

Հ Ա Յ Ա Ս Տ Ա Ն Ի Գ Ի Տ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն Ն Ե Ր Ի Ա Կ Ա Գ Ե Մ Ի Ա
А К А Д Е М И Я Н А У К А Р М Е Н И И

Չ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

Том 91 № 4

1990

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. քեկնա-
ծու (սլատ. ճարտարաբ.), է. Կ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ,
Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Բ. ԲԱ-
ՐՍՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս, Ա.
Հ. ԿԱՐԻՆԻՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակա-
դեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, Հայաստանի
ԳԱ քղր. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄ-
ՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ,
Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս (սլատ. խրմ-
բագրի տեղակալ), Վ. Ի. ՄԵԼԻՔՅԱՆ,
Հայաստանի ԳԱ քղր. անդամ, Գ. Ս. ՍԱ-
ՀԼԻՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմի-
կոս, Գ. Մ. ՍԵՆՆՈՒՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ
ակադեմիկոս (սլատ. խմբագիր), Մ. Լ. ՏԻՐ-
ՄԻՔԵԼՅԱՆ, Հայաստանի ԳԱ ակադե-
միկոս, Վ. Բ. ՅԱՆԱՐՉՅԱՆ, Հայաստանի
ԳԱ ակադեմիկոս:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.
АРЗУМАНИЯН, канд. техн. наук (отв.
секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик
АН Армении, А. Т. БАБАЯН, академик
АН Армении, А. А. ГАБРИЕЛЯН, ака-
демик АН Армении, В. О. КАЗАРЯН,
академик АН Армении (зам. отв. редак-
тора), В. Г. МХИТАРЯН, чл. корр. АН
Армении, Г. С. СААКЯН, академик АН
Армении, Д. М. СЕДРАКЯН, ака-
демик АН Армении (отв. редактор),
А. А. ТАЛАЛЯН, чл. корр. АН Армении,
М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, академик АН
Армении, В. В. ФАНАРДЖЯН, ака-
демик АН Армении.

Հ Ա Յ Ա Ս Տ Ա Ն Ի Գ Ի Տ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն Ն Ե Ր Ի Ա Կ Ա Գ Ե Մ Ի Ա Յ Ի Հ Ր Ա Տ Ա Ր Ա Կ Չ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԱՔԵՄԱՏԻԿԱ

- Յ. Ա. Շամայան, Ա. Վ. Հաբարյունյան—Տոպլիցյան օպերատորները բազմաշրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների անիզոտրոպ տարածություններում 147
- Հ. Բ. Լեբսիսյան, Խ. Մ. Բեշլիկյան—Տոպլիցյան տիպի հավասարումների լուծման նոր եղանակի թվային իրականացում 152
- Վ. Ի. Մանուկյան—Բաշխումների ինդեքսացիոն դասերի համար մոմենտների պրոբլեմի մասին 158

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

- Լ. Գ. Պետրոսյան—Նրկու պտտվող համառանցք զլանների միջև հեղուկի հարթ շարժման ոչ սիմետրիկ մոդելի մասին 163
- Մ. Վ. Բելոփեկյան, Վ. Վ. Հովսեփյան—Գլանային խոռոչով առաձգական տարածության մակերևութային ալիքների գոյության պայմանի մասին 169

ՖԻԶԻԿԱ

- Ս. Խ. Փիլոսյան—Բարձրչերմաստիճանային թաղանթի կամրջակների ոչ զծային փոխազդեցության մասին 173
- Ա. Ս. Վարդանյան, Դ. Լ. Հովհաննիսյան—Գերկարճ եզակի լուսային իմպուլսների ֆազի որոշումը 176

ՄԻԿՐՈԲԻՈԼՈԳԻԱ

- Ա. Յ. Ղազանչյան, Ա. Գ. Գաբրիելյան, Մ. Ա. Պողոսյան, Ի. Ա. Ղաֆարյան—*pSD* պլազմիդի ԴՆԹ-ի հալման կորերի նուրբ կառուցվածքը 181

ՏՁԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- Է. Ս. Հաբարյունյան—Նոր ենթասեռ և տեսակ *Hypoaspis Can.*, 1884 s. l. «նից» (*Parasitiformes, Mesostigmata: Laelaptidae*) 184

ԲԺՇԿԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- Ն. Դ. Վարդապարյան, Ն. Կ. Խոստիկյան, Լ. Հ. Ավագյան—Հիպոթալամուսի կառուցվածքային բնութագիրը B խմբի ստրեպտոկոկով առաջացած էքսպերիմենտալ հրկարատև վարակման ժամանակ 187

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- Ф. А. Шамоян, А. В. Арутюнян — Теплицевы операторы в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций 147
- А. Б. Нерсесян, Х. М. Бешликян — Численная реализация нового метода решения уравнений теплицева типа 152
- В. Р. Минукян — О проблеме моментов для индексационных классов распределений 158

МЕХАНИКА

- Л. Г. Петросян — О несимметричной модели плоского движения жидкости между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами 163
- М. В. Белубекян, В. В. Овсепян — Об условии существования поверхностной волны для упругого пространства с цилиндрической полостью 169

ФИЗИКА

- С. Х. Пилосян — О нелинейном взаимном влиянии пленочных мостиков высокотемпературных сверхпроводников 173
- А. О. Вардинян, Д. Л. Оганесян — Определение фазы одиночных сверхкоротких световых импульсов 176

МИКРОБИОЛОГИЯ

- А. Ф. Казанчян, А. Г. Габриелян, М. А. Погосян, Р. А. Захарян — Тонкая структура ДКП ДНК плазмиды *pSD* 181

АКАРОЛОГИЯ

- Э. С. Арутюнян — Новый подрод и новый вид рода *Hypoaspis* Спл., 1884, s. 1. (*Parasitiformes*, *Mesostigmata*: *Laelaptidae*) 185

МЕДИЦИНА

- И. Д. Вартазарян, Н. Г. Хостикян, Л. А. Авакян — Морфологическая характеристика гипоталамуса при длительной экспериментальной инфекции, вызванной стрептококком группы В 187

CONTENTS

MATHEMATICS

- F. A. Shimoian, A. V. Harutiunian* — Toeplitz operators in anisotropic spaces holomorphic in polydisk of functions 147
- A. B. Nersisyan, Ch. M. Beshiktian* — Numerical realization of new method of solution of Toeplitz type equations. 152
- V. R. Manukyan* — On moment's problem for the indexational classes of distributions 158

MECHANICS

- L. O. Petrossian* — On the nonsymmetrical plain fluid flow model between two coaxial rotating cylinders 163
- M. V. Beluhkian, V. V. Hovsepian* — About existence of surface waves for an elastic space with the cylindrical cavity 169

PHYSICS

- S. Kh. Pilosian* — Nonlinear interactions between high T_e film bridges 173
- A. O. Vardanian, D. L. Oganessian* — Single ultra-short light pulse phase determination 178

MICROBIOLOGY

- A. F. Kazanchian, A. G. Gabrielian, M. A. Poghosyan, R. A. Zakharian* — Thin structure of differential melting curve of the plasmid pSD IINA 181

ACAROLOGY

- E. S. Arutunian* — New subgenus and new species of the genus *Hypaspis* Can., 1884 s. l. (Parasitiformes, Mesostigmata, Laelaptidae) 188

MEDICINE

- N. D. Vardazarian, N. G. Khostikyan, L. A. Avakyan* — Morphological characteristic of hypothalamus in long experimental infection resulted by the streptococcus group B 187

Сдано в набор 24.07.1991. Подписано к печати 08.08.1991
 Формат 70 × 108^{1/2}. Бумага № 1, сыктывкарская. Высокая печать. Печ. лист 30.
 Усл. печ. л. 4,2. Усл. кр. отт. 4,2. Учет. изд. л. 2,82. Тираж 510. Заказ № 209.
 Издат. № 7916. Цена 55 к.
 Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г, II эт., к. 1, т. 27-9234

Издательство Академии наук Армении, 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24 г.
 Типография Издательства Академии наук Армении, 375019, Ереван,
 пр. Маршала Баграмяна 24.

1991, № 1, с. 145-192. Издательство Академии наук Армении, 1991, Т. 91, № 4, с. 145-192.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

Ф. А. Шамоян, А. В. Арутюнян

Теплицевы операторы в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций

(Представлено академиком АН Армении М. М. Джрбашяном 17/VII 1990)

1°. Пусть U^n — единичный полидиск n -мерного комплексного пространства \mathbb{C}^n , T^n — его остов, $H(U^n)$ — множество всех голоморфных в U^n функций. С мультииндексом $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ($\alpha_j > -1$, $1 \leq j \leq n$) свяжем пространство

$$H^p(\alpha) = H^p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \left\{ f \in H(U^n); \|f\|_{H^p(\alpha)} = \left(\int_{U^n} |f(\xi)|^p (1 - |\xi|)^{\alpha} dm_{2n}(\xi) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\};$$

здесь m_{2n} — $2n$ -мерная мера Лебега на U^n , $(1 - |\xi|)^{\alpha} = (1 - |\xi_1|)^{\alpha_1} \times \dots \times (1 - |\xi_n|)^{\alpha_n}$. В одномерном случае эти пространства были введены и изучены в работах М. М. Джрбашяна (1, 2). В этой заметке мы исследуем ограниченность теплицевых операторов в пространствах типа $H^p(\alpha)$. Напомним, что оператором Теплица с символом $h \in L^1(T^n)$ называется следующий интегральный оператор:

$$T_h(f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n} \frac{f(\xi) \cdot h(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in U^n. \quad (1)$$

Исследуя T_h на пространствах $H^p(\alpha)$, мы, естественно, рассматриваем их сначала на всюду плотном подмножестве $H^p(\alpha)$, скажем, на подмножестве $S_\lambda(U^n) = C(\bar{U}^n) \cap H(U^n)$, или же на множестве всех многочленов. Мы найдем полное описание тех символов h , при которых соответствующий оператор T_h имеет ограниченное расширение всюду на этих пространствах. Отметим, что часть приведенных результатов в одномерном случае ранее была получена первым автором (см. (3, 4)). Подчеркнем, однако, что поведение операторов вида (1) существенно отличается от одномерного случая и от случая сферы. Так,

например, классическая теорема И. И. Привалова о гладкости интеграла типа Коши от гладкой функции в случае тора не имеет места (см. (5)), хотя в случае сферы хорошо известен прямой аналог этой теоремы (см. (6)). Приложения операторов Теплица в различных вопросах анализа широко известны (см., например (7, 8)).

В конце заметки мы приведем одно из таких приложений. При получении результатов заметки мы используем описание линейных непрерывных функционалов на пространствах $\Xi^n(z_1, \dots, z_n)$ (см. (9)).

2°. Для изложения основных результатов заметки сначала приведем определение интегродифференциального оператора дробного порядка.

Пусть $z = (z_1, \dots, z_n)$, $-1 < z_j < +\infty$, $1 \leq j \leq n$, $f \in H(U^n)$, $f(z) = \sum_{|\kappa|=0}^{\infty} a_{\kappa} z^{\kappa}$, положим

$$D^{\alpha} f(z) = \sum_{|\kappa|=0}^{\infty} \frac{\Gamma(z_1 + 1 + k_1) \dots \Gamma(z_n + 1 + k_n)}{\Gamma(z_1 + 1) \dots \Gamma(z_n + 1) \Gamma(k_1 + 1) \dots \Gamma(k_n + 1)} \times a_{\kappa} z^{\kappa}, \quad z \in U^n. \quad (2)$$

Очевидно, что если $f \in H(U^n)$, то $D^{\alpha} f \in H(U^n)$. Обозначим через Λ_{α}^p , $0 < p \leq 1$, $\alpha = (z_1, \dots, z_n)$ класс функций $f \in H(U^n)$, для которых при $\beta_j > \frac{z_j + 2}{p}$, $1 \leq j \leq n$ выполняется оценка

$$\|f\|_{\Lambda_{\alpha}^p} = \sup_{z \in U^n} \left\{ |D^{1+\beta} f(z)| (1 - |z|)^{z_1 + 2 - \frac{z_1 + 2}{p}} \right\} < +\infty, \quad (3)$$

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in Z_+^n.$$

Введем в рассмотрение также

$$H_{\beta}^p(\alpha) = \{f \in H(U^n); \|f\|_{H_{\beta}^p(\alpha)} = \|D^{\beta} f\|_{H^p(\alpha)} < +\infty\}.$$

Определение. Скажем, что суммируемая на T^n функция h принадлежит классу RP , если коэффициенты Фурье функции h равны нулю вне множества $Z_+^n \cup (-Z_+^n)$.

В дальнейшем будем всегда предполагать, что $h \in RP$. Символом $H^p(U^n)$ обозначим класс Харди в U^n .

Теорема 1. Пусть $0 < p < 1$. Тогда оператор T_n действует в пространствах $H^p(\alpha)$ тогда и только тогда, когда $h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in H^-(U^n)$, $h_2 \in \Lambda_{\alpha}^p$.

Теорема 2. Пусть $1 < p < z_i + 2$, $1 \leq i \leq n$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) $T_n(f) \in H^p(z)$, для любой $f \in H^p(\alpha)$;
- 2) функция h представима в виде $h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in H^-(U^n)$, $D^{1+\alpha} h_2 \in H^q(z)$, $q = \frac{p}{p-1}$.

В следующей теореме необходимое условие ограниченности оператора T_h близко к достаточному.

Теорема 3. Пусть $\alpha_j + 2 \leq p < +\infty$, $1 \leq j \leq n$, тогда, если T_h действует в пространстве $H^p(\alpha)$, то $h \in L^\infty$, при этом $h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in H^1(U^n)$, $D^{1+\alpha} h_2 \in H^q(\alpha)$, $q = \frac{1}{p-1}$. И обратно, если $h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in H^1(U^n)$, $D^{1+\alpha} h_2 \in H^q(\alpha)$, $q = \frac{p}{p-1}$, тогда оператор T_h действует на пространстве $H^p(\alpha)$.

В следующих теоремах устанавливается ограниченность операторов в пространствах $H_k^p(\alpha)$.

Теорема 4. Пусть $0 < p \leq 1$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in Z_+^n$, при этом $p(k_i + 1) < \alpha_i + 2$, $1 \leq i \leq n$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) $T_h(f) \in H_k^p(\alpha)$ для любой $f \in H_k^p(\alpha)$.

2) $h = h_1 + h_2$, где h_1 — мультипликатор пространства $H_k^p(\alpha)$, h_2 удовлетворяет условию: функция

$$F(z) = \int_0^{z_1} \dots \int_0^{z_n} (z_1 - t_1)^{k_1-1} \dots (z_n - t_n)^{k_n-1} h_2(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n \quad (3)$$

принадлежит классу Λ_α^p .

Теорема 5. Пусть $0 < p \leq 1$, $pk_i > \alpha_i + 2$, $1 \leq i \leq n$. Тогда если T_h действует в пространстве $H_k^p(\alpha)$, то $h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in H_k^p(\alpha)$, $h_2 \in H^\infty$. И обратно, если $h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in H_k^p(\alpha)$, $h_2 \in H^\infty$, то $T_h(f)$ действует в пространствах $H_k^p(\alpha)$.

В следующей теореме мы будем предполагать, что $h \in H^1(U^n)$.

Теорема 6. Пусть $p(k_i + 1) = \alpha_i + 2$, $1 \leq i \leq n$, $0 < p \leq 1$. Тогда если оператор T_h действует в пространстве $H_k^p(\alpha)$, то $h \in H^\infty(U^n)$, при этом

$$|D^n h(z)| \leq \frac{\text{const}}{(1 - |z_1|) \log \frac{1}{1 - |z_1|} \dots (1 - |z_n|) \log \frac{1}{1 - |z_n|}}, \quad (5)$$

$$z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n.$$

И обратно, если $h \in H^1(U^n)$ и кроме того удовлетворяет оценке

$$|D^n h(z)| \leq \frac{\text{const}}{(1 - |z_1|) \left(\log \frac{1}{1 - |z_1|} \right)^{1/p} \dots (1 - |z_n|) \left(\log \frac{1}{1 - |z_n|} \right)^{1/p}}, \quad (6)$$

то T_h действует в пространстве $H_k^p(\alpha)$.

Теорема 7. Предположим, что $p > 1$ и $p(k_i + 1) < z_i + 2$, $1 \leq i \leq n$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) T_h — действует в пространствах $H_k^p(z)$;

2) функция h допускает такое представление $h = h_1 + h_2$, где h_1 является мультипликатором пространства $H_k^p(z)$, а функция

$$F(z) = \int_0^{z_1} \dots \int_0^{z_n} (z_1 - t_1)^{k_1-1} \dots (z_n - t_n)^{k_n-1} h_2(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$$

принадлежит классу $H_{z+1}^0(z)$.

При других значениях параметров p , a и k справедлива

Теорема 8. Пусть $1 < p < +\infty$, при этом $p \cdot k_i > z_i + 2$, $1 \leq i \leq n$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) T_h действует в пространстве $H_k^p(z)$,

2) h представима в виде $h = h_1 + h_2$,

где $h_1 \in H_k^p(z)$, $h_2 \in H^\infty(U^n)$.

Наметим ход доказательств теорем 1—8. Пусть X совпадает с одним из указанных пространств. Предположим, что $T_h(f)$ действует в X . Тогда

$$\|T_h(f)\|_X \leq \text{const} \|f\|_X. \quad (7)$$

Учитывая очевидную оценку $\|T_h(f)(0)\| \leq \text{const} \|T_h(f)\|_X$, отсюда получаем, что $\Phi(f) = T_h(f)(0)$ является линейным непрерывным функционалом на X . Используя результаты работы (*), выводим необходимые условия на h . В доказательстве достаточности полученных условий существенную роль играет представление

$$T_h(f)(z) = h_1(z) f(z) + \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n} \frac{f(\xi) \overline{h_2(\xi)}}{\xi - z} d\xi, \quad z \in U^n.$$

Замечание. Используя очевидное равенство

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n} \frac{f(\xi) \overline{h(\xi)}}{(\xi - z)^2} d\xi = \frac{1}{\pi^n} \int_{U^n} \frac{D^n f(\xi) \overline{h(\xi)}}{(1 - \xi z)^2} dm_{2n}(\xi), \quad z \in U^n,$$

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $h \in H^1(U^n)$, $f \in H_k^p(z)$, из вышеуказанных утверждений можно получить характеристику тех $h \in H^1(U^n)$, при которых операторы последнего вида действуют в пространствах $H_k^p(z)$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in Z_+^n$.

Наконец приведем приложения полученных результатов к вопросам деления на внутреннюю функцию в пространствах $H_k^p(z)$.

Определение. Функция $g \in H^\infty(U^n)$ называется внутренней, если ее радиальные предельные значения почти всюду на T^n удовлетворяют условию $|g^*(w)| = 1$.

Определение. Внутреннюю функцию g в U^n будем называть хорошей, если $u|g| = 0$.

Напомним, что $u|g|$ — это наименьшая n -гармоническая мажоранта функции $\log|g|$ в U^n (см. (10)).

Теорема 9. Пусть функция f принадлежит классу $H_k^p(a)$, J — хорошая внутренняя функция, F — голоморфная в U^n функция и $f = F \cdot J$. Тогда функция F принадлежит классу $H_k^p(z)$.

Институт математики
Академии наук Армении

Յ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ, Ա. Վ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Տոպոլոգիական օպերատորներ բազմաշրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների անիզոտրոպ տարածություններում

Անալիտիկ ֆունկցիաների հարցեր

$$T_h(f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n} \frac{f(\xi) \cdot h(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad h \in L^1(T^n), \quad z \in U^n$$

օպերատորի սահմանափակության հարցեր բազմաշրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների $H_k^p(z)$ անիզոտրոպ տարածություններում, որտեղ

$$k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n, \quad z = (z_1, \dots, z_n); \quad \alpha_j > -1, \quad 1 \leq j \leq n:$$

Ստացվել են նշված օպերատորի սահմանափակության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ:

Հոդվածի վերջում բերված է ստացված արդյունքների կիրառությունը բազմաշրջանում հոլոմորֆ ֆունկցիաների տարածություններում ներքին ֆունկցիաների վրա բաժանելիության հարցերում:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 М. М. Джрбашян, ДАН АрмССР, т. 3, № 1, с. 3—9 (1945).
- 2 М. М. Джрбашян, Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР, вып. 2, с. 3—30, 1948 г.
- 3 Ф. А. Шамоян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 8, № 6, с. 474—490, (1973).
- 4 Ф. А. Шамоян, ДАН АрмССР, т. 76, № 3, с. 109—113 (1983).
- 5 Б. Ерикхе, Math. Nachrichten, v. 107, p. 221—233 (1982).
- 6 У. Рудин, Теория функций в единичном шаре из \mathbb{C}^n , Мир, М., 1984.
- 7 В. В. Пеллер, С. В. Зруцев, УМН, т. 37, вып. 1 (223), с. 53—124 (1982).
- 8 J. P. Kahane, Bull. Amer. Math. Soc., v. 80, № 5, p. 783—804 (1974).
- 9 Ф. А. Шамоян, Сибирский мат. журн., т. 31, № 2, с. 195—215 (1990).
- 10 У. Рудин, Теория функций в поликруге, Мир, М., 1974.

УДК 512.64. 519.64

Член-корреспондент АН Армении А. Б. Нерсисян, Х. М. Бешликян

Численная реализация нового метода решения
 уравнений теплицева типа

(Представлено 18/IX 1990)

Известно (см., например, (1)), что решение линейной алгебраической системы с теплицевой $n \times n$ -матрицей, при условии невырожденности главных подматриц, можно реализовать посредством алгоритма Л—Т (Н. Левинсона—В. Тренча), требующего выполнения $6n^2 + O(n)$ ($n \rightarrow \infty$) аддитивных и мультипликативных операций вместо $2/3n^3 + O(n^2)$, если иметь в виду метод Гаусса для систем общего вида. Попытка отказа от этого ограничения на ведущие миноры (при невырожденности самой матрицы) привела к модификациям алгоритма Л—Т, что, так или иначе, усложняет его (см., например, (1, 2)).

В сообщении (3) был предложен совершенно иной подход. Его суть заключается в следующем.

Пусть дана комплекснозначная невырожденная матрица $T_n = [t_{i-j}]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ и требуется вычислить обратную матрицу $T_n^{-1} = R_n = [r_{ij}^n]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Задав произвольным комплексным числом $\varphi \neq 0$, дополним матрицу T_n до φ -косоциркулянта* размеров $(2n - 1) \times (2n - 1)$ посредством формул (см. (1))

$$t_{-k} = \varphi t_{n-k+1}, \quad k = \pm(n+1), \dots, \pm(2n-1) \quad (1)$$

Предположим, что $\det T_{2n-1} \neq 0$. Как известно (см. (1)), матрицу $T_{2n-1}^{-1} = R_{2n-1} = [r_{ij}^{2n-1}]$, $i, j = 1, 2, \dots, 2n-1$, можно выписать в явном виде через дискретное преобразование Фурье. Применение быстрого преобразования Фурье (БПФ) решает эту задачу с вычислительными затратами порядка $O(n \ln n)$ ($n \rightarrow \infty$) операций.

Дальнейшие шаги связаны с обратной рекурсией по $k = 2n - 2, 2n - 3, \dots, n + 1, n$, где $T_k = [t_{i-j}]$, $i, j = 1, 2, \dots, k$.

* Дополнение теплицевой матрицы до циркулянта ($\varphi = 1$) производилось ранее при решении уравнения с ленточной матрицей в (4) (см. также (1)).

Рассмотрим сначала невырожденные матрицы общего вида $A_k = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, k$ и соответственно обозначим $A_k^{-1} = R_k = [r_{ij}^k]$. Нетрудно установить (хотя бы прямой проверкой) следующую связь между R_k и R_{k-1} .

$$r_{ij}^{k-1} = r_{ij}^k - r_{ik}^k (r_{kk}^k)^{-1} r_{kj}^k, \quad i, j = 1, 2, \dots, k \quad (2)$$

С другой стороны, в изучаемом теплицевом случае ($a_{ij} = t_{i-j}$) известна формула В. Тренча (см. (1))

$$r_{i,j+1}^{k-1} = r_{ij}^k + r_{i+1,1}^k (r_{11}^k)^{-1} r_{1,j+1}^k - r_{ik}^k (r_{11}^k)^{-1} r_{kj}^k, \quad (3)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, k-1,$$

сводящая задачу определения R_k к вычислению ее «граничных» значений. Наконец, учитывая персимметричность скалярной матрицы R_k ($r_{i,j}^k = r_{k-j+1, k-i+1}^k$), приходим к соотношениям

$$r_{i, k-1}^{k-1} = r_{i+1, k}^k - r_{k, k-1}^k (r_{kk}^k)^{-1} r_{1k}^k, \quad (i = 1, 2, \dots, k-1) \quad (4)$$

$$r_{k-1, i}^{k-1} = r_{k, i+1}^k - r_{k1}^k (r_{kk}^k)^{-1} r_{k-i, k}^k.$$

Формулы (3) и (4) позволяют рекуррентно найти $T_{2n-1}^{-1} = R_{2n-1}$ при невырожденности матриц T_k ($k = 2n-2, \dots, n+1$). Назовем этот путь алгоритмом А и отметим следующие его характеристики:

1. Алгоритм работает при условии $\det T_k \neq 0$, $k = n+1, n+2, \dots, 2n-1$. Ясно, что при близком к машинному нулю значении одного из этих определителей может произойти авост (или, по крайней мере, резкое накопление ошибок). Если для данного значения φ это условие не выполнено, то алгоритм надо повторить при другом значении. Эвристические соображения показывают, что при этом вероятность повторения переполнения очень мала. В многочисленных экспериментах, проведенных нами, авост ни разу не встречался даже при первом выборе φ .

2. Вычислительные затраты на обсчет «граничных значений» матрицы T_n^{-1} по алгоритму (4) составляют $6n^2 + O(n)$ аддитивных и мультипликативных операций, а требуемая память— $4n-2$ ячейки. Заметим, что в алгоритме Л—Т на это требуется $4n^2 + O(n)$ операций при той же памяти (см. (1)). На выполнение всего алгоритма А требуется $10n^2 + O(n)$ операций (если для T_{2n-1}^{-1} применить БПЭ). Однако матрицу T_n^{-1} можно представить по формуле Гохберга—Семенцула (1, 2) и, таким образом, для решения уравнения с матрицей T_n можно ограничиться $10n^2 + O(n)$ операциями, в то время как по алгоритму Л—Т требуется $6n^2 + O(n)$.

3. Алгоритм А полностью векторизован и может быть распараллелен применением $4n-2$ процессоров. При этом алгоритм (4) будет выполнен за время $(n-1)t_0$, где t_0 —время выполнения операции вида

$a + bc$. Если при этом через t_p обозначить время выполнения алгоритма при использовании p процессоров, то коэффициент эффективности будет равен (см. (5))

$$k_e \approx \frac{t_1}{4n t_{4, \dots, 2}} \rightarrow 0,75 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (5)$$

Аналогичная форма алгоритма Л—Т обладает примерно такими же характеристиками и распараллеливается с $k_e \rightarrow 0,5$ (1).

4. Простое устройство графа алгоритма (4) позволяет легко наметить архитектуру систолического массива из p вычислителей для реализации параллельного счета на основе СБИС (см. (5), $p \leq 4n - 2$).

5. Алгоритм А может быть успешно реализован на ЭВМ конвейерного типа, что и было продемонстрировано (см. ниже) в обсчетах на матричном процессоре МП ЕС 2700 ЕрНИИММ (6).

6. Формулы (2) и (3) сохраняют свою силу и в случае теплицевых матриц $T = \|t_{ij}\|$ с элементами t_k из некоммутативной алгебры с единицей. В частности, это относится к блочно-теплицевым матрицам. При таком обобщении надо при переходе от (2), (3) к (4) отказаться от свойства персимметричности, в результате чего формулы (4) примут вид, пригодный для определения четырех граничных векторов:

$$r_{ki}^k, r_{ik}^k, r_{ii}^k, r_{ii}^k \quad (i = 1, 2, \dots, k; \quad k = 2n - 2, \dots, n + 1, n).$$

7. В случае интегральных уравнений Фредгольма второго рода на конечном отрезке с ядром, зависящим от разности аргументов, аналоги алгоритма А различной точности строятся по той же схеме (см. (3)).

Вычислительный эксперимент был проведен для ряда матриц с разными свойствами. В качестве контрольного выбран метод Гаусса с постолбцовым выбором ведущего элемента (алгоритм G). В частности, были обсчитаны следующие тест-матрицы из сборника (7):

T1, T2 — симметричные трехдиагональные матрицы вида $t_0 = a$, $t_1 = t_{-1} = -1$, $t_k = 0$ ($|k| \geq 2$) при $a = 2$ и $a = 1$ соответственно. Отметим, что все миноры четного порядка матрицы T2 равны нулю, вследствие чего алгоритм Л—Т для нее не проходит.

T3 — плотная симметрическая матрица вида $t_0 = 0$, $t_k = 1$ ($|k| \geq 1$).

T4, T5 — плотные матрицы вида $t_k = (k + a)^{-1}$, $|k| \geq 0$ при $a = 0,1$ и $a = 1,1$ соответственно. Это несимметрические, плохо обусловленные при больших размерах, матрицы типа известной матрицы Гильберта.

Время работы арифметического процессора (в секундах) при обсчетах по сравниваемым алгоритмам приведено на диаграммах (рис. 1 и 2). Как и следовало ожидать, преимущество алгоритма А в скорости при работе на ЭВМ ЕС 1045 растет с ростом размерности n (рис. 1). При использовании матричного процессора МП ЕС 2700 время резко сокращается в обоих случаях (рис. 2). Заметим, что при

$n < 150$ алгоритм G быстрее по той причине, что он организован в матричном процессоре на микропрограммном уровне. При аналогичной реализации алгоритма A его преимущества были бы ощутимей, особенно при небольших n .

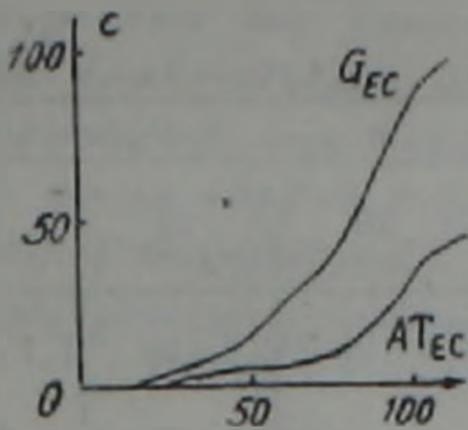


Рис. 1

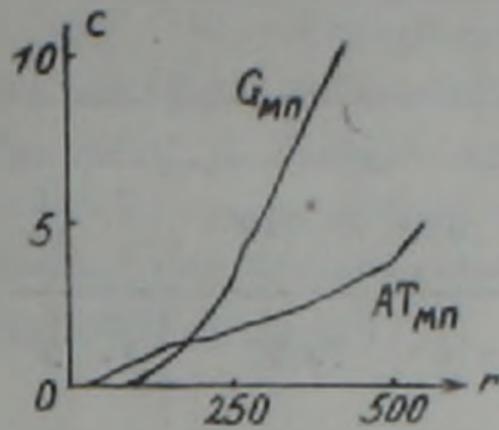


Рис. 2

Результаты применения алгоритма A при $\varphi = 1$ к матрице $T2$ более чем на порядок хуже, чем при обсчете по алгоритму G (табл. 1). Возможно, при ином выборе φ (см. ниже) результаты были бы лучше. В случае матрицы $T3$ (табл. 2) при том же $\varphi = 1$ точность алгоритма G лишь в несколько раз лучше.

Совершенно неожиданная ситуация наблюдается в случае матриц $T4$ и $T5$ (табл. 3). Здесь с ростом n точность алгоритма G резко ухудшается (а для матрицы $T5$ уже при $n = 15$ алгоритм G практически непригоден). На этом фоне результаты применения алгоритма A превосходны в случае матрицы $T4$ и вполне удовлетворительны для матрицы $T5$.

Таблица 1

Алгоритм	n				
	25	45	66	85	90
$AT2 (\varphi = 1)$	0,0018	0,002	0,003	0,012	0,015
$GT2$	0,0001	0,0003	0,0003	0,0003	0,0005

Таблица 2

Алгоритм	n				
	6	30	50	80	90
$AT3 (\varphi = 1)$	4×10^{-5}	3×10^{-4}	1×10^{-3}	3×10^{-3}	5×10^{-3}
$GT3$	1×10^{-5}	1×10^{-4}	2×10^{-4}	8×10^{-4}	1×10^{-3}

На примере матрицы $T1$ была выявлена зависимость результатов применения алгоритма A от выбора параметра φ . Оказалось, что при $\varphi = 1 + 10\%$ его точность ($\delta = 2 \times 10^{-5}$ при $n = 32$ и $\delta = 9 \times 10^{-4}$ при

$n = 90$) примерно такая же, как и у алгоритма G ($\delta = 1 \times 10^{-5}$ при $n = 32$ и $\delta = 5 \times 10^{-4}$ при $n = 90$). При $\varphi = 9 + 7i$ алгоритм A уже гораздо менее точен ($\delta = 9 \times 10^{-2}$ при $n = 32$ и $\delta = 5 \times 10^{-1}$ при $n = 90$), а при $\varphi = 1$ он уже практически непригоден (в интервале $32 \leq n \leq 90$ ошибка держится на уровне $\delta \approx 1,08 - 1,09$).

Таблица 3

Алгоритм	n						
	5	10	15	20	25	30	40
A_{T4} ($\varphi = 9 + 7i$)	1×10^{-5}	2×10^{-5}	4×10^{-5}	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \times 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \times 10^{-4}$
G_{T4}	1×10^{-5}	$1,6 \cdot 10^{-5}$	2×10^{-5}	$3,5 \times 10^{-5}$	4×10^{-5}	3×10^{-1}	6×10^{-1}
A_{T5} ($\varphi = 1$)	0	1×10^{-3}	3×10^{-3}	1×10^{-2}	3×10^{-2}	3×10^{-2}	6×10^{-2}
G_{T5}	1×10^{-5}	5×10^{-4}	$1,6 \times 10^{-3}$	$4,7 \times 10^{-2}$	5×10^2	$2,4 \times 10^3$	∞

Заключение. Приведенные результаты свидетельствуют о том, что алгоритм A является неплохой альтернативой алгоритмам типа $L-T$, если *a priori* неизвестна информация об обратимости ведущих подматриц. Особенно обнадеживают результаты, приведенные в табл. 3. Сильная зависимость результатов счета от выбора φ требует выработки оптимальной стратегии этого выбора.

В то же время можно искусственно построить такую невырожденную теплицеву матрицу T_n для которой алгоритм A ни при каком φ не пройдет. Хотя такие случаи в практике вряд ли встретятся, их также можно избежать. Например, можно расширять T_n до T_m ($m > 2n - 1$), получив в свое распоряжение, кроме φ , новые свободные параметры. Это удобно еще потому, что для применения БПФ желателен выбор размерности m в виде степени двойки (см. (1)).

Имея в виду весь набор методов обращения матриц теплицева типа и аналогичных интегральных уравнений, желательно разработать механизм автоматического выбора алгоритмов. Например, можно начать с наиболее быстрого алгоритма $L-T$ и, в случае его сбоя или сомнений в его точности, продолжить обсчет по другим алгоритмам (скажем, по мере возрастания их высоты). При этом необходимо иметь в виду и методы ортогонального (8) и блочно-ортогонального (9) разложений, не требующие каких-либо ограничений на главные подматрицы, но несколько более медленные (в скалярном случае (8) вычисление T_n^{-1} требует $20n^2 + O(n)$ ($n \rightarrow \infty$) аддитивных и $23n^2 + O(n)$ мультипликативных операций).

Институт математики Академии наук Армении
Ереванский научно-исследовательский
институт математических машин

Տոպլիցյան տիպի նավասարումների լուծման նոր եղանակի
թվային իրականացում

Տոպլիցյան մատրիցաներով համակարգերի համար ⁽³⁾ աշխատանքում առաջարկվել էր լուծման նոր եղանակ, որը հնարավորություն էր տալիս շրջանցել հայտնի մոտեցումներին բնորոշ սահմանափակումները:

Տվյալ աշխատանքում այդ եղանակը գտել է թվային իրականացում: Ինչպես ցույց են տալիս բերված հաշվարկների արդյունքները, առաջարկվող ալգորիթմը կարելի է հաջողությամբ կիրառել: Համապատասխան ալգորիթմ կարելի է կառուցել ինտեգրալ հավասարումների դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ

- ¹ В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников, Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами, Наука, М., 1987. ² G. Heinig, Zeitschrift d. TH Karl-Marx-Stadt, v. 21, № 3, p. 326—333 (1983). ³ А. Б. Нерсесян, II Всесоюзная конференция по актуальным проблемам информатики и вычислительной техники «Информатика—87», Тезисы докладов, Ереван, 20—22 октября 1987, с. 157—158, 1987. ⁴ А. К. Jain, IEEE Trans., ASSP-26, № 2, p. 121—126 (1978). ⁵ В. В. Воеводин, Математические модели и методы в параллельных процессах, Наука, М., 1986. ⁶ М. А. Семерджян, Ж. С. Налбандян, Л. Х. Гаспарян, Принципы работы и система программного обеспечения МП ЕС 2700, Наука, М., 1988. ⁷ В. Н. Фаддеева, Л. Ю. Колотилина, Вычислительные методы в линейной алгебре: набор матриц для тестирования, ч. 1, ЛОМИ, Л., 1982. ⁸ G. Gubenko, SIAM J. Sci. Stat. Comput., v. 8, p. 734—740 (1987). ⁹ Г. В. Агемян, А. Б. Нерсесян, Деп. в Арм. НИИНТИ, № 64—Ар89, 1988.

УДК 517.5

В. Р. Манукян

О проблеме моментов для индексационных классов распределений

(Представлено академиком АН Армении Р. Р. Варшамовым 2/XI 1990)

В работе вводится понятие индекса функции распределения (ФР) на $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, относительно произвольного класса \mathfrak{X} ФР на $[a, b]$, основанное на сравнении ФР через количество интервалов монотонности их разности. С помощью понятия индекса аксиоматически определяется индексационный класс \mathfrak{X} . Приводятся примеры конкретных индексационных классов. На индексационных классах изучается конечная степенная проблема моментов.

В монографиях ⁽¹⁾ и ⁽²⁾ приведено решение конечной проблемы моментов на двух классах ФР: \mathfrak{X}_0 — всех ФР на $[a, b]$ и B_L — ФР на $[a, b]$, удовлетворяющих условию $\sigma(y) - \sigma(x)/y - x \leq L$, $-\infty < x < y < \infty$.

В работах ряда авторов ((см., например, ^(3, 4))) обосновывается важность решения проблемы моментов и связанных с ней экстремальных задач на многих классах ФР.

Метод, предложенный в работах ^(5, 6) и основанный на сравнении ФР через количество перемен знака их разности, позволяет решать степенную проблему моментов на многих классах ФР (классы ФР на $[a, b]$, выпуклых на $[a, b]$, стареющих на $[a, b]$ и др.).

1°. Определение 1. а) Функция $f(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, не убывает (возрастает) в точке ξ , если существует $\epsilon > 0$ такое, что $f(t) - f(\xi) \geq 0$ ($f(t) - f(\xi) > 0$) для всех $t \in (\xi, \xi + \epsilon)$.

б) Функция f не возрастает (убывает) в точке ξ , если $-f$ не убывает (возрастает) в ξ .

в) Функция f постоянна в точке ξ , если она одновременно не убывает и не возрастает в ξ .

Пусть μ и ν — ФР на $[a, b]$ и $\Delta = \nu - \mu$. Пишем $\mu \leq \nu$, если

а) существуют множества

$$B_0(\Delta) < B_1(\Delta) < \dots < B_k(\Delta)^* \quad \bigcup_{i=0}^k B_i(\Delta) = (-\infty, +\infty).$$

такие, что функция $(-1)^{k-l} \Delta$ не убывает в точках $t \in \overline{B_l(\Delta)}$, $l = 0, k$;

* Под $X < Y$ ($X, Y \subset R^1$) понимаем $x < y$ для всех $x \in X$, $y \in Y$.

б) существуют $t_i \in B_i(\Delta)$, $i = \overline{0, k}$, такие, что $(-1)^{k-i} \Delta$ возрастает в точке t_i .

Сформулируем критерий выполнимости отношения $\mu \underset{k}{<} \nu$.

Критерий. Отношение $\mu \underset{k}{<} \nu$ выполнено тогда и только тогда, когда $(\Delta = \nu - \mu)$

а) существуют точки $t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1}$ такие, что

$$(-1)^{k-i} [\Delta(t_{i-1}) - \Delta(t_i)] > 0, \quad i = \overline{0, k};$$

б) не существуют точки $\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_k < \theta_{k+1}$ такие, что

$$(-1)^{k-i} [\Delta(\theta_{i+1}) - \Delta(\theta_i)] < 0, \quad i = \overline{0, k}.$$

Теперь мы в состоянии дать понятие индекса.

Определение 2. Пишем $\mathfrak{X} \underset{k}{\rightarrow} \sigma$, если для любой ФР $\mu \in \mathfrak{X}$, $\mu \neq \sigma$, выполнено одно из отношений: $\mu \underset{s}{<} \sigma$, $s = \overline{1, k}$, $\sigma \underset{m}{<} \mu$, $m = \overline{1, k-1}$. Пишем $\nu \underset{k}{\leftarrow} \mathfrak{X}$, если для любой ФР $\mu \in \mathfrak{X}$, $\mu \neq \nu$, выполнено одно из отношений $\mu \underset{s}{<} \nu$, $s = \overline{1, k-1}$, $\nu \underset{m}{<} \mu$, $m = \overline{1, k}$.

ФР $\sigma \in \mathfrak{X}$ имеет индекс k^+ в \mathfrak{X} , если выполнено отношение $\mathfrak{X} \underset{k}{\rightarrow} \sigma$ и не выполнено отношение $\mathfrak{X} \underset{k-1}{\rightarrow} \sigma$. ФР $\nu \in \mathfrak{X}$ имеет индекс k^- в \mathfrak{X} , если выполнено отношение $\nu \underset{k}{\leftarrow} \mathfrak{X}$ и не выполнено $\nu \underset{k-1}{\leftarrow} \mathfrak{X}$.

Через Γ_k^+ (Γ_k^-), $k \geq 1$, обозначим совокупность всех ФР с индексом k^+ (k^-). Пусть ($k \geq 1$)

$$\widehat{\Gamma}_k^+ = \left(\bigcup_{i=1}^k \Gamma_i^+ \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \Gamma_i^- \right), \quad \widehat{\Gamma}_k^- = \left(\bigcup_{i=1}^k \Gamma_i^- \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \Gamma_i^+ \right), \quad \Gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\Gamma_i^+ \cup \Gamma_i^-).$$

Свойство индекса. Если класс \mathfrak{X} замкнут*, то замкнуты также множества $\widehat{\Gamma}_k^+$, $\widehat{\Gamma}_k^-$, $k \geq 1$.

2. Определение. Множество $A \subset \mathfrak{X}$ назовем k -окрестностью ФР σ в \mathfrak{X} , если $\sigma \in A$ и множество A имеет вид

$$\{ \sigma_{\vec{a}} : \vec{a} \in V \subset R^n \},$$

где V открыто, $\sigma_{\vec{a}} \neq \sigma_{\vec{\beta}}$ при $\vec{a} \neq \vec{\beta}$, $\sigma_{\vec{a}_1} \Rightarrow \sigma_{\vec{a}_2}$ при $\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_2$ ($\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{a}_1 \in V$).

Множество $A \subset \mathfrak{X}$ назовем k -открытым, если каждая ФР имеет k -окрестность, состоящую из функций множества A .

* В работе всюду рассматривается слабая сложность.

Определение 4. Класс \mathfrak{X} ФР на $[a, b]$ назовем индексационным с дефектом n , если

1) множества I_k^+ и I_k^- ($k-1$)-открыты для $k \geq n+2$;

2) множества $I \setminus \bar{I}_{n+1}^+$ и $I \setminus \bar{I}_{n+1}^-$ всюду плотны в \mathfrak{X} .

Примеры 1. Класс \mathfrak{X}_0 всех ФР на $[a, b]$ является индексационным с дефектом n для всех $n \geq 0$. Множество I есть класс ступенчатых с конечным числом скачков ФР на $[a, b]$. Индекс ФР $\sigma \in I$ равен числу скачков ломаной, являющейся графиком функции σ минус один. ФР $\sigma \in I$ индекса k является ФР индекса k^+ , если имеет в точке b скачок, и индекса k^- в противном случае.

2. Класс B_L является индексационным с дефектом n для любого $n \geq 0$. I есть класс ФР на $[a, b]$ с графиком в виде ломаной, звенья которой либо параллельны оси абсцисс, либо имеют угловой коэффициент L . Индекс ФР $\sigma \in I$ равен числу звеньев ее графика минус один. Индекс k ФР $\sigma \in I$ является индексом k^- , если последнее звено горизонтально, и индексом k^+ в противном случае.

3. Пусть F — класс выпуклых на (a, b) ФР на $[a, b]$. Класс F является индексационным с дефектом n для всех $n \geq 0$. I есть множество ФР, для которых

$$\sigma(t) = \begin{cases} a_0(t - t_0) & \text{при } t \in [t_0, t_1], \\ a_0(t_1 - t_0) + a_1(t - t_1) & \text{при } t \in [t_1, t_2], \\ \dots & \dots \\ \sum_{i=0}^{k-1} a_i(t_{i+1} - t_i) + a_k(t - t_k) & \text{при } t \in [t_k, t_{k+1}]. \end{cases}$$

где $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_{k-1} < a_k < \infty$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$.

Индекс ФР $\sigma \in I$ равен $2k + \epsilon_1 + \epsilon_2$, где

$$\epsilon_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } a_0 > 0, \\ 0, & \text{если } a_0 = 0, \end{cases} \quad \epsilon_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma(b) < 1, \\ 0, & \text{если } \sigma(b) = 1. \end{cases}$$

Индекс k ФР $\sigma \in I$ является индексом k^+ , если $\sigma(b) < 1$, и индексом k^- , если $\sigma(b) = 1$.

3°. Пусть \mathfrak{X} — некоторый класс ФР на $[a, b]$. Положим ($i \geq 1$, $\sigma \in \mathfrak{X}$, $A \subset \mathfrak{X}$, $\bar{c} \in R^i$):

$$F_i(\sigma) = \int_a^{b+} t^i d\sigma(t), \quad F_i(A) = \{F_i(\sigma) : \sigma \in A\},$$

$$\bar{F}_i(\sigma) = (F_1(\sigma), \dots, F_i(\sigma)), \quad \bar{F}_i(A) = \{\bar{F}_i(\sigma) : \sigma \in A\},$$

$$A(\bar{c}) = \{\sigma \in A : \bar{F}_i(\sigma) = \bar{c}\}.$$

Под степенной проблемой моментов порядка k , $k \geq 1$, на классе \mathfrak{M} понимается задача выявления структуры множества $\bar{F}_k(\mathfrak{M})$ — пространства моментов, а также множеств $\mathfrak{M}(\bar{c})$ ($\bar{c} \in \bar{F}_k(\mathfrak{M})$).

Лемма. Пусть μ и ν — ФР на $[a, b]$ и $\bar{F}_s(\mu) = \bar{F}_s(\nu)$. Тогда отношения $\mu < \nu$ невозможны для $1 \leq s \leq k$, и, если $\mu < \nu$, то выполнено неравенство

$$F_{k+1}(\mu) < F_{k+1}(\nu).$$

Следствие. Для каждого $\bar{c} \in K^n$ множества $I_{n-1}^+(\bar{c})$ и $I_{n-1}^-(\bar{c})$ содержат не более одного элемента.

Основные результаты работы заключены в теоремах 1 и 2.

Теорема 1. Пусть \mathfrak{M} — индексационный с эффектом n класс ФР на $[a, b]$. Тогда

$$\bar{F}_n(\hat{I}_{n+1}^+) = \bar{F}_n(\hat{I}_{n+1}^-) = \bar{F}_n(\mathfrak{M}).$$

Решения уравнения $\bar{F}_n(\sigma) = \bar{c}$ ($\bar{c} \in \bar{F}_n(\mathfrak{M})$) в множествах \hat{I}_{n+1}^+ и \hat{I}_{n+1}^- обозначим через $\sigma_{\bar{c}}^+$ и $\sigma_{\bar{c}}^-$ соответственно.

Определение 5. Вектор $\bar{c} \in \bar{F}_n(\mathfrak{M})$ назовем вырожденным, если $\sigma_{\bar{c}}^- = \sigma_{\bar{c}}^+$.

Следующие три условия равносильны.

1. Вектор $\bar{c} \in \bar{F}_n(\mathfrak{M})$ вырожден.
2. Сечение $F_{n+1}(\mathfrak{M}(\bar{c}))$ состоит из одной точки.
3. Множество $\mathfrak{M}(\bar{c})$ одноэлементно.

Теорема 2. Пусть вектор $\bar{c} \in \bar{F}_n(\mathfrak{M})$ не вырожден. Тогда:

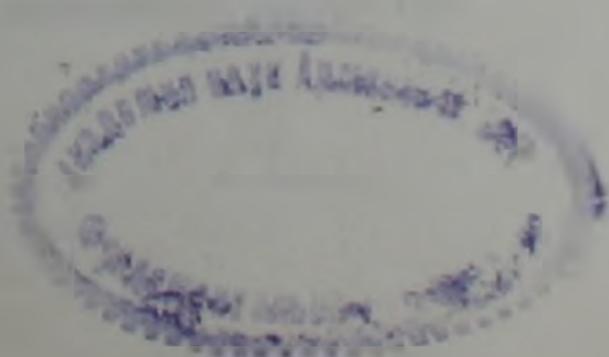
$$1. F_{n+1}(\mathfrak{M}(\bar{c})) = [F_{n+1}(\sigma_{\bar{c}}^-), F_{n+1}(\sigma_{\bar{c}}^+)] = F_{n+1}(\hat{I}_{n+2}^+(\bar{c})) = F_{n+1}(\hat{I}_{n+2}^-(\bar{c})).$$

$$2. \hat{I}_{n+2}^+(\bar{c}) = \{\eta_\alpha: \alpha \in [0, 1]\}, \text{ причем } \eta_{\alpha_1} \neq \eta_{\alpha_2} \text{ при } \alpha_1 \neq \alpha_2, \eta_{\alpha_n} \Rightarrow \eta_{\alpha_{n+1}}$$

при $\alpha_n \rightarrow \sigma_0$ и $\eta_0 = \sigma_{\bar{c}}^-$, $\eta_1 = \sigma_{\bar{c}}^+$;

$$\hat{I}_{n+2}^-(\bar{c}) = \{\rho_\beta: \beta \in [0, 1]\}, \text{ причем } \rho_{\beta_1} \neq \rho_{\beta_2} \text{ при } \beta_1 \neq \beta_2, \rho_{\beta_n} \Rightarrow \rho_{\beta_{n+1}}$$

при $\beta_n \rightarrow \beta_0$ и $\rho_0 = \sigma_{\bar{c}}^-$, $\rho_1 = \sigma_{\bar{c}}^+$.



Բաշխումների ինդեքսացիոն դասերի համար մոմենտների
պրոբլեմի մասին

Ներմուծվում է $[a, b]$ -ում, $-\infty < a < b < +\infty$, որոշված բաշխման ֆունկցիայի համար ինդեքսի գաղափարը բաշխման ֆունկցիաների կամայական \mathcal{X} դասի նկատմամբ, որը հիմնված է բաշխման ֆունկցիաների տարբերության մոնոտոնության ինտերվալների քանակի վրա: Ինդեքսի գաղափարի օգնությամբ աբսոլյուտորեն բնական սահմանվում է \mathcal{X} ինդեքսացիոն դասը: Իհրվում են կոնկրետ ինդեքսացիոն դասերի օրինակներ: Ինդեքսացիոն դասերի վրա ուսումնասիրվում է աստիճանային մոմենտների պրոբլեմը:

ЛИТЕРАТУРА — ЧИТАТЕЛЬСТВО

1 М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., Наука, 1973. 2 С. Карлик, В. Стадден, Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М., Наука, 1976. 3 R. Barlow, A Marshall, Bounds for distributions with monotone hazard rate, I and II. Ann. Math. Stat., v. 3, 1964, p. 1234—1274. 4 C. L. Mallows, A generalizations of Chebushev inequalities. Proc. London Math. Soc. Third ser. 13, 1963, p. 385—412. 5 Э. А. Даниелян, К. Р. Таталян, О двух мажоризационных теоремах, связанных с проблемой моментов. Межвузовский сборник научных трудов, ЕГУ, Математика, № 6, 1988, с. 148—158. 6 Э. А. Даниелян, К. Р. Таталян, О проблеме моментов на мажоризируемых классах. Межвузовский сборник научных трудов, ЕГУ, Прикладная математика, № 7, 1988, с. 127—141.

МЕХАНИКА

УДК 532.516

Л. Г. Петросян

() несимметричной модели плоского движения жидкости между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами

(Представлено чл.-корр. АН Армении Г. Е. Багдасаряном 16/VII 1990)

Классическая теория континуума налагает сильные ограничения на пределы, в которых континуальное описание макроскопического поведения может успешно отражать тонкую структуру материала. Накопившиеся факты свидетельствуют о том, что классическая теория континуума Навье-Стокса не может точно предсказать поведение некоторого класса жидкостей и особенно течений через тонкие капилляры и узкие зазоры, так как не содержит механизма для объяснения наблюдаемых новых физических явлений. Такая потеря точности возможна в случаях, когда характерный размер системы сравним с характерной материальной длиной вещества, значение которой обусловлено средним размером молекул или зерен, содержащихся в среде ⁽¹⁾.

Разработанные в последнее время положения теории структурных жидкостей могут успешно описывать неньютоновские поведения реальных жидкостей*. В этой теории введены два независимых кинематических векторных поля, одно из которых представляет поступательные движения частиц жидкости, а другое—угловые или вращательные движения частиц, характеризующие внутренние степени свободы, соответствующие им моментные напряжения ^(1, 2). Характерным отличием теории структурных сред с несимметричным тензором напряжений является присутствие масштабных параметров. Эти жидкости реагируют на микровращательные движения и спиновую инерцию, поэтому могут воспринимать распределенные поверхностные и массовые пары сил.

В работе применена теория континуума с несимметричным тензором напряжений к решению задачи плоского движения несжимаемой жидкости между двумя вращающимися с разными угловыми скоростями коаксиальными цилиндрами. Общие вопросы теории жидкости с несимметричным тензором напряжений рассмотрены в работах ^(1, 2).

* К настоящему времени опубликовано большее количество работ, посвященных этой тематике, о чем достаточно полно изложено в работе ⁽¹⁾.

Общая система уравнений движения вязкой, несжимаемой жидкости с несимметричным тензором напряжений имеет вид (1, 3)

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + 2\nu \nabla \cdot (\nabla \vec{v})^d + \nu_r \nabla \times (2\vec{v} - \nabla \times \vec{v}) + \vec{f}, \quad (1)$$

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 2\nu_r (\nabla \times \vec{v} - 2\vec{\omega}) + c_0 \nabla (\nabla \cdot \vec{\omega}) + 2c_d \nabla \cdot (\nabla \vec{\omega})^a + 2c_a \nabla \cdot (\Delta \vec{\omega})^a + \vec{c}.$$

Здесь ρ — массовая плотность, p — давление, I — скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы, \vec{v} — вектор скорости точки, $\vec{\omega}$ — вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, ν — кинематическая ньютоновская вязкость, ν_r — кинематическая вращательная вязкость, c_0 , c_d и c_a — коэффициенты моментной вязкости, $d(\dots)/dt$ — полная производная по времени, ∇ — пространственный градиент, $(\nabla \vec{v})^d$ и $(\nabla \vec{\omega})^d$ — симметричные части соответствующих диад, $(\nabla \vec{v})^a$ и $(\nabla \vec{\omega})^a$ — антисимметричные диады, \vec{f} — вектор массовой силы, \vec{c} — вектор массового момента.

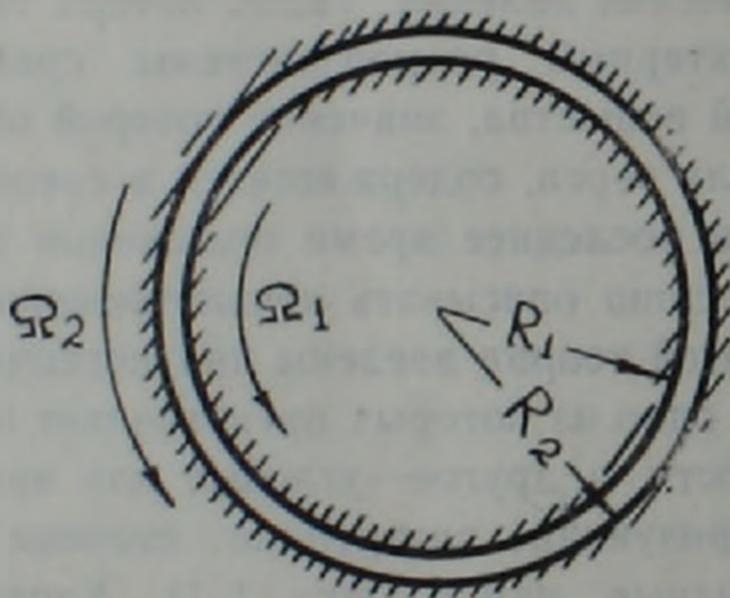


Рис. 1. Поперечное сечение вращающихся коаксиальных цилиндров

Воспользуемся цилиндрическими координатами r, φ, z . Рассмотрим стационарное движение несжимаемой жидкости между концентрическими цилиндрами (рис. 1). Тогда траектории всех частиц представляют собой дуги концентрических окружностей. Действием массовых сил и моментов пренебрегаем.

Пусть внутренний цилиндр имеет радиус R_1 и вращается с угловой скоростью Ω_1 , а внешний имеет радиус R_2 и вращается с угловой скоростью Ω_2 .

Мы предполагаем, что жидкость прилипает к стенкам внутреннего и внешнего цилиндров при $r=R_1$ и $r=R_2$, тогда граничные условия для поступательной скорости и угловой скорости вращения частиц будут

$$\begin{aligned} \text{при } r=R_1 \quad v_r &= \Omega_1 R_1, \quad \omega = 0, \\ \text{при } r=R_2 \quad v_r &= \Omega_2 R_2, \quad \omega = 0 \quad (\omega = \omega_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Для давления из (1) будем иметь

$$p = C\varphi + \rho \int \frac{v_r}{r} dr + C_5. \quad (3)$$

Мы видим, что давление при изменении угла φ будет многозначной функцией. Для устранения этой многозначности надо положить

$$C = 0. \quad (4)$$

Используя граничные условия (2) и равенство (4) из (1), получим выражения для скорости v_r и угловой скорости вращения частиц ω

$$v_r^* = \frac{v_r}{\Omega_1 R_1} = \frac{2\eta_r}{\eta + \eta_r} \frac{1}{\lambda} [C_2^* I_1(\lambda r^*) - C_3^* K_1(\lambda r^*)] + C_1^* r^* + \frac{C_4^*}{r^*}, \quad (5)$$

$$\omega^* = \frac{\omega R_1}{\Omega_1 R_1} = C_2^* I_0(\lambda r^*) + C_3^* K_0(\lambda r^*) + C_1^*. \quad (6)$$

Здесь

$$r^* = \frac{r}{R_1}, \quad k = \frac{N}{l}, \quad N = \left(\frac{\eta_r}{\eta + \eta_r} \right)^{1/2}, \quad l = \left(\frac{C'_d + C'_a}{4\eta} \right)^{1/2},$$

$$\lambda = kR_1 = \left(\frac{4\eta}{\eta + \eta_r} \frac{\eta_r}{c'_d + c'_a} \right)^{1/2} R_1, \quad \eta = \rho\nu, \quad \eta_r = \rho\nu_r,$$

$$c'_a = \rho c_a, \quad c'_d = \rho c_d,$$

а постоянные интегрирования C_1^* , C_2^* , C_3^* и C_4^* даются соотношениями

$$C_1^* = \frac{C_1}{\Omega_1} = \left(1 - \frac{\Omega_2 R_2^2}{\Omega_1 R_1^2} \right) \left[I_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) K_0(i) - I_0(i) K_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) \right] A, \quad (7)$$

$$C_2^* = \frac{C_2}{\Omega_1} = \left(1 - \frac{\Omega_2 R_2^2}{\Omega_1 R_1^2} \right) \left[K_0(i) - K_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) \right] A, \quad (8)$$

$$C_3^* = \frac{C_3}{\Omega_1} = \left(1 - \frac{\Omega_2 R_2^2}{\Omega_1 R_1^2} \right) \left[I_0(i) - I_0\left(i \frac{R_2}{R_1}\right) \right] A, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} C_4^* = \frac{C_4}{\Omega_1 K_1^*} = 1 + \left\{ \frac{2\Lambda^2}{\lambda} \left[\frac{1}{\lambda} - \left[I_1(i) K_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + I_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) K_1(i) \right] \right\} - \left[I_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) K_0(i) - \right. \right. \\ \left. \left. - I_0(i) K_0\left(i \frac{R_2}{R_1}\right) \right] \right\} \left(1 - \frac{\Omega_2 R_2^2}{\Omega_1 R_1^2} \right) A, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
A = & \left\{ \left[I_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) K_0(\lambda) - I_0(\lambda) K_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) \right] \left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2}\right) + \right. \\
& + \frac{2N^2}{\lambda} \left\{ \left[I_1(\lambda) K_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) + I_0\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) K_1(\lambda) \right] + \right. \\
& \left. \left. + \frac{R_2}{R_1} \left[I_0(i) K_1\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) + K_0(i) I_1\left(\lambda \frac{R_2}{R_1}\right) \right] - \frac{\Omega}{\lambda} \right\}^{-1}, \quad (11)
\end{aligned}$$

где $I_0(\lambda r^*)$ и $I_1(\lambda r^*)$ — модифицированные цилиндрические (бесселевы) функции нулевого и первого порядка первого рода, $K_0(\lambda r^*)$ и $K_1(\lambda r^*)$ — нулевого и первого порядка второго рода.

Решение (5) переходит в классическое при $\eta_r = 0$ (4) и (6) дает $\omega = 0$.

Обобщенная гипотеза Ньютона—Навье—Стокса для изотропных несжимаемых жидкостей с несимметричным тензором напряжений имеет вид (1)

$$\tau_{ji} = p\delta_{ij} + \eta(v_{j,i} + v_{i,j}) + \eta_r(v_{i,j} - v_{j,i}) + 2\eta_r \varepsilon_{mij} \omega_m,$$

откуда касательное напряжение силы вязкости для кругового движения представится в виде

$$\tau_{r\varphi} = (\eta + \eta_r) \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - (\eta - \eta_r) \frac{v_\varphi}{r} - 2\eta_r \omega. \quad (12)$$

Здесь δ_{ij} — дельта тензор Кронекера, ε_{mij} — альтернирующий тензор Леви—Чивиты.

Подставляя значения v_φ из (5) и ω из (6) с учетом (8)—(10) получим

$$\tau_{r\varphi} = -2\eta \frac{C_4}{r^2} - 2\eta_r N^2 \left[C_2 \frac{1}{kr} I_1(kr) + C_3 \frac{1}{kr} K_1(kr) \right]. \quad (13)$$

Момент всех сил вязкости, распределенных по какой-либо окружности радиуса r относительно оси симметрии, с учетом (13) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
M = & \int_0^{2\pi} \tau_{r\varphi} r^2 d\varphi = \\
= & -4\pi\eta \left\{ C_4 + N^2 [C_2 I_1(\lambda r^*) + C_3 K_1(\lambda r^*)] \frac{r^* R_1^2}{\lambda} \right\}. \quad (14)
\end{aligned}$$

Для обсуждения результатов удобнее формулу (14) представить в безразмерном виде

$$\begin{aligned}
M^* = & \frac{M}{M_{кл}} = \left\{ C_4^* + N^2 [C_2^* I_1(\lambda r^*) + C_3^* K_1(\lambda r^*)] \frac{r^*}{\lambda} \right\} \times \\
& \times \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right) \left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^{-1}, \quad (15)
\end{aligned}$$

где $M_{кл}$ — момент сил вязкости в случае классической ньютоновской жидкости (4).

На рис. 2 показаны графики зависимости безразмерного момента всех сил вязкости, распределенного по окружности $r^* = 1,01$ относительно оси симметрии, от N^2 при различных значениях параметра λ , характеризующего взаимосвязь между геометрией и свойствами жидкости (расчеты были выполнены для $R_2/R_1 = 1,02$ и $\Omega_2/\Omega_1 = 5$). График показывает, что увеличению параметра N^2 соответствует возрастание безразмерного момента всех сил вязкости при всех значениях λ , кроме $\lambda = \infty$, относящегося к классическому случаю ньютоновской жидкости, так как увеличению λ соответствует увеличение R_2/R_1 , т. е. увеличению зазора между стенками внешнего и внутреннего цилиндров (в расчетах изменение λ происходит за счет изменения l).

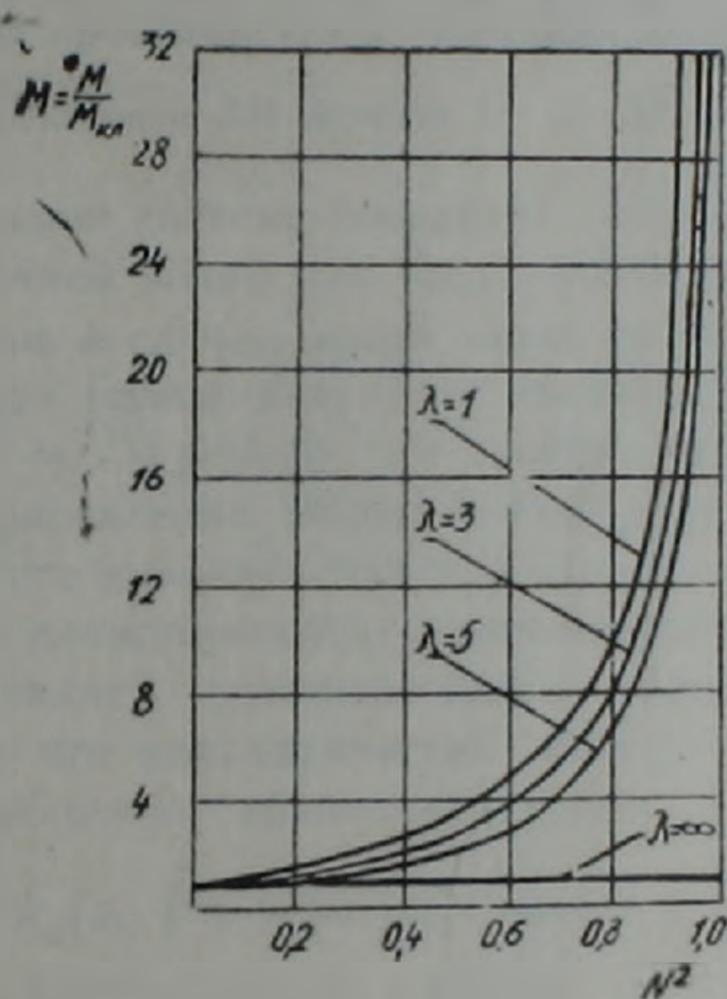


Рис. 2. Зависимости безразмерного момента всех сил вязкости M от N^2 при различных λ .

Таким образом, неклассические эффекты тем больше, чем меньше характерный размер системы.

Ереванский государственный университет

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Նրկու պտտվող համառանցք գլանների միջև հեղուկի հուրք շարժման ոչ սիմետրիկ մոդելի մասին

Նրկու պտտվող համառանցք գլանների միջև հեղուկի հարթ շարժման խնդրի լուծման համար օգտագործված է ոչ սիմետրիկ լարման տենզորով

կառուցվածքային հեղուկի մեխանիկայի մոդելը: Ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ արագության, անկյունային արագության, օղակային շերտերի միջև շոշափող լարումների համար, ինչպես նաև որևէ շառավղով շրջանագծի շփման ուժերի պտտման առանցքի նկատմամբ գումարային մոմենտի համար: Միկրոկառուցվածքի հաշվառման ազդեցությունը լուսարանված է գրաֆիկների վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 Л. Г. Петросян, Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений, Изд-во ЕГУ, 1984. 2 Э. Л. Аэро, А. Н. Булыгин, Е. В. Кувшинский, ПММ, т. 29, вып. 2, с. 297—308 (1965). 3 Нгуен Ван Дьен, А. Т. Листров, Изв. АН СССР, МЖГ, № 5, с. 132—136, 1967. 4 Н. А. Слезкин, Динамика вязкой несжимаемой жидкости, ГИТТЛ, М., 1955.



УДК 539.3

М. В. Белубекян, В. В. Овсепян

Об условии существования поверхностной волны для
 упругого пространства с цилиндрической полостью

(Представлено академиком АН Армении С. А. Амбарцумяном 20/VII 1990)

В цилиндрической системе координат исследуется вопрос существования поверхностной волны для бесконечной упругой среды с цилиндрической полостью в случае, когда волна распространяется вдоль образующей цилиндра (осесимметричная задача). Эта задача ранее рассматривалась в (1, 2). В работе (3) исследуются поверхностные волны в окружном направлении. Общий случай рассмотрен в (4).

В данной работе выведено необходимое и достаточное условие для существования и единственности поверхностной волны.

1. Рассматриваются установившиеся колебания с частотой ω и предполагается, что цилиндрическая поверхность свободна от напряжений. Дисперсионное уравнение задачи, как и в (5) имеет вид

$$R(\eta) = (2 - \eta)^2 K_0(ka \sqrt{1 - \theta\eta}) K_1^{-1}(ka \sqrt{1 - \theta\eta}) - 4 \sqrt{1 - \theta\eta} \times \\
 \times \sqrt{1 - \eta} K_0(ka \sqrt{1 - \eta}) K_1^{-1}(ka \sqrt{1 - \eta}) - 2\eta (ka)^{-1} \sqrt{1 - \eta} = 0, \quad (1)$$

где $\eta = \omega^2 (kC_s)^{-2}$ — искомая безразмерная скорость распространения поверхностной волны, $\theta = C_s^2 (C_s)^{-2} = (1 - 2\nu) [2(1 - \nu)]^{-1}$, ν — коэффициент Пуассона ($-1 < \nu < 0,5$), c_s и c_l — скорости распространения соответственно продольной и поперечной волны, a — радиус полости, k — волновое число по образующей цилиндра, $K_0(x)$ и $K_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя.

В работе (1) уравнение (1) исследовалось по параметру $(\omega a)^{-1}$. В работе (2) непосредственно численно исследовалось дисперсионное уравнение (1). Здесь для исследования уравнения (1) используется подход, аналогичный изложенному в работе (6).

2. Корень $\eta = 0$ является тривиальным решением уравнения (1). От этого решения можно избавиться, представляя (1) в виде

$$R_1(\eta) = \eta^{-1} R(\eta). \quad (2)$$

В пределе $\eta \rightarrow 0$ для функции $R_1(\eta)$ получим

$$\lim R_1(\eta) = 2ka(1-\theta) [K_0^2(ka) K_1^{-2}(ka) - 1] - 2(ka)^{-1} < 0. \quad (3)$$

Для существования хотя бы одного решения в интервале $0 < \eta < 1$ достаточно требовать $R_1(1) > 0$. Но это имеет место при условии

$$K_0(ka\sqrt{1-\theta}) K_1^{-1}(ka\sqrt{1-\theta}) > 2(ka)^{-1} \sqrt{1-\theta}. \quad (4)$$

Если докажем положительность функции $R_1(\eta)$, то тем самым будет доказано, что (4) является необходимым и достаточным условием для существования и единственности поверхностной волны в интервале $0 < \eta < 1$. Представим $R_1(\eta)$ в виде

$$\begin{aligned} R_1(\eta) = & 2\sqrt{1-\theta\eta} \eta^{-1} (1-\eta)^{-1/2} \varphi(\eta) + 2\theta\sqrt{1-\eta} \eta^{-1} (1-\theta\eta)^{-1/2} \varphi(\eta) - \\ & - 2(2-\eta) \eta^{-1} \varphi(\theta\eta) + 4\sqrt{1-\theta\eta} \sqrt{1-\eta} \eta^{-2} \varphi(\eta) - (2-\eta)^2 \eta^{-2} \varphi(\theta\eta) - \\ & - 4\sqrt{1-\theta\eta} \sqrt{1-\eta} \eta^{-1} \varphi'(\eta) + (2-\eta)^2 \eta^{-1} \varphi'(\theta\eta) + \theta(ka)^{-1} (1-\theta\eta)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varphi(\eta) = K_0(ka\sqrt{1-\eta}) K_1^{-1}(ka\sqrt{1-\eta})$.

В работе (1) доказано, что $f(x) = K_0(x^{-1}) K_1^{-1}(x^{-1})$ монотонно убывающие функции. Так как $\theta < 1$, получим, что $\varphi(\theta\eta) > \varphi(\eta)$. Обозначим через $R_{01}(\eta)$ сумму первых пяти слагаемых в формуле (5), а через $R_{02}(\eta)$ — сумму последних слагаемых. Тогда имеем $R_1(\eta) = R_{01}(\eta) + R_{02}(\eta)$. Докажем положительность функций $R_{01}(\eta)$ и $R_{02}(\eta)$.

Заменяя в функции $R_{01}(\eta)$ $\varphi(\theta\eta)$ на $\varphi(\eta)$, после некоторых небольших преобразований получим

$$R_{01}(\eta) = \varphi(\eta) \eta^{-1} [2(1-\eta)^{-1/2} (1-\theta\eta)^{-1/2} (2-\eta-\theta\eta) - 4 + \eta^2].$$

Можно доказать, что

$$2(2-\eta-\theta\eta) > (4-\eta^2) \sqrt{1-\eta} \sqrt{1-\theta\eta}. \quad (6)$$

Возведя в квадрат обе части неравенства (6), после некоторых преобразований получим

$$\eta^2(3-8\theta+4\theta^2+8-8\eta-8\theta\eta+8\theta\eta^2+1-\eta^2+\eta^3+\theta\eta^3-\theta\eta^4) > 0.$$

Легко доказывается, что последнее неравенство в интервалах $0 < \eta < 1$ и $0 \leq \theta \leq 0,5$ положительно. Таким образом доказана положительность функции $R_{01}(\eta)$.

Докажем также положительность функции $R_{02}(\eta)$. Для этого представим функции $\varphi'(\eta)$ и $\varphi'(\theta\eta)$ в виде

$$\varphi'(\eta) = -ka2^{-1} (1-\eta)^{-1/2} [-1 + \varphi^2(\eta) + (ka)^{-1} (1-\eta)^{-1/2} \varphi(\eta)],$$

$$\varphi'(\theta\eta) = -ka\theta 2^{-1} (1-\theta\eta)^{-1/2} [-1 + \varphi^2(\theta\eta) + (ka)^{-1} (1-\theta\eta)^{-1/2} \varphi(\theta\eta)].$$

Выражения в средних скобках положительны, и можно в средней скобке для функции $\varphi'(\theta\eta)$ заменить $\varphi(\theta\eta)$ на $\varphi(\eta)$ и $\sqrt{1-\theta\eta}$ на $\sqrt{1-\eta}$. Тогда для функции $R_{02}(\eta)$ получим

$$R_{02}(\eta) = ka(2\tau_1)^{-1} \{-1 + \varphi^2(\eta) + (ka)^{-1}(1-\eta)^{-1/2}\} \times \\ \times \{4\sqrt{1-\theta\eta} - (2-\tau_1)^2\theta(1-\theta\eta)^{-1/2} + 6(ka)^{-1}(1-\theta\eta)^{-1/2}\}.$$

Ясно, что $4\sqrt{1-\theta\eta} - (2-\tau_1)^2\theta(1-\theta\eta)^{-1/2} > 0$, откуда и следует положительность функции $R_{02}(\eta)$.

Таким образом доказано, что $R_1(\eta) > 0$.

3. При больших ka уравнение (1) переходит в уравнение Рэлея для упругого полупространства, а условие (4) выполняется всегда. Если для больших аргументов в разложениях бесселевых функций сохранить только два слагаемых, то из условия (4) получим

$$8\sqrt{1-\theta}(ka)^2 - (17-16\theta)ka - 6\sqrt{1-\theta} > 0. \quad (7)$$

Численные расчеты условий (4), (7) и работы (2) при различных значениях ν приведены в табл. I соответственно в столбцах I, II и III.

Таблица I

ν	$\lambda D^{-1} = \tau (ka)^{-1}$		
	I	II	III
-0,9	2,01011	1,83860	
-0,7	1,95056	1,80038	
-0,5	1,88359	1,74851	
-0,3	1,80721	1,70018	
-0,1	1,71853	1,63311	
0	1,66828	1,59503	1,67
0,1	1,61131	1,54815	
0,15	1,58337	1,52442	1,583
0,2	1,552	1,49818	
0,25	1,51881	1,47006	1,517
0,3	1,48358	1,43981	
0,35	1,44606	1,40716	1,445
0,4	1,40594	1,37177	
0,5	1,31628	1,29111	1,316

Здесь λ —длина волны, D —диаметр цилиндра в обозначениях работы (2). Для полноты приведены также отрицательные значения параметра ν , которые, как известно, допускаются условием положительности упругой энергии.

Приближенное условие (7) дает значения с максимальным отклонением 9,3%, при $\nu = -0,9$ и минимальным отклонением 1,9% при $\nu = 0,5$.

В заключение отметим, что для фиксированного значения ν , если $ka > \pi D \lambda^{-1}$, существует поверхностная волна, скорость которой дается единственным решением уравнения (1) в промежутке $0 < \eta < 1$.

Գլանային խողով առաձգական տարածության մակերևութային ալիքների գոյության պայմանի մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվել է գլանային խողով առաձգական անվերջ միջավայրի, խողովի ուղղությամբ տարածվող, մակերևութային ալիքների գոյության հարցը:

Մակերևութային ալիքների գոյության և միակության համար դուրս է բերվել անհրաժեշտ և բավարար պայման:

Օգտագործելով Բեսելի ֆունկցիաների ասիմպտոտիկ բանաձևերը, ստացվել է վերը նշված պայմանի մոտավոր տարրերակր:

Աշխատանքի վերջում Պուասոնի գործակցի տարբեր արժեքների համար զետեղված են անհրաժեշտ և բավարար պայմանի, ինչպես ճան նրա մոտավոր տարրերակրի թվային հաշվարկները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Я. А. Мундлин, ДАН СССР, т. 42, № 4 (1944). ² M. Biot, Journal of Appl. Physics, v. 23, № 9 (1952). ³ И. А. Викторов, Акустический журн., т. 4, № 2 (1958). ⁴ Б. Л. Абрамян, Г. З. Геворкян, ДАН АрмССР, т. 83, № 2 (1986). ⁵ В. Новацкий, Теория упругости, Мир, М., 1975. ⁶ М. В. Белубекян, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 43, № 4 (1990).

Գլանային խողովի շառավիղը a , մմ	Պուասոնի գործակցի արժեքը ν	Մակերևութային ալիքների գոյության համար k
10	0.3	1.0
10	0.2	1.0
10	0.1	1.0
20	0.3	1.0
20	0.2	1.0
20	0.1	1.0
30	0.3	1.0
30	0.2	1.0
30	0.1	1.0
40	0.3	1.0
40	0.2	1.0
40	0.1	1.0
50	0.3	1.0
50	0.2	1.0
50	0.1	1.0

УДК 538.945
538.913

С. Х. Пилосян

О нелинейном взаимном влиянии пленочных мостиков
высокотемпературных сверхпроводников

(Представлено академиком АН Армении М. Л. Тер-Микаеляном 25/IX 1990)

В работе проанализирован вопрос о том, является ли взаимное влияние одного сверхпроводящего мостика (генератора) на другой (детектор) сугубо тепловым или нет. Установленный экспериментально отрицательный ответ, возможно, свидетельствует о наличии особенностей в спектре фононов, излучаемых ВТСП-мостиками в резистивном состоянии.

Исследуемая система изображена на рис. 1. Мостики были изготовлены методом механического скрайбирования на основе 110 К *Bi*-содержащих сверхпроводящих пленок на подложках *MgO*, отличающихся высокой теплопроводностью.

Мостики имели значительные критические токи (при $T = 77$ К $j_c \approx 10^6$ А/см²), в связи с чем для того, чтобы обеспечить работоспособность токопроводящих контактов, приходилось работать при температурах, близких к T_c . Термостабилизация бомбы, в которой проводились измерения, была не хуже, чем $\pm 0,1$ К. Толщина пленок мостиков была не более 1 мкм, ширина не превосходила 40 мкм.

Мостики имели примерно одинаковые вольт-амперные характеристики (ВАХ).

Эксперимент проводился следующим образом. Выбиралась рабочая точка на ВАХ мостика-генератора (фиксировался ток) и регистрировалась ВАХ мостика-детектора (в режиме заданного напряжения). При этом измерение проводили в течение нескольких секунд, чтобы уменьшить влияние детектора на генератор, причем проводили коррекцию результатов для исключения этого влияния.

ВАХ детектора при различных токах генератора изображены на рис. 2. Если полагать критическим значением тока то значение его на ВАХ, где кривая $I(V)$ имеет локальный максимум, можно поставить вопрос о зависимости j_c от мощности тепловыделения генератора. Эта зависимость показана на рис. 3. Видно, что при малых мощностях

тепловыделения, когда рабочая точка генератора находится вдали от критического значения по току, зависимость j_c детектора от P генератора имеет линейный характер. При приближении к критическому току генератора отклик детектора $j_c(P)$ отклоняется от линейной зависимости. Дальнейшее увеличение тока через генератор не проводилось, чтобы избежать его теплового разрушения.

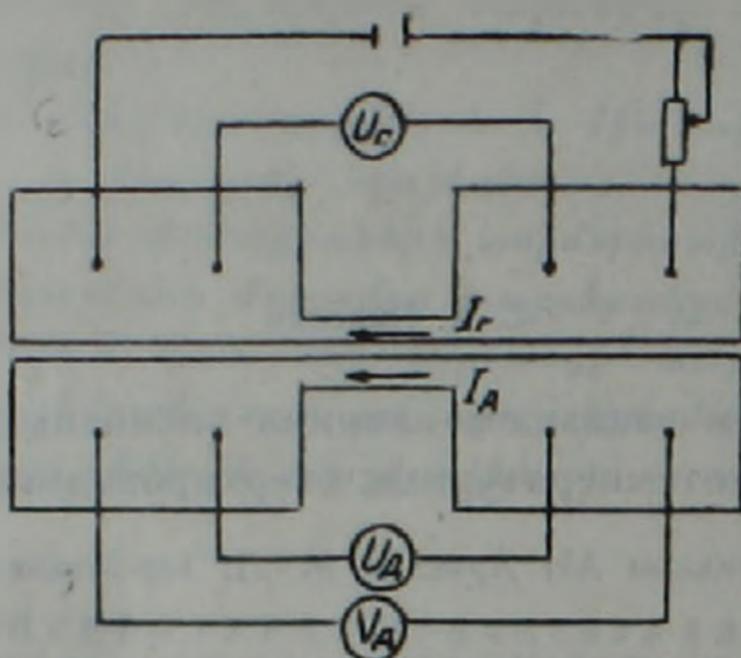


Рис. 1. Пленочные мостики из сверхпроводника В.—Са—Sr—Cu—О в исследуемой конфигурации (индексы Г и Д обозначают соответственно генератор и детектор)

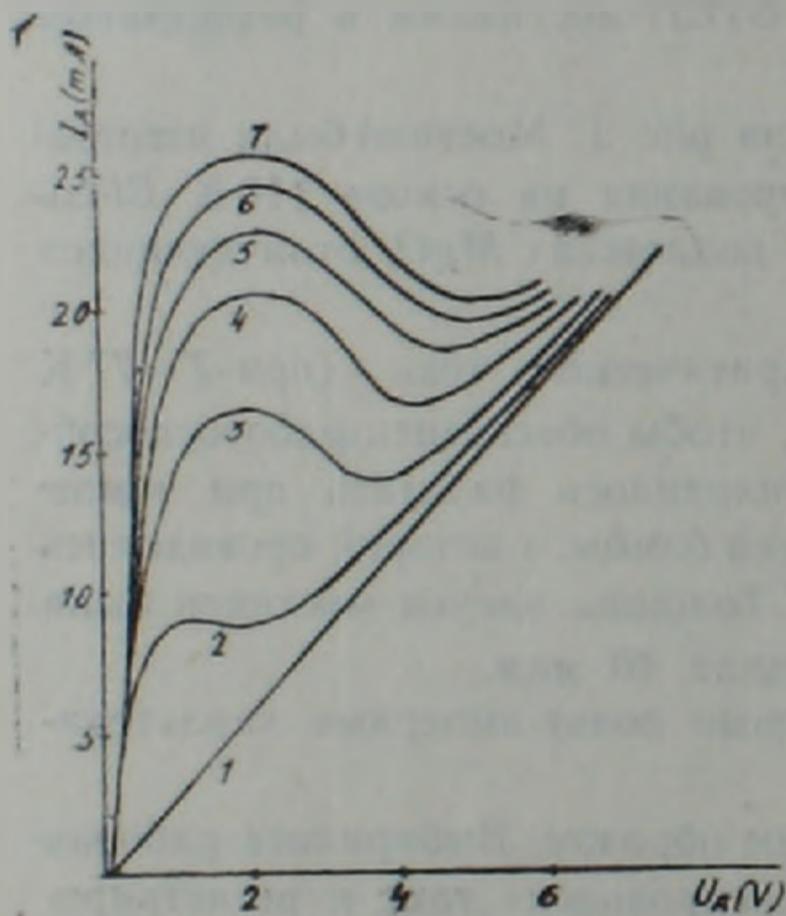


Рис. 2. ВАХ детектора при различных токах генератора $I - I_r > 27$ мА: 2 — $I_r = 25$ мА; 3 — $I_r = 20$ мА; 4 — $I_r = 15$ мА; 5 — $I_r = 10$ мА; 6 — $I_r = 5$ мА; 7 — 0

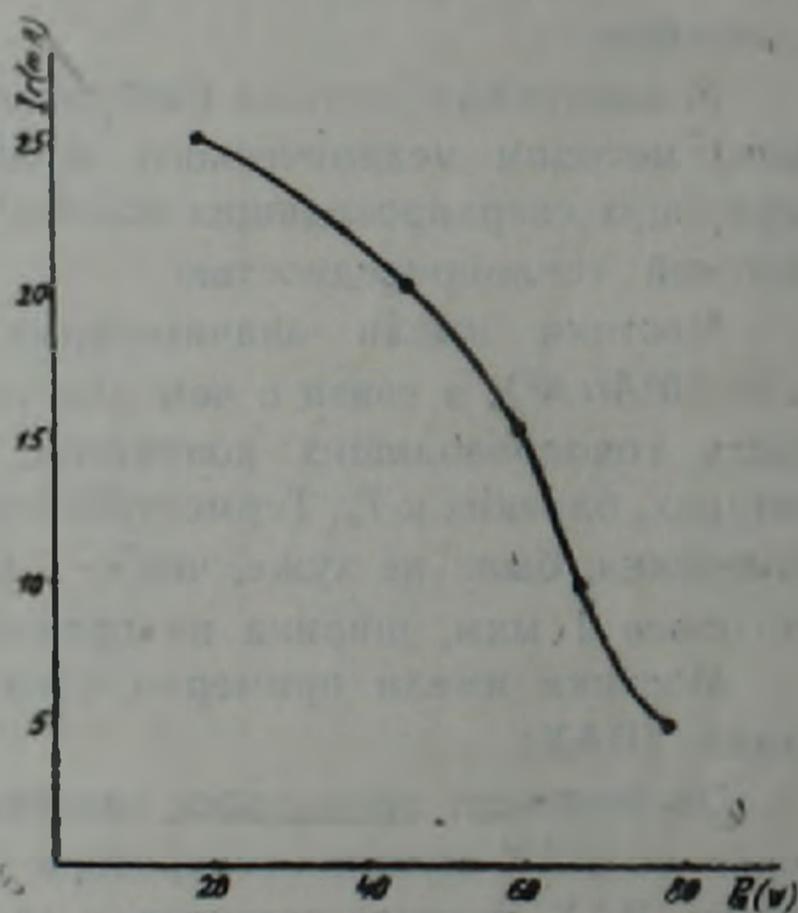


Рис. 3. Зависимость отклика детектора ($j_c(P)$) от мощности генератора. Точки на кривой соответствуют значениям I_r , приведенным на рис. 2

Таким образом, можно констатировать, что влияние мостикового ВТСП-генератора на детектор не является сугубо тепловым и, по-видимому, имеют место особенности в фононном излучении, порождаемые

ВТСИ-генератором в резистивном состоянии. Если учесть, что особенности в спектре фононов возникают при переходе генератора из сверхпроводящего состояния в нормальное, то можно предположить, что особенности в спектре фононов образуются на частотах порядка энергии связи пары, причем влияние таких фононов на детектор имеет характер резонансного разрыва пар, чем и обуславливается возрастание влияния генератора на детектор в данной области генерации.

Завершая это сообщение, необходимо подчеркнуть, что проведенные нами измерения нуждаются в дальнейшем повторении и уточнении. В частности, необходимо осуществить более точный (локальный) контроль тепловых процессов вблизи активной зоны тепловыделения. Необходимо также проведение более детальных измерений в закритической области мощностей генератора ($J > J_c'$).

Я благодарен А. М. Гуляну за постановку задачи и обсуждение результатов и С. С. Гаспаряну за помощь, оказанную в работе.

Институт физических исследований
Академии наук Армении

Ս. Խ ՓԻՆՍՅԱՆ

Բարձրջերմաստիճանային թաղանթե կամրջակների ոչ գծային փոխազդեցության մասին

Աշխատանքում փորձնականորեն ցույց է տված, որ երկու գերհաղորդիչ կամրջակների փոխազդեցությունը միայն ջերմային բնույթ չունի: Քանի որ այդ առանձնաշատկությունները ի հայտ են գալիս գեներատորի գերհաղորդիչ վիճակից նորմալ վիճակի անցման պահին, ապա կարելի է ենթադրել, որ դրանք ֆոնոնային սպեկտրում ձևավորվում են զույգի կապի էներգիայի կարգի հաճախությունների դեպքում, ընդ որում այդպիսի ֆոնոնների ազդեցությունը դետեկտորի վրա ունի զույգի տրոհման ռեզոնանսային բնույթ:

УДК 621.378.325

А. О. Варданян, Д. Л. Оганесян

Определение фазы одиночных сверхкоротких световых импульсов

(Представлено чл.-корр. АН Армении П. М. Геруни 27/IX 1990)

В последние годы возрос интерес к генерации и исследованию обладающих чирпом сверхкоротких световых импульсов (СКИ), дисперсионное сжатие которых позволяет получать предельно короткие длительности (¹).

В работе (²) методом нелинейно-оптической динамической спектрографии (³) измерен чирп СКИ лазера на фосфатном стекле с неодимом в режиме самосинхронизации мод. Однако данный метод не позволяет определять знак чирпа.

В настоящей работе рассматривается возможность определения фазы одиночных СКИ методом нелинейно-оптической динамической спектрографии при неколлинеарной генерации второй гармоники (ГВГ) взаимобращенными во времени импульсами.

В работе (⁴) на основе детального анализа неколлинеарной ГВГ пространственно-ограниченными пучками с взаимобращенными временными профилями была найдена связь между пространственным распределением энергии второй гармоники (ВГ) на выходной грани нелинейного кристалла и формой опорного импульса. Однако при этом не рассматривался эффект нелинейной дискриминации частоты, имеющий место при неколлинеарной ГВГ.

Выражение для комплексной амплитуды ВГ при неколлинеарной ГВГ достаточно широкими пучками с взаимобращенными временными профилями в квазистатическом режиме генерации ($\nu l \ll \tau$) в соответствии с (⁴) имеет вид

$$A_2 = -i\gamma l f(t+T) f(T-t) \exp\{i[(t\psi + T) + \psi(T-t)]\}, \quad (1)$$

где γ — нелинейная постоянная, l — толщина нелинейного кристалла, $f(t)$, $\psi(t)$ — огибающая временного профиля и фаза опорного импульса соответственно, $T = -x \sin \alpha / u$, α — половина угла между опорными импульсами в нелинейном кристалле, u — групповая скорость импульса.

Для углового спектрального распределения амплитуды ВГ

$$S_2(k_x, t) = \int A_2(x, t) e^{-ik_x x} dx$$

с учетом (1) получим следующее выражение:

$$S_2(k_x, t) = -i\gamma \frac{l}{2a} f(t) e^{i\omega t} \exp\left\{ik_x \frac{l}{2a}\right\} \int f(x) e^{i\omega x} e^{i\omega x \frac{x}{2a}} dx, \quad (2)$$

где $a = \sin \alpha / u$ — коэффициент развертки (2). От углового спектра (2) перейдем к частотно-угловому спектру ВГ

$$S_1(k_x, \Omega) = -i \frac{\gamma l}{2a} F\left(\frac{k_x}{2a}\right) F\left(\frac{k_x}{2a} - \Omega\right), \quad (3)$$

где

$$F(\Omega) = \int f(t) e^{i\omega t} e^{-i\Omega t} dt$$

Соотношение (3) справедливо для произвольного вида модуляции огибающей и фазы исходного импульса. Из (3) видно, что в направлении $k_x = 2a\Omega_1$ спектральная плотность ВГ

$$|S_1(k_x, \Omega)|^2 = \frac{\gamma^2 l^2}{4a^2} C^2 |F(\Omega_1)|^2, \quad (4)$$

где

$$C = \int f(t) e^{i\omega t} dt$$

совпадает со спектральной плотностью опорного импульса при $\Omega = \Omega_1$.

Таким образом, имеется линейная связь между величиной углового расхождения излучения ВГ вдоль оси X и шириной частотного спектра опорного импульса, т. е. нелинейный кристалл служит анализатором спектра падающего на него излучения.

Вместе с тем при неколлинеарной ГВГ взаимобращенными во времени импульсами распределение энергии ВГ вдоль оси X соответствует функции автосвертки опорного импульса (4). Таким образом, в поперечном распределении энергии ВГ содержится информация как о форме, так и о спектральном составе опорного импульса. Если, далее, регистрируемое излучение ВГ направить на спектрограф с щелью вдоль оси X , то на выходе спектрографа будем иметь динамическую спектрограмму опорного импульса, т. е. зависимость несущей частоты от времени.

При неколлинеарной ГВГ взаимобращенными импульсами пространственное распределение энергии ВГ $W(x)$ не является четной

функцией от временной задержки $T = x \sin \alpha / u$ (4). Следовательно, методом нелинейно-оптической динамической спектрографии в этом случае кроме определения величины чирпа можно также указать и его знак.

Рассмотрим основные характеристики данного нелинейного оптического дискриминатора частоты. Из (2) с учетом конечного размера кристалла ($0 \leq x \leq L$, где L — длина кристалла) для частотно-углового спектра ВГ получим

$$S_2(k_x, \Omega) = -i \frac{\gamma L}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega') F(\Omega' - \Omega) \exp \left\{ -i \frac{L}{2} (k_x - 2a\Omega') \right\} \times \\ \times \sin c \left\{ \frac{L}{2} (k_x - 2a\Omega') \right\} d\Omega' \quad (5)$$

Из (5) видно, что угловое смещение максимума ВГ при изменении частоты основного излучения определяется соотношением

$$k_x = 2a \Delta \Omega. \quad (6)$$

Отсюда получаем выражение, определяющее зависимость угла синхронизма от длины волны гармоники

$$\Delta \varphi = \frac{k_x}{k} = \frac{2ac}{\lambda} \Delta \lambda = D_\varphi \Delta \lambda, \quad (7)$$

где λ — длина волны излучения ВГ.

Величина D_φ является угловой дисперсией нелинейного кристалла. Для кристалла LiIO₃, $\lambda = 0,53$ мкм $a = 2,18$ пс/мм (2), $D_\varphi = 8,1$ мин/Å

Следует отметить, что величина угловой дисперсии D_φ изменяется из-за преломления волны суммарной частоты на границе нелинейный кристалл—воздух. Нетрудно показать, что на выходе кристалла спектральные линии λ и $\lambda + \Delta \lambda$ в спектре излучения суммарной частоты отстоят на угол

$$\Delta \theta = \frac{n \cos \alpha}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha}} \left(D_\varphi + \frac{dn}{d\lambda} \frac{\lg 2}{n} \right) \Delta \lambda, \quad (8)$$

где n — показатель преломления нелинейного кристалла.

Аппаратной функцией рассматриваемого дискриминатора частоты (нелинейного кристалла), как следует из (5), является функция

$$\Phi(k_x) = \sin c \left\{ \frac{L}{2} (k_x - 2a\Omega) \right\}. \quad (9)$$

В соответствии с (9) и критерием Рэлея спектральные линии λ_1 и $\lambda_1 + \Delta \lambda_1$ в спектре опорного импульса, учитывая их возможное сложение в удвоителе частоты, следует считать разрешенными, если

$$\Delta \lambda_1 \geq \frac{\lambda_1^2}{2acL}. \quad (10)$$

Например, для кристалла LiIO_3 , $\lambda_1 = 1,055$ мкм, $a = 2,08$ пс/мм, $L = 1$ см, спектральное разрешение $\Delta\lambda_{\min} = 0,9$ Å, а разрешающая способность $R \Rightarrow \lambda/\Delta\lambda = 1,2 \cdot 10^4$.

Из (10) видно, что с увеличением длины кристалла L спектральное разрешение улучшается. Однако увеличить спектральное разрешение можно и без изменения геометрических размеров кристалла. Действительно, как показано в (5), при использовании опорных световых пучков, у которых фронт волнового возмущения наклонен относительно фазового фронта, масштаб временной развертки увеличивается и определяется выражением

$$a = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{u \cos \beta}, \quad (11)$$

где β — угол между фронтом волнового возмущения и фазовым фронтом пучка внутри кристалла.

Следовательно, согласно (7), (10) и (11), увеличивая угол β , можно увеличить угловую дисперсию и спектральное разрешение рассматриваемого нелинейного дискриминатора частоты.

В частности для кристалла LiIO_3 , $\lambda_1 = 1,055$ мкм при $\beta = 33,4^\circ$ когда $a = 11,8$ пс/мм (5), угловая дисперсия $D_\tau = 46$ мин/Å, а спектральное разрешение $\Delta\lambda_{\min} = 0,16$ Å (при той же длине нелинейного кристалла).

Из вышензложенного следует, что спектральное разрешение рассматриваемого нелинейного оптического дискриминатора частоты можно увеличить при использовании опорных световых пучков с наклонным фронтом волнового возмущения. Опорные пучки с наклонным фронтом волнового возмущения могут быть сформированы с помощью дисперсионного элемента, например, дифракционной решетки.

Вместе с тем следует отметить, что спектральная ширина синхронизма для неколлинеарной ГВГ вблизи центральной частоты ω_0 определяется расходимостью излучения опорного импульса $\delta\epsilon$ и толщиной нелинейного кристалла. В частности, для нелинейного кристалла LiIO_3 с $l = 2$ мм ширина синхронизма удвоителя составляет 31 см $^{-1}$ ($\lambda_0 = 1,055$ мкм, $\delta\epsilon \sim 1$ мрад) (6).

Временное разрешение рассматриваемого нелинейного оптического дискриминатора частоты, так же как и в (2), определяется толщиной нелинейного кристалла и равно $0,1$ пс.

Таким образом, проведенное исследование показывает, что если при неколлинеарной ГВГ импульсами с взаимобращенными временными профилями излучение ВГ с выхода нелинейного кристалла направить на спектрограф с щелью вдоль оси X , то на выходе спектрографа получим зависимость несущей частоты СКИ от времени.

Փերկարճ եզակի լուսային իմպուլսների ֆազի որոշումը

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում է ոչ զժային օպտիկա-դինամիկական սպեկտրոգրաֆիայի մեթոդով եզակի դերկարճ իմպուլսների ֆազի որոշման հսարավորությունը:

Ցույց է տրված, որ եթե ժամանակային պրոֆիլներով փոխըջված իմպուլսներով ոչ կուլինեար ԵՀԳ-ի դեպքում երկրորդ հարմոնիկի ճառագայթումը ուղղենք սպեկտրոգրաֆի վրա, որի ճեղքը ուղղված է X առանցքով, ապա սպեկտրոգրաֆի ելքում կստանանք գերկարճ իմպուլսի կրող հաճախության կախումը ժամանակից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. А. Ахмапов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, Оптика фемтопекундных лазерных импульсов, Наука, М., 1988. ² Г. Г. Гурзаян, Р. Н. Гюзаян, И. С. Захаркин, Квантовая электроника, т. 14, № 8, с. 1660 (1987). ³ Р. Н. Гюзаян, Д. Л. Оганесян, Тезисы докл. УП ВНТК «Фотометрия и ее метрологическое обеспечение», М., с. 24, 1988. ⁴ А. О. Варданян, Д. Л. Оганесян, ДАН АрмССР, т. 90, № 2, с. 81 (1990). ⁵ С. А. Аракелян, Р. Н. Гюзаян, С. Б. Согомоян, Изв. АН СССР. Сер. физ., т. 48, № 3, с. 569 (1984). ⁶ С. А. Аракелян, Р. Н. Гюзаян, С. Б. Согомоян, Квантовая электроника, т. 8, № 7, с. 1576 (1981).

МИКРОБИОЛОГИЯ

УДК 579.252.55

А. Ф. Казанчян, А. Г. Габриелян, М. А. Погосян, Р. А. Захарян

Тонкая структура ДНК ДНК плазмиды *pSD*

(Представлено чл.-корр. АН Армении К. Г. Карагезяном 15/XI 1990)

Исследование структуры и структурных переходов в нуклеиновых кислотах необходимо для понимания основных процессов их функционирования в клетке—репликации, транскрипции, трансляции, рекомбинации. Ранее была описана плазмидная ДНК *Salmonella derby* К 89, обуславливающая антибиотикоустойчивость данного штамма, характеризующаяся многообразием структурных форм (рис. 1) и проявлением различных фенотипических вариантов (1). Способность к сравнительно частой реорганизации генетического материала плазмиды *pSD*, не приводящей, однако, к ее нестабильности, обеспечивает достаточную пластичность ее структурно-функциональной организации, благодаря методу анализа дифференциальных кривых плавления молекулы ДНК

Особенности функционирования этой плазмиды, по-видимому, обусловлены структурными особенностями ее ДНК. В связи с этим представляло интерес исследовать структуру ДНК плазмиды *pSD*, с помощью метода анализа дифференциальных кривых плавления молекулы ДНК.

Для кольцевых замкнутых ДНК характерно исчезновение тонкой структуры кривой плавления или значительное ее сглаживание по сравнению с открытой формой той же ДНК. При плавлении кольцевых замкнутых ДНК получают многочисленные широкие пики с малой площадью и очень малой амплитудой. Такие пики не разрешаются и, накладываясь друг на друга, дают гладкую дифференциальную кривую плавления. Поэтому в наших опытах была использована линейризованная плазмидная ДНК.

Плазмиду *pSD* изолировали из штамма *S. derby* К 89 по методу Бэрпбойма и Доли (2). Перед плавлением ДНК плазмиды *pSD* депротенизировали, осаждали из-под спирта центрифугированием и растворяли в буфере 0,1×SSC. Гель-фильтрацию препарата проводили на сефакриле S—200. Плавление производили на специально оборудованном спектрофотометре Cary 219. Раствор ДНК в 1×SSC нагревали в термостатированных герметически закрытых кюветах. Регистрацию кривых плавления проводили при непрерывном повышении температуры со скоростью 0,2 град/мин. Кривые дифференцировали на ЭВМ фирмы Хьюлетт-

Паккард по программе «Melting». Дифференциальные кривые нормировали машинным способом. Расчет содержания ГЦ-пар в выплавляемых блоках производили по формуле М. Д. Франк-Каменецкого (3):

$$T = 176,02 (2,6 - X_0) \times (35,8 - 7,4 \lg Na^+) \times 0,1 \times SSC; \lg Na^+ = 1,7;$$

$$T = 176 - (2,6 - X_0) \times (35,8 + 11,97) = 176 - (2,6 - X_0) \times 47,77,$$

где X_0 — доля ГЦ-пар.

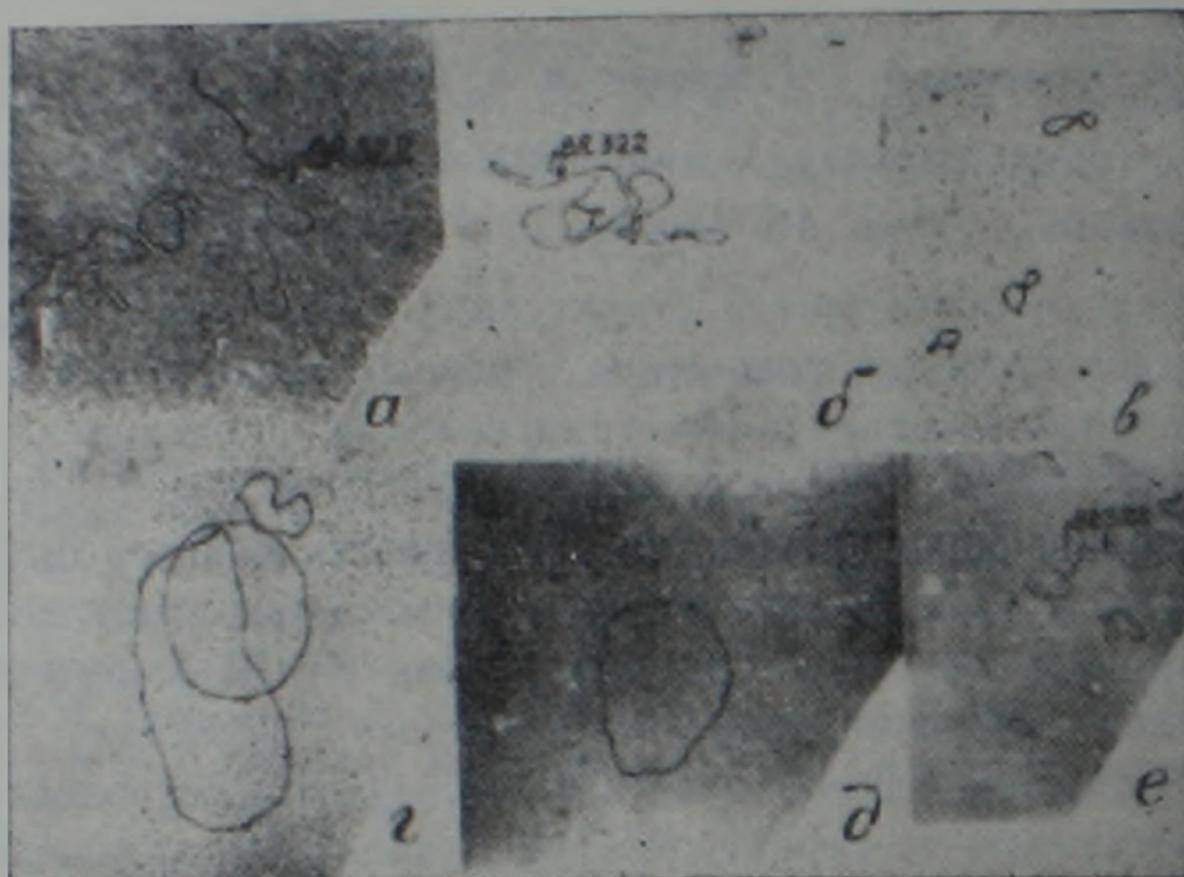


Рис. 1. Электронные микрофотографии различных структурных форм плазмидной ДНК штамма *S. derby* К 89. Маркер линейная молекула рЗК 322 (4362 тпн): а, б, в, г — низкомолекулярные плазмиды (2,3; 4,4; 7,3; 8,7 тпн); д — катенан (22 тпн); е — олигомер (11 тпн).

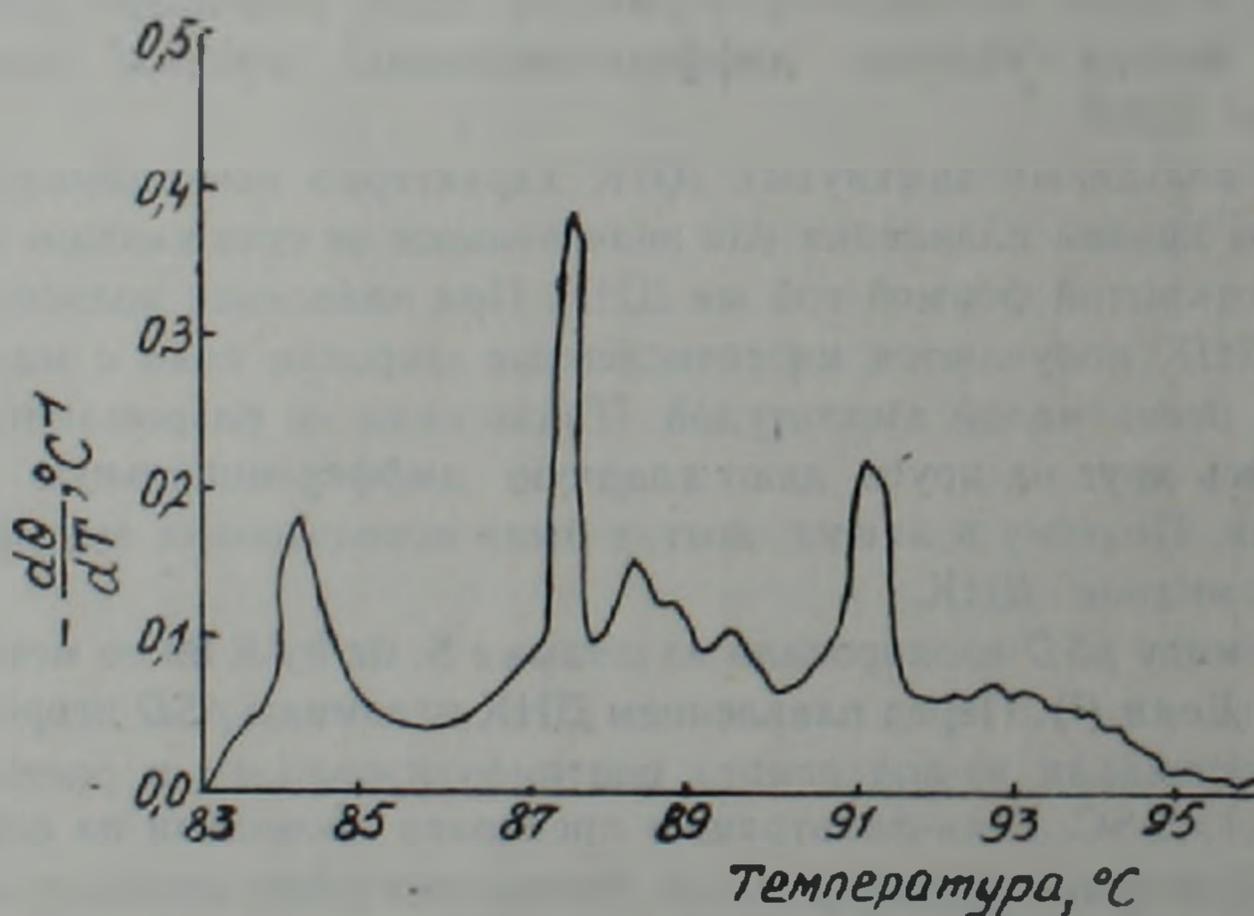


Рис. 2. Дифференциальная кривая плавления ДНК плазмиды рЗК

Для характеристики структурных особенностей плазмидной ДНК штамма *S. derby* К 89 исследовали ее плавление. Для плавления

использовалась очищенная и обработанная SI-нуклеазой ДНК плазмиды *pSD*, электрофоретически определяемая длина которой равна 2,32 тпн.

Как видно из рис. 2, тонкая структура ДКП ДНК плазмиды *pSD* четко выражена, что свидетельствует о плавлении одного типа молекул, которые могут быть представлены в мономерной или олигомерной формах, поскольку кривая плавления олигомера, состоящего из одного типа мономеров, неотличима от кривой плавления мономера.

Степень сглаженности дифференциальной кривой плавления (ДКП) дает возможность оценить длину ДНК плазмиды приблизительно в 2,3 тпн, что совпадает со значением, полученным с помощью электрофореза. Известно (4), что каждому узкому пику на ДКП соответствует выплавление целиком сравнительно длинного участка, температура которого зависит от содержания ГЦ-пар, а также от его длины и от условий на границах, т. е. от того, какими участками он окружен — расплавленными или спиральными. Эта зависимость тем сильнее, чем короче участок. На ДКП плазмиды *pSD* имеется три четких пика. При температурах, соответствующих этим пикам, выплавляются участки (или участок) в несколько сот пар нуклеотидов (в каждом пике около 10% всей молекулы). ДНК плазмиды *pSD* характеризуется не очень широким распределением ГЦ-пар; она, по-видимому, плавится короткими участками. Плаزمида является АТ-богатой. ГЦ составы трех участков, соответствующих трем главным пикам, равны соответственно 0,34; 0,42 и 0,51.

На основании результатов исследования можно констатировать, что плазмиды *pSD* имеет уникальную ДКП с ярко выраженной тонкой структурой, особенностью которой является наличие сравнительно больших легкоплавких областей.

Блочность АТ-насыщенных участков ДНК может играть роль в обеспечении гибкости реорганизации генетического материала плазмиды.

Институт экспериментальной биологии
Академии наук Армении

Ա. Տ. ՂԱԶԱՆՉՅԱՆ, Ա. Գ. ԳԱՐՐԻԵԼՅԱՆ, Մ. Ա. ԳՈՂՈՍՅԱՆ, Ռ. Ա. ԶԱՔԱՐՅԱՆ
pSD պլազմիդի ԴՆԹ-ի ձևավան կոդերի նուրբ կառուցվածքը

Ուսումնասիրվել է *pSD* պլազմիդի ԴՆԹ-ի կառուցվածքը՝ օգտագործելով ԴՆԹ-ի հալման մեթոդը: Պլազմիդային ԴՆԹ-ի հալման դիֆերենցացված կորը ունի կտրուկ արտահայտված 3 գագաթներ, որոնք համապատասխանում են 0,34, 0,42 և 0,51 ԳԱ-պարունակություն ունեցող շրջաններին:

Պլազմիդի ԴՆԹ-ն հարուստ է ԱՏ-զույգերով: Հալման կորի հարդեցման աստիճանը թույլ է տալիս մոտավորապես գնահատել պլազմիդի ԴՆԹ-ի երկարությունը, որը համապատասխանում է այլ մեթոդներով ստացված արժեքին՝ 2,3 հազար նուկլեոտիդային զույգերի:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 А. Ф. Казанчян, Биол. журн. Армении, т. 38, № 11, с. 1016—1019 (1985). 2 Н. С. Birnboim, J. A. Doly, Nucl. Acids Res., v. 7, № 6, p. 1513—1523 (1979). 3 М. D. Frank-Kamenetskii, Biopolymers № 10, p. 2623 (1971). 4 Ю. С. Лазуркин, Молекулярная биология, т. 11, № 6, с. 1311—1324 (1977).

УДК 595.422:592/599.001.4

Э. С. Арутюнян

Новый подрод и новый вид рода *Hypoaspis* Can., 1884, s. 1.
(Parasitiformes, Mesostigmata: Laelaptidae)

(Представлено академиком АН Армении С. О. Мовсесяном 10/VIII 1990)

Настоящее сообщение служит продолжением работы по изучению клещей, паразитирующих на жуках коллекции Института зоологии АН Армении, и содержит описание нового подрода с новым видом рода *Hypoaspis* из семейства Laelaptidae Berlese, 1892, обнаруженным на *Osmoderma eremita* Scop. (Scarabaeidae). Номенклатура щетинок в тексте дается по Эвансу⁽¹⁾ и Вайнштейну⁽²⁾ с некоторыми изменениями. Размеры указаны в микронах (мкм). Ширина дорсального щита измерялась на уровне щетинок D_5 .

Hypoaspis breiti Arutunjan sp. nov.

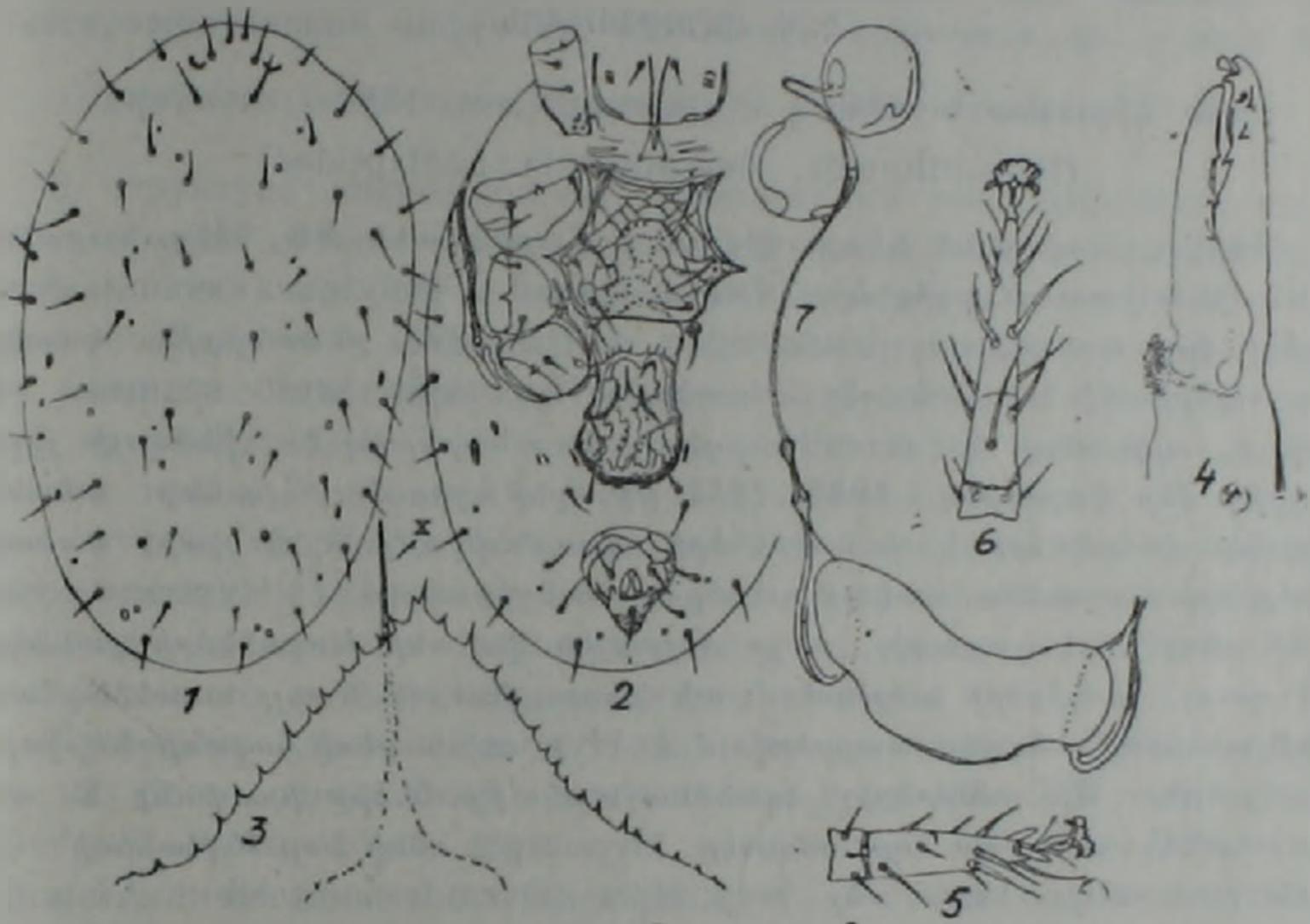
Материал. Голотип: ♀, окрестности Вены, хозяин *Osmoderma eremita* Scop. по сборам Брейта (Breitl), препарат № 92 (коллекция клещей, обнаруженных на жуках). Дата сбора жука неизвестна, по-видимому, материал собран в 1930—1935 гг.

Тип хранится в лаборатории акарологии Института зоологии АН Армении.

Самка (рисунок, 1—7). Дорсальный щит яйцевидной формы, со слабо заметной сетчатостью. На щите 31 пара однородных игольчатых щетинок: спинные (D)—10, медиальные (M)—6, медиально-латеральные (ML)—5, латеральные (L)—10 пар. Длина дорсальных щетинок не превышает 48 мкм. Ряд щетинок вышеуказанных наборов может отсутствовать или на щите могут иметься непарные, асимметрично расположенные щетинки. Длина дорсального щита 780, а ширина—480. Передний край стернального щита слабовыемчатый, задний—почти прямой: щит с хорошо выраженной сетчато-пунктированной поверхностью, несет 3 пары щетинок. Метастернальные щитки слабовыраженные. Генитальный щит небольшой, не узкий, его задний край слегка выпуклый. Анальный щит обратно-грушевидный: у щита 2 пары вентральных (V_1 и V_2) и 2 пары медиовентральных (MV_1 и MV_2) щетинок. Метоподальные щитки удлиненно-овальные. Неподвижный палец хели-

цер, кроме игловидного придатка, опикально несет хорошо заметное маленькое образование грушевидной формы, вооружен, как и подвижный, тремя зубцами. Тектум простого строения с зубчатым краем, прозрачный (рисунок 3). Под тектумом хорошо заметен лабрум, превращенный в длинный игловидный орган (рисунок, 3 х) для прокалывания жертвы (этот орган хорошо развит у мезостигматических клещей, паразитирующих на жуках). На лапках II пары ног две щетинки шиповидные, остальные толстые, игловидные и щетинковидные. Щетинки на лапках IV ног в основном толстые игловидные (рисунок, б), форма спермопринимającego протока изображена на рисунке, 7. Самец неизвестен.

Вид назван именем австрийского энтомолога Брейта.



Huroaspis breiti sp. nov. Самка (1-6): 1 - сверху; 2 - снизу; 3 - тектум (под тектумом отмечен лабрум верхняя губа рис 3 х); 4 - хелицера; 5 - лапка II ног; 6 - лапка IV ног; 7 - спермопринимajúщий проток

По строению щитов, щиткови по морфологическим признакам ряда структур вид является представителем рода *Huroaspis* Can., 1884, s. 1, но по количеству щетинок (31 пара) дорсального щита, по скульптуре стернального и генитального щитов, наличию маленького образования грушевидной формы на концевой части неподвижного пальца хелицер и другим особенностям этот вид резко отличается от прочих представителей всех известных подродов рода *Huroaspis* (3). Эти отличительные признаки позволяют нам выделить данный вид в подрод—*Osmodermus* subgen. nov. с типовым видом *Huroaspis (Osmodermus) breiti* Arutunjan.

Диагноз под рода *Osmodermus* subgen nov.

На дорсальном щите 31 пара щетинок (D—10, M—6, ML—5, L—10 пар). Стернальный щит хорошо выраженный с сетчато-пунктированной поверхностью, несет 3 пары щетинок. Генитальный щит сзади со слабо-заметной пунктированной поверхностью, несет одну пару щетинок. Мембрана, окружающая анальный щит, кроме задних интерскутальных щетинок снабжена 4 парами щетинок: V_1 , V_2 и MV_1 , MV_2 . На концевой части неподвижного пальца хелицер имеется маленькое образование грушевидной формы в виде приставки.

Институт зоологии
Академии наук Армении

Է. Ս. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Նոր ենթատեսակ և տեսակ *Hypoaspis* Can., 1884 s. l. սեռից
(Parasitiformes, Mesostigmata : Laelaptidae)

Ներկա հոդվածում նկարագրվում է Հայաստանի ԳԱ Կենդանաբանության ինստիտուտի բզեզների հավաքածուում *Osmoderma eremita* Scop. բզեզի վրա պարազիտող *Laelaptidae* Eerl., 1892 ընտանիքին պատկանող տզերի մի նոր տեսակ: Տեսակը. — *Hypoaspis breiti* sp. nov. տեսակն է, որի տեղը *O. eremita* բզեզը հայտնաբերվել է Վիեննայի շրջակայքից մեր կարծիքով 1930—1935 թթ. ընթացքում: Այս նոր տեսակը մարմնի վահանների և վահանիկների կազմությամբ և մի շարք կառուցվածքների առանձնահատկություններով հանդիսանում է *Hypoaspis* Can. 1884 սեռի ներկայացուցիչ, բայց մեջբային վահանի խողանների քանակով (31 գույգ), խելիցների անշարժ մատի կառուցվածքով և այլ առանձնահատկություններով տեսակը տարբերվում է *Hypoaspis* սեռի հայտնի ներկայացուցիչներից: Այդ տարբերիչ առանձնահատկությունները իրավունք են տալիս առանձնացնել այս նոր տեսակը *Hypoaspis* սեռի նոր ենթատեսակ՝ *Osmodermus* subgen nov. մեջ *Hypoaspis* (*Osmodermus*) *breiti* Arutunjan նմուշային տեսակով:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ G. O. Evans, J. Linn. Soc. London, Zool., v. 43, № 291, p. 203—259 (1957).
- ² Б. А. Вайнштейн, Зоол. журн., т. 52, № 2, с. 274—277 (1973). 3 Н. Г. Брегетова и др. Определитель обитающих в почве клещей *Mesostigmata*. Наука. Л. (1977).

МЕДИЦИНА

УДК 616.831:611.814+616.981.21

Н. Д. Вартазарян, Н. Г. Хостикян, Л. А. Авакян

Морфологическая характеристика гипоталамуса при длительной экспериментальной инфекции, вызванной стрептококком группы В

(Представлено академиком АН Армении О. Г. Баклаваджяном 9/X 1990)

В структуре инфекционных заболеваний новорожденных резко возросла роль стрептококка группы В, вызывающего молниеносный сепсис и менингит (¹⁻⁵) с высокой степенью летальности. Такая быстрая генерализация инфекции со смертельным исходом у части больных связана с особенностями действия возбудителя и ответной реакцией макроорганизма, основанной на интегральной функции соединительной ткани, иммунной и нейроэндокринной системы. В связи с этим изучение морфологических изменений в гипоталамусе в условиях генерализованной инфекции может иметь существенное значение для выяснения механизмов прогрессирования, а также дальнейшего пролонгированного течения инфекционного процесса.

Проведено однократное и трехкратное внутрибрюшинное заражение 170 беспородных белых крыс массой тела 180—200 г бульонной культурой стрептококка группы В, содержащей 600 млн. микробных тел в 1 мл. Контролем служили 30 крыс. Животных декапитировали через 24 ч, 1 и 2 недели (ранний срок), 1 и 3 месяца (средний срок), 6 месяцев и 1 год (поздний срок) после заражения. Гипоталамус фиксировали в жидкости Буэна, в 10%-ном нейтральном формалине. На криостатных срезах изучали активность фосфатазных ферментов, ставилась непрямая реакция иммунофлюоресценции с гипериммунной антистрептококковой сывороткой группы В с соответствующими контролями. Препараты окрашивали гематоксилином и эозином, азур 2 эозином, по Грамму в модификации Н. Д. Вартазаряна. Нейросекрет определяли по Гомори, РНК по Браше, ДНК по Фельгену, ставилась ШИК реакция. Динамику персистенции стрептококка в гипоталамусе изучали методом подсчета малых и больших очагов и колоний микробов. Проводилось также морфометрическое исследование площадей клеток паравентрикулярного (PV) и супрооптического (SO) ядер гипоталамуса. Подсчитывали морфофункциональные типы нейросекреторных клеток по Поленову (I а, I б, I в, II, III типы) с учетом де-

структивных форм клеток. Для электронномикроскопического исследования из каждой серии опытов в разные сроки эксперимента брали гипоталамус, фиксировали раствором параформальдегида и глутаральдегида по Карновскому. Постфиксацию кусочков проводили 1%-ной осмиевой кислотой, приготовленной на 0,1 м фосфатном буфере pH 7,2—7,4. Заливали материал смесью аралдита и эпона. Блоки резали на ультрамикротоме «Reichert—Jung» с учетом необходимости зоны. Ультратонкие срезы контрастировали на сетках и изучали с помощью электронного микроскопа BS-613 фирмы «Tesla».

В ранние сроки, через 24 ч после однократного заражения, особых изменений со стороны нейросекреторных клеток гипоталамуса не наблюдалось. Местами отмечалось увеличение Гомори положительного вещества в их цитоплазме, расширение и полнокровные капилляры с разрывом их стенок вокруг нейронов. После трехкратного заражения в гипоталамусе обнаруживались внутритканевые стрептококковые мелкие очаги и отдельные цепочки. Отмечался заметный периваскулярный отек и мукоидное набухание стенок сосудов. Имело место усиление нейросекреторной активности с преобладанием клеток I а, б типов как в супраоптическом, так и в паравентрикулярном ядре. Через 1 и 2 недели реакцией иммунофлюоресценции стрептококковые очаги обнаруживались внутри капилляров, в строме и цитоплазме секреторных клеток как при однократном, так и трехкратном заражении. В гипоталамусе выявлялись периваскулярные клеточные инфильтраты, а в сосудистых сплетениях желудочков мозга встречались фибриновые тромбы с наличием микробов. В двухнедельном сроке в PV и SO ядрах гипоталамуса встречались сморщенные клетки II и III типов. При изучении распределения стрептококковых колесий и цепочек мы выявили постепенное инфицирование гипоталамуса. При трехкратном заражении количество мелких очагов составляет $1,2 \pm 0,22$ на 1 мм^2 площади, а через 2 недели достигает $12,9 \pm 0,42$ и больше. При морфологическом исследовании через 2 недели после заражения размеры нейросекреторных клеток и их кариона увеличились от $332,2 \pm 0,16$ до $346,2 \pm 0,8 \text{ мк}^2$ в SO ядре и от $310,2 \pm 1,2$ до $342,2 \pm 1,8 \text{ мк}^2$ в PV ядре.

Ультраструктурное исследование гипоталамуса выявило уменьшение белоксинтезирующих структур цитоплазмы на периферии нейронов и активацию ядерного аппарата: скопление глыбок хроматина у извилистой ядерной мембраны. Наблюдались также дегенеративные изменения некоторых синапсов и нервных отростков по «темному типу». В поврежденных нервных волокнах отмечалось уплотнение аксоплазмы с исчезновением четкой структуры, отторжение аксона от миелина. В ранней стадии эксперимента признаки дегенерации: электронно-плотная аксоплазма, наличие миелиноподобных и плотных телец, деструкция митохондрий выявлялись только в аксо-инициковых синапсах (рис. 1, а). В средние сроки эксперимента (1 и 3 месяца) в гипоталамусе обнаруживались множественные периваскулярные лим-

фогистоцитарные инфильтраты с наличием плазматических клеток. В сосудах микроциркуляторного русла выявлялись гиалиновые и белые тромбы и периваскулярный отек (рис. 2). Стрептококки располагались внутри секреторных клеток, макрофагов, в цитоплазме глиальных клеток (рис. 3). Наблюдалось повышение секреторной активности клеток PV, SO и задних ядер гипоталамуса. Через один месяц после однократного заражения средняя площадь нейросекреторных клеток SO ядра от $332,2 \pm 3,16 \text{ мк}^2$ в норме доходила до $358,8 \pm 2,8 \text{ мк}^2$, а при трехкратном заражении—до $380,0 \pm 4,8 \text{ мк}^2$. В этих клетках содержание гранул РНК по сравнению с контролем резко повысилось. Они относились к клеткам I а типа.

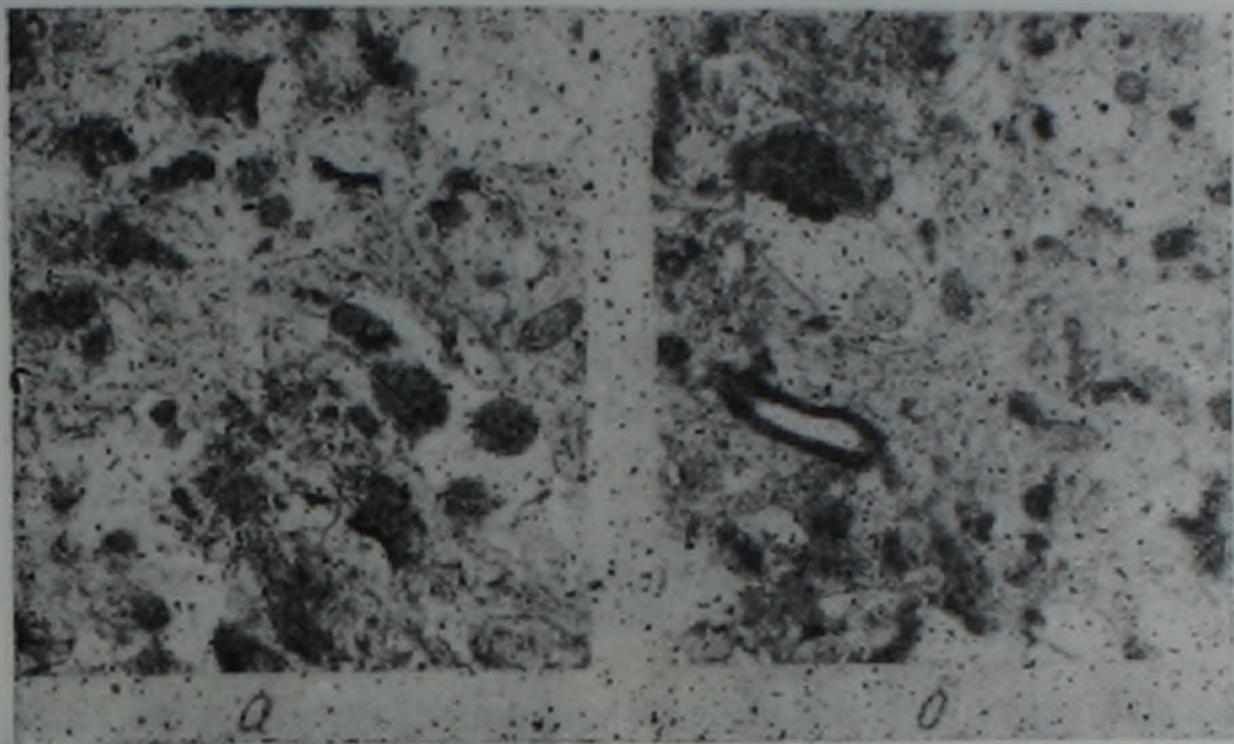


Рис. 1. Дегенерация аксо-шипиковых (а) и аксо дендритических (б) синапсов гипоталамуса (ув. $\times 29200$)

Наряду с активными клетками встречались и сморщенные клетки II и III типа. При бактериоскопическом исследовании наибольшее количество стрептококковых очагов выявлено через 1 месяц после трехкратного заражения ($14,3 \pm 0,51$ на 1 мм^2 площади). Вокруг очагов стрептококков обнаруживались участки некротизированной ткани. Кокки располагались как в цитоплазме клеток, так и в капиллярах. При непрямой реакции иммунофлюоресценции они давали яркое зеленое свечение микробного антигена. При электронномикроскопическом изучении в средние сроки в гипоталамусе в патологический процесс вовлекались также аксо дендритические синапсы (рис. 1, б). При этом дегенерированная аксонная терминаль образовывала асимметрический синапс на небольшом дендрите. Одновременно изменения в аксо-шипиковых синапсах усугублялись и приобретали обратный характер: отростки глиальных клеток проникали в синаптическую щель либо окружали весь синаптический комплекс.

В поздние сроки эксперимента (через 6 месяцев и 1 год) в гипоталамусе выявлялись выраженные изменения со стороны сосудов, нейросекреторных и глиальных клеток. При наличии склероза сосудов

выявлялись полнокровие, стаз и точечные кровоизлияния. Проникновение стрептококковой инфекции сопровождалось воспалительной реакцией вокруг сосудов с появлением лимфолейкоцитарных инфильтратов. Количество микробных очагов по сравнению со средним сроком значительно уменьшилось. Процентное соотношение деструктивных форм клеток II и III типов также несколько снизилось по сравнению со средним сроком. Средние цифровые показатели площадей

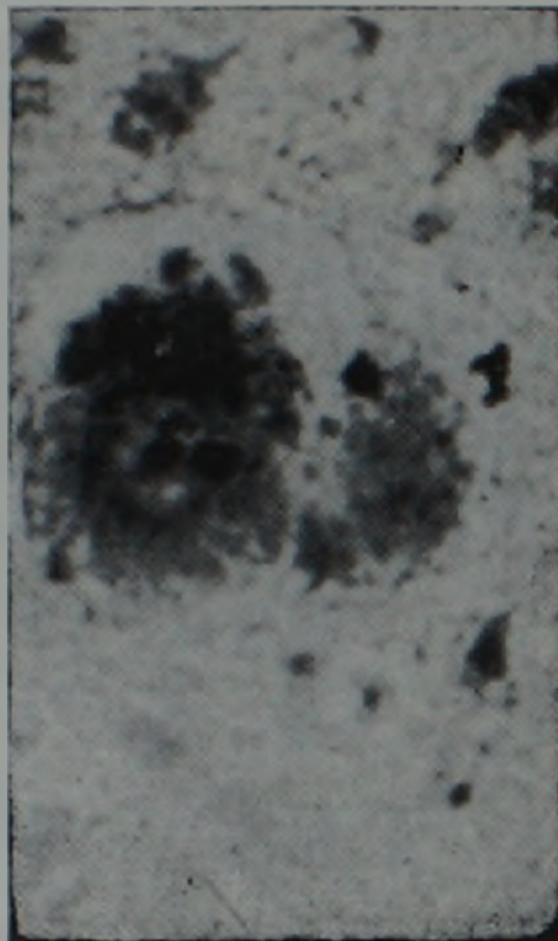


Рис. 2. Периваскулярные лимфоцитарные инфильтраты и белые тромбы в просвете сосудов гипоталамуса (гематоксилин эозин $\times 200$).

Рис. 3. Стрептококки в цитоплазме нейросекреторных и глиальных клеток гипоталамуса (по Грамму в модификации Вартазаряна Н. Д. $\times 900$)

клеток гипоталамических ядер в поздние сроки оставались высокими, несмотря на наличие сморщенных клеток. Этот факт объясняется наличием групп гипертрофированных нейросекреторных клеток с большой площадью цитоплазмы и кариона, со значительным содержанием гранул РНК и нейросекреторного вещества в их цитоплазме. Вокруг таких гипертрофированных клеток наблюдалось разрастание капиллярной сети с активацией фосфатазных ферментов в эндотелии сосудов. Ультраструктурные изменения в поздние сроки после заражения В стрептококком продолжали выявляться в виде дегенеративных процессов в синапсах, некроза части клеток, что в свою очередь указывало на изменения как афферентных, так и эфферентных связей гипоталамуса. Причем нарушение синаптической передачи происходило с ранней стадии эксперимента, а затем приобретало необратимый характер. Следует также отметить что в течение всего эксперимента происходили ультраструктурные изменения в стенках капилляров и в клетках гемомикроциркуляторного русла гипоталамуса (рис. 4). Описанные морфологические изменения гипоталамуса, внут-

ритканевая колонизация стрептококков наиболее интенсивно выражены при трехкратном внутрибрюшинном заражении стрептококком группы В.

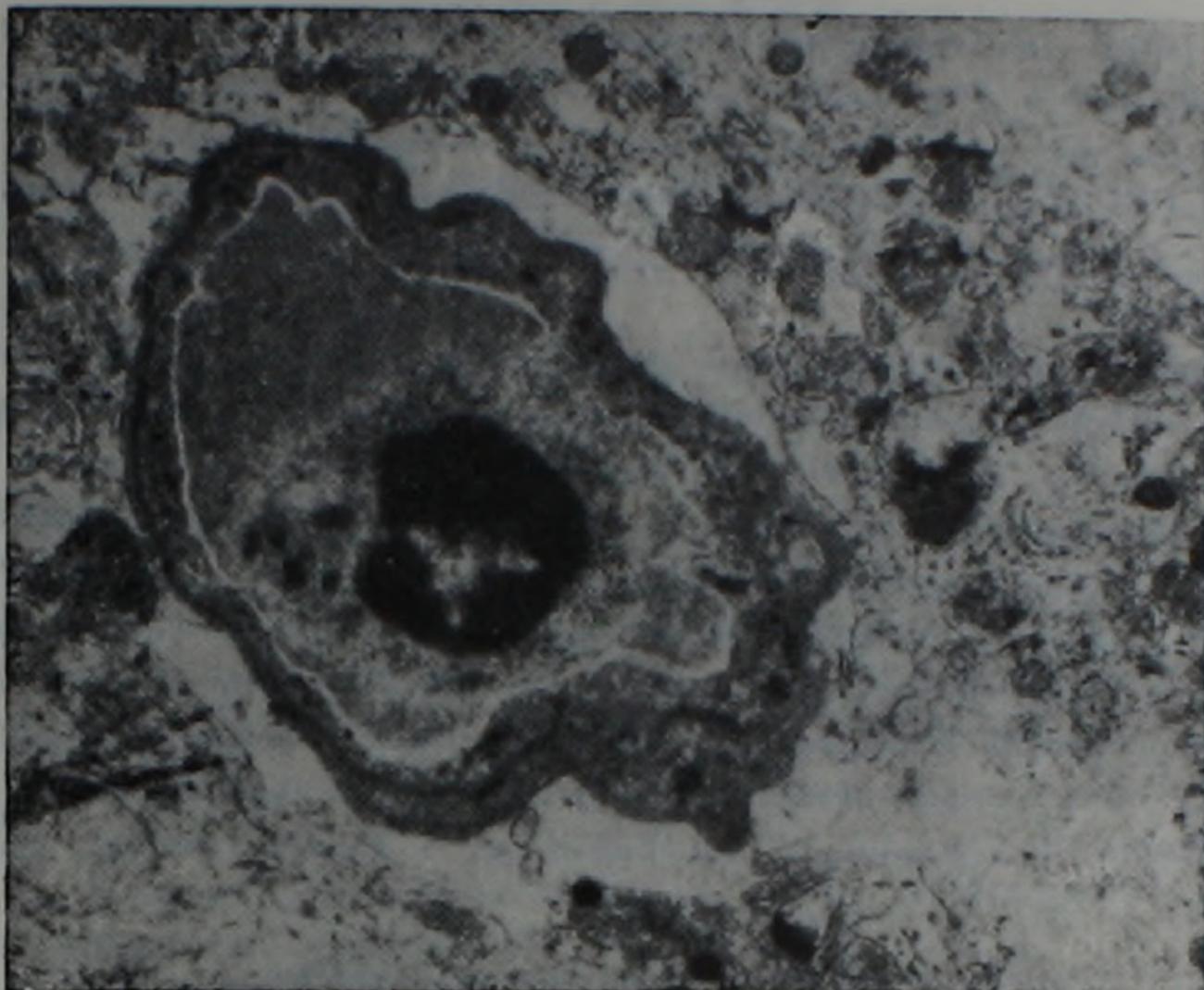


Рис. 4. Резко измененный капилляр с периваскулярным отеком, окруженный набухшими отростками глиальных клеток. Просвет капилляра закупорен (ув. $\times 29200$)

Таким образом, проведенные морфогистохимические, морфометрические, ультраструктурные, бактериоскопические исследования гипоталамуса при однократном и трехкратном внутрибрюшинном заражении стрептококком группы В показывают, что в гипоталамусе происходит ряд структурных изменений, охватывающих метаболические, нейросекреторные и воспалительные процессы. Динамика морфологических сдвигов указывает на развитие инфекционного процесса с длительным течением при наличии внутритканевых микроколоний с их персистенцией в течение 1 года. Нарушение гормонального гомеостаза под влиянием стрептококков и их антигенов является важным условием поддержания длительно текущего инфекционного процесса. Проникновение стрептококков в гипоталамус и мозговые оболочки часто сопровождалось воспалительной реакцией и появлением лимфолейкоцитарных инфильтратов. Эти данные подтверждают мысль о тропности стрептококка группы В к мозговой ткани и оболочкам, его роли в развитии менингитов и энцефалитов.

Ереванский медицинский институт

Հիպոթալամուսի կառուցվածքային բնութագիրը B խմբի ստրեպտոկոկով առաջացած էֆսպերիմենտայ երկարատև վարակման ժամանակ

B խմբի ստրեպտոկոկով վարակված առնետների մոտ վաղ շրջանից (24 ժամ) մինչև մեկ տարի ժամանակամիջոցում հիպոթալամուսում տեղի են ունենում մի շարք կառուցվածքային փոփոխություններ, որոնք արտահայտվում են նեյրոսեկրետոր քիչների ֆունկցիայի խանգարումներով, դիստրոֆիկ, նյութափոխանակության, բորբոքային և իմունաախտաբանական պրոցեսներով:

Աստիճանաբար անվերադարձ փոփոխությունների են ենթարկվում որոշ քանակի միելինապատ ներվաթելեր, աքսոն-շիպիկային և աքսոն-դենդրիտային սինապսներ, մեծուկանում են որոշ ներվաքիչներ: Այս բոլորը բերում են հիպոթալամուսի կենտրոնաձիւղ և կենտրոնախույս կապերի խախտմանը:

Կենդանիների օրգանիզմում մեկ տարվա ընթացքում դարգանում է երկարատև ինֆեկցիոն պրոցես ներհյուսվածքային ստրեպտոկոկների պերսիստենցիայով: Միկրոբների ներթափանցումը հիպոթալամուս հաճախ ուղեկցվում է բորբոքային ռեակցիայով, որը հաստատում է տարածված այն միտքը, որ B խմբի ստրեպտոկոկը ունի իախասիրություն հանդեպ ուղեղը և նրա թաղանթները՝ հանդիսանալով մենինգիտների և էնցեֆալիտների պատճառ:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 J. K. Aiead. in Hospital nurse y infections/Hospital infections, Ed Bennett J. K., Boston-Toronto, p. 299-313, 1956. 2 R. A. Broughton et al., *Pediatr. Infect. disease*, v. 1, № 6, p. 410-412 (1952). 3 W. Hibsh, R. Nagel, U. Sitke, *Ergebnisse Z. Klin. Med.*, v. 42, № 25, p. 2237-240 (1937). 4 B. Hillel et al., *Salter Mschr. Kinderheill.*, v. 135, № 9-10, p. 642-645 (1947). 5 K. Srogbeg et al., *Scand. J. Infect. Dis.*, v. 21, № 2, p. 119-125 (1988)