

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

Том 94 № 1

1993

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, անհ. դիմ. բնկե-
ծու (պատ. Բաղնաշատ), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ,
Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Բ. ՐԱ-
ԲԱՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Ա.
Հ. ԴԱՐԻՆԵԼՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակա-
դեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, Հայաստանի
ԳԱ պրոֆ. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԱՐՉՈՒՄ-
ՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ,
Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. Խրմ-
բագրի անդամ), Վ. Գ. ՄԽԻՏԱՐՅԱՆ,
Հայաստանի ԳԱ պրոֆ. անդամ, Գ. Ս. ՍԱ-
ՀԱԿՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմի-
կոս, Դ. Մ. ՍԵՂՈՒՆՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ
ակադեմիկոս (պատ. Խմբագիր), Մ. Լ. ՏՈՒՐ-
ՄԻՐԱՅԵԼՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադե-
միկոս, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՁՅԱՆ, Հայաստանի
ԳԱ ակադեմիկոս:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.
АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв.
секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик
АН Армении, А. Т. БАБАЯН, академик
АН Армении, А. А. ГАБРИЕЛЯН, ака-
демик АН Армении, В. О. КАЗАРЯН,
академик АН Армении (зам. отв. редак-
тора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН
Армении, Г. С. СААКЯН, академик АН
Армении, Д. М. СЕДРАКЯН, ака-
демик АН Армении (отв. редактор),
А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН Армении,
М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, академик АН
Армении, В. В. ФАНАРДЖЯН, ака-
демик АН Армении.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ

ЕРЕВАН

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Վ. Վ. Ոսեանյան, Ռ. Խալիլ — Որոշ երկչափանի նորմավորված տարածությունների միջև Բանախ-Մազուրի հեռավորությունը 3

ՀԱՇՎՈՂԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Հ. Բ. Ներսիսյան, Ս. Ա. Միրունյան — Մասնակի տյուպիցյան կորիզով բազմաչափ ինտեգրալ հավասարումների լուծման արագ ալգորիթմ 11

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Մ. Ս. Մկրտչյան, Ս. Մ. Մխիթարյան — Առաձգականության տեսության պարբերական կոնտակտային և խառը խնդիրների ինտեգրալ հավասարման շրջման բանաձևի մասին 17

Ն. Ս. Մելիումյան — Ծգր դուրս և կող ուղղաձիգ ճաթով առաձգական կիսահարթության երկու կոշտ դրոշմներով հակահարթ ճնշման մասին 24

ՖԻԶԻԿԱ

Ֆ. Վ. Գասպարյան, Գ. Հ. Աղասարյան — Ներքին ուժեղացման նոր մեխանիզմ կոմպենսացված կիսահաղորդչից պատրաստված ինժեկցիոն ֆոտոդիոդներում 29

ԱՍՏՂԱՖԻԶԻԿԱ

Ա. Դ. Սեդրակյան, Դ. Մ. Սեդրակյան — Պտտվող նեյտրոնային աստղերի դինամիկայի հավասարումները մորիկների ծոման հաշվառմամբ 37

ԳԵՈՄԵՏՐԻԿԱ

Վ. Բ. Գամոյան, Հ. Վ. Գևորգյան — Շերտաձև հանքամարմնի բնական էլեկտրական դաշտը 43

ՄՈԼԵԿՈՒԼԱՅԻՆ ԿՆՆՍԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Մ. Սեդրակյան, Գ. Ա. Մնացականյան, Ա. Ս. Կալաչյան, Ժ. Ա. Կժոյան, Ա. Ա. Հաբուքյունյան, Կ. Գ. Ղաբադյոզյան — R-պլազմիդի ազդեցությունը *Salmonella derby* բջիջների սպիտակուցային սպեկտրի վրա 49

ԾԻՋԱՏԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Մ. Յու. Քալաշյան, Մ. Գ. Վոլկովիչ — Ոսկեբզեզների *Sphenoptera Solier* (Coleoptera, Buprestidae) սեռի նոր տեսակ Հարավային Ղազախստանից 54

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Վ. Բ. Ֆանաբչյան, Ե. Վ. Պապոյան, Ո. Վ. Գևորգյան, Վ. Հ. Պողոսյան — Ներքին ձիթապտղակորիզի փոխհատուցող դերը առնետների մոտ ինստրուկցիոնալ ռեֆլեքսների մշակման ժամանակ տեսաթմբի փորակողմնային կորիզի վնասումից հետո 59

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- В. В. Восканян, Р. Халди*—Расстояние Банаха—Мазура между некоторыми двумерными нормированными пространствами 3

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

- А. Б. Нерсисян, С. А. Цирунян*—Быстрый алгоритм решения многомерного уравнения с частично теплицевым ядром 11

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- М. С. Мкртчян, С. М. Мхитарян*—О формуле обращения интегрального уравнения периодических контактных и смешанных задач теории упругости 17
- Н. С. Мелкумян*—Об антиплоском вдавливании двух жестких штампов в упругую полуплоскость с вертикальной выходящей на границу трещиной 24

ФИЗИКА

- Ф. В. Гаспарян, Г. Г. Агасарян*—Новый механизм внутреннего усиления в инжекционных фотодиодах из компенсированного полупроводника 29

АСТРОФИЗИКА

- А. Д. Седракян, Д. М. Седракян*—Уравнение динамики вращающейся нейтронной звезды с учетом изгиба вихрей 37

ГЕОФИЗИКА

- В. Б. Гамоян, А. В. Геворкян*—Естественное электрическое поле пластобразного рудного тела 37

МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ

- А. М. Седракян, Г. А. Мнацаканян, А. С. Калачян, Ж. А. Кцоян, А. А. Арутюнян, К. Г. Карагезян*—Влияние R-плазмиды на белковых спектр клеток *Salmonella derby* 49

ЭНТОМОЛОГИЯ

- Ю. М. Калашян, М. Г. Волкович*—Новый вид элатки рода *Sphenoptera* Solier (Coleoptera, Buprestidae) из Южного Казахстана 54

ФИЗИОЛОГИЯ

- В. В. Фанарджян, Е. В. Палоян, О. В. Геворкян, В. И. Погосян*—Компенсаторная роль нижней оливы при выработке инструментальных рефлексов у крыс после разрушения вентролатерального ядра таламуса 59

C O N T E N T S

MATHEMATICS

- V. V. Voskanian, R. Khaldi* — The Banach-Mazur distance between some two-dimensional normed spaces 3

COMPUTER MATHEMATICS

- H. B. Nersessian, S. A. Tstrunlan* — Fast solution algorithm for integral equations with partly Toeplitz kernels 11

THEORY OF ELASTICITY

- M. S. Mkrtchian, S. M. Mkhitarian* — On formula of treatment of integral equation of periodical contact and mixed problems of theory of elasticity 17
- N. S. Melkounian* — About anti-flat pressing of two stiff punches into an elastic half-plane with a vertical, coming to boundary 24

PHYSICS

- F. V. Gasparian, G. H. Aghasarian* — A new internal amplification mechanism in the injection photodiodes made of compensated semiconductor 29

ASTROPHYSICS

- G. D. Sedrakian, D. M. Sedrakian* — Dynamic equation of rotation of Neutron stars with vertex 37

GEOPHYSICS

- V. B. Gamoyan, A. V. Gevorgian* — Natural electric field of stratum ore body 43

MOLECULAR BIOLOGY

- A. M. Sedrakian, G. A. Mnatsakanian, H. S. Kalachian, G. A. Kizoyan, A. A. Arutunian* — The influence of R-plasmid on the protein of Salmonella derby 49

ENTHOMOLOGY

- M. Yu. Kalashian, M. G. Volkovitch* — A new species of the jewel-beetles of the genus Sphenoptera Solier (Coleoptera, Buprestidae) from South Kazakhstan 54

PHYSIOLOGY

- V. V. Fanardjian, E. V. Papoyan, O. V. Gevorgian, V. I. Pogossian* — The compensatory role of the inferior olive in instrumental conditioned rats after destruction of the ventrolateral thalamic nucleus 59

Сдано в набор 08.12.1992 г. Подписано к печати 31.03.1993 г.

Формат 70 × 108¹/₁₀. Бумага № 1, сыктывкарская. Высокая печать. Печ. лист 4.25.

Усл. печ. л. 5.95. Усл. кр. отт. 5.95. Учет. изд. л. 4.31. Тираж 200. Заказ № 155.

Издат. № 8022. Цена 60 руб.

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г, III эт., к. 13, т. 27-36-95.

Издательство Академии наук Армении, 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук Армении,

375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24.

УДК 517.98

В. В. Восканян, Р. Халди

Расстояние Банаха—Мазура между некоторыми двумерными нормированными пространствами

(Представлено чл.-корр. АН Армении А. А. Талаляном 1 VII 1991)

В настоящей статье, опираясь на общую формулу расстояния между полиэдральными пространствами, полученную в работе (1) одним из авторов, вычисляется расстояние между l_1^2 и произвольным шестиугольным пространством Y_6 .

Напомним некоторые определения.

Определение 1. Расстоянием Банаха—Мазура между изоморфными банаховыми пространствами X и Y называется число $d(X, Y) = \inf \|T\| \|T^{-1}\|$, где $\inf$ берется по всем изоморфизмам $T: X \rightarrow Y$.

Определение 2. Конечномерное вещественное пространство называется полиэдральным, если его единичный шар $S(X) = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ является многогранником, т. е. выпуклой оболочкой конечного множества точек.

Впередь мы будем отождествлять всякое n -мерное полиэдральное пространство X как линейное, с арифметическим пространством R^n . Тогда единичный шар $S(X)$ представит собой выпуклый симметричный относительно нуля n -мерный многогранник со множеством вершин, т. е. крайних точек, вида $Ext S(X) = \{\pm e_1, \dots, \pm e_r\}$, где $r \geq n$. Таким образом, каждое n -мерное полиэдральное пространство можно задавать с помощью $r \times n$ ($r \geq n$) матрицы A крайних точек, т. е. матрицы, у которой i -я строка составлена из координат вектора e_i , $i = 1, \dots, r$.

В статье (1) расстояние Банаха—Мазура между полиэдральными пространствами выписывается в виде экстремальной задачи, задаваемой лишь с помощью соответствующих матриц крайних точек. Имеет место следующее

Утверждение. Пусть X и Y полиэдральные пространства размерности n , $Ext S(X) = \{\pm e_1, \dots, \pm e_r\}$, $Ext S(Y) = \{\pm k_1, \dots, \pm k_s\}$, где $e_i = (\alpha_{ij})_{j=1}^n$, $i = 1, \dots, r$, $k_i = (\beta_{ij})_{j=1}^n$, $i = 1, \dots, s$. Обозначим соответствующие матрицы $A = \{\alpha_{ij}\}_{i=1, \dots, r}^{j=1, \dots, n}$, $B = \{\beta_{ij}\}_{i=1, \dots, s}^{j=1, \dots, n}$.

Тогда

$$d(X, Y) = \inf_{\Delta} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \min_{\tilde{B}} \|A_i \Delta \tilde{B}^{-1}\|_1 \right) \left(\max_{1 \leq i \leq n} \min_{\tilde{A}} \|B_i \Delta^{-1} \tilde{A}^{-1}\|_1 \right), \quad (1)$$

где $\tilde{A}$ (соответственно $\tilde{B}$) пробегает множество обратимых $n \times n$ подматриц матрицы A (B). а A_i (B_i) обозначает i -ую вектор-строку матрицы A (B). Δ пробегает множество обратимых $n \times n$ матриц, $\|\cdot\|_1$ обозначает l_1 норму n -мерного вектора.

Как указывалось, целью настоящей статьи является вычисление расстояния $d(X, Y)$ для случая, когда $X = l_1^2$, т. е. двумерный аналог вещественного пространства l_1 , а $Y = Y_6$ — шестиугольное пространство, т. е. такое двумерное пространство, у которого единичный шар $S(Y)$ — шестиугольник (аналогично, l_1^2 можно называть четырехугольным пространством).

Интерес к этому наиболее простому, но не тривиальному случаю стимулирован двумя соображениями. Во-первых, аналитическая техника решений получаемой цепочки экстремальных задач может быть использована и для более общих случаев. (Поэтому мы и не касаемся возможного в двумерном случае чисто геометрического доказательства, которое, впрочем, вряд ли короче). Во-вторых, из получаемой формулы расстояния (13) следует один результат Асплунда (см. (2)):

$$d(l_1^2, G_6) = \frac{3}{2}, \quad (2)$$

если $S(G_6) = P_6$ — правильный шестиугольник.

В. Стромквист в работе (3) использовал этот результат для нахождения двумерного вещественного компакта Минковского:

$$\text{diam } \mathfrak{M}_2 = \sup \{d(X, Y) : \dim X = \dim Y = 2\} = \frac{3}{2}, \quad (3)$$

причем верхняя грань в (3) достигается лишь (с точностью до изометрических образов) для указанной в (2) пары.

Постановка экстремальной задачи. Единичный шар $S(l_1^2)$ есть квадрат с вершинами $\pm e_1$ и $\pm e_2$, где $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$. Таким образом, в качестве матрицы крайних точек шара $S(l_1^2)$ можно взять единичную матрицу, т. е. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Пространство Y_6 определено с точностью до изометрии, поэтому можно считать, что шестиугольник $S(Y_6)$ имеет вершинами векторы $\pm k_l$, $l = 1, 2, 3$, где $k_1 = (1, 0)$, $k_2 = (0, 1)$, $k_3 = (\beta_1, \beta_2)$, причем

$$\beta_1, \beta_2 > 0, \quad \beta_1 + \beta_2 > 1, \quad |\beta_1 - \beta_2| < 1. \quad (4)$$

Неравенства (4) очевидны из геометрических соображений, они получаются также из следующей несложной, но полезной теоремы.

характеризующей матрицу крайних точек произвольного полиэдрального пространства.

Теорема 1. Для того, чтобы матрица $B = (B_1, \dots, B_s)^T$ размерности $s \times n$ и ранга n ($s \geq n$, B_i — i -я строка), была матрицей крайних точек для некоторого n -мерного полиэдрального пространства Y , необходимо и достаточно, чтобы для любой обратимой $n \times n$ подматрицы $\bar{B} = (B_{i_1}, \dots, B_{i_n})^T$ матрицы B и для любого $i = 1, \dots, s$, $i \neq i_j$, $j = 1, \dots, n$,

$$\|B_i \bar{B}^{-1}\|_1 > 1. \quad (5)$$

Действительно, матрица B будет матрицей крайних точек для некоторого пространства Y в том и только том случае, если любая ее вектор-строка B_i будет вершиной многогранника $P = S(Y) = \text{co}\{\pm B_1, \dots, \pm B_s\}$. Поэтому каждый вектор B_i не является абсолютно выпуклой комбинацией остальных B_j , $j \neq i$. Значит, если B_i есть вершина, а $B_{i_1}, \dots, B_{i_n}$ — произвольная линейно независимая система строк-векторов, не содержащая B_i (соответствующую подматрицу обозначим через $\bar{B}$), то в представлении

$$B_i = \sum_{j=1}^n \tau_j B_{i_j} \quad \text{обязательно} \quad \sum_{j=1}^n |\tau_j| > 1. \quad (6)$$

Обозначив $d = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, имеем $B_i = d \bar{B}$, откуда $d = B_i \bar{B}^{-1}$, и из (6) следует (5).

Обратно, если B_i не есть вершина многогранника P , то в силу $B_i \in P$ найдется число $\delta \geq 1$ такое, что вектор δB_i лежит на $(n-1)$ -мерной грани P' многогранника P . По теореме Каратеодори найдутся n линейно независимых вершин грани P' , а значит и вершин многогранника P ($+$ или $-$) $B_{i_1}, \dots, B_{i_n}$ таких, что $\delta B_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j B_{i_j}$, где

$\sum_{j=1}^n |\lambda_j| = 1$. Опять же обозначив $\bar{B} = (B_{i_1}, \dots, B_{i_n})^T$, аналогичными

рассуждениями получим $\|B_i \bar{B}^{-1}\|_1 \leq 1$. Теорема доказана.

Итак, матрица крайних точек шестиугольника $S(Y_0)$ имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \beta_1, \beta_2 \text{ удовлетворяют условиям (4).}$$

Формула для расстояния (1), которую мы хотим вычислить, приобретает следующий вид:

$$d(l_1^2, Y_0) = \inf_{\Delta} \{ (\max_{1 \leq i \leq 2} \min_{1 \leq j \leq 3} \|A_i \Delta \bar{B}^j\|_1) (\max_{1 \leq k \leq 3} \|B_k \Delta^{-1}\|_1) \}. \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 = B_1 = (1, 0), \quad A_2 = B_2 = (0, 1), \quad B_3 = (\beta_1, \beta_2) \\ \tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Нижняя грань в (7) берется по всем матрицам $\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_3 & \delta_4 \end{pmatrix}$ с детерминантом $|\Delta| = \delta_1 \delta_4 - \delta_2 \delta_3 \neq 0$.

Редукция задачи к частным случаям. Во-первых, отметим, что можно рассматривать не все множество D обратимых операторов (матриц) Δ . Для этого рассмотрим всевозможные (линейные) изометрии $J: l_1^2 \rightarrow l_1^2$. Легко видеть, что каждая такая изометрия имеет матричное представление вида $\begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}$ либо вида $\begin{pmatrix} 0 & \epsilon_1 \\ \epsilon_2 & 0 \end{pmatrix}$, где $\epsilon_i = 1$ или -1 , $i = 1, 2$. Отсюда следует, что умножение справа изометрии J на оператор T приводит к умножению вектора-столбца матрицы T на -1 либо к перестановке столбцов этой матрицы. Так как $\|T\| \|T^{-1}\| = \|TJ\| \|(TJ)^{-1}\|$, то это нам позволит рассматривать лишь обратимые матрицы $\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_3 & \delta_4 \end{pmatrix}$, $\Delta^T = T$, принадлежащие одному из следующих трех множеств:

$$D_1 = \{\Delta \in D: \delta_1 \geq 0, \delta_2 \leq 0, \delta_3 \geq 0, \delta_4 \leq 0\},$$

$$D_2 = \{\Delta \in D: \delta_1 \geq 0, \delta_2 \geq 0, \delta_3 \geq 0, \delta_4 \geq 0\},$$

$$D_3 = \{\Delta \in D: \delta_1 \geq 0, \delta_2 \leq 0, \delta_3 \geq 0, \delta_4 \geq 0\}.$$

Введем следующие обозначения:

$$g(\Delta) = g(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) = \frac{1}{|\Delta|} \max_{1 \leq j \leq 3} (\min_{1 \leq i \leq 3} \psi_i(\Delta) \cdot \min_{1 \leq i \leq 3} \gamma_i(\Delta)) \max_{1 \leq i \leq 3} h_i(\Delta), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_j(\Delta) = \|A_j \Delta \tilde{E}_j\|, \quad \psi_j(\Delta) = \|A_j \Delta \tilde{B}_j\|, \quad h_j(\Delta) = |\Delta| \|B_j \Delta^{-1}\|, \\ j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (10)$$

Формула расстояния (7) в обозначениях (9) и (10) примет вид

$$d(l_1^2, Y_0) = \inf_{\Delta \in D} g(\Delta) = \min_{1 \leq i \leq 3} (\inf_{\Delta \in D_i} g(\Delta)). \quad (11)$$

Приведем теперь без доказательств ряд утверждений, последовательно сужающих множество минимизаций. Общее в схеме доказательств то, что на указанных подмножествах легко находятся $\max \varphi_j$ и ψ_j ; далее, [по произвольной точке Δ из рассматриваемого множества строится (не тривиальным образом) точка $\tilde{\Delta}$ редуцируемого множества такая, что $g(\Delta) \geq g(\tilde{\Delta})$. $\inf$ повсюду берется по переменной Δ .

Утверждение 1. $\inf_{D_1} g = \inf_{D_1^+} g \geq \inf_{D_1} g$, где $D_1^+ = \{\Delta \in D_1 : |\Delta| > 0\}$.

Утверждение 2. Обозначим $D_3^+ = \left\{ \Delta \in D_3; \delta_3 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \delta_4 \geq 0 \right\}$, и пусть $\inf_{D_3^+} g = f(\beta_1, \beta_2)$. Тогда

$$\inf_{D_3} g = f\left(\frac{1}{\beta_1}, \frac{\beta_2}{\beta_1}\right) \text{ и } \inf_{D_3} g = \min(f(\beta_1, \beta_2), f(\beta_2, \beta_1)).$$

Утверждение 3. $\inf_{D_3^+} g = \inf_{\Pi} g$, где $\Pi = \{\Delta \in D_3^+ : \varphi_1(\Delta) = \varphi_2(\Delta)\}$.

На гиперплоскости Π выразим переменную δ_3 через другие. Тогда задача минимизации на множестве Π приобретает следующий вид:

$$g(\Delta) = g(\delta_1, \delta_2, \delta_4) = \frac{(\delta_1 - \delta_2) \max(h_1(\Delta), h_2(\Delta))}{\delta_4(\delta_1 - k\delta_2) - \delta_2(\delta_1 - \delta_2)} \rightarrow \inf,$$

где $k = \frac{\beta_1 - 1}{\beta_2}$, $h_1 = \delta_4 - \delta_2$, $h_2 = 2\delta_1 - \delta_2 + k\delta_4$, $h_3 = 2\beta_2\delta_1 - (\beta_1 + \beta_2)\delta_2 - \delta_4$, при следующих ограничениях:

$$\delta_1 \geq 0, \quad \delta_2 \leq 0, \quad \delta_4 \geq 0, \quad \delta_1 - \delta_2 - \frac{1}{\beta_2} \delta_4 \geq 0. \quad (12)$$

$$\delta_4(\delta_1 - k\delta_2) - \delta_2(\delta_1 - \delta_2) \neq 0.$$

Обозначим через $\bar{\Pi}$ множество в R^3 , определяемое условиями (12), и пусть

$$\Pi_{ij} = \{\Delta \in \bar{\Pi} : h_i(\Delta) = h_j(\Delta) \geq h_k(\Delta), \quad i \neq j, \quad i, j, k = 1, 2, 3\}.$$

Утверждение 4. Если точка $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_4) \in \bar{\Pi}$ такова, что $\delta_4 > 0$ и $\Delta \notin \Pi_{ij}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$, то в ней функция g не принимает минимального на $\bar{\Pi}$ значения.

Заметим, что это можно доказать, показав, что при указанных условиях функция $f(\epsilon) = g(\delta_1 + \epsilon, \delta_2, \delta_4)$ не имеет в нуле минимума.

Следующие утверждения имеют общую схему доказательства: однородность функции g приводит к минимизации функции лишь одной переменной на отрезке, причем минимум достигается на концах отрезка.

Утверждение 5.

$$\inf\{g(\Delta) : \Delta \in \bar{\Pi}, \delta_4 = 0\} = f_1(\beta_1, \beta_2) =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{\beta_1 + \beta_2 - 1} + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2 + 1} \right)^{-1}.$$

Утверждение 6. Обозначим

$$f_2(\beta_1, \beta_2) = 1 + \left(\frac{\beta_2}{1 - \beta_2 + \beta_1} + \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1 + 1} \right)^{-1},$$

$$f_3(\beta_1, \beta_2) = 1 + \left(\frac{\beta_2 - 1}{1 - \beta_2 + \beta_1} + \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1 + 1} + \frac{\beta_1}{\beta_2 + \beta_1 - 1} \right)^{-1}.$$

Тогда

$$\inf \{g(\Delta): \Delta \in \Pi_{12}\} \geq \min_{1 \leq i \leq 3} f_i(\beta_1, \beta_2).$$

Утверждение 7. $\inf \{g(\Delta): \Delta \in \Pi_{12} \cup \Pi_{23}\} \geq \min_{1 \leq i \leq 3} f_i(\beta_1, \beta_2).$

Непосредственно проверяется следующее

Утверждение 8.

$$f_1\left(\frac{1}{\beta_1}, \frac{\beta_2}{\beta_1}\right) = f_1(\beta_1, \beta_2), \quad f_2\left(\frac{1}{\beta_1}, \frac{\beta_2}{\beta_1}\right) = f_1(\beta_2, \beta_1).$$

Обозначим $f_3\left(\frac{1}{\beta_1}, \frac{\beta_2}{\beta_1}\right) = f_4(\beta_1, \beta_2)$. При $\beta_1 \geq$ (соответственно $\leq$) β_2 , $f_i(\beta_1, \beta_2) \leq$ ($\geq$) $f_i(\beta_2, \beta_1)$, $i = 1, 3$; $f_j(\beta_1, \beta_2) = f_j(\beta_2, \beta_1)$, $j = 2, 4$. На множестве U , порожденном ограничениями (4) и неравенством $\beta_1 \geq \beta_2$, имеет место равенство

$$\min_{1 \leq i \leq 3} f_i(\beta_1, \beta_1) = \begin{cases} f_4(\beta_1, \beta_2) & \text{при } \beta_1 \leq \frac{1 + \beta_2^2}{1 + \beta_2} \\ f_1(\beta_1, \beta_2) & \text{при } \frac{1 + \beta_2^2}{1 + \beta_2} \leq \beta_1 < \\ < \left(\frac{1}{2} - \left(\beta_1 - \frac{1}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \\ f_2(\beta_1, \beta_2) & \text{при } \beta_2 \geq \frac{1 + \beta_1^2}{1 + \beta_1} \\ f_2(\beta_1, \beta_2) & \text{в оставшейся части } U. \end{cases}$$

Формула расстояния.

Не ограничивая общности, можно считать, что $\beta_1 \geq \beta_2$, ибо при противоположном неравенстве получается изометричный образ. Объединяя утверждения 1—8 с (11), мы приходим к следующей формуле расстояния.

Теорема 2. Пусть Y_0 — произвольное шестиугольное пространство. Не нарушая общности, можно считать, что

$$\text{Ext } Y_0 = \{\pm(1, 0), \pm(0, 1), \pm(\beta_1, \beta_2)\},$$

где $\beta_1 \geq \beta_2 > 0$, $\beta_1 + \beta_2 > 1$, $\beta_1 - \beta_2 < 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
d(l_1^2, Y_6) = & \left[\begin{aligned} & 1 + \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_1 - \beta_2 + 1} + \frac{1}{\beta_2 - \beta_1 + 1} + \frac{1}{\beta_1 + \beta_2 - 1} \right)^{-1} \\ & \text{при } \beta_1 \leq \frac{1 + \beta_2^2}{1 + \beta_2} \\ & 1 + \left(\frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1 + 1} + \frac{1}{\beta_1 + \beta_2 - 1} \right)^{-1} \\ & \text{при } \frac{1 + \beta_2^2}{1 + \beta_2} \leq \beta_1 \leq \left(\frac{1}{2} - \left(\beta_2 - \frac{1}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \\ & 1 + \left(\frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2 + 1} + \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1 + 1} \right)^{-1} \\ & \text{при } \beta_2 \geq \frac{1 + \beta_1^2}{1 + \beta_1} \\ & 1 + \left(\frac{\beta_2 - 1}{\beta_1 - \beta_2 + 1} + \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1 + 1} + \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2 - 1} \right)^{-1} \\ & \text{в оставшейся части } U. \end{aligned} \right] \quad (13)
\end{aligned}$$

Как указывалось, диаметр двумерного компакта Минковского, найденный В. Стромквистом, равен $3/2$. Обозначим через Y_6^3 однопараметрическое семейство шестиугольных пространств, получающееся при $\frac{1}{2} < \beta = \beta_1 = \beta_2 = 1$. Из формулы (13) вытекает

Следствие 1. Для любого $\alpha \in \left] 1, \frac{3}{2} \right]$ существует $\beta \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$ такое, что $d(l_1^2, Y_6^\beta) = \alpha$.

Отметим, что шестиугольник $S(Y_6^1)$ (единственный из рассмотренных) является изометричным образом правильного шестиугольника. Такой изометрией будет, например, оператор $I: R^1 \rightarrow R^2$, определенный равенствами: $I(1, 0) = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$, $I(0, 1) = \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$. Таким образом, из формулы (13) вытекает следствие, содержащее один результат Асплунда ⁽²⁾.

Следствие 2. Из всех шестиугольных пространств наиболее удаленным от l_1^2 является пространство G_6 , порожденное правильным шестиугольником, и $d(l_1^2, G_6) = \frac{3}{2}$.

Որոշ երկչափանի նորմավորված տարածությունների միջև
Բանախ-Մագուրի հեռավորությունը

Հիմնվելով պոլիեդրալ տարածությունների միջև Բանախ-Մագուրի հեռավորության բանաձևի վրա, հաշվվում է երկչափանի նորմավորված այն տարածությունների միջև հեռավորությունը, որոնց միավոր գնդերը համապատասխանաբար քառակուսի և վեցանկյուն են:

Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է համարել, որ վեցանկյուն քառաթևերն են $(1,0)$, $(0,1)$ և (β_1, β_2) վեկտորները, որտեղ β_1, β_2 -ը բավարարում են բնական սահմանափակումների: Ի դեպ ապացուցվում է նաև մի ընդհանուր թեորեմ, որը նկարագրում է կամայական n -չափանի պոլիեդրալ տարածության միավոր գնդի ծայրային կետերը ներկայացնող մատրիցը: β_1, β_2 փոփոխականների ֆունկցիայի տեսքով ստացված հեռավորության բանաձևից բխում է երկու հետևանք: Նշենք երկրորդը, որը պարունակում է Ասպլունդի M -ի մասնավոր արդյունք:

Բոլոր վեցանկյուն տարածություններից L_1 -ից ամենահեռու կանոնավոր վեցանկյունով ծնված G_6 տարածությունն է, ընդ որում $d(L_1^2, G_6) = \frac{3}{2}$:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. В. Восканян, Изв. АН АрмССР, т. 25, № 3, с. 284—292 (1990). ² E. Asplund, Math. Scand., v. 8, p. 171—180 (1960). ³ W. Stromquist, Math. Scand., v. 42, p. 205—225 (1981).

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.64

Член-корреспондент АН Армении А. Б. Нерсисян, С. А. Цирунян

Быстрый алгоритм решения многомерного уравнения
с частично теплицевым ядром

(Представлено 21/V 1992)

1. Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода

$$(I - K) V \stackrel{\text{def}}{=} Y(x) - \int_D K(z, t) Y(t) dt = f(x), \quad x \in D \quad (1)$$

где $D \in R^m$ ($m \geq 2$) — гиперкуб $D = \{0 < x_i < 1, \quad i = 1, 2, \dots, m\}$. $K(x, t) \in C^p(\bar{D} \times \bar{D})$, $f(x) \in C^p(\bar{D})$ ($p \geq 1$), $dt = dt_1 \dots dt_m$.

Задача решения уравнений типа (1) возникает в ряде прикладных областей (см. (')). По сравнению с одномерным случаем ($m = 1$, $D = (a, b)$) ситуация здесь сложнее, прежде всего, из-за возрастающего объема вычислений и размеров требуемой оперативной памяти.

Пусть, например, выбран конкретный тип кубатурных формул p -го порядка точности (относительно наибольшего шага сети). Каждое i -ое ребро гиперкуба D дискретизируем в N_i точках $\{x_i^k\}$ ($k = 1, 2, \dots, N_i$, $i = 1, 2, \dots, m$). Приближенное решение $Y(x)$ будем искать на сети $x \in \{x_1^{k_1}\} \times \{x_2^{k_2}\} \times \dots \times \{x_m^{k_m}\}$, $k_i = 1, 2, \dots, N_i$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Таким образом, задача сводится к решению алгебраической системы с $(N \times N)$ -матрицей, где $N = N_1 N_2 \dots N_m$. Для решения этой системы (при ее однозначной разрешимости) методом Гаусса потребуется выполнить порядка $N^3/3$ мультипликативных операций с использованием оперативной памяти в N^2 ячеек ($N \gg 1$).

Понятно, что такие требования к вычислительной системе (особенно при повышенных требованиях к точности решения) не всегда выполнимы, и поэтому очень важна задача поиска средств выхода из подобных ситуаций.

В связи с этим заметим, что метод статистического моделирования (так называемый метод Монте-Карло), несмотря на свою универсаль-

ность и применимость при любом m , имеет невысокую точность и практически не улучшает своих качеств при повышении гладкости функций K и f .

2 Проблема может быть решена за счет специфических свойств оператора $I - K$. Здесь мы предположим, что ядро K частично теплицево (частично разностное), т. е.

$$K(x, t) = K(x', t', x_m - t_m), \quad x', t' \in D, \quad |x_m - t_m| \leq 1, \quad (2)$$

где $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) \in D' = \{0 < x_i < 1, i = 1, 2, \dots, m-1\}$.

В классическом одномерном случае теплицева ядра $K = K(x - t)$ ($m = 1$, $D = (0, 1)$) для решения уравнения (1) на основе квадратурных формул построены быстрые алгоритмы (см. (3, 4)). Именно, если при выборе на отрезке $[0, 1]$ сети из N точек общий подход (см. выше) приводит к алгоритмам сложности $O(N^3)$ ($N \rightarrow \infty$) с требуемой памятью порядка $O(N^2)$, то соответствующие показатели быстрых устойчивых алгоритмов имеют, соответственно, порядок $O(N^2)$ и $O(N)$.

В случае двумерного ($m=2$) ядра (2) также были построены более быстрые, чем указано выше, алгоритмы (см. (4, 5)), основанные на сведении задачи (1) — (2) к алгебраической системе с блочно-теплицевой матрицей.

Ниже предлагается новый подход, основанный на методах работ (4, 6).

3. Пусть $D_\tau = D' \times (0, \tau)$, $0 < \tau \leq 1$. Обозначим через $I - K_\tau$ оператор (1) с $D = D_\tau$ (т. е. $I - K = I - K_1$). В случае ядер K общего вида без труда (см. (6)) можно доказать следующий результат.

Теорема 1. Пусть операторы $I - K_\tau$ обратимы при $\tau = \tau_1, \tau_2$ ($\tau_1 < \tau_2$). Тогда для их резольвентных ядер $R(x, t, \tau)$ $(I - K_\tau)^{-1} = I + R_\tau$ и решений $Y(x, \tau)$ уравнений $(I - K_\tau)Y = f$, $\tau = \tau_1, \tau_2$, $\tau_1 < \tau_2$, справедливы соотношения:

$$R(x, t, \tau_2) = R(x, t, \tau_1) + \int_{\Delta} R(x, s, \tau_1) R(s, t, \tau_2) ds, \quad (3)$$

$$Y(x, \tau_2) = Y(x, \tau_1) + \int_{\Delta} R(x, s, \tau_1) Y(s, \tau_1) ds, \quad (4)$$

где $\Delta = D_{\tau_2} \setminus D_{\tau_1} = D' \times (\tau_1, \tau_2)$. $\square$

Вернемся теперь к ядрам типа (2).

Теорема 2. Пусть операторы $I - K_\lambda$ с ядром (2) обратимы в $C(\bar{D})$ на сети (τ_n) ($0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = 1$). Тогда для их резольвентных ядер $R(x, t, \tau_n) = R(x', t', x_m - t_m, n)$ и решений $Y(x, n)$ уравнений $(I - K_{\tau_n})Y = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, $\lambda \in \{\tau_n\}$ справедливы соотношения ($k = \tau_{n+1} - \tau_n$, $n = 0, 1, \dots, N-1$):

$$R(x', t', x_m, t_m, n+1) = R(x', t', x_m - h, t_m - h, n) + \\ + \int_0^h \int_{\bar{D}} R(x', s', x_m - h, u - h, n) R(s', t', u, t_m, n+1) ds' du, \quad (5)$$

$$x', t' \in \bar{D}', \quad s' = (s_1, \dots, s_{m-1}), \quad ds' = ds_1, \dots, ds_{m-1},$$

$$x_{n+1} \leq x_m, \quad t_m \leq 1, \quad |x_m - t_m| \leq 1;$$

$$Y(x, n+1) = Y(x, n) + \int_{\Delta_n} R(x', s', x_m, u, n+1) Y(s', u, n) ds' du, \quad (6)$$

$$x = (x', x_m) \in D_1, \quad \Delta_n = D_{n+1} \setminus D_n.$$

Доказательство. Формула (6) фактически совпадает с (4). Равенство (5) выводится из известных интегральных уравнений для резольвентных ядер с использованием вида ядра (2). Отметим лишь, что надо дополнительно обосновать справедливость формулы (5) вне гиперкуба $\bar{D}_{n+1} \times \bar{D}_{n+1}$.

4. Формулы (5) и (6) являются основой для построения рекуррентных по n параллельных алгоритмов решения уравнения (1) с ядром (2). Остановимся подробнее на случае К, $f \in C^1$, когда на равномерной сетке с одним и тем же шагом h для $\tau, x_1, x_2, \dots, x_m$ ($h = 1/N, N \geq 2$) применяется формула прямоугольников точности $O(h)$ ($h \rightarrow 0$). Очевидно, что при $n = 0$ имеем стартовые значения:

$$R(x', t', x_m, t_m, 0) = K(x', t', x_m - t_m), \quad (5')$$

$$x', t' \in D', \quad |x_m - t_m| \leq 1, \quad -1 \leq x_m, t_m \leq 1,$$

$$Y(x, 0) = f(x), \quad x \in \bar{D} = \bar{D}' \times [0, 1]. \quad (6')$$

Далее, на каждом шаге n ($n = 0, 1, \dots, N-1$) имеем (см. (3), (5), (6)), с точностью $O(h^2)$ ($h = 1/N \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$):

$$R(x', t', x_m, (n+1)h, n+1) = R(x', t', x_m - h, nh, n) + \\ + h^2 \sum_{p_1, \dots, p_{m-1}=0}^{N-1} R(x', s', x_m - h, 0, n) R(s', t', h, (n+1)h, n+1) \quad (7)$$

$$x', t' \in D', \quad (n+1)h - 1 \leq x_m \leq 1;$$

$$R(x', t', x_m, 0, n+1) = R(x', t', x_m, 0, n) + \\ + h^2 \sum_{p_1, \dots, p_{m-1}=0}^{N-1} R(x', s', x_m, nh, n+1) R(s', t', h, (n+1)h, n), \quad (8)$$

$$x', t' \in D' \quad (n+1)h - 1 \leq x \leq 1;$$

$$Y(x, n+1) = Y(x, n) + h^2 \sum_{p_1 = p_{m-1} - 1}^{N-1} R(x', s', x_m, (n+1)h, n+1) Y(s', (n+1)h, n), \quad (9)$$

$$x = (x', x_m) \in D,$$

где $s' = (p_1 h, p_2 h, \dots, p_{m-1} h)$, а x', x_m и t' меняются на равномерной сетке с шагом h .

5. Назовем алгоритмом $A(h)$ реализацию формул (7)–(9) при стартовых значениях (5') (с $t_m = 0$) и (6'). Это параллельный, рекуррентный алгоритм неявного типа точности $O(h)$ ($h \rightarrow 0$, на каждом шаге точность $O(h^2)$, а всего N шагов, $h = 1/N$). Неявность следует из того, что (на n -том шаге) для определения в (7) справа неизвестных значений $R(s', t', h, (n+1)h, (n+1))$ необходимо решить алгебраическую систему с матрицей размеров $Nm \times Nm$, что потребует выполнения порядка $O(N^3 m^3)$ мультипликативных операций. Общая сложность алгоритма составляет $3N^{3m-1} + O(N^{3m-2})$ ($N \rightarrow \infty$) мультипликативных операций. Память — $2N^{2m-1} = O(N)$ ячеек.

При применении из той же x -сетке алгоритма п. 1 на основе метода Гаусса с построчным выбором ведущего элемента (назовем этот подход алгоритмом $G(h)$) потребовалось бы выполнить $\frac{1}{3} N^{3m} + O(N^{3m-1})$ мультипликативных операций при объеме памяти в $N^{2m} + O(N)$ ячеек. Однако этот алгоритм последовательный, и объективно было бы провести сравнение с параллельным алгоритмом Гаусса–Жордана, имеющим сложность порядка $\frac{1}{2} N^{3m}$ при объеме памяти в N^{2m} ячеек. (Последний алгоритм обозначим $GJ(h)$).

Таким образом, при больших N сложность алгоритма $A(h)$ по сравнению с $G(h)$ уменьшается в $N/6$ раз, а объем памяти — в N раз.

6. Алгоритмы $G(h)$ и $A(h)$ были испытаны в численных экспериментах. Изучались следующие задачи ($x = (x_1, x_2)$, $t = (t_1, t_2)$).

Задача 1.

$$K = \frac{(x_2 - t_2) \sin(x_1^2 + t_1)}{1 + x_1^2 + (x_2 - t_2)^2}, \quad Y(x_1, x_2) \equiv 1,$$

$$f(x_1, x_2) = 1 - 0,5 \ln \frac{(1 + x_1^2 + x_2^2)}{1 + x_1^2 + (x_2 - 1)^2} (\cos x_1^2 - \cos(x_1^2 + 1))$$

Задача 2.

$$K = 10(x_2 - t_2) \sin[\mu(x_1 + t_1) + (x_2 - t_2)^3], \quad Y(x_1, x_2) \equiv 1,$$

$$f(x_1, x_2) = 1 + \frac{20}{\mu} \sin \frac{\mu}{2} (0,5 - x_2) \sin \left(\frac{\mu}{2} + \mu x_1 + 0,5 + x_2^2 - x_2 \right),$$

$$\mu = \text{const.}$$

В табл. 1 и 2 приведены результаты расчетов. Время в скобках соответствует алгоритму $GJ(h)$.

Через $\delta(N_1 \times N_2)$ обозначена соответствующая среднеквадратичная абсолютная ошибка в виде числа с плавающей точкой.

Как видим, на сетке $N_1 \times N_2$, (N_1 — число точек дискретизации по k_1 , N_2 — по x_2) алгоритм $A(h)$ работает тем быстрее, чем больше произведение $N_1 N_2$ (и чем больше N_2 по отношению к N_1).

В задаче 2 при $\mu = 2\pi$ ядро K и решение Y являются периодическими гладкими функциями, и в табл. 2 при этом хорошо просматривается резкое увеличение точности вычислений. Отметим, что стабилизация ошибки $\delta(N_1, N_2)$ при увеличении N_1 и N_2 не является признаком неустойчивости счета, а обусловлена относительно небольшой разрядностью компьютера и соответствующим накоплением ошибок. Соответственно, густота сети $N_1 \times N_2$ в тестовых задачах 1 и 2 была ограничена оперативной памятью.

Таблица 1

Задача 1. Ошибка $\delta(N_1, N_2)$ и время счета

$N_1 \times N_2$	4×4	4×8	4×16	4×32	8×8	8×16	16×16
$G(h)$	4.79E-2	2.85E-2	2.11E-2	1.88E-2	2.44E-2	1.42E-2	1.32E-2
$t(c)$	0 (1)	3 (4)	14 (21)	89 (138)	15 (22)	98 (148)	703 (1050)
$A(h)$	4.58E-2	2.86E-2	2.08E-2	1.78E-2	2.46E-2	1.48E-2	1.28E-2
$t(c)$	1	5	16	62	26	97	670

Таблица 2

Задача 2. Ошибка $\delta(N_1, N_2)$

μ	$N_1 \times N_2$	4×4	4×8	4×16	8×8	8×16	16×16
π	$G(h)$	4.69E-1	3.42E-1	03E-1	2.26E-1	1.69E-1	1.13E-1
	$A(h)$	2.29E-1	1.28E-1	88E-1	1.23E-1	6.66E-2	6.37E-2
2π	$G(h)$	2.79E-12	3.67E-12	4.16E-12	4.88E-12	6.85E-12	7.6 E-12
	$A(h)$	3.74E-12	2.87E-12	3.23E-12	4.14E-12	5.57E-12	6.52E-12

При дополнительной гладкости ядра K и правой части f алгоритмы высокой точности можно получить как применением экстраполяции по Ричардсону (например путем счета на сетках $(N_1 \times N_2)$ и $(2N_1 \times 2N_2)$), так и использованием в схеме (5) — (6) кубатурных формул повышенной точности (как в одномерном случае, см. (6)).

В заключение отметим, что предлагаемый подход проще методов, приведенных в работах (4, 5).

Մասնակի տյուպլիցյան կորիզով բազմաչափ ինտեգրալ նախասահումների լուծման առաջ ալգորիթ

Դիտարկվում է (1) հավասարումը, որի լուծման հայտնի մեթոդներն ապահովում են համեմատաբար ոչ մեծ ճշտություն (Մոնտե-Կառլոյի մեթոդ) կամ պահանջում են շատ գործողությունների կատարում (Գաուսի մեթոդ):

Առաջարկվող մեթոդը ըստ 1 արգումենտի մասնակի տյուպլիցյան (մասնակի տարբերական) (2) կորիզներով հավասարման լուծման գործողությունների քանակը զգալիորեն իջեցնում է: Միաժամանակ կրճատվում է պահանջվող հիշողության չափը: Հաշվարկների արդյունքները բերված են աղյուսակներում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков, Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Научова думка, Киев, 1985.
- ² I. Gohberg, I. Koltracht, Numer. Math., v. 47, p. 233—238 (1985).
- ³ I. Gohberg, I. Koltracht, P. Lancaster, Integral Equat and Oper. Theory, v. 10, p. 577—594 (1987).
- ⁴ С. Н. Воеводина, Вычислительные методы и программирование, вып. 24, МГУ, с. 19—24, 1975.
- ⁵ В. В. Воеводин, А. Г. Свешников, Е. Е. Тыртышников, Вестн. МГУ, вып. мат. и кибернетика, № 1, 1980.
- ⁶ А. Б. Нерсисян, ДАН СССР, т. 30, № 3, с. 727—732 (1984).
- ⁷ А. Б. Нерсисян, ДАН АрмССР, т. 89, № 4, с. 171—176 (1989).

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 629.3.01

М. С. Мкртчян, С. М. Мхитарян

О формуле обращения интегрального уравнения периодических контактных и смешанных задач теории упругости

(Представлено чл.-корр. АН Армении Б. Л. Абрамяном 9 X 1991)

Плоская периодическая контактная задача теории упругости ⁽¹⁾, смешанные задачи о напряженном состоянии упругой бесконечной пластины с периодической системой коллинеарных трещин, расположенных на одной линии, нормального отрыва, поперечного и продольного сдвигов, а также соответствующие задачи в случае периодической системы абсолютно жестких включений вместо трещин ⁽²⁻⁴⁾ описываются сингулярным интегральным или интегро-дифференциальным уравнением первого рода с ядром Гильберта. Более общее интегральное уравнение с ядром Гильберта методом продолжения в комплексную область рассмотрено в ⁽⁴⁾, где, в частности, приведена формула обращения этого уравнения в указанном случае.

Ввиду важной роли упомянутого интегрального уравнения в контактных и смешанных задачах теории упругости, в настоящей работе способом, аналогичным примененному в ^(1,2), вновь устанавливается его формула обращения. Показывается, что эта формула, которая по своей структуре несколько отличается от приведенных в ^(1,2,4) и которая в ряде случаев может оказаться более удобной, в конечном итоге эквивалентна им.

1. Речь идет об обращении сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Гильберта

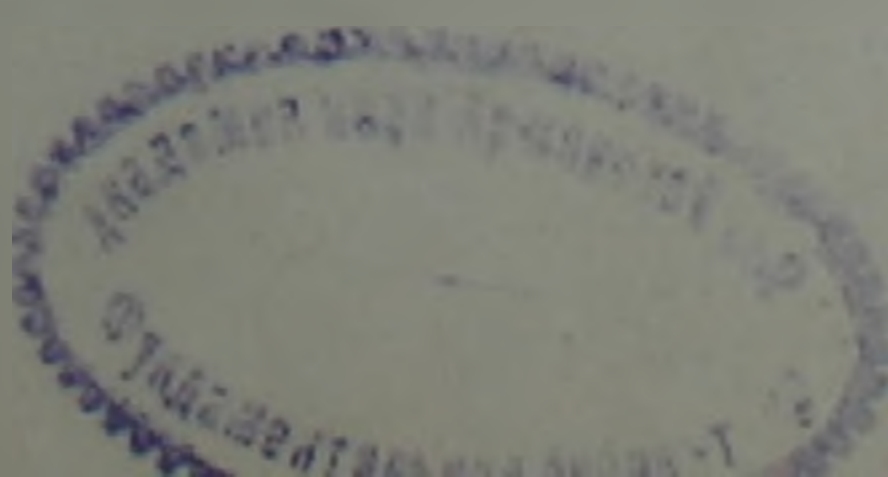
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\eta - \xi}{2} \varphi(\eta) d\eta = f(\xi) \quad (0 < a < \infty), \quad (1.1)$$

где $\varphi(\xi)$ — искомая вещественная функция, а $f(\xi)$ — данная вещественная функция, удовлетворяющая на $(-a, a)$ условию H .

С указанной целью рассмотрим известное сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\psi(t) dt}{t - x} = g(x) \quad (1.2)$$

и запишем формулу его обращения ⁽⁵⁾.



$$\psi(x) = -\frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2} g(t) dt}{t - x} + \frac{C}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (1.3)$$

где C —произвольная постоянная. Далее в уравнениях (1.2) и (1.3) перейдем к новым переменным

$$x = \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}, \quad t = \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}, \quad a = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad (-\alpha < \xi, \quad \eta < \alpha)$$

и учтем, что

$$\begin{aligned} \frac{dt}{t-x} &= \frac{\cos \frac{\xi}{2} \cdot \cos \frac{\eta}{2} d\eta}{2 \cos^2 \frac{\eta}{2} \cdot \sin \frac{\eta-\xi}{2}} = \frac{\cos \left(\frac{\xi-\eta}{2} + \frac{\eta}{2} \right) \cdot \cos \frac{\eta}{2} d\eta}{2 \cos^2 \frac{\eta}{2} \cdot \sin \frac{\eta-\xi}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\eta-\xi}{2} + \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} \right) d\eta; \\ \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\xi}{2}} &= \frac{\sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\xi}{2}}. \end{aligned}$$

В результате уравнение (1.2) перейдет в уравнение (1.1), где

$$\varphi(\xi) = \psi \left(\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right), \quad f(\xi) = g \left(\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right) - A_0; \quad (1.4)$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} g \left(\operatorname{tg} \frac{\tau}{2} \right) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} \varphi(\eta) d\eta,$$

а (1.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = \psi \left(\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right) &= -\frac{\cos^2 \left(\frac{\xi}{2} \right)}{2\pi \sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} \times \\ &\times \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\eta-\xi}{2} \cos^2 \frac{\eta}{2}} f(\eta) d\eta - \frac{A_0 \cos^2 \left(\frac{\xi}{2} \right)}{2\pi \sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} \times \\ &\times \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\eta-\xi}{2} \cos^2 \frac{\eta}{2}} d\eta + \frac{C \cos \left(\frac{\xi}{2} \right)}{\sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Легко заметить, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \frac{\xi}{2} \cdot \cos \frac{\eta}{2} \sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}}{2 \sin \frac{\eta - \xi}{2} \cdot \cos^2 \left(\frac{\eta}{2} \right) \cdot \cos \frac{\eta}{2}} d\eta =$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{a^2 - t^2} dt}{t - x} = -2\pi \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}.$$

с учетом чего (1.5) перейдет в следующее выражение:

$$\varphi(\xi) = - \frac{\cos^2 \left(\frac{\xi}{2} \right)}{2\pi \sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} \int_{-\alpha}^{\pi} \frac{\sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\eta - \xi}{2} \cdot \cos^2 \frac{\eta}{2}} f(\eta) d\eta +$$

$$+ \frac{2A_0 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\xi}{2}}{\sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} + \frac{C \cos \frac{\xi}{2}}{\sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}}. \quad (|\xi| < \alpha). \quad (1.6)$$

Теперь при помощи (1.6) в соответствии с формулой (1.4) будем иметь

$$A_0 = - \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\alpha}^{\pi} J(\eta) \sec^2 \frac{\eta}{2} \sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)} d\eta + \frac{A_0}{\pi} \cos \frac{\alpha}{2} I(\alpha), \quad (1.7)$$

где

$$J(\eta) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sin \frac{\xi}{2} \cos \frac{\xi}{2} d\xi}{\sin \frac{\eta - \xi}{2} \sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}},$$

$$I(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sin \frac{\xi}{2} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} d\xi}{\sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}}.$$

Легко видеть, что

$$I(\alpha) = \sec \frac{\alpha}{2} \left[\pi - 2 \int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2} (1 + x^2)} \right] =$$

$$= \sec \frac{\alpha}{2} \left[\pi - 2 \int_0^{\infty} \frac{du}{1 + (1 + a^2) u^2} \right] = \pi \sec \frac{\alpha}{2} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$(x = au / \sqrt{1 + u^2})$$

Обращаясь к вычислению интеграла $J(\eta)$, представим его в виде

$$J(\eta) = -\sec \frac{a}{2} \sec \frac{\eta}{2} \int_{-a}^a \frac{x dx}{(x-t)(1+x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\left(x = \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}; \quad t = \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}; \quad a = \operatorname{tg} \frac{a}{2}\right).$$

и в комплексной плоскости $z = x + iy$, разрезанной вдоль отрезка $[-a, a]$ вещественной оси, рассмотрим функцию комплексного переменного $F(z) = z/(z^2 + 1)\sqrt{z^2 - a^2}$. В разрезанной указанным способом плоскости выберем ту однозначную аналитическую ветвь функции $F(z)$, которая в окрестности бесконечно удаленной точки обладает поведением $F(z) \approx 1/z^2$. Очевидно, что точки $z = \pm i$ являются простыми полюсами для выбранной ветви функции $F(z)$, имеющей в них соответственно главные части $G_{\pm}(z) = 1/(z \pm i) 2i\sqrt{1+a^2}$. По обобщенной формуле Коши для бесконечной области ((⁶), с. 250–253), ограниченной контуром Γ , применительно к выбранной ветви функции $F(z)$, можно записать

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z dz}{(z-\zeta)(z^2+1)\sqrt{z^2-a^2}} =$$

$$= \frac{\zeta}{(\zeta^2+1)\sqrt{\zeta^2-a^2}} - G_+(\zeta) - G_-(\zeta).$$

Стягивая теперь контур Γ к разрезу $[-a, a]$ и учитывая, что $\sqrt{z^2-a^2} \rightarrow \pm i\sqrt{a^2-x^2}$ при ($|x| < a$), $z \rightarrow x \pm i0$, будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{2x dx}{i(x-\zeta)(1+x^2)\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= \frac{\zeta}{(\zeta^2+1)\sqrt{\zeta^2-a^2}} - \frac{1}{(\zeta^2+1)\sqrt{1+a^2}}.$$

Далее, воспользовавшись известной формулой Сохоцкого—Племеля при ($|t| < a$) $\zeta \rightarrow t + i0$, находим

$$\int_{-a}^a \frac{x dx}{(x-t)(1+x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{(1+t^2)\sqrt{1+a^2}} \quad (|t| < a)$$

и, следовательно, $J(\eta) = -\pi \cos \frac{\eta}{2}$.

С учетом выражений интегралов $J(\eta)$ и $I(a)$ из (1.7) определяем до сих пор неизвестную постоянную A_0 .

$$A_0 = \frac{\sec(a/2)}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2(\cos \eta - \cos a)} \sec \frac{\eta}{2} f(\eta) d\eta. \quad (1.8)$$

Внося выражение A_0 из (1.8) в (1.6), окончательно получаем следующую формулу обращения уравнения (1.1):

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = & - \frac{\cos^2(\xi/2)}{2 \sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\eta - \xi}{2} \cos^2 \frac{\eta}{2}} f(\eta) d\eta + \\ & + \frac{A \sin(\xi/2) + C \cos(\xi/2)}{\sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} \quad (1.9) \\ & (A = 2A_0 \cos(\alpha/2), \quad |\xi| < \alpha), \end{aligned}$$

где C — произвольная постоянная.

Отметим, что входящий в (1.9) интеграл легко может быть вычислен, если функцию $f(\xi)$ представить в виде конечного или бесконечного ряда

$$f(\xi) = \sum f_n U_{n-1}(\operatorname{tg}(\xi/2)/\operatorname{tg}(\alpha/2)) \quad (|\xi| < \alpha),$$

где $U_n(x)$ — многочлены Чебышева второго рода, а затем пользоваться известным интегральным соотношением с ядром Коши, содержащим многочлены Чебышева первого и второго родов. Действительно, возвращаясь к прежним переменным, можем записать

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\xi/2)}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\eta - \xi}{2} \cos^2 \frac{\eta}{2}} f(\eta) d\eta = \\ = \frac{2\cos(\alpha/2)}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{a^2 - t^2} h(t)}{t - x} dt, \end{aligned}$$

где $h(x) = f(2 \operatorname{arctg} x)$.

2. Воспользовавшись элементарным тождеством

$$\frac{\cos^2(\xi/2)}{\cos^2(\eta/2)} \frac{1}{\sin \frac{\eta - \xi}{2}} = - \frac{1}{\sin \frac{\eta - \xi}{2}} + \frac{\sin \frac{\xi + \eta}{2}}{\cos^2(\eta/2)}$$

и учитывая (1.8), формулу (1.9) представим в виде

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = & - \frac{1}{2\pi \sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} \times \\ & \times \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\eta - \xi}{2}} f(\eta) d\eta + \frac{C_1 \cos(\xi/2)}{\sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}}; \quad (2.1) \\ C_1 = & C - \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)} \sec \frac{\eta}{2} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} f(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Здесь C_1 новая произвольная постоянная. Эту постоянную можно выразить через интеграл от функции $\varphi(\xi)$. Действительно, принимая во внимание выражение известного интеграла ((⁷), с. 111), будем иметь

$$I(\xi, \eta) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)} \sin \frac{\eta - \xi}{2}} = \sec \frac{\alpha}{2} \sec \frac{\eta}{2} \times \\ \times \int \frac{dx}{(t-x) \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}} \ln \left| \frac{D_+(\xi, \eta)}{D_-(\xi, \eta)} \right|, \quad (2.2)$$

где

$$D_{\pm}(\xi, \eta) = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} \pm \\ \pm \sqrt{\left(\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\xi}{2} \right) \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\eta}{2} \right)}.$$

Теперь обе части (2.1) проинтегрируем по ξ в интервале $(-\alpha, \alpha)$ и с учетом (2.2). В результате получаем

$$C_1 = \frac{P}{\pi}, \quad P = \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(\xi) d\xi. \quad (2.3)$$

Таким образом, формулу обращения уравнения (1.1) можно представить также в следующей, эквивалентной (1.9), форме:

$$\varphi(\xi) = \frac{P \cos(\xi/2)}{\pi \sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} - \frac{1}{2\pi \sqrt{2(\cos \xi - \cos \alpha)}} \times \\ \times \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{2(\cos \eta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\eta - \xi}{2}} f(\eta) d\eta \quad (|\xi| < \alpha). \quad (2.4)$$

Отметим, что формулы обращения уравнения (1.1), приведенные в (¹) (с. 71, формула (334)) и в (²) (с. 125, формула (III. 42)) после элементарных преобразований переходят в (2.4). Отметим еще, что формула (2.48) ((¹), с. 109) при $a = \pi - \alpha$, $b = \pi + \alpha$ после замены переменных $x = \xi + \pi$, $\tau = \eta + \pi$ также переходит в формулу (2.4).

В предельном случае $\alpha = \pi$ уравнения (1.1) и (1.9) или же (2.4) переходят в известные формулы обращения Гильберта (⁸), причем следует учесть условие разрешимости уравнения (1.1) при $\alpha = \pi$.

Институт механики Академии наук Армении

Առաձգականության տեսության պարբերական կոնտակտային և խառը խնդիրների ինտեգրալ հավասարման շրջանի բանաձևի մասին

Կոշու և Հիլբերտի կորիզների միջև եղած կապի հիման վրա աշխատանքում ստացված է առաձգականության տեսության պարբերական կոնտակտային ու խառը խնդիրներում հաճախ հանդիպող Հիլբերտի կորիզով առաջին սերի եզակի ինտեգրալ հավասարման շրջանի բանաձևը: Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ այդ բանաձևը համարժեք է նախկինում ուրիշ հեղինակների կողմից ստացված համապատասխան բանաձևերին, թեև իր կառուցվածքով փոքր ինչ տարբերվում է վերջիններից: Նշվում է նաև, որ ստացված բանաձևը մի շարք դեպքերում ավելի հարմար կարող է լինել:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. И. Я. Штаерман, Контактная задача теории упругости, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
2. В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин, Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках, Наукова думка, Киев, 1976.
3. Л. Т. Бережницкий, В. В. Панасюк, Н. Г. Стащук, Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле, Наукова думка, Киев, 1983.
4. Л. И. Чибрикова Уч. зап. Казанского гос. ун-та, т. 122, кн. 3, с. 95—124 (1962).
5. Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, Наука, М., 1977.
6. Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Наука М., 1966.
7. В. М. Александров С. М. Мхитарян, Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками, Наука, М., 1983.
8. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Наука, М., 1968.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Н. С. Мелкумян

Об антиплоском вдавливании двух жестких штампов в упругую полуплоскость с вертикальной выходящей на границу трещиной

(Представлено чл.-корр. АН Армении Б. Л. Абрамяном 4/XI 1991)

Рассматривается антиплоская контактная задача для упругой изотропной полуплоскости ($X \geq 0$) с вертикальной конечной трещиной ($0 < x < a$), выходящей на границу. На конечных участках горизонтальной границы полуплоскости прикреплены два штампа конечных размеров ($b \leq |y| \leq c$), симметрично расположенные относительно оси трещины.

Принимается, что на штампы действуют силы, приводящие к состоянию антиплоской деформации.

Задача решена методом Фурье в перемещениях.

В силу кососимметрии граничных условий достаточно рассматривать только квадрант ($0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$) со смешанными граничными условиями.

Решение задачи ищется в виде сумм интегралов Фурье. Для определения неизвестных плотностей интегралов Фурье получена система парных и тройных интегральных уравнений. Эта система в свою очередь сводится к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода. Доказана разрешимость этого уравнения, в частности, решение может быть найдено методом последовательных приближений.

По известным формулам можно определить напряжения и перемещения в любой точке полуплоскости.

В частности, получены формулы для определения напряжений вне трещины и перемещения ее берегов. Выделена особенность и вычислен коэффициент интенсивности напряжений на конце трещины.

При приравнивании значения коэффициента интенсивности напряжений к критической величине по теории хрупкого разрушения материала получается выражение, которое определяет распространение трещины и ее устойчивость.

В частном случае, когда длина трещины стремится к нулю, получается антиплоская задача теории упругости для полуплоскости без трещины. В этом случае решение задачи получается в замкнутом виде.

В силу кососимметрии достаточно рассматривать только область квадранта, при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \tau_{xx}(0, y) &= 0, & 0 < y < b \\ u_z(0, y) &= f_1(y), & b < y < c \\ \tau_{xx}(0, y) &= 0, & c < y < \infty \\ \tau_{xy}(x, 0) &= f_2(x), & 0 < x < a \\ u_z(x, 0) &= 0, & a < x < \infty. \end{aligned} \quad (1)$$

Решение задачи ищется в виде сумм интегралов Фурье (1):

$$u_z(x, y) = \int_0^\infty A(\alpha) e^{-\alpha y} \cos \alpha y d\alpha + \int_0^\infty C(\beta) e^{-\beta y} \cos \beta x d\beta. \quad (2)$$

Тогда для касательных напряжений имеются:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -G \int_0^\infty \alpha A(\alpha) e^{-\alpha y} \cos \alpha y d\alpha - G \int_0^\infty \beta C(\beta) e^{-\beta y} \sin \beta x d\beta, \\ \tau_{xy} &= -G \int_0^\infty \alpha A(\alpha) e^{-\alpha y} \sin \alpha y d\alpha - G \int_0^\infty \beta C(\beta) e^{-\beta y} \cos \beta x d\beta. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $A(\alpha)$ и $C(\beta)$ неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий (1). После удовлетворения граничным условиям (1) получается следующая система «тройных» и «парных» интегральных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} -G \int_0^\infty \alpha A(\alpha) \cos \alpha y d\alpha &= 0, & 0 < y < b \\ \int_0^\infty A(\alpha) \cos \alpha y d\alpha &= f_1(y) - \int_0^\infty C(\beta) e^{-\beta y} d\beta, & b < y < c \\ -G \int_0^\infty \alpha A(\alpha) \cos \alpha y d\alpha &= 0, & c < y < \infty \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^\infty \beta C(\beta) \cos \beta x d\beta &= -\frac{1}{G} f_2(x), & 0 < x < a \\ \int_0^\infty C(\beta) \cos \beta x d\beta &= -\int_0^\infty A(\alpha) e^{-\alpha x} d\alpha, & a < x < \infty \end{aligned} \right. \quad (5)$$

«Парные» интегральные уравнения, подобные (5), рассматривались в работах (2-4) и в других.

При использовании результатов работ (3, 4) для функции $C(\beta)$ получается следующее выражение из (5):

$$C(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \varphi_1(t) J_0(\beta t) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^{\bar{a}} \alpha A(\alpha) d\alpha \int_a^{\bar{a}} t K_0(\alpha t) J_0(\beta t) dt, \quad (6)$$

где $J_1(z)$ — функция Бесселя первого рода с действительным аргументом, $K_1(z)$ — функция Макдональда.

«Тройные» интегральные уравнения, подобные (4), рассматривались в работе (5) и в других.

Используя результаты работы (5), из (4) получаем:

$$A(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* J_{2n-1}(c\alpha); \quad (7)$$

$$A_n = (-1)^{n+1} A_n^*; \quad (8)$$

$$A_n = 2\xi(0) \sin \frac{\lambda}{2} + 4n(1-n) \sin^3 \frac{\lambda}{2} \times$$

$$\times \int_0^1 s \xi(s) F\left(n+1, -n; 2; s^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}\right) ds; \quad (9)$$

$$\xi(s) = \frac{4}{\pi} \int_0^s \frac{\mu \psi' \left[2 \arcsin \left(\mu \sin \frac{\lambda}{2} \right) d\mu \right]}{\sqrt{s^2 - \mu^2}} + Q \quad (10)$$

$$b = C \cos \frac{\lambda}{2}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \psi' \left[2 \arcsin \left(\mu \sin \frac{\lambda}{2} \right) \right] = & -\frac{c}{2} \mu \sin \frac{\lambda}{2} f_1 \left(e \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}} \right) + \\ & + \frac{c\mu}{2} \sin \frac{\lambda}{2} \int_0^{\bar{\beta}} C(\beta) e^{-\beta c \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}}} d\beta, \end{aligned} \quad (12)$$

где $F(\alpha, \mu; \gamma; z)$ — гипергеометрический ряд, Q — постоянная, которая должна быть найдена путем подстановки (7) и (10) во второе уравнение из (4), при $y = b$.

Путем подстановки (6) и (8) в (7), с учетом (9), (10), (11) и (12), для определения функции $A(\alpha)$ получается интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода

$$A(\alpha) = \Psi(\alpha) + \int_0^{\bar{\alpha}} A(\gamma) K(\gamma, \alpha) d\gamma, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega(\alpha) = & 2Q \sin \frac{\lambda}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{2n-1}(c\alpha)}{(-1)^{n+1}} + \\ & + 2Q \sin^3 \frac{\lambda}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1-n)}{(-1)^{n+1}} F\left(-1+n, -n; 2; \sin^2 \frac{\lambda}{2}\right) J_{2n-1}(c\alpha) - \\ & - \frac{4c}{\pi} \sin^4 \frac{\lambda}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1-n)}{(-1)^{n+1}} F\left(-1+n, -n; 2; \sin^2 \frac{\lambda}{2}\right) J_{2n-1}(c\alpha) \times \\ & \times \int_0^s \frac{\mu^2}{\sqrt{s^2 - \mu^2}} f_1\left(c - \sqrt{-1 - \mu^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}}\right) d\mu + \\ & + \frac{8c}{\pi^2} \sin^4 \frac{\lambda}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1-n)}{(-1)^{n+1}} F\left(-1+n, -n; 2; \sin^2 \frac{\lambda}{2}\right) \times \\ & \times J_{2n-1}(c\alpha) \int_0^{\bar{\alpha}} d\beta \int_0^{\bar{\beta}} \frac{\mu^2}{\sqrt{s^2 - \mu^2}} e^{-\beta c \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}}} d\mu \int_0^{\bar{\alpha}} \varphi_1(t) J_0(\beta t) dt; \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(\gamma, \alpha) = & -\frac{8c}{\pi^2} \sin^4 \frac{\lambda}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1-n)}{(-1)^{n+1}} F\left(-1+n, -n; 2; \sin^2 \frac{\lambda}{2}\right) \times \\ & \times J_{2n-1}(c\alpha) \int_0^{\bar{\alpha}} d\beta \int_0^{\bar{\beta}} \frac{\mu^2}{\sqrt{s^2 - \mu^2}} e^{-\beta c \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}}} d\mu \int_0^{\bar{\alpha}} \gamma t K_0(\gamma t) J_0(\beta t) dt. \quad (15) \end{aligned}$$

Если следовать (6) и иметь в виду асимптотическое разложение функций Бесселя и Макдональда для больших α , получается, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Omega(\alpha) = 0, \quad \int_0^{\bar{\alpha}} |K(\gamma, \alpha)| d\gamma < 1. \quad (16)$$

Значит, интегральное уравнение (13) можно решить методом последовательных приближений. Далее, по формуле (6) определяется искомая функция $C(\beta)$.

Напряжения и перемещения по известным формулам (2) и (3) будут определены в любой точке полуплоскости. В частности, напряжения вне трещины и перемещения берегов трещин ($y=0$) определяются формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(x, 0) = & \frac{2}{\pi} Gx \frac{\varphi_1(a)}{a\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{2}{\pi} \frac{Gx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \int_0^{\bar{\alpha}} a A(a) K_0(a\alpha) d(a) - \\ & - \frac{2}{\pi} Gx \int_0^{\bar{\alpha}} \frac{t\varphi_1(t) - \varphi_1(t)}{t^2 \sqrt{x^2 - t^2}} dt + \frac{2}{\pi} Gx \int_0^{\bar{\alpha}} a A(a) \int_0^{\bar{\alpha}} \frac{[K_0(at)]' dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} da; \quad (17) \end{aligned}$$

$$a < x < \infty;$$

$$u_z(x, 0) = \int_0^{\infty} A(\alpha) e^{-\alpha x} d\alpha + \frac{2}{\pi} \int_x^a \frac{\varphi_1(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt - \\ - \frac{2}{\pi} \int_a^{\infty} \alpha A(\alpha) d\alpha \int_x^{\infty} \frac{t K_0(\alpha t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt, \quad 0 < x < a. \quad (18)$$

Коэффициент особенности K_{III} имеет вид

$$K_{III} = \frac{2}{\pi} Gx \left\{ \frac{\varphi_1(a)}{a} - \int_0^{\infty} \alpha A(\alpha) K_0(\alpha a) d\alpha \right\}. \quad (19)$$

Приравнивая значение коэффициента интенсивности напряжений (19) к критической величине ($K_{III} = K_c$) по теории хрупкого разрушения (6), получим выражение, которое определяет распространение трещины и ее устойчивость.

Институт механики
Академии наук Армении

Ն. Ս. ՄԵԼԻՔՈՒՄՅԱՆ

Եզր դուրս եկող ուղղաձիգ նախով առաձգական կիսահարթության
երկու կողմ դրոշմներով հակահարթ ճնշման մասին

Դիտարկվում է հակահարթ կոնտակտային խնդիր եզր դուրս եկող ուղղաձիգ, վերջավոր ճաքով առաձգական, իզոտրոպ կիսահարթության համար: Կիսահարթության հորիզոնական եզրում ամրակցված են ճաքի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ վերջավոր չափերի երկու դրոշմներ:

Ընդունված է, որ դրոշմների վրա ազդում են հակահարթ դեֆորմացիոն վիճակի հանգեցնող ուժեր:

Ստացված են ճաքի դուրս լարումները և ճաքի ափերի տեղափոխությունները որոշելու համար բանաձևեր: Հաշվարկված է ճաքի ծայրում լարումների ինտենսիվության գործակիցը և առանձնացված է եզակիությունը:

Հստակ նյութի փխրուն քայքայման տեսության, լարումների ինտենսիվության գործակիցը հավասարեցնելով կրիտիկական արժեքին, ստացվում է բանաձև, որը որոշում է ճաքի տարածումը և նրա կայունությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱՇԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 В. Новацкий, Теория упругости, Мир, М., 1975. 2 Я. С. Уфлянд, Метод парных уравнений в задачах математической физики, Наука, Л., 1977. 3 В. С. Токоян, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 21, № 3 (1968). 4 В. С. Токоян, ДАН АрмССР, т. 37, № 5 (1963). 5 В. С. Токоян, А. Ф. Минасян, ДАН АрмССР, т. 62, № 1 (1976). 6 Г. П. Черепанов, Механика хрупкого разрушения, Наука, М., 1974.

ФИЗИКА

УДК 621.315.592

Ф. В. Гаспарян, Г. Г. Агасарян

Новый механизм внутреннего усиления в инжекционных фотодиодах из компенсированного полупроводника

(Представлено чл.-корр. АН Армении В. М. Арутюняном 1/VII 1991)

Известно, что с помощью инжекционных фотодиодов (ИФ) возможно создание фотоприемников ближнего и среднего ИК диапазона, управляемых светом генераторов, переключателей, элементов памяти (1-3). ВАХ ИФ однозначно определяется распределением напряженности электрического поля (НЭП) в базовой области, а оно в свою очередь обусловлено условием компенсации (2, 9). Известные технологические приемы введения в объем полупроводника компенсирующих примесей дают возможность четко контролировать распределение глубоких уровней (ГУ).

Обычно распределение примесей подчиняется гауссовскому распределению. Известно, что создание градиента концентрации легируемых примесей способствует увеличению эффективности солнечных элементов на 10—15% (10), инжекционного усиления в ИК фотоприемниках—на порядок (2, 9).

Ниже представлены результаты теоретического исследования влияния неоднородного распределения примесных атомов, создающих глубокие уровни в запрещенной зоне полупроводника на распределение напряженности электрического поля, фоточувствительность и коэффициент инжекционного усиления p^+nn^+ структур из кремния.

На рис. 1 изображена схематическая картина изучаемой p^+nn^+ структуры (а, б, в), ее энергетическая зонная диаграмма (г) и кривая распределения примесных атомов по глубине базы (д). Здесь d — длина, W — толщина базы, $h\nu$ — энергия падающего кванта излучения. Примем, что концентрация мелких доноров N_D равномерно распределена по всей базе, а ГУ с концентрацией $N_A(x)$ распределены равномерно (рис. 1, д):

$$N_A(x) = N_{A1} \exp(-a_1 x), \quad 0 \leq x \leq x_1,$$

$$N_A(x) = N_{A0} = \text{const}, \quad x_1 < x \leq d, \quad a_1 x_1 = \ln \frac{N_{A1}}{N_{A0}}. \quad (1)$$

При рассмотрении явления токопрохождения в компенсированном полупроводнике в теории обычно принимают несколько приближений ⁽²⁾:

а) структура считается «длинной», применяется дрейфовое приближение;

б) допускается выполнимым условие квазинейтральности базы;

в) крайние p^+n и n^+n контакты считаются идеально инжектирующими.

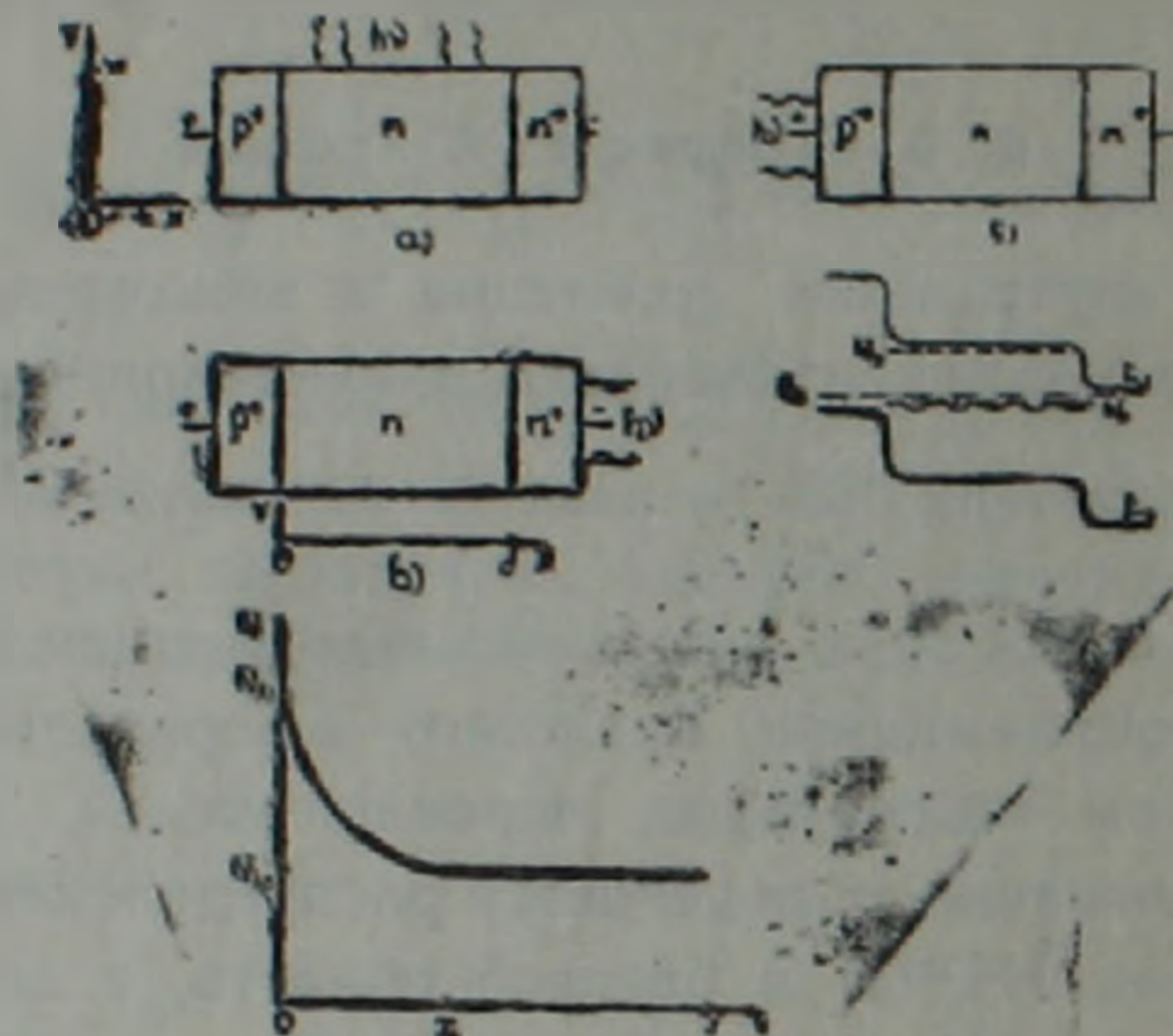


Рис. 1. Схематическая картина ИФ со структурой p^+nn^+ (а, б, в). ее энергетическая зонная диаграмма (г) и профиль распределения примесных атомов (д)

Рассмотрим влияние света из области собственного поглощения на характеристики ИФ (рис. 1), изготовленного из полупроводника, компенсированного примесью, создающей акцепторный уровень в верхней половине запрещенной зоны. Такая ситуация характерна для $Si < Ag >$. С помощью уравнения непрерывности дырочного тока и выражения для концентрации неосновных носителей p , полученного для умеренного уровня инжекции ⁽²⁾, получим следующее дифференциальное уравнение для напряженности электрического поля E :

$$\frac{EdE}{1 - \frac{eu_n N_1 F \tau_p}{j \beta n_1} E} = \frac{j \beta}{eu_n u_p \tau_p N_D} dx. \quad (2)$$

Здесь F — световой фактор (интенсивность излучения), представляющий собой произведение плотности фотонов N_Φ на коэффициент поглощения α и квантовый выход η .

$$a_1 = \frac{1}{\theta_1} - \frac{b+2}{b}, \quad b = \frac{u_n}{u_p}, \quad \theta_1 = \frac{u_n}{w_p}, \quad K = \frac{b}{1+b}, \quad \gamma = \frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{b},$$

$$n_0 = \frac{j}{eu_n E}, \quad N_1 = \gamma N_D + \frac{n_1}{K} + \frac{N_A(x)}{b}, \quad \beta = 1 + \frac{N_A(x) - N_D}{n_1}.$$

Остальные обозначения в (2) обычные ⁽²⁾. Уравнение (2) решается методом последовательных приближений с помощью граничного условия $E = 0, x = 0$. В нулевом приближении для E получим выражение

$$E_0 = \left(\frac{2\beta/x}{e\mu_n \mu_p \tau_p N_D} \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Оно, естественно, совпадает с темновым выражением НЭП (см., например ⁽²⁾).

В дальнейшем, при решении уравнения (2) в первом приближении, рассмотрим три случая направления падения излучения (см. рис. 1).

В случае, когда направление падения излучения перпендикулярно каналу тока, принимая легко выполнимое условие $\alpha W < 1$, можно не учитывать ослабление интенсивности излучения в направлении X (рис. 1, а) и провести расчеты при условии $F = F_0 = \text{const}$. Тогда в первом приближении из (2) и (3) получим следующее выражение для НЭП E

$$E_1 = E_0 \left[1 - \frac{2N_1 \tau_p F_0}{3n_1 N_D} \left(\frac{2ebN_D x}{\beta \tau_p} \right)^{1/2} \right]. \quad (4)$$

Из (4) следует, что влияние освещения приводит к уменьшению E , но существенно не влияет на характер ее распределения. Это имеет простое физическое объяснение—под влиянием излучения в полупроводнике создаются избыточные фотоносители, растет проводимость базы, падает НЭП на ней. ВАХ можно получить интегрированием $E_1(x)$ по всей базе, считая, что распределение (4) уже полностью охватило большую часть базы. Тогда падение напряжения на базе будет равно

$$V = \int_0^d E_1(x) dx,$$

откуда

$$j_1 = \frac{9}{8} e\mu_n \mu_p \tau_p \frac{N_D}{\beta d^3} \left(V + \frac{N_1 F_0 d^2}{3n_1 \mu_p N_D} \right)^2. \quad (5)$$

Как и следовало ожидать, предсрывная ВАХ имеет квадратичную форму. Токовая фоточувствительность S_i определяется выражением

$$S_i = \frac{I_\Phi}{SP_{\text{изл}}} = \frac{Si_\Phi}{SP_{\text{изл}}} = \frac{j_\Phi}{P_{\text{изл}}}. \quad (6)$$

Где I_Φ — фототок, j_Φ — плотность фототока, которая определяется из (5):

$$j_\Phi = \frac{ebd\tau_p N_1^2 F_0^2}{8\beta n_1^2 N_D}.$$

$P_{\text{изл}}$ — плотность мощности падающего излучения, которая определяется через поток фотонов N_Φ выражением

$$P_{\text{изл}} = h\nu \cdot N_{\Phi} = \frac{hc}{\lambda} N_{\Phi},$$

h — постоянная Планка, c — скорость света, λ — длина волны излучения.

Вспомним, что по определению $F_0 = \eta N_{\Phi}$. Примем $\eta = 1$, и воспользуемся выражением $\alpha(\lambda)$ для межзонного прямого поглощения (11)

$$\alpha(\lambda) = \frac{2e^2 (2m_r)^{1/2} \pi \left(\frac{hc}{\lambda} - E_g \right)^{3/2}}{3\epsilon_0 m_0^2 h^2 c n_n \frac{hc}{\lambda}} \quad (7)$$

Здесь E_g — ширина запрещенной зоны полупроводника, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость среды, m_0 — масса свободного электрона, n_n — коэффициент преломления полупроводника, m_r — приведенная масса ($m_r = m_n m_p / (m_n + m_p)$), m_n и m_p — эффективные массы электронов и дырок. Используя выражения (6)–(7), для токовой фоточувствительности получим выражение

$$S_{\text{п}} = \frac{ebd\tau_p N_1^2}{\beta n_1^2 N_D} \cdot P_{\text{изл}} m_r \left(\frac{m_r}{m_0} \right)^4 \left(\frac{4\pi e^2}{3h^2 c n_n \epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{\lambda}{hc} \cdot \left(1 - \frac{\lambda E_g}{hc} \right)^{3/2} \quad (8)$$

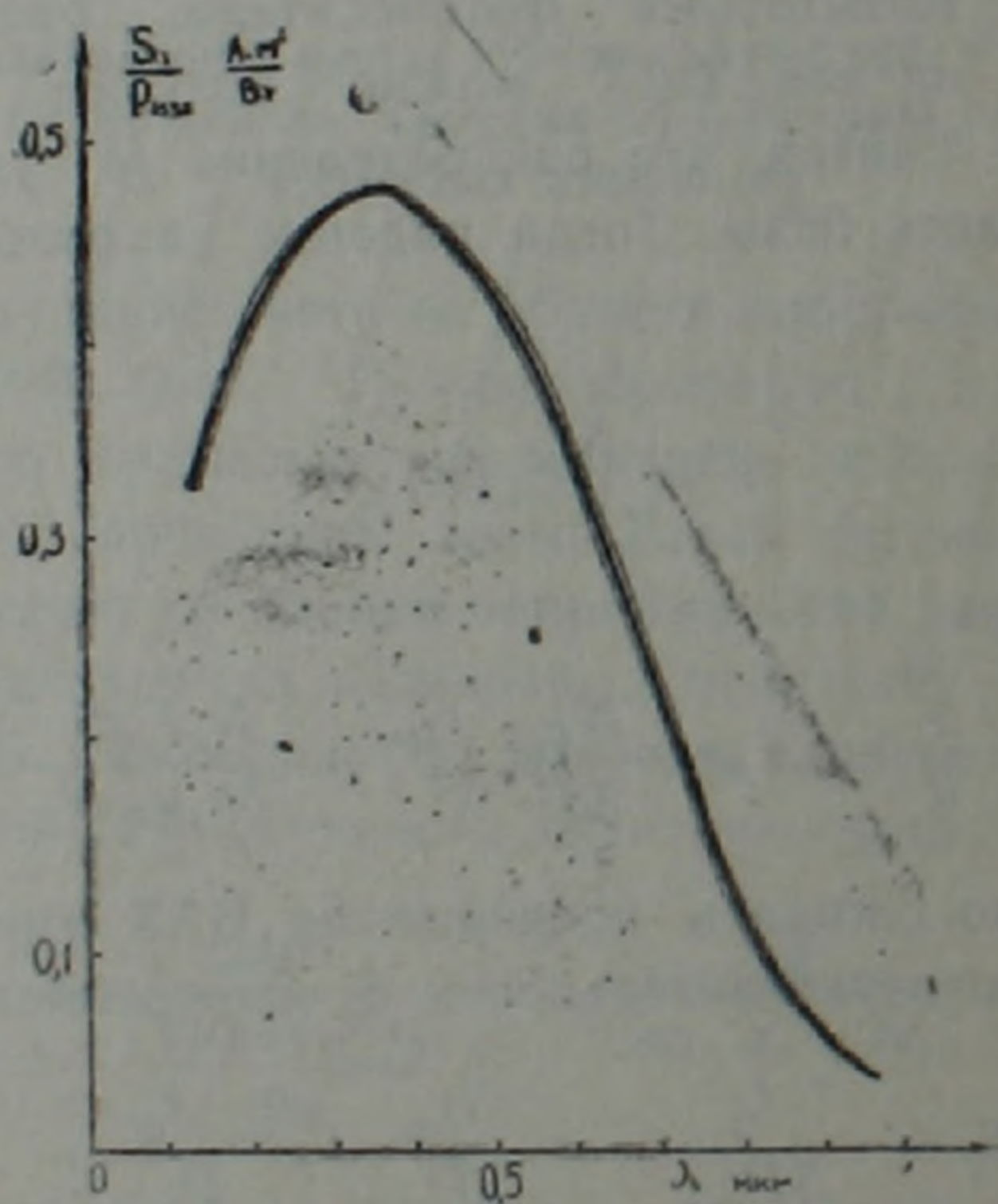


Рис. 2. Спектральная зависимость фоточувствительности $S_{\text{п}}$ при $T=300$ К

Спектральная зависимость $S_{\text{п}}$ для случая $n\text{-Si}(\text{Ag})$ представлена на рис. 2. Максимальное значение спектральной фоточувствительности находится при $\lambda \simeq 0,3$ мкм и равно $\frac{S_{\text{п max}}}{P_{\text{изл}}} \simeq 0,45$ А·м²/Вт. Вольтовая фоточувствительность будет равна

$$S_{01} = \frac{V_{\Phi}}{SP_{\text{изл}}} = \frac{2d^2 N_1}{9S u_p n_1 N_D} \cdot \frac{\pi e^2 (2m_r)^{1/2}}{\epsilon_0 m_0^2 h^2 c n_n} \cdot \left(\frac{\lambda}{hc} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{\lambda E_F}{hc} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Коэффициент инжекционного усиления $(^1)$ в этом случае равен

$$G = \frac{N_1}{n_1} \left(F_0 + \frac{n_T}{\tau_n} \right) \left(\frac{ebd \tau_p}{2\beta j N_D} \right)^{1/2}, \quad (10)$$

где n_1 — концентрация тепловых равновесных электронов, τ_n — время жизни электронов. При вышеуказанных параметрах для $n\text{-Si} \langle \text{Ag} \rangle$ $G > 1$.

Рассмотрим случай, когда направление падения излучения совпадает с каналом тока (рис. 1 б). Так как в направлении X длина базы d больше диффузионных длин носителей тока и имеет место существенное ослабление интенсивности излучения, необходимо учесть, что

$$F = F_0 \exp(-\alpha x). \quad (11)$$

Подставляя нулевое решение (3) в знаменатель левой части дифференциального уравнения (2), с учетом (11) получим выражение НЭП в первом приближении (E_2)

$$E_2 = E_0 \left\{ 1 - \frac{2N_1 F_0 \tau_p}{3n_1 N_D} \left(\frac{2ebN_D x}{\beta j \tau_p} \right)^{1/2} \cdot \left(1 - \frac{3}{5} \alpha x \right) \right\}^{1/2}. \quad (12)$$

Интегрированием $E_2(x)$ от 0 до d получим ВАХ

$$j_2 = \frac{9}{8} e u_n u_p \tau_p \frac{N_D}{\beta d^3} \left[V + \frac{F_0 N_1 d^2}{3u_p n_1 N_D} \left(1 - \frac{2}{5} \alpha d \right) \right]^2. \quad (13)$$

Сравнение показывает, что $\frac{E_2}{E_1} > 1$, а $\frac{S_{12}}{S_{11}} = \frac{j_2}{j_1} < 1$, где S_{11} — фоточувствительность в случае, когда направление падения излучения совпадает с направлением канала тока. Очевидно, что $S_{12} < S_{11}$.

Рассмотрим случай, когда направление падения излучения противоположно направлению тока (рис. 1, в). Примем, что $F = F_0 \exp X[a(d-x)]$. Расчеты, проведенные для этого случая, дают следующие результаты:

Напряженность электрического поля E_3

$$E_3 = E_0 \left\{ 1 - \frac{2N_1 F_0 \tau_p}{3n_1 N_D} \left(\frac{2ebN_D x}{j \tau_p} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{3}{5} \alpha x \right) \exp(-\alpha d) \right\}^{1/2}. \quad (14)$$

Вольтамперная характеристика

$$j_3 = \frac{9}{8} e u_n u_p \tau_p \frac{N_D}{\beta d^3} \left\{ V + \frac{N_1 F_0 d^2}{3u_p n_1 N_D} \left(1 + \frac{2}{5} \alpha d \right) \exp(-\alpha d) \right\}^2. \quad (15)$$

Сравнение полученных результатов показывает, что

$$\frac{E_3}{E_1} < 1, \quad \frac{j_3}{j_1} > 1.$$

Для вольтовой фоточувствительности получим следующее выражение:

$$S_{\text{вз}} = \frac{2N_1 d^2}{9n_1 u_p N_D S} \cdot \frac{\pi e^2 \sqrt{2m_r}}{\epsilon_0 h^2 c n} \left(\frac{2m_r}{m_0} \right)^2 \sqrt{\frac{\hbar c}{\lambda}} \left(1 - \frac{iE_g}{\hbar c} \right)^{3/2} \times \\ \times \left[1 + \frac{4\pi d r^2 \sqrt{2m_r}}{15\epsilon_0 h^2 c n_n} \left(\frac{2m_r}{m_0} \right)^2 \sqrt{\frac{\hbar c}{\lambda}} \left(1 - \frac{iE_g}{\hbar c} \right)^{3/2} \right] \times \\ \times \exp \left[- \frac{2\pi d^2 \sqrt{2m_r}}{3\epsilon_0 h^2 c n_n} \left(\frac{2m_r}{m_0} \right)^2 \sqrt{\frac{\hbar c}{\lambda}} \left(1 - \frac{iE_g}{\hbar c} \right)^{3/2} \right] \quad (16)$$

Следовательно

$$\frac{S_{\text{вз}}}{S_{\text{с1}}} = \left[1 + \frac{4\pi d e^2 \sqrt{2m_r}}{15\epsilon_0 h^2 c n_n} \left(\frac{2m_r}{m_0} \right)^2 \sqrt{\frac{\hbar c}{\lambda}} \left(1 - \frac{iE_g}{\hbar c} \right)^{3/2} \right] \times \\ \times \exp \left[- \frac{2\pi d e^2 \sqrt{2m_r}}{3\epsilon_0 h^2 c n_n} \left(\frac{2m_r}{m_0} \right)^2 \sqrt{\frac{\hbar c}{\lambda}} \left(1 - \frac{iE_g}{\hbar c} \right)^{3/2} \right] < 1. \quad (17)$$

Ясно, что в этом случае фоточувствительность будет сравнительно большей, чем $S_{\text{вз}}$, но меньшей, чем $S_{\text{с1}}$.

Таким образом, для оптимального функционирования рассматриваемого ИФ необходимо, чтобы излучение падало перпендикулярно каналу тока. Это естественно, так как в этом случае ослабление излучения в объеме полупроводника слабое, а фотоотклик велик.

Рассмотрим влияние неоднородной компенсации на работу ИФ. Рассмотрение, как и выше, проведем только для области квадратичной зависимости ВАХ до срыва. Кроме того примем, что излучение, длина волны которого соответствует краю поглощения Si, падает перпендикулярно каналу тока. Учтем также, что N_1 зависит от координаты (см. формулу (1)). В этом случае получим следующее уравнение для НЭП E :

$$\frac{EdE}{1 - \left| u_p \tau_p a_1 N_A(x) + \frac{eu_n \tau_p F N_1(x)}{j} \right| \frac{E}{n_1 \beta(x)}} = \frac{j \beta(x)}{eu_n u_p \tau_p N_D} \quad (18)$$

Из (18) легко получить ряд простейших случаев, рассмотренных в (2) (при отсутствии излучения $F=0$ или при однородном распределении компенсирующих примесей $a_1=0$). В нулевом приближении получим для НЭП

$$E_{\text{в0}} = \left\{ \frac{2jN_{A1}}{eu_n u_p \tau_p n_1 N_D a_1} |1 - \exp(-a_1 x) - \delta_2 a_1 x| \right\}^{1/2}, \quad (19)$$

где введено обозначение $\delta_2 = (N_D - n_1)/N_{A1}$. В первом приближении

$$E_v = E_{\text{в0}} \sqrt{1 - A^2(a_1, x, j, F)}, \quad (20)$$

где $A(a_1, x, j, F)$ сложная функция и здесь не приводится.

Максимальное значение НЭП смещается к тому контакту, где больше N_A . Вольтовая фоточувствительность, соответствующая случаю (20), имеет вид

$$S_{\text{вф}} = \frac{N_1' d^2}{9u_p n_1 N_D S} \cdot \frac{\pi e^2 \sqrt{2m_r}}{\epsilon_0 h^2 c n_A} \left(\frac{2m_r}{m_0} \right)^2 \sqrt{\frac{\lambda}{hc}} \left(1 - \frac{\lambda E_g}{hc} \right)^{3/4} \times \\ \times \left[\left(1 - \frac{x_1}{d} \right)^2 + \frac{6\delta_3 x_1 N_{A1}}{a_1 b N_1' d^2} \sqrt{\frac{a_1 x_1}{1 - \delta_4}} \right], \quad (21)$$

где

$$\delta_3 = \frac{1}{3\delta_5} [1 - \delta_5 (1 + \delta_4)] + \frac{a_1 d \delta_4}{5\delta_5} \left(1 + \frac{3}{2} \delta_5 \right) + \frac{1}{a_1 d} \left(1 + \frac{5}{2} \delta_4 \right);$$

$$\delta_4 = \frac{N_D - n_1}{N_{A0}}; \quad \delta_5 = \frac{N_{A1}}{(b_1 b - 1) N_D + (1 + b) n_1};$$

$$N_1' = \tau N_D + \frac{n_1}{K} + \frac{N_{A0}}{b}$$

Для определения влияния неоднородного распределения $N_A(x)$ на фоточувствительность сравним (21) с $S_{\text{вф}}$ (9) (для случая $N_A = \text{const}$)

$$\frac{S_{\text{вф}}}{S_{\text{вф1}}} = \left(1 - \frac{x_1}{d} \right)^2 + \frac{6\delta_3 x_1 N_{A1}}{a_1 b N_1' d^2} \sqrt{\frac{a_1 x_1}{1 - \delta_4}}. \quad (22)$$

Для p^+nn^+ структуры из Si (Ag) при $T = 300$ К значение $S_{\text{вф}}/S_{\text{вф1}}$ растет с единицы (при $x = 0$) до 3 (при $x = d$). Коэффициент градиентного усиления (1) $G = \frac{E_{\text{в}}}{E_1} > 1$.

Таким образом, помимо внутреннего инжекционного усиления фототока (4,6), в неоднородно компенсированных структурах возможно проявление нового механизма внутреннего усиления. Он обусловлен тем, что при неоднородном распределении примесей база разделяется на две (для случая закона (1)) области. Область $O-x_1$ более высокоомна, а область x_1-d — низкоомна. Происходит соответствующее перераспределение статической НЭП в базе. В результате этого поле еще более сосредотачивается в области $O-x_1$. Чем больше НЭП, тем сильнее она модулируется. А в данном случае модуляция $E_{\text{в}}(x)$ происходит за счет влияния излучения. Чем сильнее модулируется НЭП, тем сильнее изменяется ток, следовательно, растет фоточувствительность прибора.

Авторы признательны чл.-коор. АН Армении В. М. Арутюняну за полезные советы и интерес к работе.

Ереванский государственный университет

**ՆԵՐՖԻՆ ՈՒԺԵՂԱԾՄԱՆ ԼՈՐ ՄԵԽԱՆԻԳՄ ԿՈՄԱԿԵՆՍԱԾՎԱԾ ԿԻՍԱՀԱՂՈՐԴԻԶԻԳ
ԱԿՏՐԱՍՏՎԱԾ ԻՆԺԵԿՑԻՈՆ ՖՈՏՈՂԻՈՂՆԵՐՈՒՄ**

Տեսականորեն ուսումնասիրվել է կիսահաղորդիչը կոմպենսացնող խառնուրդային ատոմների անհամասեռ բաշխվածության, ինչպես նաև լուսային ճառագայթների տարրեր ուղղություններով անկման դեպքերի ազդեցությունը ինժեկցիոն ֆոտոդիոդի ֆոտոզգայնության, էլեկտրական դաշտի բաշխվածության և ինժեկցիոն ուժեղացման գործակցի վրա: Առաջարկվում է ազդանշանի ներքին ուժեղացման նոր մեխանիզմ կոմպենսացված կիսահաղորդիչներում՝ պայմանավորված խառնուրդային ատոմների անհամասեռ բաշխվածությամբ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Ր Յ Ո Ւ Ն

- ¹ В. М. Арутюнян, Генерационно-рекомбинационные эффекты и двойная инжекция в полупроводниках. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1977.
- ² Ф. В. Гаспарян, З. Н. Адамян, В. М. Арутюнян, Кремниевые фотоприемники, Изд. ЕГУ, 1989.
- ³ В. И. Стафеев, ФТП, т. 3, с. 2513—2516 (1961).
- ⁴ Б. М. Гарин, В. И. Стафеев, ФТП, т. 6, с. 78—84 (1972).
- ⁵ Б. М. Гарин, В. И. Стафеев, Тр. МФТИ, ч. II, с. 88—98, 1973.
- ⁶ V. M. Arutyunyan, Z. N. Adamyan, Electron Technology, v. 8, № 3/4, p. 47—54 (1979).
- ⁷ В. М. Арутюнян, Микроэлектроника, т. 11, № 6, с. 539—550 (1982).
- ⁸ V. M. Arutyunyan et al., Infrared Phys., v. 26, № 5, p. 267—272 (1986).
- ⁹ З. Н. Адамян, В. М. Арутюнян, Ф. В. Гаспарян, ФТП, т. 15, № 10, с. 1879—1882 (1981).
- ¹⁰ R. O. Bell, M. C. Cretella, 18-1b IEEE Photovoltaic Spec. Conf., Las Vegas, 21—23 Oct., p. 764, 1985.
- ¹¹ А. Амброзяк, Конструкция и технология полупроводниковых фотоэлектрических приборов. Сов. радио. М., 1970.

АСТРОФИЗИКА

УДК 524.354.6:532.132

А. Д. Седракян, академик АН Армении Д. М. Седракян

Уравнение динамики вращающейся нейтронной звезды
 с учетом изгиба вихрей

(Представлено 19 XI 1992)

Как показали наблюдения последнего скачка пульсара «Vela», его угловая скорость $\omega_c(t)$ до скачка и после эпохи релаксации является квазипериодической функцией времени с периодом порядка 10—20 дней ⁽¹⁾. Такое поведение пульсара можно объяснить, если учесть, что при скачке угловой скорости пульсара часть нейтронных вихрей должна изгибаться. Действительно, из-за наличия в «пре» фазе протонных кластеров, связанных с нейтронным вихрем, коэффициент трения между вихрем и нормальным веществом звезды резко уменьшается в точке перехода вихря из «пре» фазы в «Аеп» фазу. Поэтому при ускорении нормальной компоненты звезды часть нейтронного вихря, находящаяся в «пре» фазе, увлекается с нормальным веществом, а участок в «Аеп» фазе отстает от этого движения, благодаря чему возникает изгиб вихря в точке перехода этих фаз. Это приводит к тому, что на участок вихря в «Аеп» фазе, кроме силы трения, действует и сила упругости вихря. Под действием этих сил этот участок вихря совершает затухающие колебания относительно направления, параллельного оси вращения. Если учесть, что взаимодействие между вихрями слабое и их начальные изгибы происходят одновременно, то можно заключить, что их колебания будут синхронны.

При нахождении нестационарного решения для $\omega_c(t)$ в эпоху релаксации этими колебаниями можно пренебречь, так как основной вклад в решение $\omega_c(t)$ дают движения вихрей в «пре» фазе ⁽²⁾. Однако, как мы увидим ниже, после эпохи релаксации нестационарное решение $\omega_c(t)$ в основном определяется этими колебаниями.

Цель настоящей статьи—получение уравнений, описывающих вращение нейтронной звезды с учетом синхронного колебания участков вихрей, находящихся в «Аеп» фазе.

Система уравнений, описывающая рассмотренную задачу, суть уравнения динамики нормальной компоненты звезды и уравнения движения нейтронного вихря с учетом изгиба

Первое из них имеет следующий вид ⁽²⁾:

$$I_c \frac{d\Omega_c}{dt} = \frac{1}{q} \frac{I_s}{\theta^2} \frac{d\theta}{dt} - \gamma I_c \Omega_c^3. \quad (1)$$

Если учесть, что после эпохи релаксации $q = 1$, а

$$\Omega_s(t) = \frac{\omega_s(t)}{\omega_s(0)} = \frac{1}{\theta} \quad \text{и} \quad \Omega_c(t) = \frac{\omega_c(t)}{\omega_c(0)}, \quad (2)$$

то уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\frac{d\Omega_c}{dt} = -p \frac{d\Omega_s}{dt} - \gamma \Omega_c^3, \quad (3)$$

где $p = \frac{I_s}{I_c}$. Здесь I_c и I_s — моменты инерции частей звезды, имеющие угловые скорости ω_c и ω_s соответственно.

Вне эпохи релаксации для вихря в «пре» фазе можно ввести понятие среднего коэффициента трения между ним и нормальным веществом. Так как этот коэффициент большой, то сверхтекучее вещество, связанное с вихрями в «пре» фазе, будет двигаться вместе с нормальным веществом, а вихрь не будет изгибаться. С нормальным веществом будут двигаться также нейтронные вихри или их участки, находящиеся в «Аеп» фазе и имеющие координаты $r < r_1$ и $r > r_2$, где r_2 — радиус «пре» фазы, так как они пиннингованы с нормальной решеткой атомных ядер в «Аеп» фазе (3). Что касается участков нейтронных вихрей в «Аеп» фазе с координатами $r_1 < r < r_2$, то они свободны, и сверхтекучее вещество, связанное с ними, может вращаться с угловой скоростью ω_s , отличной от ω_c . После ускорения нормальной части звезды именно эти участки нейтронных вихрей изгибаются и совершают колебательное движение.

Из вышесказанного вытекает, что I_c есть сумма моментов инерции «пре» фазы, нормального вещества и пиннингованных участков вихрей, находящихся в «Аеп» фазе, а I_s — суммарный момент инерции непиннингованных участков нейтронных вихрей. Если движение вещества звезды с моментом инерции I_c подчиняется уравнению (3), то уравнение движения сверхтекучей жидкости с моментом инерции I_s можно получить из уравнения движения нейтронного вихря с учетом изгиба. Действительно, уравнение движения нейтронного вихря без изгиба имеет вид (2).

$$\frac{d\theta}{dt} = a [1 - \Omega_c \theta], \quad (4)$$

где

$$a = \frac{2\rho_s \omega_s^2}{\alpha^2 + \rho_s^2}, \quad \alpha = \frac{\eta}{\Gamma_0}, \quad \Gamma_0 = \frac{\hbar}{2m_n}.$$

Если учесть (2), то это уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d\Omega_s}{dt} = a \Omega_s (\Omega_c - \Omega_s). \quad (5)$$

Учет изгиба вихря приводит к появлению в уравнении (5) дополнительного момента сил, связанного с упругостью нейтронного вихря, следовательно, имеем

$$\frac{d\Omega_s}{dt} = \alpha\Omega_s(\Omega_c - \Omega_s) + \frac{M(t)}{I_s}, \quad (6)$$

где $M(t)$ — момент упругих сил, действующий на сверхтекучее вещество со стороны нейтронных вихрей.

Сначала получим стационарные (т. е. средние по времени) решения системы уравнений (3) и (6). Так как изменение угловой скорости $\Omega_s(t)$ будет следовать изменению $\Omega_c(t)$, то естественно предположить, что средние значения производных угловых скоростей $\dot{\Omega}_c$ и $\dot{\Omega}_s$ должны разниться друг другу, т. е. из (3) имеем

$$\dot{\Omega}_c = \dot{\Omega}_s = -\gamma \frac{I_c}{I} \Omega_c^3, \quad (7)$$

где $I = I_c + I_s$ — полный момент инерции нейтронной звезды. Из решения (7) в частности вытекает, что время жизни пульсаров $\tau_0 \sim \frac{I}{I_c \gamma \Omega_c^3}$. Подставляя решение (7) в уравнение (6), получим среднюю во времени разность угловых скоростей;

$$\overline{|\Omega_c - \Omega_s|} = \frac{1}{\alpha \tau_0 \Omega_s} = \frac{I}{I_c} \tau_0 \frac{1}{\Omega_s}. \quad (8)$$

где $\tau \sim \frac{1}{\alpha}$. Здесь мы учли, что $\overline{M(t)} = 0$, так как $M(t)$ периодическая функция времени. Из (8) видно, что $\overline{|\Omega_c - \Omega_s|} \ll 1$, т. е. $\overline{\Omega}_c \simeq \overline{\Omega}_s$. Докажем это, в частности, для пульсара „Vela“. Согласно работе (2), τ меняется от 4 до $3 \cdot 10^2$ дней, а $\tau_0 \sim 10^4$ лет, следовательно, $\frac{\tau}{\tau_0} \ll 1$. Если учесть также, что $\overline{\Omega}_s \simeq 1$ и $I \simeq I_s$, то окончательно получим $\overline{|\Omega_c - \Omega_s|} \ll 1$.

Итак, усредненные по времени решения уравнений (3) и (6) дают: $\overline{\Omega}_c = \overline{\Omega}_s = \text{const}$, $\overline{\Omega}_c = \overline{\Omega}_s \simeq 1$.

Для получения точных решений системы уравнений (3) и (6) сначала мы должны получить выражение для момента сил $M(t)$. Согласно работе (4), сила, связанная с изгибом вихря и действующая на участок нейтронного вихря в «Аен» фазе, имеет вид

$$\vec{F}^b = \epsilon \int [\vec{v} \text{rot } \vec{v}] dz, \quad (9)$$

где ϵ — энергия единицы длины нейтронного вихря, а $\vec{v}$ — единичный вектор, указывающий направление вихря. Следовательно, проекция момента сил на ось вращения, действующего на вихрь в целом, равна

$$M_z^b = \epsilon \int [\vec{r} [\vec{v} \text{rot } \vec{v}]]_z dz = \epsilon \int \{v_z (\vec{n} \text{rot } \vec{v}) - (\text{rot } \vec{v})_z (\vec{v} \vec{r})\} dz. \quad (10)$$

Из симметрии задачи вытекает, что вектор $\vec{v}$ не зависит от r и φ , следовательно $\vec{v} = \vec{v}(z)$ — функция только от z . Тогда имеем

$$(\text{rot } \vec{v})_r = -\frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \text{и} \quad (\text{rot } \vec{v})_z = 0.$$

Подставляя это в (10), окончательно получим

$$M_z^b = -\epsilon r \int v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} dz. \quad (11)$$

Если угловое смещение вихря от параллельности к оси вращения обозначить ϑ , то для v_z и v_φ получим следующие выражения:

$$v_z = \vartheta (z - z_0) \cos \vartheta \quad \text{и} \quad v_\varphi = \vartheta (z - z_0) \sin \vartheta, \quad (12)$$

где $\vartheta = 1$ при $z > z_0$ и $\vartheta = 0$ при $z < z_0$. Здесь z_0 — точка пересечения вихрем границы между „пре“ и „Аеп“ фазами. Отметим, что именно в этой точке и происходит изгиб нейтронного вихря. Из (12) легко получить

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = \delta(z - z_0) \sin \vartheta. \quad (13)$$

Подставляя (12) и (13) в (11), имеем

$$M_z^b = -2\epsilon r \cos \vartheta \sin \vartheta$$

и для малых ϑ окончательно получим

$$M_z^b = -2\epsilon r \vartheta. \quad (14)$$

Представим ϑ через разность угловых скоростей $\Omega_c - \Omega_s$. Азимутальное смещение участка нейтронного вихря в „Аеп“ фазе происходит из-за разности угловых скоростей $\Omega_c - \Omega_s$ и равняется

$$\Delta\varphi = \int (\Omega_c - \Omega_s) dt. \quad (15)$$

Если обозначить длину этого участка через $l(r)$, то

$$\vartheta l(r) = r \Delta\varphi.$$

Отсюда, учитывая (15), окончательно получим

$$\vartheta = \frac{r}{l(r)} \int (\Omega_c - \Omega_s) dt. \quad (16)$$

Если суммировать M_z^b по всем вихрям, которые потерпели изгиб, мы получим искомое выражение для $M(t)$:

$$M(t) = \int M_z^b n 2\pi r dr, \quad (17)$$

где $\mu = \frac{2\omega_s}{\Gamma_0}$ — равновесное значение плотности нейтронных вихрей. Если обозначить среднюю длину участка вихря в „Аеп“ фазе через l_0 и учесть, что $\varepsilon = \pi\rho_s \ln \frac{b}{a}$ и $I_s = \int r^2 dm_s$, где $dm_s = 2l_0\rho_s(2\pi r dr) = \rho_s dv$, то, подставляя (14) и (16) в выражение (17), окончательно получим

$$M(t) = v_0^2 \int (\Omega_c - \Omega_s) dt, \quad (18)$$

где

$$v_0^2 = \frac{2\pi\Gamma_0/\omega_s}{l_0^2} \ln \frac{b}{a}.$$

Система уравнений (3) и (6), описывающая вращение нейтронной звезды с учетом изгиба вихрей, окончательно примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_c}{dt} &= -\mu\Omega_s(\Omega_c - \Omega_s) - \frac{v_0^2}{I_c} \int (\Omega_c - \Omega_s) dt - \gamma\Omega_c^3; \\ \frac{d\Omega_s}{dt} &= \mu\Omega_s(\Omega_s - \Omega_c) + \frac{v_0^2}{I_s} \int (\Omega_c - \Omega_s) dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Полученная система уравнений (19) для искомых функций $\Omega_c(t)$ и $\Omega_s(t)$ является нелинейной. Однако если учесть, что угловые скорости Ω_c и Ω_s мало меняются, то (19) можно линеаризовать, подставляя $\mu\Omega_s = \mu = \text{const}$ и $\Omega_c^3 \approx 1$. Полученная таким образом система уравнений совпадает с уравнениями, приведенными в работе (5). Отметим только, что в этих уравнениях v_0 — некоторая феноменологическая постоянная, тогда как здесь мы получили конкретное выражение (18) для v_0 , исходя из физики поведения вихрей после скачка угловой скорости нейтронной звезды.

Оставляя нахождение решений системы уравнений (19) и их сравнение с наблюдениями на будущее, отметим только, что она содержит затухающие периодические решения для $\Omega_c(t)$ с периодом порядка

$$\omega_0 = \left(\frac{v_0^2}{I_s} \right)^{1/2}, \quad (20)$$

если выполняется условие $v_0^2 \gg \gamma I_s$. Можно показать, что для пульсара «Vela» это условие выполняется, и, следовательно, оценивая по формуле (20), получаем значение порядка нескольких десятков дней, что достаточно близко к значению, полученному из наблюдательных данных (1).

**Պատվող նեյտրոնային աստղերի դինամիկայի հավասարումներ
մոբիլների ծովան հաշվառմամբ**

Ստացված են նեյտրոնային աստղերի ոչ ստացիոնար պտույտը նկարագրող դինամիկայի հավասարումներ մոբիլների ծովան հաշվառմամբ, որոնք նկարագրում են բարախիչների անկյունային արագության կախումը ժամանակից նրանց հանկարծակի թռիչքից հետո Ցույց է տրված, որ այդ հավասարումները կարող են բացատրել «Vela» բարախիչի անկյունային արագության և նրա ածանցյալի դիտվող քվադրի-պարբերական վարքագիծը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ P. M. McCulloch, P. A. Hamilton, D. McConnell et al., Nature, v. 316, p. 822 (1990). ² Վ. Լ. Շելախյան, Լ. Մ. Շելախյան, ДАН СССР, т. 327, № 5, с. 1078 (1991). ³ P. B. Jones, Monthly Not. Roy. Astron. Soc., v. 245, p. 315 (1991). ⁴ Մ. Ա. Տեաթեսյան, Մ. Մ. Առաքելյան, ЖЭТФ, т. 40, с. 9-3 (1951). ⁵ F. K. Lamb, D. Pines, J. Shoham, Astrophys. J., v. 225, p. 582 (1978).

ГЕОФИЗИКА

УДК 650.837.2

В. Б. Гамоян, А. В. Гсворкян

Естественное электрическое поле пластообразного рудного тела

(Представлено чл.-корр. АН Армении Г. И. Тер-Степаняном 8.V 1991)

В геофизической литературе естественное электрическое поле пластообразной залежи прямоугольной формы в грубом приближении представляется как поле системы двух равномерно заряженных электродов—линейного, расположенного в голове пласта и заряженного отрицательно, и пластообразного, расположенного в плоскости пласта и заряженного положительно (¹). Для вертикального пласта прямоугольной формы выражение потенциала такой системы имеет вид

$$U = \frac{\rho_l}{4\pi} \left[\int_{-l}^l \int_{-b}^b \frac{d\xi d\zeta}{V(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2} - \int_{-l}^l \frac{d\xi}{V(x-\xi)^2 + y^2 + z^2} \right], \quad (1)$$

где ρ —удельное сопротивление среды; i —суммарный ток, протекающий через электроды; $2l$ —длина пласта; $2b$ —протяженность пласта на глубину; ξ и ζ —текущие координаты по пласту.

Описанная модель не дает полного объяснения особенностей пространственного распределения параметров ЕЭП, полученных при натурных исследованиях, выполненных на многих сульфидных месторождениях (^{2,3}).

С целью уточнения модели ЕЭП пластообразного тела нами изучено распределение скачка потенциала (ΔU) на границе сульфидных тел типичных месторождений Армении. Путем статистического анализа полученных данных выведена формула изменения ΔU по вертикальной оси (по горизонтальным направлениям ΔU практически постоянный):

$$\frac{\partial}{\partial z} \Delta U = \begin{cases} -d_1 \sqrt{\frac{\xi}{1+\zeta^2}}, & \text{при } \zeta > 0 \\ d_2 \sqrt{\frac{\xi}{1+\zeta^2}}, & \text{при } \zeta < 0, \end{cases} \quad (2)$$

где d_1 и d_2 —постоянные, определяемые геоэлектрхимическими особенностями месторождения.

С целью теоретического исследования распределения ЕЭП пластообразного тела принята прямоугольная система координат XYZ . Ось Y направлена по простиранию рудного тела, Z —вертикально, центр координатной системы выбран на вертикальной оси симметрии рудного тела на уровне $1/4$ высоты, считая с верхней границы его.

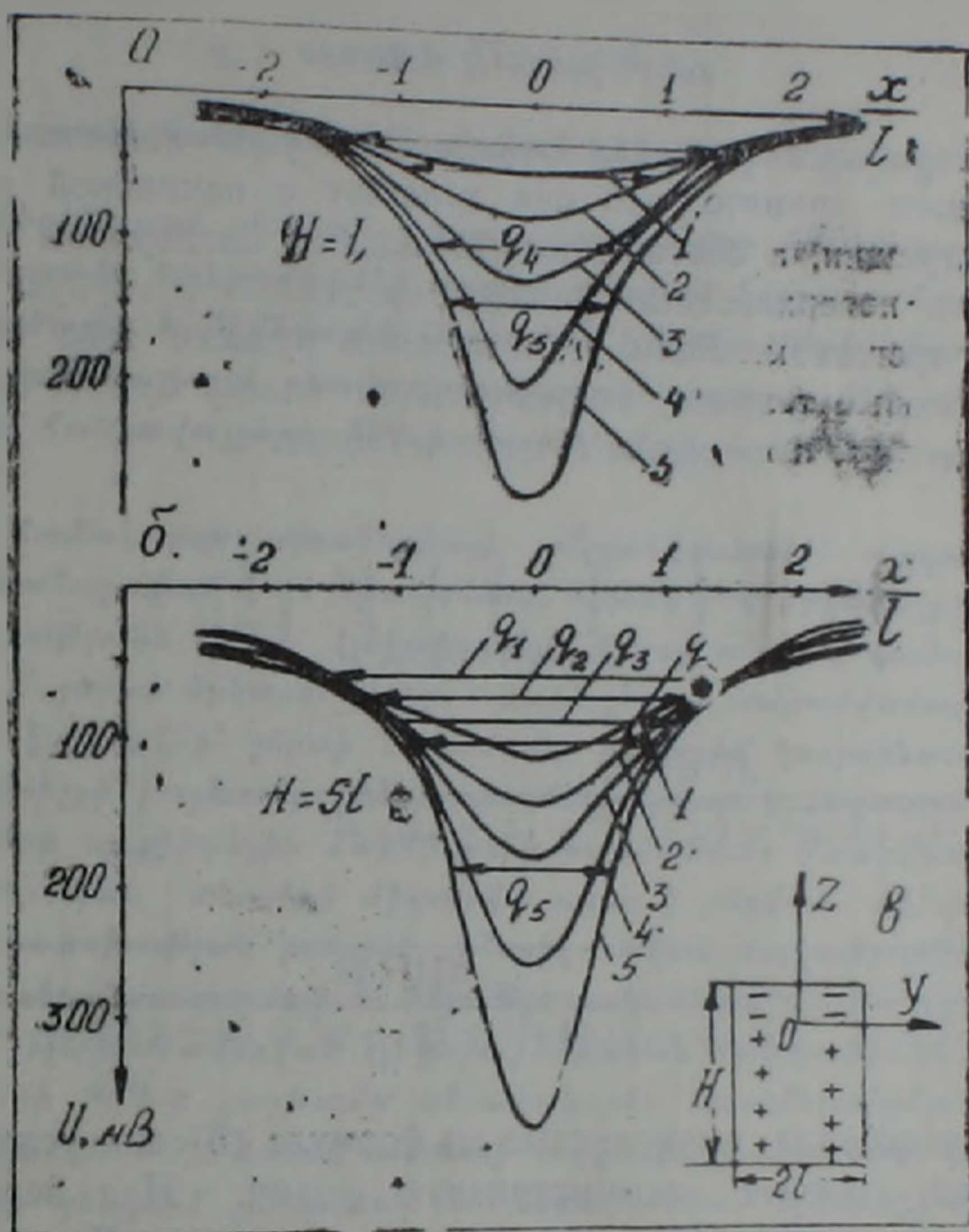
В случае вертикального залегания пласта прямоугольной формы (рисунок, в) выражение потенциала в полном пространстве будет иметь вид

$$U = \frac{\rho}{4\pi} \left[d_2 \int_0^l \int_{-\delta_2}^0 \frac{V \bar{\xi} d\eta d\zeta}{V(1-\zeta)^2 [x^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]} - d_1 \int_{-l}^l \int_0^{\delta_1} \frac{V \bar{\zeta} d\eta d\zeta}{V(1-\zeta)^2 [x^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]} \right], \quad (3)$$

где δ_1 и δ_2 —высоты верхней и нижней частей рудного тела, служащих источниками отрицательного и положительного полей соответственно; η —текущая координата по контакту рудного тела по направлению оси Y .

По формулам (1) и (3) вычислены значения потенциала поля по профилям, перпендикулярным к плоскости модели на разных горизонтах. Профили выбраны на дневной поверхности, выше верхней границы модели на 10 м (1) и ниже верхней границы на 20, 55, 75 и 90 м (2, 3, 4 и 5 соответственно). При расчетах приняты: $2l = 400$ м; $\delta_1 + \delta_2 = 95$ м; $d_1 = 12,56$; $d_2 = 6,98$; $\rho = 100$ Ом.м; $\delta_1 = 25$ м; $\delta_2 = 70$ м (4). В связи с вертикальным положением модели аномалии потенциала имеют симметричные ветви. На дневной поверхности (профиль 1) аномальное значение $U_{0,ан} = -240$ мВ, ширина аномалии $q_0 = 25$ м. На профиле 2 $U_{1,ан} = -150$ мВ, ширина аномалии $q_1 = 31$ м. Расхождения между параметрами аномалий связаны с тем, что при известной модели отрицательный заряд сконцентрирован в линейный источник, расположенный у верхней границы модели, что противоречит теории геоэлектрохимических процессов на сульфидных месторождениях (5). При разработанной модели этот заряд распределен по поверхности верхней части модели, расположенной в зоне окисления, согласно формуле (2). Именно по этой же причине на втором горизонте (профиль 2) потенциал, вычисленный базовым способом, в центральной части профиля имеет положительный знак ($U_{0,ан} = 80$ мВ), а на перифериях—отрицательный. Потенциал поля в зоне окисления, согласно разработанной модели, имеет отрицательный знак с $U_{1,ан} = -100$ мВ, что соответствует теории окислительно-восстановительных процессов на границе сульфидных рудных тел (5). По профилям 3 и 4, следовательно и

между ними, в силу равномерного распределения положительного заряда по плоскости базовой модели, потенциал практически постоянен, $U_{0, \text{ан}} = 130$ мВ. Для разработанной модели на профиле 3 $U_{1, \text{ан}} = 180$ мВ, на профиле 4 — 100 мВ. Ниже профиля 4 он падает быстрее, чем потенциал поля базовой модели.



Аномалии потенциала ЕЭП над моделями пластообразного рудного тела вертикального положения при $h=l$ (а); $h=5l$ (б); а — модель пластообразного тела. Оцифровка на графиках: 1÷5 — $h=6, 10, 15, 21$ и 30 м соответственно

С целью уточнения методики количественной интерпретации аномалий, полученных на дневной поверхности методом ЕЭП, проводили математические расчеты кривых потенциала по формуле (3), при разных значениях глубины залегания и размеров модели пластообразного тела.

На рисунке показаны кривые потенциала модели вертикально расположенного пластообразного рудного тела прямоугольной формы размерами $l=30$ м, $H=l$ и $5l$, $h=l \times (0,2; 0,3; 0,5; 0,7; 1)$. Кривые имеют симметричные ветви. Амплитуда аномалии возрастает с увеличением вертикального размера тела и с уменьшением глубины его

залежания. Ширина аномалии мало зависит от размеров тела и строго определяется глубиной залежания его. В случае $H \leq l$ длина хорды q , проведенной через середину минимума, почти не выходит из пределов $(3 \div 4,54) \times h$ или $h = K_q \times q \approx (0,22 \div 0,33) \times q$. Взяв средний коэффициент, получим формулу определения глубины залежания рудного тела в случае $H \leq l$.

$$h \approx 0,275 \times q. \quad (4)$$

Для разработки методики определения угла падения пластообразной залежи принято, что она залегает в наклонной разломной зоне вдоль трещин, а обогащенные свободным кислородом и другими окислителями поверхностные флюиды проникают в горную среду по наклонным трещинам. Если угол падения рудного тела обозначить через α , то новые текущие координаты по пласту будут: $\xi' = \xi \cdot \cos \alpha$; $\eta' = \eta$; $\zeta' = \zeta \cdot \sin \alpha$, а формула (3) примет вид:

$$U = \frac{\rho}{4\pi} \left[d_2 \int_{-\alpha \cos \alpha}^0 \int_{-l}^l \int_{-\zeta \sin \alpha}^0 \sqrt{\frac{\xi}{1+\xi^2}} \times \right. \\ \times \frac{d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta}{V(x - \xi \cos \alpha)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta \sin \alpha)^2} - d_1 \int_{-\alpha \cos \alpha}^0 \int_{-l}^l \int_0^{\zeta \sin \alpha} \times \\ \left. \times \sqrt{\frac{\xi}{1+\xi^2}} \times \frac{d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta}{V(x - \xi \cos \alpha)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta \sin \alpha)^2} \right]. \quad (5)$$

Значения потенциала, вычисленные по формуле (5) для условия полупространства, имеют асимметричную форму. Над верхней границей модели проявляется минимум потенциала. В направлении падения пласта, примерно над центром его, наблюдается максимум меньшей амплитуды по сравнению с минимумом. Отношение амплитуд максимума и минимума (K_α) при $\alpha = 15^\circ$ составляет 0,27. По ходу увеличения α K_α уменьшается согласно гиперболическому закону, при $\alpha = 60^\circ$ $K_\alpha = 0,03$ и значения потенциала близки по характеру соответствующим значениям для вертикального пласта.

Путем статистической обработки полученных данных выведена эмпирическая формула определения угла падения пластообразного тела в зависимости от K_α :

$$\alpha = 5 \arccos h K_\alpha + 0,2. \quad (6)$$

Результаты проведенных исследований повышают точность интерпретации аномалий потенциала ЕЭП и геолого-экономическую эф-

фективность электроразведочных работ. Они позволяют определить глубину распространения оруденения и тем самым оценить перспективность рудных месторождений.

Институт геофизики и инженерной
сейсмологии Академии наук Армении

Վ. Բ. ԳԱՄՈՅԱՆ, Հ. Վ. ԴԵՎՈՐԳՅԱՆ

Շերտաձև հանքամարմնի բնական էլեկտրական դաշտը

Նրկրաֆիզիկայում բնական էլեկտրական դաշտի (ԲԷԴ) աղբյուր հանդիսացող շերտաձև հանքամարմնի մոդելը դիտվում է որպես համասեռ լիցքավորված զծային և թեթեղային հակաբևեռ էլեկտրոդների սխեմա: Նշված մոդելը չի բացահայտում բնափորձարարական դիտարկումներով ստացված սուլֆիդային հանքավայրերի ԲԷԴ-ի տարածական բաշխման օրինաչափությունները:

Նշված համակարգի պոտենցիալը ուղղանկյունաձև ուղղաձիգ շերտի համար արտահայտվում է (1) բանաձևով, որտեղ ρ -ն միջավայրի տեսակարար դիմադրությունն է, i -ն՝ էլեկտրոդների միջով անցնող գումարային հոսանքը, $2l$ -ը՝ շերտի երկարությունը, $2b$ -ն՝ շերտի տարածվածությունը ըստ խորության, ξ -ը և ζ -ը՝ շերտի նկատմամբ ընթացիկ կոորդինատները: Պոտենցիալի թռիչքի բաշխումը (ΔU) ուսումնասիրված է Հայաստանի տիպիկ հանքավայրերի սուլֆիդային մարմինների սահմանում: Ստացված տվյալների վիճակագրական անալիզի միջոցով դուրս է բերված ΔU -ի ուղղաձիգ առանցքով փոփոխության բանաձևը (հորիզոնական ուղղություններով ΔU -ն գործնականորեն հաստատում են) (2): Այս բանաձևում d_1 -ը և d_2 -ը հաստատուններ են՝ պայմանավորված էլեկտրաքիմիական հատկություններով: Շերտաձև մարմնի ԲԷԴ-ի բաշխումը տեսականորեն ուսումնասիրելու նպատակով ընդունված է XYZ կոորդինատների ուղղաձիգ համակարգ: Շերտի ուղղաձիգ դիրքի դեպքում լիակատար տարածությունում պոտենցիալը արտահայտվում է (3) բանաձևով, որտեղ δ_1 -ը և δ_2 -ը հանքամարմնի վերևի և ներքևի մասերի բարձրություններն են, որոնք բացասական և դրական դաշտերի աղբյուրներ են, η -ն հանքամարմնի կոնտակտի նկատմամբ ընթացիկ կոորդինատն է Y առանցքի ուղղությամբ: (1) և (3) բանաձևերով հաշվված են դաշտի պոտենցիալի կորերը մոդելի հարթության նկատմամբ՝ տարբեր հորիզոններին ուղղահայաց պրոֆիլներով:

Մոդելի ճշգրտման, ինչպես նաև մետաղային հանքավայրերի հետախուզման ԲԷԴ-ի մեթոդի էֆեկտիվության բարձրացման նպատակով կատարված են բնափորձարարական և տեսական ուսումնասիրություններ: Բացաված են ԲԷԴ-ի պատճառ հանդիսացող հանքամարմնի կոնտակտում պոտենցիալի թռիչքի փոփոխման օրենքները: Դուրս են բերված դաշտի տարածական բաշխումը բնութագրող մաթեմատիկական բանաձևեր, մշակված է հանքամարմնի տեղադրման էլեմենտների որոշման եղանակը: Ապաված է հանքամարմնի տեղադրման էլեմենտների որոշման եղանակի նկատ-
ցուցված է դրանց ճշգրտությունը հայտնի բանաձևերի և եղանակի նկատմամբ:

ЛИТЕРАТУРА — ЧԻՇՈՒՄԻՆԻ

1 А. С. Семенов, Электроразведка методом естественного электрического поля, Недра, Л., 1968. 2 С. В. Бадалян, Г. О. Газарян, В. Б. Гамоян, Подземная электроразведка на рудных месторождениях Армении, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1980. 3 Ю. С. Рысс, А. С. Тясто, Структура естественных электрических полей на рудных месторождениях и ее использование при поисках и разведке полезных ископаемых, вып. 2, ОНТИ—ВИЭМС, М., 1966. 4 В. Б. Гамоян, А. В. Геворкян, Изв. АН АрмССР. Науки о Земле, № 1, с. 68—71, (1990). 5 Г. Б. Свешников, Электрохимические процессы на сульфидных месторождениях, Изд-во ЛГУ, 1967.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ

УДК 579.842.14.579.252.5.577.352.33

А. М. Седракян, Г. А. Мнацаканян, А. С. Калачян, Ж. А. Кцоян,
А. А. Арутюнян, член-корреспондент АН Армении К. Г. Карагезян

Влияние R-плазмиды на белковый спектр клеток
Salmonella derby

(Представлено 23.X 1991)

Фенотип клеток *Salmonella derby* К 89, несущих R-плазмиду, определяется взаимодействием продуктов, кодируемых хромосомными и плазмидными генами. Исследования штамма *S. derby* К89 и его бесплазмидного производного *S. derby* К82 выявили значительную роль R-фактора в молекулярных основах функционирования клеток *S. derby* (1,4). R-плазида влияет на форму бактериальных клеток, их размеры, толщину и ультраструктуру клеточных стенок, воздействует на состав липидов клеточной стенки, их антирадикальную активность (3,4). Данные рентгеноструктурного анализа выявили повышение степени внутримембранной неупорядоченности клеточных стенок *S. derby* К82. Бесплазмидный штамм отличают невосприимчивость к фагу dp8, повышенная устойчивость к воздействию УФ, резко пониженная активность ДНК-полимеразы I (5,6).

В связи с совокупностью приведенных данных представляет интерес изучение влияния R-плазмиды на белковый спектр *S. derby*.

Природный условно-патогенный штамм *Salmonella derby* К 89, изолированный из клинического материала (7), содержит конъюгативный R-фактор длиной около 100 т.п.н., обозначенный pGK101 (2). Бесплазмидный штамм *S. derby* К82 получен из *S. derby* К 89 обработкой 2%-ным этилметансульфонатом (8). Клетки выращивали на 2%-ном мясопептонном агаре при 37°C в течение 20 ч. Собранные 3—4 г влажных клеток дважды центрифугировали в 10 мМ трис-буфере рН 7,4 при 5000 об/мин 30 мин.

Выделение мембран клеток проводили по методу Иноуэ (9).

SDS-электрофорез белков в 10%-ном полиакриламидном геле проводили по методу Леммли (10), загружая гель белковыми препаратами в количестве 0,1 мг белка на трек. Электрофореграммы сканировали на приборе Ultrascan XI (LKB) при 633 нм.

На рис. 1 показаны белковые спектры клеток *S. derby* К89, несущих R-плазмиду (II, IV), и бесплазмидных клеток *S. derby* К82, (I, III).

На рис. 2 изображены кривые сканирования электрофореграмм мембранных (I, II) и цитоплазматических (III, IV) белков плазмидных (I, III) и бесплазмидных (II, IV) клеток *S. derby*.

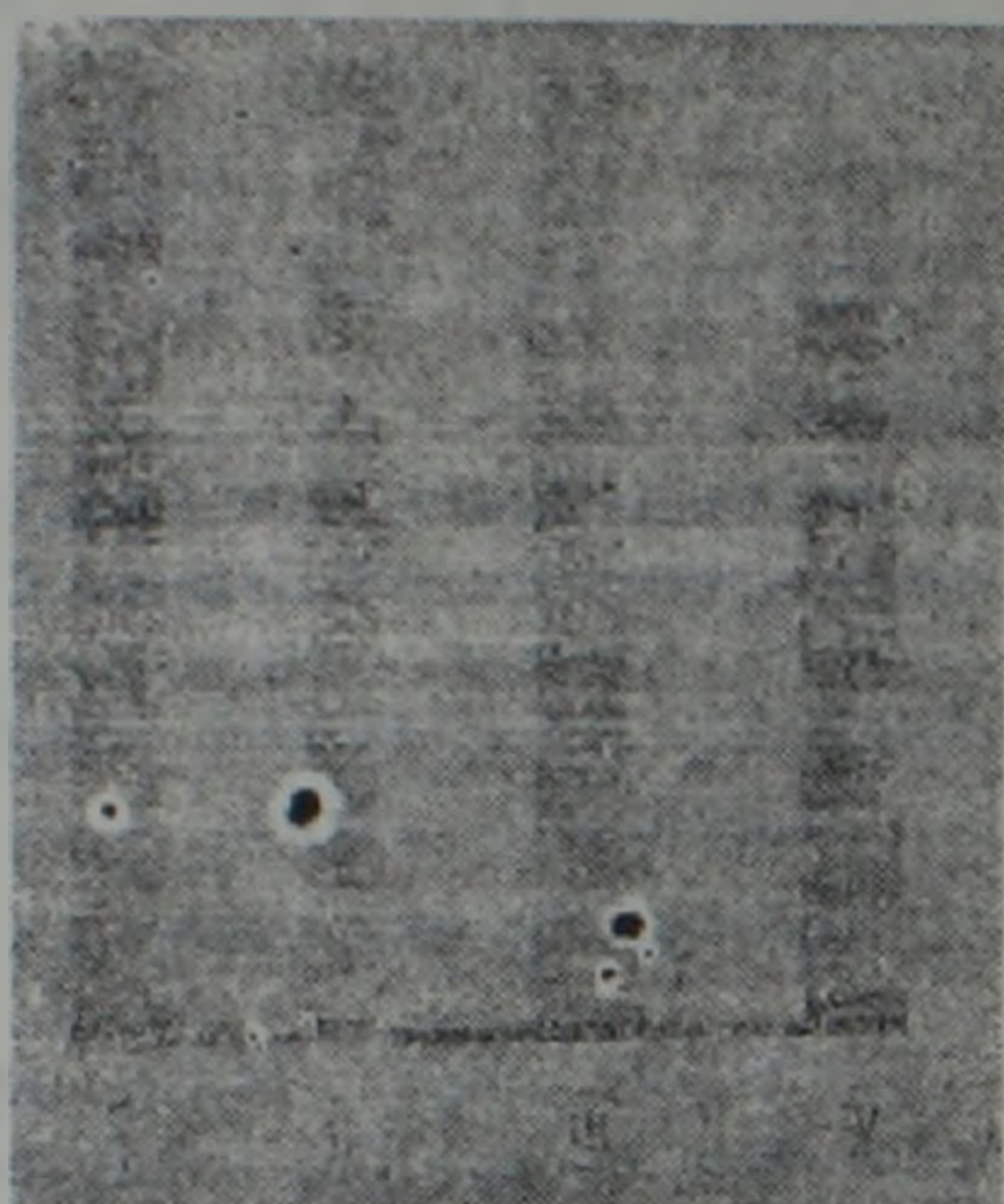


Рис. 1. SDS электрофорез белков клеток *S. derby* в 10%-ном полиакриламидном геле: I — мембранные белки *S. derby* K82; II — мембранные белки *S. derby* K89; III — цитоплазматические белки *S. derby* K82; IV — цитоплазматические белки *S. derby* K89.

Количество различных пиков на денситограммах колеблется от 35 до 40, при этом следует отметить, что в препаратах плазмидного штамма, как в мембране (I), так и в цитоплазме (III), наблюдается большее число пиков. Пики, соответствующие белкам, пронумерованы в порядке убывания молекулярного веса.

Полученные при сравнительном исследовании образцов сведения обобщены в таблице.

Сравнение кривых сканирования электрофореграмм белковых спектров *Salmonella derby*

Образец	Количество белков	Специфические белки №	Белки повышенных концентраций №
I	40	1, 2, 4, 10, 14, 15, 16, 22, 25, 3, 36, 39, 40	8, 17, 19, 33, 37
II	35	4, 12, 14, 20, 24, 26, 34, 35	1
III	40	1, 3, 6, 9, 15, 23, 37, 38, 39	8, 13, 21, 25, 31, 35
IV	36	23, 33, 34, 35	7, 11, 12, 15

В белковых спектрах мембран клеток *S. derby* 27 пиков появляются постоянно. Вместе с тем 13 пиков на денситограмме I наблюдаются только в мембранах *S. derby* K89; идентичных по расположению пиков на денситограмме II мембранных белков бесплазмидного штамма

не обнаружено. Следует отметить, что два таких белка, которым соответствуют пики № 22, 40, являются основными компонентами мембран *S. derby* K89. Специфичные белки обнаружены и в мембранах бесплазмидного штамма (II), при этом белки № 12, 14 являются основными компонентами мембран *S. derby* K82. R-плазмида оказывает влияние на концентрации некоторых белков, наблюдаемых в мембранах обоих исследуемых штаммов. Концентрации белков, которым соответствуют пики № 8, 17, 19, 33, 37 на кривой сканирования I, выше в мембранах *S. derby* K89. Концентрация белка № 1 на денситограмме II выше в мембранах бесплазмидного штамма.

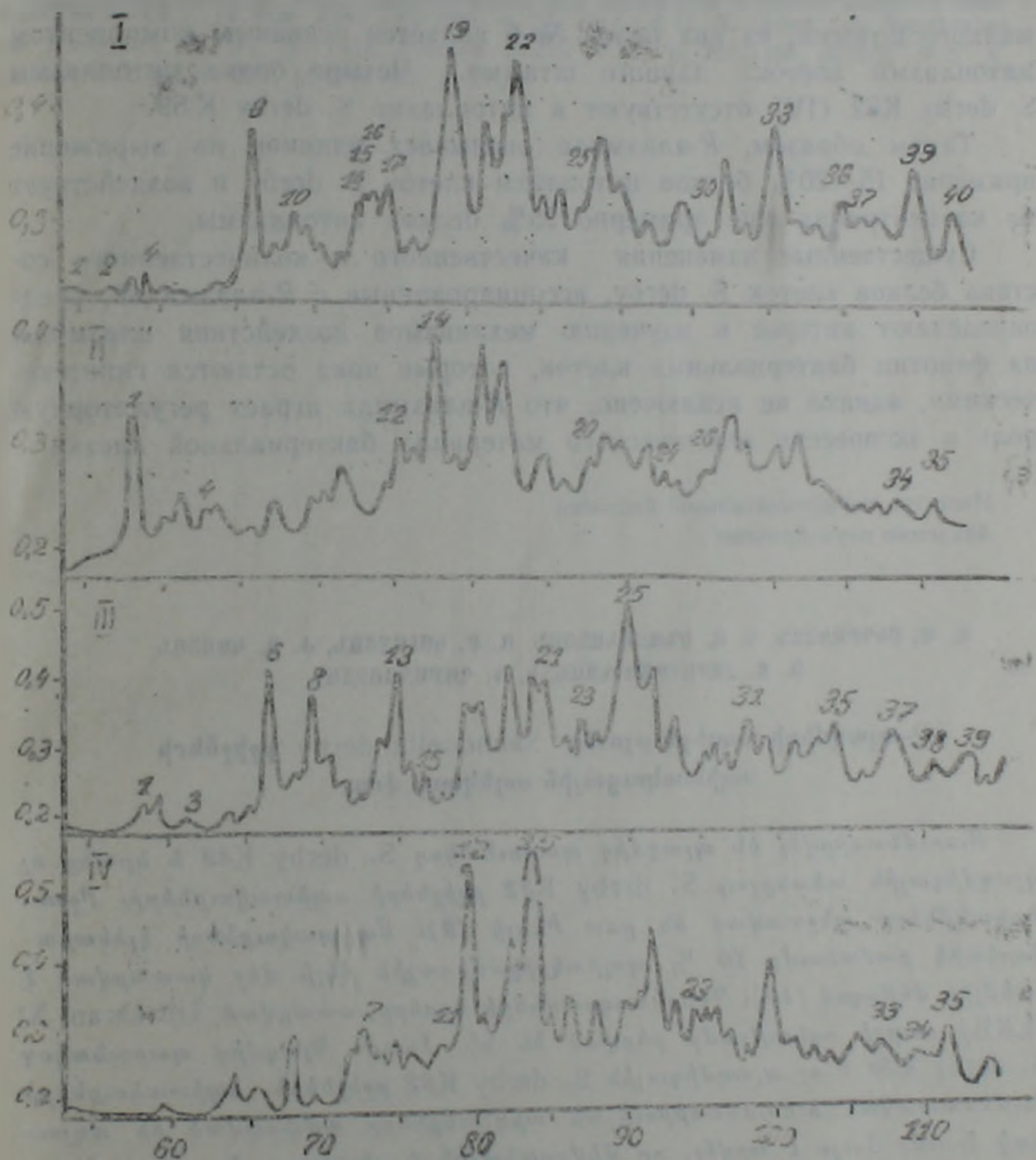


Рис. 2 Кривые сканирования электрофоретических белков *Salmonella derby*: I — мембранные белки *S. derby* K89; II — мембранные белки *S. derby* K82; III — цитоплазматические белки *S. derby* K82. На абсциссе — расстояние от старта, мм, на оси ординат — плотность

Таким образом, отсутствие *R*-плазмиды сопряжено с существенными изменениями белкового спектра мембран *S. derby*. С плазмидой ассоциирована экспрессия приблизительно 25—35% белков клеточной стенки.

Сравнительное изучение белковых спектров цитоплазм клеток *S. derby* (III, IV) выявило наличие 32 идентичных по расположению белковых пиков, из которых 22 белка находятся в примерно равных концентрациях. Шесть белков имеют повышенные концентрации в цитоплазме плазмидного штамма (III). Концентрации четырех белков выше в цитоплазме бесплазмидного штамма (IV). Вместе с тем восемь белков образца III специфичны для цитоплазмы плазмидного штамма, из них белок № 6 является основным компонентом цитоплазмы клеток данного штамма. Четыре белка цитоплазмы *S. derby* K82 (IV) отсутствуют в цитоплазме *S. derby* K89.

Таким образом, *R*-плазида оказывает влияние на выражение примерно 15—20% белков цитоплазм клеток *S. derby* и воздействует на концентрации еще примерно 25% белков цитоплазмы.

Существенные изменения качественного и количественного состава белков клеток *S. derby*, ассоциированные с *R*-плазмидой, определяют интерес к изучению механизмов воздействия плазмиды на фенотип бактериальных клеток, которые пока остаются гипотетическими, однако не исключено, что *R*-плазида играет регуляторную роль в экспрессии генетического материала бактериальной клетки.

Институт экспериментальной биологии
Академии наук Армении

Ա. Մ. ՍԵՂՐԱՎՅԱՆ, Գ. Ա. ՄԱՑԱԿԱՆՅԱՆ, Ա. Ս. ԿԱԼԱԶՅԱՆ, Ժ. Ա. ԿՍՈՅԱՆ,
Ա. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Կ. Գ. ՂԱՐԱԳՈՋՅԱՆ

R-պլազմիդի ազդեցությունը *Salmonella derby* բջիջների սպիտակուցային սպեկտրի վրա

Ուսումնասիրվել են պլազմիդ պարունակող *S. derby* K89 և նրանց ոչ պլազմիդային ածանցյալ *S. derby* K82 բջիջների սպիտակուցները: Բջջաթաղանթները անջատված են ըստ Ինոյի (9): Սպիտակուցների էլեկտրաֆորետիկ բաժանումը 10 % պոլիակրիլամիդային հելի մեջ կատարված է լաբմյի մեթոդով (10): Դենսիտոգրամների կորերը, ստացված Ultrascan XI (LKB) սարքի օգնությամբ բերված են նկ. 1-ում: Պլազմիդ պարունակող *S. derby* K89 և ոչ պլազմիդային *S. derby* K82 բջիջների սպիտակուցների համեմատական ուսումնասիրության արդյունքները ամփոփված են աղյուսակ 1-ում: Ցույց է տրվել, որ մեմբրանային և ցիտոպլազմատիկ սպիտակուցների մեծամասնության կրկնելիության հետ միաժամանակ ինչպես *S. derby* K89, այնպես էլ *S. derby* K82-ը պարունակում են մի շարք սպեցիֆիկ սպիտակուցներ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Ч Р Ц Ц Ы П Р Р В П Р Ъ

1 Ж. А. Кцоян, Н. Н. Саркисян, В. И. Черножа и др., ДАН АрмССР, т. 88, с. 26—29 (1969). 2 Н. Н. Саркисян, Р. Г. Ачоян, М. П. Светлоза и др., Биохимия, т. 50, с. 673—679 (1985). 3 А. З. Перочан, Т. А. Кизоуц, К. Г. Karagezian, FEBS 20th Meeting of the Federation of European Bioch. Soc. Budapest 19—24, p. 503, 1970. 4 А. З. Петян, Влияние R-плазмиды *S. derby* на физикохимические свойства мембран клеток *S. derby*; канд. дис., Ереван, ИЭБ, 1991. 5 Ж. А. Кцоян, Л. М. Хамбекян, Н. Н. Саркисян и др., Генетика, т. 24, № 5, с. 953—955 (1988). 6 Р. Г. Ачоян, Н. Н. Саркисян, К. Г. Данагулян и др., ДАН АрмССР, т. 77, с. 132—136 (1983). 7 М. К. Вартанян, Б. П. Карабкоз, в кн.: Вопросы молекулярно клеточной биологии и иммунологии, Изд. АН АрмССР, Ереван, с. 45, 1974. 8 Ж. А. Кцоян, К. Г. Данагулян, Ш. К. Григорян, Юбилейная сессия Армянского общества ВСГН. Тезисы докл., Ереван, с. 13, 1977. 9 O. N. Iloje, in: Membranes and Transport, A. N. N. York Plenum Press, v. 1, p. 289—298 (1982). 10 U. K. Laemmle, Nature, v. 227, p. 680—681 (1970).

УДК 595.765.8

М. Ю. Калашян, М. Г. Волкович

Новый вид златки рода *Sphenoptera* Solier
(Coleoptera, Puprestidae) из Южного Казахстана

(Представлено академиком АН Армении С. О. Мовсесяном 27.XI 1991)

Sphenoptera (*Chrysoblenina*) *glexeevi* Kalashian et Volkovitsh,
sp. n. (рис. 1, а).

Голотип, самец: Казахстан, «Ясенева дача», р. Чарын, 10 км СЗ Чунджи, 22—23.VI.1988, М. Г. Волкович (Зоологический ин-т АН СССР). Паратипы: 23 экз., там же; 1 экз.—60 км В Чунджи, Уйгурский р-н, 24—26.VI.1988, А. Ф. Емельянов; 8 экз.—р. Или, окр. пос. Кундызды, 45 км ЮВ Панфилова, 27—28.VI.1988, М. Г. Волкович; 1 экз.—г. Кыскаш, 35 км ЮВ Лепсов, 10.VII.1988, А. Ф. Емельянов; 1 экз.—ур. Кызылсай, 30 км ССВ Хантау, г. Жельтауайтау, 27.VII.1988, А. Ф. Емельянов; 4 экз.—г. Джамбул, 60 км С Фурмановки, г. Жельтауайтау, 26—27.VI.1987, М. Г. Волкович, В. А. Заславский; 2 экз.—г. Карамурын, 25 км ССВ Чили, хр. Каратау, 15.VII.1981, М. Г. Волкович; 1 экз.—окр. ст. Чокусу, Сев. Приаралье, 25.VI.1990, Е. В. Ишков (Зоологический институт АН СССР). Все экземпляры собраны кошением по *Atraphaxis* spp.

Тело металлически золотисто-зеленое, лоб ярко медно-красный, переднеспинка (особенно вдоль боков), щиток, частично ноги и антенны, а часто также шов надкрылий с красноватым отливом. Верх тела в коротких изогнутых светло-серых нечастых волосках, низ—в более частых и длинных почти прямых волосках и легко стирающемся белом восковом налете, особенно на боках груди и стернитов брюшка. Длина тела 6,8—8,5 мм, ширина—2,2—2,7 мм.

Голова примерно такой же ширины, что и переднеспинка; глаза сильно выступающие в стороны, короткоовальные, их высота в 1,41—1,58 раза длиннее поперечника. Антенны в 1,63—1,97 раза длиннее высоты глаза, пильчатые, начиная с 4-го членика, 2-й членик слабо расширен дистально, по длине приблизительно равен 3-му или 4-му членикам. Лоб в 1,6—1,65 раза шире длины, со слегка расходящимися назад или почти параллельными краями, едва продольно и поперечно выпуклый, спереди с очень слабым треугольным уплощением или

вдавlenиeм, достигающим приблизительно уровня задней 1/3 глаз, сзади ограниченным неясными косыми овальными рельефами, позади которых имеется пара также очень слабых косых вдавлений. Поверхность вдоль переднего края лба позади наличника слабо килевидно приподнята; имеется также пара тонких четких килей сзади и конутри от антеннальных ямок, далеко не достигающих внутреннего края глаз. Темя продольно и поперечно выпуклое, в 2,17—2,52 раза шире поперечника глаза. Лоб и темя в довольно частой двойной пунктировке из крупных (макро-) и мелких (микро-) точек; макроточки довольно грубые, неравномерные, к темени слегка мельчающие, микроточки более однородные, на темени местами более частые. Поверхность головы в мельчайшей (заметной при увеличении $\times 40 \times 70$) мелкосетчатой шагреневке.

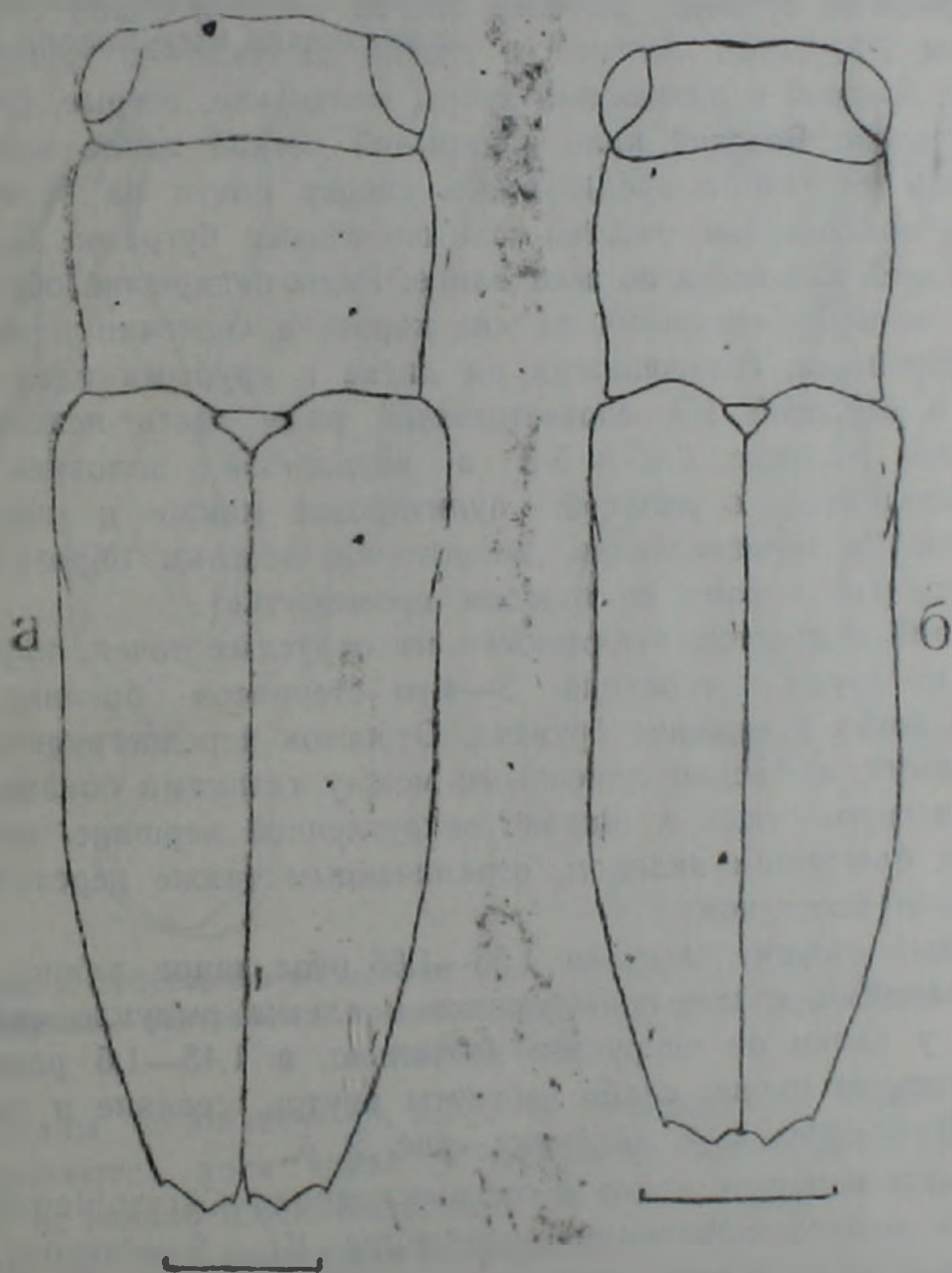


Рис. 1. *Spineoptera* spp., контур тела а — *S. alexeevi* sp. n.; б — *S. viridilaurca* Kr. (длина масштабных линеек соответствует 1 мм)

Переднеспинка в 1,3—1,4 раза шире длины, ее передний край явно двувыемчатый, окаймленный четкой бороздкой. Бока переднеспинки в основной 1/3 вогнутые, затем слабо выпуклые до вер-

шинной $1/3$ или $1/4$, где переднеспинка достигает наибольшей ширины, далее выпукло слабо сужены к вершинным углам, где переднеспинка по крайней мере не уже, чем у основания. Поверхность переднеспинки несильно довольно равномерно выпуклая, иногда у основания по бокам от середины имеется пара слабо вогнутых или уплощенных участков. Боковые кили достигают приблизительно вершинной $1/3$ переднеспинки, очень слабо изогнутые выпуклостью вверх (см. сбоку), сверху видны примерно в основной $1/3$ переднеспинки. Пунктировка двойная, немного грубее и чаще, чем на лбу, промежутки между макроточками превышают или равны их диаметру. Щиток поперечно-треугольный с широко закругленными боковыми углами, мелкосетчатый, с несколькими мелкими точками.

Надкрылья в 2,05—2,15 раза длиннее ширины в плечах, с крупными плечевыми буграми, их бока слегка вогнуто слабо сходятся к вершинным $2/5$, затем сильнее и слегка выпукло—к трехзубчатым вершинам; боковой и пришовный зубцы маленькие, острые, средний—широкий, тупой. Боковой киль надкрылий четкий вдоль всего края до вершины наружного зубца, виден сверху почти на всем протяжении, за исключением участка под плечевыми буграми. Шов приподнят по всей или почти по всей длине. Ряды надкрылий образованы крупными точками, несущими на дне короткие черточки и разделенными морщинками, сглаженными на диске и грубыми вдоль боков, особенно в основной $1/3$, соответственно ряды здесь неясные. Промежутки плоские, 3-й и 5-й в вершинной половине иногда слабо приподняты, в двойной пунктировке макро- и микроточки мельче, чем на переднеспинке, макроточки местами образуют б.м. четкие ряды (по одному на каждом промежутке).

Низ тела в простой пунктировке из округлых точек, крупных и глубоких на груди и середине 3—4-го стернитов брюшка, более мелких на боках и вершине брюшка. Отросток переднегруди с почти параллельными, явственно суженными между тазиками боками, резко и сильно вогнуто сужен к широко закругленной вершине, по бокам с нерезким блестящим валиком, ограниченным также нерезкой, разбитой точками бороздкой.

Анальный стернит самца в 1,55—1,65 раза шире длины, округлотрапезиевидный, с довольно коротко и слегка выпукло срезанной вершиной, у самки он закруглен дистально, в 1,45—1,5 раза шире длины. Передние голени слабо изогнуты внутрь, средние и задние—наружу. Пенис—рис. 2, а, яйцеклад—рис. 2, б.

Относится к группе видов в составе подрода *Chrysoblemma* Jak., в которую входят *Sphenoptera viridiaurea* Kr., *S. glasunovi* Jak., *S. apta* Jak., *S. tschitscherini* Jak. и некоторые другие виды; наиболее близок к *S. glasunovi* и, особенно, к *S. viridiaurea*. От обоих последних видов отличается скульптурой поверхности (у *S. viridiaurea* лоб только в макроточках с явственно шагреневанными промежутками, переднеспинка в более частых макроточках и редких, иногда скрытых шагреневкой, микроточках на узких, равных или более узких.

чем диаметр макроточек, промежутках, надкрылья с груботочечными рядами и слегка выпуклыми промежутками; у *S. glasunovi* макроточки на лбу и переднеспинке грубее и реже, микроточки, напротив, мельче и местами едва явственные, скульптура надкрылий в целом мельче, бороздки состоят из более вытянутых точек-черточек, более четкие), окраской лба (у *S. glasunovi* лоб зеленый, у *S. viridiaurea* — зеленый, иногда с золотистым или красноватым отливом), слегка более редким и коротким опушением. Отросток переднегруди у *S. glasunovi* и *S. viridiaurea* с более четкими бортиком и бороздкой. Кроме того, *S. viridiaurea* легко отличается от нового вида более узким телом (переднеспинка в 1,17—1,22 раза шире длины, надкрылья в 2,3—2,4 раза длиннее ширины) (рис. 1, б). У *S. glasunovi* голова заметно уже переднеспинки, эта последняя наибольшей ширины позади середины, вперед сужена сильнее, чем назад; темя с узким продольным вдавлением.

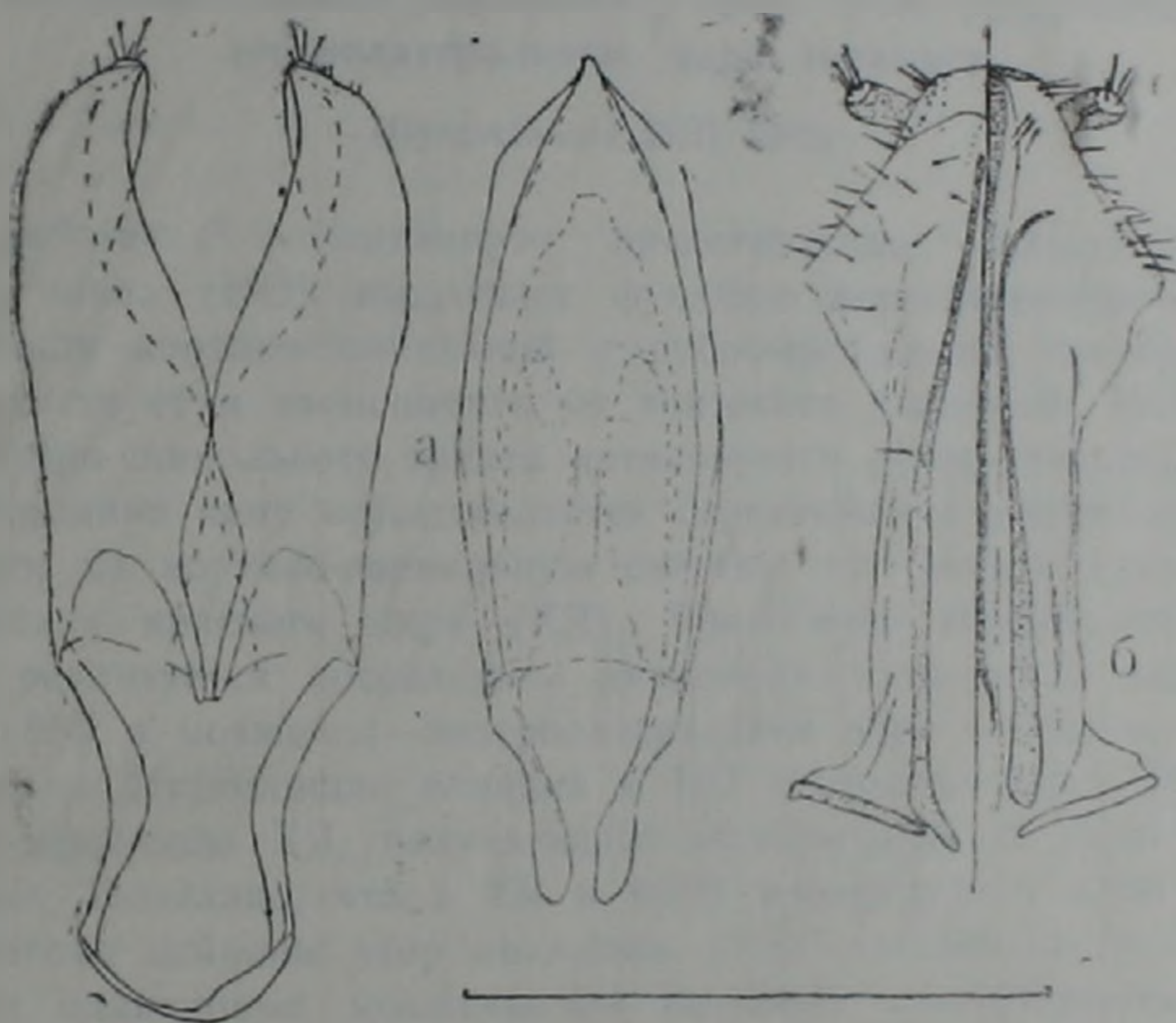


Рис. 2. *Sphenoptera alexeevi* sp. n. а — пенис; б — яйцеклад (левая часть рисунка — вентральн., правая — дорсальн.) (длина масштабной линейки соответствует 1 мм)

Ареалы *S. alexeevi* sp. n. и *S. viridiaurea* в Южн. Казахстане перекрываются, хотя ареал *S. viridiaurea* значительно шире и охватывает не только Южн. Казахстан, но и всю Среднюю Азию, а также Афганистан. Оба вида были собраны на г. Жельтауайту (г. Джамбул, 60 км С Фурмановки, 23—27. VI. 1987). При этом *S. alexeevi* встречается исключительно на *Atraphaxis*, а *S. viridiaurea* — обычно на *Alhagi*, реже на других растениях. *S. glasunovi* известен только по голотипу из Северо-Восточного Ирана.

Ոսկեղեղների Sphenoptera Solier (Coleoptera, Buprestidae)
սեռի նոր տեսակի Հարավային Ղազախստանից

Հոդվածում նկարագրվում է *S. alexcevi* Kalashian et Volkovitsh sp. n.
տեսակը Հարավային Ղազախստանի մի շարք վայրերից: Այս տեսակը պատ-
կանում է *Chrysoblemma* Jak. ենթառնուն և մոտ է *S. glasunovi* Jak. և,
հատկապես, *S. viridiaurea* Kr. տեսակներին, ստորբերվելով նրանցից մի-
շարք կարևոր հատկանիշներով:

ФИЗИОЛОГИЯ

УДК 611.817.31;612.826.1:591.51

Академик АН Армении В. В. Фанарджян, Е. В. Напоян,
О. В. Геворкян, В. И. Погосян

Компенсаторная роль нижней оливы при выработке
инструментальных рефлексов у крыс после разрушения
вентролатерального ядра таламуса

(Представлено 21/II 1992)

В работах (^{1,2}) выдвинуто представление, согласно которому нижняя олива (НО) выполняет функцию переключающего устройства между кортико-спинальной и рубро-спинальной системами, которое действует в зависимости от контекста движений. После перерезки рубро-спинального тракта активируется рубро-оливарная проекция, благодаря чему осуществляется переключение двигательной деятельности на кортико-спинальную систему, что компенсирует дефект выключения красного ядра (КЯ). Вовлечение кортико-спинального тракта реализуется посредством активации восходящей петли, идущей из НО в мозжечок—вентролатеральное ядро таламуса (ВЛЯ)—кору мозга. Нисходящие влияния к НО поступают через рубро-оливарную проекцию КЯ, получающего информацию из коры мозга и мозжечка. Показано, что в КЯ и ВЛЯ проецируются одни и те же эфферентные нейроны ядер мозжечка (^{3,4}), что создает условия для посылки одинаковых мозжечковых сигналов к кортико-спинальным и рубро-спинальным нейронам.

В связи с отмеченным представляет интерес сопоставление компенсаторной роли НО при разрушении КЯ и ВЛЯ.

Эксперименты выполнялись на белых пеллинейных крысах в возрасте 2—3 месяцев с исходной массой тела 210—250 г. Все исследуемые крысы ($n = 48$) обучались балансировать и ходить на медленно вращающемся (9 оборотов в 1 мин) горизонтальном бруске диаметром 2 см и длиной 30 см, закрепленном на высоте 90 см над мягкой подушкой (^{1,5}). Оперантная (инструментальная) выработка рефлекса определялась как время, проведенное на бруске, которое максимально составляло 5 мин. После 1 мин отдыха на подушке испытание повторялось в общей сложности 10 раз, что составляло ежедневный эксперимент. Критерием выполняемости инструменталь-

ного рефлекса было время нахождения животного на вращающемся бруске не менее 250 с (¹).

После выработки инструментальных рефлексов все животные под нембуталовым наркозом были подвергнуты оперативному вмешательству (см. пункты I—V). После каждого вмешательства у крыс возобновлялась выработка инструментальных рефлексов для построения общей картины динамики изменений поведения. Параллельно производили клиническое исследование двигательных расстройств.

Животные содержались группами по 4—5 особей в стандартных условиях вивария. По окончании опытов крыс забивали и гистологически определяли точность повреждения исследованных структур на препаратах, окрашенных по методу Ниссля.

Как видно из рис. 1, у крыс вырабатываются прочные инструментальные рефлексы в течение 2—4 дней, в среднем $3,5 \pm 1,2$ (рис. 1). Обучение без повторной тренировки сохраняется около 1 месяца.

I. У четырех крыс производили унилатеральную перерезку дорсолатерального канатика, в котором проходит рубро-спинальный тракт. Перерезку осуществляли в области шейных сегментов спинного мозга (C₃₋₄), что приводило к парезу гомолатеральных передней и задней лап в течение 5—7 дней. На 5—7 сутки после операции у животных возобновлялась выработка инструментальных рефлексов, которые упрочнялись на 4—20 опытный день, в среднем на $13,7 \pm 5,9$ (рис. 1).

II. У пяти крыс было произведено электролитическое унилатеральное разрушение КЯ, что приводило к двигательным расстройствам, представляющим паралич передней и задней конечностей на контралатеральной к разрушению стороне. В ту же сторону была отклонена голова животного, которое передвигалось на широко расставленных лапах. На 5—10 день оперативного вмешательства после компенсации двигательного дефицита, величина которого зависела от степени разрушения, выработка инструментальных рефлексов возобновлялась и было достигнуто их 100%-ное осуществление на 15—21 опытные дни, в среднем на $18,3 \pm 3,2$.

III. Электролитическое унилатеральное разрушение ВЛЯ у семи крыс вызывало двигательные нарушения, очень сходные с таковыми, наблюдаемыми после разрушения КЯ: у крыс была парализована контралатеральная половина тела, голова отклонена в противоположную от разрушения сторону, при перемещении животное тянуло заднюю лапу. На 5—10 день после прохождения отмеченных двигательных расстройств было начато повторное обучение, которое привело к прочным инструментальным рефлексам на 17—21 опытный день, в среднем на $19,8 \pm 2,1$.

IV. У двух крыс на 16 и 17 день после унилатеральной перерезки рубро-спинального тракта было произведено электролитическое разрушение контралатерального КЯ, что привело к картине двигательных расстройств, наблюдаемых при изолированном выключении

КЯ. На 7—10 день после последнего вмешательства была возобновлена выработка инструментальных рефлексов, которые стали прочными на 15 и 16 день, в среднем на $15,5 \pm 0,5$.

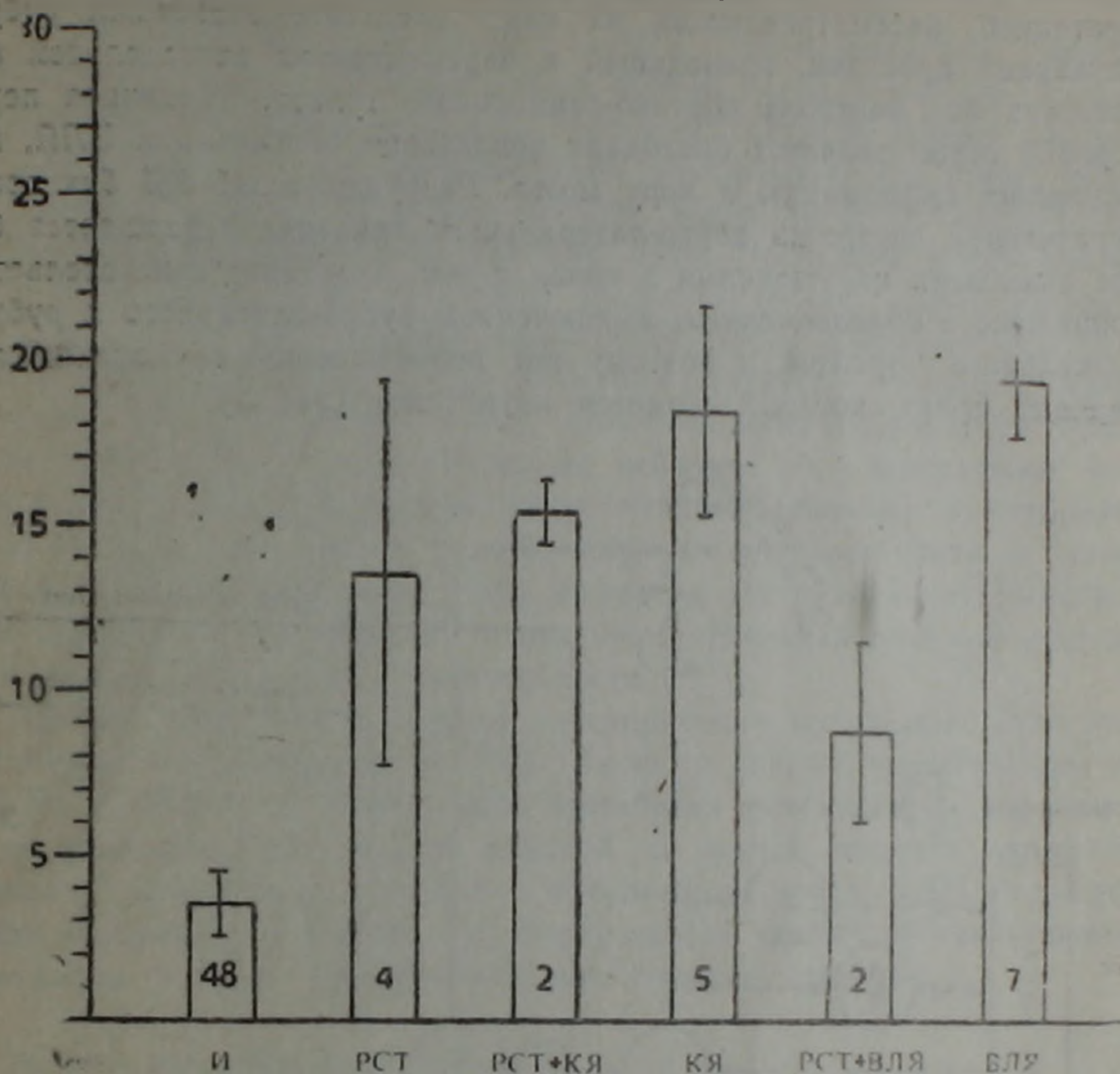


Рис. 1. Гистограммы опытных дней (средние значения со стандартным отклонением), необходимых для выработки прочных инструментальных рефлексов у крыс (ордината). На абсциссе приведены результаты выработки рефлексов у интактных (И) крыс, после перерезки рубро спинального тракта (РСТ), перерезки рубро спинального тракта и последующего разрушения КЯ (РСТ + КЯ), изолированного разрушения красного ядра (КЯ), перерезки рубро спинального тракта и последующего разрушения вентролатерального ядра таламуса (РСТ + ВЛЯ), изолированного разрушения вентролатерального ядра таламуса (ВЛЯ). Цифры в столбцах указывают на количество крыс, исследованных в данной серии опытов.

V. У двух крыс с унилатеральной перерезкой рубро-спинального тракта, спустя 15 и 23 дня, было произведено электролитическое разрушение контралатерального ВЛЯ. Двигательные нарушения, вызванные этим вторым вмешательством, были сходны с таковыми после изолированного разрушения ВЛЯ. На 7—10 день после их компенсации была возобновлена выработка рефлекса, который стал прочным на 5 и 13 день, в среднем на $9,0 \pm 4,0$ опытный день (рис. 1).

Проведенное исследование показало, что односторонняя перерезка дорсо-латерального канатика приводит к двухнедельным нарушениям инструментальных рефлексов оперированных крыс. Последующее раз-

рушение контралатерального КЯ сопровождается сравнительно кратковременным изменением поведения. Эти результаты полностью совпадают с данными Кеннеди и сотр. (1961) и согласуются с их интерпретацией, рассматривающей их как следствие активации рубро-оливарной проекции, приводящей к переключению двигательной активности под контроль кортико-спинального тракта. Указанная перестройка осуществляется благодаря вовлечению мозжечка и ВЛЯ, передающих информацию в кору мозга. Разрушение же КЯ без предварительной перерезки дорсо-латерального канатика завершается более тяжелыми нарушениями в связи с тем, что такое вмешательство сопряжено с одновременным выключением рубро-оливарного и рубро-спинального трактов и поэтому нет переключения на кортико-спинальный тракт, который остается интактным (рис. 2).

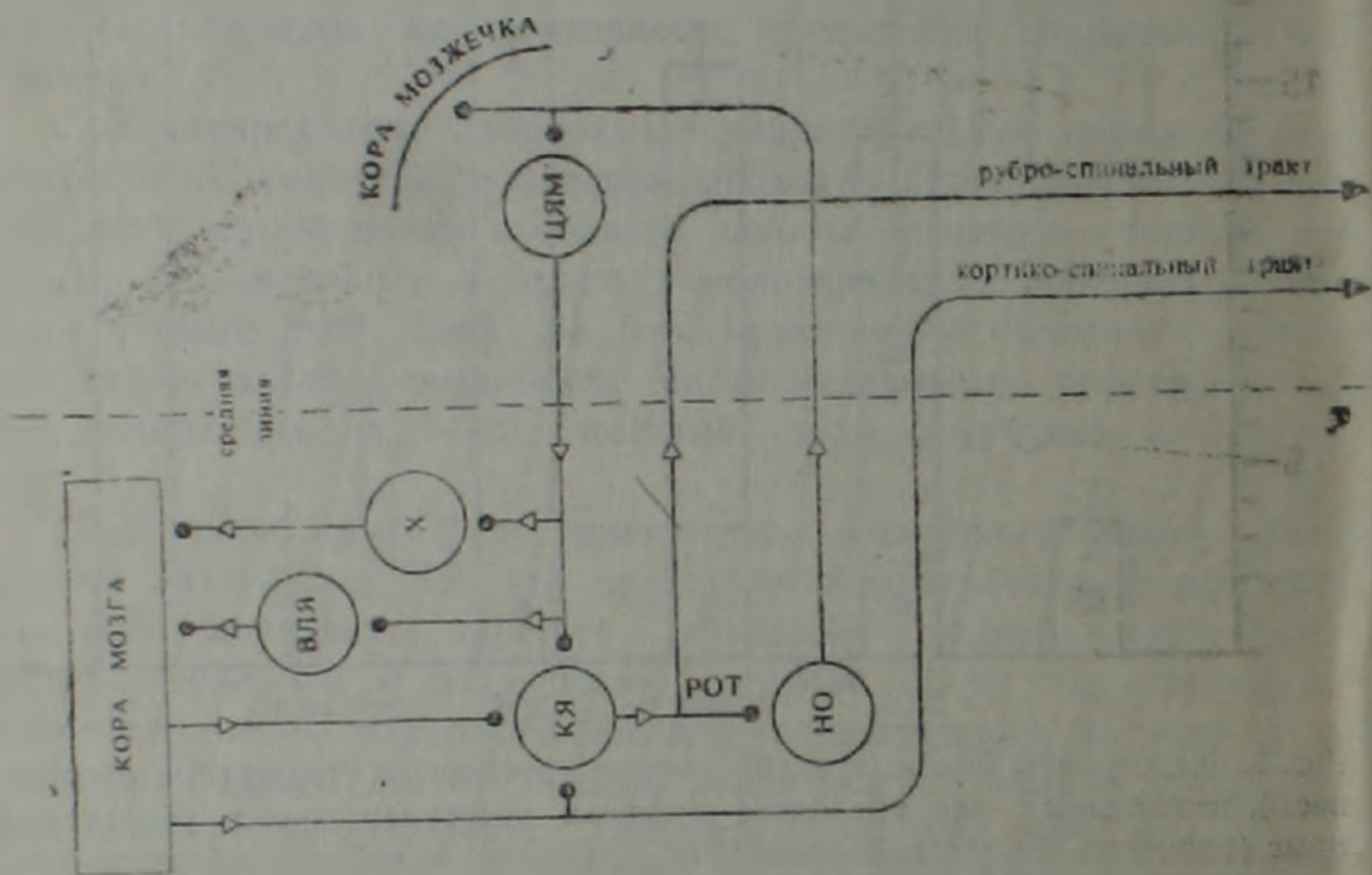


Рис. 2. Схема нейронных путей взаимосвязи и замещения кортико-спинальной и рубро-спинальной систем. ЦЯМ — центральные ядра мозжечка; РОТ — рубро-оливарный тракт, Х — ядра таламуса и/или ствола мозга, представляющие дополнительные реле мозжечка во корковых влияний. Ссылочные обозначения те же, что и в тексте

Сходные результаты нами были получены и в серии экспериментов с разрушением ВЛЯ. Здесь также последовательное разрушение рубро-спинального тракта и ВЛЯ приводило к меньшим нарушениям инструментальных рефлексов по сравнению с тем, что наблюдалось после начального изолированного повреждения ВЛЯ. На основании этого можно предполагать, что переключающее воздействие НО распространяется и на восходящий компонент исследуемой системы. Более того, нарушения после комбинированного повреждения рубро-спинального тракта и КЯ были несколько более выраженными, чем после комбинированного разрушения рубро-спинального

тракта и ВЛЯ. Возможным объяснением такого различия может быть тот факт, что у животных с разрушенными рубро-спинальным трактом и ВЛЯ рубро-оливарная проекция остается интактной и продолжает функционировать как переключающее устройство.

В рассматриваемой гипотезе ⁽²⁾ ВЛЯ определяется как главное передаточное ядро восходящих мозжечковых влияний на кору мозга, приводящих к подключению под корковый контроль нового контекста движений. Полученные результаты показывают, что такого рода восходящие влияния мозжечка на кору мозга могут осуществляться и через другие мозжечково-корковые пути. Последние могут вовлекать вентральное переднее ядро, неспецифические ядра таламуса ⁽⁷⁾, а также ретикулярные образования ствола мозга ⁽⁷⁾ (рис. 2). Среди последних заслуживают внимания структуры покрывки вентрального отдела среднего мозга, отличающиеся содержанием большого количества дофаминергических нейронов ⁽⁸⁾ — вентральное тегментальное поле, компактная часть черного вещества и ретрорубральное поле, которые у крысы получают прямые связи из латерального и промежуточного ядер мозжечка ⁽⁹⁾ и посылают восходящие проекции к подкорковым структурам, принимая широкое участие в регуляции двигательной деятельности ^(10, 11).

Однако возможна и другая интерпретация полученных нами результатов после разрушения ВЛЯ. Имеются данные, указывающие на то, что у обезьян и кошек после выработки двигательных рефлексов и переключения нисходящих влияний на новый контекст движений передача мозжечково-корковой импульсации через ВЛЯ перестает иметь решающее значение ⁽⁶⁾. Возможность такого компенсаторного механизма у крыс требует экспериментальной проверки.

Институт физиологии им. Л. А. Орбели
Академии наук Армении

Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՋՅԱՆ, Ի. Վ. ՊԱՊՈՅԱՆ,
Օ. Վ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ, Վ. Հ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Խեղճին ձիթապտղակորիզի փոխհատուցող դերը առնետների մոտ
ինստրումենտալ ռեֆլեքսների մշակման ժամանակ տեսարմբի
փորակողմնային կորիզի վնասումից հետո

Առնետների մոտ ինստրումենտալ ռեֆլեքսների մշակմամբ և ուղեղի
արբեր բաժինների վնասմամբ ցույց է տրվել, որ տեսարմբի փորակողմ-
ային կորիզի չգործելու դեպքում ներքին ձիթապտղակորիզը կատարում է
փոխհատուցող դեր: Հաստատվել է, որ տեսարմբի փորակողմնային կորիզը
նղև-ողնուղեղ և կարմիր կորիզ-ողնուղեղ համակարգերի միջև ազդակների
փոխարկում իրագործող միակ գոյացությունը չէ, որի միջոցով իրագործում
ուղեղիկի ազդեցությունը ուղեղի կեղևի վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ҶУМҲУРИЯТИ ҶАМҲОРИЯТ

- ¹ P. R. Kennedy, D. R. Humphrey, *Neurosci. Res.*, v. 5, p. 39—62 (1987).
- ² P. R. Kennedy, *Trends Neurosci.*, v. 13, p. 474—479 (1990).
- ³ Cajal, Ramon, J. *Histologie du Systeme Nerveux de l'homme et des Vertebres*, v. 2, Paris, Maloine, 1911.
- ⁴ Y. Shinoda, T. Futami, H. Mitoma et al., *Behav. Brain Res.*, v. 28, p. 59—64 (1988).
- ⁵ Я. Буреш, О. Бурешова, Д. Хьюстон. *Методика и основные эксперименты по изучению мозга и поведения*, Высшая школа, М., 1991.
- ⁶ M. Ito, *The Cerebellum and Neural control*, Raven Press, N. Y., 1984.
- ⁷ В. В. Фанарджян, *Регуляторные механизмы восходящего влияния мозжечка*, Ереван. Изд. АН АрмССР, 1966.
- ⁸ A. Dahlstrom, K. Fuxe, *Acta physiol. scand.*, v. 62, Suppl. 232 (1954).
- ⁹ V. Perciavalle, S. Berretta, R. Raffaele, *Neurosci.*, v. 29, p. 109—119 (1989).
- ¹⁰ R. D. Oades, G. M. Haliday, *Brain Res. Rev.*, v. 12, p. 117—165 (1987).
- ¹¹ P. V. Piazza, M. Federico, G. Crescimanno et al., *Brain Res.*, v. 413, p. 356—359 (1987).