

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր

Д О К Л А Д Ы

Том 94 № 2

1993

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, ասիս. դիտ. բնիկ-
ծա: (պատ. բարձրագույն), Է. Գ. ԱՆՐԻԿՅԱՆ,
Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս, Ա. Ք. ԲԱ-
ԲԱՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս, Ա.
Հ. ԳԱՐՐԻՆՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակա-
դեմիկոս, Ա. Ա. ՔԱՎԱՅԱՆ, Հայաստանի
ԳԱԱ պրոֆ. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄ-
ՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ,
Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս (պատ. խրմ-
բագրի տեղակալ), Վ. Գ. ՄԵՐՔԱՐՅԱՆ,
Հայաստանի ԳԱԱ պրոֆ. անդամ, Գ. Ս. ՍԱ-
ՀԱԿՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմի-
կոս, Դ. Մ. ՍԵՂՈՒՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ
ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Մ. Լ. ՅԵՐ-
ՄԻՔԱՆԻՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադե-
միկոս, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՁՅԱՆ, Հայաստանի
ԳԱԱ ակադեմիկոս:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.
АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв.
секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик
НАН Армении, А. Т. БАБАЯН, акаде-
мик НАН Армении, А. А. ГАБРИЕЛЯН
академик НАН Армении, В. О. КАЗА-
РЯН, академик НАН Армении (зам.
отв. редактора), В. Г. МХИТАРЯН,
чл.-корр. НАН Армении, Г. С. СААКЯН
академик НАН Армении, Д. М. СЕД-
РАКЯН, академик НАН Армении (отв.
редактор), А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр.
НАН Армении, М. Л. ТЕР-МИКАЕ-
ЛЯН, академик НАН Армении, В. В.
ФАНАРДЖЯН, академик НАН Арме-
нии.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Վ. Վ. Իսապառյան — Ստոխաստիկ ապրոքսիմացիայի պրոցեսիաների մասին: Մարտինգալային մոտեցում 67

Ի. Ի. Վարլամով — Վերջավոր դաշտերում օպերատորների մի դասի մասին 73

ՀԱՇՎՈՂԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Հ. Բ. Ներսիսյան, Կ. Ս. Իսախանյան — Ներդրման մեթոդ ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների լուծման համար 83

ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՈՒՄ ԵՎ ՀԱՇՎՈՂԱԿԱՆ ՄԵՔԵՆԱՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Մ. Հ. Մխիթարյան — Տյուպլիցյան տիպի կորիզով երկբարգ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծման ալգորիթմի զուգահեռ-հոսքային մեկնաբանումը 88

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Վ. Ա. Վարդանյան — Լրիվ ստուգիչ տեստերի բարդության մասին մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների համար 98

ԱՌԱՋԿԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Բ. Խովմասյան — Զերմաառաձգական գոտու սահմանային շերտը և նրա փոխազդեցությունը ներքին լարվածադեֆորմացիոն վիճակի հետ 98

Մ. Ս. Մկրտչյան, Ս. Մ. Մխիթարյան — Երկայնական սահմի ժամանակ համուղղված ճաքերի պարբերական համակարգով բաղադրյալ առաձգական անվերջ մարմնի լարվածային վիճակի վերաբերյալ խնդրի շուրջը 104

ՖԻԶԻԿԱ

Վ. Հ. Ջերբաչյան — Խոտորումների տեսության շարքերի գումարումը երկու մտկարդակների դեպքում 110

ՏՋԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Է. Ո. Հարությունյան — Hypoaspis Can., 1884 s. l. սեռի Laelaptidae Berlese, 1892 (Parasitiformes) ընտանիքի նոր տեսակներ 115

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Գ. Ի. Հաբուսյանյան — SP₉₋₁₁-ի ներփոթոջային ներարկման ազդեցությունը առնետների օրգանիզմի ջերմային հոմեոստազի վրա 119

Ի. Բ. Մելիքսեբյան, Զ. Հ. Մարտիրոսյան, Հ. Մ. Վիլինգաբյան — Ֆիցոսացիայի տարբեր ժամկետներում ուղեղի տարբեր կառուցվածքներում օրթոֆոսֆատների ռեակցիոնունակությունը մասին 123

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- К. В. Гаспарян*—О процедурах стохастической аппроксимации. Мартингальный подход 67
Р. Р. Варшамов—Об одном классе операторов в конечных полях 73

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

- А. Б. Нерсесян, К. С. Дарбинян*—Метод погружения для решения нелинейных интегральных уравнений 83

ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ТЕОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН

- М. А. Мхитарян*—Параллельно-поточная интерпретация алгоритма решения интегрального уравнения второго рода с ядром теплицева типа 88

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

- В. А. Варданян*—О сложности полных проверяющих тестов для монотонных булевых функций 93

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- А. Б. Товмасын*—Погранслои термоупругой полосы и его взаимодействие с внутренним напряженно-деформированным состоянием 98
М. С. Мкртчян, С. М. Мхитарян—К задаче о напряженном состоянии составного упругого бесконечного тела с периодической системой коллинеарных трещин при продольном сдвиге 104

ФИЗИКА

- В. А. Джрбашян*—Суммирование рядов теории возмущений в случае двух уровней 110

АКАРОЛОГИЯ

- Э. С. Арутюнян*—Новые виды рода *Hypocaspis* Cap., 1884 s. 1. семейства *Laelapidae* Berlese 1892 (*Parasitiformes*) 115

ФИЗИОЛОГИЯ

- К. Р. Арутюнян*—Влияние внутрижелудочкового введения SP_{9-11} на температурный гомеостаз организма у крыс 119
И. Б. Меликсетян, Дж. А. Мартиросян, А. М. Чилингарян—О реакционноспособности ортофосфатов в различных структурах мозга при разных сроках фиксации 123

CONTENTS

MATHEMATICS

- K. V. Gasparian* — On a stochastic approximation procedures. Martingale approach 67
- R. R. Varshamov* — On a class of operators in finite fields 73

COMPUTER MATHEMATICS

- H. B. Nersessian, K. S. Darbinian* — Immersion method for solution of nonlinear integral equations 83

PROGRAMMING AND THEORY OF COMPUTERS

- M. A. Mkhitarian* — Parallel-flow interpretation of the algorithm of second-class integral equation with the kernel of Toeplitz type solving 88

APPLIED MATHEMATICS

- V. A. Vardanian* — On the complexity of complete detecting tests for monotone Boolean functions 93

THEORY OF ELASTICITY

- A. B. Tovmasian* — The boundary layer of thermoelastic strip and interaction with the internal stress-strain state 98
- M. S. Mkrtchian, S. M. Mkhitarian* — The problem on stress condition of the composite elastic nonfinite body with the periodical system of collinear cracks during longitudinal displacement 104

PHYSICS

- V. A. Dzhbashian* — Summing up of perturbation theory series in the case of two levels 110

ACAROLOGY

- E. S. Arutunian* — New species of the genus *Hypoaspis* Can., 1884 s. l. of the family Laelaptidae Berlese, 1892 (Parasitiformes) 115

PHYSIOLOGY

- K. R. Harutunian* — SP_{9-11} Intraventricular injection influence on temperature homeostasis of rats' organism 119
- I. B. Melicetian, J. A. Martirosian, A. M. Chilingarian* — Reactionability of orthophosphates in different structures of the cerebrum during various periods of fixation 123

Сдано в набор 16.08.1993 г. Подписано к печати 10.01.1994 г.

Формат 70 × 108^{1/16}. Бумага № 1, сыктывкарская. Высокая печать. Печ. лист 4.0.

Усл. печ. л. 5,6. Усл. кр. отт. 5,6. Учет. изд. л. 4,12. Тираж 220. Заказ № 59.

Цена 60 руб.

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г, III эт., к. 13, т. 27-36-95.

Издательство Национальной академии наук Армении,

375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Национальной академии наук Армении.

375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24.

УДК 519.21

К. В. Гаспарян

О процедурах стохастической аппроксимации. Мартингальный подход

(Представлено академиком НАН Армении Р. В. Амбарцумяном 10/III 1992)

Хорошо известны (см., например, (1)) стохастические процедуры Роббинса—Монро и Кифера—Вольфовица для нахождения корня уравнения регрессии и экстремума функции регрессии. В данной работе рассматриваются общие модели этого типа и получаются оценки неизвестных параметров по семимартингальным наблюдениям. В отличие от работы (2), где рассмотрены аналогичные вопросы, стохастический базис здесь предполагается произвольным, а рассматриваемые на нем процессы—нерегулярными (не принадлежат пространству Скорохода càdlàg-процессов, т. е. с непрерывными справа и имеющими пределы слева траекториями).

При получении оценок используются мартингальные методы, введенные в данной общей ситуации Л. И. Гальчуком в (3) и развитые далее автором в (4, 5)):

Введем следующие обозначения (см. (3)):

\mathcal{P} и \mathcal{O} — σ -алгебры предсказуемых и опциональных множеств (а также множества соответствующих измеримых процессов):

\mathcal{P}_s — множество строго предсказуемых процессов $(a_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{P}_s$, если $(a_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{P}$ и $(a_{t-})_{t \geq 0} \in \mathcal{O}$);

A_{loc} , V^+ и A_{loc}^+ — множества процессов локально интегрируемой вариации, возрастающих и локально интегрируемых возрастающих процессов;

M_{loc} и M_{loc}^2 — множества опциональных локальных и локально квадратично интегрируемых мартингалов;

S — множество опциональных семимартингалов.

Пусть имеется некоторый стохастический базис $(\Omega, \mathcal{F}, (F_t)_{t \geq 0}, P)$, где \mathcal{F} — полная σ -алгебра (по вероятностной мере P), $(F_t)_{t \geq 0}$ — произвольный неубывающий поток σ -алгебр $(F_s \subseteq F_t \subseteq \mathcal{F}, s \leq t)$. Траектории всех рассматриваемых на нем процессов $X = (X_t)_{t \geq 0}$ предполагаются имеющими двусторонние пределы X_{t-} и X_{t+} для любого $t \geq 0$.

Любой процесс $a = (a_t)_{t \geq 0} \in A_{\text{loc}}$ имеет представление

$$a = a^r + a^k,$$

где $a^r = a^c + \sum_{s < \cdot} \Delta a_s \in A_{\text{loc}}$, $a^k = \sum_{s < \cdot} \Delta^+ a_s \in A_{\text{loc}}$, $a^c \in A_{\text{loc}}$ — процесс с непрерывными траекториями, $\Delta a_s = a_s - a_{s-}$, $\Delta^+ a_s = a_{s+} - a_s$, $s \geq 0$.

Всякий процесс $m = (m_t)_{t \geq 0} \in M_{\text{loc}}$ допускает (см. (3)) разложение (единственное с точностью до неотличимости)

$$m = m^r + m^k,$$

где $m^r = m^c + m^d$, $m^c \in M_{\text{loc}}$ — непрерывный локальный мартингал, m^d и $m^k \in M_{\text{loc}}$ — „чисто разрывные“ càdlàg и càglàd локальные мартингалы, соответственно.

Для процессов $X, Y \in S$ определим квадратическую ковариацию

$$[X, Y]_t = \langle X^c, Y^c \rangle_t + \sum_{s < t} \Delta X_s \Delta Y_s + \sum_{s < t} \Delta^+ X_s \Delta^+ Y_s,$$

где $\langle X^c, Y^c \rangle$ — взаимная квадратическая характеристика непрерывных мартингалов составляющих X^c и Y^c процессов X и Y .

1. Процедура Роббинса—Мокро:

Пусть процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ удовлетворяет стохастическому уравнению

$$X_t = - \int_{[0, t]} \gamma_s^{(1)} dY_s^r - \int_{[0, t]} \gamma_s^{(2)} dY_{s+}^k, \quad (1)$$

где

$$Y_t^r = \int_{[0, t]} R^1(X_{s-}) da_s^r + m_t^r, \quad Y_t^k = \int_{[0, t]} R^2(X_s) da_{s+}^k + m_t^k,$$

$Y = Y^r + Y^k \in S$ — наблюдаемый процесс, $m = m^r + m^k \in M_{\text{loc}}$, $a = a^r + a^k \in A_{\text{loc}}^+$, $R^i(x) = \beta_i(x - \theta)$, $\beta_i \in R_+ \setminus \{0\}$, $i = 1, 2$, $x \in R^1$, $\theta \in R^1$ — неизвестный оцениваемый параметр, положительные функции $\gamma^{(1)} \in P$ и $\gamma^{(2)} \in O$ такие, что

$$(\gamma^{(1)} \cdot a_t^r) = \left(\int_{[0, t]} \gamma_s^{(1)} da_s^r \right) \in A_{\text{loc}}^+, \quad (\gamma^{(2)} \cdot a_t^k) = \left(\int_{[0, t]} \gamma_s^{(2)} da_{s+}^k \right) \in A_{\text{loc}}^+.$$

Условие (A):

$$\gamma^{(1)} \cdot a_{\infty}^r = \gamma^{(2)} \cdot a_{\infty}^k = \infty, \quad |\gamma^{(1)}|^2 \cdot a_{\infty}^r < \infty, \quad |\gamma^{(2)}|^2 \cdot a_{\infty}^k < \infty \text{ п. н.}$$

Имеет место следующая (ср. (2))

Теорема 1. Пусть $m \in M_{\text{loc}}^2$ и для всех $t \geq 0$ п. н. имеем

$$\text{а) } \frac{d \langle m^r \rangle_t}{da_t^r} < \xi^1, \quad \frac{d \langle m^k \rangle_t}{da_t^k} < \xi^2 \text{ — где } \langle m^r \rangle \in P \cap A_{\text{loc}}^+ \text{ и}$$

$\langle m^k \rangle \in P \cap A_{\text{loc}}^+$ — квадратические характеристики $m^r \in M_{\text{loc}}^2$ и $m^k \in M_{\text{loc}}^2$, $0 < \xi^i < \infty$ п. н. — случайные величины, $i = 1, 2$;

b) $0 < \eta^1 < 1 - \bar{\beta}_1 \gamma_i^{(1)} \Delta a_i$, $0 < \eta^2 < 1 - \bar{\beta}_2 \gamma_i^{(2)} \Delta^+ a_i$, где $0 < \beta_i < \bar{\beta}_i < \infty$, $\bar{\beta}_i$ — заданные константы, а $\eta^i < \infty$ п. н. — с. в., $i = 1, 2$. Тогда при выполнении условия (A) имеем

$$X_i \rightarrow \theta \text{ п. н. при } t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Запишем уравнение (1) в виде ($t \geq 0$)

$$X_t - \theta = N_t - \theta + \int_{|0, t|} (X_s - \theta) dZ_s^r + \int_{|0, t|} (X_s - \theta) dZ_s^k, \quad (2)$$

где

$$N_t = N_t^r + N_t^k, \quad N_t^r = -\gamma^{(1)} \cdot m_t^r = - \int_{|0, t|} \gamma_s^{(1)} dm_s^r,$$

$$N_t^k = -\gamma^{(2)} \cdot m_t^k = - \int_{|0, t|} \gamma_s^{(2)} dm_s^k \in M_{loc}^2$$

(определение интегралов см. в (3)),

$$Z_t^r = -\beta_1 (\gamma^{(1)} \cdot a_t^r), \quad Z_t^k = -\beta_2 (\gamma^{(2)} \cdot a_t^k).$$

Тогда, так как для любого $t \geq 0$ имеем

$$\Delta Z_t > -1, \quad \Delta^+ Z_t > 1 \text{ и}$$

$$\sum_{s < t} \frac{|\Delta N_s \Delta Z_s|}{1 + \Delta Z_s} \leq \frac{\bar{\beta}_1}{\eta^1} |N^r, N^r|_t^2 (\gamma^{(1)} \cdot a_t^r) < \infty,$$

$$\sum_{s > t} \frac{|\Delta^+ N_s \Delta^+ Z_s|}{1 + \Delta^+ Z_s} \leq \frac{\bar{\beta}_2}{\eta^2} |N^k, N^k|_t^2 (\gamma^{(2)} \cdot a_t^k) < \infty,$$

то (см. (4), теорема 3.3.2) имеем

$$X_t - \theta = B_t^{-1} W_t,$$

где $B_t = \varepsilon(Z)_t^{-1}$, $\varepsilon(Z)_t$ — экспонента Долеан, т. е. решение уравнения

$$Y_t = 1 + Y_- \cdot Z_t^r + Y \cdot Z_t^k \text{ (см. (6)), а}$$

$$W_t = W_t^r + W_t^k, \quad W_t^r = B_- \cdot \left(N^r - \frac{|Z^r, N^r|}{1 + \Delta Z} \right)_t,$$

$$W_t^k = B \cdot \left(N^k - \frac{|Z^k, N^k|}{1 + \Delta^+ Z} \right)_t.$$

Далее из представления (см. (6))

$$\varepsilon(Z)_t = \exp Z_t \prod_{s < t} (1 + \Delta Z_s) e^{-\Delta Z_s} \prod_{s < t} (1 + \Delta^+ Z_s) e^{-\Delta^+ Z_s}$$

следует, что $\varepsilon(Z) > 0$ п. н., $B \in V^+$ и, согласно условию (A), имеем $B_- = \infty$ п. н.

Кроме того, так как

$$\varepsilon(Z)_i = \varepsilon(Z)_{i-} (1 - \beta_1 \gamma_i^{(1)} \Delta a_i), \quad \varepsilon(Z)_{i+} = \varepsilon(Z)_i (1 - \beta_2 \gamma_i^{(2)} \Delta^+ a_i),$$

то $\varepsilon(Z) \in P$, $\varepsilon(Z)_+ \in O$, т. е. $\varepsilon(Z) \in P_+$.

С другой стороны, имеем

$$B_- \cdot \frac{[Z^r, N^r]}{1 + \Delta Z} = B \cdot [Z^r, N^r] \in M_{loc}^2,$$

$$B \cdot \frac{[Z^k, N^k]}{1 + \Delta^+ Z} = B_+ \cdot [Z^k, N^k] \in M_{loc}^2.$$

так как

$$Z^r \in P \cap V, \quad Z^k \in P_+ \cap V \text{ и } [Z^r, N^r] = (\Delta Z) \cdot N^r, \quad [Z^k, N^k] = (\Delta^+ Z) \cdot N^k$$

(см. (7)). Таким образом $W \in M_{loc}^2$.

Рассмотрим теперь следующий процесс:

$$\bar{Y}_i = (1 + B)^{-1} \cdot W_i^r + (1 + B_+)^{-1} \cdot W_i^k \in M_{loc}^2.$$

Отсюда, согласно условию (A), имеем

$$\langle \bar{Y}^r \rangle_- \leq 2(1 + B)^{-2} (B_-^2 + B_-^2 (\Delta Z)^2) \cdot \langle N^r \rangle_- \leq 4 \langle N^r \rangle_- < \infty. \quad (3)$$

Аналогично

$$\langle \bar{Y}^k \rangle_- \leq 2(1 + B_+)^{-2} (B_+^2 + B_+^2 (\Delta^+ Z)^2) \cdot \langle N^k \rangle_- \leq 4 \langle N^k \rangle_- < \infty. \quad (4)$$

Таким образом

$$B \in V^+ \cap P_+, \quad B_- = \infty \text{ и } \langle \bar{Y} \rangle_- < \infty \text{ п. н.}$$

Отсюда следует (см. (5)), что

$$B_i^{-1} W_i \rightarrow 0 \text{ п. н. при } t \rightarrow \infty.$$

2. Процедура Кифера—Вольфовица:

Пусть процесс $X = (X_i)_{i \geq 0}$ удовлетворяет стохастическому уравнению

$$X_i = - \int_{[0, i]} (4c_s^{(1)})^{-1} \gamma_s^{(1)} dY_s^r - \int_{[0, i]} (4c_s^{(2)})^{-1} \gamma_s^{(2)} dY_s^k, \quad (5)$$

где

$$Y_i^r = \int_{[0, i]} [J^1(X_{s-} + c_s^{(1)}) - J^1(X_{s-} - c_s^{(1)})] da_s^r + m_i^r,$$

$$Y_i^k = \int_{[0, i]} [J^2(X_s + c_s^{(2)}) - J^2(X_s - c_s^{(2)})] da_s^k + m_i^k,$$

$Y = Y^r + Y^k \in S$ — наблюдаемый процесс, $m = m^r + m^k \in M_{loc}$, $a = a^r + a^k \in A_{loc}^+$, $J^i(x) = \beta_i(x - \theta)^2$ — функция регрессии, $\beta_i \in R_+ \setminus \{0\}$.

$i = 1, 2, x \in R^1, \theta \in R^1$ — неизвестный параметр, положительные функции $\gamma^{(1)}, c^{(1)} \in P$ и $\gamma^{(2)}, c^{(2)} \in O$ такие, что $\gamma^{(1)} \cdot a^r, \gamma^{(2)} \cdot a^g \in A_{loc}^+, \gamma_t^{(i)} \downarrow 0, c_t^{(i)} \downarrow 0$ п. н. при $t \rightarrow \infty$.

Условие (B):

$$\gamma^{(1)} \cdot a_-^r = \gamma^{(2)} \cdot a_-^g = \infty, |\gamma^{(1)}(c^{(1)})^{-1}|^2 \cdot a_-^r < \infty, |\gamma^{(2)}(c^{(2)})^{-1}|^2 \cdot a_-^g < \infty \text{ п. н.}$$

Теорема 2 (ср. (2)). Пусть $m \in M_{loc}^2$ и выполняются условия а) и б) теоремы 1 и условие (B). Тогда

$$X_t \rightarrow \theta \text{ п. н. при } t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Запишем уравнение (5) в виде (2), где

$$N_t^r = -(4c^{(1)})^{-1} \gamma^{(1)} \cdot m_t^r, \quad N_t^g = -(4c^{(2)})^{-1} \gamma^{(2)} \cdot m_t^g,$$

$$Z_t^r = -\beta_1 (\gamma^{(1)} \cdot a_t^r), \quad Z_t^g = -\beta_2 (\gamma^{(2)} \cdot a_t^g).$$

Далее доказательство проводится так же, как в теореме 1.

Замечание 1. Предположим, что в моделях 1 и 2 имеем $m \in M_{loc}$. Тогда условие а) в теоремах 1 и 2 надо заменить на следующее:

$$\frac{d[m^r, m^r]_t}{da_t^r} \leq \xi^1 < \infty, \quad \frac{d[m^g, m^g]_t}{da_t^g} \leq \xi^2 < \infty \quad (t > 0). \quad (6)$$

Для модели 1 согласно условию (A) и (6) получим по аналогии с (3) и (4)

$$[\bar{Y}^r, \bar{Y}^r]_- \leq 4[N^r, N^r]_- < \infty, \quad [\bar{Y}^g, \bar{Y}^g]_- \leq 4[N^g, N^g]_- < \infty.$$

С другой стороны, в силу условия (6) для любого F -момента остановки T и F_+ -момента остановки U имеем ($F_+ = (F_{t+})_{t \geq 0}$, $F_{t+} = \bigcap_{s > t} F_s$)

$$E|\Delta W_T| | I_{T < \cdot} \leq EB_T |\Delta N_T| | I_{T < \cdot} \leq (EB_T^2)^{1/2} (E[N^r, N^r]_T^2)^{1/2} | I_{T < \cdot} < \infty,$$

$$E|\Delta^+ W_U| | I_{U < \cdot} \leq EB_U |\Delta^+ N_U| | I_{U < \cdot} \leq (EB_U^2)^{1/2} (E[N^g, N^g]_U^2)^{1/2} | I_{U < \cdot} < \infty,$$

так как процессы $B^2, [N^r, N^r], [N^g, N^g] \in P, \cap V^+ = P, \cap A_{loc}^+$ (см. (5)).

Отсюда следует (см. (2))

$$X_t \rightarrow \theta \text{ п. н. при } t \rightarrow \infty.$$

Аналогично проводится доказательство и для модели 2.

Замечание 2. Рассмотрим дискретную процедуру Роббинса—Монро (см. (1))

$$x_n = x_{n-1} - \gamma_n y_n, \quad n \geq 1,$$

где $y_n = \beta(x_{n-1} - \theta) + \epsilon_n$, $(\epsilon_n, F_n)_{n \geq 1}$ — мартингал-разность с $E(|\epsilon_n|^2 | F_{n-1}) \leq \xi < \infty$, последовательность $(\gamma_n, F_{n-1})_{n \geq 1}$ такая, что

$$0 < \gamma_n < \beta^{-1} \quad \text{և} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty \quad \text{п. н.}$$

Применяя тогда теорему 1 с $a_i = [i]$ и $F_i = F_{[i]}$, получим

$$x_n \rightarrow \theta \quad \text{п. н.} \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Ереванский государственный университет

Կ. Վ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

**Ստոխաստիկ ապրոկսիմացիայի պրոցեսուրաների մասին:
Մարտինգալային մոտեցում**

Հոդվածում ստացված են անհայտ պարամետրի գնահատականները Ռոքինս-Մոնրոյի և Կիֆեր-Վոլֆովիչի պրոցեսուրաների համար ըստ սեմիմարտինգալային տիպի դիտարկումների:

Ստոխաստիկ բազիսը այստեղ ենթադրվում է կամայական, իսկ բոլոր դիտարկվող պրոցեսները ոչ ռեգուլյար (երկկողմանի սահմաններ ունեցող հետազոծերով):

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский, Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание, Наука, М., 1983. 2 А. В. Мельников, УМН, т. 43, № 4 (1988). 3 Л. И. Гальчук, Мат. сб., т. 112 (154), № 4(8) (1980). 4 К. В. Гаспарян, Канд. дис., Ереван, 1988. 5 К. В. Гаспарян, 5 Международн. Вильнюсская конфер. по теории вероятн. и мат. статист. Тезисы докладов, т. 1 (1989). 6 Л. И. Гальчук, Теория вероятн. и ее примен., т. 29, № 1 (1984). 7 К. В. Гаспарян, в. кн.: Труды ВЦ АН АрмССР и ЕГУ, т. 15 (1988).

УДК 512.62

Р. Р. Варшамов

Об одном классе операторов в конечных полях

(Представлено 2/IV 1992)

Пусть F_q — конечное поле характеристики p ($q = p^s$), $F_q[x]$ — кольцо многочленов над F_q , l — натуральное число, не делящееся на p , $f(x) = a(x^l)$ — многочлен² степени $n \geq 1$ над полем F_q , и пусть

$$a(x)^{p-1} = \sum_{u=0}^{p-1} x^{p-u-1} a_u(x)^p. \quad (1)$$

Определим последовательность b_0, b_1, \dots , элементов кольца следующим образом:

$$b_v = x^p a_u(x^l), \quad v \geq 0,$$

где u — наименьший неотрицательный вычет выражения $l^{-1}(v+1)-1$ по модулю p и $v = [p^{-1}v] + [p^{-1}l(p-u-1)]$.

В кольце многочленов $F_q[x]$ введем в рассмотрение класс квазилинейных операторов A_0, A_1, \dots, A_{p-1} . Будем считать, что над многочленом $g(x) \in F_q[x]$ произведена операция A_v ($0 < v \leq p-1$), и писать $g(x)A_v$, если

$$g(x)A_v = \sum_u g_u^{[1/p]} b_{u+v}, \quad g(x) = \sum_u g_u x^u,$$

По определению для любого натурального числа k

$$\prod_{i=0}^k A_{v_i} = \left(\prod_{i=0}^{k-1} A_{v_i} \right) A_{v_k} \quad (0 < v_i < p-1) \text{ и } A_0 = E,$$

где E — единичный оператор.

Если $g(x), s(x), a(x)$ и $\beta(x) \in F_q(x)$, то

$$(a(x)^p g(x) + \beta(x)^p s(x)) A_v = a(x) (g(x) A_v) + \beta(x) (s(x) A_v). \quad (2)$$

Если $b_{p-1} = x^{p-1}$ и m — натуральное число, то

$$1 \cdot A_{p-1}^m = x^{p^m-1} A_0^m = \beta^{(p^m-1)p^{1-m}}. \quad (3)$$

* Все рассматриваемые в статье многочлены предполагаются нормированными.

Рассмотрим последовательность многочленов S_m^u над полем F_q , удовлетворяющую рекуррентному соотношению

$$S_m^u = S_{m-1}^u A^{s-1} + S_{m-1}^{u-1} A_1, \quad 1 \leq u \leq m, \quad (4)$$

где $S_m^0 = 1 \cdot A_0^{(m-1)s+1}$ ($S_0^0 A_0^{s-1} = 1$) и $S_{m-1}^m = 0$.

Пусть многочлен $f(x)$ сепарабельный и пусть

$$S_m^u(\xi) = S_m^u A_0^{s-1} - (-1)^u \xi, \quad 0 \leq u \leq m, \quad (5)$$

где ξ — произвольный элемент поля F_q .

В этих обозначениях справедлива

Теорема 1. Для любых m , u и ξ многочлен $S_m^u(\xi)$ степени меньше p делится на все неприводимые делители $f(x)$ степени m , коэффициенты при переменной x^{m-u} которых равны ξ .

Замечание 1. Аналогичное утверждение имеет место также и для функции $I_m^u(\xi)$, где

$$I_m^0(1) = S_m^0 A_0^{s-1} - 1 \cdot A_{p-1}^{ms}, \quad 1 \leq m, \quad (6)$$

$$I_m^u(\xi) = S_m^u - (-1)^u \xi^{1/p} S_m^0, \quad 1 \leq u \leq m.$$

Из теоремы 1 вытекает ряд интересных следствий. Так, например,

Лемма 1. Для любых m и ξ многочлен $S_m^1(\xi)$ степени меньше p делится на все неприводимые делители $f(x)$, степени m , которых делят число m , а их первые коэффициенты* a_i удовлетворяют условию $m_i^{-1} \cdot m a_i = \xi$.

Замечание 2. Равенство $S_m^1(\xi) = 0$ означает, что степени всех неприводимых делителей многочлена $f(x)$ делят число m .

Пусть $S_m = (I_m^0(1), f(x))$ и $\lambda_m = L_m^{-1} S_m$, где $L_m = \prod_{\substack{u \leq m \\ u+m}} \lambda_u$.

Тогда

Лемма 2. Для любого натурального числа m многочлен S_m (соответственно λ_m) суть произведения всех** простых делителей $f(x)$, степень которых делит число m (соответственно равно числу m).

Лемма 3. Для того чтобы многочлен $f(x)$ был неприводим над полем F_q , необходимо и достаточно, чтобы $I_n^0(1) = 0$ и $S_d = 1$, где d — любой собственный делитель n .

* Первым коэффициентом многочлена степени m будем называть его коэффициент при переменной x^{m-1} .

** За исключением разве лишь одночлена x .

Пусть N — натуральное число, $N = \sum_{u=0}^k k_u p^u$, где $0 \leq k_u < p-1$ и пусть $B_N = 1 \cdot \sum_{i=0}^k A_{k_i}$.

Теорема 2. Многочлен $\omega_N = B_N - 1 \cdot A_0^{k+1}$ делится на все неприводимые делители $f(x)$, периоды которых делят число N .

Пусть $\bar{\omega}_v = (\omega_v, f(x))$ и $\Delta_N = \bar{L}_v^{-1} \bar{\omega}_v$, где $\bar{L}_v = \prod_{\substack{u \setminus v \\ u \neq v}} \Delta_u$ и $\bar{L}_1 = 1$.

Тогда

Лемма 4. Многочлен ω_N (соответственно Δ_N) суть произведение всех неприводимых делителей $f(x)$, периоды которых делят число N (соответственно равны числу N).

Пусть $\theta_m \neq \text{const}$ некоторый произвольный делитель многочлена Δ_m и пусть

$$\theta_m^u = (\theta_m^{u-1}, S_m^u(\xi_u)), \quad 1 \leq u \leq m, \quad (7)$$

где $\theta_m^0 = \theta_m$ и ξ_u — некоторый элемент поля F_q , выбранный так, чтобы выполнялось условие $\theta_m^u \neq \text{const}$. Тогда

Теорема 3. Всегда найдется целое неотрицательное число $\delta < m$ такое, что $\deg \theta_m^\delta = m$, и многочлен θ_m^δ не будет разлагаться в $F_q[x]$.

Пусть многочлен $a(x)$ является неприводимым над полем F_q и пусть $t \setminus T^{-1}(q^m - 1)$ и $(t_1, T) > 1$, где $T = \text{ord } a(x)$ и t_1 — любой простой делитель t , тогда будет иметь место

Лемма 5. Период многочлена θ_m^δ степени m (здесь $m = n$) равен T .

Если условие $(t_1, T) > 1$ не выполняется, то взяв в равенстве (7) в качестве функции $\theta_m = \theta_m^0$ любой нетривиальный делитель многочлена Δ_N , где $\Delta = tT$, мы вновь получим результат, аналогичный лемме 5. А поэтому

Следствие. Если $t = T^{-1}(q^n - 1)$, то многочлен θ_n^0 степени n является примитивным многочленом над полем F_q .

В качестве иллюстрации рассмотрим два примера

Пример 1. Пусть дан сепарабельный трехчлен $f_q(n; x) = x^{q^n+1} + \alpha x + \beta$ ($t = 1$) над полем F_q . Требуется определить степени всех его неприводимых делителей.

Имеем

$$\begin{aligned} f(n; x)^{p-1} &= ((x^{q^n+1} + \alpha x) + \beta)^{p-1} = \\ &= \sum_{u=0}^{p-1} x^{p-u-1} \left(\beta^u C_{p-1}^u \sum_{v=0}^{p-u-1} \alpha^v C_{p-u-1}^v x^{q^n(p-1-u-v)} \right), \end{aligned}$$

откуда в силу (1) находим

$$a_u(x) = \beta_1^u \sum_{v=0}^{p-u-1} a^{v/p} C_{p-u-1}^v x^{p^{ns-1}(p-1-u-v)} \quad (8)$$

и в частности

$$a_0(x) = \sum_{v=0}^{p-1} a_1^v x^{q^n - (v+1)p^{ns-1}},$$

где $\beta_1 = -\beta^{1/p}$ и $a_1 = -a^{1/p}$.

Вычислим вначале значение функции $1 \cdot A_0^m$ для $m = 1, 2, \dots, sn$.

При $m = 1$ получим

$$1 \cdot A_0 = a_0(x) = \sum_{v=0}^{p-1} a_1^v x^{q^n - (v+1)p^{ns-1}}.$$

Далее для $m \geq 2$, согласно (2), находим

$$1 \cdot A_0^2 = (1 \cdot A_0) A_0 = \left(\sum_{v=0}^{p-1} a_1^v x^{q^n - (v+1)p^{ns-1}} \right)^{1/p} a_0(x) = \sum_{v=0}^{p-1} a_2^v x^{q^n - (v+1)p^{ns-2}},$$

$$1 \cdot A_0^3 = (1 \cdot A_0^2) A_0 = \sum_{v=0}^{p-1} a_3^v x^{q^n - (v+1)p^{ns-3}}$$

и т. д.

$$1 \cdot A_0^{ns} = \sum_{v=0}^{q^n-1} a_{ns}^v x^{q^n - v - 1} = \sum_{v=0}^{p^{ns}-1} a_0^{pv} x^{q^n - (v+1)p} \sum_{u=0}^{p-1} a_0^u x^{p-u-1}$$

ввиду $a_{ns} = a_0$.

Продолжая этот процесс, получим

$$\begin{aligned} 1 \cdot A_0^{ns+1} &= \left[\left(\sum_{v=0}^{p^{ns}-1} a_0^v x^{p^{ns}-v-1} \right)^p \sum_{u=0}^{p-1} a_0^u x^{p-u-1} \right] A_0 = \\ &= \sum_{v=0}^{p^{ns}-1} a_0^v x^{p^{ns}-v-1} \sum_{u=0}^{p-1} a_1^u a_{p-u-1}(x). \end{aligned}$$

Но, в силу (8),

$$\begin{aligned} \sum_{u=0}^{p-1} a_1^u a_{p-u-1}(x) &= \sum_{u=0}^{p-1} a_1 \beta^{p-u-1} \sum_{v=0}^u a^{v/p} C_u^v x^{p^{ns-1}(u-v)} = \\ &= \sum_{u=0}^{p-1} a_1 \beta^{p-u-1} x^{u p^{sn-1}} \sum_{v=0}^{p-1} a_1^v \beta^{-v} a^{v/p} C_{u+v}^v. \end{aligned} \quad (9)$$

Если теперь потребовать, чтобы выполнялось условие $a_1 \beta_1 a^{1/p} = 1$ (т. е. $\beta = a^2$), то внутренняя сумма, стоящая в правой части (9), поскольку $\sum_{v=0}^{p-u-1} C_{v+u}^v = C_p^{u+1}$, будет сравнима с нулем по модулю p для всех $u < p-1$ и равна 1 при $u = p-1$. Следовательно,

$$\sum_{u=0}^{p-1} a_1^u a_{p-u-1}(x) = a_1^{p-1} x^{q^n - p^{ns-1}}$$

$$1 \cdot A_0^{ns} = a_1^{p-1} \sum_{v=0}^{p^{ns}-1} a_0^v x^{q^n - v - 1}.$$

Рассуждая подобным образом, мы получим

$$1 \cdot A_0^{ns+2} = (a_1 a_2)^{p-1} \sum_{v=0}^{p^{ns-2}-1} a_0^v x^{q^n - v - 1}$$

$$1 \cdot A_0^{ns+3} = (a_1 a_2 a_3)^{p-1} \sum_{v=0}^{p^{ns-3}-1} a_0^v x^{q^n - v - 1}$$

и т. д.

$$1 \cdot A_0^{2ns} = (a_1 a_2 \dots a_{ns})^{p-1} \sum_{v=0}^0 x^{q^n - v - 1} = x^{q^n - 1} \quad (10)$$

поскольку $(a_1 a_2 \dots a_{ns})^{p-1} = a^{\frac{q^n - 1}{q^n}} = 1$.

Опираясь на (10) и используя (3), найдем

$$1 \cdot A_{p-1}^{ns} = 1 \cdot A_0^{ns} = \beta^{\frac{q^n - 1}{q^n}} = 1$$

и, согласно (6), $\bar{e}_{3n}^0(1) = 0$. А это, в силу леммы 2, означает, что степени всех неприводимых делителей

$f_q(n; x)$ при $\beta = a^2$ делят число $3n$.

С другой стороны, можно показать, что трехчлен $f_q(n; x)$ не имеет простых делителей, степень которых делит число n , за исключением лишь одного сомножителя $\psi(x)$, являющегося делителем выражения $x^2 + ax + \beta$.

Это следует из того, что

$$f_q(n; x) - (x^{q^n} - x)x = x^2 + ax + \beta.$$

и, как легко видеть, $\psi(x) = 1$, если $q^n \equiv -1 \pmod{3}$, $\psi(x) = x^2 + ax + \beta$, если $q^n \equiv 1 \pmod{3}$ *, и $\psi(x) = x - a$ при $p = 3$. Стало быть, справедливо

Утверждение 1. В кольце $F_q[x]$ имеет место разложение

$$x^{q^n+1} + ax + a^2 = \psi(x) \prod_{\substack{d \mid n \\ (d^{-1} \cdot 3n, 3) = 1}} I_n^{(d)}(x), \quad (11)$$

где $I_n^{(d)}(x)$ произведение всех $I_n(d)$ неприводимых делителей $f_q(n; x)$ ($\beta = a^2$), степень которых равна d .

На этом этапе, однако, еще не ясно, существует ли для каждого натурального числа d , удовлетворяющего условиям $d/3n$ и $d \times n$, неприводимый делитель $f_q(n; x)$ степени d . Следующее утверждение полностью решает этот вопрос.

* Если $p = 1 \pmod{3}$, то $x^2 + dx + a^2 = (x + 2^{-1}a(1 + \sqrt{-3}))(x + 2^{-1}a(1 - \sqrt{-3}))$.

Утверждение 2. Для любого натурального числа n , удовлетворяющего условию $d \nmid 3n$ и $d \times n$ (т. е. $(d^{-1}3n, 3) = 1$), справедлива формула

$$t_n(d) = \frac{1}{d} \sum_{\substack{u \nmid d \\ (u, 3) = 1}} \mu(u) (q^{\frac{d}{u}} - \varepsilon_q(d/3u)), \quad (12)$$

где $\mu(u)$ — функция Мебиуса и $\varepsilon_q(u)$ — наименьший по абсолютному значению вычет выражения q^u по модулю 3. В самом деле, согласно (11) имеем

$$q^n - \varepsilon_q(n) = \sum_{d \nmid n_1} 3^{\delta+1} d \cdot t_n(3^{\delta+1} d),$$

где $n = 3^\delta n_1$, $(3 \nmid n_1)$, откуда следует, что

$$\sum_{d \nmid n_1} \mu(d) (q^{\frac{n}{d}} - \varepsilon_q(n/d)) = \sum_{d \nmid n_1} \mu(d) \sum_{v \nmid \frac{n_1}{d}} 3^{\delta+1} v t_{n/d}(3^{\delta+1} v). \quad (13)$$

Но

$$t_n(3^{\delta+1} v) = t_{n/d}(3^{\delta+1} v). \quad (14)$$

поскольку, как легко проверить,

$$f_q(n; x)^{q^{\varepsilon n_2}} - x^{q^{\varepsilon n_2}} (x^{q^{3kn_2}} - x)^{q^{(1-\varepsilon)n_2}} = x^{q^{n_2+1}} + \alpha x^{q^{\varepsilon n_2}} + \beta,$$

где $n_2 = d^{-1}n$, $d = 3k + \delta$ ($\delta = +1$), $\varepsilon = \frac{1}{2}(|\delta| - \delta)$ и два многочлена $x^{q^{n_2+1}} + \alpha x + \alpha^2$ и $x^{q^{n_2+1}} + \alpha x^{q^{n_1}} + \alpha^2$, изоморфно приводимы. Поэтому, собирая слагаемые двойной суммы (13) с одними и теми же значениями v , мы получим

$$\begin{aligned} & \sum_{d \nmid n_1} \mu(d) \sum_{v \nmid \frac{n_1}{d}} 3^{\delta+1} v t_{n/d}(3^{\delta+1} v) = \\ & = \sum_{v \nmid n_1} 3^{\delta+1} v t_n(3^{\delta+1} v) \sum_{d \nmid \frac{n_1}{v}} \mu(d) = 3nt_n(3n) \end{aligned}$$

и

$$\sum_{d \nmid n_1} \mu(d) (q^{\frac{n}{d}} - \varepsilon_q(n/d)) = 3nt_n(3n).$$

Стало быть, в силу (14), для любого натурального числа d , удовлетворяющего условию $(d^{-1}3n, 3) = 1$, имеет место равенство (12).

Пример 2. Пусть дан аффинный сепарабельный многочлен $\bar{f}_q(n; x) = x^{q^n} - \alpha x + \beta$ ($\alpha \neq 0$) над полем F_q . Требуется установить зависимость между первыми коэффициентами всех его неприводимых делителей и элементами α и β .

Имеем

$$\begin{aligned} \bar{f}_q(n; x)^{p-1} &= ((x^{q^n} - ax) + \beta)^{p-1} = \\ &= \sum_{u=0}^{p-1} x^{p-u-1} ((-a))^{p-u-1} \sum_{v=0}^u \beta^v C_{p-1}^v C_{p-v-1}^{u-v} x^{q^n(u-v)}, \end{aligned}$$

откуда в силу (1) находим

$$a_0(x) = a^{p-1(p-1)}, \quad a_1(x) = a^{p-1(p-2)} (x^{p^{q^n-1}} + \beta^{1/p}) \text{ и } b_{up} = a^{p-1(p-1)} x^u.$$

Поскольку $b_0 = a^{p-1(p-1)}$, то очевидно $\xi \cdot A_0^s = \xi$, где $\xi \in F_q$ и в силу (4), для всякого натурального числа m ,

$$S_m^1 = S_{m-1}^1 A_0^s + 1 \cdot A_1. \quad (15)$$

Пользуясь (15) при $m=1$, так как $S_0^1 = 0$, получим

$$S_1^1 = 1 \cdot A_1 = b_1(x) = \gamma x^{p^{q^n-1}} + \gamma \beta^{1/p} \quad (\gamma = a^{p-1(p-2)}).$$

Далее для $m=2, \dots, n$ в силу (2) будем иметь

$$S_2^1 = S_1^1 A_0^s + A_1 = \gamma x^{p^{q^n-1}} + \gamma x^{p^{q^n-1}} + 2\gamma \beta^{1/p},$$

$$S_3^1 = S_2^1 A_0^s + A_1 = \gamma x^{p^{q^n-1}} + \gamma x^{p^{q^n-1}} + 3\gamma \beta^{1/p},$$

и т. д.

$$S_n^1 = \gamma \sum_{u=1}^n x^{p^{qu-1}} + n\gamma \beta^{1/p}.$$

Проделав эту процедуру подряд k раз и учитывая при этом, что $1 \cdot A_0^{s-1} = a^{1-p}$, мы получим

$$S_{2n}^1 = \gamma (1 + \gamma \gamma_1) \sum_{u=1}^n x^{p^{su-1}} + 2n\gamma \beta^{1/p} + n\gamma^2 \gamma_1 \beta^{1/p} \quad (\gamma_1 = \gamma^{p-1(1-p)})$$

и т. д.

$$\begin{aligned} S_{kn}^1 &= \gamma (1 + \gamma \gamma_1 + \dots + (\gamma \gamma_1)^{k-1}) \sum_{u=1}^n x^{p^{su-1}} + \\ &+ n\gamma \beta^{1/p} \sum_{u=1}^k (k+1-u) (\gamma \gamma_1)^{u-1}, \end{aligned}$$

или, согласно (5)

$$S_{kn}^1(\xi) = \Gamma_k \sum_{u=0}^{n-1} x^{qu} + n\gamma^k \gamma_1^k \beta \sum_{u=1}^k (k+1-u) (\gamma \gamma_1)^{p(u-1)} + \xi, \quad (16)$$

где

$$\Gamma_k = (\gamma \gamma_1)^p (1 + \gamma \gamma_1 + \dots + (\gamma \gamma_1)^{k-1})^p = a^{-1} + a^{-2} + \dots + a^{-k}$$

$$(\gamma \gamma_1)^p = a^{-1} \text{ и } \xi \in F_q.$$

Пусть e — минимальное натуральное число, удовлетворяющее условию $\Gamma_e = 0^*$. Тогда, очевидно,

$$S_{en}^1(\xi) = \xi - n\beta \sum_{u=1}^e u x^{-u}. \quad (17)$$

Это все дает возможность сделать следующее

Утверждение 3. В кольце $F_q[x]$ многочлен $\bar{f}_q(n; x)$ полностью разлагается на неприводимые делители, степень которых делит число en и не делит e, n , где e_1 — любой собственный делитель e , за исключением лишь одного линейного сомножителя $\psi_1(x) = (1 - \alpha)x + \beta^{**}$, и при этом первый коэффициент α любого неприводимого делителя $\bar{f}_q(n; x)$ степени d удовлетворяет условию $d^{-1}en\alpha = n\beta \sum_{u=1}^e u x^{-u}$. Данное утверждение следует из (16), (17), леммы 1, замечания 2 и того факта, что для любого e_1 и ξ выполняются два соотношения

$$(S_{e_1 n}^1(\xi), \bar{f}_q(n; x)) = \psi_1(x)$$

поскольку

$$\Gamma_{e_1}^{-1}(S_{e_1 n}^1(\xi) - S_{e_1 n}^1(\xi)^e) + \bar{f}_q(n; x) = \psi_1(x)$$

и

$$\psi_1(x) \mid \bar{f}_q(n; x)$$

Сейчас мы покажем, что если $\psi_1(x) \neq 0$, то для любого натурального числа d , удовлетворяющего условию $(d^{-1}en, e) = 1$, справедливо равенство

$$\bar{t}_n(d) = \frac{1}{d} \sum_{\substack{u \mid d \\ (u, e) = 1}} \mu(u) (q^{d eu} - \epsilon_p),$$

где $\bar{t}_n(d)$ — общее количество неприводимых делителей многочлена $\bar{f}_q(n; x)$, степени d и $\epsilon_p = \frac{1}{2}(1 - (-1)^p)$.

В самом деле, согласно утверждению 3, имеем

$$q^n - 1 = \sum_{d \mid n} \lambda e d \bar{t}_n(\lambda e d), \quad (18)$$

где $n = \lambda n_1$, $(n_1, e) = 1$, $\lambda_1 \mid e$ и λ_1 — любой простой делитель λ .

Из равенства (18) следует, что

$$\sum_{d \mid n_1} \mu(d) (q^{n_1 d} - 1) = \sum_{d \mid n_1} \mu(d) \sum_{v \mid n_1 d} \lambda e v \bar{t}_n(\lambda e v). \quad (19)$$

* Т. е. e равно порядку элемента α в группе F_q^* , если $\alpha \neq 0$, и $e = p$ если $\alpha = 1$.

** Если, конечно, $\psi_1(x) \neq 0$.

Но

$$\bar{t}_n(\lambda e \nu) = \bar{t}_{n,d}(\lambda e \nu), \quad (20)$$

поскольку

$$\bar{f}_q(n; x) - \sum_{u=1}^d (x^{q^{n_u}} - \gamma x + \theta)^{q^{n_u(d-u)}} = 0,$$

где

$$n_u = d^{-1} n, \quad \gamma = \alpha^{1/d}, \quad \theta = \frac{\alpha^{-1}(\gamma^{-1} - 1)}{\gamma^{-1}(\alpha^{-1} - 1)} \beta,$$

и два многочлена $x^{q^{n_u}} - \alpha x + \beta$ и $x^{q^{n_u}} - \gamma x - \theta$ изоморфно приводимы. Поэтому, собирая слагаемые двойной суммы (19) с одинаковыми значениями ν , мы получим

$$\sum_{d \sim n_1} \mu(d) \sum_{\nu \sim n_2/d} \lambda e \nu \bar{t}_{n,d}(\lambda e \nu) = \sum_{\nu \sim n_1} \lambda e \nu \bar{t}_n(\lambda e \nu) \sum_{d \sim n_2/\nu} \mu(d) = e n \bar{t}_n(e n),$$

т. е.

$$\sum_{d \sim n_1} \mu(d) (q^{n_1/d} - \varepsilon_p) = e n \bar{t}(e n)$$

и в силу (20)

$$\bar{t}_n(d) = \frac{1}{d} \sum_{\substack{u \sim d \\ (u, e^*)=1}} \mu(u) (q^{d/e^*u} - \varepsilon_p),$$

что и требовалось доказать.

В заключение отметим, что в случае, когда $\beta = 0$ (условие несколько более слабое, чем $\psi_1(x) = 0$) можно, повторив описанную процедуру „слово в слово“, показать, что двучлен $x^{q^n} - \alpha x$ в кольце $F_q[x]$ полностью разлагается на неприводимые делители, степень d которых удовлетворяет условию $(d^{-1} e^* n; e^*) = 1$, где e^* — порядок элемента α в группе F_q^* , а их общее количество $t_n^*(d)$ для любого такого d связано равенством

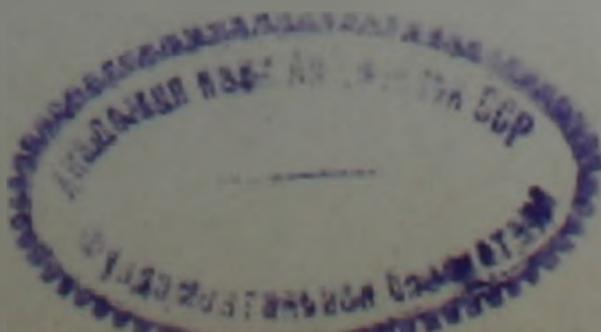
$$t_n^*(d) = \frac{1}{d} \sum_{\substack{u \sim d \\ (u, e^*)=1}} \mu(u) q^{\frac{d}{e^*u}}.$$

Вычислительный центр Национальной академии наук Армении
и Ереванского государственного университета

Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս Ռ. Ռ. ՎԱՐՇԱՄՈՎ

Վերջավոր դաշտերում օպերատորների մի դասի մասին

Վերջավոր դաշտի վրա ցանկացած բազմանդամի համար առանձնացվում են նախապես տրված գործակիցներով չվերածվող բաժանարարների: Դրա հիման վրա մասնավորապես լուծվում է եռանդամի վերածումը չվերածվող բաժանարարների մասին խնդիրը: Մասնավոր դեպքում $F_q[x]$ օղակում



$f_q(n, x) = x^{qn+1} + \alpha x + \beta$ բազմանդամը վերածվում է շվերածվող բաժանա-
 ռաների, որոնց աստիճանը բաժանում է $e\pi$ թիվը և չի բաժանում e, n_1 -ը,
 որտեղ e_1 -ը e -ի ցանկացած սեփական բաժանարարն է (e -ն α -ի կարգն է),
 բացառությամբ մի դեպքին բազմապատկիչի՝ $\varphi_1(x) = (1 - \alpha)x + \beta$, և այդ
 դեպքում d -րդ աստիճանի ցանկացած շվերածվող $\bar{f}_q(n_1, x) = x_{qn+1} - \alpha x + \beta$
 բաժանարարի առաջին α գործակիցը բավարարում է $d^{-1} e\pi\alpha = n_2 \sum_{u=1}^e u\alpha^{-u}$
 պայմանին:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

1 P. P. Варшамов, ДАН СССР, т. 319, № 4 (1991).

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.64

Член корреспондент НАН Армении А. Б. Нерсисян, К. С. Дарбинян

Метод погружения для решения нелинейных интегральных уравнений

(Представлено 10/V 1992)

1. Область приложения интегральных уравнений исключительно обширна (см., например, (1)). Несмотря на то, что арсенал методов решения линейных уравнений достаточно богат, все еще продолжают разрабатываться новые типы алгоритмов эффективного приближенного решения. Поэтому при решении конкретных линейных задач пользователь имеет возможность выбрать алгоритм, соответствующий имеющимся в наличии вычислительным структурам.

В то же время при решении нелинейных интегральных уравнений приходится, по существу, пользоваться небольшим набором давно известных методов. Одним из лучших является классический метод Ньютона в операторской трактовке (метод Ньютона—Канторовича). Так, для уравнения Урысона

$$y(x) = \int_0^1 F(x, t, y(t)) dt + f(x) \quad (0 < x \leq 1) \quad (1)$$

соответствующий этому методу алгоритм следующий.

Выбирается начальная функция $y_0(x)$ и далее применяется рекуррентная интерационная схема ($n=0, 1, \dots$).

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \varphi_n(x) \quad (2)$$

$$\varphi_n(x) = \int_0^1 F'_y(x, t, y_n(t)) \varphi_n(t) dt + \int_0^1 F(x, t, y_n(t)) dt - y_n(x) \quad (2')$$

При определенных ограничениях, налагаемых на функции F , f и y_0 , этот процесс сходится к одному из решений уравнения (1) $y_n(x) \rightarrow y(x)$, при $n \rightarrow \infty$ (см. (1)).

2. В случае линейного уравнения второго рода (т. е. когда в (1) $F(x, t, y(t)) = K(x, t)y(t)$) применение той или иной квадратурной формулы на сети $\{x_k\}_{k=1}^n \in [0, 1]$ приближенно сводит задачу к реше-

нию алгебраической системы с $(N \times N)$ -матрицей. В частности, такой подход целесообразен на каждом (n -ом) шаге метода Ньютона (2)–(2'), когда $\varphi_n(x)$ находится как решение линейного уравнения на отрезке $[0, 1]$ с ядром $F'_y(x, t, y_n(t))$. С другой стороны, известны континуальные аналоги метода треугольной факторизации Гаусса. Один из них — метод погружения для линейных уравнений (см. (2) и библиографию в (3, 4)), заключающийся в изучении уравнения с тем же ядром на отрезке $(0, \tau)$ ($0 \leq \tau < 1$) и рекурсии при $\tau \uparrow 1$.

Здесь мы применим метод „дискретного погружения“, когда $\tau \in \{\tau_n\}$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_N = 1$. Этот подход в линейном случае (см. (4)) оказался наиболее эффективным при минимальных ограничениях.

3. Пусть при заданной сети $\{\tau_n\}$

$$y(x, n) = \int_0^{\tau_n} F(x, t, y(t, n)) dt + f(x) \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} z_n(t) &\stackrel{\text{def}}{=} y(x, n+1) - y(x, n) = \int_0^{\tau_{n+1}} (F(x, t, y(t, n+1)) - \\ &\quad - F(x, t, y(t, n))) dt + \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} F(x, t, y(t, n)) dt = \\ &= \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} F(x, t, y(t, n)) dt + \int_0^{\tau_{n+1}} F'_y(x, t, y(t, n)) z_n(t) dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{n+1}} F''_{yy}(x, t, \theta(x, t, n)) z_n^2(t) dt \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (4) \end{aligned}$$

где

$$\min(y(x, n), y(x, n+1)) \leq \theta(x, t, n) \leq \max(y(x, n), y(x, n+1)).$$

Если F и f — гладкие функции, то $z_n(x)$ имеет порядок $O(h_n)$ ($h_n = \tau_{n+1} - \tau_n \rightarrow 0$). Таким образом, с точностью до $O(h^3)$ ($h = \max |h_n|$) $z_n(x)$ является решением линейного уравнения, получаемого по (4) отбрасыванием последнего интеграла.

Как и в других методах (см. выше), при численной реализации необходимо заранее выбрать сеть $\{x_n\} \in [0, 1]$ для применения квадратурных формул.

Замечание 1. Аналогичный подход можно применить и в случае многомерного уравнения Урысона (т. е. когда в (1) $x \in D \in R^m$, $m \geq 2$ и интеграл берется по D , $dt = dt_1 \cdot dt_2 \cdots dt_m$). Дискретное погружение можно осуществить на основе разбиения $D = \cup D_i$, $D_i \cap D_j = \emptyset$.

4. Указанный в п. 3 процесс решения уравнения (1) осуществляется в N шагов. Та же схема погружения может быть реализована на основе решения уравнения (1) (на каждом n -ом шаге) методом Ньютона—Канторовича с заранее запрограммированным числом итераций. Учитывая суперсходимость последнего метода, можно надеяться на высокую точность решения.

Замечание 2. В любом случае уравнение (3) может решаться при $0 \leq x \leq 1$. Если при этом возникающие алгебраические системы решать методом Гаусса—Жордана, то предлагаемые алгоритмы параллельные (полностью векторизованы).

При использовании последовательных (однопроцессорных) вычислительных структур можно использовать экономичный алгоритм типа «окаймления». Именно, из (4) (без последнего интеграла) надо вычислить $y_{n+1}(x)$ на $[\tau_n, \tau_{n+1}]$. Для этого необходимо $y(x, n)$ доопределить на $x \in [\tau_n, \tau_{n+1}]$ из (3), а линейные системы решать методом Гаусса. Аналогично, при применении метода, указанного в начале данного пункта, надо решать (3) по методу Ньютона—Канторовича при $x \in [0, \tau_{n+1}]$.

5. Рекуррентный метод «дискретного погружения», соответствующий формуле (4) без последнего интегрального члена, был испытан на ряде тестовых уравнений. В частности рассматривалось следующее уравнение типа Гаммерштейна:

$$y(x) = \lambda \int_0^1 e^{x-t} y^3(t) dt + e^x, \quad \lambda = 0,25(e^2 - 1)^{-1} \quad (5)$$

Нетрудно убедиться, что это уравнение обладает лишь следующими тремя гладкими решениями:

$$y_1(x) = (\sqrt{5} - 1)e^x; \quad y_2(x) = (1 + \sqrt{5})e^x; \quad y_3(x) = 2e^x. \quad (6)$$

Предлагаемый метод имеет порядок $O(h)$, $h = \frac{1}{N} \rightarrow 0$ (назовем его алгоритмом $AN(h)$) и дает решение $y = y_1(x)$. То же решение получаем, применяя к уравнению (5) метод Ньютона на основе формулы прямоугольников, при $y_0(x) = f(x)$ (обозначим его как алгоритм $Nt(h)$).

В таблице сведены результаты сравнительного эксперимента с применением к решению уравнения (5) алгоритмов $Nt(h)$ и $AN(h)$. Учитывалась среднеквадратичная ошибка $\sigma(N)$ приближенного решения $y_N(x)$, соответствующая числу N интервалов равномерного раз-

бнения отрезка $[0, 1]$ ($h = \frac{1}{N}$). Алгоритмами $AN(h)R$ и $AN(h)RR$ обозначены первая и вторая экстраполяции по Ричардсону в N общих точках x -сетей по формулам

$$\tilde{y}_{2N}(x) = 2y_{2N}(x) - y_N(x) \quad \tilde{y}_{4N}(x) = \frac{4}{3}\tilde{y}_{2N} - \frac{1}{3}y_{2N}(x) \quad (7)$$

Таблица

Сходимость к решению $y = (\sqrt{5} - 1)e^x$ (в $Nt(h)$ — при $y_0 = f$, пять итераций).
Ошибка $\sigma(N)$ и время счета. В $AN(h)$ — две экстраполяции по Ричардсону

N	$Nt(h)$	t (с)	$AN(h)$	$ANh(R)$	$AN(h)RR$	t (с)
4	$1.43E-1$	0	$1.81E-1$			0
8	$9.16E-2$	2	$1.14E-1$	$4.83E-2$		1
16	$5.26E-2$	5	$6.67E-2$	$2.06E-2$	$1.04E-2$	5
32	$2.84E-2$	24	$3.68E-2$	$7.20E-3$	$2.86E-3$	47

Как видим, алгоритм $AN(h)$ вполне конкурентоспособен. Так, ошибка $\sigma = 1,04 \times 10^{-2}$ второй экстраполяции y_{2N} при $N = 16$ получена при работе компьютера IBM PC/AT 286 по программе алгоритма $AN(h)$ в течение 6 с. В то же время при применении алгоритма $Nt(h)$ ошибка $\sigma(16) = 5,26 \times 10^{-2}$ соответствует времени 7 с, а $\sigma(32) = 2,84 \times 10^{-2}$ — времени 24 с.

В заключение заметим, что представляется перспективным сочетание алгоритмов $AN(h)$ и $Nt(h)$.

Институт математики
Национальной академии наук Армении
Ереванский государственный университет

Հայաստանի ԳԱԱ բրախից անդամ Զ. Բ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ, Կ. Ս. ԴԱՐՐԻՆՅԱՆ

Ներդրման մեթոդ ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների լուծման համար

Դիտարկվում է (1) ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումը Այսպիսի հավասարումների լուծման հայտնի մեթոդներից է նյուտոն-Կանտորովիչի եղանակը, որն ըստ էության իտերացիոն մեթոդ է, որտեղ իտերացիայի յուրաքանչյուր քայլում լուծվում է գծային ինտեգրալ հավասարում (2)–(2'):

Առաջարկվող մեթոդը սկզբնական հավասարումը դիտարկում է (3) տեսքով, որի լուծման համար կատարվում են (4) ձևափոխությունները Աղյուսակում տրված են երկու մեթոդների համեմատական բնութագրիչները (5) հավասարման համար:

Այս մեթոդները պատիմալ համաստեղումը կարող է լինել առավել արդյունավետ:

ЛИТЕРАТУРА — ՉՐԱԿԱՆՈՒՄՆԵՐ

1 А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков, Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы, Наукова думка, Киев, 1986. 2 С. Л. Соболев, УМН, т. 9, вып. 3 (61), с. 234—235 (1954). 3 И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория вольтерровых операторов в Гильбертовом пространстве и ее приложения, Наука, М., 1967. 4 А. Б. Нерсисян, ДАН АрмССР, т. 89, № 4, с. 171—176 (1989).

ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ТЕОРИЯ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН

УДК 519.68

М. А. Мхитарян

Параллельно-поточная интерпретация алгоритма решения интегрального уравнения второго рода с ядром теплицева типа (Представлено чл.-корр. НАН Армении А. Б. Нерсесяном 1/V 1992)

Для решения интегральных уравнений второго рода с ядрами теплицева типа (2) (см. ниже) в работах (1,2) были предложены новые параллельные алгоритмы. В настоящей работе предложена систолическая структура с соответствующей коммуникацией для реализации одного из этих алгоритмов (см. (3)).

1. Обозначим $F(i, n) = F(ih, nh)$ ($in \in Z$). Формально процесс дискретизации можно рассматривать на сетке с узлами, имеющими целочисленные координаты. В качестве $F(ih, nh)$ может быть взята любая из ниже введенных функций.

Приведем алгоритм решения уравнения

$$y(x) = \int_0^1 K(x, t) y(t) dt + f(x), \quad x \in [0, 1] \quad (1)$$

с симметричным ядром $K(x, t) = K(t, x)$, удовлетворяющим соотношению

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) K(x, t) = \sum_{k=1}^m q_k(x) q_k(t) \quad 0 \leq x, t \leq 1, \quad (2)$$

где $q(x)$ — кусочно-непрерывная функция (точность алгоритма — порядка $o(h)$, где h — шаг равномерной дискретизации отрезка $[0, 1]$, (см. (2)).

```
входные данные (начальное присваивание)
for 0 < i <= N do
for 1 <= k <= m do (m << N)
begin
Phi(i, 0) = Phi_1(i, 0) = K(0, i);
Q_k(i, 0) = q_k(i);
y(i, 0) = f(i)
end
```

(внутренние вычисления)

for $0 \leq n \leq N-1$ do

for $0 \leq i \leq N$ do

begin

for $1 \leq k \leq m$ do

if $n \neq N-1$ then

begin

$$\Phi(i, n+1) = \Phi(i, n) + h\Phi(n, h) \cdot \Phi_1(i, n);$$

$$Q_k(i, n+1) = Q_k(i, n) + hQ_k(n, n) \cdot \Phi_1(i, n) \text{ end.} \quad (3)$$

$$\text{if } i = 0 \text{ then } \Phi_1(i, n+1) = \Phi(n+1, n+1) \text{ else} \quad (4)$$

$$\Phi_1(i, n+1) = \Phi_1(i-1, n) + h\Phi(n, n) \cdot \Phi(i-1, n) +$$

$$+ \sum_{k=1}^m hQ_k(n, n) \cdot Q_k(i-1, n); \quad (5)$$

$$y(i, n+1) = y(i, n) + hy(n, h) \cdot \Phi_1(i, n) \quad (6)$$

end

(выходные вычисления)

for $1 \leq n \leq N-1$ do

for $0 \leq i \leq N$ do $a^{(1)} = \Phi_1(i, n+1)$;

for $0 \leq i \leq N$ do $a^{(2)} = y(i, N)$;

Заметим, что кроме $y(i, n)$ в качестве выходных данных фигурирует величина $\Phi_1(i, n+1)$, обеспечивающая факторизацию самосопряженного интегрального оператора II рода.

С вводом обозначений $\rho_{nk} = hQ_k(n, h)$; $\alpha_n = h\Phi(n, n)$; $\gamma_n = hy(n, h)$ рекуррентные соотношения (3), (5), (6) принимают вид

$$\Phi(i, n+1) = \Phi(i, n) + \alpha_n \cdot \Phi_1(i, n); \quad (3')$$

$$Q_k(i, n+1) = Q_k(i, n) + \rho_{nk} \cdot \Phi_1(i, n);$$

$$\Phi_1(i, n+1) = \Phi_1(i-1, n) + \alpha_n \cdot \Phi(i-1, n) + \sum_{k=1}^m \rho_{nk} \cdot Q_k(i-1, n); \quad (5')$$

$$y(i, n+1) = y(i, n) + \gamma_n \cdot \Phi_1(i, n). \quad (6')$$

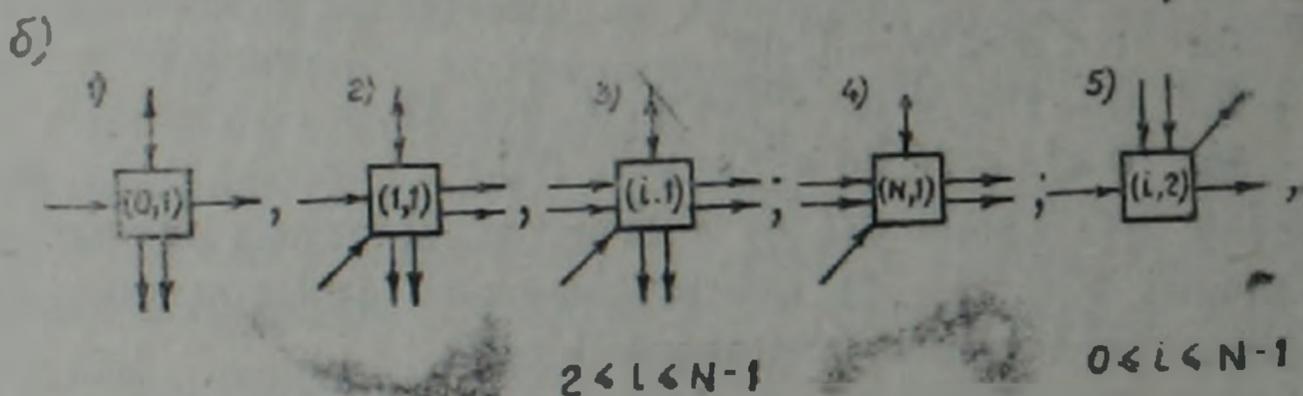
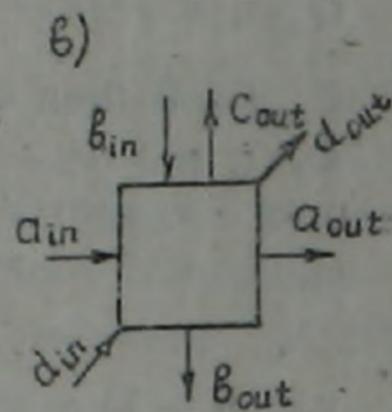
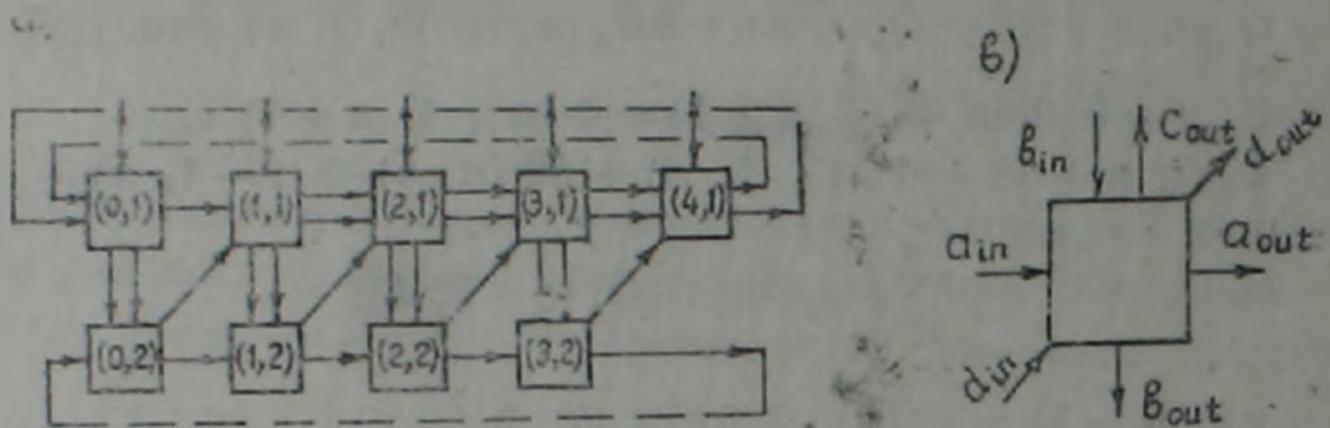
За элементарную операцию принимается операция накопления $s \leftarrow s + a \cdot b$.

Количество операций, необходимых для подсчета коэффициентов, — порядка $o(N)$, поэтому формулы (3), (5), (6) эквивалентны соотношениям (3'), (5'), (6'). Непосредственным подсчетом по формулам (3'), (5'), (6') нетрудно убедиться, что операционная сложность данного алгоритма равна $\Omega = (2m+3)N^2 + o(N)$.

Временная сложность последовательной реализации задачи на ЭВМ с одной последовательностью команд и одним потоком данных совпадает с операционной сложностью $T_1 = \Omega$. (За единицу времени принимается время выполнения операции накопления).

Параллельно-поточную реализацию данного алгоритма можно осуществить на цепи из $(N+1)$ линейно связанных процессоров. Однако в этом случае работа каждого вычислителя усложнена подсчетом величин $\Phi(i, n+1)$; $Q_k(i, n+1)$ ($k = \overline{1, m}$); $\Phi_1(i, n+1)$; $y(i, n+1)$ на каждом этапе.

Из анализа структуры рекуррентных соотношений (3'), (5'), (6') следует, что величины $\Phi(i, n+1)$; $Q_k(i, n+1)$; $y(i, n+1)$ зависят от $\Phi_1(i, n+1)$



Для вычисления $\Phi_1(i, n+1)$ требуется $(m+1)$ операций накопления, а для суммарного подсчета $\Phi(i, n+1)$; $Q_k(i, n+1)$ ($k = \overline{1, m}$) также $(m+1)$ элементарных операций необходимо выполнить. Таким образом, более целесообразно вместо одной цепи линейно связанных вычислителей использовать цилиндрическую вычислительную сеть, изображенную на рисунке, а) ($N=4$), состоящую из $(2N+1)$ процессоров. Цилиндричность обеспечивает однонаправленность коммуникационных горизонтальных связей. Функциональные устройства каждой цепи предназначены для вычисления следующих величин:

I цепи — $\Phi(i, n+1)$; $Q_k(i, n+1)$ ($k = \overline{1, m}$); $y(i, n+1)$;

II цепи — $\Phi_1(i, n+1)$ ($i \neq 0$).

Типы процессоров данной вычислительной сети изображены на рисунке, б).

Временные диаграммы работы соответствующих типов процессоров можно представить с вводом следующих обозначений (рисунок, в). (Значения на входе ячейки помечаются меткой in, на выходе—out):

$a_{in}; a_{out}$ — операнды, распространяющиеся в горизонтальном направлении;

$b_{in}; b_{out}$ — операнды, транслирующиеся в вертикальном направлении вниз;

c_{out} — операнд, транслирующийся в вертикальном направлении — вверх;

$d_{ik}; d_{i+1}$ — операнды, передающиеся в диагональном направлении;

C — величина, вычисляемая в данный момент времени в процессоре;

t — функция времени ($t \in Z$).

Заметим, что с помощью операндов b_{in} осуществляется ввод начальных данных, а благодаря операндам b_{out} реализуется вывод финальных вычислений. Очередность выполнения операций соответствует записи. Таким образом, на каждом временном шаге t можно представить функции данного процессора: какая величина вычисляется и какие операнды транслируются в детерминированном направлении. Например, временную диаграмму работы (0,1)-вычислителя можно представить следующим образом:

if $t = 1$ then $b_{in} = \Phi(0, 0)$;

if $t = 2$ then $C = b_{out} = a_{out} = a_0$;

for $0 \leq n \leq N-1$ do

begin

if $t = 2 + (m+3)n$ then begin $C = a_{out}^{(1)} = b_{out} = a_n$;

$a_{out}^{(2)} = \Phi(n, n)$ end;

for $1 \leq k \leq m$ do

if $t = 2 + (m+3)n + k$ then $C = a_{out} = b_{out} = p_{nk}$;

if $t = 3 + (m+3)n + m$ then $a_{out} = C = \gamma_n$;

if $t = 3 + (m+2)n + N$ then begin $C = \Phi(0, n+1)$; $a_{out} = x_n$;

$a_{in} = p_{n1}$; $b_{out}^{(1)} = \Phi(0, n)$; $c_{out} = b_{out}^{(2)} = \Phi_1(0, n)$ end;

for $1 \leq k \leq m-1$ do

if $t = 3 + (m+2)n + N + k$ then begin $C = Q_k(i, n+1)$;

$a_{in} = p_{n, k+1}$; $a_{out} = p_{nk}$; $b_{out} = Q_k(0, n)$ end;

if $t = 3 + (m+2)n + N + m$ then begin $C = Q_m(i, n+1)$;

$a_{in} = \gamma_n$; $a_{out} = p_{nm}$; $b_{out} = Q_m(0, n)$ end;

if $t = 4 + (m+2)n + N + m$ then begin $C = y(0, n+1)$;

$a_{in} = a_{n+1}$; $a_{out} = \gamma_n$ end

if $t = 2 + (m+3)N$ then $c_{out} = y(0, N)$;

Наличие двойных однонаправленных стрелок отмечено верхним индексом, например: $b_{out}^{(1)}$; $b_{out}^{(2)}$. $p\Phi_1(i+1, n+1)$ означает, что выполняется p -ая элементарная операция для $\Phi_1(i+1, n+1)$ ($p = \overline{1, m+1}$). С выводом $\Phi_1(N, N)$ из (N, 1)-вычислителя заканчивается процесс, а время параллельно-поточной интерпретации данного алгоритма $T_{2N+1} = (m+4)N + 3$. Промежуточные результаты хранятся в

локальной памяти до следующего этапа. $(i, 1)$ ($0 < i < N-1$) вычислителю необходимо $(m+3)$ регистров памяти для запоминания величин $\Phi(i, n+1)$; $Q_k(i, n+1)$ ($k = \overline{1, m}$); h ; $y(i, n+1)$; $(N, 1)$ -процессорному элементу требуется $(m+2)$ регистров памяти для хранения $\Phi(i, n+1)$; $Q_k(i, n+1)$; $y(i, n+1)$, а один регистр памяти $(i, 2)$ -функциональному устройству ($0 < i < N-1$) для запоминания $\Phi_1(i+1, n+1)$ ($k = \overline{1, m}$; $n = \overline{0, N-2}$).

Коэффициент эффективности (по отношению к однопроцессорной реализации рассматриваемого алгоритма) равен $K_{эф} \cong \frac{m+3}{m+4}$.

Коэффициент эффективности $K_{эф}^*$ (по отношению к экономичному непараллельному варианту приведенного алгоритма) будет несколько меньше $K_{эф}^* \rightarrow K_{эф} < 1$ при $m \rightarrow \infty$.

Алгоритм для несимметричного случая интерпретируется аналогично на вычислительной сети из $(4N+2)$ функциональных устройств указанного типа.

Ереванский физический институт

Մ. Հ. ՄԵԻՔԱՐՅԱՆ

Տյուպլիցյան տիպի կորիզով երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծման
ալգորիթմի գույանեն-հոսֆային մեկնաբանումը

Առաջարկված է սիստոլիկ զանգված տյուպլիցյան տիպի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծման ալգորիթմի իրագործման համար ներկայացված են պրոցեսորների տեսակները և նկարագրված են նրանց աշխատանքի ժամանակային դիագրամները: Որոշված է հաշվարկի արդյունավետության գործակիցը, որը թույլ է տալիս գնահատել սարքավորումների (պրոցեսորային մասերի) կիրառման աստիճանը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. Б. Нерсисян, ДАН АрмССР, т. 89, № 4, с. 171—176 (1989). ² А. Б. Гарибян, А. Б. Нерсисян, Деп. в Арм. НИИНТИ, 8.01.90, № 1—Ар. 90. Ереван, 20 с., 1990. ³ С. Г. Седухин, Программирование, № 4, с. 57—68 (1984).

УДК 519.71

В. А. Варданян

О сложности полных проверяющих тестов
 для монотонных булевых функций

(Представлено чл.-корр. НАН Армении Ю. А. Шукурьяном 4/VIII 1992)

Рассмотрим логические схемы с n входами x_1, x_2, \dots, x_n и одним выходом, реализующие булевы функции $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пусть K_n (соответственно K_1) — класс всех кратных (одиночных) константных неисправностей на n входах схемы (см. (1,2)); $P_2(n)$ — множество всех булевых функций, зависящих от n переменных; B^n — множество наборов n -мерного единичного куба.

Пусть $\Phi_n(f)$ — множество функций неисправностей (см. (1)), соответствующих всем неисправностям из K_n .

Множество наборов $T_n(f) \subseteq B^n$ называется (полным) проверяющим тестом для функции $f \in P_2(n)$ (относительно класса неисправностей K_n), если для любой функции неисправности $f' \in \Phi_n(f)$, тождественно не совпадающей с f , найдется набор $\bar{a} \in T_n(f)$ такой, что $f(\bar{a}) \neq f'(\bar{a})$. Множество $T_1(f)$ называется единичным проверяющим тестом для функции $f \in P_2(n)$, обнаруживающим одиночные константные неисправности из класса K_1 .

Число наборов $|T_n(f)|$ называется сложностью (длиной) теста $T_n(f)$. Тест называется минимальным для функции f , если имеет сложность, равную $t_n(f) = \min |T_n(f)|$, где минимум берется по всем проверяющим тестам $T_n(f)$ функции f . Величина $d_n(F) = \max t_n(f)$, где максимум берется по всем функциям $f \in F \subseteq P_2(n)$, называется функцией Шеннона для сложности проверяющего теста в классе функций F .

В (2) доказано, что $n/2 \leq t_n(f) \leq 2/3n$ для почти всех функций $f \in P_2(n)$, а в (3,3) установлено, что при $n \gg 1$

$$d_n(P_2(n)) = \begin{cases} 2n - 2s, & \text{если } 2^{s-1} + s < n < 2^s + s \\ 2n - 2s + 1, & \text{если } n = 2^{s-1} + s \end{cases} \quad (1)$$

В настоящей работе приводятся результаты исследования сложности полных проверяющих тестов для функций $f \in M(n)$, где $M(n)$ — множество всех монотонных булевых функций, зависящих от n переменных. Доказывается, что $t_n(f) \leq n/2$ для почти всех функций $f \in M(n)$, и $2n - 2 \log n - O(\log \log n) < d_n(M(n)) < 2n - 2 \log n + O(1)$.

Пусть \leq — отношение предшествования в частично упорядоченном множестве B^n (см. (1)). Набор $\bar{a} \in B^n$ называется нижней единицей (верхним нулем) для функции $f \in M(n)$, если $f(\bar{a}) = 1$ (соответственно $f(\bar{a}) = 0$) и для каждого набора $\bar{\beta} \in B^n$ такого, что $\bar{\beta} \leq \bar{a}$ (соответственно $\bar{\beta} \geq \bar{a}$), $\bar{\beta} \neq \bar{a}$, имеет место $f(\bar{\beta}) = 0$ (соответственно $f(\bar{\beta}) = 1$). Через $\mathfrak{X}_1(f)$ (соответственно $\mathfrak{X}_0(f)$) обозначим множество всех нижних единиц (верхних нулей) функции $f \in M(n)$.

Пусть $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in B^n$, обозначим

$$\bar{a}^i = (a_1, \dots, a_{i-1}, \bar{a}_i, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad 1 \leq i \leq n; \quad \bar{a}^* = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n).$$

Лемма 1. Если $f(\bar{a}) = 0$ (соответственно $f(\bar{a}) = 1$) и $\bar{\beta} \leq \bar{a}$ (соответственно $\bar{a} \leq \bar{\beta}$), то набор \bar{a} обнаруживает все неисправности из K_n для функции $f \in M(n)$, обнаруживаемые набором $\bar{\beta}$.

Следствие 1. Если $T_n(f)$ — некоторый проверяющий тест для функции $f \in M(n)$, то существует проверяющий тест $T_n^*(f)$ для функции f такой, что

$$T_n^*(f) \subseteq \mathfrak{X}_0(f) \cup \mathfrak{X}_1(f), \quad |T_n^*(f)| \leq |T_n(f)|.$$

Следствие 2. Для любой функции $f \in M(n)$ множество $\mathfrak{X}_0(f) \cup \mathfrak{X}_1(f)$ является полным проверяющим тестом относительно K_n .

Через K_n^i , $1 \leq i \leq n$, обозначим подкласс всех неисправностей из класса K_n , при которых вход x_i неисправен.

Лемма 2. Если $f(\bar{a}) > f(\bar{a}^i) = f(\bar{\beta})$, $\bar{a}^i \leq \bar{\beta}$, или $f(\bar{a}) < f(\bar{a}^i) = f(\bar{\beta})$, $\bar{\beta} \leq \bar{a}^i$ для некоторого i , $1 \leq i \leq n$, то наборы множества $[\bar{a}, \bar{\beta}]$ обнаруживают все неисправности из K_n^i для функции $f \in M(n)$.

Через $B^{n,k}$, $0 \leq k \leq n$, обозначим k -й слой куба B^n :

$$B^{n,k} = \left\{ \bar{a}: \bar{a} \in B^n, \sum_{i=1}^n a_i = k \right\}.$$

Пусть $\bar{a} \in B^{n,k}$. Введем следующие обозначения:

$$Z_1(\bar{a}) = \{ \bar{\beta}: \bar{\beta} \in B^{n,k+1}, \bar{\beta} \leq \bar{a} \}, \quad 0 \leq k \leq n-1;$$

$$Z_0(\bar{a}) = \{ \bar{\beta}: \bar{\beta} \in B^{n,k-2}, \bar{\beta} \geq \bar{a} \}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

При четных n через $M_1(n)$ обозначим множество функций $f \in M(n)$, имеющих наборы \bar{a} ,

$$\bar{a}^* \in \mathfrak{X}_1(f) \cap B^{n, n/2} \quad \text{и} \quad \bar{\beta}, \bar{\beta}^* \in \mathfrak{X}_0(f) \cap B^{n, n/2}.$$

Лемма 3. При четных $n \rightarrow \infty$ $|M_1(n)| \sim |M(n)|$.

При четных n через $M_2(n)$ обозначим множество функций $f \in M(n)$, имеющих наборы $\bar{a} \in \mathfrak{X}_1(f) \cap B^{n, n/2}$ и $\bar{\beta} \in \mathfrak{X}_0(f) \cap B^{n, n/2}$ такие, что $\bar{\beta} = \bar{a}^*$.

Лемма 4. При четных $n \rightarrow \infty$ $|M_2(n)| \sim |M(n)|$.

При нечетных n через $M_3(n)$ обозначим множество функций $f \in M(n)$, обладающих следующими свойствами при любом $\sigma \in [0, 1]$:

- 1) $\mathfrak{X}_\sigma(f) \subseteq B^{n, (n-1)/2} \cup B^{n, (n+1)/2} \cup B^{n, (n+3)/2}$;
- 2) $|\mathfrak{X}_\sigma(f) \cap B^{n, (n-1)/2}| < n^2 \binom{n}{(n-1)/2} / 2^{(n+1)/2}$;
- 3) $|\mathfrak{X}_\sigma(f) \cap B^{n, (n+1)/2}| \geq \frac{1}{2} (1 - o(1)) \binom{n}{(n-1)/2}$;
- 4) $|\mathfrak{X}_\sigma(f) \cap B^{n, (n+3)/2}| \leq n^2 \binom{n}{(n-3)/2} / 2^{(n+3)/2}$.

При нечетных n через $M_4(n)$ обозначим множество функций $f \in M(n)$, обладающих следующими свойствами при любом $\sigma \in [0, 1]$:

- 1) $\mathfrak{X}_\sigma(f) \subseteq B^{n, (n-3)/2} \cup B^{n, (n-1)/2} \cup B^{n, (n+1)/2}$;
- 2) $|\mathfrak{X}_\sigma(f) \cap B^{n, (n-3)/2}| < n^2 \binom{n}{(n-3)/2} / 2^{(n+3)/2}$;
- 3) $|\mathfrak{X}_\sigma(f) \cap B^{n, (n-1)/2}| \geq \frac{1}{2} (1 - o(1)) \binom{n}{(n-1)/2}$;
- 4) $|\mathfrak{X}_\sigma(f) \cap B^{n, (n+1)/2}| < n^2 \binom{n}{(n-1)/2} / 2^{(n+1)/2}$.

Лемма 5. При нечетных $n \rightarrow \infty$

$$|M_3(n)| + |M_4(n)| \sim |M(n)|.$$

Замечание 1. Леммы 3 и 5 обобщают некоторые вспомогательные утверждения из (1-6).

При нечетных n через $M_5(n)$ обозначим множество функций $f \in M_3(n)$, имеющих набор $\bar{a} \in \mathfrak{X}_1(f) \cap B^{n, (n+1)/2}$ такой, что

$$Z_1(\bar{a}^*) \cap \mathfrak{X}_0(f) \neq \emptyset \quad \text{и} \quad Z_1(\bar{a}^*) \cap \mathfrak{X}_1(f) \neq \emptyset.$$

При нечетных n через $M_0(n)$ обозначим множество функций $f \in M_1(n)$, имеющих набор $\bar{a} \in \mathfrak{M}_0(f) \cap B^{2^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}}$ такой, что

$$Z_0(\bar{a}^*) \cap \mathfrak{M}_0(f) \neq \emptyset \quad \text{и} \quad Z_0(\bar{a}^*) \cap \mathfrak{M}_1(f) \neq \emptyset.$$

Лемма 6. При нечетных $n \rightarrow \infty$

$$|M_1(n)| + |M_0(n)| \sim |M(n)|.$$

Теорема 1. Для почти всех функций $f \in M(n)$.

$$t_n(f) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 4,$$

где $|x|$ — наибольшее целое, не превосходящее x .

Пусть $\varphi(n)$ — положительная целочисленная функция от n , удовлетворяющая неравенствам

$$\begin{cases} \varphi(n) < n \\ \left(\binom{\varphi(n)}{\left\lfloor \frac{1}{2} \varphi(n) \right\rfloor} \right) \geq n - \varphi(n). \end{cases} \quad (2)$$

Пусть

$$C\left(\varphi(n), \left\lfloor \frac{1}{2} \varphi(n) \right\rfloor\right) = \left\{ A: A \subseteq \{1, 2, \dots, \varphi(n)\}, |A| = \left\lfloor \frac{1}{2} \varphi(n) \right\rfloor \right\};$$

$\nu: \{\varphi(n) + 1, \dots, n - 1, n\} \rightarrow C\left(\varphi(n), \left\lfloor \frac{1}{2} \varphi(n) \right\rfloor\right)$ — некоторое инъективное отображение, т. е. $\nu(j) \in C\left(\varphi(n), \left\lfloor \frac{1}{2} \varphi(n) \right\rfloor\right)$ при $\varphi(n) + 1 \leq j \leq n$, и из $j_1 \neq j_2$ следует, что $\nu(j_1) \neq \nu(j_2)$.

Заметим, что при выполнении неравенств (2) такое инъективное отображение ν существует.

Рассмотрим следующую функцию:

$$\begin{aligned} f_{\varphi(n), \nu}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= \bigvee_{1 < l_1 < l_2 < \dots < l_{\lfloor \frac{1}{2} \varphi(n) \rfloor + 1} < \varphi(n)} x_{l_1} x_{l_2} \dots x_{l_{\lfloor \frac{1}{2} \varphi(n) \rfloor + 1}} \bigvee \\ &\quad \bigvee_{\varphi(n) + 1 < j < n} \bigvee_{s \in \nu(j)} x_j \& \& x_s. \end{aligned}$$

Очевидно, что $f_{\varphi(n), \nu}(\bar{x}) \in M(n)$.

Лемма 7. $t_1(f_{\varphi(n), \nu}) \geq 2n - 2\varphi(n)$.

Следствие 3. $t_n(f_{\varphi(n), \nu}) \geq 2n - 2\varphi(n)$.

Теорема 2. $2n - 2 \log n - \log \log n - O(1) < d_n(M(n)) < 2n - 2 \log n + O(1)$.

Верхняя оценка теоремы 2 следует непосредственно из (1), а нижняя оценка получается из следствия 3 при

$$\varphi(n) = \left\lfloor \log n + \frac{1}{2} \log \log n + O(1) \right\rfloor.$$

Следствие 4. $2n - 2 \log n - O(\log \log n) < d_1(M(n)) < d_1(P_1(n)) < 2n - 2 \log n + O(1)$.

Замечание 2. Рассмотренная выше функция $f_{\varphi(n)}$ впервые была построена в (7) с целью получения нижней оценки функции Шеннона для сложности динамических тестов. Из (7) следует также, что функция $f_{\varphi(n)}$ при $\varphi(n) = \left\lfloor \log n + \frac{1}{2} \log \log n + O(1) \right\rfloor$ имеет асимптотически минимальную „активность“ (критическую сложность) $\sim \frac{1}{2} \log n$ в классе (монотонных) булевых функций, существенно зависящих от n переменных.

Институт проблем информатики и автоматизации
Национальной академии наук Армении

Վ. Ա. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

Լրիվ ստուգիչ տեսության բարդության մասին մոնոտոն բուլյան
ֆունկցիաների համար

Ապացուցված է, որ

1) n փոփոխականի համարյա բոլոր մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների համար $t_n(f) \leq \lfloor n/2 \rfloor + 4$, որտեղ $t_n(f)$ -ը f ֆունկցիայի մուտքային փոփոխականների հաստատուն 0 և հաստատուն 1 տիպի սխալները հայտնաբերող մինիմալ լրիվ տեսուի բարդությունն է,

2) $2n - 2 \log n - O(\log \log n) < d_n(M(n)) < 2n - 2 \log n + O(1)$, որտեղ $d_n(M(n))$ -ը լրիվ ստուգիչ տեսուի բարդության նեոնոնի ֆունկցիոն է n փոփոխականի մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների $M(n)$ դասում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 И. А. Чегис, С. В. Яблонский, Тр. МИАН СССР, т. 51 (1958). 2 В. Н. Носков, Дискретный анализ, Новосибирск, вып. 27 (1975). 3 Г. Р. Полосян, О проверяющих тестах для логических схем, ВЦ АН СССР, М., 1982. 4 А. Д. Коршунов, Проблемы кибернетики, вып. 38 (1981). 5 V. A. Gardanian, Lecture Notes in Computer Science, Berlin etc, Springer-Verlag, v. 199 (1985). 6 В. А. Варданян, Кибернетика, № 3 (1987). 7 В. А. Варданян ДАН АрмССР, т. 80, № 4 (1985).

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3.01

А. Б. Товмасян

Погрансло́й термоупругой полосы и его взаимодействие с внутренним напряженно-деформированным состоянием

(Представлено чл.-корр. НАН Армении Б. Л. Абрамяном 23/IV 1992).

Краевые задачи теории упругости и термоупругости для тонких тел являются сингулярно возмущенными. В силу этого решение складывается из решений внутренней задачи и пограничного слоя. Эти решения могут быть построены асимптотическим методом. Решения внутренней задачи для анизотропной полосы и пластинок, соответствующие первой, второй и третьей краевым задачам, построены в (1-4). Пограничный слой полосы изучен в (1, 5). В случае первой краевой задачи для полосы была установлена тесная связь погранслоя с принципом Сен-Венана, в частности, для этого класса задач была доказана справедливость этого принципа (1). В настоящей работе рассматриваются погрансло́й термоупругой полосы и вопрос его сопряжения с решением внутренней задачи, когда на лицевых кромках полосы заданы смешанные условия. Решение внутренней задачи для этого класса задач построено в (6).

1. Требуется определить решение плоского погранслоя для анизотропной термоупругой полосы $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq a, |y| \leq h, h \ll a\}$, когда на лицевых кромках $y = \pm h$ заданы однородные условия

$$\sigma_{xy}(h) = \tau_y(h) = v(-h) = \sigma_{xy}(-h) = 0, \quad (1.1)$$

и рассмотреть вопрос сопряжения этого решения с решением внутренней задачи, которое соответствует условиям

$$\begin{aligned} \sigma_y(h) &= \varepsilon^{-1} \sigma_y^+(x), & \sigma_{xy}(h) &= \sigma_{xy}^+(x); \\ v(-h) &= \varepsilon^{-1} v^-(x), & \sigma_{xy}(-h) &= \sigma_{xy}^-(x). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Решение внутренней задачи отыскивается в виде (6)

$$Q = \varepsilon^{q_1 + s} \zeta, \quad s = \overline{0, S}, \quad (1.3)$$

где Q — любое из напряжений и перемещений, $q = -1$ для σ_x, σ_y, U, V , $s = 0$ для τ_{xy} ; $U = u/a$, $V = v/a$, $\varepsilon = h/a$, а $Q^{(s)}$ определяется по формулам

$$\sigma_y^{(s)} = \sigma_{y0}^{(s)}(\xi) + \sigma_y^{*(s)}(\xi, \zeta), \quad \sigma_{y0}^{(s)}(\xi) = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(s)}(\xi, 1);$$

$$\sigma_x^{(s)} = \frac{1}{a_{11}} \frac{du^{(s)}}{d\xi} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \sigma_{y0}^{(s)} + \sigma_x^{*(s)}(\xi, \zeta);$$

$$\sigma_{xy}^{(s)} = -\frac{1}{a_{11}} \frac{d^2 u^{(s)}}{d\xi^2} \zeta + \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{d\sigma_{y0}^{(s)}}{d\xi} \zeta + \sigma_{xy0}^{(s)}(\xi) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, \zeta),$$

$$U^{(s)} = u^{(s)}(\xi) + u^{*(s)}(\xi, \zeta); \quad V^{(s)} = v^{-(s)}/a + v^{*(s)}(\xi, \zeta) - v^{*(s)}(\xi, -1);$$

$$\frac{1}{a_{11}} u^{(s)} = \int_0^\xi \int_0^\xi R^{(s)} d\xi d\zeta + C_1^{(s)} \xi + C_2^{(s)}; \quad (1.4)$$

$$R^{(s)} = \frac{1}{2} (\sigma_{xy}^{-(s)} - \sigma_{xy}^{+(s)}) - \frac{1}{2} (\sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, -1) - \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, 1)) + \\ + \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{d}{d\xi} (\sigma^{+(s)} - \sigma^{*(s)}(\xi, 1));$$

$$\sigma_{xy}^{\pm(0)} = \sigma_{xy}^\pm, \quad \sigma_y^{\pm(0)} = \sigma_y^\pm, \quad v^{-(0)} = v^-; \quad \sigma_{xy}^{\pm(s)} = \sigma_y^{\pm(s)} = v^{-(s)} = 0, \quad s \neq 0,$$

где для величин со звездочкой имеются рекуррентные формулы (6), в частности,

$$\sigma_x^{*(s)} = \frac{1}{a_{11}} \left(\frac{\partial u^{*(s)}}{\partial \xi} - a_{12} \sigma_y^{*(s)} - a_{16} \sigma_{xy}^{*(s-1)} - a_{11} \theta^{(s)} \right); \quad (1.5)$$

$$\sigma_{xy}^{*(s)} = - \int_0^\zeta \left(F_x^{(s)} + \frac{\partial \sigma^{*(s)}}{\partial \xi} \right) d\zeta.$$

Как следует из (1.4), (1.5), температурные воздействия и объемные силы учитываются решением внутренней задачи и, в силу линейности исходной краевой задачи, соответствующие слагаемые непосредственно не войдут в уравнения погранслоя, т. е. погранслоем определится из однородных уравнений теории упругости без сохранения в соотношениях обобщенного закона Гука температурных слагаемых. Влияние вышеуказанных слагаемых на погранслоем будет проявляться при сопряжении внутреннего и типа погранслоя решений на основе удовлетворения торцевым условиям.

2. Погранслоем будем строить вблизи торца $x=0$. Данные для погранслоя при $x=a$ можно получить из приведенного выше решения формальной заменой x на $(a-x)$. Требуется найти в Ω такое решение уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела, которое удовлетворяет условиям (1.1) и имеет затухающий характер при удалении от торца в глубь Ω . Чтобы найти подобное решение, перейдем к новым независимым переменным $t = x/h$, $\zeta = y/h$ и решение вновь полученных уравнений отыщем в виде (3)

$$\sigma = \epsilon^{-1+s} \sigma^{(s)}(t, \zeta), \quad u = \epsilon^s u^{(s)}(t, \zeta), \quad s = 0, \overline{N}, \quad (2.1)$$

где σ — любое из напряжений, u — любое из безразмерных перемещений.

В свою очередь

$$\begin{aligned} (\sigma_x^{(s)}, \sigma_{xy}^{(s)}, \sigma_y^{(s)}, u^{(s)}, v^{(s)}) = & (\sigma_1^{(s)}(\zeta), \sigma_2^{(s)}(\zeta), \\ & u_1^{(s)}(\zeta), u_2^{(s)}(\zeta)) \exp(-\lambda t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

После подстановки (2.1), (2.2) в уравнения теории упругости получим систему относительно $Q_i^{(s)}(\zeta)$, $u_i^{(s)}(\zeta)$. Решение ее можно выразить через $\sigma_2^{(s)}$. В силу громоздкости формул в общем случае, приведем это решение для ортотропной полосы:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(s)} &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2 \sigma_2^{(s)}}{d\zeta^2}, & \sigma_{12}^{(s)} &= \frac{1}{\lambda} \frac{d\sigma_2^{(s)}}{d\zeta}; \\ u_1^{(s)} &= -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{a_{11}}{\lambda^2} \frac{d^2 \sigma_2^{(s)}}{d\zeta^2} + a_{12} \sigma_2^{(s)} \right); \\ u_2^{(s)} &= -\frac{a_{11}}{\lambda^4} \frac{d^3 \sigma_2^{(s)}}{d\zeta^3} - (a_{12} + a_{66}) \frac{1}{\lambda^2} \frac{d\sigma_2^{(s)}}{d\zeta}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Напряжение $\sigma_2^{(s)}$ определяется из уравнения

$$a_{11} \sigma_2^{IV(s)} + (a_{66} + 2a_{12}) \lambda^2 \sigma_2^{II(s)} + a_{22} \lambda^4 \sigma_2^{(s)} = 0. \quad (2.4)$$

В зависимости от возможных значений упругих постоянных, характеристическое уравнение, соответствующее (2.4), может иметь корни следующих типов: а) $\pm i\beta$, б) $\pm i\beta_1$, в) $\pm \alpha \pm i\beta$, которым соответствуют решения:

$$\text{а) } \sigma_2^{(s)}(\zeta) = (A^{(s)} + B^{(s)} \zeta) \cos \lambda \beta \zeta + (C^{(s)} + D^{(s)} \zeta) \sin \lambda \beta \zeta; \quad (2.5)$$

$$\text{б) } \sigma_2^{(s)}(\zeta) = A^{(s)} \cos \lambda \beta_1 \zeta + B^{(s)} \sin \lambda \beta_1 \zeta + C^{(s)} \cos \lambda \beta_2 \zeta + D^{(s)} \sin \lambda \beta_2 \zeta; \quad (2.6)$$

$$\text{в) } \sigma_2^{(s)}(\zeta) = A^{(s)} \varphi_1 + B^{(s)} \varphi_2 + C^{(s)} \varphi_3 + D^{(s)} \varphi_4;$$

$$\varphi_1 = \operatorname{ch} \alpha \lambda \zeta \cos \lambda \beta \zeta, \quad \varphi_2 = \operatorname{sh} \alpha \lambda \zeta \sin \lambda \beta \zeta; \quad (2.7)$$

$$\varphi_3 = \operatorname{ch} \alpha \lambda \zeta \sin \lambda \beta \zeta, \quad \varphi_4 = \operatorname{sh} \alpha \lambda \zeta \cos \lambda \beta \zeta.$$

Значения параметров α , β , β_1 приведены в (2)

Удовлетворив условиям (1.1), используя (2.1), (2.2), (2.5)–(2.7), получим систему однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных $A^{(s)}$, $B^{(s)}$, $C^{(s)}$, $D^{(s)}$, которая будет иметь нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Это условие даст трансцендентное уравнение, откуда определится λ . Константы $A^{(s)}$, $B^{(s)}$, $C^{(s)}$, $D^{(s)}$ линейно зависимы, и три из них выразятся через четвертую. В результате получим решения:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \sigma_2^{(s)}(\zeta) &= D_n^{(s)} [(a_1 + \zeta a_2) \cos i\beta \zeta + (a_3 + \zeta a_4) \sin i\beta \zeta; \\
 a_1 &= (\sin \lambda\beta + \beta \lambda \cos i\beta) (2i\beta - \sin 2\lambda\beta); \\
 a_2 &= -i\beta \cos \lambda\beta (2\lambda\beta + \sin 2\lambda\beta); \\
 a_3 &= (\cos \lambda\beta - i\beta \sin \lambda\beta) (2i\beta + \sin 2\lambda\beta); \\
 a_4 &= \lambda\beta \sin i\beta (2\lambda\beta - \sin 2\lambda\beta), \quad D_n^{(s)} = \frac{D^{(s)}}{a_4}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

где λ — корень трансцендентного уравнения

$$(\sin 4\beta - 4i\beta) \sin 2\beta = 0;$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \sigma_2^{(s)}(\zeta) &= B_n^{(s)} (b_1 \cos i\beta_1 \zeta + b_2 \sin i\beta_1 \zeta + b_3 \cos i\beta_2 \zeta + b_4 \sin i\beta_2 \zeta); \\
 b_1 &= -2i^2 (\beta_1 - \beta_2) \beta_2 \sin \lambda (\beta_1 + \beta_2) \sin i\beta_2; \\
 b_2 &= -2i^2 (\beta_1 + \beta_2) \beta_2 \sin i (\beta_1 + \beta_2) \cos i\beta_2; \\
 b_3 &= -2i^2 (\beta_2 - \beta_1) \beta_1 \sin \lambda (\beta_1 + \beta_2) \sin i\beta_1; \\
 b_4 &= 2i^2 (\beta_2 - \beta_1) \beta_1 \sin \lambda (\beta_1 + \beta_2) \cos i\beta_1, \quad B_n^{(s)} = \frac{B^{(s)}}{b_2};
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
 & \sin 4\lambda\beta_1 \sin 4i\beta_2 | a_{11}\beta_1 (\beta_1^2 + \beta_2^2) \operatorname{tg} 2\beta_1 - \\
 & - \beta_2 (2i\beta_2 + \zeta a_{22} - a_{11} (\beta_1^2 + \beta_2^2)) \operatorname{tg} 2\beta_2 | = 0;
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } \sigma_2^{(s)}(\zeta) &= C_n^{(s)} (c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3 + c_4 \varphi_4); \\
 c_1 &= 2 (\alpha\psi_3 + \beta\psi_4) | (\alpha\psi_1 - \beta\psi_2) \psi_3 - (\alpha\psi_2 + \beta\psi_1) \varphi_4 |; \\
 c_4 &= -2 (\alpha\psi_2 + \beta\psi_1) | (\alpha\psi_3 + \beta\psi_4) \psi_1 + (\alpha\psi_1 - \beta\psi_3) \psi_2 |; \\
 c_2 &= -2 (\alpha\psi_4 - \beta\psi_3) | (2\psi_1 - \beta\psi_2) \psi_3 - (\alpha\psi_2 + \beta\psi_1) \psi_4 |; \\
 c_3 &= 2 (\alpha\psi_1 - \beta\psi_2) | (\alpha\psi_4 + \beta\psi_3) \psi_4 - (\alpha\psi_3 - \beta\psi_4) \psi_2 |; \\
 \psi_i &= \varphi_i(1), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad C_n^{(s)} = \frac{C^{(s)}}{c_3};
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

λ — корень уравнения

$$\operatorname{tg} mz + m \operatorname{th} z = 0; \quad \frac{\beta}{z} = m, \quad z = 2\alpha\lambda\zeta. \tag{2.13}$$

Трансцендентные уравнения (2.9), (2.11), (2.13) имеют счетное множество корней вида $\pm \lambda_n$, $\pm i\beta_n$. Будем считать, что в (2.1) суммирование будет вестись также по всем корням с $R \lambda_n > 0$. Отметим также, что решения (2.1), (2.8), (2.10), (2.12) являются для каждого «S» точными решениями плоской задачи анизотропной полосы.

3. Интеграл задачи имеет вид

$$J = Q^{(m)} + \varepsilon^\mu R^{(1)} + \varepsilon^\mu R^{(2)}, \tag{3.1}$$

где $R^{(1)}$ — решение пограничного слоя при $x = 0$, $R^{(2)}$ — пограничный слой при $x = a$, μ характеризуют интенсивности пограничных слоев, их значения

определяются в процессе сопряжения внутреннего и типа погранслоя решений.

В решении внутренней задачи (1.4) постоянная $C_2^{(s)}$ характеризует жесткое смещение, а $C_1^{(s)}$ определяется из условий на торце $x = 0$. Пусть при $x = 0$ заданы условия

$$\sigma_x = f_1(y), \quad \sigma_{xy} = f_2(y) \quad (3.2)$$

Чтобы удовлетворить условиям (3.2), воспользуемся следующим свойством погранслоя. Из (2.1), (2.3) с учетом (1.1) вытекает самоуравновешенность напряжения σ_1 погранслоя в произвольном поперечном сечении:

$$\int_{-1}^{+1} \sigma_1^{(s)}(\zeta) d\zeta = 0; \quad (3.3)$$

остальные напряжения этим свойством не обладают.

Подставив (3.1) в (3.2), установим, что $x = 0$, $\mu = 0$. В результате имеем

$$\sigma_x^{(s)} + \sigma_1^{(s)} = f_1^{(s-1)} \quad \sigma_{12}^{(s)} + \sigma_{xy}^{(s-1)} = f_2^{(s-1)} \quad (3.4)$$

$$\text{при } x = 0, \quad (\xi = 0, \quad t = 0)$$

где

$$f_i^{(0)} = f_i(h, \zeta), \quad f_i^{(s)} = 0, \quad s \neq 0.$$

Используя (1.4), (3.2), (3.4), будем иметь

$$C_1^{(s)} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \left[\sigma_y^{+(s)}(0) - \sigma_y^{*(s)}(0, 1) \right] - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \sigma_x^{*(s)}(0, \zeta) d\zeta + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f_1^{(s-1)} d\zeta. \quad (3.5)$$

Вернувшись снова к (3.4), эти условия запишем в виде

$$\sigma_x^{(s)} = -\sigma_x^{*(s)}(0, \zeta) + f_1^{(s-1)}, \quad \sigma_{12}^{(s)} = -\sigma_{xy}^{*(s-1)}(0, \zeta) + f_2^{(s-1)}, \quad (3.6)$$

откуда методом граничной коллокации или другими, изложенными, например, в (7), методами определяются постоянные решения погранслоя.

Институт механики

Национальной академии наук Армении

Ա. Ք. ԽՈՎԻՍԻԱՅԱՆ

Ջերմաառաձգական գոտու սահմանային շերտը և նրա փոխազդեցությունը ներքին լարվածադեֆորմացիոն վիճակի հետ

Աշխատանքում դիտարկվում են շերմաառաձգական գոտու սահմանային շերտի տիպի լուծման որոշման և նրա փոխազդեցության հարցերը ներքին խնդրի լուծման հետ, երբ շերտի երկայնական կողմերի վրա տրված են խա-

որ եզրային պայմաններ Ստացված են սահմանային գոտու լուծումների մարման արագությունը բնութագրող տրանսցենդենտ հավասարումներ՝ կախված նյութի առաձգական հատկություններից: Դիտարկված է երկու տիպի լուծումների կարման առանձնահատկությունները բնութագրող օրինակ, երբ ուղղաձիգ եզրում տրված են լարումների արժեքները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 Л. А. Агаловян, Изв. АН АрмССР, Механика, т 30, № 5 (1977).
- 2 Л. А. Агаловян, Межвузовский сб. Механика, Изд. ЕГУ, вып. 2, 1983.
- 3 Л. А. Агаловян, Тр. XIII Всесоюзн. конф. по теории пластин и оболочек, Таллин, 1983.
- 4 Л. А. Агаловян, Р. С. Геворкян, ПММ, т. 50, вып. 2 (1986).
- 5 Л. А. Агаловян, Межвузовский сб. Механика Изд. ЕГУ, вып. 3, (1984).
- 6 Л. А. Агаловян, А. Б. Товмасян, ДАН, Армении, т. 92, № 2 (1991).
- 7 А. И. Лурье, Теория упругости, Наука, М., 1970.

УДК 529.3.01

М. С. Мкртчян, С. М. Мхитарян

К задаче о напряженном состоянии составного упругого
 бесконечного тела с периодической системой коллинеарных
 трещин при продольном сдвиге

(Представлено чл.-корр. НАН Армении Б. Л. Абрамяном 9/X 1992)

Смешанные задачи о напряженном состоянии упругих однородных тел в виде бесконечного пространства, подверженного плоской или антиплоской деформации и ослабленного периодической системой коллинеарных прямолинейных трещин, исследовались в работах (1-3). Основные результаты в этом направлении подытожены в монографиях (4-7).

В настоящей работе методом интегральных уравнений рассматривается задача о напряженном состоянии упругого кусочно-однородного бесконечного пространства с периодической системой коллинеарных прямолинейных трещин при продольном сдвиге.

1. Пусть отнесенное к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ составное упругое бесконечное пространство, состоящее из верхнего полупространства $y > 0$ с модулем сдвига G_+ и нижнего полупространства $y < 0$ с модулем сдвига G_- , ослаблено периодической системой сквозных трещин $\omega = \{y = 0; -a + 2nl \leq x \leq a + 2nl, -\infty < z < \infty\}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, a < l$), расположенных в плоскости $y = 0$. Пусть, далее, берега трещин нагружены направленными вдоль оси Oz силами произвольных интенсивностей

$$\tau_{yz} |_{y=\pm 0} = -\tau_{\pm}(x) \quad (x \in \omega),$$

одинаковыми для всех трещин периодической системы и вызывающими продольный сдвиг упругого пространства в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy . Требуется определить раскрытия трещин и коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений.

Для вывода определяющих уравнений поставленной периодической задачи плоскость Oxy вдоль горизонтальной оси разрежем верхнюю и нижнюю полуплоскости $y \leq 0$, а затем положим

$$-\tau_{yz} |_{y=\pm 0} = T_{\pm}(x) = \begin{cases} \tau_{\pm}(x) & (x \in \omega) \\ \tau(x) & x \in R/\omega; \end{cases} \quad R = \{y = 0; -\infty < x < \infty\}.$$

Тогда для смещений $u_{\pm}^{\pm}(x, 0)$ граничных точек этих полуплоскостей в направлении оси Oz по известному методу ⁽³⁾ получаем

$$u_{\pm}^{\pm}(x, 0) = \pm \frac{1}{\pi G_{\pm}} \int_{-l}^l \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\pi(x-s)}{2l} \right|} T_{\pm}(s) ds \quad (1.1)$$

$(-\infty < x < \infty).$

Очевидно, что функции $T_{\pm}(x)$ и $u_{\pm}^{\pm}(x, 0)$ будут периодическими функциями с периодом $2l$. Поэтому в дальнейшем их будем рассматривать только в интервале $-l \leq x \leq l$, т. е. будем ограничиваться рассмотрением полосы $\Pi = \{|x| \leq l, -\infty < y < \infty\}$ базовой плоскости Oxy .

Далее введем в рассмотрение функцию скачка смещений на щелях

$$\Phi(x) = u_{\pm}^{+}(x, 0) - u_{\pm}^{-}(x, 0) = \begin{cases} \varphi(x) & (|x| < a), \\ 0 & (a < |x| < l), \end{cases}$$

с использованием которой при помощи (1.1) приходим к уравнению

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\pi(x-s)}{2l} \right|} \left[\frac{T_{+}(s)}{G_{+}} + \frac{T_{-}(s)}{G_{-}} \right] ds = \Phi(x) \quad (1.2)$$

$(|x| < l).$

В уравнении (1.2) перейдем к новым переменным

$$\xi = \frac{\pi x}{l}, \quad \eta = \frac{\pi s}{l}, \quad a = \frac{\pi a}{l} \quad (-a < \xi, \quad \eta < a, \quad 0 < a < \pi);$$

$$\frac{\pi}{l} \Phi \left(\frac{l\xi}{\pi} \right) = \bar{\Phi}(\xi),$$

$$\frac{1}{G_{\pm}} T_{\pm} \left(\frac{l\xi}{\pi} \right) = \tilde{T}_{\pm}(\xi), \quad \frac{1}{G_{\pm}} \tau_{\pm} \left(\frac{l\xi}{\pi} \right) = \tilde{\tau}_{\pm}(\xi);$$

$$\frac{\pi}{l} \varphi \left(\frac{l\xi}{\pi} \right) = \tilde{\varphi}(\xi),$$

■ затем продифференцируем обе его части по ξ .

В результате получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2} \left| \tilde{T}_{+}(\eta) + \tilde{T}_{-}(\eta) \right| d\eta = \bar{\Phi}'(\xi) \quad (|\xi| < \pi), \quad (1.3)$$

где интеграл при $\eta = \xi$ понимается в смысле главного значения по Коши. Это уравнение будем рассматривать как сингулярное интегральное уравнение на интервале $(-\pi, \pi)$. Так как ввиду непрерыв-

ности смещений в конечных точках щелей $\varphi(\pm a) = 0$, т. е. $\tilde{\varphi}(\pm a) = 0$, то условие разрешимости уравнения (1.3) выполнено и по известной формуле обращения Гильберта (9) будем иметь:

$$\tilde{T}_+(\xi) + \tilde{T}_-(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2} \tilde{\varphi}'(\eta) d\eta + \tilde{C}, \quad (|\xi| < \pi) \quad (1.4)$$

где \tilde{C} — неизвестная постоянная, подлежащая определению.

Рассматривая ключевое уравнение (1.4) на щели $(-a, a)$, приходим к следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2} \tilde{\varphi}'(\eta) d\eta = \tilde{C} - \tilde{\tau}_+(\xi) - \tilde{\tau}_-(\xi) \quad (|\xi| < a) \quad (1.5)$$

при граничных условиях

$$\tilde{\varphi}(a) = 0, \quad \tilde{\tau}(-a) = 0. \quad (1.6)$$

После того, как построено решение уравнения (1.5)—(1.6), разрушающие напряжения вне щелей согласно (1.4) определяются по формуле

$$\tilde{\tau}(\xi) = -\frac{G}{2\pi} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2} \tilde{\varphi}'(\eta) d\eta + G\tilde{C} \quad (a < |\xi| < \pi), \quad (1.7)$$

где

$$\tilde{\tau}(\xi) = \tilde{\tau}(l\xi/\pi), \quad G = G_+ G_- / (G_+ + G_-).$$

Величину G назовем приведенным модулем сдвига составного тела.

Займемся определением постоянной \tilde{C} . С этой целью заметим, что вследствие симметрии $u_x(\pm l, y) = 0$. Отсюда, в частности, следует, что $\tilde{\tau}_{yx}(\pm l, 0) = 0$ или же $\tilde{T}_+(\pm\pi) + \tilde{T}_-(\pm\pi) = 0$. С учетом последнего условия из (1.4) находим

$$\tilde{C} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \tilde{\varphi}'(\xi) d\xi. \quad (1.8)$$

С другой стороны в верхней полуполосе плоскости Π рассмотрим прямоугольник $D_+ = \{-l \leq x \leq l, 0 \leq y \leq d\}$, а в нижней полуполосе — прямоугольник $D_- = \{-l \leq x \leq l, -d \leq y \leq 0\}$ ($d > 0$). На основании известного свойства гармонических функций

$$\int_{D_+} \frac{\partial u_x}{\partial n} ds = 0, \quad \int_{D_-} \frac{\partial u_x}{\partial n} ds = 0,$$

где n — внешняя нормаль к контурам прямоугольников D_x . Далее, приняв во внимание, что вследствие периодичности $\frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{x=l-1}$ и напряжение в бесконечно удаленных точках полосы Π отсутствует, устремим l к бесконечности и воспользуемся законом Гука. После простых преобразований приходим к условиям:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\tilde{T}_+(\xi) + \tilde{T}_-(\xi)] d\xi = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} [G_+\tilde{\tau}_+(\xi) - G_-\tilde{\tau}_-(\xi)] d\xi = 0; \quad (1.9)$$

Теперь, проинтегрировав по ξ обе части уравнения (1.4) в интервале $(-\pi, \pi)$, при помощи первого условия (1.9) обнаружим, что $\tilde{C} = 0$. Это условие в соответствии с (1.8) или же первое условие (1.9) совместно со вторым условием (1.9), в конечном итоге, накладывают определенные ограничения на внешние нагрузки $\tau_-(x)$ и модули сдвигов G_{\pm} , необходимые для осуществления антиплоской деформации в упругом составном пространстве с периодической системой трещин.

Таким образом, определяющими уравнениями обсуждаемой задачи будут уравнения (1.5) — (1.9).

2. Перейдем к решению уравнения (1.5) при условиях (1.6). Воспользовавшись формулой обращения этого уравнения в двух эквивалентных между собой формах, приведенных в (10), можем записать

$$\tilde{\varphi}'(\xi) = \frac{(2\tilde{C} - A) \sin \frac{\xi}{2} + C \cos \frac{\xi}{2}}{\sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} + \frac{\cos^2 \left(\frac{\xi}{2} \right)}{2\pi \sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} \times \\ \times \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\eta - \xi}{2} \cos^2 \frac{\eta}{2}} [\tilde{\tau}_+(\eta) + \tilde{\tau}_-(\eta)] d\eta \quad (|\xi| < \alpha) \quad (2.1)$$

или

$$\tilde{\varphi}'(\xi) = \frac{2\tilde{C} \sin \frac{\xi}{2} + C_1 \cos \frac{\xi}{2}}{\sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} + \frac{1}{2\pi \sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} \times \\ \times \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\eta - \xi}{2}} [\tilde{\tau}_+(\eta) + \tilde{\tau}_-(\eta)] d\eta \quad (|\xi| < \alpha); \quad (2.2)$$

где C и C_1 — произвольные постоянные, а

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)} \sec \frac{\eta}{2} [\tilde{\tau}_+(\eta) + \tilde{\tau}_-(\eta)] d\eta.$$

Подставляя теперь выражение $\bar{\varphi}'(\xi)$ из (2.1) или из (2.2) в условие (1.8), после элементарных преобразований находим:

$$\bar{C} = \frac{1}{2} A = \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a \sqrt{2(\cos \eta - \cos a)} \sec \frac{\eta}{2} [\bar{\tau}_+(\eta) + \bar{\tau}_-(\eta)] d\eta = 0. \quad (2.3)$$

Следовательно, внешние нагрузки $\bar{\tau}_\pm(x)$ и модули сдвигов G_\pm должны быть подчинены условию (2.3), а также второму условию (1.9), о необходимости которых говорилось выше.

Далее обе части (2.1) или (2.2) проинтегрируем по ξ и примем во внимание граничные условия (1.6). Исходя, например, из (2.2) и учитывая (2.3), а также выражение интеграла $I(\xi, \eta)$ из (10), для приведенного раскрытия трещин будем иметь:

$$\bar{\varphi}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \ln \left[\frac{D_+(\xi, \eta)}{D_-(\xi, \eta)} \right] [\bar{\tau}_+(\eta) + \bar{\tau}_-(\eta)] d\eta \quad (|\xi| \leq a)$$

где

$$D_\pm(\xi, \eta) = \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} - \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} \pm \sqrt{\left(\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\xi}{2} \right) \left(\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\eta}{2} \right)}.$$

При этом получается $C_1 = 0$.

Теперь определим разрушающие напряжения вне трещин. С этой целью выражение $\bar{\varphi}'(\xi)$ из (2.2), в котором согласно сказанному $\bar{C} = C_1 = 0$, подставляем в (1.7) и используем условие (1.8). Затем перейдем к ядру Коши, положив (10) $x = \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}$, $t = \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}$, $a = \operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

После несложных преобразований и вычисления некоторых простых сингулярных интегралов с ядром Коши вновь перейдем к прежним переменным. В результате получим:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(\xi) = & \frac{G \operatorname{sgn} \xi}{2\pi \sqrt{\sin \frac{\xi+a}{2} \sin \frac{\xi-a}{2}}} \times \\ & \times \int_{-a}^a \frac{\sqrt{\sin \frac{a+\eta}{2} \sin \frac{a-\eta}{2}}}{\sin \frac{\eta-\xi}{2}} [\bar{\tau}_+(\eta) + \bar{\tau}_-(\eta)] d\eta \quad (2.4) \\ & (a < |\xi| < \pi), \end{aligned}$$

Исходя из (2.4), вычислим коэффициенты интенсивностей:

$$K_{III}^{\pm} = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow \pm a \pm 0} \sqrt{|x \pm a|} \tau_{y2} = -\sqrt{2l} \lim_{\xi \rightarrow \pm a = 0} \sqrt{|\xi \pm a|} \tilde{\tau}(\xi) =$$

$$= \frac{GV\bar{T}}{\pi |\sin \alpha|} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\alpha \pm \eta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha \mp \eta}{2}\right)}} [\tilde{\tau}_+(\eta) + \tilde{\tau}_-(\eta)] d\eta. \quad (2.5)$$

Приведенные в (2) (с. 397) выражения K_{III}^{\pm} для случая однородного пространства после простых преобразований совпадают с (2.5) при $G_+ = G_- = G_0$.

Отметим важное обстоятельство, что согласно (2.5) коэффициенты интенсивностей зависят от полных внешних нагрузок и модулей сдвигов, а не только от самоуравновешенной части внешних нагрузок, как это имеет место в однородном случае.

Институт механики
Национальной академии наук Армении

Մ. Ս. ՄԿՐՏՅԱՆ, Ս. Մ. ՄԵՒՔԱՐՅԱՆ

Երկայնական սահմի ժամանակ համուղղված նախերի պարբերական
համակարգով բաղադրյալ առածգական անվերջ մաքմնի լարվածային
վիճակի վերաբերյալ խնդրի շուրջը

Դիտարկվում է միևնույն հարթույթյան մեջ դասավորված համուղղված ճաքերի պարբերական համակարգ պարունակող բաղադրյալ առածգական տարածույթյան, որը գտնվում է երկայնական սահմի պայմաններում, լարվածային վիճակի վերաբերյալ խնդիրը: Խնդրի լուծումը բերվում է Հիլբերտի կորիզով սինգուլյար ինտեգրալի ֆեյնմանի հավասարման լուծմանը որոշակի եզրային պայմանների դեպքում: Այդ լուծման հիման վրա գտնված են ճաքերի բաղվածքները և քայքայող լարումների ուժգնության գործակիցները: Հնդգծված է, որ վերջինները կախված են արտաքին լրիվ բեռներից և սահմի մոդուլներից և ոչ թե միայն արտաքին բեռների ինքնահավասարակշռող մասից, ինչպես դա տեղի ունի համասեռ տարածույթյան դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ W. T. Koiter, Ingr. Arch., В. 28, S. 166—172 (1959). ² Г. И. Баренблатт, Г. П. Черепанов, Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, № 3, с. 79—88 (1960). ³ Г. И. Баренблатт, Г. П. Черепанов, ПММ, т. 25, вып. 6, с. 1110—1119 (1961). ⁴ Г. П. Черепанов, Механика хрупкого разрушения, Наука, М., 1974. ⁵ В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин, Распределение напряжений около трещины в пластинках и оболочках, Наукова думка, Киев, 1976. ⁶ П. Парис, Дж. Си, в кн.: Прикладные вопросы вязкости разрушения, Мир, М., 1968. ⁷ М. П. Саврук, Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами: механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие, т. 2, Наукова думка, Киев, 1988. ⁸ И. Я. Штаерман, Контактная задача теории упругости, Гостехиздат, М.—Л., 1949. ⁹ Н. И. Мухелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Наука, М., 1968. ¹⁰ М. С. Мкртчян, С. М. Мхитарян, ДАН Армении, т. 94, № 1 (1993).

УДК 530.145.6

Член-корреспондент НАН Армении В. А. Джрбашян

Суммирование рядов теории возмущений в случае двух уровней

(Представлено 31/VII 1992)

В большинстве практических задач уравнения Шредингера

$$\widehat{H}\psi = (\widehat{H}_0 + \widehat{V})\psi = E\psi \quad (1)$$

точно не решаются. Если, однако, поправка \widehat{V} к «невозмущенному» оператору \widehat{H}_0 мала, то теория возмущений (1) дает приближенные решения уравнений (1). Они представляются в виде бесконечных рядов, выраженных через известные точные решения уравнения

$$\widehat{H}_0\psi^{(0)} = E^{(0)}\psi^{(0)}. \quad (2)$$

Выпишем несколько известных первых членов (1), полученных теорией возмущений, для собственных значений энергии (штрих у знака суммы означает, что при суммировании по l надо опустить член с $l = i$)

$$E_i = E_i^{(0)} + V_{ii} + \sum'_k \frac{|V_{ik}|^2}{E_i^{(0)} - E_k^{(0)}} + \sum'_k \sum'_l \frac{V_{il} V_{lk} V_{kl}}{(E_i^{(0)} - E_l^{(0)})(E_k^{(0)} - E_l^{(0)})} - \\ - V_{ii} \sum'_k \frac{|V_{ik}|^2}{(E_k^{(0)} - E_l^{(0)})^2} + \dots \quad (3)$$

и для собственных функций

$$\psi_{ik} = \psi_i^{(0)} + \sum'_k \frac{V_{ki}}{E_i^{(0)} - E_k^{(0)}} \psi_k^{(0)} + \sum'_k \left\{ \sum'_l \frac{V_{kl} V_{li}}{(E_i^{(0)} - E_k^{(0)})(E_l^{(0)} - E_i^{(0)})} - \right. \\ \left. - \frac{V_{ii} V_{ki}}{(E_k^{(0)} - E_l^{(0)})^2} \right\} \psi_k^{(0)} - \frac{1}{2} \sum'_k \frac{|V_{ki}|^2}{(E_i^{(0)} - E_k^{(0)})^2} \psi_i^{(0)} + \dots \quad (4)$$

Прерывая ряды (3) и (4), мы ограничиваемся определенным приближением. Рассмотрим суммирование этих рядов в простейшем случае, когда имеются всего два уровня. Суммирование бесконечных

рядов, эквивалентно нахождению точных собственных значений энергий E_i и собственных функций ψ_i . С этой целью разложим искомые функции ψ_i по собственным функциям $\psi_l^{(0)}$ ($l = i, k$) невозмущенного оператора

$$\psi = \sum_l c_l \psi_l^{(0)}. \quad (5)$$

Подставляя это разложение в (1), получим

$$\sum_l c_l (E_l^{(0)} + \hat{V}) \psi_l^{(0)} = \sum_l c_l E \psi_l^{(0)}. \quad (6)$$

В результате умножения на $\psi_i^{(0)*}$ и интегрирования отсюда найдем

$$(E_i^{(0)} + V_{ii} - E) c_i + V_{ik} c_k = 0. \quad (7)$$

Если взамен $\psi_i^{(0)*}$ использовать $\psi_k^{(0)*}$, то придем к равенству

$$V_{ki} c_i + (E_k^{(0)} + V_{kk} - E) c_k = 0. \quad (8)$$

Система однородных линейных уравнений (7, 8) имеет отличные от нуля решения при равенстве нулю детерминанта

$$\begin{vmatrix} E_i^{(0)} + V_{ii} - E & V_{ik} \\ V_{ki} & E_k^{(0)} + V_{kk} - E \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Секулярное уравнение (9) представляет собой уравнение второй степени по E . Его корни являются искомыми собственными значениями энергии в (1)

$$E = \frac{1}{2} \left\{ E_i^{(0)} + V_{ii} + E_k^{(0)} + V_{kk} \pm \left[(E_i^{(0)} + V_{ii} + E_k^{(0)} + V_{kk})^2 - 4(E_i^{(0)} + V_{ii})(E_k^{(0)} + V_{kk}) + 4|V_{ik}|^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (10)$$

Отсюда в более компактном виде

$$E = \frac{1}{2} \left\{ E_i^{(0)} + V_{ii} + E_k^{(0)} + V_{kk} \pm (E_i^{(0)} + V_{ii} - E_k^{(0)} - V_{kk}) \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 + \left| \frac{2|V_{ik}|}{E_i^{(0)} + V_{ii} - E_k^{(0)} - V_{kk}} \right|^2 \right\}^{1/2} \right\}. \quad (11)$$

Выбирая знак в этом выражении, тем самым мы выбираем, к какому из двух уровней относится энергия. При знаке $+$ в (11) мы имеем энергию i -го уровня

$$E_i = \frac{1}{2} \left\{ E_i^{(0)} + V_{ii} + E_k^{(0)} + V_{kk} + (E_i^{(0)} + V_{ii} - E_k^{(0)} - V_{kk}) \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 + \left| \frac{2|V_{ik}|}{E_i^{(0)} + V_{ii} - E_k^{(0)} - V_{kk}} \right|^2 \right\}^{1/2} \right\}. \quad (12)$$

Действительно, положив поправку V равной нулю, получаем $E_i = E_i^{(0)}$, т. е. энергия равна энергии невозмущенной системы. Аналогично, выбирая знак $-$ в (11), получим энергию k -го уровня

$$E_k = \frac{1}{2} \left\{ E_i^{(0)} + V_{ii} + E_k^{(0)} + V_{kk} - (E_i^{(0)} + V_{ii} - E_k^{(0)} - V_{kk}) \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 + \left[\frac{2|V_{ik}|}{E_i^{(0)} + V_{ii} - E_k^{(0)} - V_{kk}} \right]^2 \right\}^{1/2} \right\}. \quad (13)$$

Ряды теории возмущений (3) и (4) применимы при условии

$$|V_{mn}| \ll |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|, \quad (14)$$

т. е. матричные элементы оператора \hat{V} должны быть малы по сравнению с соответствующими разностями невозмущенных уровней энергии. Принимая условие применимости теории возмущений (14), разложим выражение (12) для энергии i -го уровня

$$E_i = E_i^{(0)} + V_{ii} + \frac{|V_{ik}|^2}{E_i^{(0)} - E_k^{(0)}} + \frac{|V_{ik}|^2}{E_i^{(0)} - E_k^{(0)}} \left[-\frac{V_{ii} - V_{kk}}{E_i^{(0)} - E_k^{(0)}} \right] + \\ + \frac{|V_{ik}|^2}{(E_i^{(0)} - E_k^{(0)})^2} [-|V_{ik}|^2 + (V_{kk} - V_{ii})^2] + \dots \quad (15)$$

Сравнивая правую часть (3) в случае двух уровней (i, k) с правой частью (15), легко убедиться, что они совпадают. Во второй строке выражения (15) приведена поправка четвертого приближения к собственному значению энергии. Она не приведена, как видно из (3), в книге (1), но автором вычислена и по теории возмущений. Подставим в систему уравнений (7, 8) для энергии E найденное точное выражение i -го уровня E_i (12).

В результате решения этой однородной системы получим коэффициенты c и следовательно точное решение уравнения (1) для волновой функции i -го уровня:

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[1 + \frac{E_i^{(0)} + V_{ii} - E_k^{(0)} - V_{kk}}{V(E_i^{(0)} + V_{ii} - E_k^{(0)} - V_{kk})^2 + 4|V_{ik}|^2} \right]^{1/2} \psi_i^{(0)} + \right. \\ \left. + \frac{V_{ki}}{|V_{ik}|} \left[1 - \frac{E_i^{(0)} + V_{ii} - E_k^{(0)} - V_{kk}}{V(E_i^{(0)} + V_{ii} - E_k^{(0)} - V_{kk})^2 + 4|V_{ik}|^2} \right]^{1/2} \psi_k^{(0)} \right\}. \quad (16)$$

Разлагая (16) в ряд, в области применимости теории возмущений (14) имеем

$$\psi_i = \psi_i^{(0)} + \frac{V_{ki}}{E_i^{(0)} - E_k^{(0)}} \psi_k^{(0)} + \frac{(V_{kk} - V_{ii})V_{ki}}{(E_i^{(0)} - E_k^{(0)})^2} \psi_k^{(0)} + \\ - \frac{1}{2} \frac{|V_{ki}|}{(E_i^{(0)} - E_k^{(0)})^2} \psi_i^{(0)} + \dots \quad (17)$$

Легко убедиться в том, что правые части (17) и (4) в случае двух уровней совпадают. Следовательно, в выражениях (12) и (16) мы нашли суммы рядов теории возмущений (3) и (4). Поскольку (12) и (16) аналитические функции, то они являются энергией и волновой функцией также при нарушении условия (14).

Поправка \hat{V} к «невозмущенному» оператору большая, в частности, при сильных взаимодействиях, из-за величины константы связи.

Формула (12) дает некоторое представление о характере зависимости E_i от \hat{V} также в случаях, когда число уровней произвольно.

При

$$|V_{mn}| \gg |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|, \quad (18)$$

$$|V_{mm} - V_{nn}| \gg |V_{mn}|, \quad (19)$$

$$E_i = E_i^{(0)} + V_{ii} + \dots \quad (20)$$

Таким образом, энергия с точностью до первого приближения включительно дается формулой (20), как при малых \hat{V} (14), так и при больших, когда соблюдаются условия (18) и (19).

Если имеет место

$$|V_{mn}| \gg |V_{mm} - V_{nn}| \gg |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|, \quad (21)$$

то

$$E_i = \frac{1}{2} [E_i^{(0)} + V_{ii} + E_k^{(0)} + V_{kk} + \text{sign}(V_{ii} - V_{kk}) 2|V_{ik}|] + \dots,$$

где $\text{sign}(V_{ii} - V_{kk})$ — знак действительной величины $V_{ii} - V_{kk}$.

Способ вывода выражений (12) и (16) позволяет понять причину невозможности получения точных формул для сумм рядов в теории возмущений, когда число уровней произвольно. Эта возможность упирается в известную невозможность точного решения алгебраических уравнений произвольной степени.

Ереванский физический институт

Հայաստանի ԳԱԱ թղթակից տեղամ Վ. Հ. ԶԻՐԱՇՅԱՆ

Խոտորումների տեսության շարքերի գումարումը
երկու մակարդակների դեպքում

Կատարվել է էներգիայի սեփական արժեքների և սեփական ֆունկցիաների համար խոտորումների տեսության տված հայտնի անվերջ շարքերի գումարումը, երբ կան միայն երկու մակարդակներ: Ֆունկցիաները բանաձևը որոշված է տալիս V -ից E_i -ի կախման բնույթի մասին նաև այն դեպքում, երբ մակարդակների թիվը կամավոր է: էներգիան, մինչև առաջին մոտավորությունը ներառյալ, տրվում է $E_i = E_i^{(0)} + V_{ii}$ բանաձևով ոչ միայն

$|V_{ik}| \ll |E_i^{(0)} - E_k^{(0)}|$ պայմանի, այն նաև հակադարձ $|V_{ik}| \gg |E_i^{(0)} - E_k^{(0)}|$ պայմանի դեպքում, եթե $|V_{ik}| \ll |V_{ii} - V_{kk}|$: Այս հանգամանքը կարող է օգտակար լինել մասնավորապես ուժեղ փոխազդեցություններ դիտարկելիս:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Л. Д. Лондау, Е. Е. Лифшиц, Квантовая механика, ГИФМЛ, М., 1963.

УДК 595.422:592/599.001.4

Э. С. Арутюнян

Новые виды рода *Hypoaspis* Can., 1884 s. l.
семейства *Laelapidae* Berlese, 1892 (Parasitiformes)

(Представлено академиком АН Армении С. О. Мовсисяном 2^й/XII 1990)

Настоящее сообщение служит продолжением работы по изучению клещей, паразитирующих на жуках коллекции Института зоологии АН РА, и содержит описание новых видов рода *Hypoaspis*, обнаруженных на *Geotrupes spiniger* Marsh. (Scarabaeidae) и на *Megops scabricorne* Scop. (Cerambycidae).

Номенклатура щетинок в тексте дается по Эвансу (1) и Вайнштейну (2), с некоторыми изменениями. Размеры указаны в микронах (мкм). Ширина дорсального щита измерялась на уровне щетинок D_5 .

Hypoaspis evansi Arutunjan sp. nov.

Материал. Голотип ♀, Республика Армения, собран на *Geotrupes spiniger* Marsh., препарат № 46 (коллекция клещей, обнаруженных на жуках). Паратип: тот же препарат (№ 46) 1 ♀. Дата, конкретное место сбора и сборщик жука неизвестны, по-видимому, материал собран в 1928—1930 гг.

Типы хранятся в лаборатории акарологии Института зоологии АН РА.

Самка (рис. 1, 1—4). Дорсальный щит удлинённый, с заметно сетчатой скульптурой. Передняя часть щита не шире задней. На щите 25 пар однородных игольчатых щетинок: спинных (D)—10, медиальных (M)—2, медиально-латеральных (ML)—5, латеральных (L)—8 пар. Длина дорсальных щетинок не превышает 24 мкм. Длина дорсального щита 468, ширина 234. Передний и задний края стернального щита почти прямые: щит без заметной скульптуры, несет 3 пары щетинок (St_{1-3}).

Метастернальные щитки хорошо выраженные. Генитальный щит небольшой, с заметной скульптурой, его задний край слегка выпуклый. Анальный щит обратногрушевидный. Метаподальные щитки мелкие. Перитремальные щиты не развиты, перитремы короткие, свободные, простираются вперед до переднего края III кокс. На лапках второй

пары ног 6 щетинок шиповидные, остальные щетинковидные (рис. 1,3).
Форма спермопринимającego протока изображена на рис. 1,4.

Самец неизвестен.

Вид назван именем известного акаролога Г. О. Эванса.

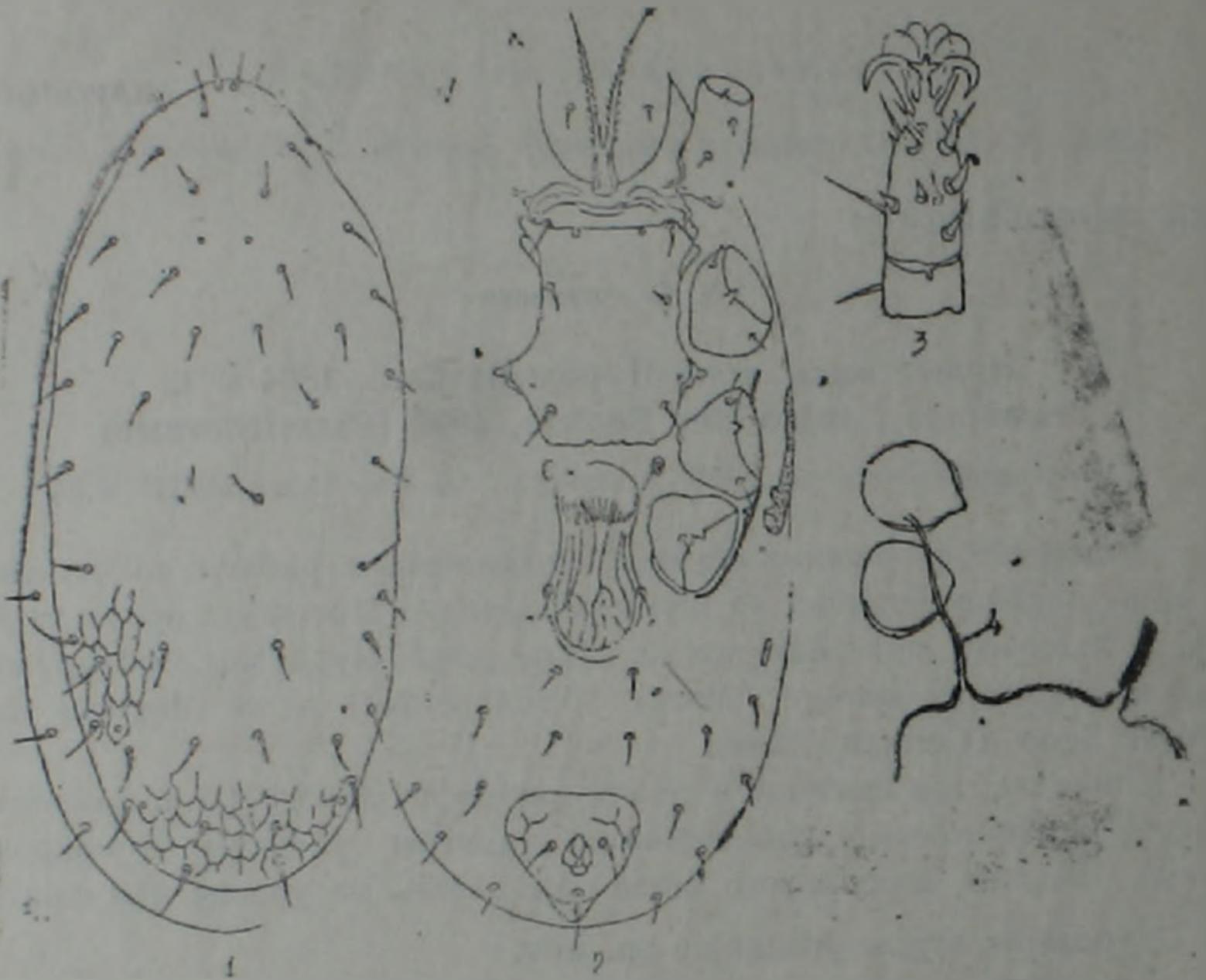


Рис. 1. *Hypoaspis evansi* sp. nov. Самка (1-4): 1 — сверху; 2 — снизу; 3 — лапка II ноги; 4 — спермопринимający проток с семяприемником

По морфологическим признакам ряда структур, а также по количеству щетинок дорсального щита (25 пар) вид можно считать представителем подрода *Coleolaelaps* Berl., 1914 рода *Hypoaspis* Cap., 1884 s. l., который близок к *Hypoaspis (Coleolaelaps) agrestis* (Berlese, 1887), но по строению дорсального щита, по размерам дорсальных щетинок и другим признакам вид резко отличается от *H. (C.) agrestis* и других представителей подрода *Coleolaelaps*. Пока лучше воздержаться от установления нового подрода для нового вида внутри рода *Hypoaspis*.

Hypoaspis krantzi Arutunjan sp. nov.

Материал. Голотип ♀, Республика Армения, собран на *Megoripis scabriscorne* Scop. по сборам Н. Н. Плавильщикова, препарат № 558 (коллекция клещей, обнаруженных на жуках). Дата, конкретное место сбора жука неизвестны, по-видимому, материал собран в 1918—1920 гг.

Тип хранится в лаборатории акарологии Института зоологии АН
РЛ

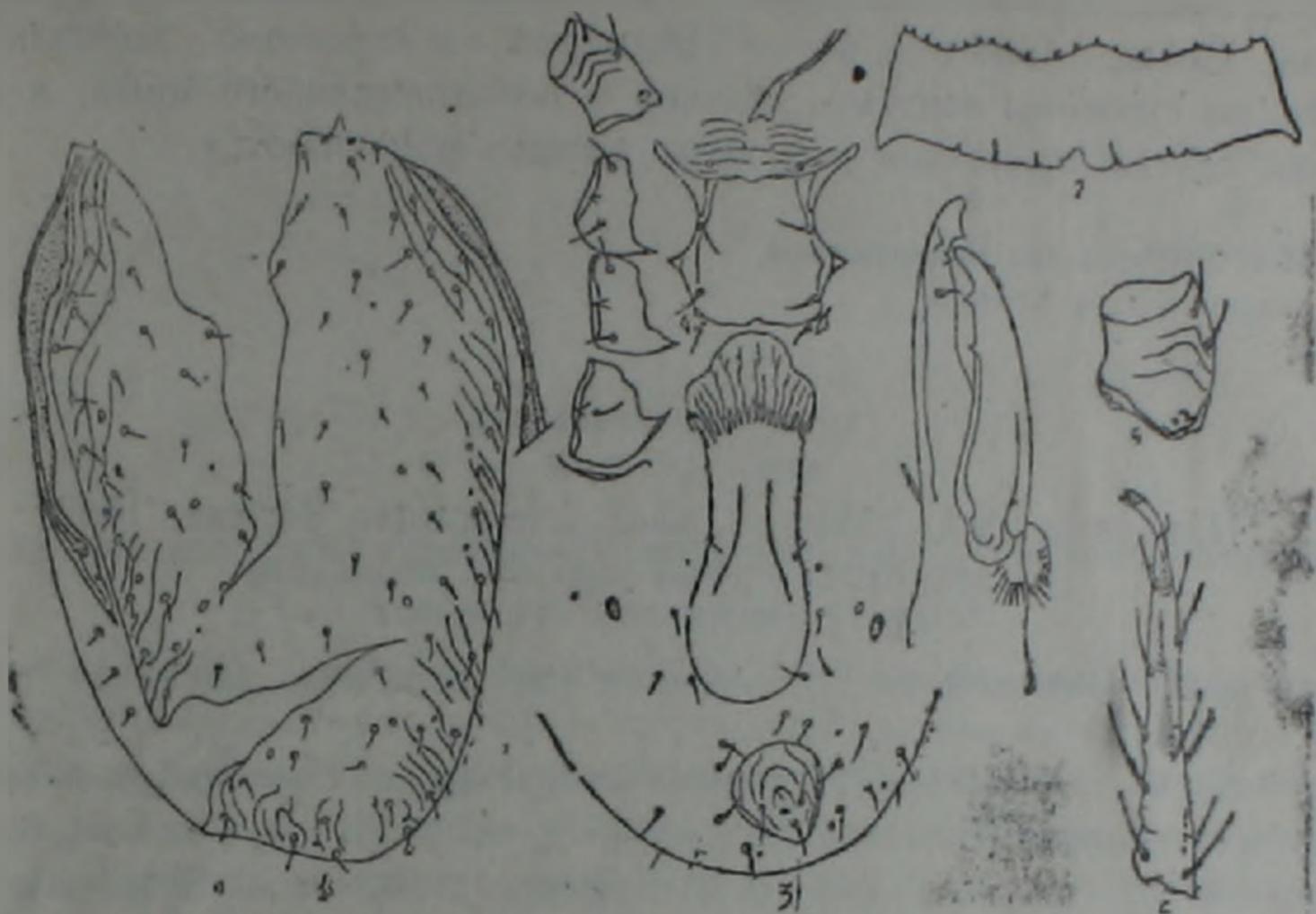


Рис. 2. *Nuroaspis kranzi* sp. nov. Самка (1—6): 1 — сверху; 2 — тектум; 3 — снизу; 4 — хелицера; 5 — кокса I ноги; 6 — лапка IV ноги

Самка (рис. 2, 1—6). Дорсальный щит яйцевидной формы с цельными краями. Края щита снабжены линейнообразным рисунком. На щите 40 пар однородных игольчатых щетинок. На центральной части задней половины щита могут присутствовать непарные, несимметрично расположенные щетинки. Длина дорсальных щетинок не превышает 27 мкм. Длина дорсального щита 560, ширина 150. Тектум простого строения, его передний край с шипами (рис. 2, 2). Стернальный щит без заметной скульптуры, несет 2 пары щетинок (St_2 и St_3) щетинки St_1 расположены на престернальной мембране. Престернальная область с заметной скульптуровкой (рис. 2, 3). Метастернальные щитки свободные, щетинки MST расположены на мембране. Генитальный щит прозрачный, без заметной скульптуры. Анальный щит обратногрушевидный. Метаподальные щитки яйцевидные. Неподвижный палец хелицер, кроме игольчатого придатка, вооружен тремя, а подвижный двумя зубцами (рис. 2, 4). Перитремальные щиты развиты, перитремы длинные, простираются вперед до оснований I кокс. Коксы I ног вентральной стороны с трехлинейным рисунком (рис. 2, 5). На лапках IV ног щетинки игольчатые, без макрохет (рис. 2, 6).

Самец неизвестен.

Вид назван именем известного акаролога Г. Кранца.

По количеству щетинок дорсального щита (40 пар) и ряда признаков вид является представителем подрода *Geolae laps* Trägårdh, 1952 рода *Nuroaspis* Can., 1884 s. l.

По размерам коротких дорсальных щетинок, по расположению стернальных щетинок St_1 и другим признакам вид близок к *Hypoaspis minor* Costa, 1968 (³), но по размерам и строению дорсального щита, по строению тектума, хелицер и перитремального щита, а также по другим признакам эти виды хорошо различаются.

Институт зоологии Национальной
академии наук Армении

Է. ՈՒ ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Hypoaspis Can., 1884 s. l. սեռի *Laelaptidae* Berlese, 1892
(Parasitiformes) ընտանիքի նոր տեսակներ

Հոգաբանության և կարագրության է հայաստանում բզեզների վրա հայտնաբերված *Laelaptidae* ընտանիքի *Hypoaspis* -ին պատկանող գիտություն համար երկու նոր տեսակներ: *Hypoaspis evansi* sp. nov. տեսակը գտնվել է *Geotrupes spiniger* (*Scarabaeidae*) բզեզի վրա, իսկ հաջորդ տեսակը՝ *Hypoaspis krantzi* sp. nov. գտնվել է *Megopis scabricorne* Scop. (*Cerambycidae*) բզեզի վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ G. O. Evans, J. Linn. Soc. London, Zool., v. 43 (291), p. 203—259 (1957).
² Б. А. Вайнштейн, Зоол. журн., т. 52, № 2, p. 274—277 (1973), ³ M. Costa, Israel J. Zool., v. 17 (1), p. 1—30 (1968).

УДК 612.57

К. Р. Арутюнян

Влияние внутрижелудочкового введения SP_{9-11} на температурный гомеостаз организма у крыс*

(Представлено академиком НАН Армении О. Г. Баклаваджяном 3 VIII 1992)

Литературные данные убедительно свидетельствуют об участии нейропептидов в регуляции температуры тела. Нейротензин, бомбезин, бета-эндорфин, холицистокинин, соматостатин, мет-энкефалин и др. при центральном введении в организм животного могут вызывать как гипер-, так и гипотермический эффект (1-6).

Что касается пептида субстанции «Р», то наши представления о его терморегуляторной реакции все еще не полны. Существующие литературные данные показывают, что терморегуляторный эффект субстанции «Р» зависит от дозы и путей введения в организм, от вида животного и ряда других факторов. Установлено, что если введение в спинной мозг субстанции «Р» в дозе 10 мкг не вызывает особых изменений в кишечной температуре крыс, то введение в дозе 100 мкг снижает температуру тела почти на $0,6^\circ$ (7). В наших экспериментах (8) было выявлено, что введение субстанции «Р» в передний гипоталамус кролика вызывает фазовое изменение в температурном гомеостазе мозга: вначале наблюдается гипотермический эффект и температура гипоталамуса снижается в среднем на $0,17^\circ$, а затем наблюдается гипертермический эффект и гипоталамическая температура повышается в среднем на $0,24^\circ$.

В настоящей работе мы попытались выяснить особенности внутрижелудочкового действия нового образца субстанции «Р» SP_{9-11} на температурный гомеостаз организма у крыс в хронических условиях опытов. Для этого методом высокочувствительной термографии производилась одновременная непрерывная регистрация температуры «ядра» организма в области ободочной кишки и бедренных мышц и «оболочки» организма в области хвостовой артерии. Регистрацию температуры исследуемых точек проводили с помощью термопар, изготов-

* SP_{9-11} (Н-глиц-лей-мет WH_2HCl) новый образец субстанции «Р» синтезирован в ИБОХ АН Республики Беларусь и предоставлен нам для экспериментов, за что выражаем нашу глубокую благодарность В. П. Голубовичу и С. В. Егоровой.

ленных из медной и константановой проволок диаметром 0,1 мм на 12-канальном самопишущем потенциометре типа ЭПП-09-МЗ. Последний был подключен к выходу фотоэлектрического усилителя типа Ф-116/2 с чувствительностью 0,013° для температуры органов «ядра» и 0,13° для температуры органов «оболочки».

Для регистрации мышечной температуры термодпары вводили в бедренные мышцы на глубину 1,5—2,0 см, а температуру ободочной кишки регистрировали на глубине 4—5 см. «Рабочие» спай термодпар, измеряющие артериальную температуру, прикрепляли на поверхности хвостовой артерии. С целью внутримозгового введения пептида в латеральный желудочек мозга вводили химиотрод по координатам Н—3,2 мм, L—1,5 мм, AP+1,0 (°). Каждый опыт проводили в двух частях. В первой части опыта в течение 30 мин производили контрольную синхронную регистрацию температуры «ядра» и «оболочки» организма до установления плато, затем двум крысам в латеральный желудочек мозга с помощью специального микрошприца вводили SP₉₋₁₁ в дозе 9,5 мкг на 100 г веса в объеме 0,013 мл на 100 г веса; третья крыса служила контролем и пептид не получала. Во второй части опыта в течение часа продолжалась регистрация динамики температурных изменений «ядра» и «оболочки» организма под действием внутримозгового введения SP₉₋₁₁. Всего на 10 оперированных крысах проведено 22 хронических многочасовых опыта.

Полученными результатами установлено, что введение в латеральный желудочек мозга крыс SP₉₋₁₁ вызывает терморегуляторный ответ. В первые 30 мин наблюдается повышение температуры ободочной кишки в среднем на 0,2° (максимум на 0,74°), затем температура «ядра» частично снижается и в конце опыта составляет 38,42±0,14° (табл. 1).

Таблица 1

Изменение температурных показателей органов «ядра» и «оболочки» организма при внутрижелудочковом введении SP₉₋₁₁

Место определения температуры	Температура		
	до введения пептида	через полчаса после введения пептида	через час после введения пептида
С ободочной кишки	38,33 ± 0,14	38,53 ± 0,15	38,42 ± 0,14
Скелетных мышц	37,88 ± 0,14	37,86 ± 0,16	37,83 ± 0,14
Хвостовой артерии	28,80 ± 0,47	28,45 ± 0,47	28,21 ± 0,49

Что касается температуры скелетных мышц, то она не изменялась и в течение 1,5 ч колебалась в пределах 37,83—37,88°. Температура «оболочки» организма при внутрижелудочковом введении SP₉₋₁₁ снижалась в среднем на 0,59°, а максимум на 4,46°. Данные табл. 2, показывают, что в аналогичных экспериментальных условиях

температура «ядра» и «оболочки» организма у крыс, не получивших пептида, оставалась неизменной и колебалась в пределах нормы.

Анализируя полученные данные, можно заключить, что в норме SP_{9-11} участвует в поддержании температурного гомеостаза организма. Увеличение его концентрации в мозгу крыс вызывает слабое кратковременное повышение температуры «ядра» организма, которая в течение 60 мин не возвращается к исходной. Известно, что введение в организм субстанции «Р» повышает уровень норадреналина и дофамина в гипоталамусе, и его действие на органы-эффекторы, очевидно, передается через альфа- и бета-адренорецепторы симпатической нервной системы (10, 11).

Таблица 2

Температурные показатели органов «ядра» и «оболочки» контрольных крыс в период опыта

Место определения температуры	Время опыта, мин		
	30	60	90
Ободочной кишки	$38,23 \pm 0,19$	$38,20 \pm 0,03$	$38,13 \pm 0,19$
Скелетных мышц	$37,85 \pm 0,82$	$37,96 \pm 0,27$	$37,94 \pm 0,40$
Хвостовой артерии	$30,16 \pm 0,80$	$30,02 \pm 0,82$	$30,15 \pm 0,74$

Исходя из этих данных можно предположить, что повышенный температурный эффект SP_{9-11} связан с активацией симпатической нервной системы, повышением уровня метаболизма и несократительного термогенеза в организме. Такое предположение подтверждается нашими данными о повышении температуры ободочной кишки, являющейся одним из эффекторов несократительного термогенеза, и об отсутствии изменения температуры скелетной мускулатуры как источника сократительного термогенеза. Температурный эффект SP_{9-11} объясняется вазоконстрикцией периферических сосудов, уменьшением теплоотдачи через хвостовую артерию, являющуюся особым теплообменником между организмом крысы и окружающей средой.

Полученные данные позволяют сделать вывод, что увеличение концентрации SP_{9-11} в мозгу крыс активизирует несократительный термогенез, вызывает вазоконстрикцию, уменьшает теплоотдачу и повышает температуру «ядра» организма.

Институт физиологии им. Л. А. Орбели Национальной академии наук Армении

Բ. Ռ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

SP_{9-11} -ի ներփոփոխային ներադրման ազդեցությունը առնետների օրգանիզմի ջերմային հոմեոստազի վրա

Ապացուցված է, որ SP_{9-11} -ը մասնակցում է օրգանիզմի ջերմային հոմեոստազի պահպանմանը նրա քանակի ավելացումը ուղեղային հյուսված-

քում բարձրացնում է աղիքային ջերմությունը միջինը $0,2^{\circ}$, իսկ առավելագույնը՝ $0,74^{\circ}$: Ենթադրվում է, որ SP₉₋₁₁-ի այդպիսի արդյունքը պայմանավորված է օրգանիզմի ոչ կծկողական ջերմարտադրության ակտիվացմամբ և օրգանիզմի ջերմարձակման նվազեցմամբ:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱՆԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Л. Янский, С. Выбирал и др., в сб.: Нейропептиды и терморегуляция. Минск, с. 9—31 (1990). ² J. M. Lipton, J. R. Glin, Peptides, v. 1 p. 15 (1980). ³ А. А. Романовский, Изв. АН СССР. Сер. биол., № 2, с. 266 (1988). ⁴ Ф. И. Висмонт, в сб.: Нейропептиды и терморегуляция, Минск, с. 50—65 (1990). ⁵ П. П. Мурзёнок, Взаимодействие системы терморегуляции и иммунной системы при гипертермии, вызванной пирогенами. Автореф. докт. дисс., Минск, 40 с. (1991). ⁶ Р. А. Арутюнян, К. Р. Арутюнян и др., ДАН Армении, т. 93, № 3, с. 134—138 (1992). ⁷ U. Brown, J. Rivier, Science, v. 196, n. 4.93, p. 998—1000 (1977). ⁸ Р. А. Арутюнян, Л. А. Саакова и др., в сб.: Симпозиум физиологии пептидов, Л., с. 11—12, (1988). ⁹ Я. Буреш, М. Петрель и др., Электрофизиологические методы исследования, ИЛ., М., (1962). ¹⁰ Е. А. Юмашов, Журн. высшей нервной деятельности, т. 35, № 3, с. 570—574 (1985). ¹¹ К. Р. Арутюнян, Л. А. Саакова, в сб.: Молекулярные и клеточные основы клеточно-основного температурного гомеостаза, Сыктывкар, с. 7 (1991).

ФИЗИОЛОГИЯ

УДК 611.576

И. Б. Меликсетян, Дж. А. Мартиросян, А. М. Чилингарян

О реакционной способности ортофосфатов в различных структурах
мозга при разных сроках фиксации

(Представлено академиком НАН Армении В. В. Фанарджяном 15/IV 1992)

В предыдущих наших исследованиях (¹⁻³) удалось показать, что на срезах, полученных из фиксированного мозга, применяя закономерность концентрационного взаимоотношения (^{4,5}), клеточные ортофосфаты можно выявить не только в ядрах глиальных клеток и на стенках сосудов, но и в перикарионах и отростках нервных клеток.

Было также показано значительное отличие в реакционной способности нейронов различных отделов мозга. Установленные нами отдельные факты указывают, что реакционная способность ортофосфатов и сохранность их в клеточных структурах во многом зависит от условий и способов обработки материала. Поэтому в настоящем сообщении предпринята попытка выяснить влияние различных сроков фиксации мозга в формалине, который применялся в качестве основной фиксирующей смеси при выявлении клеточных ортофосфатов.

Объектом исследования служили головной и спинной мозг 12 половозрелых кошек. После легкого нембуталового наркоза животных декапитировали, извлекали головной и спинной мозг, которые разрезали острым лезвием на кусочки толщиной 3—5 мм и, согласно требованиям дальнейшей обработки, помещали в соответствующие фиксирующие смеси. Исследовался мозг, фиксированный в 5%-ном растворе нейтрального формалина после 1, 2, 5, 10, 30-дневной, 2—2,5-месячной фиксации. Из кусочков мозга готовили замороженные срезы, толщиной 50—60 мкм, которые после тщательной промывки в дистиллированной воде помещали в соответствующие инкубационные смеси.

Выявление ортофосфатов в нервных структурах мозга проводили по схеме А. М. Чилингаряна (¹). В наших исследованиях применялись умеренные концентрации свинца, т. е. 0,01 М (0,38%) раствор уксуснокислого свинца, приготовленный на освобожденной от CO₂ дистиллированной воде, к которому добавлялся 1 М ацетатный буфер при pH 5.6. В инкубационных смесях количество свинца оставалось неизменным, менялось только количество буфера, т. е. к 100 мл ра-

створа уксуснокислого свинца добавлялось разное количество буфера от 2 до 50 мл с интервалом 3—5 мл. Срезы в этих смесях инкубировали от 3 до 15 дней при 37°С, далее промывали в дистиллированной воде и проявляли в 0,5—1%-ном растворе сернистого натрия, повторно промывали и заключали в глицерин—желатин.

Проведенные исследования показали, что после фиксации материала 5%-ным раствором нейтрального формалина в течение 24—48 ч на срезах, инкубированных в смеси с 5 мл буфера при рН 5,6, преципитация продукта реакции происходит на стенках капилляров и сосудов. С 10—15 мл буфера осадок образуется в ядрах глиальных клеток. С 20—25 мл буфера в смеси ядерная реакция ослабевает и начинают реагировать осевые цилиндры нервных волокон. Очень часто с этими количествами буфера, в местах, где отсутствует реакция ядер глиальных клеток, образование осадка наблюдается в перикарионах единичных нервных клеток. Избирательное выявление нервных клеток в основном происходит с 35—40 мл буфера в смеси; они выявляются за счет черного мелкозернистого осадка, откладывающегося в перикарионах и отростках.

В коре больших полушарий осадок в основном образуется в перикарионах и коротких отростках мелких пирамидных клеток и мелких звездчатых клеток молекулярного и наружного зернистого слоя. На препаратах мозжечка обнаруживаются тела клеток Пуркинье с коротким основным дендритом и единичные интенсивно окрашенные клетки Гольджи. В белом веществе четко выступают нейроны центральных ядер. В среднем мозге равномерной реакцией отличаются нейроны ядер глазодвигательного, блокового нервов и красного ядра. В изученных нами отделах постоянной и четкой реакцией отличаются нейроны различных ядер варолиевого моста и продолговатого мозга. Наиболее интенсивно окрашиваются нейроны ретикулярной формации, отростки которых прослеживаются на довольно длинном от тела расстоянии. Сходная реакция наблюдается также в нейронах ядер лицевого, подъязычного и блуждающего нервов, но отростки их окрашиваются на более коротком от тела расстоянии. В спинном мозге постоянной и равномерной реакцией отличаются мотонейроны.

При дальнейшем повышении количества буфера реакция нервных клеток ослабевает и с 50 мл буфера в смеси структурное окрашивание не происходит.

Относительно сходные результаты были получены после 5—10-дневной фиксации мозга. При рН 5,6 с малыми количествами буфера (2—5 мл), в отличие от 1—2-дневной фиксации, реакция сосудов резко ослабевает, а местами полностью отсутствует. С этими количествами буфера образование осадка наблюдается в ядрах глиальных клеток. С 10—15 мл буфера в смеси начинают выявляться нервные волокна, которые продолжают четко реагировать с 35 мл буфера. С этими количествами буфера начинают реагировать и нервные клетки. В коре больших полушарий выявляются нейроны верхних слоев, единичные пирамидные клетки с короткими отростками и

многочисленные вершечные дендриты крупных пирамидных клеток, многие из которых покрыты шипиками (рис. 1). В мозжечке реагируют тела и короткие отростки клеток Пуркинье, местами заметны островки дендритного дерева. В белом веществе мозжечка окрашиваются только нервные волокна (рис. 2). Коровые нейроны и клетки Пуркинье окрашиваются менее интенсивно, чем при 24—48-часовой фиксации. Умеренно выявляются нейроны ствола мозга, однако реакция нервных волокон не исчезает, причем их количество неоднородно в различных участках (рис. 3). С увеличением количества буфера до 40 мл реакция нервных клеток и нервных волокон ослабевает и с 45 мл буфера в смеси образование осадка в нервных структурах не происходит.

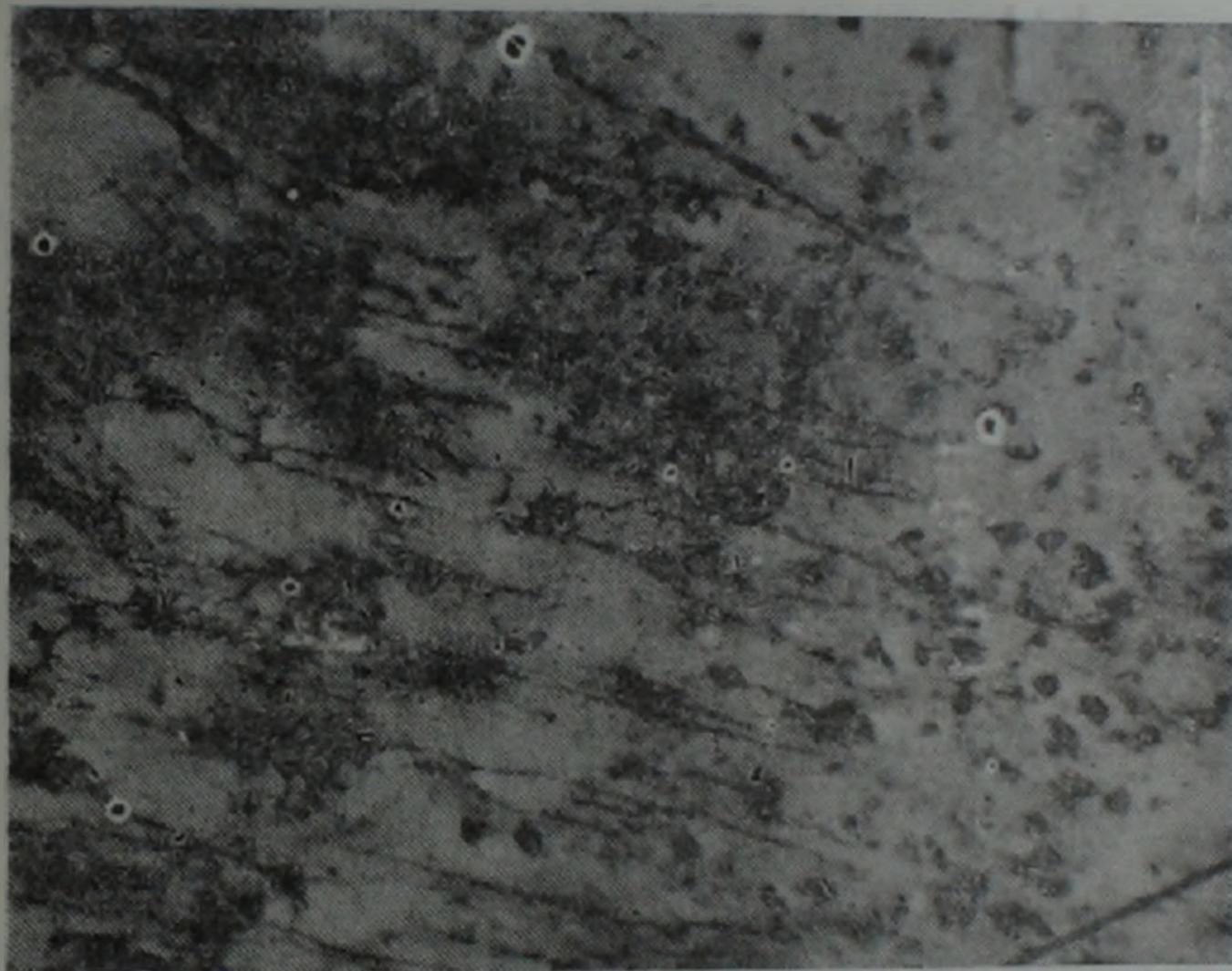


Рис 1. Кора больших полушарий головного мозга кошки. Показана реакция отдельных пирамидных клеток с вершечными дендритами, покрытыми шипиками, выявление ортофосфатов, 10-дневная формалиновая фиксация; ок. 3X, об. 8X.

После 30-дневной фиксации при рН 5,6 с малыми количествами буфера в смеси сосудистая реакция полностью исчезает, а образование осадка наблюдается только в ядрах глиальных клеток, интенсивность которых усиливается с 10 мл буфера. С 15 мл буфера в смеси начинают реагировать осевые цилиндры нервных волокон, которые равномерно и интенсивно окрашиваются с 20—25 мл буфера. Однако с дальнейшим повышением количества буфера их реакция становится неравномерной и с 30 мл буфера в смеси нервные волокна выявляются местами. С этими количествами буфера очень часто на препаратах видны контуры перикарионов нервных клеток. В коре больших полушарий четко выступают вершечные дендриты

крупных пирамидных клеток. С 40 мл буфера в смеси образование осадка в структурах не происходит.

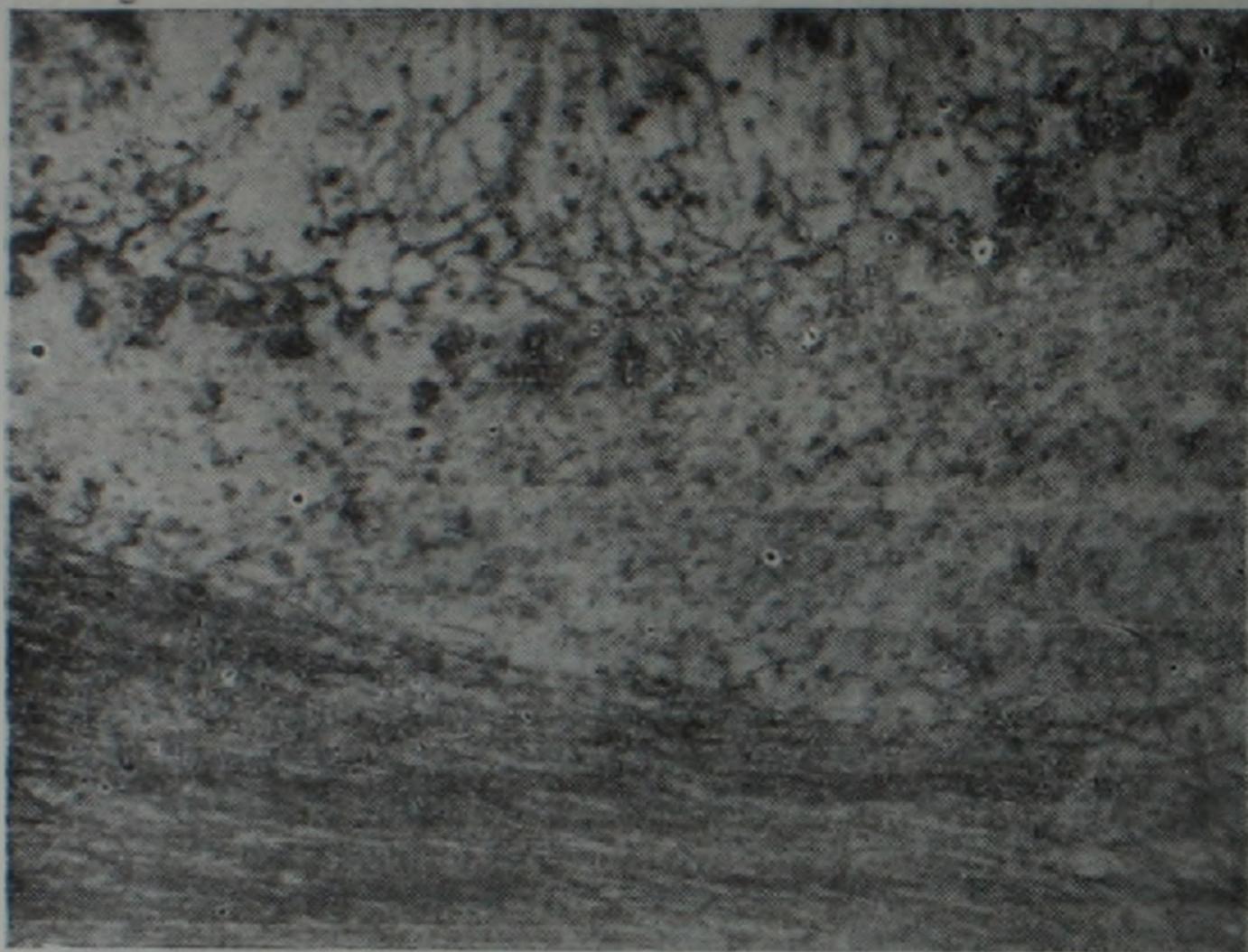


Рис. 2. Мозжечок кошки. Показана реакция клеток Пуркинью и осевых цилиндров нервных волокон. Выявление ортофосфатов, 10-дневная формалиновая фиксация, ок. 8х, об. 8х

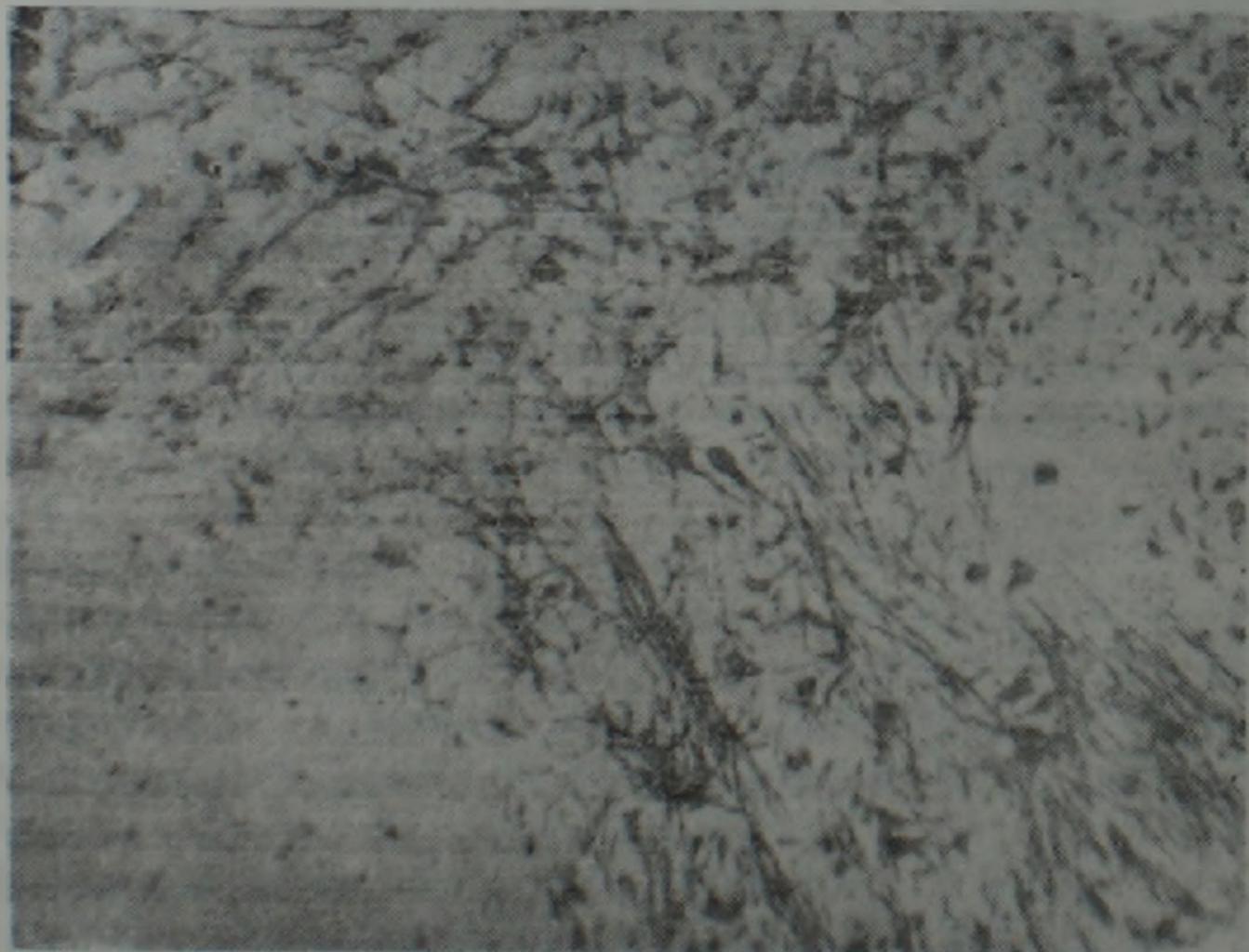


Рис. 3. Варолиев мост кошки. Видны многоугольные клетки ядра Дейтерса и пучки нервных волокон. Выявление ортофосфатов, 10-дневная формалиновая фиксация; ок. 8х, об. 8х

Различные отделы мозга исследовались также в количественном буферном ряду после 2—2,5-месячной фиксации. Полученные данные показывают, что при рН 5,6 с малыми количествами буфера происходит неравномерное окрашивание осевых цилиндров нервных волокон. Реакция последних становится более равномерной с 20 мл буфера в смеси, однако интенсивность окрашивания не усиливается. С 30 мл буфера в смеси реакция осевых цилиндров нервных волокон исчезает. При подобной фиксации мозга реакция нервных клеток во всех отделах отсутствует.

При анализе полученных данных нетрудно заметить, что реакционноспособность клеточных ортофосфатов существенным образом зависит от сроков фиксации материала. Длительность фиксации по-разному меняет реакционноспособность ортофосфатов в различных структурах. Преципитация ортофосфатов на стенках сосудов и в нервных клетках в основном происходит при 24—48-часовой фиксации и резко ухудшается или исчезает при более длительных сроках фиксации. Наиболее устойчивой реакцией отличаются осевые цилиндры нервных волокон, и при длительных сроках фиксации на срезах реагируют только осевые цилиндры нервных волокон, в то время как в других структурах (сосуды, ядра глиальных клеток, нервные клетки) образование осадка не наблюдается.

Таким образом, полученные данные показывают, что при гистохимическом изучении клеточных ортофосфатов выявление последних зависит не только от их реакционноспособности, но и от особенностей структур, на которых они осаждаются.

Институт физиологии им. Л. А. Орбели
Национальной академии наук Армении

Ի. Բ. ՄԵԼԻՔՍԵՏՅԱՆ, Զ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, Հ. Մ. ՉԻԼԻՆԳԱՐՅԱՆ

Ֆիբրոպրոպեոլիտի տարրերի ժամկետներում ուղեղի տարրեր կառուցվածքներում
օրթոֆոսֆատների ռեակցիոնունակության մասին

Կատվի դիսուլֆիդի և ողնուղեղի տարրերի հատվածների վրա կատարված
փորձի արդյունքները ցույց տվեցին, որ բջջային օրթոֆոսֆատների ռեակ-
ցիոնունակությունը կապված է ուղեղի ֆիբրոպրոպեոլիտի հետ:

Պարզվել է, որ օրթոֆոսֆատների նստեցումը անոթի պատում և ներ-
վային բջիջներում տեղի է ունենում կարճատև ֆիբրոպրոպեոլիտի հետո: Երկա-
րատև ֆիբրոպրոպեոլիտի պայմաններում, ընդհակառակը, աստիճանաբար ուժե-
ղանում է ներվաթելերի ռեակցիան և նկատելի վատանում և նույնիսկ վե-
րանում ներվային բջիջների և անոթային ռեակցիան:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Կ Ր Շ Չ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

1 А. М. Чилингарян, Дж. А. Мартиросян, И. Б. Меликсетян, II Закавказская конференция морфологов, 1985. 2 А. М. Чилингарян, Дж. А. Мартиросян, И. Б. Меликсетян, ДАН АрмССР, т. 85, № 2 (1987). 3 А. М. Чилингарян, Дж. А. Мартиросян, И. Б. Меликсетян, ДАН АрмССР, т. 86, № 5 (1988). 4 А. М. Чилингарян, ДАН АрмССР, т. 40, № 2 (1965). 5 А. М. Чилингарян, Микроскопическое изучение кровеносных сосудов и нервной ткани, основанное на применении соединений свинца. Докт. дисс., Л., 1968.