $a_{ij} \in U_{ij}$  для любого  $j \in \overline{1, n}$ ,  $k = \sup(i_1, \dots, i_n)$ ,  $f_i$  есть  $n$ -местный символ операции из  $\tau$ ,  $f_i^u$  — реализация  $f_i$  на  $U$ , а  $f_i^k$  — реализация  $f_i$  на  $U_k$ .

В (<sup>6</sup>) показано, что любая дистрибутивная квазирешетка является суммой Плонки направленной системы дистрибутивных решеток.

2.4. Теорема. Пусть  $U$  — некоторая дистрибутивная квазирешетка, которая является суммой Плонки направленной системы дистрибутивных решеток  $\langle I, (U_i | i \in I), (h_{ij} | i, j \in I; i \leq j) \rangle$ . Тогда для  $U$  следующие четыре условия эквивалентны:

- (1) в  $U$  выполнено условие кручения;
- (2)  $U$  не имеет подалгебру, изоморфную  $L_2^*$ ;
- (3) все  $h_{ij}$ , ( $i, j \in I, i \leq j$ ) инъективны;
- (4) в  $U$  имеет место следующее квазитождество:
 
$$\forall x, y, z (y \cdot x = x \& x \cdot z = z \& x + y = y \& y + z = z \rightarrow x = y). \quad (pl)$$

Класс дистрибутивных квазирешеток, удовлетворяющих условиям теоремы, является квазизмногообразием, определяемым квазитождествами (ld), (com), (abs), (dis), (pl). Это квазизмногообразие обозначим через  $PDQ$ . Очевидно, что  $D \subset PDQ \subset DQ$ .

3. Базис для  $hqf$ . 3.1. Лемма. Пусть имеем следующее квазитождество из  $rqf$ :

$$\forall x_1, \dots, x_n (\pi = \sigma \& \dots \& \beta = \gamma - \delta = \varepsilon).$$

Допустим, что дистрибутивная квазирешетка  $U$  является суммой Плонки направленной системы  $(U_i | i \in I)$  дистрибутивных решеток. Тогда, если для каких-то элементов  $a_1, \dots, a_n \in U$  имеем

$$\pi(a_1, \dots, a_n) = \sigma(a_1, \dots, a_n), \dots, \beta(a_1, \dots, a_n) = \gamma(a_1, \dots, a_n),$$

то  $\delta(a_1, \dots, a_n)$  и  $\varepsilon(a_1, \dots, a_n)$  принадлежат одной и той же решетке  $U_k$  ( $k \in I$ ).

3.2. **Теорема.** Множество квазитожеств (Id), (com), (ass), (dis), (pl) является базисом для  $rqi$  или  $PDQ$  является множеством всех моделей  $rqi$ .

Доказательство основывается на результатах теоремы 2.4 и леммы 3.1.

Исходя из утверждения 1.4 и теоремы 3.2 заключаем, что следующее множество условных сверхтождеств (квазисверхтождеств) является базисом для  $hqi$ :

$$F(x, x) = x$$

$$F(x, y) = F(y, x)$$

$$F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$$

$$F(x, G(y, z)) = G(F(x, y), F(x, z))$$

$$F(y, x) = x \ \& \ F(x, z) = z \ \& \ G(x, y) = y \ \& \ G(y, z) = z \rightarrow x = y.$$

Ереванский государственный университет

#### Վ. Գ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ

### Բաշխական կավարների ֆվազիոյնութուններ և պայմանական գերնոյնութուններ

Աշխատանքը նվիրված է բաշխական կավարների բազմաձևութունում տեղի ունեցող պայմանական գերնոյնութունների նկարագրությանը՝ քվազիոյնութունների օգնությամբ:

Պայմանական գերնոյնութուն (քվազիգերնոյնութուն) է կոչվում հետևյալ տեսքի 2-րդ աստիճանի բանաձևը.

$$\forall F_1, \dots, F_m \forall x_1, \dots, x_n (\pi_1 = \sigma_1 \ \& \ \pi_2 = \sigma_2 \ \& \ \dots \ \& \ \pi_s = \sigma_s \rightarrow \pi_{s+1} = \sigma_{s+1}),$$

որտեղ  $\pi_1, \sigma_1, \dots, \pi_{s+1}, \sigma_{s+1}$  բազմանդամներ են՝ կախված են  $x_1, \dots, x_n$  առարկայական փոփոխականներից և  $F_1, \dots, F_m$  ֆունկցիոնալ փոփոխականներից:

Աշխատանքում նախ դիտարկվում է  $D$ -ոնգույար անվանվող քվազիոյնութունների  $rqi$  բազմութունը: Մի կողմից ցույց է տրվում նրանց կապը պայմանական գերնոյնութունների հետ, մյուս կողմից Պլոնկայի գումարի օգնությամբ գտնվում է վերջավոր բազիս  $rqi$ -ի համար: Արդյունքում բաշխական կավարների բազմաձևության 2-րանգանի պայմանական գերնոյնութունների համար ստացվում է հետևյալ վերջավոր բազիսը՝

$$F(x, x) = x,$$

$$F(x, y) = F(y, x),$$

$$F(x, F(y, z)) = F(F(x, y), z),$$

$$F(x, G(y, z)) = G(F(x, y), F(x, z)),$$

$$F(y, x) = x \ \& \ F(x, z) = z \ \& \ G(x, y) = y \ \& \ G(y, z) = z \rightarrow x = y:$$

ЛИТЕРАТУРА — ЧРЦЧДЬПРВНЪ

- 1 Ю. М. Мовсисян, «Сверхтождества и сверхмногообразия в алгебрах» 1990.
- 2 Ю. М. Мовсисян, «Введение в теорию алгебр со сверхтождествами», 1986.
- 3 Г. Греггер, «Общая теория решеток», 1982, стр. 148.
- 4 Л. И. Мальцев, «Алгебраические системы», 1970, с. 143.
- 5 J. Plonka, *Fund. Math.*, v. 62, p. 293–300 (1968).
- 6 J. Plonka *Fund. Math.*, v. 61, p. 183–189 (1967).

УДК 517.51

Ф. А. Талалян

### Об асимптотическом распределении последовательностей

(Представлено чл.-корр. НАН Армении А. А. Талаляном 30/X 1992)

Де Брейн и Пост (<sup>1</sup>) доказали, что если функция  $f$  определена на  $[0,1]$  и предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \quad (1)$$

существует для любой равномерно распределенной на  $[0,1]$  последовательности  $(x_n)$ , то  $f$  интегрируема по Риману на  $[0,1]$ . Этим было установлено, что существование предела (1) является характеристическим свойством интегрируемых по Риману функций  $f$ .

В настоящей заметке мы рассматриваем аналогичный вопрос для интегралов Римана—Стилтьеса. Приведенная ниже теорема обобщает результат де Брейна и Поста, причем доказательство является новым и для рассмотренного ими случая интеграла Римана.

В дальнейшем мы будем пользоваться определениями и обозначениями монографии (<sup>2</sup>).

Имеет место следующая:

**Теорема.** Пусть  $\mu$  — положительная регулярная нормированная борелевская мера на  $[0,1]$ ,  $S_\mu$  — множество точек непрерывности  $\mu$ ,  $f$  — функция, определенная на  $[0,1]$ , и  $D_f$  — множество точек разрыва  $f$ . Если

$$\mu(D_f \cap S_\mu) > 0, \quad (2)$$

то существует  $\mu$ -равномерно распределенная последовательность  $(x_n)$  такая, что последовательность

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n)$$

не имеет предела при  $N \rightarrow \infty$ .

Доказательству предположим несколько простых лемм.

**Лемма 1.** Пусть  $\mu$  — положительная регулярная нормированная борелевская мера на  $[0,1]$ ,  $(x_n)$  и  $(y_n)$  —  $\mu$ -равномерно рас-

пределенные последовательности,  $(p_n)$  и  $(q_n)$  — строго возрастающие последовательности натуральных чисел. Тогда последовательность

$$x_1, \dots, x_{p_1}, y_1, \dots, y_{q_1}, x_{p_1+1}, \dots, x_{p_2}, y_{q_1+1}, \dots, y_{q_2}, \dots \quad (3)$$

также будет  $\mu$ -равномерно распределенной.

Доказательство. Общий член последовательности (3) обозначим через  $z_k$ . Далее, для каждого натурального  $N$  обозначим через  $N_x$  число членов  $(x_n)$  среди  $z_k$ ,  $k \leq N$ . Аналогично вводится  $N_y$ . Тогда  $N = N_x + N_y$  и  $N_x, N_y \rightarrow \infty$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Для произвольной непрерывной на  $[0, 1]$  функции  $f$  имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N_x} \sum_{k=1}^{N_x} f(x_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N_y} \sum_{k=1}^{N_y} f(y_k) = \int_0^1 f d\mu. \quad (4)$$

Из (4) следует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(z_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{N_x}{N} \frac{1}{N_x} \sum_{k=1}^{N_x} f(x_k) + \frac{N_y}{N} \frac{1}{N_y} \sum_{k=1}^{N_y} f(y_k) \right) = \int_0^1 f d\mu. \quad (5)$$

Лемма 2. Пусть  $g$  — возрастающая, непрерывная слева функция на  $[0, 1]$ ,  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 1$ . Если  $(z_n)$  — равномерно распределенная последовательность на  $[0, 1)$ , то последовательность

$$x_n = \inf \{t \in [0, 1) : g(t) > z_n\}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

имеет асимптотическую функцию распределения  $g$ , т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A([0, x]; N, (x_n))}{N} = g(x), \quad x \in [0, 1). \quad (7)$$

Доказательство. В силу свойств  $g$  для каждого  $x \in [0, 1)$  и  $n = 1, 2, \dots$  имеем

$$z_n < g(x) \Rightarrow x_n < x \Rightarrow z_n < g(x) \quad (\Rightarrow \text{— знак импликации}).$$

Отсюда получаем

$$A([0, g(x)]; N, (z_n)) \leq A([0, x]; N, (x_n)) \leq A([0, g(x)]; N, (z_n)). \quad (8)$$

В силу равномерной распределенности  $(z_n)$  из (8) следует (7).

Лемма 3. Пусть для каждого натурального  $n$  и  $i = 1, \dots, n$   $x_{n,i} \in \left[ \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right)$ . Тогда последовательность

$$x_{1,1}, x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}, \dots \quad (9)$$

равномерно распределена на  $[0, 1)$ .

Доказательство. Пусть  $0 \leq a < b \leq 1$  и

$$c_n = \sum_{i=1}^n \chi_{[a,b)}(x_{n,i})$$

где  $\chi$  — знак характеристической функции.

Считая, что  $k$  — достаточно большое число, скажем  $k \geq k_0$ , возьмем натуральные числа  $l$  и  $m$  так, чтобы имело место

$$\frac{l-1}{k} < a \leq \frac{l}{k} < \frac{m}{k} < b \leq \frac{m+1}{k}.$$

Тогда будем иметь

$$c_k = m - l + 1, \quad (10)$$

а также

$$m - l \leq k(b - a) \leq m - l + 2 \quad (11)$$

Из (10) и (11) получим

$$|c_k - k(b - a)| < 1. \quad (12)$$

Пусть  $N = 1 + 2 + \dots + n + p$ , где  $0 \leq p < n + 1$ , и пусть  $z_k$  есть общий член последовательности (9). Тогда

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{[a, b)}(z_k) = \frac{1}{N} \left( \sum_{k=1}^n c_k + \sum_{l=1}^p \chi_{[a, b)}(x_{n+1, l}) \right).$$

Отсюда в силу (12) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=n_0}^n (k(b-a) - 1) &\leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{[a, b)}(z_k) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n_0-1} c_k \leq \\ &\leq \frac{1}{N} \left( \sum_{k=n_0}^n (k(b-a) + 1) + n \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Производя выкладки и переходя к пределу, из (13) получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{[a, b)}(z_k) = b - a,$$

что и требовалось.

Нам понадобится также следующая очевидная

**Лемма 4.** Пусть  $(a_l)$  — некоторая числовая последовательность. Если предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n a_l$$

существует, то для каждого натурального  $m$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=m+1}^{m+n} a_l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n a_l.$$

**Доказательство теоремы.** Положим  $g(x) = \mu([0, x])$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Тогда  $g$  удовлетворяет всем условиям леммы 2. Далее, зафиксируем некоторое  $\alpha > 0$  так, чтобы множество  $E = \{x : \omega(f; x) > \alpha\} \cap C_x$  имело положительную меру:  $\mu(E) > 0$ . Здесь  $\omega(f; x)$  — колебание  $f$  в точке  $x$ .

Очевидно, в точках  $x \in E$   $g$  непрерывна. Кроме того, мы знаем, что  $g(E)$  измеримо по Лебегу и

$$\lambda(g(E)) = \mu(E) > 0, \quad (14)$$

где  $\lambda$  — мера Лебега ((<sup>2</sup>), с. 163—164).

Перейдем к построению последовательности  $(x_n)$ .

Для каждого  $n$ , разделив  $[0, 1)$  на  $n$  равных частей, из каждой части  $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$  возьмем точку  $x_{n,i}$  следующим образом.

Если  $\lambda\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) \cap g(E)\right) = 0$ , то  $x_{n,i} \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$  — произвольная точка.

Если  $\lambda\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) \cap g(E)\right) > 0$ , то  $x_{n,i} \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) \cap g(E)$ .

Заметим, что число  $p$  интервалов  $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$ , для которых  $\lambda\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) \cap g(E)\right) > 0$ , удовлетворяет условию

$$p \geq n\mu(E). \quad (15)$$

В силу леммы 3 последовательность

$$x_{1,1}, x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}, \dots$$

равномерно распределена на  $[0, 1)$

Положим

$$z_{n,i} = \inf\{t \in [0, 1): g(t) > x_{n,i}\}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad i = 1, \dots, n. \quad (16)$$

Тогда в силу леммы 2 последовательность

$$z_{1,1}, z_{2,1}, z_{2,2}, \dots, z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,n}, \dots \quad (17)$$

имеет асимптотическую функцию распределения  $g$ .

Теперь построим последовательности

$$u_{1,1}, u_{2,1}, u_{2,2}, \dots, u_{n,1}, u_{n,2}, \dots, u_{n,n}, \dots \quad (18)$$

и

$$v_{1,1}, v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{n,1}, v_{n,2}, \dots, v_{n,n}, \dots \quad (19)$$

следующим образом.

Если  $\lambda\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) \cap g(E)\right) = 0$ , то полагаем  $u_{n,i} = v_{n,i} = z_{n,i}$ .

Если  $\lambda\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) \cap g(E)\right) > 0$ , то  $u_{n,i}$  и  $v_{n,i}$  выбираем так,

чтобы выполнялись условия

$$|u_{n,i} - z_{n,i}| < \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad |v_{n,i} - z_{n,i}| < \frac{1}{n}, \quad (20)$$

$$n = 1, 2, \dots; \quad l = 1, \dots, n$$

и

$$f(u_{n,l}) - f(v_{n,l}) \geq \alpha. \quad (21)$$

Такой выбор возможен, так как в силу непрерывности  $g$  в точках  $E$  из  $x_{n,l} \in g(E)$  следует  $z_{n,l} \in E$  и поэтому  $\omega(f; z_{n,l}) > \alpha$ .

Общие члены последовательности (17), (18) и (19) обозначим соответственно через  $z_k$ ,  $u_k$  и  $v_k$ . Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u_k - z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (v_k - z_k) = 0. \quad (22)$$

Отсюда следует, что последовательности  $(u_k)$  и  $(v_k)$  вместе с  $(z_k)$  имеют асимптотическую функцию распределения  $g$ . Поэтому последовательности  $(u_k)$  и  $(v_k)$  будут  $\mu$ -равномерно распределенными ((<sup>2</sup>), гл. 3, § 1, упр. 15').

Далее, для  $N = 1 + 2 + \dots + m$  будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(u_k) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(v_k) &= \frac{1}{N} \left( \sum_{n=1}^m \sum_{l=1}^n f(u_{n,l}) - \sum_{n=1}^m \sum_{l=1}^n f(v_{n,l}) \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^m \alpha n \mu(E) = \alpha \mu(E) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, если пределы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(u_k) \quad \text{и} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(v_k)$$

существуют, то они различны. Тогда, используя леммы 1 и 4, можно построить последовательность  $(x_k)$  вида

$$u_1, \dots, u_{p_1}, v_1, \dots, v_{q_1}, u_{p_1+1}, \dots, u_{p_2}, v_{q_1+1}, \dots, v_{q_2}, \dots,$$

для которой предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k)$$

не существует. Теорема доказана.

Известно, что для существования интеграла Римана—Стилтьеса

$$\int_0^1 f(x) dg(x)$$

необходимо и достаточно, чтобы  $\mu(D_f) = 0$ , где  $\mu$  — мера, порожденная функцией  $g$ . В силу этого факта из доказанной теоремы получаем

Следствие. Пусть  $g$  — возрастающая функция на  $[0, 1]$ ,  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 1$ , и пусть  $f$  — функция на  $[0, 1]$ , не интегрируемая по Риману относительно  $g$ . Тогда существует последователь-

ность  $(x_n)$  с асимптотической функцией распределения  $g$  такая, что предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n)$$

не существует.

Институт прикладных проблем физики  
Национальной академии наук Армении

Յ. Ա. ՔԱՎԱԳԱՆ

Հաջորդականությունների ասիմպտոտիկ բաշխման մասին

Ապացուցված է, որ եթե

$$\int_0^1 f(x) dg(x) \quad (g(x) \uparrow; \quad g(0) = 0; \quad g(1) = 1)$$

Ռիման-Ստիլտեսի ինտեգրալը գոյություն չունի, ապա  $L$  արելի է կառուցել ըստ  $g$ -ի ասիմպտոտիկորեն բաշխված  $\{x_n\}$  հաջորդականություն, որի համար

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n)$$

սահմանը գոյություն չունի:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 N. G. De Bruijn, K. A. Post, Indag. Math., v. 30, p. 149-150 (1968);
- 2 Л. Кейперс, Г. Нидеррејтер, Равномерное распределение последовательностей. Нака. М., 1965;
- 3 W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw Hill, 1966.

УДК 517.51

К. А. Навасардян

О коэффициентах нуль-рядов и множествах единственности  
для двойных рядов Уолша

(Представлено чл.-корр. НАН Армении А. А. Талалаяном 25/1 1993)

Пусть  $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$  ортонормированная система. Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$  называется нуль-рядом по этой системе, если  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t) = 0$  почти всюду и  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| > 0$ .

Первый пример тригонометрического нуль-ряда был построен Д. Е. Меншовым <sup>(1)</sup> в 1916 г.

В работах разных авторов (см. <sup>(2-9)</sup>) был рассмотрен вопрос о том, с какой скоростью могут стремиться к нулю коэффициенты тригонометрических нуль-рядов. Наиболее значительный из этих результатов следущий (см. <sup>(2,3,7)</sup>).

**Теорема А.** Пусть  $c_n$  монотонно стремится к 0 и  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = +\infty$ . Тогда существует ряд  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$ , который почти всюду стремится к нулю,  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n| > 0$  и  $|a_n| \leq c_{|n|}$ .

Эта теорема дает положительный ответ на соответствующую проблему, поставленную П. Л. Ульяновым <sup>(10)</sup>.

Подобные вопросы для систем Хаара и Уолша рассмотрены в работах <sup>(11-13)</sup>. Ф. Г. Арутюнян <sup>(13)</sup> отмечает, что аналогичный результат можно получить для системы Уолша.

В связи с вышеуказанными результатами Г. Г. Геворкян <sup>(14)</sup>, для системы Уолша доказав следующую теорему,

**Теорема В.** Пусть  $\epsilon_n \downarrow 0$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n^2 = +\infty$ . Тогда существует множество  $E \subset [0, 1]$ ,  $\mu E = 0$ , такое, что:

1) существует ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(t)$  с коэффициентами  $|a_n| < \varepsilon_n$ , который всюду вне  $E$  сходится к нулю и  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| > 0$ ;

2) если  $b_n = 0$  ( $\varepsilon_n$ ) и ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(t)$  всюду вне  $E$ , за исключением некоторого счетного множества, сходится к нулю, то  $b_n = 0$  для всех  $n$ .

В настоящей работе рассматривается тот же вопрос для двойных рядов Уолша. Доказана следующая

**Теорема.** Пусть двойная последовательность  $\{\varepsilon_{mn}\}$  удовлетворяет следующим условиям:  $\varepsilon_{m+1, n} \leq \varepsilon_{m, n}$ ,  $\varepsilon_{m, n+1} \leq \varepsilon_{m, n}$ ,

$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{m, 0}^2 < +\infty$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{0, n}^2 < +\infty$  и  $\sum_{m, n=0}^{\infty} \varepsilon_{m, n}^2 = +\infty$ . Тогда существует множество  $E \subset [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $\mu E = 0$ , такое, что:

1) существует ряд  $\sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn} W_m(x) W_n(y)$ , такой, что частичные суммы

$$S_{pq}(x, y) = \sum_{\substack{m=0 \\ n=0}}^{\substack{2^q-1 \\ 2^p-1}} a_{mn} W_m(x) W_n(y)$$

всюду вне  $E$  сходятся к нулю, а коэффициенты ряда удовлетворяют следующим условиям:  $|a_{mn}| < \varepsilon_{mn}$ ,  $\sum_{m, n=0}^{\infty} |a_{mn}| > 0$ ;

2) если  $b_{mn} = 0$  ( $\varepsilon_{mn}$ ) и существуют последовательности натуральных чисел  $\{g_l\}_{l=1}^{\infty}$  и  $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ , стремящиеся к бесконечности, такие, что суммы

$$\sum_{\substack{m=0 \\ n=0}}^{\substack{2^{h_l}-1 \\ 2^{g_k}-1}} b_{mn} W_m(x) W_n(y)$$

всюду вне  $E$ , быть может за исключением некоторого счетного множества отрезков, параллельных координатным осям, сходятся к нулю, то для всех  $m$  и  $n$   $b_{mn} = 0$ .

Под сходимостью мы подразумеваем сходимость по прямоугольникам, т. е. скажем, что  $a_{mn} \rightarrow A$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $M = M(\varepsilon)$  такое, что если  $m > M$ ,  $n > M$ , то  $|a_{mn} - A| < \varepsilon$ .

При доказательстве теоремы мы пользуемся леммой 1, доказанной Г. Г. Геворкяном (14).

Лемма 1. Пусть  $a, \beta \in \mathbb{N}$  и  $\beta \leq a \leq 2\beta$ . Тогда для любого отрезка  $\left[ \frac{x}{2^\sigma}; \frac{x+1}{2^\sigma} \right]$ , где  $\sigma = 2\beta - a$ ,  $x = 0, 1, \dots, 2^\sigma - 1$ , и любого  $n > 1$  существует полином

$$\sum_{m=1}^{2^n} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(t),$$

удовлетворяющий следующим условиям:

$$1) |a_n^{(m)}| \leq 2^{-\beta}, \quad m = 1, 2, \dots, 2^n;$$

$$2) \sum_{m=1}^{2^n} |a_n^{(m)}| = 2^{n-\beta};$$

$$3) \sum_{m=1}^{2^n} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(t) = 0, \quad \text{когда } t \in \left[ \frac{x}{2^\sigma}; \frac{x+1}{2^\sigma} \right];$$

$$4) \sum_{m=1}^{2^n} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(t) = 1, \quad \text{когда } t \in E_1 \subset \left[ \frac{x}{2^\sigma}; \frac{x+1}{2^\sigma} \right], \\ \mu E_1 = 2^{-\sigma-1};$$

$$5) \sum_{m=1}^{2^n} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(t) = -1, \quad \text{когда } t \in E_2 \subset \left[ \frac{x}{2^\sigma}; \frac{x+1}{2^\sigma} \right], \\ \mu E_2 = 2^{-\sigma-1},$$

причем множества  $E_1$  и  $E_2$  являются объединением интервалов типа Хаара  $\left( \frac{x_i}{2^{i+1}}; \frac{x_i+1}{2^{i+1}} \right)$   $i \in \mathbb{N}$ .

В заключение выражаю благодарность Г. Г. Геворкяну за внимание к настоящей работе.

Ереванский государственный университет

Կ. Ա. ՆԱՎԱՍԱՐԴՅԱՆ

Կրկնակի Ոստիկ շարքերի միակուրյան բազմությունների և գրո-շարքերի գործակիցների վերաբերյալ

Աշխատանքում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը.

**Թեորեմ.** Դիցուք  $\{\varepsilon_{mn}\}$  կրկնակի հաջորդականությունը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.  $\varepsilon_{m+1n} \leq \varepsilon_{mn}$ ,  $\varepsilon_{m+1n} \leq \varepsilon_{mn}$ ,  $\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{m0}^2 < +\infty$ ,

$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{0n}^2 < +\infty$ , և  $\sum_{m, n=0}^{\infty} \varepsilon_{mn}^2 = +\infty$ : Գոյություն ունի  $E \subset [0; 1] \times [0; 1]$

բազմություն,  $\mu E = 0$ , այնպիսին, որ

1. Գոյութիւն ունի  $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} W_m(x) W_n(y)$  շարք, որի

$$S_{p,q}(x, y) = \sum_{\substack{m=0 \\ n=0}}^{p-1, q-1} a_{mn} W_m(x) W_n(y)$$

մասնակի գումարները  $E$ -ից դուրս գուգամիտում են զրոյի, և շարքի գործակիցները բավարարում են հետևյալ պայմաններին.  $|a_{mn}| < \epsilon_{mn}$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{mn}| > 0:$$

2. Եթե  $b_{mn} = 0$  ( $c_{mn}$ ) և գոյութիւն ունեն բնական թվերի  $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$  և  $\{h_l\}_{l=0}^{\infty}$  անվերջի ձգտող ենթաիւշորդակաւորյաւնները, այնպես, որ

$$\sum_{\substack{m=0 \\ n=0}}^{2^{g_k}-1, 2^{h_l}-1} b_{mn} W_m(x) W_n(y)$$

գումարները  $E$ -ից դուրս աճենուրիւր, բացի գուցե կ'որդինատուկան առանցքներին գուգամիտում են զրոյի, զժերից գուգամիտում են զրոյի, այնպէս թուր  $m$ -երի և  $n$ -երի համար  $b_{mn} = 0$ :

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 D. E. Menshoff, C. R. Acad. Sci. Paris, v. 163, p. 433—435 (1916). 2 Փ. Գ. Արտյոնյան, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 19 (1984), с. 448—266. 3 Փ. Գ. Արտյոնյան, Представление измеримых функций почти всюду сходящимися рядами, Докл. акад., Тбилиси, 1986. 4 О. С. Ивашев-Мусатов, Изв. АН СССР, сер. мат., т. 20, с. 179—196 (1956). 5 О. С. Ивашев-Мусатов, Изв. АН СССР, Сер. мат., т. 21, с. 559—573, (1957). 6 J. E. Littlewood, Quart. J. Math., Oxford, Ser. 1, p. 219—226 (1935). 7 Н. Б. Полюсян, Anal. Math., v. 11, p. 139—177 (1985). 8 R. Salem, J. Math. Phys., v. 21, p. 69—82 (1942). 9 A. C. Schaeffer, Amer. J. Math., v. 61, p. 934—941 (1939). 10 П. Л. Ульянов, Успехи мат. наук, т. 19, с. 3—69, (1964). 11 В. А. Скворцов, Мат. заметки, т. 19, с. 179—186 (1976). 12 В. А. Скворцов, Мат. заметки, т. 21, с. 335—340 (1977). 13 В. А. Скворцов, Изв. АН СССР, Сер. мат., т. 41, с. 703—716 (1977). 14 G. G. Gevorgian, Anal. Math., v. 14, p. 217—211 (1988).

УДК 517.597

Ф. А. Шамоян, М. А. Закарян

Некоторые вопросы представления в весовых пространствах гармоничных в шаре функций

(Представлено академиком НАН Армении М. М. Джрбашяном 5/III 1993)

1°. Пусть  $R^n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство,  $B^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n, |x| < 1\}$  — единичный шар в  $R^n$ ,  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  — обычная евклидова норма,  $S^{n-1}$  — единичная сфера. Обозначим через  $d\sigma_n(x)$  нормированную меру Лебега на  $B^n$ , через  $h(B^n)$  — пространство всех гармонических в  $B^n$  функций, с обычной равномерной сходимостью внутри  $B^n$ . Пусть  $\omega$  — неотрицательная функция класса  $L^1(0, 1)$ ,  $0 < p < +\infty$ , введем в рассмотрение

$$h^p(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} h^p(B^n, \omega) = \left\{ u \in h(B^n) : \|u\|_{h^p(\omega)}^p = \int_{B^n} |u(x)|^p \omega(1 - |x|) d\sigma_n(x) < +\infty \right\}.$$

Нетрудно видеть, что пространство  $h^p(\omega)$  при  $p \geq 1$  относительно нормы  $\|\cdot\|_{h^p(\omega)}$  является банаховым, а при  $0 < p < 1$  относительно метрики  $\|u - v\|_{h^p(\omega)}^p$  пространство  $h^p(\omega)$  превращается в  $F$ -пространство (см. (1)). Пространства типа  $h^p(\omega)$  в случае голоморфных в круге функций и  $\omega(t) = t^a$ ,  $-1 < a < +\infty$  впервые были введены и изучены в работах М. М. Джрбашяна (2, 3).

В этой заметке мы получим параметрическое представление классов  $h^p(\omega)$  при  $0 < p < +\infty$ , найдем общий вид линейных непрерывных функционалов на этих пространствах посредством гармонических функций. Аналог этих результатов, в случаях анизотропных пространств голоморфных в цилиндре функций, был получен первым автором в работах (4, 5).

Отметим также работы (6-8), где исследованы пространства гармонических функций типа  $h^p(\omega)$  при  $1 \leq p < +\infty$ ,  $\omega(t) = t^a$ .

Для подробного ознакомления с данным вопросом следует обратиться к монографии (9).

2°. Символом  $S$  обозначим класс правильно-изменяющихся функций на  $[0, 1]$ , т. е. множество измеримых неотрицательных на  $(0, 1)$  функций, для которых существуют положительные числа  $m_\omega, M_\omega, q_\omega$ , причем  $m_\omega, q_\omega \in (0, 1)$ , такие, что

$$m_\omega \leq \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq M_\omega,$$

$r \in (0, 1), \lambda \in [q_\omega; 1]$ . Функции класса  $S$ , заданные на полуоси  $(0; +\infty)$ , подробно изучены в (10).

Если  $\omega \in S$ , то положи также:

$$\alpha_\omega = \frac{\ln m_\omega}{1 + q_\omega}, \quad \beta_\omega = \frac{\ln M_\omega}{1 + q_\omega}. \quad (1)$$

Здесь предположим, что  $0 < \beta_\omega < 1$ .

С целью изложения основных результатов заметки приведем также некоторые известные факты из теории гармонических в шаре функций (см. (11)).

Сферические гармоники называются сужением на  $S^{n-1}$  однородных гармонических многочленов степени  $k$ . Хорошо известно, что  $H_k$  — пространство сферических гармоник степени  $k$  и конечномерное пространство; ее размерность определяется из равенства

$$c_k = (2k + n - 1) \frac{(n + k - 3)!}{(n - 2)! k!}.$$

Ортонормальный базис в пространстве  $H_k$  обозначим через  $\{Y_j^{(k)}\}_{j=1}^{d_k}$ . Зональной гармоникой степени  $k$  называется функция

$$Z_x^{(k)}(y') = \sum_{m=1}^{d_k} \overline{Y_m^{(k)}(x')} Y_m^{(k)}(y'). \quad (2)$$

Из свойств сферических гармоник следует, что для любой  $u \in h(B^n)$  справедливо разложение

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k r^k Y^{(k)}(x'), \quad x = rx', \quad r \in (0, 1), \quad x' \in S^{n-1}, \quad (3)$$

где

$$c_k Y^{(k)}(x') \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{d_k} c_k^{(j)} \{Y_j^{(k)}\}'(x'). \quad (4)$$

При этом ряд сходится в пространстве  $h(B)$ .

Хорошо известно разложение ядра Пуассона

$$P(x, y') = \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{1 - |x|^2}{|x - y'|^n}, \quad x \in B^n, \quad y' \in S^{n-1}$$

в виде ряда от зональных гармоник

$$P(x, y') = \sum_{k=0}^{+\infty} r^k z_{y'}^k(x'). \quad (5)$$

Здесь  $\omega_{n-1}$  площадь сферы  $S^{n-1}$ .

Пусть  $-1 < \alpha < +\infty$ , тогда определим интегродифференциальный оператор Римана—Лиувилля порядка  $\alpha$  на пространстве  $h(B^n)$ . Предположим, что  $u \in h(B^n)$  и  $u$  имеет разложение (3), тогда

$$D^\alpha u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(k + 1)} c_k r^k Y^{(k)}(x'). \quad (6)$$

Для  $x, y \in B^n$ ,  $\rho = |y'|$ ,  $y = \rho y'$  вводим в рассмотрение также функцию

$$P_\alpha(x, y) = 2(\alpha + 1) D^{\alpha+1} P(\rho x, y'), \quad P_0(x, y) = P(\rho x, y'). \quad (7)$$

Используя свойства зональных гармоник, нетрудно установить гармоничность функции  $P_\alpha(x, y')$  по обеим переменным  $x, y \in B^n$ . При  $\alpha = 2$  ядра  $P_\alpha(x, y')$  впервые были введены для круга М. М. Джрбашьяном (см. (1)).

### 3°. Параметрическое представление классов $h^p(\omega)$ .

Учитывая разложение функции  $u \in h(B^n)$  в виде ряда (3) и разложение ядра  $P_\alpha(x, y')$ , нетрудно установить следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $\omega \in S$ ,  $\alpha > \frac{\alpha_\omega + 1}{p}$ ,  $1 < p < +\infty$ .

Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1)  $u \in h^p(\omega)$ ;
- 2)  $u$  допускает интегральное представление

$$u(x) = \int_{\underset{B^n}{\cup}} (L - |y|^2)^\alpha P_\alpha(x, y') g(y) d\bar{\omega}_n(y), \quad x \in B^n, \quad (7a)$$

где  $g \in L^p(\omega, B^n)$ ,  $d\bar{s}_n(y) \stackrel{\text{def}}{=} |y|^{2-n} d\omega_n(y)$ , при этом

$$\|u\|_{h^p(\omega)} < c_p \|g\|_{L^p(\omega)}. \quad (8)$$

Интересно, что имеет место аналог этой теоремы и в случае  $0 < p < 1$ , а при  $p = 1$  верно и другое представление. Для формулировки этого результата сначала введем обозначения.

Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$  и

$$x_1 = r \cos \varphi_1;$$

$$x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{n-1} = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1};$$

$$x_n = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1};$$

$$0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \varphi_j \leq \pi, \quad 1 \leq j \leq n-2, \quad -\pi < \varphi_{n-1} < \pi$$

полярная система координат в  $R^n$ . Введем в рассмотрение следующие  $n$ -мерные диадические прямоугольные параллелепипеды:

$$\Delta_{k, l_1, \dots, l_{n-1}} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in B^n: r = |x|; 1 - \frac{1}{2^k} < r < 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, \right.$$

$$\left. \frac{\pi l_i}{2^k} < \varphi_i < \frac{\pi(l_i + 1)}{2^k}; \quad \frac{\pi l_{n-1}}{2^k} \leq \varphi_{n-1} < \frac{\pi(l_{n-1} + 1)}{2^k} \right\}.$$

$$1 < i \leq n-2, \quad l_i = 0, \dots, 2^k - 1, \quad l_{n-1} = -2^k, \dots, 2^k - 1.$$

Очевидно, что параллелепипеды  $\Delta_{k, l_1, \dots, l_{n-1}}$  при различных векторах  $(k, l_1, \dots, l_{n-1})$  не пересекаются.

**Теорема 2.** Пусть  $0 < p < 1$ ,  $\epsilon > \frac{n+p}{p}$ , тогда класс  $h^p(\epsilon)$  совпадает с классом функций  $u$ , допускающих представление

$$u(x) = \int_{B^n} (1 - |y|^2)^{\epsilon} P_{\epsilon}(x, y') d\mu(y),$$

где  $\mu$  — произвольная борелевская мера на  $B^n$ , удовлетворяющая условию

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l_1=0}^{2^k-1} \dots \sum_{l_{n-2}=0}^{2^k-1} \sum_{l_{n-1}=-2^k}^{2^k-1} |\mu(\Delta_{k, l_1, \dots, l_{n-1}})|^p \times$$

$$\times \omega(|\Delta_{k, l_1, \dots, l_{n-1}}|^{1/n}) |\Delta_{k, l_1, \dots, l_{n-1}}|^{1-p} < +\infty \quad (8a)$$

Доказательство теорем 1 и 2 основано на следующих вспомогательных утверждениях.

**Предложение 1.** Пусть  $u$  гармоничная  $B^n$  функция, тогда справедливо представление

$$u(x) = \int_{B^n} (1 - |y|^2)^{\epsilon} \tilde{P}_{\epsilon}(x, y) u(y) d\tilde{\sigma}_n(y) \quad x_i \in B^n, \quad (9)$$

где

$$d\tilde{\sigma}_n(y) = |y|^{2-n} d\sigma_n(y).$$

Предложение 2. Пусть  $0 < p < +\infty$ ,  $0 < \rho < 1$ .

$$u_\rho(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(\rho x) \quad x \in B^n.$$

Тогда

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} \|u_\rho - u\|_{h^p(\omega)} = 0. \quad (10)$$

Предложение 3. Пусть  $u \in C(B^n)$ ,  $u(x) \geq 0$ , причем для любого шара

$$K_\rho(x_0) = \{x \in B^n : |x - x_0| < \rho\}, \quad x_0 \in B^n, \quad 0 < \rho < 1 - |x_0|$$

имеет место оценка

$$U(x_0) \leq \frac{C}{\rho^n} \int_{K_\rho(x_0)} u(y) d\sigma_n(y), \quad (11)$$

где  $C$  — положительное число, зависящее только от  $u$ . Тогда имеет место соотношение

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l_1=0}^{2^k-1} \cdots \sum_{l_{n-2}=0}^{2^k-1} \sum_{l_{n-1}=0}^{2^k-1} \left( \max_{x \in \Delta_{k, l_1, \dots, l_{n-1}}} u(x) \right) \omega(|\Delta_{k, l_1, \dots, l_{n-1}}|^{1/n}) \times \\ \times |\Delta_{k, l_1, \dots, l_{n-1}}| \leq C_1 \int_{B^n} u(x) d\sigma_n(x). \quad (12)$$

4°. Представление линейных непрерывных функционалов в пространствах

$$h^p(\omega), \quad 0 < p < +\infty.$$

Здесь мы опишем  $(h^p(\omega))^*$  посредством гармонических в  $B^n$  функций при всех  $p \in (0, +\infty)$ . С этой целью сначала введем некоторые обозначения. Пусть  $\omega \in S$ ,  $0 < p < +\infty$ ,  $1 < \alpha < +\infty$ . Обозначим через  $\omega_{\alpha, p}$  функцию

$$\omega_{\alpha, p}(r) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(r) \left( \frac{r^\alpha}{\omega(r)} \right)^p, \quad 0 < r < 1. \quad (13)$$

Теорема 3. Пусть  $\Phi$  — линейный непрерывный функционал на

$$h^p(\omega), \quad 1 < p < +\infty, \quad \psi(x) = \Phi(\rho_\alpha(x, y)),$$

где  $\rho_\alpha$  — функция, определяемая по равенству (7),  $\alpha > \alpha_0$ .

Тогда:

1. а) Функция  $\tau$  принадлежит классу  $h^q(\omega_{\alpha, q})$ ,  $q = \frac{p}{p-1}$ ,  $\omega_{\alpha, q}$  определяется по равенству (13);

б) функционал  $\Phi$  представим в виде

$$\Phi(u) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \int_{S^{n-1}} u(\rho y') \cdot v(\rho y') d\omega_{n-1}(y') \quad (14)$$

Здесь  $d\omega_{n-1}(y')$  — нормированная мера Лебега на  $S^{n-1}$ , кроме того, справедливы оценки

$$c_1(\alpha, \rho) \|v\|_{h^q(\omega_\rho)} \leq |\Phi| \leq c_2(\alpha, \rho) \|v\|_{h^q(\omega_\rho)} \quad (15)$$

при некоторых положительных постоянных  $c_j(\alpha, \rho)$ ,  $j = 1, 2$  зависящих только от  $\alpha$  и  $\rho$ .

2) И обратно, для любой функции  $v \in h^q(\omega_\rho)$  формула (14) порождает линейный непрерывный функционал на  $h^p(\omega)$ , для которого справедливы оценки (15).

Теперь рассмотрим случай  $0 < p \leq 1$ . Пусть как и прежде  $\omega \in S$ , обозначим через  $\Lambda_\omega^p$  класс функций  $v \in h(B^n)$ , для которых

$$|D^{\alpha+1} v(x)| = o \left\{ \frac{(\omega(1-|x|)^{1/p})}{(1-|x|)^{n+\alpha-\frac{n}{p}}} \right\}, \quad \alpha > \frac{\alpha_\omega + n}{p},$$

$$(|x| \rightarrow 1-0).$$

В  $\Lambda_\omega^p$  вводится норма

$$\|v\|_{\Lambda_\omega^p} = \sup_{x \in B^n} \left\{ \frac{|D^{\alpha+1} v(x)| (1-|x|)^{n+\alpha-\frac{n}{p}}}{(\omega(1-|x|)^{1/p})} \right\}.$$

Относительно этой нормы  $\Lambda_\omega^p$  превращается в банаховое пространство.

Теорема 4. Пусть  $0 < p \leq 1$ ,  $\omega \in S$ ,  $\Phi$  — непрерывный линейный функционал на  $h^p(\omega)$ . Положим

$$v(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(P_0(x, y)), \quad x \in B^n. \quad (16)$$

Тогда:

1. а)  $v \in \Lambda_\omega^p$ ;

б)  $\Phi$  представляется в виде

$$\Phi(u) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \int_{S^{n-1}} u(\rho y') v(\rho y') d\omega_{n-1}(y'). \quad (17)$$

При этом существуют константы  $c_1(\rho, \alpha)$ ,  $c_2(\rho, \alpha)$  такие, что

$$c_1(\rho, \alpha) \|v\|_{\Lambda_\omega^p} \leq |\Phi| \leq c_2(\rho, \alpha) \|v\|_{\Lambda_\omega^p}. \quad (18)$$

2) Обратно, для любой функции  $v \in \Lambda_\omega^p$ ,  $0 < p \leq 1$ ,  $\omega \in S$ , по формуле (17) порождается линейный непрерывный функционал на  $h^p(\omega)$ , для которого справедливы оценки (18).

Доказательства теорем 3, 4 основаны на предложении 1, теоремах 1 и 2, на следующем вспомогательном утверждении, имеющем самостоятельный интерес.

**Предложение 4.** Пусть  $\omega \in \mathcal{S}$ ,  $\alpha > \frac{\alpha_\omega + n}{p}$ ,  $1 < p < +\infty$ .

Тогда оператор:

$$T_\alpha(u) = \int_{B^n} u(y) \rho_\alpha(x, y') \omega(y) d\sigma_n(y) \quad (19)$$

действует из пространства  $L^p$  в пространство  $h^p(\omega_{\alpha, p})$ , где  $\omega_{\alpha, p}$  определяется по (13).

Институт математики  
Национальной академии наук Армении  
Ереванский государственный университет

Յ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ, Մ. Ա. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

Ներկայացման օրոշ հարցեր գնդում հարմոնիկ ֆունկցիաների  
կշռային տարածություններում

Հոդվածում ուսումնասիրվում են  $R^n$ -ի միավոր  $B^n$  գնդում հարմոնիկ ֆունկցիաների  $h^p(B^n, \omega)$ ,  $0 < p < +\infty$ , կշռային տարածությունները:  $\omega$ -ի վրա դրված որոշ ընդհանուր պայմանների դեպքում ստացված է այդ տարածությունների ինտեգրալ ներկայացումները  $h^p$  համալուծ տարածությունների լրիվ բնութագիրը հարմոնիկ ֆունկցիաների տերմիններով:

#### ЛИТЕРАТУРА — ՉՐՈՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 У. Рудин, Функциональный анализ, Мир, М., 1975. 2 М. М. Джрбашян, ДАН АрмССР, т. 3, № 1 (1945). 3 М. М. Джрбашян, Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР, вып. 2 (1948). 4 Ф. А. Шамоян, ДАН АрмССР, т. 85, № 1 (1987). 5 Ф. А. Шамоян, Сибирский мат журн., т. 31, № 2 (1990). 6 A. L. Shields, D. L. Williams, Journ. Reine and Angew. Math., v. 29 (30), p. 256–279 (1988). 7 R. R. Coifman, R. Rochberg, Astérisque, v. 77 (1989). 8 А. Э. Джрбашян, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 22, № 4 (1987). 9 A. E. Djrbashjan, F. A. Shamoyan, Topics in the Theory of  $A_p^p$  spaces. Teubner Texte zur Mathematik, 188. 10 И. Стейн, Г. Вейс, Введение в гармонический анализ на Евклидовых пространствах, Мир, М., 1974. 11 Е. Сенета, Правильно-изменяющиеся функции, Наука, М., 1985. 12 М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966.

УДК 517.9

Г. В. Вырабян

О спектральных свойствах операторных пучков,  
 порожденных известным примером Бицадзе

(Представлено чл.-корр. НАН Армении А. Б. Нерсесяном 6/IV 1993)

1. Пусть  $\Omega$  означает конечную часть плоскости переменных  $x$  и  $y$ , ограниченную единичной окружностью  $\partial\Omega: x^2 + y^2 - 1 = 0$ , с центром в начале координат. В области  $\Omega$  рассмотрим следующую спектральную задачу Дирихле на собственные значения

$$A \frac{\partial^2 \widehat{w}}{\partial x^2} + 2\mu B \frac{\partial^2 \widehat{w}}{\partial x \partial y} + \mu^2 C \frac{\partial^2 \widehat{w}}{\partial y^2} = \widehat{0}, \quad (1)$$

$$\widehat{w}|_{\partial\Omega} = \widehat{0}, \quad (2)$$

где  $\mu$  — спектральный параметр, а  $A$ ,  $B$  и  $C$  — квадратные матрицы, заданные по формулам

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$\widehat{w}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$  — искомая действительная вектор-функция.

**Лемма 1.** При всех положительных значениях параметра  $\mu \in R_+$  система (1) является сильно связанной, а для остальных значений  $\mu$  — слабо связанной эллиптической системой в смысле Бицадзе (1).

Пользуясь формулами

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (4)$$

систему (1) можно представить в комплексной форме

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} + \lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad (5)$$

где  $w = u + iv$  — искомая функция, а  $\lambda = \frac{1-\mu}{1+\mu}$ . При  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \infty$ ,

т. е. при  $\mu = \pm 1$ , система (5) превращается соответственно в известное уравнение Бицадзе (1) или ее сопряжение.

В дальнейшем нам удобно записать систему уравнений (1) в виде

$$\begin{cases} \square_{\mu} u = \mu \diamond v, \\ \square_{\mu} v = -\mu \diamond u, \end{cases} \quad (B_{\mu})$$

где  $\square_{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  — оператор колебания струны.  $\diamond = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ .

Одновременно будем рассматривать тесно связанную с системой (B<sub>μ</sub>) систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \mu \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\mu \frac{\partial \phi}{\partial y}, \end{cases} \quad (C-R)_{\mu}$$

которая при  $\mu = 1$ , т. е. для уравнения Бицадзе, превращается в систему Коши — Римана из теории аналитических функций.

**Определение 1.** Пара функций, удовлетворяющих системе (B<sub>μ</sub>) или (C-R)<sub>μ</sub>, называется  $\mu$ -сопряженной.

**Лемма 2** Общее решение системы (B<sub>μ</sub>) в  $\Omega$  имеет вид

$$u_{\mu}(x, y) = x\phi_1(x, y; \mu) + \frac{y}{\mu} \phi_2(x, y; \mu) + \psi_1(x, y; \mu), \quad (6)$$

$$v_{\mu}(x, y) = x\psi_2(x, y; \mu) - \frac{y}{\mu} \phi_1(x, y; \mu) + \psi_2(x, y; \mu),$$

где  $\phi_1(x, y; \mu)$ ,  $\phi_2(x, y; \mu)$  и  $\psi_1(x, y; \mu)$ ,  $\psi_2(x, y; \mu)$  — произвольные  $\mu$ -сопряженные решения системы (C-R)<sub>μ</sub>.

2. Краевую задачу (1), (2) запишем в операторной форме. Применяя с обеих сторон уравнений системы (B<sub>μ</sub>) оператор  $\Delta^{-1}$ , обратный к оператору Лапласа  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  при нулевых краевых условиях (2), получим систему операторных уравнений

$$\begin{cases} (I - N_1)u - \mu^2 N_2 u = \mu N_3 v, \\ (I - N_1)v - \mu^2 N_2 v = -\mu N_3 u, \end{cases} \quad (7)$$

или же записанный в матричной форме квадратичный операторный пучок

$$L_{\mu}(\tilde{w}) = (I - \hat{N}_1)\tilde{w} + \mu_2 \hat{N}_2 \tilde{w} + \mu^2 \hat{N}_3 \tilde{w} = \tilde{0}, \quad (B_{\mu})$$

действующий в ортогональной сумме гильбертовых пространств  $H = \dot{W}_2^1(\Omega) \oplus \dot{W}_2^1(\Omega)$ . Здесь

$$\hat{N}_1 = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -N_2 \\ N_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{N}_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$N_1 = \Delta^{-1} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $N_2 = \Delta^{-1} \circ$  — линейные ограниченные самосопряженные операторы типа С. Л. Соболева (2.4), действующие в соболевском-гильбертовом пространстве  $h = \dot{W}_2^1(\Omega)$  — функций, обобщенные производные которых суммируемы с квадратом в  $\Omega$  и исчезающих на границе  $\partial\Omega$  в смысле теорем вложения С. Л. Соболева,  $I$  — единичный в  $h$  оператор.

**Определение 2.** Собственные значения и собственные функции квадратичного пучка  $L_\mu$  будем соответственно называть собственными значениями и собственными функциями краевой задачи (1), (2).

В пространстве  $h$  введем оператор  $G$ , действующий согласно формуле

$$G\varphi(x, y) = \varphi\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right). \quad (9)$$

Легко проверить, что оператор  $G$  сохраняет граничное условие (2) и  $G^2 = I$ .

**Лемма 3.** Между операторами типа С. Л. Соболева  $N_1$  и  $N_2$  имеет место следующее соотношение

$$N_2 + 2GN_1G = I. \quad (10)$$

Пользуясь соотношением (10), квадратичный пучок  $L_\mu$  можно представить в виде

$$L_\mu(\tilde{w}) = (\tilde{I} - \tilde{N}_1)\tilde{w} + \mu(\tilde{I} - 2G\tilde{N}_1G)\tilde{w} + \mu^2\tilde{N}_1\tilde{w} = 0, \quad (B_\mu)$$

где  $\tilde{G} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$ . Отсюда видно, что спектральные свойства квадратичного пучка  $L_\mu$  и, следовательно, краевой задачи (1), (2) вполне определяются свойствами лишь одного оператора С. Л. Соболева

$$N_1 = \Delta^{-1} \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

3. Для дальнейшего необходимо установить также некоторые вспомогательные факты. Общее решение (6) системы (B<sub>μ</sub>) можно записать в векторной форме

$$\tilde{w}_\mu(x, y) = A_\mu(x, y)\tilde{\varphi}_\mu(x, y) + \tilde{\psi}_\mu(x, y), \quad (6')$$

где

$$\tilde{w}_\mu(x, y) = \begin{pmatrix} u_\mu(x, y) \\ v_\mu(x, y) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varphi}_\mu(x, y) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, y; \mu) \\ \varphi_2(x, y; \mu) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\psi}_\mu(x, y) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, y; \mu) \\ \psi_2(x, y; \mu) \end{pmatrix}.$$

а матрица-функция  $A_\mu(x, y)$  имеет вид

$$A_\mu(x, y) = \begin{pmatrix} x & \frac{y}{\mu} \\ -\frac{y}{\mu} & x \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Наряду с матрицей  $A_\mu(x, y)$  рассмотрим матрицу

$$B_\mu(x, y) = \begin{pmatrix} x & -\frac{y}{\mu} \\ \frac{y}{\mu} & x \end{pmatrix}. \quad (12)$$

**Лемма 4.** Матрица  $B_\mu(x, y)$  преобразует произвольную  $\mu$ -сопряженную пару решений системы  $(C-R)_\mu$  в  $\mu$ -сопряженную пару решений той же системы.

**Лемма 5.** Функции вида

$$\begin{aligned} u_\mu(x, y) &= \left(x^2 + \frac{y^2}{\mu^2}\right) \Phi_1(x, y) + \Psi_1(x, y), \\ v_\mu(x, y) &= \left(x^2 + \frac{y^2}{\mu^2}\right) \Phi_2(x, y) + \Psi_2(x, y), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\Phi_1(x, y)$ ,  $\Phi_2(x, y)$  и  $\Psi_1(x, y)$ ,  $\Psi_2(x, y)$  — произвольные  $\mu$ -сопряженные решения системы  $(C-R)_\mu$ , являются решениями системы  $(B_\mu)$ .

**Следствие.** Из леммы 5 следует, что при  $\mu = 1$  система функций

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= (x^2 + y^2) \Phi_1(x, y) + \Psi_1(x, y), \\ v_1(x, y) &= (x^2 + y^2) \Phi_2(x, y) + \Psi_2(x, y), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  — произвольные решения системы Коши—Римана, является решением системы Бицадзе  $(B_1)$ .

Пусть  $\Omega_\mu$  означает конечную часть плоскости  $x, y$ , ограниченную эллипсом  $\partial\Omega_\mu: x^2 + \frac{y^2}{\mu^2} = 1$ . Обозначим через  $S_\mu$  множество всех решений системы  $(B_\mu)$  вида (13), а через  $S_\mu^0$  — множество тех функций из  $S_\mu$ , которые обращаются в нуль на границе  $\partial\Omega_\mu$ .

**Лемма 6.** Если вектор-функция  $\begin{pmatrix} u_\mu(x, y) \\ v_\mu(x, y) \end{pmatrix} \in S_\mu^0$ , то она имеет вид

$$\begin{aligned} u_\mu(x, y) &= \left(x^2 + \frac{y^2}{\mu^2} - 1\right) \Phi_1(x, y; \mu), \\ v_\mu(x, y) &= \left(x^2 + \frac{y^2}{\mu^2} - 1\right) \Phi_2(x, y; \mu), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$   $\mu$ -сопряженная пара решений системы  $(C-R)_\mu$ .

Лемма 7. Общее решение системы  $(B_\mu)$  в  $\Omega$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 u_\mu(x, y) &= \left(x^2 + \frac{y^2}{\mu^2} - 1\right) \Phi_1(x, y; \mu) + \Psi_1(x, y; \mu) + \\
 &\quad + \Phi_1(0, 0) x + \Phi_2(0, 0) \frac{y}{\mu}, \\
 v_\mu(x, y) &= \left(x^2 + \frac{y^2}{\mu^2} - 1\right) \Phi_2(x, y; \mu) + \Psi_2(x, y; \mu) + \\
 &\quad + \Phi_2(0, 0) x - \Phi_1(0, 0) \frac{y}{\mu},
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

где  $\Phi_1, \Phi_2$  и  $\Psi_1, \Psi_2$  — произвольные  $\mu$ -сопряженные пары решений системы  $(C-R)_\mu$ .

Следующее утверждение дополняет лемму 6 при  $\mu = 1$ .

Лемма 8. Любое решение системы  $(B_\mu)$ , удовлетворяющее граничному условию (2), при  $\mu = \pm 1$  имеет вид (15), т. е. входит в множество  $S_{\pm 1}^0$ .

4. Перейдем к формулировке основного результата данной работы.

Теорема. Значения параметра  $\mu = \pm 1$  для квадратичного пучка  $L_\mu$  или для краевой задачи (1), (2) являются бесконечнократными собственными значениями, вся совокупность соответствующих собственных функций которых имеет вид

$$\widehat{w}(x, y) = \begin{pmatrix} w_1(x, y) \\ w_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x^2 + y^2 - 1) \varphi_1(x, y) \\ (x^2 + y^2 - 1) \varphi_2(x, y) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где  $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$  — произвольная отличная от тождественного нуля  $\mu$ -сопряженная пара решений системы  $(C-R)_\mu$ , соответственно при  $\mu = \pm 1$ , а для всех остальных значений параметра  $\mu \in R_1$  операторный пучок  $L_\mu$  или краевая задача (1), (2) имеет лишь нулевое решение.

Утверждение первой части теоремы содержится в лемме 8. Пусть  $\mu > 0$ , тогда в комплексной записи система (5) является слабо связанной, однако соответствующая сопряженная система уже является сильно связанной и поэтому согласно вышесказанному краевая задача (1), (2) и в этом случае имеет лишь нулевое решение.

Таким образом, операторный пучок  $L_\mu$ , или, что то же самое, краевая задача (1), (2) при  $\mu = \pm 1$  имеет собственные значения бесконечного ранга, заданные формулой (17), а все остальные значения параметра  $\mu \in R_1$  являются регулярными точками спектра операторного пучка  $L_\mu$ , т. е. соответствующая краевая задача (1), (2) имеет лишь нулевое решение.

Բիցաձեի Բայտնի օրինակից ծնված օպերատորային փնջերի սպեկտրալ  
հատկությունների մասին

Աշխատանքում երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալներով դիֆերեն-  
ցիալ հավասարումների համակարգի համար հետազոտվում է Դիրիխլեի  
սպեկտրալ խնդիրը, երբ տիրույթը միապարզ շրջանն է, որի կենտրոնը գտնվում  
է կոորդինատների սկզբնակետում: Դիտարկվող խնդիրը բերվում է քառակու-  
սային օպերատորային փնջի սպեկտրի ուսումնասիրությանը, որի գործա-  
կրցները սորոլեյան հիլբերտյան  $W_2^1(\Omega)$  տարածության մեջ գործող այս-  
պես կոչված սորոլեի տիպի օպերատորներ են:

Ապացուցված է, որ այդ փնջի դիսկրետ սպեկտրը կենտրոնացված է  
 $\lambda = \pm 1$  կետերում, որոնք հանդիսանում են անվերջ պատիկության սեփա-  
կան արժեքներ, իսկ դիտարկվող հավասարումը այդ դեպքում վեր է ածվում  
Բիցաձեի հայտնի հավասարմանը կամ նրա համալուծին: Բացահայտ տես-  
քով կառուցված է  $\lambda = \pm 1$  սեփական արժեքներին համապատասխանող սե-  
փական ֆունկցիաների լրիվ հավաքը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. Наука, М., 1966. 2 Н. Е. Товмасын, Изв. АН АрмССР., Математика, т. 3, № 6 (1968). 3 Р. А. Александрян, Тр. ММО, т. 9, 1960. 4 Г. В. Вираблян, ДАН СССР, т. 150, № 1 (1963).

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.64

А. Б. Гарибян

Быстрые алгоритмы численного решения интегрального уравнения  
 второго рода с ядром теплицева типа

(Представлено чл.-корр. НАН Армении А. Б. Нерсисяном 24/III 1993)

Для численного решения интегрального уравнения Фредгольма  
 второго рода

$$y(x) = \int_0^1 K(x, t) y(t) dt + f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

с ядром теплицева типа

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) K(x, t) = \sum_{i=1}^m p_i(x) q_i(t) \quad (2)$$

рассмотрим уравнение (1) на отрезке переменной длины  $\tau$  ( $0 \leq \tau \leq 1$ )

$$y(x, \tau) = \int_0^\tau K(x, t) y(t, \tau) dt + f(x), \quad 0 \leq x \leq \tau. \quad (3)$$

Если для данного  $\tau \in [0, 1]$  уравнение (3) однозначно разрешимо,  
 то существует его резольвентное ядро  $R(x, t, \tau)$  ( $0 \leq x, t \leq \tau$ ), удов-  
 летворяющее известным соотношениям:

$$R(x, t, \tau) = K(x, t) + \int_0^\tau K(x, s) R(s, t, \tau) ds; \quad (4)$$

$$R(x, t, \tau) = K(x, t) + \int_0^\tau R(x, s, \tau) K(s, t) ds. \quad (5)$$

Заметим, что (см. (1, 2)) поскольку ядро  $K$  определено во всем квад-  
 рате  $[0, 1] \times [0, 1]$ , формулы (4) и (5) позволяют рассматривать ре-  
 зольвентное ядро  $R$  при любом  $\tau$  во всем прямоугольнике  $[0, 1] \times$   
 $\times [0, 1]$ , а решение уравнения (3)  $y(x, \tau)$  — при  $x \in [0, 1]$ . При этом  
 $R$  наследует (по  $x, t$ ) гладкость ядра  $K(x, t)$ , а  $y$  (при гладкости  $K$ ) —  
 гладкость  $f$ . При такой трактовке ясно, что

$$R(x, t, 0) = K(x, t), \quad y(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x, t \leq 1.$$

Всюду в дальнейшем будем исходить из равномерного деления отрезка  $[0, 1]$  на  $N$  частей с шагом  $h = 1/N$  ( $N > 2$ ).

Схема решения уравнения (1) для ядер общего вида предполагает последовательное решение уравнений (3) для значений  $\tau = 0, h, 2h, \dots, Nh$ , что приводит, в конечном счете, к решению уравнения (1) —  $y(x) = y(x, Nh)$ . При этом используются соотношения резольвентного ядра и решения уравнения (2), определенные во всем квадрате  $[0, 1] \times [0, 1]$  (см. (1))<sup>\*</sup>.

$$R(x, t, n+1) = R(x, t, n) + \int_{nh}^{(n+1)h} R(x, s, s) R(s, t, s) ds, \quad (6)$$

или

$$R(x, t, n+1) = R(x, t, n) + \int_{nh}^{(n+1)h} R(x, s, n) R(s, t, n+1) ds; \quad (7)$$

$$y(x, n+1) = y(x, n) + \int_{nh}^{(n+1)h} R(x, s, s) y(s, s) ds. \quad (8)$$

или

$$y(x, n+1) = y(x, n) + \int_{nh}^{(n+1)h} R(x, s, n) y(s, n+1) ds. \quad (9)$$

Для ядер теплицева типа из формулы (4) или (5) можно получить рекуррентное соотношение

$$R(x, n+1) = R(x-1, t-1, n) + \int_{nh}^{(n+1)h} \left[ \sum_{i=1}^m P_i(s+x-n-1, s) \times \right. \\ \left. \times Q_i(s+t-n-1, s) + R(s+x-n-1, 0, s) R(0, s+t-n-1, s) \right] ds, \quad (10)$$

где

$$P_i(x, \tau) = \int_0^\tau K(x, s) P_i(s, \tau) ds + p_i(x); \quad (11)$$

$$Q_i(x, \tau) = \int_0^\tau Q_i(s, \tau) K(s, x) ds + q_i(x), \quad (12)$$

$$i = 1, \dots, m.$$

<sup>\*</sup> Всюду далее значения  $\tau = nh$ , а также сетку дискретизации по  $x, t$  будем указывать без множителя  $h$ .

Для функций  $P_i(x, \tau)$  и  $Q_i(x, \tau)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , исходя из формул (11) и (12) можно получить рекуррентные соотношения

$$\begin{cases} P_i(x, n+1) = P_i(x, n) + \int_{nh}^{(n+1)h} R(x, s, s) P_i(s, s) ds \\ Q_i(x, n+1) = Q_i(x, n) + \int_{nh}^{(n+1)h} Q_i(s, s) R(s, x, s) ds \end{cases} \quad (13)$$

и

$$\begin{cases} P_i(x, n+1) = P_i(x, n) + \int_{nh}^{(n+1)h} R(x, s, n) P_i(s, n+1) ds \\ Q_i(x, n+1) = Q_i(x, n) + \int_{nh}^{(n+1)h} Q_i(s, n+1) R(s, x, n) ds. \end{cases} \quad (14)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} R(x, t, 0) &= K(x, t), \quad y(x, 0) = f(x); \\ P_i(x, 0) &= r_i(x), \quad Q_i(x, 0) = q_i(x), \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (15)$$

В отличие от алгоритмов для ядер общего вида, описанных в (1) и представленных в (3), сложности  $O(N^3)$  ( $N \rightarrow \infty$ ), требующих память объема  $O(N^2)$ , в данном случае на основе формул (8), (10), (13), (15) удастся построить алгоритмы сложности  $O(N^2)$  с памятью объема  $O(N)$ . Общие принципы построения таких алгоритмов изложены в (2).

Если применить к интегральным соотношениям (8), (10) и (13) квадратурную формулу, нетрудно видеть, что достаточно ограничиться рассмотрением следующих значений резольвентного ядра:

$$R(x, 0, \tau), \quad R(0, x, \tau), \quad R(x, \tau, \tau), \quad R(\tau, x, \tau), \quad 0 \leq x, \tau \leq 1. \quad (16)$$

Если обозначить

$$\begin{aligned} \Phi(x, \tau) &= R(0, x, \tau), & \Psi(x, \tau) &= R(x, 0, \tau), \\ \Phi_1(x, \tau) &= R(\tau, x, \tau), & \Psi_1(x, \tau) &= R(x, \tau, \tau), \end{aligned} \quad (17)$$

то в упомянутых алгоритмах будут фигурировать значения  $(2m+5)$  векторов.

В качестве примера построим один такой алгоритм, полученный на основе вышеуказанных формул, в которых к интегралам применена квадратурная формула по правилу средней точки

$$\int_a^b \varphi(x) dx = (b-a) \varphi\left(\frac{b+a}{2}\right) + O((b-a)^3). \quad (18)$$

### Алгоритм

#### Рекуррентные соотношения алгоритма

$$y(x, n+1) = y(x, n) + h\Psi_1\left(x, n + \frac{1}{2}\right)y\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right),$$

$$x = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, N - \frac{1}{2}, N;$$

$$\Phi_1(x, n+1) = \Phi_1(x-1, n) + h \cdot \left[ \sum_{i=1}^m \rho_i\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \times \right. \\ \left. \times Q_i\left(x - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) + \Psi\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \Phi\left(x - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \right];$$

$$\Psi_1(x, n+1) = \Psi_1(x-1, n) + h \sum_{i=1}^m \rho_i\left(x - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \times \\ \times Q_i\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) + \Psi\left(x - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \Phi\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right);$$

$$x = 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, N - \frac{1}{2}, N;$$

$$\rho_i(x, n+1) = \rho_i(x, n) + h \cdot \Psi_1\left(x, n + \frac{1}{2}\right) \rho_i\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right);$$

$$Q_i(x, n+1) = Q_i(x, n) + h \cdot \Phi_1\left(x, n + \frac{1}{2}\right) Q_i\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right),$$

$$i = 1, \dots, m; \quad x = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, N - \frac{1}{2}, N.$$

Очевидно, что значения  $\Phi(x, n+1)$  и  $\Psi(x, n+1)$  (т. е. значения  $R(0, x, n+1)$  и  $R(x, 0, n+1)$ ) нельзя вычислить, используя формулу (10). В данном алгоритме для вычисления указанных значений употребляется рекуррентная формула для ядер общего вида (6), в которой фигурируют только представленные в (16) значения  $R$ . Применяя формулу (18) к данному соотношению, для функций  $\Phi$  и  $\Psi$  получим (с точностью  $O(h')$ ,  $h \rightarrow 0$ )

$$\Phi(x, n+1) = \Phi(x, n) + h\Phi\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right)\Phi_1\left(x, n + \frac{1}{2}\right);$$

$$\Psi(x, n+1) = \Psi(x, n) + h \cdot \Psi_1\left(x, n + \frac{1}{2}\right)\Psi\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right),$$

$$x = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, N - \frac{1}{2}, N.$$

Заметим, что  $\Phi_1(0, n+1) = \Psi(n+1, n+1)$  и  $\Psi_1(0, n+1) = \Phi(n+1, n+1)$ , а значения  $\Phi_1\left(\frac{1}{2}, n+1\right)$  и  $\Psi_1\left(\frac{1}{2}, n+1\right)$  (т. е. значения  $R\left(n+1, \frac{1}{2}, n+1\right)$  и  $R\left(\frac{1}{2}, n+1, n+1\right)$ ), которые нельзя вычислить по формуле (6) (число векторов в алгоритме возрастает), будем определять по формуле, аналогичной (10), где интегрирование по  $\tau$  ведется от  $\left(n + \frac{1}{2}\right)h$  до  $(n+1)h$ . Если к этой формуле применить квадратурную формулу трапеций, получим:

$$\begin{aligned} \Psi_1\left(\frac{1}{2}, n+1\right) = & \Psi_1\left(0, n + \frac{1}{2}\right) + \frac{h}{4} \left| \sum_{i=1}^m \left( P_i\left(0, n + \frac{1}{2}\right) \times \right. \right. \\ & \times Q_i\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) + P_i\left(\frac{1}{2}, n+1\right) Q_i(n+1, n+1) + \\ & + \Psi\left(0, n + \frac{1}{2}\right) \Phi\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) + \\ & \left. \left. + \Psi\left(\frac{1}{2}, n+1\right) \Phi(n+1, n+1) \right|; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1\left(\frac{1}{2}, n+1\right) = & \Phi_1\left(0, n + \frac{1}{2}\right) + \frac{h}{4} \left| \sum_{i=1}^m P_i\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \times \right. \\ & \times Q_i\left(0, n + \frac{1}{2}\right) + P_i(n+1, n+1) Q_i\left(\frac{1}{2}, n+1\right) + \\ & + \Psi\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \Phi\left(0, n + \frac{1}{2}\right) + \\ & \left. \left. + \Psi(n+1, n+1) \Phi\left(\frac{1}{2}, n+1\right) \right|. \end{aligned}$$

Предлагаемый алгоритм является двухэтапным, так как в рекуррентных формулах фигурируют три значения  $\tau$ : при вычислении значений функций  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Psi_1$ ,  $u$ ,  $P_i$ ,  $Q_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  для  $\tau = n+1$  используются значения этих функций для  $\tau = n$  и  $\tau = n + \frac{1}{2}$ . От-

сюда следует, что

а) сеть дискретизации по  $\tau$  должна быть везде гуще:  $\tau = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, N$ ;

б) значения всех функций должны быть заданы для  $\tau = 0$  и  $\tau = \frac{1}{2}$ , а для  $\tau = 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, N$  — вычислены рекуррентными соотно-

шениями алгоритма. Численным решением уравнения (1) с ядром типа (2) будут значения функции  $y(x, N)$ ,  $x = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, N$ , полученные в результате описанного процесса.

Формулами (15) определяются начальные значения всех функций для  $\tau = 0$ :

$$\Phi(x, 0) = \Phi_1(x, 0) = K(0, x); \quad \Psi(x, 0) = \Psi_1(x, 0) = K(x, 0);$$

$$P_i(x, 0) = p_i(x); \quad Q_i(x, 0) = q_i(x), \quad i = 1, \dots, m;$$

$$y(x, 0) = f(x) \quad x = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, N - \frac{1}{2}, N,$$

а для  $\tau = \frac{1}{2}$  начальные значения функций  $\Phi, \Psi, \Phi_1, \Psi_1$  определяются по формуле (7),  $P_i, Q_i, i = 1, \dots, m$  — по формулам (14),  $y$  — по формуле (9) с помощью применения к ним квадратурной формулы (18).

$$\Phi\left(x, \frac{1}{2}\right) = \Phi(x, 0) + \alpha \cdot K\left(0, \frac{1}{4}\right) K\left(\frac{1}{4}, x\right).$$

$$\Psi\left(x, \frac{1}{2}\right) = \Psi(x, 0) + \alpha \cdot K\left(\frac{1}{4}, 0\right) K\left(x, \frac{1}{4}\right);$$

$$\Phi_1\left(x, \frac{1}{2}\right) = K\left(\frac{1}{2}, x\right) + \alpha \cdot K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) K\left(\frac{1}{4}, x\right);$$

$$\Psi_1\left(x, \frac{1}{2}\right) = K\left(x, \frac{1}{2}\right) + \alpha \cdot K\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) K\left(x, \frac{1}{4}\right);$$

$$P_i\left(x, \frac{1}{2}\right) = P_i(x, 0) + \alpha \cdot K\left(x, \frac{1}{4}\right) p_i\left(\frac{1}{4}\right);$$

$$Q_i\left(x, \frac{1}{2}\right) = Q_i(x, 0) + \alpha \cdot K\left(\frac{1}{4}, x\right) q_i\left(\frac{1}{4}\right);$$

$$y\left(x, \frac{1}{2}\right) = y(x, 0) + \alpha \cdot K\left(x, \frac{1}{4}\right) f\left(\frac{1}{4}\right);$$

$$\alpha = \frac{h}{4} / \left(1 - \frac{h}{2} K\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\right),$$

$$x = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, N - \frac{1}{2}, N, \quad i = 1, \dots, m.$$

Заметим, что сети дискретизации по  $\tau$  и по  $x$  совпадают. Точность алгоритма  $16N^2(3 + 2m) + O(N)$ , требуемая память — порядка  $4N(5 + 2m)$ . Алгоритм был реализован в численном эксперименте на

компьютере IBM PC AT, тактовая частота 12 МГц. В частности рассматривались следующие ядра теплицева типа:

$$K_1(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2(x-t)^2} \left( \ln \frac{x+1}{t+1} - \frac{x-t}{x+1} \right), & x \neq t \\ \frac{1}{4(t+1)^2}, & x = t \end{cases}$$

$$K_2(x, t) = \frac{(x+t)(2(x+t)-3)}{6} + xt \left( \frac{2}{3} - t + x(t-1) \right) + \frac{1}{5}$$

Численные результаты приведены в таблице.

Ядро	$\delta_{16}$	$t_{16}$	$\delta_{32}$	$t_{32}$	$\delta_{64}$	$t_{64}$	$\delta_{128}$	$t_{128}$
$K_1(x, t)$	7.4E-5	2	1.9E-5	6	5.0E-6	22	1.2E-6	83
$K_2(x, t)$	1.0E-4	2	2.8E-5	8	7.3E-6	29	1.8E-6	115

Здесь  $\delta_N$  — среднеквадратичная ошибка при дискретизации в  $N$  точках,  $t_N$  — время работы программы в секундах.

Наблюдения показывают, что построение экономичных алгоритмов для ядер теплицева типа достижимо при использовании разных квадратурных формул. При этом получаются разнообразные алгоритмы разных порядков точности: одношаговые и многошаговые, с равномерными и неравномерными сетями дискретизации по  $x$ , с совпадающими и несовпадающими сетями дискретизации по  $x$  и по  $t$ .

В заключение заметим, что алгоритмы указанного типа абсолютно устойчивы при условии обратимости операторов (3) при всех  $0 < \tau < 1$  (см. (2)).

Ереванский государственный университет

Հ. Բ. ՂԱՐԻՔՅԱՆ

Տյուպլիցյախ տիպի կորիզով երկուսդ սեռի ինտեգրալ հավասարման  
թվային լուծման արագ ալգորիթմներ

Երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման թվային լուծման դիտարկվող սխեման ենթադրում է (3) տիպի հավասարումների հաջորդաբար լուծում  $\tau = 0, h, 2h, \dots, Nh$  պրժեքների համար: Ելնելով (3) հավասարման ուղղվենտային ֆունկցիայի և լուծման համար հայտնի (6)–(9) առնչություններից, կարելի է մշակել (1) հավասարման թվային լուծման  $O(N^3)$  բարդության ալգորիթմներ, որոնց իրականացման համար պահանջվում է  $O(N^2)$  մեմորենայական հիշողություն: Եթե (1) հավասարման կորիզը տյուպլիցյան տիպի է, ապա (10)–(15) առնչություններից ելնելով, հնարավոր է կառուցել

նույնատիպ ալգորիթմներ, որոնց բարդությունը  $O(N^2)$  է, իսկ անհրաժեշտ մեթոդայական հիշողությունը՝  $O(N)$ : Որպես օրինակ կառուցված է  $O(h^2)$  ճշտությամբ երկգայլ ալգորիթմ:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

1 А. Б. Нерсисян, ДАН АрмССР, т. 89, № 4, с. 171—176 (1989) 2 А. Б. Нерсисян, Изв. АН Армении. Математика, т. 27, № 2 (1992). 3 А. В. Гаспарян, А. Б. Нерсисян, Численное решение интегральных уравнений с автоматическим выбором шага, Ереван. 15 с., Деп. в АрмНИИНТИ 29. 12. 89, № 68—Ар89, 1989.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.682.1

С. Е. Маркосян, О. А. Амбарцумян

Об  $NP$  полноте некоторых задач,  
относящихся к канальной трассировке

(Представлено чл.-корр. НАН Армении Ю. Г. Шукурьяном 1/II 1993)

Важное место в области автоматизированного проектирования больших интегральных схем и плат ЭВМ занимает задача канальной трассировки. Кратко о постановке задачи. Сначала дадим несколько определений.

Каналом назовем пару векторов  $T = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  и  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , элементы которых неотрицательные целые числа. Пусть дана прямоугольная сеть (grid), вершинам верхней и нижней строки которой присвоены значения элементов векторов  $T$  и  $B$  соответственно. Эти вершины назовем контактами, а строки контактными линиями. Остальные горизонтальные линии сети назовем магистралями. Множество контактов с одинаковыми номерами назовем цепью. Во время трассировки контакты цепей будем соединять деревьями Штейнера. Задача канальной трассировки состоит в трассировке максимального количества цепей с использованием минимального количества магистралей. Часто ставятся ограничения на вид трассировки и берется другой оптимизационный функционал. Эти ограничения в основном связаны с рассматриваемой технологией изготовления интегральных схем. Мы будем рассматривать задачу канальной трассировки со следующими ограничениями. Цепи можно соединять только через ребра сети в двух слоях. В одном слое разрешены только вертикальные соединения, в другом — только горизонтальные. Не разрешаются пересечения соединений различных цепей.

Как и многие другие задачи в этой области, задача канальной трассировки в указанной выше постановке  $NP$  полна, т. е. существование полиномиального алгоритма, находящего точное (оптимальное) решение, маловероятно. Поэтому многими авторами предложены различные эвристические методы и алгоритмы. С некоторыми из них можно познакомиться в статье (1). Алгоритм Маркосяна—Гаспаряна (2) — еще одна эвристика, решающая задачу трассировки. Этот алгоритм фактически приводит задачу канальной трассировки к решению двух

других задач, которые и являются объектом изучения в этой работе. Первая из них заключается в нахождении взаимно однозначного соответствия с определенными свойствами между вершинами и смежными ему ребрами в некотором ориентированном графе  $G = (V, E)$ . Вторая — это размещение интервалов при наличии вертикальных ограничений, которые получаются в результате решения первой задачи. Длина максимальной ориентированной цепи графа вертикальных ограничений является нижней оценкой числа необходимых для трассировки магистралей (существуют, конечно, более точные оценки этого числа). Для того, чтобы это число было по возможности мало, первую задачу можно сформулировать следующим образом. Найти такое взаимно однозначное соответствие между вершинами орграфа  $G = (V, E)$  и смежными им дугами, чтобы в порожденном подграфе, полученном из выбранных дуг, длина максимальной ориентированной цепи была бы минимальной.

Другая задача, связанная с размещением интервалов и рассматриваемая в этой работе, встречается в алгоритмах проектирования БИСов.

2. В этой работе будет доказана *NP* полнота следующих задач.

а) Пусть дано множество интервалов, каждому интервалу поставлен в соответствие  $[\alpha_i, \beta_i]$  числовой отрезок. Можно ли разместить эти интервалы так, чтобы номер магистрали каждого интервала принадлежал соответствующему ему численному промежутку?

б) Пусть дано множество интервалов с вертикальными ограничениями, т. е. частичный порядок на множестве интервалов. Можно ли разместить эти интервалы на  $K$  магистралях так, чтобы пересекающиеся интервалы оказались на различных магистралях и «меньшие» (по данному частичному порядку) интервалы оказались на «нижних» магистралях?

в) Пусть даны орграф  $G = (V, E)$  и число  $K$ . Существует ли такое взаимно однозначное соответствие между вершинами орграфа и инцидентными им дугами, чтобы в порожденном подграфе, полученном из выбранных дуг, длина максимальной ориентированной цепи не превосходила число  $K$ ?

г) Пусть даны орграф  $G = (V, E)$  и число  $K$ . Существует ли остовное дерево, удовлетворяющее условию задачи в)?

3. Сначала опишем задачу раскраски графа пересечений дуг.

Пусть даны окружность, множество дуг  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  и неотрицательное число  $K$ . Можно ли граф пересечений этих дуг покрасить не более  $K$  цветами? *NP* полнота этой задачи показана в статье (1). Ниже для доказательства *NP* полноты представлено полиномиальное сведение задачи раскраски графа пересечений дуг к рассматриваемым задачам. Принадлежность этих задач к классу *NP* очевидна.

**Теорема 1.** *Задача а) NP полна.*

**Доказательство.** Пусть на окружности  $S$  дано множество дуг  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ . Возьмем произвольную, не совпадающую с концами дуг, точку на окружности, отрежем ее в этой точке и рассмотрим ее топологически эквивалентный отрезок  $[a, b]$ . Вместо дуг бу-

дем иметь интервалы, часть из них при этом разобьется на два интервала. Без потери общности можно предположить, что в два интервала превратились первые  $m$  дуг. Обозначим их через  $I_{11}, I_{12}, \dots, I_{m,1}, I_{m,2}$ . Остальные интервалы обозначим  $I_{m+1,1}, \dots, I_{1,1}$ . Интервалам поставим в соответствие следующие числовые отрезки — для интервалов  $I_{11}, I_{12}, \dots, I_{m,1}$  отрезок  $[s, s]$ , ( $s = 1, \dots, m$ ), а для  $I_{j,1} = [0, K]$ ,  $j = m+1, \dots, n$ . Рассмотрим задачу а) для полученного множества интервалов. Если теперь эта задача имеет решение, то для получения раскраски графа пересечений множества дуг нужно вершины этого графа покрасить в цвета соответствующих интервалов (если одной дуге соответствует два интервала, то они оба получили один и тот же цвет). Наоборот, если существует раскраска графа дуг, то соответствующая ему задача а) также имеет решение (его можно получить путем перестановки цветов).

**Теорема 2. Задача б)  $NP$  полна.**

**Доказательство.** Пусть на окружности  $S$  дано множество дуг  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ . Как и в предыдущем доказательстве возьмем производную не совпадающую с концами дуг точку на окружности, отрежем окружность в этой точке и рассмотрим ее топологически эквивалентный отрезок  $[a, b]$ . Получим множество интервалов (обозначения — как в доказательстве предыдущей теоремы). Если  $m < K$ , то добавим одновершинные интервалы  $I_{m+1,1}, \dots, I_{k,1} = [a, a]$ ,  $I_{m+1,2}, \dots, I_{k,2} = [b, b]$ . Определим следующий частичный порядок на множестве интервалов —  $I_{11} > I_{21} > \dots > I_{m,1} > I_{m+1,1} > I_{k,1} > I_{12} > I_{22} > \dots > I_{m,2} > I_{m+1,2} > \dots > I_{k,2}$ . Для полученного множества интервалов рассмотрим следующую задачу — существует ли его размещение на  $K$  магистралях, сохраняющее данный частичный порядок. Если приведенная задача имеет решение, то легко получить решение для задачи раскраски графа дуг. С другой стороны, если в графе дуг есть  $K$ -цветная раскраска, то путем перестановки цветов можно получить раскраску соответствующего графа интервалов.

4.  $NP$  полнота задач, связанных с существованием подграфа и остовного дерева

Для доказательства  $NP$  полноты задач в) и г): представим полиномиальное сведение задачи 3-выполнимости к решению этих задач. Сформулируем задачу 3-выполнимости.

Пусть  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  множество переменных, принимающих значения 0 и 1, и множество дизъюнкция  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , где

$$c_j = u_{1j}^{a_{1j}} \cup u_{2j}^{a_{2j}} \cup u_{3j}^{a_{3j}}, \quad u_{ij} \in U, \quad i = 1, 3, \quad j = 1, \dots, m:$$

Существует ли набор значений переменных  $u_1^0, \dots, u_n^0$ , для которого имеет место равенство

$$\prod_{j=1}^m c_j = 1. \quad (1)$$

**Теорема 3. Задача г) при  $K = 1$   $NP$  полна.**

Доказательство. Принадлежность к классу  $NP$  очевидна. Покажем  $NP$  полноту.

Пусть  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  множество переменных, и  $c_1, c_2, \dots, c_m$  — множество дизъюнкций, где

$$c_j = u_{1j}^{p_1} \cup u_{2j}^{p_2} \cup u_{3j}^{p_3}, \quad u_{ij} \in U, \quad i = 1 \dots 3, \quad u_p^j \in U, \quad p = 1 \dots 3, \quad j = 1, \dots, m.$$

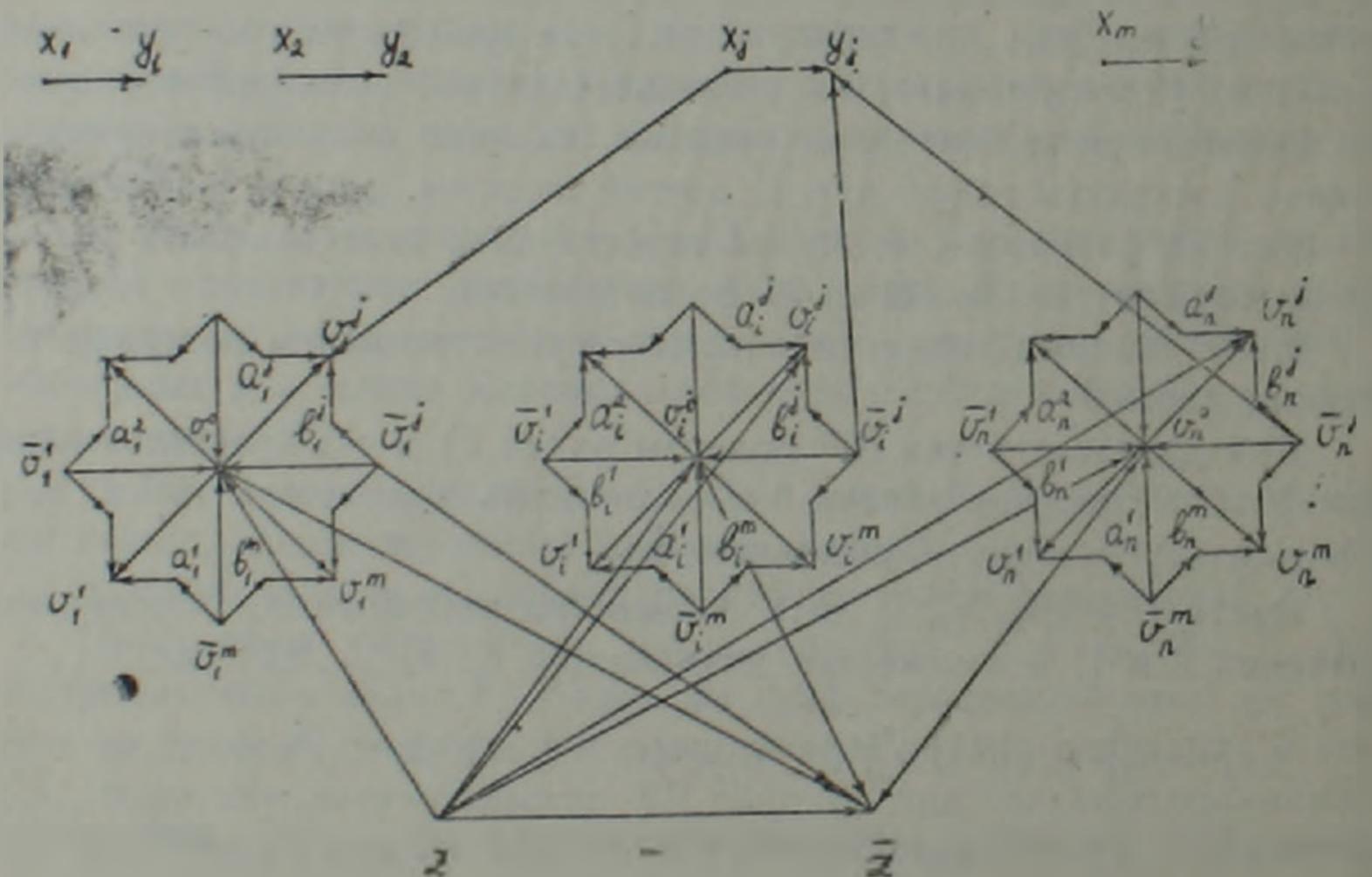
Построим следующий граф. Обозначим через  $G_i = (V_i, E_i)$  следующие подграфы:

$$V_i = \{\sigma_i^j, \bar{v}_i^j, a_i^j, b_i^j; \quad j = 1, \dots, m\} \cup \{\sigma_i^0\}, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$E_i = \{(a_i^j, v_i^j), (b_i^j, v_i^j), (\bar{v}_i^j, a_i^{j+1}), (\bar{v}_i^j, b_i^j), (\sigma_i^0, \sigma_i^j)\},$$

$$(\bar{v}_i^j, \sigma_i^0), \quad j = 1, \dots, m \quad (a_i^{m+1} = a_i^1)\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Каждой дизъюнкции  $c_j$  поставим в соответствие дугу  $(x_j, y_j)$ . В искомый граф  $G$  возьмем все подграфы  $G_i$  и дуги  $(x_j, y_j)$ . Если переменная  $u_i$  входит в  $c_j$ , то добавим дугу  $(x_j, v_i^j)$ , если же  $u_i$  входит в  $c_j$  с отрицанием, то добавим дугу  $(\bar{v}_i^j, y_j)$ . К полученному графу добавим также вершины  $z$  и  $\bar{z}$ , дугу  $(z, \bar{z})$ . Из всех вершин  $v_i^j$  и  $\bar{v}_i^j$ , локальная степень которых 3, построим дугу  $(z, v_i^j)$  и  $(\bar{v}_i^j, \bar{z})$  соответственно. Добавим также дуги  $(z, v_i^0)$  и  $(\sigma_i^0, \bar{z})$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Рассмотрим задачу г) для полученного графа (см. рисунок).



Покажем, что если существует набор переменных  $u_1^1, \dots, u_n^1$ , для которого имеет место равенство (1), то описанный граф имеет остовное дерево, длина максимальной орцепи которого равна единице.

Если  $u_i^0 = 0$ , то возьмем дуги  $(\bar{v}_i^j, a_i^{j+1})$ ,  $(\bar{v}_i^j, b_i^j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ ;  $(\bar{v}_i^0, \bar{z})$   $(\bar{v}_i^j, \bar{v}_i^0)$ , а если  $u_i^0 = 1$  —  $(a_i^j, v_i^j)$   $(b_i^j, v_i^j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ ;  $(v_i^0, v_i^j)$ ,  $(z, v_i^0)$  дуги. Возьмем также все дуги, инцидентные вершинам  $z, \bar{z}, x_j, y_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Покажем, что полученный подграф будет связным. Обозначим через  $G_0$  компоненту связности выбранного подграфа, содержащую вершину  $z$ . Любая вершина  $v_i^j$  принадлежит  $G_0$  или инцидентна одной из вершин  $x_j$  или  $y_j$ . Для того, чтобы убедиться в связности подграфа, нужно только показать принадлежность вершин  $x_j$  и  $y_j$  компоненте  $G_0$ . Принадлежность всех остальных вершин графа компоненте  $G_0$  очевидно. Рассмотрим произвольную дизъюнкцию  $c_j = u_{1j}^{z_1} \cup u_{2j}^{z_2} \cup u_{3j}^{z_3}$ . Она становится единицей за счет одной из переменных. Обозначим ее через  $u_{i_0}$ . Возможны два случая — или  $u_{i_0} = 0$  и входит в  $c_j$  с отрицанием, или  $u_{i_0} = 1$  и входит в  $c_j$  без отрицания. В первом случае в подграфе присутствуют дуги  $(\bar{v}_{i_0}^j, \bar{v}_{i_0}^0)$  и  $(\bar{v}_{i_0}^j, y_j)$ , а во втором —  $(v_{i_0}^0, v_{i_0}^j)$  и  $(x_j, v_{i_0}^j)$ . Таким образом, полученный подграф связан, длина максимальной цепи равна единице. Из него легко можно получить искомое остовное дерево.

Покажем обратное. Пусть в графе есть дерево искомого типа. Покажем, что существуют такие значения переменных  $u_1^0, \dots, u_n^0$ , для которых имеет место равенство (1). Ясно, что каждая из вершин  $v_i^0$  в остовном дереве является или началом, или концом. В первом случае возьмем  $u_i^0 = 1$ , а во втором —  $u_i^0 = 0$ . Для произвольной дизъюнкци  $c_j$  существует такой индекс  $i^*$ , что в дереве присутствуют пара дуг  $(\bar{v}_{i^*}^j, \bar{v}_{i^*}^0)$  и  $(\bar{v}_{i^*}^j, y_j)$  или  $(v_{i^*}^0, v_{i^*}^j)$  и  $(x_j, v_{i^*}^j)$ , иначе нарушалась бы связность остовного дерева. Ясно, что переменная  $u_{i^*}^0$  присутствует в дизъюнкции  $c_j$  и именно за счет нее  $c_j$  становится единицей.

Из теоремы 3 легко получить следующее следствие.

**Следствие.** Задача г) при произвольном  $K \in NP$  полна.

**Теорема 4.** Задача в)  $NP$  полна.

Доказательство этой теоремы почти полностью повторяет доказательство предыдущей теоремы. Только в построении графа нужно добавить вершины  $w$  и  $\bar{w}$ , дуги  $(\bar{w}, \bar{z})$ ,  $(z, w)$  и  $(\bar{w}, w)$  и взять их в подграфе при построении искомого соответствия.

Таким образом, при реализации метода канальной трассировки Маркосяна—Гаспаряна оправдано применение эвристических алгоритмов.

Կանալային ուղեգծմանը վերաբերող մի քանի խնդիրների  
բարդության վերաբերյալ

Կանալային ուղեգծումը էՀՄ ավտոմատ նախագծման կարևոր փուլերից է: Այս աշխատանքում ներկայացված են մի շարք խնդիրներ, որոնք հանդիպում են (1) աշխատանքում նկարագրված կանալային ուղեգծման ալգորիթմում: Այդ խնդիրներն են՝

ա) Տրված օրդրաֆի յուրաքանչյուր գազաթին փոխմիարժեք համապատասխանեցնել նրան կից կողերից մեկը այնպես, որպեսզի այդ կողերով ծնված ենթաօրաֆում մաքսիմալ երկարության օրշլթայի երկարությունը լինի մինիմալ:

բ) Դիցուք տրված են  $G$  օրդրաֆը և  $K$  թիվը: Գտնել ա) խնդրի պայմանին բավարարող  $G$  օրաֆի կմախքային ծառ:

գ) Տրված ուղղահայաց  $n$  ահմանափակումներով ինտերվալային գրաֆը ներկել մինիմալ գույներով այնպես, որ կից դազաթները ստանան տարբեր գույներ և օրիենտացված կողի սկիզբը ստանա ավելի փոքր համարի գույն, քան վերջը:

դ) Տրված ինտերվալային գրաֆը ներկել այնպես, որ յուրաքանչյուր գազաթ ստանա գույն իրեն համապատասխանող նախօրոք տրված թվային միջակայքից:

Ապացուցված է այդ խնդիրների  $NP$  լրիվությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Buss'eln, Layout Design and Verification, Chapter 4, p. 133-167, 1986.  
 2. С. Е. Маркосян, Г. С. Гаспарян Кибернетик АН У.Ս.Ս.Р. № 3, 1981. \* 4 S. Lough, Ph. D. Thesis, Laboratory for Computer Science, MIT (November, 1984).  
 3. М. Гэри, Д. Джонсон, Вычислительные машины и труднорешаемые задачи, Мир, М., 1982.

УДК 539.3

М. В. Белубекян, Л. Р. Мкртчян

К вопросу учета поперечных сдвигов и инерции вращения  
в задаче свободных колебаний пластины

(Представлено академиком НАН Армении С. А. Амбарцумяном 30/IV 1993)

В работе <sup>(1)</sup> приведено точное решение задачи о свободных колебаниях толстой свободно опертой прямоугольной изотропной пластины. Выполнены расчеты на ЭЦВМ для ряда собственных значений и распределения напряжений, которые в табличной форме сравниваются с результатами уточненной теории пластин типа Тимошенко и с результатами классической теории.

В настоящей работе точное решение данной задачи представляется в виде двойных тригонометрических рядов Фурье с помощью двух неизвестных функций, что значительно облегчает дальнейшие выкладки. Приводится аналитическое сравнение уточненного уравнения С. А. Амбарцумяна с уравнением, полученным из точного решения путем предельного перехода, а также с уравнением теорий типа Тимошенко при различных вариантах функции, определяющей характер изменения напряжений поперечного сдвига по толщине пластинки.

1. Задача о свободных колебаниях толстой изотропной прямоугольной пластины решается с помощью двойных тригонометрических рядов Фурье. Пусть на боковых гранях пластины заданы граничные условия типа Навье, которые, например, для краев  $x=0$ , а имеют вид

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad \sigma_x = 0. \quad (1)$$

Для приближенных теорий в случае тонких пластин эти условия приводят к свободному опиранию по контурным линиям срединной плоскости ( $z=0$ )

$$w = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad M_x = 0,$$

где  $w$  и  $v$  перемещения срединной плоскости.

Искомые перемещения представляются в виде:

$$\begin{aligned} u_x &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\omega t} g_{mn}(z) \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ u_y &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\omega t} g_{mn}(z) \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}; \\ u_z &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\omega t} f_{mn}(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $a$  и  $b$  размеры пластины. Неизвестные функции  $g_{mn}(z)$  и  $f_{mn}(z)$ , входящие в выражения (2) для фиксированных  $m$  и  $n$ , будем искать в виде

$$\begin{aligned} g(z) &= A_i e^{\beta_i z}; \\ f(z) &= B_i e^{\beta_i z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для простоты записи здесь и далее индексы  $m$  и  $n$  пропустим. Подставляя выражения перемещений (2) с учетом (3) в уравнения движения в перемещениях

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} + \mu \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{u} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}$$

из условия существования нетривиального решения системы, для  $\beta_i$  получаем

$$\beta_{1,2} = \pm M \sqrt{1 - \tau_{11}}, \quad \beta_{3,4} = \pm M \sqrt{1 - \tau_{12}}, \quad (4)$$

где

$$M^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad \tau_{11} = \frac{\rho \omega^2}{(\lambda + 2\mu) M^2}, \quad \tau_{12} = \frac{\rho \omega^2}{\mu M^2}.$$

Тогда для функций  $g(z)$  и  $f(z)$  имеем

$$\begin{aligned} g(z) &= - \frac{B_1}{\beta_1} \operatorname{ch} \beta_1 z + A_3 \operatorname{ch} \beta_2 z - \frac{B_1}{\beta_1} \operatorname{sh} \beta_1 z + A_4 \operatorname{sh} \beta_2 z; \\ f(z) &= B_2 \operatorname{sh} \beta_1 z - \frac{M^2 A_3}{\beta_2} \operatorname{sh} \beta_2 z + B_1 \operatorname{ch} \beta_1 z - \frac{M^2 A_4}{\beta_4} \operatorname{ch} \beta_2 z. \end{aligned} \quad (5)$$

В решениях (5)  $B_1, B_2, A_3, A_4$  являются произвольными постоянными. При свободных колебаниях полагаем, что лицевые плоскости пластины свободны от напряжений

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \text{при } z = \pm h/2. \quad (6)$$

Возьмем отдельно симметричную и антисимметричную относительно перемещения  $u_z$  части решений. Удовлетворяя поверхностным условиям (6), получим соответственно следующие уравнения для определения частоты колебаний:

$$\frac{\operatorname{th}\left(\frac{hM}{2}\sqrt{1-\tau_{11}}\right)}{\operatorname{th}\left(\frac{hM}{2}\sqrt{1-\tau_{12}}\right)} = \frac{4\sqrt{1-\tau_{11}}\sqrt{1-\tau_{12}}}{(2-\tau_{12})^2}; \quad (7)$$

$$\frac{\operatorname{th}\left(\frac{hM}{2}\sqrt{1-\tau_{11}}\right)}{\operatorname{th}\left(\frac{hM}{2}\sqrt{1-\tau_{12}}\right)} = \frac{(2-\tau_{12})^2}{4\sqrt{1-\tau_{11}}\sqrt{1-\tau_{12}}}. \quad (8)$$

Займемся уравнением (7) и рассмотрим предельные случаи.

а) Пусть толщина пластины очень мала по сравнению с другими размерами:  $hM \rightarrow 0$  и пусть  $\tau_{11} < \tau_{12} < 1$ . Разлагая гиперболические тангенсы в ряд и сохраняя лишь три члена ряда, после некоторых преобразований получим

$$\omega^2 = \frac{\mu h^2 M^4}{3\rho} \left[ 1 - \frac{\nu}{\nu + 2\mu} \right]. \quad (9)$$

Восстановим уравнение, которому соответствует частота  $\omega^2$ , выраженная через (9):

$$D\Delta^2 w = -\rho h \frac{\partial^3 w}{\partial t^3},$$

которое оказывается уравнением классической теории колебания тонких пластин.

Далее, сохраняя в разложении гиперболических тангенсов еще несколько членов малости высшего порядка, а затем восстанавливая уравнение, которому соответствует данное решение, окончательно получаем

$$D\Delta^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho h^3 (1+\nu)}{12(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)\rho^2 h^3}{12(1-\nu)E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} = 0. \quad (10)$$

Из уравнения (10) видно, что при пренебрежении последним членом получается уравнение движения классической теории пластин с учетом инерции вращения. В целом же это уравнение должно соответствовать какой-либо уточненной теории.

Однако в восстановленном уравнении (10) знак последнего члена приводит к качественному различию с известными ранее уравнениями каких-либо уточненных теорий. Отсюда следует, что восстановленные уравнения с сохранением следующих слагаемых в разложении характеристического уравнения не всегда приводят к ранее известным уточненным теориям.

б) Рассмотрим коротковолновое приближение  $hM \rightarrow \infty$ . В этом случае из (7) получим уравнение, характеризующее волны Рэлея:

$$(2 - \nu_2)^2 = 4 \sqrt{1 - \nu_2} \sqrt{1 - \nu_1}, \quad \text{где } \nu = \nu_1/\nu_2$$

2. Рассмотрим уточненную теорию пластин С. А. Амбарцумяна, (3.3), которая учитывает поперечные сдвиги следующим образом

$$\tau_{xz} = f(z) \varphi(x, y, t), \quad \tau_{yz} = f(z) \psi(x, y, t),$$

где функция  $f(z)$  определяет характер изменения напряжений поперечного сдвига по толщине пластинки.

Уравнение колебаний по этой уточненной теории пластин имеет вид (3.4):

$$D \Delta^2 w + 2\mu h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2\mu h^3}{3} \left[ 1 + \frac{6M}{(1-\nu)h^2 I_0} \right] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w + \frac{4(1+\nu)\rho^2 h M}{E I_0} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0, \quad (11)$$

где

$$M = \int_{-h}^h z J(z) dz, \quad J(z) = \int_0^z f(\xi) d\xi, \quad I_0 = \int_{-h}^h f(z) dz.$$

Так как в целом сравнение уравнения (11) с уравнением, полученным из точного решения (10), невозможно (уравнение (11)—гиперболического типа, а уравнение (10)—нет), то возьмем различные варианты функции  $f(z)$  и посмотрим, в каких случаях коэффициенты при третьих членах (члены, учитывающие инерцию вращения) в этих уравнениях совпадают.

$$а) \quad f(z) = 1 - z^2/h^2 \quad (M/I_0 = 2h^2/5). \quad (12)$$

Получим, что для того, чтобы члены, учитывающие инерцию вращения в приближенном уравнении (11) и в уравнении (10), совпадали, необходимо, чтобы коэффициент Пуассона был бы равен 1, 2, т. е.  $\nu = 1,2$ ; чего не может быть в сплошной изотропной среде вообще. Отсюда можем заключить, что при функции  $f(z)$ , выраженной формулой (12), эти члены не совпадают.

$$б) \quad f(z) = 1 - |z|/h \quad (M/I_0 = 5h^2/12). \quad (13)$$

В этом случае для коэффициента Пуассона получаем  $\nu = 1,25$ , чего также в реальности не существует ( $0 < \nu < 0,5$ ).

$$в) \quad f(z) = 1 - a_1 \frac{|z|}{h} - a_2 \frac{z^2}{h^2}, \quad a_1 + a_2 = 1. \quad (14)$$

В этом случае для соотношения  $M_0/I_0$  имеем

$$\frac{M}{I_0} = \frac{40 - 15a_1 - 8a_2}{20(6 - 3a_1 - 2a_2)} h^3 = \frac{32 - 7a_1}{20(4 - a_1)} h^3.$$

Сравнивая уравнения (10) и (11), получим:

$$a_1 = \frac{135 - 41\nu}{31 - 10\nu}, \quad a_2 = 1 - \nu.$$

Попробуем аналитически сравнить уравнение (11) уточненной теории С. А. Амбарцумяна, с уравнением уточненной теории типа Тимошенко.

И. Т. Селезов, исходя из метода степенных рядов, нашел в (4), выражение для коэффициента сдвига, которое соответствует аппроксимации Тимошенко

$$\beta^2 = 2(2 - \nu + \sqrt{0,5 + \nu^2})^{-\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Формула (15) получена из сравнения для изгибной волны характеристики, соответствующей уравнению теорий типа Тимошенко

$$D\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left[ 1 + \frac{2}{\beta^2(1-\nu)} \right] \frac{2h^3}{3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta^2 w + \frac{4(1+\nu)\rho^2 h^3}{3\beta^2 E} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0, \quad (16)$$

и характеристики, соответствующей уточненному уравнению, полученному из трехмерных уравнений динамической теории упругости, как их двухмодовая аппроксимация (5).

Возьмем различные рассмотренные варианты функции  $f(z)$  (12), (13), (14) и сравним приближенное уравнение (11) уточненной теории С. А. Амбарцумяна с аппроксимацией Тимошенко (16) с учетом выражения коэффициента сдвига (15), полученного И. Т. Селезовым.

а) Требуя, чтобы в уравнениях (11) и (16) коэффициенты при всех соответствующих членах были равны, для коэффициента сдвига получим  $\beta^2 = 5/6$ . Но, с другой стороны, для  $\beta^2$  имеем также выражение (15). Это означает, что при данной функции  $f(z)$  для того, чтобы уточненные уравнения (11) и (16) совпадали, необходимо, чтобы коэффициент Пуассона был равен  $\nu = 0,425$ .

б) В этом случае для коэффициента сдвига получается  $\beta^2 = 4/5$ . И так же, как и в предыдущем случае, уравнения (11) и (16) совпадают лишь при определенном значении коэффициента Пуассона  $\nu = 0,25$ .

в) В этом случае для коэффициента сдвига имеем

$$\beta^2 = \frac{20(4 - a_1)}{3(32 - 7a_1)}.$$

Для того, чтобы уравнения (11) и (16) совпадали, необходимо, чтобы

$$a_1 = \frac{16 + 40(\nu - \sqrt{0,5 + \nu^2})}{1 + 10(\nu - \sqrt{0,5 + \nu^2})},$$

где знаменатель в выражении  $a_1$  не равняется нулю при всех реальных значениях  $\nu$ . Отсюда следует, что при соответствующем выборе коэф-

коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$  всегда можно найти такие функции  $f(z)$ , при которых приближенные уравнения совпадают при всех реальных значениях коэффициента Пуассона.

Институт механики  
Национальной академии наук Армении

Մ. Վ. ԲՆԼՈՒՐԵԿՅԱՆ, Լ. Խ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Սալի ազատ տատանումների խնդրում ընդլայնական սահմանի և պտտման ինեչցիայի հաշվառման հարցի շուրջը

Դիտարկված է իզոտրոպ հաստ ուղղանկյուն սալի ազատ տատանումների խնդրի ճշգրիտ լուծումը: Բերված է Ս. Լ. Համբարձումյանի ճշգրտված հավասարման անալիտիկ համեմատությունը ճշգրիտ լուծումից սահմանային անցումով ստացված հավասարման հետ, ինչպես նաև Տիմոշենկոյի տիպի տեսության հավասարման հետ, ըստ սալի հատություն ընդլայնական սահմանի լարումների փոփոխման բնույթը բնորոշող ֆունկցիայի տարբեր դեպքերի համար:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> S. Srinivas. C. V. Joga Rao, A. K. Rao, J. of Sound Vibration, v. 12, № 2, p. 187—199 (1970). <sup>2</sup> С. А. Амбарцумян, Теория анизотропных пластин, Наука М., 1987. <sup>3</sup> С. А. Амбарцумян, Общая теория анизотропных оболочек, Наука, М., 1974. <sup>4</sup> И. Г. Селезов, Прикл. механика, т. 6, № 3, с. 319—327, (1960). <sup>5</sup> Э. И. Григолюк, И. Т. Селезов, Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформируемых тел, Наука, М., 1973.

ФИЗИКА

УДК 537.311.33

Член-корреспондент НАН Армении Г. М. Рутцания, Х. В. Гергеряна

Свойства и возможности применения структуры  
полупроводник — зазор — полупроводник

(Представлено 15/IV 1993)

С целью изготовления полупроводниковых лазеров с составным резонатором разработана технология, позволяющая с помощью скола создавать структуру из двух полупроводниковых кристаллов, которые отдалены друг от друга на расстояние меньше или порядка микрона ( $\mu\text{м}$ ). При этом лицевые поверхности расположенных друг против друга кристаллов представляют собой кристаллографические плоскости. Незначительным изменением этой технологии нам удалось полностью изолировать друг от друга полупроводниковые кристаллы, создав тем самым плоский конденсатор с полупроводниковыми обкладками. В настоящей работе обсуждается ряд особенностей указанной структуры, которые позволяют предложить использование техники скола для создания новых полупроводниковых приборов.

Существенное преимущество рассматриваемого конденсатора по сравнению с другими аналогичными (например, МДП-структуры) заключается в возможности использования в качестве изолирующей среды самых разнообразных материалов в различных фазовых состояниях. Можно предложить разместить в зазоре между плоскопараллельными полупроводниковыми обкладками газ, находящийся в твердом или жидком состоянии, диэлектрик, электролит, сегнетоэлектрик, стекло и другие материалы, которые существенным образом могут влиять на емкостные характеристики структуры.

Другая важная особенность предлагаемого конденсатора состоит в том, что благодаря малому зазору значение его емкости определяется также физическими параметрами полупроводниковых обкладок. Обозначим через  $\epsilon_1$  и  $L_1$  соответственно, диэлектрическую проницаемость и характерную длину полупроводникового кристалла (дебаевской длины экранирования либо толщины обедненного слоя) и через  $\epsilon_2$  и  $L_2$  диэлектрическую проницаемость материала, заполняющего зазор, и его толщину. При условии  $\epsilon_1 L_1 \leq \epsilon_2 L_2$  емкость конденсатора существенно зависит от параметров полупроводника. Это условие лег-

ко реализуется для широкого класса полупроводниковых материалов и различных заполняющих зазор сред, в том числе в случае воздушного промежутка.

Наконец, отметим еще одно свойство исследуемой структуры — возможность создания сильных электрических полей в зазоре между полупроводниковыми обкладками. В условиях, когда падение напряжения между полупроводниковыми обкладками составляет несколько десятков вольт, легко обеспечить напряженность электрического поля в зазоре порядка сотен кВ/см и выше. Указанное обстоятельство позволяет исследовать различные нелинейные свойства заполняющего зазора среды, размерные эффекты, а также различные эффекты сильного поля.

Вначале рассмотрим возможности использования структуры полупроводник—зазор—полупроводник (ПЗП-структуры) в качестве конденсатора, емкость которого меняется в зависимости от приложенного напряжения (новый тип вариконда). Заметим, что технологические особенности позволяют создавать структуру с полностью идентичными полупроводниковыми обкладками. Процедура вычисления емкости ПЗП-структуры достаточно стандартна, и здесь мы на этом не будем останавливаться. Рассмотрим ряд частных случаев, которые позволяют судить об изменении емкости структуры  $C$  в условиях изменения приложенного напряжения  $\varphi$ . Пусть оно еще настолько мало, что приводит лишь к небольшому изменению концентрации носителей зарядов в приповерхностном слое полупроводниковых обкладок. Тогда для дифференциальной емкости ПЗП-структуры нетрудно получить следующее выражение:

$$C = \frac{S}{4\pi} \left[ \frac{d}{\epsilon_x} + \left( \frac{8}{\lambda + \lambda^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{L_i}{\epsilon_n} \right]^{-1}, \quad (1)$$

$$L_i^2 = \frac{\epsilon_n kT}{8\pi e^2 n_i}, \quad \lambda = \frac{p_0}{n_i} = \frac{n_i}{n_0}.$$

Здесь  $S$  — поперечная сколу площадь полупроводниковых обкладок,  $n_0$  и  $p_0$  — равновесные концентрации электронов и дырок в исследуемом невырожденном полупроводнике,  $n_i$  и  $L_i$  — концентрация носителей и длина экранирования в собственном полупроводнике,  $T$  — температура,  $k$  — постоянная Больцмана,  $e$  — заряд электрона. Формула (1) имеет место, когда

$$\frac{e\varphi}{kT} \left[ 1 + \left( \frac{\lambda + \lambda^{-1}}{8} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\epsilon_n d}{\epsilon_x L_i} \right]^{-1} \ll 1. \quad (2)$$

Формула (1) достаточно универсальна и носит общий характер, поскольку она применима для любого типа невырожденного полупроводника в случае слабых приложенных напряжений. Однако с ростом напряжения, когда уже в одной из полупроводниковых обкладок воз-

можно образование обедненного слоя, необходимо конкретизировать ситуацию. Для определенности предположим, что обкладки конденсатора созданы из полупроводника *p*-типа, т. е. реализуется условие  $i \ll 1$ . Пусть при умеренных приложенных напряжениях в приповерхностном слое одной из полупроводниковых обкладок происходит обеднение электронами, в другой — их накопление. Падение приложенного напряжения в основном имеет место на обедненном слое, так что для дифференциальной емкости можно получить выражение

$$C = \frac{S \epsilon_n}{8\pi L_1 \lambda^{1/2}} \left( \frac{kT}{e\varphi} \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Это реализуется в условиях

$$i^2 \exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right) \ll \frac{e\varphi}{kT}, \quad \frac{\epsilon_n}{8\pi L_1 \lambda^{1/2}} \left( \frac{kT}{e\varphi} \right)^{1/2} \ll \frac{\epsilon_s}{d}. \quad (4)$$

С дальнейшим увеличением приложенного напряжения на одной из обкладок возможно формирование инверсного слоя. Тогда напряжение в основном падает на область зазора, и для дифференциальной емкости получим выражение

$$C = \frac{S \epsilon_g}{4\pi d}. \quad (5)$$

В условиях применимости (1), (3) и (5) протекающие в структурах МДП и ПЗП физические процессы заметным образом не отличаются. В обоих случаях емкостью структуры с помощью приложенного напряжения можно управлять. Однако, если зазор между полупроводниками заполнить материалом с очень большим значением диэлектрической проницаемости, то определяемые формулами (1) и (5) верхние предельные значения емкости ПЗП-структуры могут значительно превысить аналогичные значения МДП-структуры. В качестве такого материала могут быть предложены растворимые в воде сегнетоэлектрики (например, сегнетова соль), которыми легко можно заполнить зазор. Что же касается нижнего предельного значения емкости, то в обеих структурах оно одинаково и определяется максимальным значением ширины обедненного слоя. В большей величине емкости ПЗП-структуры можно убедиться с помощью следующего численного примера. Обычно в роли диэлектрика в МДП-структуре выступает  $\text{SiO}_2$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_s = 4$  и толщиной  $d = 50$  нм. В ПЗП-структуре зазор заполним, например, материалом с  $\epsilon_s = 10^3$ . Даже при значительно большей толщине зазора ( $d = 1$  мкм) в случае кристалла кремния с  $n_0 > 10^{17} \text{ см}^{-3}$  верхние предельные значения управляемой дифференциальной емкости предлагаемой структуры на порядок превысят аналогичные значения МДП-структуры. Указанная возможность варьирования величиной емкости в более широких пределах имеет принципиальное значение для создания на основе ПЗП-структуры параметрических генераторов и усилителей электромагнитных колебаний.

Емкостью ПЗП-структуры можно управлять также с помощью светового излучения. Если световая волна поглощается в приповерхностной области полупроводниковых обкладок, то это приводит к изменению концентрации носителей. Тогда за счет изменения дебаевской длины экранирования изменится также емкость структуры. Указанное явление наиболее четко проявится в собственных полупроводниках, в условиях применимости (1). Понятно, что ПЗП-структуру можно использовать также в качестве оптического детектора. Учитывая конструкционные особенности исследуемой структуры, созданный на ее основе детектор излучения может быть особенно эффективен в волоконно-оптических системах связи. Так как оптимальная длина волны для кварцевых оптических волокон составляет 1,55 мкм, то для того, чтобы обеспечить квазиволноводный режим распространения излучения по зазору, его толщина должна быть величиной этого же порядка ( $d=2$  мкм). С другой стороны, полупроводники, поглощающие излучение на такой длине волны, как правило, обладают относительно большим значением диэлектрической проницаемости и малым значением дебаевской длины экранирования (например, в Ge  $\epsilon_n=16$ ,  $L_d=0,68$  мкм). Из (1) следует, что при  $\lambda=1$  структура может эффективно функционировать как оптический детектор лишь при условии  $d/\epsilon_n \leq L_d/\epsilon_n$ . Это означает, что в случае, когда в роли полупроводниковых обкладок выступает кристалл германия, диэлектрическая проницаемость заполняющего зазор оптически прозрачного в этом диапазоне материала должна быть не меньше 50. Используемые сегодня в МДП-электронике диэлектрические материалы имеют гораздо меньшие  $\epsilon_n$ , использование же других материалов связано с решением больших технологических проблем.

До сих пор существованием заряда на поверхностных состояниях полупроводников или в заполняющем зазор диэлектрике пренебрегали. В ряде случаев учет этого обстоятельства приводит к изменениям, которые существенно не отражаются на описанных выше аспектах протекающих процессов. Тогда остается также в силе аналогия между ПЗП- и МДП-структурами. Однако возможна ситуация, когда из-за наличия заряда на поверхностных состояниях полупроводников исследуемая нами структура приобретает принципиально новые свойства.

Рассмотрим случай, когда ПЗП-структура образована из полупроводника  $n$ -типа. Пусть  $eN$ —плотность отрицательного заряда на поверхностных состояниях полупроводниковых обкладок, зависимостью которой от приложенного напряжения можно пренебречь. В таких условиях в приповерхностных областях полупроводниковых обкладок возможно образование обедненных слоев (энергетические зоны искривляются вверх). Приложенное напряжение уменьшает толщину обедненного слоя в одной из полупроводниковых обкладок и увеличивает в другой. При этом специфичность ситуации заключается в том, что, как показывают расчеты, сумма толщин обедненных слоев обеих полупроводниковых обкладок не меняется, пока один из этих слоев не исчезнет. Иными словами, в области приложенного напряжения  $\psi < \psi_0$ .

емкость ПЗП-структуры остается постоянной величиной и определяется формулой

$$C = \frac{S}{4\pi} \left[ \frac{d}{\epsilon_d} + 4 \left( \frac{L_l \lambda^{1/2}}{\epsilon_n} \right)^2 \frac{e^2 N}{kT} \right]^{-1}; \quad (6)$$

величина  $\varphi_0$  определяется по формуле

$$\varphi_0 = \frac{enS}{4\pi C}. \quad (7)$$

Таким образом, в отличие от МДП-структуры при малых и умеренных значениях приложенного напряжения емкость ПЗП-структуры может оставаться постоянной величиной.

В области же  $\varphi > \varphi_0$  емкость структуры существенно зависит от приложенного напряжения. С возрастанием  $\varphi$  вначале она убывает, а затем, в связи с формированием инверсного слоя, емкость возрастает, доходя до предельного значения, определяемого формулой (5).

Из (6) и (7) следует, что определив емкость исследуемой структуры, а также ту область, где она постоянна, можно определить значение плотности заряда на поверхностных состояниях полупроводников. Пусть в качестве полупроводниковых обкладок выступает кристалл кремния с параметрами  $n_0 = 1.45 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $L_l = 24 \text{ мкм}$ ,  $\epsilon_n = 12$ , кроме того  $d = 1 \text{ мкм}$  и  $\epsilon_d = 1$ . Нетрудно убедиться, что в области  $N \geq 10^{17} \text{ см}^{-3}$  определяемое формулой (6) значение емкости ПЗП-структуры существенно зависит от  $N$ .

Указанное обстоятельство позволяет обнаружить наличие не только газа, атомы которого адсорбируются поверхностью полупроводника, но и различные ионы в электролите при подборе соответствующей мембраны, размещаемые в зазоре. В зависимости от активности мембраны и величины заряда ионов могут быть созданы различные ион-селективные, ион-чувствительные ПЗП-структуры, био- и иммуносенсоры на их основе (2). Разумеется, в этих применениях необходимо предотвратить развитие необратимых процессов из-за коррозии (в том числе, фотокоррозии), необратимой хемосорбции и т. д., но с этими явлениями научились бороться, в том числе технологическими методами (2,3). Техника скола может быть предложена и для изучения процессов в тонкельно-прозрачных полупроводниковых и диэлектрических ПЗП-структурах, идеальных и неидеальных гетеропереходах, в сложных каталитических системах и сенсорах. Возможна реализация на ПЗП-структурах различных тензо-, магнито-, радиационных и других сенсоров — всего комплекса чувствительных к изменению емкости, концентрации носителей заряда и температуры дискретных приборов и интегральных схем.

Կիսահաղորդիչ—ճեղք— կիսահաղորդիչ կառուցվածքի հատկություններն ու կիրառման հնարավորությունները

Հետազոտվում են ճեղքման միջոցով ստեղծված կիսահաղորդչային շրջադիրներով հարթ կոնդենսատորի ունակային բնութագրիչները, որի հիմնական առավելությունը որպես մեկուսիչ միջավայր զանազան ֆազային վիճակներում գտնվող տարրեր նյութերից ստեղծված բարակ շերտերի օգտագործման հնարավորությունն է: Ցույց է տրված, որ կառուցվածքի ունակությունը էապես կախված է կիրառվող լարումից, նրա վրա ընկնող օպտիկական ճառագայթման ինտենսիվությունից և մակերևութային վիճակներում կուտակված լիցքի խտությունից: Քննարկված են կիսահաղորդիչ—ճեղք—կիսահաղորդիչ կառուցվածքի հիման վրա կառավարվող ունակությամբ կոնդենսատորների, օպտիկական ճառագայթման դեդեկտորների, գազային ընկալիչների և այլ սարքերի ստեղծման հնարավորությունները:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ ՈՒ Ն

<sup>1</sup> У. Тсанг, в кн.: Полупроводниковые инжекционные лазеры, Радио и связь, с. 213—320, 1990. <sup>2</sup> В. М. Арутюнян, Химические сенсоры, Изд. АрмНТИ, Ереван, 1992; Микроэлектроника, т. 20, в. 4, с. 337—355 (1991). <sup>3</sup> В. М. Арутюнян, в кн.: Фотокаталитическое преобразование солнечной энергии. Под ред. К. И. Замараева и В. Н. Пармона, Наука, Новосибирск, с. 228—291, 1991; в кн.: Фотоприемники и фотопреобразователи. Под ред. Х. И. Алферова и Ю. В. Шмарцева, Наука, Л., с. 253—287; 1986; УФН, т. 158, № 2, с. 255—291 (1989).

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

УДК 581.1:581.45

В. В. Казарян

О неравномерном обогащении запасными ассимилятами  
зимующих побегов и корней древесных  
в зависимости от условий произрастания

(Представлено чл.-корр. НАН Армении Л. Л. Осипян 29/VI 1993)

В течение длительной эволюции надземные и подземные органы древесных подвергались дифференцированному температурному воздействию и в результате приобрели различную по степени холодостойкость—надземные органы сравнительно высокую, корневая система слабую. Исследованиями показано, что у пекана корневые волокна не выдерживают  $-2^{\circ}\text{C}$ , тогда как надземные части даже при более низкой температуре не повреждаются (1). Н. Г. Жучков (2), изучая губительное действие кратковременного воздействия низких температур зимы в условиях Мичуринска, обнаружил массовое вымерзание корней плодовых.

Поскольку одним из главных внутренних факторов, определяющих степень морозостойкости растений, являются энергетические продукты зимующих органов, мы полагали, что корни и побеги в этом аспекте должны отличаться в зависимости от климатических условий произрастания. При сравнительно мягкой зиме распределение запасных энергетических продуктов между корнями и побегами должно происходить иначе, чем в местах с холодной зимой.

Это предположение нами было экспериментально проверено на четырех видах десятилетних древесных, произрастающих в условиях Ереванского (1350 м над ур. м.) и Севанского (1950 м над ур. м.) ботанических садов: граб кавказский (*Carpinus caucasica*), кизил (*Cornus mas*), дуб черешчатый (*Quercus robur*) и лещина обыкновенная (*Coryllus avellana*).

После осеннего листопада у опытных деревьев были взяты годовалые побеги средних ярусов и корни идентичной толщины и одинаковой удаленности от корневой шейки дерева, зафиксированы, высушены в термостате и подвергнуты анализу по определению в них содержания углеводов по методу Хаггедорн-Ненсена и общего азота по Кьельдалю (3).

Полученные данные показывают (табл. 1), что содержание углеводов и азота в побегах заметно отличается в зависимости от условий местообитания. Содержание указанных соединений намного больше в побегах деревьев из Севанского ботанического сада.

Таблица 1

Углеводы и азотистые соединения (в % на сухое вещество) в побегах растений после листопада

Объект исследования	Ереванский ботанический сад		Севанский ботанический сад	
	углеводы	азот	углеводы	азот
Грб кавказский	6,0 ± 0,1	1,4 ± 0,08	16,0 ± 0,08	2,3 ± 0,08
Кизия	7,1 ± 0,15	1,65 ± 0,07	12,0 ± 0,07	2,7 ± 0,09
Луб черешчатый	3,5 ± 0,1	1,6 ± 0,1	10,7 ± 0,16	2,6 ± 0,05
Лещина обыкновенная	5,5 ± 0,1	1,8 ± 0,15	10,0 ± 0,5	2,75 ± 0,06

Количественные показатели указанных соединений в корнях опытных растений оказались диаметрально противоположными (табл. 2). В корнях деревьев из Ереванского ботанического сада обнаружено намного больше как углеводов, так и азотистых соединений, чем в корнях растений, произрастающих в Севанском ботаническом саду.

Таблица 2

Углеводы и азотистые соединения (в % на сухое вещество) в корнях растений после листопада

Объект исследования	Ереванский ботанический сад		Севанский ботанический сад	
	углеводы	азот	углеводы	азот
Грб кавказский	8,5 ± 0,05	2,2 ± 0,05	7,5 ± 0,06	1,8 ± 0,4
Кизия	10,0 ± 0,1	2,1 ± 0,04	7,2 ± 0,05	1,7 ± 0,03
Луб черешчатый	10,2 ± 0,08	2,0 ± 0,06	6,7 ± 0,06	1,9 ± 0,03
Лещина обыкновенная	9,5 ± 0,17	2,5 ± 0,0	6,8 ± 0,04	2,0 ± 0,04

Такие противоположные данные, по всей вероятности, следует объяснить существенными различиями зимних условий Ереванского и Севанского ботанических садов. Суть проявленных ими адаптивных реакций заключается в том, чтобы в условиях Севана обогащением энергетическими продуктами побегов, которые гораздо больше подвержены воздействию низких температур, чем корни, обеспечить их высокую холодостойкость. Кроме того, если многолетние ветви за долгие годы в таких условиях стали более холодостойкими, то годовалые побеги еще не приобрели этого свойства. Повышенное содержание в них углеводов и белков может обеспечить их выносливость в суровых зимних ус

ловнях, характерных для высокогорного Севанского ботанического сада.

Зима в Ереванском ботаническом саду несколько мягче и короче, чем в Севане, и произрастающие в этих условиях древесные не проявляют столь повышенной холодостойкости. В связи с этим адаптивные реакции осуществляются таким образом, чтобы обеспечить, с одной стороны, соответствующую для условий Еревана холодостойкость годовалых побегов, с другой — активный рост корней зимой.

Корни, в отличие от побегов, показывают более или менее активную жизнедеятельность в период зимы. Давно установлено, что рост корней многих плодовых осуществляется в течение круглого года (4). У других древесных также установлена непрерывность роста корней в течение года, но с различной активностью в разных сезонах (5-7).

Исходя из этих данных, мы допускаем, что повышенное содержание углеводов и азотистых соединений в корнях деревьев из Ереванского ботанического сада следует также рассматривать как адаптивное проявление, направленное на обеспечение зимнего роста корней и формирование большой массы всасывающих разветвлений, обеспечивающих весенний бурный рост надземных органов.

Таким образом, одна из существенных адаптивных реакций, направленная на повышение зимостойкости побегов и корней древесных, проявляется в неравномерном распределении энергетических продуктов в тканях указанных органов. Оно осуществляется таким образом, чтобы обеспечить, с одной стороны, повышенную холодостойкость надземных органов в условиях высокогорья, с другой — зимний рост корней и весенний рост надземных органов в условиях умеренного, по сравнению с Севаном, климата в зоне Ереванского ботанического сада.

Как известно, бурный рост древесных в условиях высокогорий и низменностей не совпадает во времени. В условиях высокогорий усиленный рост приурочивается к летним теплым месяцам, а в низменных условиях — к весне. Активному росту надземных органов при этом всегда предшествует такой же рост корневой системы (8), в результате чего надземные растущие части обеспечиваются водой, минеральными элементами и корневыми метаболитами. В низменных условиях корни проявляют повышенную готовность снабжать надземные органы указанными продуктами весной благодаря их активному предвесеннему росту и повышенному функционированию. В условиях же высокогорья корни подобную деятельность проявляют в разгар лета, когда они обогащаются ассимилятами, поступающими из листьев. Таким образом, дифференцированное обогащение ассимилятами зимующих побегов и корней древесных, произрастающих в различных по суровости климатических условиях, становится внутренним фактором разновременной активации роста надземных органов и корней.

Ծառերի ձմեռող բնձյուղների և արմատների պահեստային սսիմիլատներով ոչ հավասար Լ.արտացումը կախված անմահ պայմաններից

Բույսերի ցրտադիմացկանության աստիճանը որոշող ներքին գործոններից մեկը համարվում է ձմեռող օրգաններում կուտակված էներգետիկ նյութերի քանակը: Ծառերի արմատները և բնձյուղները այդ տեսանկյունով ստարգբերվում են կախված էկոլոգիական պայմաններից: Գործերը ցույց են տալիս, որ ցուրտ կլիմայական պայմաններում (Սևանի բուսաբանական այգի) բնձյուղները ձմռան ընթացքում պարունակում են ավելի շատ սսիմիլատներ, քան արմատները: Ավելի մեղմ կլիմայական պայմաններում (Նրեմանի բուսաբանական այգի) հայտնաբերված է հակառակ պատկերը: Այսպիսով, Սևանի խիստ կլիմայական պայմաններում բնձյուղների էներգետիկ նյութերով հարստացումը ապահովվում է նրանց բարձր ցրտադիմացկանությունը արմատների համեմատությամբ, որոնք գտնվում են ցածր ջերմության տեսակետից ավելի ապահովված միջավայրում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> J. G. Woodroof, N. C. Woodroof, J. Agr. Res. v. 4 (13-4) <sup>2</sup> И. Г. Жучков, Особенности и причины повреждения плодовых растений в зиму 1939/40 г. Садоводство № 10, 1940. <sup>3</sup> А. Н. Белозерский, Н. И. Прокураков, Практическое руководство по биохимии растений Я М., 1951. <sup>4</sup> J. A. Harms, Agr. Sci. Hort. Soc., v. 23 1926. <sup>5</sup> Д. И. Виноград, Тр. Дзг. с.-х. ин-та, вып. 1, (1939). <sup>6</sup> С. С. Самцевич, ДАН СССР, 1949, № 1. <sup>7</sup> С. А. Самцевич, Тр. Ин-та леса АН СССР, т. 2. (1951). <sup>8</sup> В. О. Казарян, П. А. Хуршудян, Физиология растений, т. 13, № 4 (1966).

ФИЗИОЛОГИЯ

УДК 612.827

Э. А. Коркотян, А. К. Меликян, А. С. Амагуни

Фоновая импульсная активность фастигиальных нейронов  
мозжечка крысы, испытывающих влияния  
аминергических структур ствола мозга

(Представлено академиком НАН Армении В. В. Фанарджяном 29/VII 1992)

Фоновая импульсная активность (ФИА) нейронов центральных ядер (ЦЯ) мозжечка, существенно определяющая формирование сигналов на выходе мозжечка, находится под воздействием различных экстра- и собственно мозжечковых источников афферентации<sup>(1)</sup>, и в том числе некоторых аминергических структур ствола мозга — глубокого пятна и ядер шва моста<sup>(2-3)</sup>. Исследование ФИА различными методами статистического анализа дает адекватную информацию о состоянии клеточной активности, ее особенностях. Между тем, в литературе отсутствуют данные, характеризующие ФИА нейронов ЦЯ мозжечка каких-либо животных.

В настоящем сообщении приводятся результаты исследования ФИА нейронов фастигиального ядра мозжечка крысы, структурно-функциональные особенности мозга которой стали предметом широкого ряда современных нейробиологических исследований. В работе приведено сопоставление характеристик исходной ФИА нейронов, реагирующих на активацию аминергических входов в ЦЯ (катехоламинергических и серотонинергических) и не реагирующих нейронов.

ФИА нейрональных элементов фастигиального ядра (*N. Fastigii*, *NF*) регистрировали у 16 белых крыс под уретановой анестезией. Стимуляцию глубокого пятна (*Locus Coeruleus*, *LC*) и ядра шва моста (*N. Raphe Pontis*, *RP*) (1—5 с и з.у.д.в. 200—600 Гц, 250—500 мкА) производили по стереотаксическим координатам биполярными заточенными вольфрамовыми электродами. Отведение в *NF* осуществлялось внеклеточно стеклянными микропипетками сопротивлением 2—6 МОм, заполненными 2 М раствором цитрата калия по координатам атласа мозга крысы<sup>(4)</sup>. Точность введения определяли методом электрокоагуляции с последующим гистологическим контролем. Анализ ФИА, регистрируемой всегда перед стимуляцией аминергических структур, производили на ЭВМ с использованием пакета прикладных программ. Подробности методики исследования описаны ранее<sup>(5)</sup>.

Среди 90 нейрональных элементов NF, тестируемых стимуляцией LC, в 41 клетке (45,5%) обнаружилась способность к постстимульному изменению ИА. Несколько меньше реагирующих нейронов обнаружилось в соответствующих условиях при стимуляции RP—32 из 82 испытуемых нейронов (39%). Анализ ФИА нейронов учитывал значения следующих статистических показателей: средних частот разрядов ( $F$ ), коэффициентов вариации ( $CV$ ) межимпульсных интервалов ( $MI$ ), а также коэффициентов асимметрии ( $As$ ) и эксцесса ( $Ex$ ), мод ( $Mo$ ), вероятностей мод ( $P$ ) гистограмм  $MI$  ( $GMI$ ). Для сравнения ФИА сформировавшихся трех групп нейронов построены гистограммы распределения полученных величин (рис. 1 и 2).  $F$  тестируемых нейронов распределяются в ряду от 6 до 130/с с явным доминированием в пределах 10—20 и 30—50/с и регрессией в количестве нейронов, разряжающихся с частотой 50—80 и 100—110/с (незаштрихованные столбики на рис. 1, А, Б). Несколько иная конфигурация гистограмм просматривается в распределении величин  $F$  в ФИА LC-реактивных (рис. 1, А) и RP-реактивных (рис. 1, Б) нейронов. Отмечаются те же доминирующие значения  $F$  (рис. 1, А, Б, заштрихованные столбики), но почти отсутствуют частоты свыше 50/с в гистограмме А ( $F=40,8\pm 8,8/c$ ). В гистограмме Б весь ряд частот нейрональных разрядов находится в диапазоне 10—90/с с некоторым преобладанием от 10 до 20/с ( $F=49,6\pm 10,2/c$ ). При этом у нейронов, не реагирующих на стимуляцию LC или RP,  $F$  составляют  $49,2\pm 8,2$  и  $43,0\pm 8,6/c$ , соответственно, т. е. наблюдается более низкий уровень ФИА в LC-реактивных нейронах и относительно более высокий—в RP-реактивных. Гистограммы распределений  $CV$   $MI$  (рис. 1, В, Г) имеют в общем сходную конфигурацию. Отмечается лишь несколько больший процент  $\overline{CV}$   $MI$  ( $36,9\pm 7,6\%$ ) в LC-реактивных нейронах (рис. 1, В) в сравнении с таковыми в нейронах, способных реагировать на активацию входов из RP ( $30,9\pm 6,3\%$ ) (рис. 1, Г), и тем более в не реагирующих нейронах ( $23,5\pm 6,4$  и  $27,3\pm 7,3\%$ , соответственно, для В и Г, заштрихованные столбики). Значения  $CV$   $MI$  менее 10 и более 80% были крайне малочисленны.

На рис. 2 показано распределение коэффициентов  $As$  (А, Б) и  $Ex$  (В, Г)  $GMI$  ФИА рассматриваемых разновидностей нейронов. Если значения  $As$  всех не реагирующих клеток распределяются в пределах  $-5$  +  $+15$  с основным пиком  $GMI$  при 0 (в среднем  $1,4\pm 0,1$  и  $1,7\pm 0,9$ ), то у LC-реактивных клеток средние значения  $As$  смещаются к  $1,8\pm 1,0$ , а для  $GMI$  ФИА RP-реактивных—к  $1,1\pm 0,4$  (рис. 2, А, Б, заштрихованные столбики). В последнем случае наблюдается сравнительно менее выраженная асимметрия  $GMI$ . Коэффициенты  $Ex$   $GMI$  (рис. 2, В, Г) также обнаруживают определенные отличия от таковых, установленных для ФИА в популяции не реагирующих нейронов. Их средние величины составляют  $3,8\pm 1,6$  и  $3,0\pm 1,4$  для LC- и RP-реактивных нейронов, соответственно, в сравнении с  $3,2\pm 1,3$  (рис. 2, А) и  $4,3\pm 1,8$  (рис. 2, Б)  $\bar{Ex}$   $GMI$  не реагиру-

ющих нейронов. Аномально высокие  $E_x$  при этом не учитывались. Таким образом, показатели  $A_s$  и  $E_x$  в RP-реактивных нейронах NF отличаются меньшими величинами от таковых в ФИА LC-реактивных и тем более, не реагирующих клеток. В целом, распределения МИ гауссовского (нормального) типа с коэффициентами  $A_s$  и  $E_x$  равными нулю значительно чаще встречаются среди клеток, реагирующих на раздражение RP (43,8%), чем LC (26,8%), как и во всей совокупности зарегистрированных нейронов NF (27,6%).

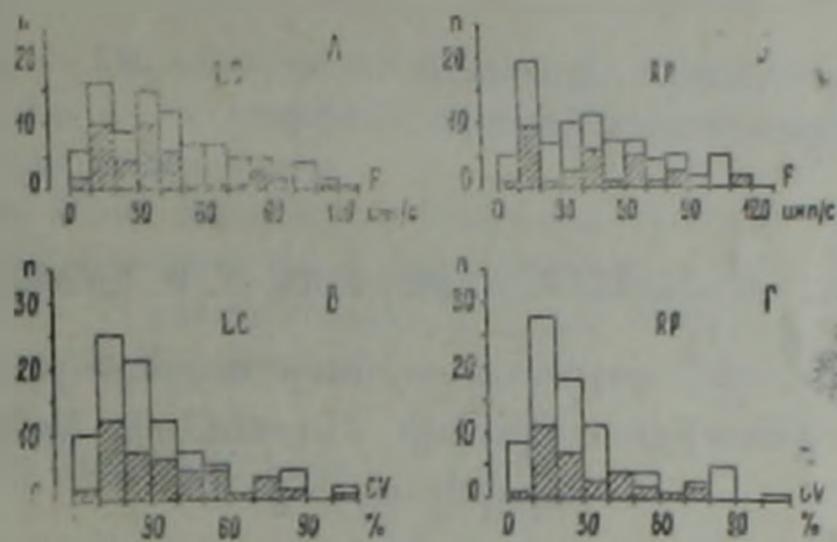


Рис. 1. Гистограммы распределения средних частот ( $F$ ) и коэффициентов вариации ( $CV$ ) межимпульсных интервалов в фоновой импульсной активности (ФИА) нейронов фастигиального ядра мозжечка крысы, подверженных влиянию голубого пятна (LC) (А, В), и ядра шва моста (RP) (С, Д) (заштрихованные столбчики). Незаштрихованные столбчики соответствуют значениям тех же показателей ФИА во всех исследованных нейронах. По оси абсцисс —  $F$ , имп/с (на А, В) и  $CV$ , % (на С, Д), по оси ординат — количество нейронов.

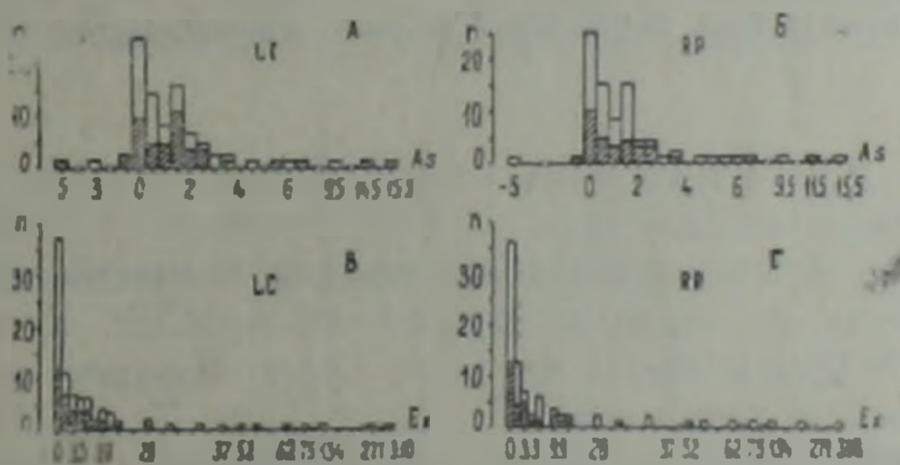


Рис. 2. Коэффициенты асимметрии —  $A_s$  (на А, В) и эксцесса  $E_x$  (на С, Д) в гистограммах межимпульсных интервалов фоновой импульсной активности нейронов фастигиального ядра мозжечка крысы, подверженных влиянию голубого пятна (LC), и ядра шва моста (RP). Прочие обозначения соответствуют таковым на рис. 1.

В заключение может быть отмечен ряд особенностей ФИА фастигиальных нейронов мозжечка крысы, испытывающих влияния аминергических — катехоламинергических (из LC) и серотонинергических (из RP) структур ствола мозга. Сравнение основных показателей ФИА нейронов, реагирующих на входы из LC и RP, а также ФИА соответствующих групп не реагирующих нейронов установило различия в

уровне частоты разрядов: F оказалась более низкой у LC-реактивных нейронов в сравнении с нереагирующими на данный вход и RP-реактивными. При этом CV МН, As и Ex ГМИ ФИА LC-реактивных клеток имели сравнительно более высокие значения, что особенно явно обнаружилось при сравнении с соответствующими показателями ФИА нереагирующих нейронов. Итак, ФИА нейронов NF, подверженных различной аминергической иннервации из ствола мозга, очевидно, отражает специфику фоновых влияний данного аминергического входа, определенным образом меняющего структуру клеточной ИА.

Институт физиологии им. Л. А. Орбели  
Национальной академии наук Армении

Է. Ա. ԿՈՐԿՈՏՅԱՆ, Ա. Կ. ՄԵԼԻՔՅԱՆ, Ա. Ս. ԱՄԱՏՈՒՆԻ

Ուղեղաբնի ամինէրգիկ գոյացութիւնների ազդեցութեանը ենթարկվող առնետի ուղեղիկի ֆաստիգիալ կորիզի նեյրոնների ֆոնային իմպուլսային ակտիվութեանը

Ուղեղաբնի ամինէրգիկ գոյացութիւնների՝ locus coeruleus եւ n. raphe pontis դրդմանը պատասխանող առնետի ուղեղիկի ֆաստիգիալ կորիզի նեյրոնների ֆոնային իմպուլսային ակտիվութեան (ՖԻԱ) որոշ ստատիստիկ ցուցանիշների վերլուծութիւնը բացահայտել է նրանց ՖԻԱ մի շարք յուրահատկութիւններ, համեմատած կորիզում ուղղորդուած և սլաութասխաշի նկատմամբ անտարբեր նեյրոնների հետ, որոնք ի հայտ են եկել առավել սրտասահայտված ոչ ռեգուլյար իմպուլսային հաջորդականութեամբ: Որոշակի տարբերութիւններ են հայտնաբերվել, նաև, նշված մուտքերի ակտիվացմանը պատասխանող նեյրոնների ՖԻԱ հիմնական բնութագրերների միջև:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

1. А. С. Аматуни. Функциональная организация и участие центральных ядер в интегративной деятельности мозжечка, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1987, 2 Ю. П. Лиманский, в кн.: Рефлексы ствола головного мозга, Наукова думка, Киев, с. 178—206, 1987. \* E. Dietrichs, Neu o science v. 27, № 1, p. 77—91 (1988). \* F. Abad-Allegria, Trab. Inst. Cajal Invest. biol. v. 63 № 1, p. 193—224 (1971). \* III. Саркисян, Э. А. Коркотян, А. К. Меликян, Нейрофизиология, т. 22, № 5, с. 702—705 (1990).