

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՈՋ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՈՋ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՆԴԵՍ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

1990

Том 90 № 2

Издается с января 1944 г.
Выходит 10 раз в год.

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՋՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. ֆաբտուդար), է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Հ. ԳԱՐՐԻՆՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԴԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Վ. Դ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ թղթ. անդամ, Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Գ. Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, (պատ. խմբագիր), Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԵԼՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Վ. Ռ. ՅԱՆԱՐՋՅԱՆ, ՀԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, академик АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, А. А. ГАБРИЕЛЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), В. Г. МХИТАРЯН, чл.-корр. АН АрмССР, Д. М. СЕДРАКЯН, академик АН АрмССР (отв. редактор), А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКЕЛЯН, академик АН АрмССР, Г. С. СААКЯН, академик АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, академик АН АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՈՋ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՅԱՐԱԿՁՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ

ЕРЕВАН

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ա. Ա. Ալեխանյան—Գծային ֆունկցիաների նկատմամբ դիդյունկտիվ նորմալ ձևերով բուլյան ֆունկցիաների իրականացման բարդության հետ կապված որոշ էքստրեմալ խնդրի վերաբերյալ	51
Հ. Մ. Մառտիրոսյան—Մոմենտների պրոբլեմի լուծելիության մի պայմանի մասին	56
Կ. Ո. Աղեկյան—Համարյա տարբերակային կորիզով ինտեգրալ հավասարման լուծման խնայողական ալգորիթմ	60

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Վ. Կ. Բրուտյան—Ոչ ստացիոնար բարդ համակարգի ձևափոխումը լրիվ կառավարելի ու դիտարկելի համակարգի	65
--	----

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Մ. Վ. Բելուբեկյան—Պարբերական անհարթ մակերևույթով սահքի ալիքների տարածման մասին	71
--	----

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Մ. Մխիբարյան, Մոհամեդ Աբդալա Ահմեդ Աբդու—Առաձգականության տեսության հարթ կոնտակտային խնդրի ինտեգրալ հավասարման լուծման տարրեր մեթոդների համեմատման մասին	75
--	----

ՖԻԶԻԿԱ

Ա. Ս. Վառդանյան, Դ. Լ. Հովհաննիսյան—Գերկարճ իմպուլսի տեսքի որոշումը ժամանակի մեջ փոխըջված փնջերի ոչ կոլինեար ՆՀԳ դեպքում	81
--	----

ԱՍՏՂԱՖԻԶԻԿԱ

Դ. Մ. Սեդրակյան—Տարման էֆեկտը եկյտրոնային աստղի գերհոսելի կորիզում	85
--	----

ԲՈՒՅՍԵՐԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Վ. Ա. Դավթյան, Մ. Ա. Սալում—Տերենների և արմատների ֆիզիոլոգիական ակտիվության գուգակցված փոփոխությունը լուիկի տարրեր վաղահասության սորտերի օնտոգենեզում	92
---	----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- А. А. Алексанян—Об одной экстремальной задаче, связанной со сложностью реализации булевых функций в классе д.н.ф. над линейными функциями 51
- Р. М. Мартиросян—Об одном условии разрешимости проблемы моментов 56
- Г. В. Агекян—Экономичный алгоритм решения интегрального уравнения с почти разностным ядром 60

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

- В. К. Брутян—Преобразование сложной системы в полностью управляемую и наблюдаемую подсистемы 65

МЕХАНИКА

- М. В. Белубекян—О распространении упругих сдвиговых волн вдоль периодически неровной поверхности 71

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- С. М. Мхитарян, Мохамед Абдалла Ахмед Абду—О сравнении различных методов решения интегрального уравнения плоской контактной задачи теории упругости 75

ФИЗИКА

- А. О. Вирдянян, Д. Л. Оганесян—Определение формы СКИ неколлинеарной ГВГ взаимнообращенными во времени пучками 81

АСТРОФИЗИКА

- Д. М. Седракян—Эффект увлечения в сверхтекучем ядре нейтронной звезды 86

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

- В. А. Давтян, М. А. Салум—Сопряженное изменение физиологической активности листьев и корней в онтогенезе различных по скороспелости сортов томата 92

C O N T E N T S

MATHEMATICS

- A. A. Alexanian*—On an extremal problem, concerned with the complexity of realization of Boolean functions by disjunctive normal forms over linear functions 51
- H. M. Martirosian*—On a condition of the moment problem solution 55
- G. V. Agekian*—Economical algorithm of decision integral equation with almost kernel difference 60

APPLIED MATHEMATICS

- V. K. Brutian*—Transformation of the complex system into completely controllable and observable sub-systems. 65

MECHANICS

- M. V. Belubekian*—On the propagation of shear waves along a corrugated surface. 71

THEORY OF ELASTICITY

- S. M. Mikhitarian, Mohamed Abul Alla Ahmed Abdow*—On comparison of different methods of solving Karleman's integral equation, met in the theory of elasticity 75

PHYSICS

- A. O. Vardanian, D. L. Oganessian*—USP shape determination using non-collinear SHG with time inversed beams 81

ASTROPHYSICS

- D. M. Sedrakian*—The effect of generation of the magnetic field in the superconducting core of the Neutron Star 86

PHYSIOLOGY OF PLANTS

- V. A. Davtian, M. A. Saloum*—The correlative of physiological activity of leaves and roots in ontogenesis of different earlyripening sorts of tomato 92

Техн редактор *Азизбекян Л. А.*

Сдано в набор 5.02.90. Подписано к печати 27.04.90 ВФ 03547.

Формат 70×108^{1/16}. Бумага № 1 сыктывкарская. Высокая печать. Печ. лист 3.0.

Усл. печ. л. 4.2. Усл. кр. отт. 4.2. Учет.-изд. л. 3.3. Тираж 510. Заказ № 109.

Издат. № 7701. Цена 55 к.

Адр. ред.: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г., II эт., к. I, т. 27-92-38.

Издательство Академии наук Армянской ССР. 375019, Ереван.

пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Типография Издательства Академии наук АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин

ISSN 0321-1334 Доклады Академии наук Армянской ССР. 1990, т. 90, № 2, 49-96.

УДК 519.7

МАТЕМАТИКА

А. А. Алексанян

Об одной экстремальной задаче, связанной со сложностью
реализации булевых функций в классе д. н. ф. над линейными
функциями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Б. Нерсисяном 9/1 1990)

В работах ⁽¹⁻⁴⁾ введено и исследовано понятие дизъюнктивных нормальных форм (д. н. ф.) над линейными функциями в качестве естественного обобщения обычных д. н. ф. Задача построения кратчайшей реализации в новом классе формул равносильна кратчайшему покрытию множества единиц заданной функции смежными классами (сдвигами) по линейным подпространствам в множестве вершин n -мерного единичного куба, рассматриваемом в качестве линейного пространства над полем Галуа $GF(2)$.

В теории обычных д. н. ф. ⁽¹⁾ сложнейшей функцией в смысле длины кратчайшей д. н. ф. является функция „счетчик четности“ $1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n \pmod{2}$. Покрытие, соответствующее кратчайшей д. н. ф. данной функции, состоит из 2^{n-1} нульмерных, попарно непересекающихся интервалов. Таким образом, при реализации булевых функций в классе д. н. ф. максимум сложности достигается на симметрической функции, множество единиц которой состоит из изолированных вершин, взятых в максимально возможном количестве.

Из результатов работ ^(1,2) следует, что симметрические функции в классе д. н. ф. над линейными функциями реализуются гораздо проще, чем почти все булевы функции, и максимум сложности реализации не может быть достигнут на симметрической функции.

Естественным образом возникает вопрос о возможности построения функции, имеющей наибольшую сложность, множество единиц которой содержит лишь смежные классы нулевой или ограниченной (не зависящей от n) размерности. Иными словами, требуется построить аналог „счетчика четности“ для нового класса формул, а также выяснить, сохраняется ли для него свойство максимальной сложности реализации.

1. Обозначим через E^n множество вершин n -мерного единичного куба, рассматриваемого в качестве n -мерного линейного пространства над полем Галуа $GF(2)$, т. е. $E^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1\}\}$. Через $P(n)$ обозначается множество булевых функций, зависящих от не более чем n переменных.

Пусть $f \in P(n)$, тогда множество $N_f = \{x \in E^n \mid f(x) = 1\}$ называется множеством единиц функции f .

Определение. Функция $f \in P(n)$ называется линеаризируе-

мой, если f представима в виде произведения конечного числа линейных над $GF(2)$ функций.

Легко проверяется, что для линейризуемой $f \in P(n)$ множество единиц N_f — суть смежный класс (сдвиг) по некоторому линейному подпространству в E^n .

Определение. Выражение вида $f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_m$, где f_i — линейризуемая функция, $i = 1, \dots, m$, называется линейризованной дизъюнктивной нормальной формой (л. д. н. ф.). Число m называется длиной л. д. н. ф.

Определение. Л. д. н. ф. $f \equiv f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_m$ называется кратчайшей, если функция f не может быть реализована с помощью л. д. н. ф. меньшей длины.

Геометрически реализация функции f посредством л. д. н. ф. соответствует покрытию множества N_f системой смежных классов. Следует также отметить, что обычная д. н. ф. есть частный случай л. д. н. ф.

Очевидно, что всякая пара вершин из E^n составляет смежный класс и, следовательно, является множеством единиц некоторой линейризуемой функции. Поэтому, если N_f не состоит из одной-единственной вершины, то размерность смежного класса, содержащегося в N_f и не содержащегося ни в одном другом смежном классе в N_f , не меньше, чем 1. Т. е. каждая вершина из N_f содержится в смежном классе, состоящем из двух вершин.

2. Рассмотрим теперь следующую задачу. Обозначим через $k(n) = \max |A|$, где $|A|$ — мощность множества A , пробегающего все подмножества в E^n , не содержащие смежных классов размерности 2. Требуется оценить величину $k(n)$.

Теорема.

$$c \cdot 2^{\frac{n}{2}} + 1 \leq k(n) \leq \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2}, \text{ где}$$

$$c = \begin{cases} 1, & \text{при } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{при } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Доказательство. Верхняя оценка. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq E^n$ и не содержит смежных классов размерности 2. Т. е. для любой тройки α, β, γ вершин из A имеет место: $\alpha + \beta + \gamma \notin A$ (здесь $+$ — сложение по mod 2).

Рассмотрим множество всевозможных сумм вида $a_i + a_j + a_r$, где $r \neq j$ и $i, j \in \{2, 3, \dots, k\}$. Нетрудно проверить что все такие суммы попарно различны, ибо из $a_i + a_j + a_r = a_i + a_p + a_q$ следует $a_j + a_r + a_p + a_q = 0$. Если все a_i, a_j, a_q различны, то $a_j + a_r + a_p + a_q \in A$, что противоречит определению множества A . Если $a_i = a_p$, тогда $a_j = a_q$, т. е. тройки (a_i, a_j, a_r) и (a_i, a_p, a_q) совпадают. Всего имеем $\binom{k-1}{2} = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$ различных сумм вида $a_i + a_j + a_r \notin A$. Следовательно,

$$\frac{(k-1)(k-2)}{2} + k \leq 2^n.$$

Отсюда получаем $k^2 - k + 2 \leq 2 \cdot 2^n$ и $\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 2 \cdot 2^n - \frac{1}{4} \leq 2 \times \times 2^n$. Окончательно $k \leq \sqrt{2} \cdot 2^{n/2} + \frac{1}{2}$.

Нижняя оценка. Нижняя оценка получается прямым построением. Пусть $n \equiv 0 \pmod{2}$. Рассмотрим E^n в качестве конечного поля $GF(2^n)$ (см. (8)). Тогда имеем $2^n - 1 = (2^{n/2} - 1)(2^{n/2} + 1)$, и n является наименьшей степенью двойки такой, что $2^n \equiv 1 \pmod{2^{n/2} + 1}$, ибо при $2^s \equiv 1 \pmod{2^{n/2} + 1}$ число s делит n и в то же время $\frac{n}{2} < s$, поэтому $s = n$.

Обозначим через $\Omega(n)$ группу корней $(2^{n/2} + 1)$ -ой степени из единицы в поле $GF(2^n)$, т. е. $\Omega(n)$ — множество корней многочлена $x^{2^{n/2} + 1} - 1$. Очевидно (см. (8)), что $|\Omega(n)| = 2^{n/2} + 1$ и $\Omega(n)$ — циклическая подгруппа мультипликативной группы ненулевых элементов поля $GF(2^n)$, т. е. $\Omega(n) = \{1, \eta, \eta^2, \dots, \eta^{2^{n/2} + 1}\}$, где η — примитивный корень $(2^{n/2} + 1)$ -ой степени из единицы. Кроме того, степень расширения $GF(2)(\eta)$ над $GF(2)$ равна n , т. е. простое расширение $GF(2)(\eta)$ совпадает с $GF(2^n)$.

Покажем теперь, что $\Omega(n)$ не содержит смежных классов размерности 2.

Пусть x, y, z, w — различные элементы из $\Omega(n)$ и $x + y + z + w = 0$, т. е. они образуют смежный класс размерности 2. Из $x + y + z + w = 0$ следует $x + y + z = -w \in \Omega(n)$ и $(x + y + z)^{2^{n/2} + 1} = 1$. Тогда $1 = (x + y + z)(x + y + z)^{2^{n/2}} = (x + y + z)(x^{2^{n/2}} + y^{2^{n/2}} + z^{2^{n/2}})$ и ввиду $x, y, z \in \Omega(n)$ получаем $x^{2^{n/2}} = x^{-1}$, $y^{2^{n/2}} = y^{-1}$, $z^{2^{n/2}} = z^{-1}$. Итак, $(x + y + z) \times \times (x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}) = 1$.

Пусть $x = \eta^a$, $y = \eta^b$, $z = \eta^c$, где $0 \leq a < b < c \leq 2^{n/2}$. Тогда $(\eta^a + \eta^b + \eta^c)(\eta^{-a} + \eta^{-b} + \eta^{-c}) = 1$ и $1 + \eta^{a-b} + \eta^{a-c} + \eta^{b-c} + 1 + \eta^{b-a} + \eta^{c-a} + \eta^{c-b} + 1 = 1$, $\eta^{a-b} + \eta^{b-a} + \eta^{a-c} + \eta^{c-a} + \eta^{b-c} + \eta^{c-b} = 0$. Обозначим $p = b - a$, $q = c - a$. Ясно, что $p < q$ и $0 < p < q \leq 2^{n/2}$. Далее получаем $\eta^{-p} + \eta^p + \eta^{-q} + \eta^q + \eta^{p-q} + \eta^{q-p} = 0$. Умножим предыдущее равенство на η^{p+q} и получим

$$\eta^q + \eta^{2p+q} + \eta^p + \eta^{p+2q} + \eta^{2p} + \eta^{2q} = 0,$$

$$(\eta^p + \eta^q) + \eta^{p+q}(\eta^p + \eta^q) + (\eta^p + \eta^q)^2 = 0,$$

$$(\eta^p + \eta^q)(1 + \eta^p + \eta^q + \eta^{p+q}) = 0, \text{ но}$$

$1 + \eta^p + \eta^q + \eta^{p+q} = (1 + \eta^p)(1 + \eta^q)$, следовательно получаем $(\eta^p + \eta^q)(1 + \eta^p)(1 + \eta^q) = 0$, что невозможно, ибо $p \neq q$ и $0 < p < q \leq 2^{n/2}$, а η — примитивный корень $(2^{n/2} + 1)$ -ой степени из единицы.

Таким образом, $\Omega(n)$ не содержит смежного класса размерности 2 при $n \equiv 0 \pmod{2}$.

При $n \equiv 1 \pmod{2}$ аналогичное построение производится для $GF(2^{n-1})$, а далее множество $\Omega(n-1)$ погружается в один из $(n-1)$ -мерных интервалов в E^n и $|\Omega(n-1)| = \frac{2^{n/2}}{\sqrt{2}} + 1$.

Следовательно, $k(n) \geq c \cdot 2^{n/2} + 1$, где $c = 1$ при $n \equiv 0 \pmod 2$ и $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ при $n \equiv 1 \pmod 2$.

Теорема доказана.

Замечание 1. При $n \equiv 0 \pmod 4$ к $\Omega(n)$ можно добавить также и 0, ибо при $x + y + z = 0$ для $x, y, z \in \Omega(n)$ имеем $x + y \in \Omega(n)$ и $(x + y)^{2^{n/2} + 1} = 1$, т. е. $(x + y)(x^{-1} + y^{-1}) = 1$.

Пусть $x = \eta^{\alpha}$, $y = \eta^{\beta}$, $0 \leq \alpha < \beta \leq 2^{n/2}$ тогда $(\eta^{\alpha} + \eta^{\beta})(\eta^{-\alpha} + \eta^{-\beta}) = 1$ и $1 + \eta^{\alpha-\beta} + \eta^{\beta-\alpha} + 1 = 1$. Далее $\eta^{\alpha-\beta} + \eta^{\beta-\alpha} = 1$ умножим на $\eta^{\beta-\alpha}$ и получим $1 + \eta^{\beta-\alpha} + \eta^{2(\beta-\alpha)} = 0$. Последнее равенство умножим на $\eta^{\beta-\alpha} + 1 \neq 0$, тогда получим $\eta^{3(\beta-\alpha)} + 1 = 0$, следовательно, $3(\beta - \alpha) \equiv 0 \pmod{(2^{n/2} + 1)}$.

Однако наименьшее p такое, что $3p \equiv 0 \pmod{(2^{n/2} + 1)}$ — это $p = \frac{2^{n/2} + 1}{(2^{n/2} + 1, 3)}$, где $(2^{n/2} + 1, 3)$ — наибольший общий делитель чисел $2^{n/2} + 1$

и 3. Поэтому ввиду $n \equiv 0 \pmod 4$ имеем $\frac{n}{2} \equiv 0 \pmod 2$ и $2^{n/2} + 1$ не делится на 3. Следовательно, $p = 2^{n/2} + 1$, но $0 < \beta - \alpha < p = 2^{n/2} + 1$ и $\eta^{3(\beta - \alpha)} \neq 1$ и получено противоречие.

Замечание 2. Естественным образом получается также решение двойственной задачи о „прокалывании“ двумерных смежных классов в E^n . В самом деле, пусть $l(n)$ — наименьшая мощность множества вершин из E^n , пересекающегося с любым двумерным смежным классом в E^n . Очевидно, что $k(n) + l(n) = 2^n$, поэтому $2^n - O(2^{n/2}) \leq l(n) \leq 2^n$, т. е. получается асимптотика для $l(n)$.

3. Доказанная в предыдущем пункте теорема свидетельствует о том, что кратчайшее покрытие множества единиц функции, состоящего только лишь из одномерных смежных классов, имеет длину порядка $O(2^{n/2})$. Следовательно, функция наибольшей сложности в классе л. д. н. ф. не может состоять из смежных классов наименьшей возможной размерности, ибо, как это следует из (3), почти все функции из $P(n)$ имеют л. д. н. ф.-реализацию длины порядка не меньшего, чем $O\left(\frac{2^n}{n \log_2 n}\right)$. Таким образом, получено еще одно су-

щественное отличие задачи кратчайшей л. д. н. ф.-реализации функции из $P(n)$ от задачи реализации булевых функций обычными д. н. ф. Следует также отметить, что функция, построенная в теореме (с множеством единиц, совпадающим с $\Omega(n)$ — множеством корней $(2^{n/2} + 1)$ -ой степени из единицы в $GF(2^n)$), является прямым аналогом „счетчика четности“ для класса д. н. ф. над линейными функциями.

Автор благодарит чл.-корр. АН СССР Ю. И. Журавлева за полезные обсуждения работы.

Ереванский государственный университет

Դժային ֆունկցիաների նկատմամբ դիֆյունկտիվ նորմալ ձևերով
բուլյան ֆունկցիաների իրականացման բարդության հետ կապված
որոշ էֆստրեմալ խնդրի վերաբերյալ

Դիցուք E^n -ը n -չափանի միավոր խորանարդի գագաթների բազմությունն է, որը դիտարկվում է որպես n -չափանի գծային տարածություն $GF(2)$ դաշտի նկատմամբ: Նշանակենք՝ $k(n) = \max |A|$, որտեղ $A \subseteq E^n$ և $\alpha, \beta, \gamma \in A \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma \in A$:

Աշխատանքում ասպարուցված է, որ $c \cdot 2^{n/2} + 1 \leq k(n) \leq \sqrt{2} \cdot 2^{n/2} + 0,5$,
որտեղ $c = 1$ երբ $n \equiv 0 \pmod{2}$, և $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ երբ $n \equiv 1 \pmod{2}$:

ЛИТЕРАТУРА—ԻՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. А. Алексанян, ДАН АрмССР, т. 84, № 5, с. 195—197 (1987). ² А. А. Алексанян, ДАН АрмССР, т. 87, № 1, с. 5—9 (1988). ³ А. А. Алексанян, ДАН СССР, т. 304, № 4, с. 781—784 (1989). ⁴ А. А. Алексанян, Кибернетика, № 1, с. 9—14, 1989. ⁵ А. А. Алексанян, ДАН АрмССР, т. 86, № 5, с. 213—217 (1988). ⁶ А. А. Алексанян, Журн. вычислительной математики и мат. физики, т. 29, № 11 (1989). ⁷ Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. 1, Наука, М., 1974. ⁸ Р. Лидл, Г. Нидеррайтер. Конечные поля, в 2-х томах, Мир, М., 1988.

УДК 517.982.37

МАТЕМАТИКА

Р. М. Мартиросян

Об одном условии разрешимости проблемы моментов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талалайном 16/1 1990)

Пусть на измеримом пространстве (X, Σ) задана положительная мера μ . Если $S \in \Sigma$, то под Σ_S будем понимать класс всех измеримых подмножеств множества S . Будем также считать, что измеримые функции, заданные на S , принимают значения из поля K , где K — поле комплексных или поле вещественных чисел. При этом через $L_1(S, \mu)$ будем обозначать пространство всех измеримых на S функций, которые суммируемы по мере μ_S , являющейся сужением μ на Σ_S . Однако всюду ниже мы будем опускать указание на такое сужение.

Теорема 1. Пусть последовательность $\{h_n, n = 1, 2, \dots\}$ измеримых функций, принимающих значения из поля K , удовлетворяет условиям:

- 1) мера множества $\{x \in X : h_1(x) \neq 0\}$ положительна,
- 2) если $n \geq 2$, то для любого $M > 0$ существует измеримое множество $E_{M,n} \in \Sigma$, на котором все функции $h_i, i = 1, 2, \dots$, суммируемы и

$$\int_{E_{M,n}} |h_n| d\mu > M \int_{E_{M,n}} \{|h_1| + \dots + |h_{n-1}|\} d\mu.$$

Тогда для любой числовой последовательности $\{w_n \in K, n = 1, 2, \dots\}$ найдется измеримая функция W такая, что все произведения $h_n W$ суммируемы на X и

$$\int_X h_n W d\mu = w_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Положим

$$E_n = \{x \in X : |h_1(x)| + \dots + |h_n(x)| > 0\}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

и рассмотрим векторное пространство L всех измеримых функций φ , для которых произведения

$$\{|h_1(x)| + \dots + |h_n(x)|\} \varphi(x)$$

суммируемы при каждом $n = 1, 2, \dots$. Введем в L возрастающую последовательность полунорм ρ_n , полагая для каждого $n = 1, 2, \dots$

$$\rho_n(\varphi) = \int_X \{|h_1(x)| + \dots + |h_n(x)|\} |\varphi(x)| d\mu, \quad \varphi \in L. \quad (2)$$

Рассмотрим далее в полученном локально выпуклом пространстве E последовательность $\{l_n, n=1, 2, \dots\}$ линейных функционалов, полагая

$$l_n(\varphi) = \int_X h_n \varphi d\mu, \quad \varphi \in E, \quad n=1, 2, \dots \quad (3)$$

Для доказательства теоремы мы воспользуемся известным в теории локально выпуклых пространств предложением (см., например, (1), с. 5), состоящим в том, что если пространство E полно и каждый функционал l_n непрерывен по полунорме p_n , а при $n \geq 2$ разрывен по полунорме p_{n-1} , то для любой последовательности $\{w_n \in K, n=1, 2, \dots\}$ найдется элемент $\varphi \in E$, для которого

$$l_n(\varphi) = w_n, \quad n=1, 2, \dots \quad (4)$$

При этом предполагается, что все функционалы l_n ненулевые, а полунормы p_n образуют неубывающую последовательность $p_1(\varphi) \leq p_2(\varphi) \leq p_3(\varphi) \leq \dots, \varphi \in E$.

Полнота же пространства E означает здесь, что для любой последовательности $\{\varphi_k, k=1, 2, \dots\} \subset E$, фундаментальной по каждой полунорме p_n , существует элемент $\varphi \in E$ такой, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_n(\varphi - \varphi_k) = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

В рассматриваемом случае из условий теоремы следует, что все функционалы l_n ненулевые, а полунормы p_n , очевидно, образуют неубывающую последовательность. Докажем полноту E . Пусть последовательность $\{\varphi_k \in E, k=1, 2, \dots\}$ фундаментальна по каждой полунорме p_n . Это означает, что при каждом $n=1, 2, \dots$ последовательность функций $(|h_1| + \dots + |h_n|)\varphi_k, k=1, 2, \dots$ фундаментальна в пространстве $L_1(\tau_n, \mu)$. Если эта последовательность сходится в среднем к функции $\Psi_n \in L_1(\tau_n, \mu)$, то положим

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} \frac{\Psi_n(x)}{|h_1(x)| + \dots + |h_n(x)|}, & x \in \tau_n, \\ 0, & x \in X \setminus \tau_n, \end{cases}$$

где n пробегает значения $1, 2, \dots$. Очевидно, Φ_n измеримы и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \{|h_1| + \dots + |h_n| |\varphi_k - \Phi_n| d\mu = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

Из этого соотношения нетрудно усмотреть, что функции Φ_n определяются на τ_n однозначно с точностью до значений на множествах нулевой меры. Поэтому, принимая во внимание, что $\tau_n \subset \tau_m$ при $n < m$, можно принять, что $\Phi_n(x) = \Phi_m(x)$ для всех $x \in \tau_n$. Положим теперь

$$\tau = \bigcup_n \tau_n$$

и зададим измеримую функцию Φ на X следующим образом. Если $x \in \tau$, то $x \in \tau_n$ при некотором натуральном n . Положим $\Phi(x) = \Phi_n(x)$. Если же $x \in X \setminus \tau$, то положим $\Phi(x) = 0$. Очевидно, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \{|h_1| + \dots + |h_n| |\varphi_k - \Phi| d\mu = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

Отсюда стандартные выкладки приводят к включению $\varphi \in E$, поэтому пространство E полно. Заметим далее, что, как нетрудно видеть, каждый функционал l_n непрерывен по полунорме p_n . Докажем разрывность функционала l_n по полунорме p_{n-1} при $n \geq 2$. Для этого воспользуемся условием 2 теоремы, полагая при заданных $n \geq 2$ и $M > 0$

$$\varphi_{M,n}(x) = \begin{cases} \exp(-i \arg h_n(x)), & x \in e_{M,n}, \\ 0, & x \notin e_{M,n}. \end{cases}$$

Из упомянутого условия следует, что $\varphi_{M,n}$ принадлежит пространству E , ибо все h_i , $i=1, 2, \dots$, суммируемы на $e_{M,n}$. Имеем далее

$$\begin{aligned} l_n(\varphi_{M,n}) &= \int_{e_{M,n}} |h_n| d\mu > M \int_{e_{M,n}} \{|h_1| + \dots + |h_{n-1}|\} d\mu = \\ &= M \int_X \{|h_1| + \dots + |h_{n-1}|\} |\varphi_{M,n}| d\mu = M p_{n-1}(\varphi_{M,n}), \end{aligned}$$

что и доказывает разрывность l_n по полунорме p_{n-1} . Поэтому, согласно сказанному выше, теорема доказана. Отметим один ее важный частный случай.

Теорема 2. Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} u_k = w_i, \quad i=1, 2, \dots, \quad (5)$$

где a_{ik} принадлежат полю K , $i, k=1, 2, \dots$. Если

- 1) не все коэффициенты a_{ik} первого из этих уравнений равны нулю,
- 2) для любого $M > 0$ и любого $n \geq 2$ существует k такое, что

$$|a_{nk}| > M \sum_{i=1}^{n-1} |a_{ik}|,$$

то для любой последовательности $\{w_i \in K, i=1, 2, \dots\}$ найдется последовательность $\{u_k \in K, k=1, 2, \dots\}$, удовлетворяющая системе уравнений (5) и такая, что все ряды в левых частях этой системы сходятся абсолютно.

Доказательство. Для доказательства примем в качестве X в предыдущей теореме какое-нибудь счетное множество. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, и на σ -алгебре всех его подмножеств зададим меру μ , полагая меру одноточечных подмножеств равной единице (можно было бы рассмотреть и конечную меру, полагая, например, $\mu(\{x_k\}) = \frac{1}{k^2}$, $k=1, 2, \dots$, однако в предыдущей теореме конечность меры не предполагалась). Пусть далее функции $h_n: X \rightarrow K$, $n=1, 2, \dots$, определяются соотношениями $h_n(x_k) = a_{nk}$, $k=1, 2, \dots$. Очевидно, условие 1 означает, что $\mu\{x \in X: h_1(x) \neq 0\} > 0$. Далее, если выполнено условие 2, то обозначим через $e_{M,n}$ одноточечное множество $\{x_k\}$. При этом все функции h_i , $i=1, 2, \dots$, окажутся суммируемыми на

множестве $e_{m,n}$ и условие 2 предыдущей теоремы будет выполнено. Если W — решение соответствующей проблемы моментов, то полагая $u_k = W(x_k)$, $k = 1, 2, \dots$, мы получим решение системы (5), причем все ряды в левых частях этой системы будут сходиться абсолютно в силу суммируемости функций $h_n W$, $n = 1, 2, \dots$.

Заметим, что утверждение теоремы 2 при более ограничительных условиях, а именно в предположении, что бесчисленное множество коэффициентов a_{ik} первого из уравнений системы (5) отличны от нуля, принадлежит Г. Пойа (см., например, ⁽²⁾, с. 44).

Ереванский государственный
университет

2. ԽՆԴԱԲԵՐՈՅԱԼ

Մոմենտների պրոբլեմի լուծելիության մի պայմանի մասին

(X, Σ, μ) չափով օժտված տարածության վրա դիտարկվում է h_n չափելի ֆունկցիաների այնպիսի հաջորդականություն, որ կամայական h_n ֆունկցիայի մոդուլի միջինը ցանկացած չափով վերազանցում է նախորդ ֆունկցիաների մոդուլների գումարի միջինը համապատասխան բազմությունների վրա: Աշխատանքում ապացուցվում է, որ եթե h_1 -ը համարժեք չէ զրոյի, ապա հետևյալ մոմենտների պրոբլեմը

$$\int_X h_n W d\mu = w_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

ունի լուծում ցանկացած $\{w_n\}$ թվային հաջորդականության համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ Р. М. Мартиросян, Дополнительные главы математического анализа. Изд-во ЕГУ, 1983. ² Р. Г. Кук, Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, М., Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1960.

УДК 519.61

МАТЕМАТИКА

Г. В. Агемян

Экономичный алгоритм решения интегрального уравнения с почти разностным ядром

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Б. Нерсисяном 24/1 1990)

В работе ⁽¹⁾ предложен новый алгоритм QR -факторизации (ортогонального разложения) скалярных теплицевых матриц полного ранга сложности не более $9mt + \frac{27}{2}n^2$ (для $(m \times n)$ матрицы). В работе

⁽²⁾ этот алгоритм обобщен в случае блочных матриц малого теплицевого ранга. В случае $(m \times n)$ -матрицы $(m \geq n)$ полного ранга с $(l \times l)$ блоками общего вида сложность этого алгоритма равна $9mnl + 3n^2l + 10mnkl + 14n^2kl + 8n^3k^2l$, где k есть теплицев ранг матрицы. Надо отметить, что для блочно-теплицевых матриц известны несколько менее трудоемкие алгоритмы обращения, однако несомненным (и иногда решающим) преимуществом алгоритмов работ ^(1,2) является освобождение от условий невырожденности главных миноров. Кроме того, последние алгоритмы дают возможность экономичного решения задачи наименьших квадратов $Ax \cong b$. Отметим, что для матриц малого теплицевого ранга прямое применение алгоритма работы ⁽²⁾ общего вида менее трудоемко, чем приведение матрицы малого теплицевого ранга к блочно-теплицевой матрице (с блоками $(k+l) \times (k+l)$, см. ⁽³⁾) с применением алгоритма работы ⁽¹⁾ при $k=0$.

В работе ⁽¹⁾ с помощью предложенного алгоритма с высокой точностью решены интегральные уравнения на конечном отрезке с разностными ядрами.

В данной работе с помощью алгоритма ⁽²⁾ решено интегральное уравнение на конечном отрезке с „почти разностным“ ядром. Отметим, что и в работе ⁽²⁾ и в данной работе для дискретизации интегрального уравнения применена квадратурная формула Гаусса ⁽⁴⁾). Численный эксперимент проведен на ЭВМ-ЕС-10-35.

1. Алгоритм решения задачи наименьших квадратов. Пусть A — блочная матрица полного ранга, удовлетворяющая условию

$$A = \|a_{ij}\|; a_{ij} = a_{i-1,j-1} + \sum_{s=1}^k \lambda_{i-1}^{(s)} x_{j-1}^{(s)}, \quad (1)$$

где a_{ij} ; $\lambda_i^{(s)}$; $x_j^{(s)}$ — $(l \times l)$ матрицы; $i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$; $n \leq m$; $k \ll n$.

Заметим, что если k есть минимально возможное число в представлении матрицы A , то в скалярном случае это — теплицев ранг

матрицы A (см. (1)). Обозначим: $E_l - (l \times l)$ единичная матрица, 0 — нулевая матрица, Z_0 — квадратная матрица следующего вида:

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & E_l \\ E_l & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & E_l & 0 \end{bmatrix}$$

Z_1 и $Z = Z_1 + Z_0$ есть $(m + 2k(n-1))l \times (m + 2k(n-1))l$ матрицы, где

$$Z_1(k(n-1) + 1 + i, m + 2k(n-1) - (j-1)n) = \begin{cases} \lambda_i^{(j)} & \text{при } i = 1, 2, \dots, m-1; \\ & j = 1, 2, \dots, k \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отметим, что если $\lambda_i^{(s)} = 0$ для любого i и s , то нужно принять $k = 1$. Далее обозначим:

$$W = \text{diag} \left[\overbrace{0, \dots, 0}^{k(n-1)l}, \overbrace{1, \dots, 1}^{ml}, \overbrace{0, \dots, 0}^{k(n-1)l} \right]$$

$$\lambda^{(j)} = \left[\overbrace{0, \dots, 0}^{k(n-1)l}, \lambda_1^{(j)T}, \lambda_2^{(j)T}, \dots, \lambda_{m-1}^{(j)T}, \overbrace{0, \dots, 0}^{lk(n-1)+l} \right]^T; \quad j = 1, 2, \dots, k$$

$$t = \left[x_{n-1}^{(2)T}, \dots, x_{n-1}^{(k)T}, a_{1n}^T, \dots, a_{12}^T, a_{11}^T, \dots, a_{m1}^T, x_{n-1}^{(k)T}, \dots, \right.$$

$$\left. x_1^{(k)T}, \dots, x_{n-1}^{(k)T}, \dots, x_1^{(k)T} \right]^T; \quad x^* W y = |x, y|.$$

В этих обозначениях алгоритм решения задачи наименьших квадратов $Ax_0 \cong b_0$ выглядит следующим образом (доказательство см. в (1)).

: INITIALIZATIONS:

$$q_1 = t; \quad L = t; \quad \hat{q} = q_1;$$

$$p_1 = [E_l, 0, \dots, 0]^T; \quad \hat{p} = p_1;$$

$$f = b = c^{(p)} = d^{(p)} = 0; \quad \Phi = \beta = \Phi^{(p)} = \beta^{(p)} = 0; \quad p = 1, 2, \dots, k;$$

$$x = [q_1, q_1]^{-1}; \quad x_{p\mu} = [\lambda^{(p)}, \lambda^{(\mu)}]; \quad p, \mu = 1, 2, \dots, k;$$

$$a = [q_{k(n-1)+1,1}^T, q_{k(n-1)+2,1}^T, \dots, q_{k(n-1)+m,1}^T];$$

$$x_0 = p_1 x a b_0;$$

: MAIN LOOP:

For $j=2$ TO n DO

BEGIN

$$y = -[q_1, Zq_{j-1}]; \quad v = q_{m+k(n-1),j-1};$$

$$u = -q_{k(n-1),j-1};$$

For $p=1$ TO K DO;

$$v_p = -q_{m+2k(n-1)-(p-1)n,j-1}; \quad u_p = -[\lambda^{(p)}, q_{j-1}] + \sum_{\mu=1}^k x_{p\mu} v_p;$$

END

$$q_j = Zq_{j-1} + \hat{q}xy + fv + bu + \sum_{p=1}^k c^{(p)}v_p + \sum_{p=1}^k d^{(p)}u_p;$$

$$\rho_j = Z_0 \rho_{j-1} + \hat{\rho} \lambda y + \Phi v + \beta u + \sum_{p=1}^k \Phi^{(p)} u_p + \sum_{p=1}^k \beta^{(p)} u_p;$$

$$a = [q_{k(n-1)+1,j}^T, q_{k(n-1)+2,j}^T, \dots, q_{k(n-1)+m,j}^T];$$

$$y = [q_j, q_j]^{-1}; \quad x_0 = x_0 + \rho_j y a b_0;$$

$$P = Z^{-1}(q_j - t \rho_{1j});$$

$$\text{For } p=1 \text{ TO } k \text{ DO};$$

$$v_p = [P, \lambda^{(p)}]; \quad c^{(p)} = c^{(p)} + q_j y v_p; \quad \Phi^{(p)} = \Phi^{(p)} + \rho_j y v_p;$$

$$d^{(p)} = d^{(p)} + q_j y P_{m+2k(n-1)-(p-1)n,j}^*;$$

$$\beta^{(p)} = \beta^{(p)} + \rho_j y P_{m+2k(n-1)-(p-1)n,j}^*;$$

END

$$f = f + q_j y P_{m+k(n-1),j}^*; \quad \Phi = \Phi + \rho_j y P_{m+k(n-1),j}^*;$$

$$b = b + q_j y P_{k(n-1),j}^*; \quad \beta = \beta + \rho_j y P_{k(n-1),j}^*;$$

$$L = ZL; \quad \varepsilon = -[L, \hat{q}]; \quad \hat{q} = \hat{q} + q_j y \varepsilon; \quad \hat{\rho} = \hat{\rho} + \rho_j y \varepsilon;$$

END

2. Решение интегральных уравнений с „почти разностным“ ядром. Пусть дано интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^1 K(x, t) y(t) dt + f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

где $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|$; $i, j = 1, 2, \dots, n$

$$y(x) = [y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]^T; \quad f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$$

и пусть ядро $K(x, t)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial x} = \sum_{s=1}^k \lambda^{(s)}(x) x^{(s)}(t), \quad (3)$$

где

$$\lambda^{(s)}(x) = \|\lambda_{ij}^{(s)}(x)\|; \quad x^{(s)}(t) = \|x_{ij}^{(s)}(t)\|; \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Все параметры уравнения будем считать имеющими требуемую ниже гладкость.

Если дискретизировать данное уравнение с применением формулы Гаусса $2m$ -ого порядка ($m \geq 2$), то, используя (3), нетрудно получить

$$K(x_{i+1}, x_{j+1}) - K(x_i, x_j) = \frac{h}{2} \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^m A_p \bar{\lambda}_i^{(s)} \bar{x}_j^{(s)} + O(h^{2m}),$$

где A_p — соответствующие коэффициенты, $\bar{\lambda}_i^{(s)}$, $\bar{x}_j^{(s)}$ определяются через значения $\lambda^{(s)}$, $x^{(s)}$ в соответствующих точках, а h есть шаг дискретизации ($h \rightarrow 0$) и $x_{i+1} = x_i + h$. В этом случае блоки будут $(mn \times mn)$ -матрицами.

Остановимся на конкретном уравнении с ядром

$$K(x, t) = \begin{cases} -\frac{1}{2(t+1)^2}, & x = t \\ \frac{1}{(x-t)^2} \left(\frac{x-t}{x+1} - \ln \frac{x+1}{t+1} \right), & x \neq t. \end{cases} \quad (4)$$

Если считать, что $y(x) \equiv 1$, то

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \lambda(2\ln 2 - 1), & x = 0 \\ 1 + \lambda/2 - \frac{\lambda \ln 2}{2}, & x = 1 \\ 1 + \lambda \left(\frac{\ln 2}{x+1} + \ln \left(\frac{x+1}{2} \right) (x-1)^{-1} - \frac{\ln(x+1)}{x} \right), & x \neq 0, x \neq 1. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что в данном случае

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \right) K(x, t) = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{t+1}. \quad (5)$$

Кроме того, ядро (4) явно невырожденное, что исключает простые экономичные методы решения уравнения (2). Данное уравнение дискретизировано с применением формулы Гаусса четвертого порядка. Полученная система решена контрольным методом Гаусса с построчным выбором ведущего элемента и, после приведения с помощью (5) к системе, матрица которой удовлетворяет условию (1), — вышеизложенным алгоритмом. В таблице приведены средние относительные погрешности при четырех значениях λ .

N	-2		4		-10		20	
	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2
4	$2.36 \cdot 10^{-6}$	$2.94 \cdot 10^{-5}$	$1.21 \cdot 10^{-6}$	$2.89 \cdot 10^{-5}$	$3.92 \cdot 10^{-6}$	$8.65 \cdot 10^{-5}$	$2.20 \cdot 10^{-6}$	$1.32 \cdot 10^{-4}$
8	$3.13 \cdot 10^{-7}$	$2.81 \cdot 10^{-5}$	$1.57 \cdot 10^{-7}$	$2.34 \cdot 10^{-5}$	$5.28 \cdot 10^{-7}$	$7.35 \cdot 10^{-5}$	$2.62 \cdot 10^{-7}$	$1.01 \cdot 10^{-5}$
16	$1.82 \cdot 10^{-7}$	$8.49 \cdot 10^{-6}$	$8.15 \cdot 10^{-8}$	$1.31 \cdot 10^{-7}$	$3.13 \cdot 10^{-7}$	$3.59 \cdot 10^{-5}$	$1.55 \cdot 10^{-7}$	$6.64 \cdot 10^{-7}$
32	$1.72 \cdot 10^{-7}$	$1.57 \cdot 10^{-7}$	$8.72 \cdot 10^{-8}$	$7.90 \cdot 10^{-8}$	$3.00 \cdot 10^{-7}$	$2.66 \cdot 10^{-7}$	$1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.32 \cdot 10^{-7}$
64	$1.73 \cdot 10^{-7}$	$1.72 \cdot 10^{-7}$	$8.70 \cdot 10^{-8}$	$8.64 \cdot 10^{-8}$	$2.99 \cdot 10^{-7}$	$2.96 \cdot 10^{-7}$	$1.49 \cdot 10^{-7}$	$1.48 \cdot 10^{-7}$

В таблице через N обозначено количество отрезков, на которые делится интервал $(0,1)$, A_1 —метод Гаусса, A_2 —предложенный метод.

Как видим, метод A_2 точностью не уступает методу A_1 . Соотношение затраченного времени T_1/T_2 (T_1 —время выполнения алгоритма A_1 , T_2 —время выполнения алгоритма A_2) при $N \rightarrow \infty$ имеет порядок $\frac{1}{132} N$.

Համարյա տարբերակային կորիզով ինտեգրալ հավասարման լուծման
խնայողական ալգորիթ

Եթե Լերորդի սեռի ինտեգրալ հավասարման կորիզը բավարարում է
հետևյալ պայմանին

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)K(x, t) = \sum_{s=1}^k \lambda^{(s)} \chi^{(s)}(t)$$

սույա կասենք, որ այն համարյա տարբերակային է (քանի որ $\lambda^{(s)}, \chi^{(s)} \equiv 0$
դեպքում այն տարբերակային է՝ $K = K(x - t)$):

Աշխատանքում մշակված և փորձարկված է բարձր ճշգրտության խնայողական
ալգորիթի այդպիսի հավասարումները լուծելու համար:

Հիմքում ընկած է (2) աշխատանքում առաջարկված օրթոգոնալ վերլուծության
ալգորիթը:

ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

- ¹ G. Cybenko, *Siam J. sci. stat. comput.*, v. 8 p. 734–740 (1987). ² Г. В. Агекян, А. Б. Нерсисян, Блочно-ортогональное разложение матриц теплицева типа и быстрое решение некоторых интегральных уравнений. Депонировано в Арм. ИИНТИ № 64–Ар. 89. 1989. ³ Г. И. Марчук, *Вычислительные процессы и системы*, Наука, М., вып. 1, 1983. ⁴ И. П. Мысовских, *Лекции по методам вычислений*, Физматгиз, М., 1962.

УДК 512.27

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

В. К. Брутян

Преобразование сложной системы в полностью управляемую и наблюдаемую подсистемы

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 23/1 1990)

Введение. В настоящее время процесс алгебраизации теории управления имеет большое практическое значение (¹⁻³). Теоретическое значение этого процесса состоит в том, что с помощью алгебраических методов удастся описать точное решение задачи синтеза системы управления, причем сама структура системы получается в результате решения задачи без каких-либо упрощений интуитивного порядка (⁴⁻⁷). В данной статье предлагается метод эквивалентного преобразования автоматической системы в особенно удобную форму полностью управляемой и полностью наблюдаемой подсистемы. Приводятся условия для эквивалентного преобразования нестационарной системы. Подобный метод позволяет эффективно решать задачи синтеза в рамках сложных систем управления, поскольку при алгебраическом методе представляется естественным при описании задачи синтеза включить параметры, характеризующие неопределенность и неустойчивость переменных системы.

Постановка задачи. Рассмотрим автоматическую нестационарную систему, описываемую уравнениями (^{8,9})

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A^1(t)x + D^1(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \\ y &= H^1(t)x, \quad t \in [t_0, T] = I, \end{aligned} \quad (1)$$

где x — n -мерный непрерывный вектор состояния системы; u — r -мерный непрерывный вектор управления; y — m -мерный непрерывный вектор результатов наблюдений; $A^1(t)$, $D^1(t)$ и $H^1(t)$ — ограниченные и непрерывные $n \times n$, $n \times r$ и $m \times n$ -мерные матрицы на интервале I , элементы которых непрерывно дифференцируемы $n-2$, $n-1$ и $n-1$ раз, соответственно. По обозначению верхний индекс 1 матриц $A^1 = A^1(t)$, $D^1 = D^1(t)$ и $H^1 = H^1(t)$ соответствует процессу $x(t)$.

Из современной теории управления известно, что необходимым и достаточным условием полной управляемости (система может быть переведена из любого состояния $x(t_0)$ в любое состояние $x(T)$ при любом t_0 и любом $T > t_0$) является то, что матрица управляемости $P^1 = P^1(t)$ имеет ранг n в интервале I (^{8,9}). Здесь предполагается, что критерий управляемости принимает форму. Пусть заданы матрицы системы $\{P_1^1, P_2^1, \dots, P_n^1\}$. Составим матрицу $P^1 = [P_1^1 P_2^1 \dots P_n^1]$, размеров $n \times nr$, первые r столбцов которой совпадают со столбцами

матрицы D^I , т. е. $P_i^I \rightarrow D^I$, а последние r столбцов матрицы P^I образованы матрицей $-A^I P_i^I + P_{i+1}^I$, т. е. $P_{i+1}^I = -A^I P_i^I + P_i^I$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Аналогично составляется матрица $R^I = R^I(t)$ полной наблюдаемости $R^I = [R_1^I R_2^I \dots R_n^I]$, где $R_1^I = H^I$, $R_{i+1}^I = R_i^I A^I + R_i^I$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, штрих означает транспонирование.

Требуется эквивалентным преобразованием исходную систему (1) привести к форме, где имеются полностью управляемая и полностью наблюдаемая подсистемы на интервале I . Эквивалентным преобразованием $Q = Q(t)$ является произвольная, вещественная, дифференцируемая и невырожденная матрица размера $n \times n$ такая, что подстановка $v = Qx$ в (1) приводит к уравнениям

$$\dot{v} = A^{II} v + D^{II} u, \quad v(t_0) = v_0,$$

$$y = H^{II} v,$$

где $A^{II} = [QA^I + \dot{Q}]Q^{-1}$, $D^{II} = QD^I$, $H^{II} = H^I Q^{-1}$.

Здесь следует заметить, что верхний индекс II матриц A^{II} , D^{II} и H^{II} определяет необходимую, т. е. требуемую структуру переменных $v(t)$ преобразованного состояния (см. ниже формулу (4)). Можно показать, что преобразованные матрицы полной управляемости и полной наблюдаемости определяются соотношениями

$$P^{II} = Q P^I, \quad (2)$$

$$R^{II} = R^I Q^{-1}, \quad (3)$$

и так как матрица Q невырожденная, то $\text{ранг } P^{II} = \text{ранг } P^I$, $\text{ранг } R^{II} = \text{ранг } R^I$. Следовательно, при данном преобразовании полная управляемость и полная наблюдаемость не теряются.

Преобразование нестационарной системы к виду управляемой и наблюдаемой подсистемы. Требуется привести (1) к следующей форме

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{II} & a_{12}^{II} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{II} & 0 & 0 \\ a_{31}^{II} & a_{32}^{II} & a_{33}^{II} & a_{34}^{II} \\ 0 & a_{42}^{II} & 0 & a_{44}^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11}^{II} \\ 0 \\ d_{31}^{II} \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (4)$$

$$y = [h_1^{II} \ h_2^{II} \ 0 \ 0] v,$$

где элементы $a_{ij}^{II} (i, j = \overline{1; 4})$ сами являются матрицами, а компоненты d_i , h_i — векторы соответствующих размеров, v_i есть n_i -мерный вектор, причем подсистема

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{II} & 0 \\ a_{31}^{II} & a_{33}^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11}^{II} \\ d_{31}^{II} \end{bmatrix} u \quad (5)$$

имеет матрицу управляемости, для которой

$$\text{ранг} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{13} \\ P_{31} & P_{33} \end{bmatrix} = n_1 + n_3 = n,$$

а подсистема

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{II} & a_{12}^{II} \\ 0 & a_{22}^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} h_1^{II} & h_2^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

имеет матрицу наблюдаемости, для которой

$$\text{ранг} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = n_1 + n_2 \leq n.$$

Новая форма (4) обладает определенными преимуществами, так как подсистема (5) является полностью управляемой, а подсистема (6) полностью наблюдаемой. Из уравнений (4) следует, что переменные v_2 и v_4 не зависят от управлений, а результат наблюдений не зависит от переменных v_2 и v_4 . Это означает, что по переменным v_2 и v_4 система (4) неуправляема, а по переменным v_2 и v_4 ненаблюдаема.

Теорема. Автоматическая система (1) приводится к форме (4) с помощью преобразования Q тогда и только тогда, когда

а) матрица P^I имеет ранг $(n_1 + n_2)$ и может быть представлена в виде

$$P^I = \varphi_1 G_1 + \varphi_2 G_2,$$

а матрица R^I имеет ранг $(n_1 + n_2)$ и может быть представлена в виде

$$R^I = L_1 \psi_1 + L_2 \psi_2;$$

б) матрицы G_i и L_i определяются как

$$G_i = [g_{i1} \ g_{i2} \ g_{i3} \ g_{i4}], \quad L_i = [l'_{i1} \ l'_{i2} \ l'_{i3} \ l'_{i4}],$$

где g_{ij} и l'_{ij} матрицы размеров $n_i \times n_j$ и $n_j \times n_i$, соответственно. Кроме того, матрицы ψ_i и φ_i — дифференцируемые матрицы размеров $n_i \times n$ и $n \times n_i$ ранга n_i , причем имеет место соотношение $\psi_i \varphi_j = \delta_{ij} I_{n_i}$, где δ_{ij} есть дельта-символ Кронекера, а I_{n_i} — единичная матрица размера $n_i \times n_i$, $i, j = \overline{1; 4}$.

в) удовлетворяются соотношения

$$\text{ранг} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = n_1 + n_2, \quad \text{ранг} \begin{bmatrix} l'_{11} & l'_{12} \\ l'_{21} & l'_{22} \end{bmatrix} = n_1 + n_2. \quad (7)$$

Доказательство теоремы приведено ниже.

Построение преобразующей матрицы Q . Процедуру построения матрицы преобразования Q можно сформулировать следующим образом.

1. Разложить на составляющие произведение $L_1 G_1 = R^I P^I$ и определить матрицы G_1 и L_1 .

2. Решить уравнения $\psi_1 P^I = G_1$ и $R^I \varphi_1 = L_1$ относительно ψ_1 и φ_1 .

3. Разложить на составляющие равенства

$$P^I - \varphi_1 G_1 = \varphi_2 G_2 \quad \text{и} \quad R^I - L_1 \psi_1 = L_2 \psi_2$$

и определить из них L_2 , ψ_2 , φ_2 и G_2 .

4. Перейти от ψ_2 к φ_2 .

5. Найти матрицу φ_4 как совокупность из n_4 дифференцируемых столбцов, обеспечивая невырожденность матрицы $Q^{-1} = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4]$.

Пример. Привести к управляемой и наблюдаемой форме сис-

тому вида (1), где $a_{11}^1 = -2$, $a_{12}^1 = t+3$, $a_{13}^1 = -a_{44}^1 = -d_1^1 = -t$, $a_{14}^1 = t^3 - 3t + 1$, $a_{22}^1 = h_4^1 = -1$, $a_{24}^1 = -3$, $a_{32}^1 = d_2^1 = 2$, $a_{34}^1 = t^3 - 2t - 1$, $h_2^1 = t^3$, $a_{41}^1 = a_{23}^1 = a_{31}^1 = a_{32}^1 = a_{41}^1 = a_{42}^1 = a_{43}^1 = h_3^1 = h_4^1 = 0$. В этом случае имеем

$$P^1 = -2 \begin{bmatrix} -t/2 & 2,5 & 1/2 + 8 & 3t + 20 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R^1 = - \begin{bmatrix} 0 & -t^2 & 0 & 1 \\ 0 & t(t+2) & 0 & t(3t+1) \\ 0 & -t(t-4)-2 & 0 & (3t+1)(t^3-3t+3)-44 \\ 0 & t(t-6)+6 & 0 & (t-1)(3t^3+t^2+25t+10)+28 \end{bmatrix}.$$

Отсюда получим

$$L_1 = - \begin{bmatrix} -t^2 \\ t(t+2) \\ -t(t-4)-2 \\ t(t-6)+6 \end{bmatrix}, \quad G_1 = [2 \ 2 \ 2 \ 2].$$

Решая уравнения $\psi_1 P^1 = G_1$ и $R^1 \varphi_1 = L_1$, имеем

$$\psi_1 = \varphi_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0].$$

Разложение матриц $P^1 - \varphi_1 G_1$ и $R^1 - L_1 \psi_1$ приводит к следующим результатам $\psi_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$, $G_2 = -2[-t/2 \ 2,5 \ 1/2 + 8 \ 3t + 20]$,

$$L_2 = - \begin{bmatrix} 1 \\ t(3t+1) \\ (3t+1)(t^3-3t+3)-44 \\ (t-1)(3t^3+t^2+25t+10)+28 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]'$$

Тогда $\psi_3 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$; $\psi_4 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$, а матрица Q определяется соотношением $Q' = [\psi_1' \ \psi_2' \ \psi_3' \ \psi_4']$. Используя матрицу

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

можно представить исходную автоматическую систему в форме (4).

Доказательство теоремы. 1. Доказательство достаточности. Матрицы R^1 и P^1 могут быть представлены в виде

$$R^1 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 & 0 \\ r_{31} & r_{32} & 0 & 0 \\ r_{41} & r_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix},$$

$$P^1 = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где ψ_3 и ψ_4 (или φ_3 и φ_4) — любая совокупность дифференцируемых строк (или столбцов), определяющих невырожденность матрицы $[\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4]$ (или матрицы $[\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4]$), также обеспечивающих выполнение равенства $\psi_i \varphi_j = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, 4}$.

Пользуясь формулами преобразований (2) и (3), можно убедиться, что соотношения (8) представляют собой матрицы управляемости и наблюдаемости эквивалентной системы следующего вида

$$\dot{z} = A^{III}z + D^{III}u, \quad z(t_0) = z_0, \\ y = H^{III}z,$$

где

$$A^{III} = \begin{bmatrix} a_{11}^{III} & a_{12}^{III} & a_{13}^{III} & a_{14}^{III} \\ a_{21}^{III} & a_{22}^{III} & a_{23}^{III} & a_{24}^{III} \\ a_{31}^{III} & a_{32}^{III} & a_{33}^{III} & a_{34}^{III} \\ a_{41}^{III} & a_{42}^{III} & a_{43}^{III} & a_{44}^{III} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}, \quad D^{III} = \begin{bmatrix} d_1^{III} \\ d_2^{III} \\ d_3^{III} \\ d_4^{III} \end{bmatrix}, \quad H^{III} = \begin{bmatrix} h_1^{III} \\ h_2^{III} \\ h_3^{III} \\ h_4^{III} \end{bmatrix}.$$

Здесь верхний индекс III определяет переменную $z(t)$ состояния системы. Обозначим j -тую совокупность r столбцов матрицы G как $G_i = [g_{i1} \ 0 \ g_{i3} \ 0]'$, а j -тую совокупность m строк матрицы L как $L_j = [l_{j1} \ l_{j2} \ 0 \ 0]$.

В результате можно записать

$$G_{i+1} = -A^{III}G_i + \dot{G}_i, \quad G_1 = D^{III}, \quad (9)$$

$$L_{i+1} = L_i A^{III} + \dot{L}_i, \quad L_1 = H^{III}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (10)$$

Из уравнений (8) и (9) соответственно получим

$$\begin{bmatrix} a_{21}^{III} & a_{23}^{III} \\ a_{41}^{III} & a_{43}^{III} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{13}^{III} & a_{14}^{III} \\ a_{23}^{III} & a_{24}^{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, благодаря условиям (7) и непрерывности матрицы A^{III} , уравнение (9) обеспечивает преобразование системы (1) к форме (4). Что и требовалось доказать.

2. Доказательство необходимости. Пусть система (1) приведена к форме (4), где

$$P_i^{II} = \begin{bmatrix} d_1^{II} \\ 0 \\ d_3^{II} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}^{II} \\ 0 \\ p_{13}^{II} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_i^{II} = \begin{bmatrix} p_{11}^{II} \\ 0 \\ p_{13}^{II} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{для } i = 2, 3, \dots, n.$$

Легко показать, что

$$P_{i+1}^{II} = - \begin{bmatrix} a_{11}^{II} & a_{12}^{II} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{II} & 0 & 0 \\ a_{31}^{II} & a_{32}^{II} & a_{33}^{II} & a_{34}^{II} \\ 0 & a_{42}^{II} & 0 & a_{44}^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}^{II} \\ 0 \\ p_{13}^{II} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11}^{II} \\ 0 \\ p_{13}^{II} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -a_{11}^{11}p_{11}^{11} + p_{11}^{11} \\ 0 \\ -a_{31}^{11}p_{11}^{11} - a_{33}^{11}p_{13}^{11} + p_{13}^{11} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{i+1,1}^{11} \\ 0 \\ p_{i+1,3}^{11} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Тогда матрица P^{11} имеет вид

$$P^{11} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{13} & p_{12} & p_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{23} & p_{22} & p_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где матрицы p_{11} , p_{13} , p_{22} и p_{24} получаются на основе итерационного процесса (11) для $n_1 + n_2 \leq i < n$. Так как $\text{rang} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{21} & p_{23} \end{bmatrix} = n_1 + n_2$, то такой же ранг имеют и матрицы P^{11} и P^1 (последнее на основании соотношения (2)). Далее, представим матрицу Q^{-1} в виде $[q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]$. Тогда $P^1 = q_1[p_{11} \ p_{13} \ p_{12} \ p_{14}] + q_2[p_{21} \ p_{23} \ p_{22} \ p_{24}]$, что и требовалось доказать.

Аналогично можно представить и матрицу R^1 , для которой можно показать, что ее ранг равен $n_1 + n_2$.

Ереванский институт
народного хозяйства

Վ. Կ. ԲՐՈՒՅՅԱՆ

Ոչ ստացիոնար բարդ համակարգի ձևափոխումը լրիվ կառավարելի ու դիտարկելի համակարգերի

Աշխատանքում առաջարկվում է բարդ ավտոմատ համակարգը համարժեք լրիվ կառավարելի ու դիտարկելի ենթահամակարգերով ձևափոխելու մեթոդը: Բերվում են բարդ ոչ ստացիոնար համակարգի համարժեք ձևափոխման համար անհրաժեշտ ու բավարար պայմանները: Համարժեք ձևափոխման մեթոդը ցուցադրելու համար դիտարկված է կոնկրետ թվային օրինակ:

ЛИТЕРАТУРА—ԻՐԱՇԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. И. Зубов, Лекции по теории управления. Наука, М., 1985.
- ² В. К. Брутян, Основные аспекты теории непрерывных марковских управляемых систем и ее приложение. Айастан, Ереван, 1984.
- ³ В. Г. Флеминг, Р. В. Ришел, Детерминистическое и оптимальное уравнение. Наука, М., 1980.
- ⁴ В. К. Брутян, ДАН АрмССР, т. 77, № 3, с. 108—113. (1983).
- ⁵ В. К. Брутян, ДАН АрмССР, т. 77, № 5, с. 205—208 (1983).
- ⁶ В. К. Брутян, ДАН АрмССР, т. 89, № 3, с. 104—109. (1989).
- ⁷ В. К. Брутян, ДАН АрмССР, т. 72, № 4, с. 224—231 (1981).
- ⁸ В. С. Пугачев, И. Н. Ситицын, Стохастические дифференциальные системы, Наука, М., 1985.
- ⁹ М. Х. А. Дэвис, Линейное оценивание и стохастическое управление. Наука, М., 1984.

УДК 539.3

МЕХАНИКА

М. В. Белубекян

О распространении упругих сдвиговых волн вдоль периодически неровной поверхности

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР В. С. Саркисяном 14/XI 1989)

В работе (1) подробно рассматриваются вопросы применения устройств, основанных на распространении акустических волн при наличии периодического рельефа на поверхности, и дан обзор исследований в этом направлении. В настоящей статье приводятся решения для задачи распространения чисто сдвиговых волн в полупространстве с периодически слабыми неровностями. Постановка и подход к решению задачи в основном соответствуют работе (2). Предлагается способ решения задачи в случае произвольной (не слабой) неровности.

1. В прямоугольной системе координат (x_1, x_2, x_3) поверхность $x_2 = f(x_1)$ является границей раздела упругое тело—вакуум. Ось ox_2 направлена во внутрь упругого тела. Рассматривается задача антиплоской деформации, т. е.

$$u_1 = 0, \quad u_2 = C, \quad u_3 = u(x_1, x_2, t),$$

где u_1, u_2, u_3 — упругие перемещения в соответствующих направлениях. В этом случае уравнение движения в перемещениях имеет следующий вид:

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1.1)$$

На поверхности раздела должно выполняться условие свободной от нагрузки поверхности.

$$\bar{\sigma}_i \cdot \bar{n} = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = f(x_1), \quad (1.2)$$

где $\bar{\sigma}_i = \sigma_{11}\hat{i}_1 + \sigma_{12}\hat{i}_2 + \sigma_{13}\hat{i}_3$ ($i = 1, 2, 3$); $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3$ — единичные векторы по направлению осей x_1, x_2, x_3 , $\bar{n}$ — нормаль к поверхности $x_2 = f(x_1)$. Для данной поверхности

$$\bar{n} = \text{grad}[x_2 - f(x_1)] \cdot |\text{grad}[x_2 - f(x_1)]|^{-1}. \quad (1.3)$$

Из (1.2) и (1.3) для рассматриваемой антиплоской задачи получается следующее граничное условие:

$$\sigma_{12} - \frac{df}{dx_1} \sigma_{11} = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = f(x_1). \quad (1.4)$$

В дальнейшем предполагается, что

$$f(x_1) = a \cos \frac{1}{2} x_1, \quad \lambda_2 = 2\pi/l. \quad (1.5)$$

После замены напряжений через перемещение условие (1.4) записывается в форме

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} + 2\varepsilon \sin \frac{1}{2} x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при } x_2 = a \cos \frac{1}{2} x_1, \quad \varepsilon = \pi a/l. \quad (1.6)$$

2. В предположении малости ε (слабая неровность) граничное условие (1.6) — случай произвольной неровности заменяется условием (2)

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} + 2\varepsilon \sin \frac{1}{2} x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при } x_2 = 0. \quad (2.1)$$

Тогда уравнение (1.1) при граничном условии (2.1) допускает следующее решение:

$$u = \exp(i\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) \sin \frac{1}{2} n x_1, \quad \lambda_n = n\pi/l. \quad (2.2)$$

Подстановка (2.2) в уравнение (1.1) приводит к следующим уравнениям, определяющим функции:

$$\psi_n''(x_2) - (\lambda_n^2 - \omega^2 c_l^{-2}) \psi_n(x_2) = 0. \quad (2.3)$$

Подставляя (2.2) в граничное условие (2.1), используя тождества

$$2 \cos \frac{1}{2} n x_1 \sin \frac{1}{2} x_1 = \sin \frac{1}{2} (n+2) x_1 + \sin \frac{1}{2} (n-2) x_1 \quad (2.4)$$

и приравнявая коэффициенты при $\sin \frac{1}{2} n x_1$, получим следующие граничные условия:

$$\varepsilon \lambda_{n-2} \psi_{n-2}(0) + \psi_n'(0) - \varepsilon \lambda_{n+2} \psi_{n+2}(0) = 0. \quad (2.5)$$

В (2.5) принято обозначение $\psi_{-k} = -\psi_k$.

Рассмотрим случай, когда

$$\omega^2 c_l^{-2} < \lambda_1^2, \quad (2.6)$$

т. е. длина упругой волны больше полудлины волны на поверхности. При условии (2.6) уравнения (2.3) имеют решения вида

$$\psi_n(x_2) = c_n \exp(-\lambda_n \sqrt{1 - \tau_n^2} x_2), \quad \tau_n^2 = \omega^2 c_l^{-2} \lambda_n^{-2}. \quad (2.7)$$

Подставляя из (2.7) значения $\psi_n(0)$ и $\psi_n'(0)$ в уравнения (2.5), получим бесконечную систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов c_n . Приравнявая детерминант указанной системы нулю, находим дисперсионное уравнение задачи. Известно, и это можно легко показать и здесь, что дисперсионное уравнение имеет следующее приближенное решение (1,2):

$$\omega^2 \approx \lambda_1^2 c_l^2 (1 - \varepsilon^2). \quad (2.8)$$

Смысл приближения заключается в том, что бесконечная система уравнений обрывается и рассматривается конечное число уравнений с соответствующим числом неизвестных c_n . В частности, для первой формы волны получается выражение

$$u^{(1)} = c_1 \exp(i\omega t - \epsilon' x_2) \sin \lambda_1 x_1 \quad (2.9)$$

где ω определяется из (2.8).

Отсюда делается вывод, что наличие периодически слабой неровности на поверхности приводит к появлению поверхностных волн. Однако остается неясным соответствие приближенностей граничного условия (2.1) и формулы (2.8).

Можно показать также, что поверхностная волна при условиях

$$\lambda_n^2 \leq \omega^2 c_l^{-2} < \lambda_{n+1}^2$$

не существует.

Аналогичные результаты получаются также, если решение приведенной в этом пункте задачи представить в виде

$$u = \exp(i\omega t) \left[\varphi_n(x_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_2) \cos \lambda_n x_1 \right].$$

3. Обратимся к решению задачи в случае точного граничного условия (1.6). Преобразованием координат

$$\xi = x_1, \quad \eta = x_2 - a \cos \lambda_1 x_1$$

уравнение (1.1) и граничное условие (1.6) приводятся к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4\epsilon \sin \lambda_1 \xi \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (1 + 4\epsilon^2 \sin^2 \lambda_1 \xi) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\epsilon \lambda_1 \cos \lambda_1 \xi \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3.2)$$

$$(1 + 4\epsilon^2 \sin^2 \lambda_1 \xi) \frac{\partial u}{\partial \eta} + 2\epsilon \sin \lambda_1 \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \eta = 0. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.2) с граничным условием (3.3) допускает решение следующего вида:

$$u = \exp(i\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(\eta) \sin \lambda_n \xi. \quad (3.4)$$

Подстановка (3.4) в уравнение (3.2) и использование тождеств типа (2.4) приводит к следующей бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(1 + 2\epsilon^2) \psi_n''(\eta) - (\lambda_n^2 - \omega^2 c_l^{-2}) \psi_n(\eta) + 2\epsilon \lambda_n [\psi_{n-2}'(\eta) - \psi_{n+2}'(\eta)] - \epsilon^2 [\psi_{n-4}'(\eta) + \psi_{n+4}'(\eta)] = 0. \quad (3.5)$$

Здесь, как и ранее, принято обозначение $\psi_{-n} = -\psi_n$.

Аналогично получаем граничные условия

$$(1 + 2\epsilon^2) \psi_n'(0) - \epsilon^2 [\psi_{n-4}'(0) + \psi_{n+4}'(0)] + \epsilon [\lambda_{n-2} \psi_{n-2}(0) - \lambda_{n+2} \psi_{n+2}(0)] = 0. \quad (3.6)$$

Рассматривая для системы уравнений (3.5) и для граничных условий (3.6) то же приближение, что и в предыдущем пункте, получим следующее приближенное решение для дисперсионного уравнения:

$$\omega^2 \approx \lambda_1^2 c_l^2 (1 + 2\epsilon^2)^{-1} (1 + \epsilon^2). \quad (3.7)$$

Для первой формы волны получается выражение

$$u^{(1)} = c_1 \exp \left(i\omega t - \frac{\varepsilon_1}{1+2\varepsilon^2} x_2 + \frac{\varepsilon_1}{1+2\varepsilon^2} \cos \theta_1 x_1 \right) \sin \theta_1 x_1, \quad (3.8)$$

где ω определяется согласно (3.7).

Сравнение формулы (3.6) при малых ε с формулой (2.8) дает различие при определении скорости поверхностной волны. Однако, как показывают формулы (2.9) и (3.8), глубины затухания волн не различаются.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

ԻՐ. Վ. ԲԵԼՈՒՐԻՆՆԱՆ

Պարբերական անհատ մակերևութային ուսման ալիքների տարածման մասին

Նախկինում խնդիրը ուսումնասիրված էր այն դեպքում, երբ ազատ մակերևութի եզրային պայմանը բավարարվում է փոքր անհարթությունների մոտավորությամբ: Հոգվածում դիտարկված է ճշգրիտ եզրային պայմանի դեպքը: Ցույց է տրված, որ պարբերական անհարթությունները հանդիսանում են սահմանային մակերևութային ալիքների առաջացման պատճառ: Ուսումնասիրված է անհարթության աղդեցությունը մակերևութային ալիքի տարածման արագության վրա:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Ю. В. Гуляев, В. П. Поесский, УФН, т. 157, вып. 1, с. 85—127 (1989). ² В. М. Яковенко, Укр. физ. журн., № 9, с. 1424—1425, 1982.

УДК 529.3.01

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. Мхитарян, Мохамед Абдалла Ахмед Абду

О сравнении различных методов решения интегрального уравнения плоской контактной задачи теории упругости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 31/VIII 1989)

В работе (1) приведены разные по своим аналитическим структурам формулы решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с логарифмическим ядром, описывающего плоскую контактную задачу теории упругости, которые были получены методами теории логарифмического потенциала и ортогональных многочленов Чебышева, методом М. Г. Крейна и методом сингулярных интегральных уравнений. Там же был поставлен вопрос об идентичности этих различных из вид формул и было показано, что формулу решения упомянутого интегрального уравнения по методу сингулярных интегральных уравнений можно свести к формуле решения того же уравнения по методам логарифмического потенциала и ортогональных многочленов Чебышева. Эту же последнюю формулу можно получить также исходя из формул решения М. Г. Крейна, что и делается в настоящей статье.

1. В формуле (1.9) из (1), дающей решение обсуждаемого интегрального уравнения (1.1) (там же) в симметрическом случае, т. е. уравнения (1.3) (там же), без ограничения общности можем положить $a=1$. Далее в этой формуле (1.9) положим $f_+(x)=T_{2n}(x)$ ($n=1, 2, \dots$), где $T_{2n}(x)$ — многочлены Чебышева первого рода, и последовательно вычислим фигурирующие в ней интегралы. Сначала вычислим интеграл

$$I_n(u) = \int_0^u \frac{T_{2n}(s)ds}{\sqrt{u^2-s^2}} = \int_0^1 \frac{T_{2n}(ut)dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (s=ut; n=1, 2, \dots).$$

Воспользовавшись формулой ((2), с. 849, ф. 7.349)

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1/2} T_n(1-t^2 y) dt = \frac{\pi}{2} |P_n(1-y) + P_{n-1}(1-y)|,$$

а также формулой ((2), с. 1050, ф. 8.961.8)

$$2P_n^{(-1,0)}(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x),$$

где $P_n(x)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) — многочлены Лежандра, а $P_n^{(-1,0)}(x)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) — многочлены Якоби, и обнаружив, что $T_{2n}(t)=T_n(2t^2-1)$ ($n=0, 1, 2, \dots$),

будем иметь

$$I_n(u) = \frac{\pi}{2} P_{n-1}^{(-1,0)}(2u^2-1) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (1.1)$$

Отсюда находим

$$I_n^{(1)}(u) = \frac{dI_n}{du} = \pi n u P_{n-1}^{(0,1)}(2u^2-1) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (1.2)$$

Формула (1.2) дает возможность вычислить значение $J(1)$ в рассматриваемом частном случае $J(x)$, где $J(u)$ — функция, входящая в формулу (1.9) из (1). Учитывая известную формулу ((3), с. 171, ф. 3), получим

$$J(1) = 2n \ln 2 \quad (n=1, 2, \dots). \quad (1.3)$$

Далее положив

$$I_n^{(2)}(u) = \frac{d}{du} \left(u \frac{dI_n}{du} \right) = \frac{d}{du} [u I_n^{(1)}(u)] = I_n^{(1)}(u) + u \frac{dI_n^{(1)}}{du},$$

при помощи (1.1) и (1.2) будем иметь

$$I_n^{(2)}(u) = 2\pi n u P_{n-1}^{(0,1)}(2u^2-1) + 2\pi n(n+1)u^3 P_{n-2}^{(1,2)}(2u^2-1), \quad (n=1, 2, \dots)$$

причем всегда считается, что $P_n^{(2,2)}(x) \equiv 0$, если $n = -1, -2, \dots$

Теперь положим

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \int_x^1 \frac{I_n^{(2)}(u) du}{\sqrt{u^2-x^2}} = \\ &= 2\pi n \int_x^1 \frac{u P_{n-1}^{(0,1)}(2u^2-1) du}{\sqrt{u^2-x^2}} + 2\pi n(n+1) \int_x^1 \frac{u^3 P_{n-2}^{(1,2)}(2u^2-1) du}{\sqrt{u^2-x^2}} \end{aligned}$$

и в этих интегралах сделаем замену переменных

$$\xi = 2x^2 - 1, \quad u^2 = 1 - \frac{1}{2}(1-\xi)\tau, \quad (0 \leq \tau \leq 1).$$

В результате простых преобразований придем к выражению

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \frac{\pi n}{\sqrt{2}} \sqrt{1-\xi} \left[H_n(\xi) + \frac{n+1}{2} (1+\xi) G_n(\xi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n+1}{2} (1-\xi) K_n(\xi) \right] \quad (\xi = 2x^2 - 1; \quad n=1, 2, \dots); \quad (1.4) \end{aligned}$$

$$H_n(\xi) = \int_0^1 (1-\tau)^{-1/2} P_{n-1}^{(0,1)}[1-(1-\xi)\tau] d\tau; \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$G_n(\xi) = \int_0^1 (1-\tau)^{-1/2} P_{n-2}^{(1,2)}[1-(1-\xi)\tau] d\tau;$$

$$K_n(\xi) = \int_0^1 (1-\tau)^{1/2} P_{n-2}^{(1/2, 1/2)}[1-(1-\xi)\tau] d\tau.$$

Займемся вычислением последних интегралов. С этой целью воспользуемся известной формулой ((²), с. 856, ф. 7.392.1)

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \tau^{\lambda-1} (1-\tau)^{\mu-1} P_n^{(\alpha, \beta)}(1-\gamma\tau) d\tau = \\ & = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{n!\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+\lambda)} {}_3F_2\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \lambda; \alpha+1, \lambda+\mu; \frac{\gamma}{2}\right), \\ & \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0; \operatorname{Re} \mu > 0) \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\Gamma(x)$ — известная гамма-функция Эйлера, а

$${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_m (\alpha_2)_m (\alpha_3)_m}{(\beta_1)_m (\beta_2)_m m!} z^m \left((\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \right) \quad (1.6)$$

обобщенный гипергеометрический ряд (⁴).

В случае функции $H_n(\xi)$ в (1.5) положим $\lambda=1$, $\mu=1/2$, $\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=1-\xi$ и $n \rightarrow n-1$. Получим

$$H_n(\xi) = {}_2F_2\left(-n+1, n+1, 1; 1, \frac{3}{2}; \frac{1-\xi}{2}\right) = {}_2F\left(-n+1, n+1; \frac{3}{2}; \frac{1-\xi}{2}\right),$$

где $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ — известная гипергеометрическая функция Гаусса. Таким образом, в разбираемом частном случае обобщенный гипергеометрический ряд ${}_3F_2$ вырождается в обычный гипергеометрический ряд F . Далее, используя известную формулу из (³) (с. 172, ф. (16)), будем иметь

$$H_n(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}(n-1)!}{\Gamma(n+1/2)} P_{n-1}^{(1/2, 1/2)}(\xi) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (1.7)$$

Обращаясь теперь к функции $G_n(\xi)$, в (1.5) положим $\lambda=1$, $\mu=-1/2$, $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=1-\xi$, $n \rightarrow n-2$, что даст

$$G_n(\xi) = 2(n-1) {}_2F_2\left(-n+2, n+2, 1; 2, \frac{3}{2}; \frac{1-\xi}{2}\right) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (1.8)$$

С другой стороны, если положить

$$h_n(z) = z {}_2F_2\left(-n+2, n+2, 1; 2, \frac{3}{2}; z\right) \quad (z=(1-\xi)/2),$$

то при помощи (1.6) легко показать, что

$$\frac{dh_n}{dz} = F\left(-n+2, n+2; \frac{3}{2}; z\right) \quad (n=2, 3, \dots).$$

Опять воспользовавшись указанной выше формулой ((³), с. 172, ф. (16)), обнаружим, что

$$\frac{dh_n}{dz} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n-1)}{2\Gamma(n-1/2)} P_{n-2}^{(1/2, 1/2)}(1-2z) \quad (n=2, 3, \dots)$$

Отсюда

$$h_n(z) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n-1)}{2\Gamma(n-1/2)} \int P_{n-1}^{(1/2, 5/2)}(1-2z) dz + C.$$

Если в последнем интеграле положить $1-2z=\tau$ и воспользоваться известной формулой ((³), с. 172, ф. (17)) то получим

$$h_n(z) = -\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n-1)}{2\Gamma(n-1/2)(n+1)} P_{n-1}^{(-1/2, 3/2)}(1-2z) + C. \quad (1.9)$$

Так как $h_n(0)=0$, то отсюда $C=1/2 (n^2-1)$. Теперь с учетом (1.8) и (1.9) окончательно будем иметь

$$G_n(\xi) = -\frac{2\sqrt{\pi}(n-1)!}{\Gamma(n-1/2)(n+1)(1-\xi)} P_{n-1}^{(-1/2, 3/2)}(\xi) + \frac{2}{(n+1)(1-\xi)}. \quad (1.10)$$

Наконец, вполне аналогичным путем получим

$$K_n(\xi) = -\frac{\sqrt{\pi}(n-1)!}{\Gamma(n+1/2)(n+1)(1-\xi)} P_{n-1}^{(1/2, 1/2)}(\xi) + \frac{2}{(n+1)(1-\xi)}. \quad (1.11)$$

Далее, подставляя (1.7), (1.10)–(1.11) в формулу (1.4), после элементарных преобразований находим

$$A_n(x) = \frac{\pi\sqrt{\pi}n!}{\sqrt{2}\Gamma(n-1/2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \left| \frac{1-\xi}{2n-1} P_{n-1}^{(1/2, 1/2)}(\xi) - \right. \quad (1.12) \\ \left. -(1+\xi)P_{n-1}^{(-1/2, 3/2)}(\xi) \right| + \frac{\pi n\sqrt{2}}{\sqrt{1-\xi}} \quad (\xi = 2x^2 - 1, n = 1, 2, \dots).$$

Теперь в формулах ((³), с. 177)

$$P_n^{(\lambda-1/2, -1/2)}(2x^2-1) = \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\lambda)} C_{2n}^\lambda(x); \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$P_n^{(\lambda-1/2, 1/2)}(2x^2-1) = \frac{\Gamma(n+3/2)\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\lambda+1)x} C_{2n+1}^\lambda(x);$$

где $G_n^\lambda(x)$ —известные многочлены Гегенбауэра, совершим предельный переход $\lambda \rightarrow 0$ и учтем, что ((³), с. 1044, ф. 8.934.4)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Gamma(\lambda) C_n^\lambda(x) = \frac{2}{n} T_n(x) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (1.13)$$

В результате получим

$$P_n^{(-1/2, -1/2)}(2x^2-1) = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}n!} T_{2n}(x); \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (1.14)$$

$$P_n^{(-1/2, 1/2)}(2x^2-1) = \frac{2\Gamma(n+3/2)}{\sqrt{\pi}(2n+1)n!x} T_{2n+1}(x).$$

Далее, учитывая (1.14), можем записать

$$L_n(\xi) = \frac{1-\xi}{2n-1} P_{n-1}^{(1/2, 1/2)}(\xi) - (1+\xi)P_{n-1}^{(-1/2, 3/2)}(\xi) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(1-\xi)}{n(2n-1)} \frac{d}{d\xi} [P_n^{(-1/2, -1/2)}(\xi)] - \frac{2(1+\xi)}{n} \frac{d}{d\xi} [P_n^{(-3/2, 1/2)}(\xi)] = \\
&= \frac{2(1-x^2)}{x} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}(2n-1)n!} U_{2n-1}(x) - \frac{x}{n} \frac{d}{dx} \left[\frac{\Gamma(n+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n)x} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left| \lim_{\lambda \rightarrow -1} \Gamma(\lambda) C_{2n+1}^\lambda(x) \right| \right] \quad (n=1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

С другой стороны, при помощи (1.13) легко показать, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow -1} \Gamma(\lambda) C_{2n+1}^\lambda(x) = \frac{1}{n} \left[\frac{T_{2n+1}(x)}{2n+1} - \frac{T_{2n-1}(x)}{2n-1} \right] \quad (n=1, 2, \dots).$$

В результате после несложных преобразований

$$L_n(\xi) = L_n(2x^2 - 1) = - \frac{4\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}(2n-1)\Gamma(n)} T_{2n}(x) \quad (n=1, 2, \dots). \quad (1.15)$$

Теперь сопоставление (1.15) с (1.12) окончательно даст

$$A_n(x) = \frac{\pi n(1 - T_{2n}(x))}{\sqrt{1-x^2}} \quad (n=1, 2, \dots),$$

и, следовательно, приняв во внимание (1.3), по формуле (1.9) из (1) получим

$$p_+(x) = \frac{2n T_{2n}(x)}{\pi \sqrt{1-x^2}} \quad (0 < x < 1, n=1, 2, \dots),$$

что эквивалентно спектральному соотношению

$$\int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-s|} \cdot \frac{T_{2n}(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{\pi}{2n} T_{2n}(x) \quad (|x| < 1, n=1, 2, \dots).$$

Последнее совпадает с (1.14) из (1) при четных индексах ($n \rightarrow 2n$) и при $a=1$.

Вполне аналогичным путем исходя из формулы (1.1) работы (1) и полагая $a=1$, $f_-(x) = T_{2n-1}(x)$, получим (1.14) из (1) при нечетных индексах ($n \rightarrow 2n-1$).

Таким образом, исходя из формул М. Г. Крейна (1.9) — (1.10) и (1.6), приведенных в работе (1), можно получить спектральные соотношения (1.14), которые также приведены в (1).

2. Теперь в только что указанных формулах М. Г. Крейна, как в (1), положим

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x/a) \quad (|x| < a),$$

предполагая (1), что $f(x) \in C_1[-a, a]$, а вторая производная $f''(x)$ в интервале $(-a, a)$ удовлетворяет условиям Дирихле. Если учесть, что в соответствии со структурой интегрального уравнения (1.1) из (1) следует функцию $f(x)$ заменить на $f(x) + C$ и принять во внимание первое условие (1.2) опять из (1), то на основании изложенных выше результатов снова придем к формуле

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left| P + \sum_{n=1}^{\infty} na_n T_n(x/a) \right| \quad (|x| < a),$$

совпадающей с формулой (1.15) работы (1), что и требовалось показать.

Институт механики Академии наук Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Ս. Մ. ՄԻՔԱՐՅԱՆ, ՄՈՇԱՄԵՏ ԱՐԴԱՆԱ ԱԶԻՆԵՐ ԱՐԴՈՒ

Առաձգականության տեսության հարթ կոնտակտային խնդրի ինտեգրալ
հավասարման լուծման տարբեր մեթոդների համեմատման մասին

Ներկա աշխատանքում, որը նախորդ աշխատանքի շարունակությունն է, առաձգականության տեսության հարթ կոնտակտային խնդիրը նկարագրող լոգարիթմական կորիզով Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծումը՝ արտահայտված Մ. Գ. Կրեյնի մեթոդով ինտեգրալների միջոցով, ձևափոխվում է նույն հավասարման լուծմանը՝ արտահայտված Չերիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդով անվերջ շարքի միջոցով: Այդ բանաձևերի մեկից մյուսին անցումը ցույց տալու համար օգտագործվում են լոգարիթմական սիմետրիկ կորիզով առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծման Մ. Գ. Կրեյնի բանաձևերը, երբ հավասարման աջ մասը վերցվում է զույգ կամ կենտ ինդեքսով՝ Չերիշևի առաջին սեռի բազմանդամի տեսքով: Արդյունքում ստացվում են Չերիշևի բազմանդամներ պարունակող լոգարիթմական սիմետրիկ կորիզով հայտնի սպեկտրալ առնչությունները, որոնց օգնությամբ էլ ցույց է տրվում նշված անցումը:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. М. Мхитарян, Мохамед Абдалла Ахмед Абду. ДАН АрмССР, т. 89, № 3 (1989).
² И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука, М., 1971. ³ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Т. 2, Наука, М., 1974. ⁴ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Т. 1, Наука, М., 1973.

УДК 621.378.325

ФИЗИКА

А. О. Варданян, Д. Л. Оганесян

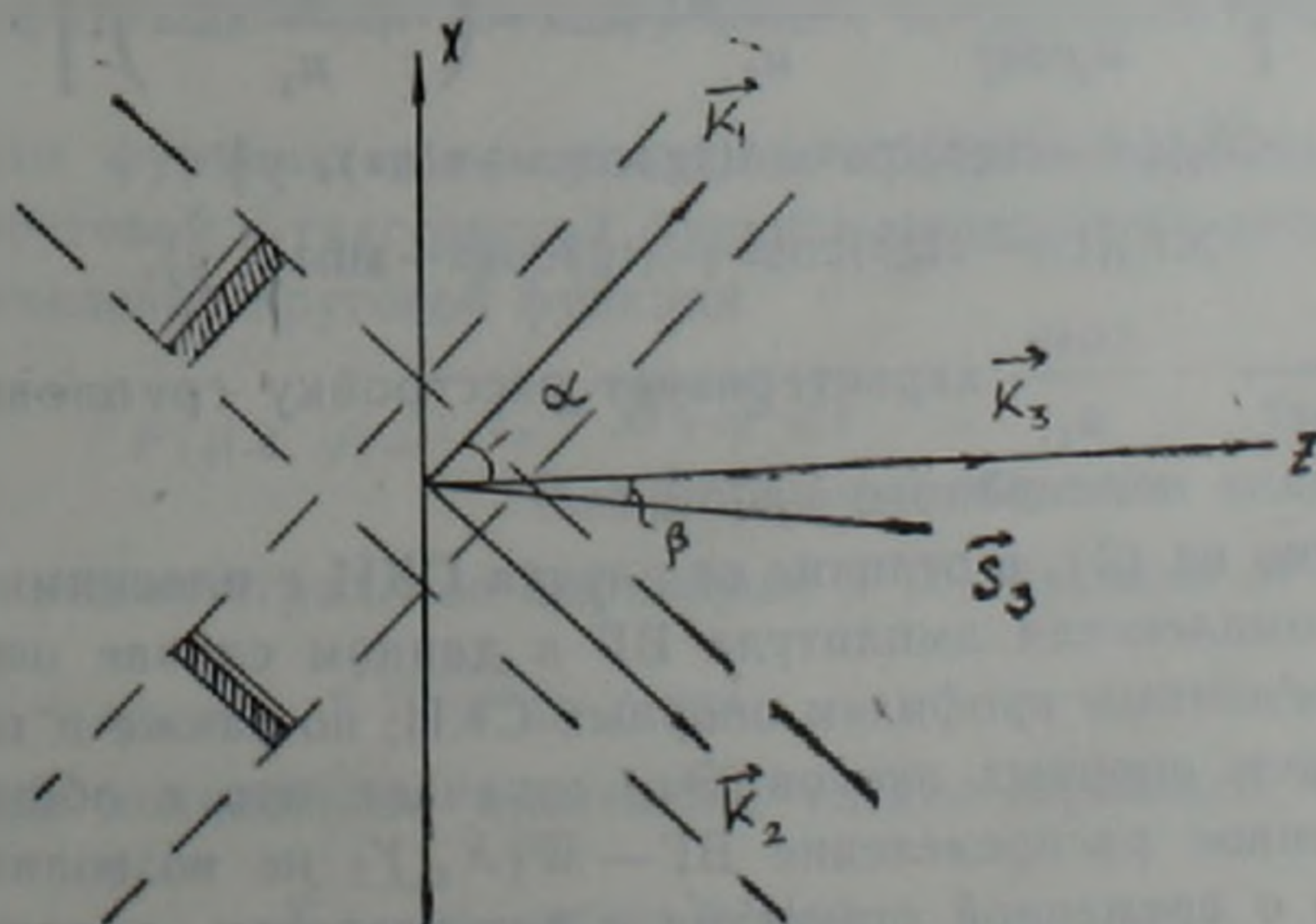
Определение формы СКИ при неколлинеарной ГВГ взаимовращенными во времени пучками

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР П. М. Геруни 10/XII 1989)

В работах (1-3) на основе детального анализа неколлинеарного удвоения частоты была найдена связь между пространственным распределением энергии второй гармоники на выходной грани нелинейного кристалла и длительностью импульса накачки. При этом рассматривалось взаимодействие сверхкоротких световых импульсов (СКИ) с плоскими фазовыми фронтами. Данный метод, как и остальные корреляционные методы измерения длительности СКИ, не позволяет определить форму СКИ.

В предлагаемой статье в приближении заданного поля рассматривается неколлинеарная генерация второй гармоники (ГВГ) пространственно-ограниченными пучками с взаимовращенными во времени временными профилями. Показано, что в квазистатическом режиме для достаточно широких опорных пучков распределение энергии второй гармоники (ГВГ) соответствует функции автосвертки временного профиля СКИ, что позволяет определить форму СКИ.

Рассмотрим случай, когда на границу нелинейной недиссипативной среды под одинаковыми углами к нормали падают две модулированные в пространстве и во времени волны (импульсы) с частотой ω (рисунок). Причем условие векторного синхронизма выполняется, когда падающие волны обыкновенные, а вторая гармоника необыкновенная.



Геометрия неколлинеарной генерации второй гармоники

Уравнение для комплексной амплитуды ВГ в приближении задачного поля с учетом двулучепреломления кристалла будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \operatorname{tg} \beta \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{u_3 \cos \beta} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_3 = -i \gamma A_{10} A_{20}, \quad (1)$$

где β — угол между $\vec{k}_3$ и лучевым вектором $\vec{S}_3$, $U_3 = \frac{d\omega_3}{dk}$ — групповая

скорость импульса второй гармоники, $\gamma = \frac{4\pi(2\omega)^2}{2c^2 k_3 \cos^2 \beta} \vec{e}_3 \hat{\gamma} \vec{e}_1 \vec{e}_2$ — нелиней-

ная константа, $\vec{e}_i$ — единичный вектор поляризации. В выражении (1) импульсы накачки имеют взаимообращенные во времени профили. Уравнение (1) может быть решено с граничными условиями, заданными на входе в нелинейную среду при $z=0$, в виде $A(t, 0, x, y) = f(t)F(x, y)$. Амплитуды волн накачки A_1, A_2 связаны со своими значениями:

$$A_{10}(t, z, x, y) = f(t)F_1(x, y);$$

$$A_{20}(t, z, x, y) = f(-t)F_2(x, y).$$

$\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1 \right)$ на границе $z=0$ в точке $X=0$ соотношениями

$$A_1(t, x, y, z) = f\left(t - \frac{z \cos \alpha + v \sin \alpha}{u_1}\right) F_1(x \cos \alpha - z \sin \alpha, y); \quad (2)$$

$$A_2(t, x, y, z) = f\left(t + \frac{z \cos \alpha - x \sin \alpha}{u_2}\right) F_2(x \cos \alpha + z \sin \alpha, y),$$

где $u_1 \simeq u_2$ — групповые скорости импульсов накачки.

Подставляя (2) в (1) и интегрируя уравнение (1) с учетом граничного условия $A_3|_{z=0} = 0$, найдем, что

$$\begin{aligned} A_3 = & -i \gamma \int_0^l d\xi f \left[t - \frac{z}{u_3 \cos \beta} - \frac{x - z \operatorname{tg} \beta}{u_1} \sin \alpha + \left(v - \frac{\operatorname{tg} \beta}{u_1} \sin \alpha \right) \xi \right] \times \\ & \times f \left[t + \frac{z}{u_3 \cos \beta} - \frac{x - z \operatorname{tg} \beta}{u_2} \sin \alpha - \left(v + \frac{\operatorname{tg} \beta}{u_1} \sin \alpha \right) \xi \right] \times \\ & \times F_2[(x - z \operatorname{tg} \beta) \cos \alpha + \xi (\operatorname{tg} \beta \cos \alpha + \sin \alpha), y] \times \\ & \times F_1[(x - z \operatorname{tg} \beta) \cos \alpha + \xi (\operatorname{tg} \beta \cos \alpha - \sin \alpha), y], \end{aligned} \quad (3)$$

где $v = \frac{1}{u_3 \cos \beta} - \frac{\cos \alpha}{u_1}$ характеризует расстройку групповых скоростей, l — толщина нелинейного кристалла.

Как видно из (3), в отличие от случая СКИ с плоскими фазовыми фронтами, комплексная амплитуда ВГ в данном случае определяется не только временным профилем опорных СКИ, но также и поперечным распределением опорных пучков. Это означает, что в общем случае пространственное распределение ВГ — $W(X, Y)$ не позволит получить информацию о временной структуре и длительности исходного СКИ. Поэтому рассмотрим частный случай, при котором временной множи-

тель в (3) можно вынести из-под интеграла. Очевидно, что влияние двулучепреломления может быть исключено при распространении излучения удвоенной частоты в направлении, нормальном к оптической оси кристалла и, следовательно, в (3) возможна подстановка $\beta=0$. Как следует из (3) в квазистатическом режиме, когда $v'l \ll \tau$ (τ —длительность СКИ), произведение временных профилей можно вынести из-под знака интеграла и, следовательно, выражение (3) можно представить в виде

$$A_2 = -l \left| f \left(t - \frac{z}{u_2} - \frac{x \sin \alpha}{u_1} \right) f \left(t + \frac{z}{u_2} - \frac{x \sin \alpha}{u_1} \right) \right| \times \\ \times \int_0^l F_1(x \cos \alpha - \xi \sin \alpha, y) F_2(x \cos \alpha + \xi \sin \alpha, y) d\xi. \quad (4)$$

Распределение энергии ВГ по осям X, Y , которое может быть измерено экспериментально, очевидно пропорционально интегралу

$$W(X, Y) = \frac{1}{\gamma^2 A_0^4} \int_{-\infty}^{\infty} |A_2(t, x, y, l)|^2 dt. \quad (5)$$

После подстановки (4) в (5) окончательно получим

$$W(X, Y) = \frac{1}{\gamma^2 A_0^4} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t-T)f(-T-t)|^2 dt \times \\ \times \left| \int_0^l F_1(x \cos \alpha - \xi \sin \alpha, y) F_2(x \cos \alpha + \xi \sin \alpha, y) d\xi \right|^2. \quad (6)$$

где $T = \frac{x \sin \alpha}{u}$.

Из (6) видно, что в квазистатическом режиме ($v'l \ll \tau$), при отсутствии двулучепреломления ($\beta=0$), распределение энергии ВГ представляет собой произведение функций автосвертки временного профиля СКИ и квадрата функции автокорреляции поперечного распределения пучка.

Вычислим функцию автокорреляции пространственного распределения для круговой и гауссовской функции поперечного распределения.

Из определения круговой функции

$$F_{1,2}(x, y) = \begin{cases} 1, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

следует, что подынтегральное выражение в (6) отлично от нуля при

$$\sqrt{1-y^2} > x \cos \alpha. \quad (7)$$

Для толщины нелинейного кристалла, удовлетворяющей неравенству

$$\sqrt{1-y^2} - x \cos \alpha > l \sin \alpha, \quad (8)$$

функция автокорреляции поперечного распределения

$$Q(x, y) = \int_0^l F_1(x \cos \alpha - \xi \sin \alpha, y) F_2(x \cos \alpha + \xi \sin \alpha, y) d\xi = l, \quad (9)$$

а при

$$\sqrt{1-y^2} - x \cos \alpha \leq l \quad (10)$$

$$Q(x, y) = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sin \alpha} - x \operatorname{ctg} \alpha. \quad (11)$$

Для случая гауссовской функции поперечного распределения

$$F_{1,2}(x, y) = \exp \left\{ -\frac{x^2}{H_x^2} - \frac{y^2}{H_y^2} \right\},$$

где H_x, H_y — половины ширины пучка вдоль осей X и Y .

$$Q(x, y) = \exp \left\{ -\frac{x^2}{H_x^2} - \frac{y^2}{H_y^2} \right\} \int_0^l \exp \left\{ -2 \frac{\xi^2 \sin^2 \alpha}{H_x^2} \right\} d\xi, \quad (12)$$

где $H_x = H_x / \sqrt{2} \cos \alpha, \quad H_y = H_y / \sqrt{2}$

При выполнении неравенства

$$\frac{l \sin \alpha}{H_x / \sqrt{2}} < \sqrt{3}, \quad (13)$$

используя разложение функции $\operatorname{erf}(x)$, в нулевом приближении, окончательно получим

$$Q(x, y) = l \exp \left\{ -\frac{x^2}{H_x^2} - \frac{y^2}{H_y^2} \right\}. \quad (14)$$

Следовательно, как видно из (8), (13), при достаточно широких опорных пучках и малой толщине нелинейного кристалла l пространственное распределение энергии ВГ есть функция автосвертки временного профиля СКИ. Знание же функций автосвертки СКИ, как известно, позволяет определить форму СКИ ⁽⁴⁾. Обращение временного профиля СКИ можно реализовать в линейных диспергирующих средах с противоположными знаками дисперсии групповых скоростей ⁽⁵⁾.

Оценим значения длительностей импульсов, при которых выполняется неравенство $\nu l \ll \tau$.

Для широко используемых в нелинейной оптике кристаллов дигидрофосфата калия (KDP) и подата лития (LiIO₃) значения ν для длины волны основного излучения $\lambda = 1,06$ мкм соответственно равны $1,0 \cdot 10^{-13}$ и $2,8 \cdot 10^{-12}$ с/см ⁽⁶⁾, и следовательно при $l = 1$ см $\nu l = 10^{-13}$ с (KDP), $\nu l = 2,8 \cdot 10^{-12}$ с (LiIO₃). При толщине нелинейного кристалла LiIO₃ $l = 1$ см и $\alpha = 19,7^\circ$ ⁽⁷⁾ для пучка с гауссовским поперечным распределением из неравенства (13) имеем $H_x > 2,6$ мм, что реализуется расширяющим телескопом.

Таким образом, при неколлинеарной ГВГ взаимобращенными во времени достаточно широкими пучками получаем функцию автосвертки временного профиля СКИ, что позволяет определить форму СКИ.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт оптико-физических измерений

**Կերկարճ իմպուլսի տեսքի որոշումը ժամանակի մեջ փոխադրված փնջերի
ոչ կոլինեար ՆՀԴ դեպքում**

Ներկայացվող հոդվածում տրված դաշտի մոտավորությամբ դիտարկվում է երկրորդ հարմոնիկ ոչ կոլինեար գեներացիան (ՆՀԴ) տարածության մեջ սահմանափակ և ժամանակի մեջ փոխադրված ժամանակային պրոֆիլ ունեցող փնջերով: Ցույց է տրված, որ բնագիտատիկ ռեժիմում $\omega \ll \tau$ բավականաչափ լայն հիմնային փնջերի համար երկրորդ հարմոնիկի էներգիայի քախշումը համապատասխանում է գերկարճ իմպուլսի ժամանակային պրոֆիլի ինքնափաթույթի ֆունկցիային, որը թույլ է տալիս որոշել գերկարճ իմպուլսի տեսքը:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Г. В. Кривошеков, В. И. Строганов, в кн.: Нелинейные процессы в оптике, Наука, Новосибирск, с. 103—105, 1970 ² Г. В. Кривошеков и др., Оптика и спектроскопия, т. 31, с. 116 (1971). ³ Г. В. Кривошеков и др., Автометрия, № 1, с. 89, 1971. ⁴ Л. С. Телегин, А. С. Чиркин, Квантовая электроника, т. 12, № 1, с. 166 (1985). ⁵ Д. Л. Огинесян, Изв. АН АрмССР. Физика, т. 24, вып. 5, с. 233 (1989). ⁶ И. Херман, Б. Вильгельми, Лазеры сверхкоротких световых импульсов, Мир, М., 1986. ⁷ С. А. Аракелян и др., Квантовая электроника, т. 8, № 7, с. 1576 (1981).

УДК 524.354.6:532.132

АСТРОФИЗИКА

Академик АН Армянской ССР Д. М. Седракян

Эффект увлечения в сверхтекучем ядре нейтронной звезды

(Представлено 1/III 1990)

Системы, в которых существуют два вида конденсата, а следовательно, два типа сверхтекучего движения, интенсивно исследовались в последние годы. Одной из таких систем является раствор атомов He^3 в жидком He^4 ниже точки фазового перехода He^3 в сверхтекучее состояние. Уравнения трехскоростной гидродинамики, описывающие свойства такого раствора, получены в работе (1). Показано, что происходит увлечение конденсата He^3 конденсатом He^4 и что каждое из сверхтекучих движений сопровождается переносом обоих компонентов раствора.

Другой системой с двумя сверхтекучими конденсатами является «пре»-фаза нейтронных звезд. Так как средняя плотность нуклонов в «пре»-фазе порядка ядерной плотности, то протоны и нейтроны участвуют в сильном ядерном взаимодействии, приводящем к образованию сверхпроводящего протонного конденсата и сверхтекучего нейтронного конденсата. Электроны же образуют нормальный вырожденный ферми-газ, обеспечивающий локальную нейтральность системы. В работах (2–4) проведено корректное рассмотрение этого ядерного раствора посредством обобщения методики Горькова (5), получены уравнения Гинзбурга—Ландау, из которых следует наличие токов увлечения протонов нейтронами и нейтронов протонами. Основным результатом заключается в том, что если нейтронные вихри появляются из-за вращения нейтронной звезды, то протонные вихри могут возникать из-за магнитных полей, созданных токами увлечения нейтронных вихрей (6–7).

1. *Уравнение Лондона для сверхтекучего раствора.* Рассмотрим вращающуюся нейтронную звезду с центральной плотностью материи порядка 10^{14} г. см $^{-3}$. Ядро звезды состоит из нейтронов, протонов и электронов («пре»-фаза), средняя плотность нейтронов— $n_2=10^{38}$ см $^{-3}$, средняя плотность протонов и электронов— $n_1=10^{36}$ см $^{-3}$. Вещество коры, которое состоит из ядер и электронов, находится в нормальном состоянии. Вращение коры приводит к вращению двухкомпонентной сверхтекучей жидкости и к твердотельному вращению нормальных электронов со скоростью $v=|\Omega r|$, где Ω угловая скорость вращения звезды.

Из-за эффекта увлечения плотности потоков массы сверхтекучих протонов и нейтронов J_1 и J_2 имеют вид

$$J_1 = \rho_{11} v_1 + \rho_{12} v_2,$$

(1)

$$J_2 = \rho_{22} v_2 + \rho_{21} v_1,$$

где v_1 и v_2 — соответственно сверхтекучие скорости протонов и нейтронов. Следовательно, электрический ток протонов можно записать в следующем виде:

$$j_1 = \frac{e}{m_1} (\rho_{11} v_1 + \rho_{12} v_2) = j_{11} + j_{12}. \quad (2)$$

Здесь e и m_1 — заряд и инерциальная масса протона и $\rho_{11} + \rho_{12} = \rho_1$, $\rho_{22} + \rho_{21} = \rho_2$, где ρ_1 и ρ_2 — плотности масс протонов и нейтронов соответственно:

$$\rho_{11} = \frac{m}{m^*} \rho_1, \quad \rho_{12} = \rho_{21} = \frac{m^* - m}{m^*} \rho_1, \quad \rho_{22} = \rho_2 - \frac{m^* - m}{m^*} \rho_1.$$

Определим коэффициент увлечения: $k = \frac{m^* - m}{m} = \rho_{12}/\rho_{11}$. В условиях нейтронных звезд $k = -0.5$. В уравнении (2) j_{11} представляет собой обычный Мейснеровский ток протонов, а j_{12} — ток, возникающий вследствие увлечения протонов нейтронами, — ток увлечения.

Магнитное поле, рождаемое токами увлечения, может быть определено из уравнения Максвелла

$$\text{rot} H = \frac{4\pi}{c} j_{12}. \quad (3)$$

Наличие неувлеченных сверхтекучих протонов приводит к отличию напряженности магнитного поля H от магнитной индукции B , которая определяется из уравнения

$$\text{rot} B = \frac{4\pi}{c} (j_{11} + j_{12}). \quad (4)$$

Подставляя (1) и (2) в (4) и учитывая, что (4)

$$\begin{aligned} \text{rot} v_1 &= \frac{e}{m_1 c} B + \chi_1 l_1 \sum_i \delta(r - r_i); \\ \text{rot} v_2 &= \chi_2 l_2 \sum_j \delta(r - r_j), \end{aligned} \quad (4')$$

получаем

$$B + \lambda^2 \text{rot} \text{rot} B = \Phi_0 l_1 \sum_i \delta(r - r_i) + \Phi_1 l_2 \sum_j \delta(r - r_j), \quad (5)$$

где

$$\Phi_0 = \frac{\pi \hbar c}{e}, \quad \Phi_1 = \frac{m_1}{m_2} \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} \Phi_0, \quad \lambda^2 = \frac{m_1^2 c^2}{4\pi e^2 \rho_{11}}.$$

Здесь l_1 и l_2 — единичные векторы по направлению протонных и нейтронных вихрей, r_i и r_j — соответственно радиус-векторы центров протонных и нейтронных вихревых нитей, $\hbar$ — постоянная Планка, m_2 — масса нейтрона, $\chi_2 = \pi \hbar / m_2$ и $\chi_1 = \pi \hbar / m_1$ — соответственно кванты циркуляции для нейтронов и протонов. Таким образом, мы имеем урав-

нение Лондона с возможными двумя отличными друг от друга областями вихрей.

2. *Свободная энергия двухкомпонентной системы.* Для того чтобы определить, какие вихревые структуры образуются в системе,—нейтронные, протонные или обе, необходимо определить, который случай энергетически наиболее выгодный. Для этого запишем свободную энергию этой системы

$$F = \frac{1}{2} \int (\rho_{11} v_1^2 + 2\rho_{12} v_1 v_2 + \rho_{22} v_2^2) dV + \frac{1}{8\pi} \int B^2 dV - M\Omega, \quad (6)$$

где

$$M = \int \rho'_{22} |r v_2| dV, \quad \rho'_{22} = \rho_2 - \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{11}}.$$

Подставляя v_1 из (4'), получаем

$$F = \frac{1}{8\pi} \int |B^2 + \lambda^2| \cot(B)^2 dV + \int \rho'_{22} \left(\frac{1}{2} v_2^2 - v_2 |\Omega r| \right) dV. \quad (7)$$

Выражение (7) может быть использовано для нахождения средних значений функций v_2 и B .

Среднее значение $v_2(r)$ связано со средней плотностью нейтронных вихрей $N_2(r)$ и определяется из минимизации свободной энергии

$$F_1 = F + \int N_2(r) F_{1B} dV, \quad (8)$$

где F_{1B} — энергия одного нейтронного вихря. Усреднение проводится на расстояниях гораздо больших размеров нейтронных вихрей.

С другой стороны, среднее значение вектора $B(r)$ зависит от плотности $N_1(r)$ протонных вихрей и определяется минимизацией потенциала Гиббса

$$F_2 = F - \frac{1}{4\pi} \int H(r) B(r) dV, \quad (9)$$

где $H(r)$ — напряженность магнитного поля, созданного заданными токами увлечения. При определении $N_1(r)$ усреднение проводится на расстояниях гораздо больших размеров протонных вихрей. Если b и λ — соответственно размеры нейтронных и протонных вихрей, тогда b всегда значительно больше λ . Это означает, что можно вводить понятие средней плотности протонных вихрей даже на размерах одного нейтронного вихря.

3. *Среднее значение $v_2(r)$ или $N_2(r)$.* Предположим, что звезда вращается с угловой скоростью Ω . Из уравнения (7) находим F_{1B} :

$$F_{1B} = \left(\frac{\Phi_1}{4\pi\lambda^2} \right)^2 \ln \frac{\lambda}{\xi_1} + \rho'_{22} \frac{\lambda^2}{4\pi} \ln b/\xi_2 - \frac{1}{2} \rho'_{22} \lambda^2 \Omega (b^2 - \xi_2^2). \quad (10)$$

Здесь ξ_1 и ξ_2 — длины когерентности протонов и нейтронов и b — внешний радиус нейтронного вихря. Первый член — магнитная энергия нейтронной вихревой нити на единицу длины. Два других члена связаны с вращением нейтронов. Из уравнения (10) можно найти Ω_1 — критическую угловую скорость:

$$\Omega_{cl} = \frac{\hbar}{2m_2 R^2} \ln R/\xi_2 - \frac{\hbar}{2m_2 R^2} \frac{\rho_{12}}{\rho_{11'22}} \ln r/\xi_1 \quad (11)$$

Второй член всегда мал и, следовательно, эффект увлечения имеет малое влияние на Ω_1 . Так как $\Omega_1 \approx 10^{-13} \text{ с}^{-1}$ и угловая скорость вращающейся нейтронной звезды на много порядков больше этого значения, следовательно, должна существовать довольно плотная решетка нейтронных вихревых нитей, плотность которой связана со средней скоростью сверхтекучих нейтронов.

Минимизируя F_1 для среднего функции $v_2(r)$, получаем простое решение $\overline{v_2(r)} = |\Omega r|$. Это означает, что основная часть «прс-»-фазы — нейтроны вращаются твердотельно с угловой скоростью Ω и плотностью $N_2 = 2\Omega/\lambda_2$.

Таким образом, взаимодействие нейтронов и протонов не изменяет усредненную сверхтекучую скорость нейтронов или плотность нейтронной вихревой решетки по сравнению с их значениями в случае однокомпонентной вращающейся сверхтекучей жидкости. В отсутствие протонных вихрей средняя магнитная индукция $\overline{B}$ может быть определена из уравнения (5) и имеет вид

$$\overline{B} = -\frac{2m_1 c}{e} \Omega + \Phi_1 i_1 \sum_j K_0\left(\frac{|r - r_j|}{\lambda}\right). \quad (12)$$

Расчеты показывают, что $|B| \approx 2 \cdot 10^{-11} \text{ Гс}$.

Итак, средняя магнитная индукция почти равна нулю. Вращение создает плотную сеть нейтронных вихрей, и локальное магнитное поле, созданное токами увлечения нейтронной вихревой нити, почти полностью компенсируется мейснеровскими токами протонов. Однако такая ситуация реализуется только тогда, когда локальное поле вокруг нейтронного вихря ниже критического поля H_c , необходимого для создания протонного вихря. Как видно из дальнейшего, это не всегда так, и возможно наличие сверхплотной сети протонных вихрей, окружающих нейтронную нить, что ведет к увеличению средней магнитной индукции нейтронной звезды.

4. Среднее значение $H(r)$ или $N_1(r)$. Причиной возникновения протонных вихревых нитей, которое сопровождается переходом части плотности неувлеченных протонов в нормальное состояние, могут быть сильные локальные поля вокруг нейтронного вихря. Это поле создается током увлечения протона. Решая уравнение (3) в близости нейтронного вихря, получаем

$$H(r) = \frac{\Phi_1}{2\pi r^2} \ln b/r, \quad (13)$$

где r — расстояние точки наблюдения от центра вихревой нити. Протонные вихри могут возникать внутри окружности с радиусом r_1 , который определяется из условия $H(r_1) = H_{c1}$, где H_{c1} — поле, необходимое для возникновения одного протонного вихря. Хорошо известно,

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{6\pi \lambda^2} \ln r/\xi_1 \quad (14)$$

Подставляя $r=r_1$ в (13) и $H=H_{c1}$, получаем

$$r_1 = b(\lambda/\xi_1)^{-1/3|k|}, \quad (15)$$

где $k=\rho_{12}/\rho_{11}$. Как видно из (15), размеры области, где возникают протонные вихри, довольно сильно зависят от коэффициента увлечения k . В области, где возникают протонные вихри $H>H_{c1}$, поле H ведет к возникновению системы протонных вихрей с протоном Φ_0 . Следовательно, в равновесном состоянии минимальной будет свободная энергия Гиббса для протонной вихревой структуры. Принимая во внимание, что в области с радиусом r_1 плотность протонных вихрей достаточно высока, $r_1 \gg \lambda$, и максимальное значение напряженности поля в центре нейтронного вихря удовлетворяет условию $H_{c1} < H(\xi_1) < H_{c2}$, можно ввести непрерывную плотность распределения протонных вихрей $N_1(r)$ для отдельного нейтронного вихря. Запишем свободную энергию Гиббса системы протонных вихревых нитей в следующем виде:

$$G = \int N_1(r) \epsilon dV + 2 \cdot \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \right)^2 \int N_1(r) N_1(r') K_0 \left(\frac{|r-r'|}{\lambda} \right) dV dV' - \frac{1}{4\pi} \int H(r) B(r) dV, \quad (16)$$

где

$$\epsilon = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \right)^2 \ln \frac{\lambda}{\xi_1}, \quad B(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} i_1 \int N_1(r') K_0 \left(\frac{|r-r'|}{\lambda} \right) dV'.$$

За начало отсчета потенциала Гиббса принято его значение в отсутствие протонных вихрей: $N_1(r)=0$. Варьируя (16) по δN_1 , мы найдем равновесную плотность

$$N_1(r) = \frac{H(r) - H_{c1}}{\Phi_0}. \quad (17)$$

Зная $N_1(r)$, можно найти среднюю индукцию $\bar{B}$, усредненную по всей „пре“-фазе нейтронной звезды:

$$\bar{B} = \frac{1}{\pi b^2} \int_0^b \Phi_0 N_1(r) 2\pi r dr$$

и

$$\bar{B} = r_1 \cdot \frac{k\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \cdot (\lambda/\xi_1)^{-2/3|k|}, \quad (18)$$

$$M_m = \frac{4\pi}{3} R^3 \bar{B}.$$

Используя обычные значения $\xi=10^{-12}$ см и $\lambda=10^{-11}$ см, получаем $|\bar{B}| \sim 10^{12}$ Гс и $|B| \sim 10^{14}$ Гс в нейтронной звезде и вблизи нейтронного вихря соответственно. Магнитные моменты M_m имеют значения порядка 10^{30} Гс см³.

k	ξ_1	λ	λ/ξ_1	H_{c1}	$H(\xi_1)$	H_{c2}	r_1/b	$\bar{B}$	M_m
0.5	$2 \cdot 10^{-11}$	10^{-11}	5	$3.6 \cdot 10^{13}$	$4 \cdot 10^{14}$	$1.6 \cdot 10^{15}$	0.16	10^{12}	$4 \cdot 10^{30}$

В таблице приведены хаарктерные значения параметров для типичной нейтронной звезды.

Автор выражает благодарность участникам семинара Корнельского университета (США) за обсуждение результатов.

Бираканская астрофизическая
обсерватория

Հայկական ԽՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ի. Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ

Տարման էֆեկտը նեյտրոնային աստղի գերհոսելի կորիզում

Աշխատանքում ցույց է տրված, որ պատվող նեյտրոնային աստղում գերհոսելի նեյտրոնների և պրոտոնների փոխազդեցության շնորհիվ, գերհոսելի պրոտոնները տարվում են նեյտրոնների կողմից, մինչդեռ նորմալ էլեկտրոնները շարունակում են կատարել կոշտ պտույտ։ Պրոտոնների և էլեկտրոնների շարժման տարրերության պատճառով յուրաքանչյուր նեյտրոնային մրրկի շրջակայքում առաջանում են պրոտոնային մրրիկների ցանց, որոնց ստեղծած միջին մագնիսական դաշտի լարվածությունը 10^{14} Գաուս է մրրկի ներսում և 10^{12} Գաուս նեյտրոնային աստղում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. Ф. Андреев, Е. П. Башкин, ЖЭТФ, т. 69, № 319 (1975).
- ² Д. М. Седракян, К. М. Шахабасян, Г. А. Варданян, Уч. зап. ЕГУ, № 2, с. 72, 1979.
- ³ Д. М. Седракян, К. М. Шахабасян, Уч. зап. ЕГУ, № 1, с. 46 (1980).
- ⁴ Д. М. Седракян, К. М. Шахабасян, Астрофизика, т. 16, № 727 (1980).
- ⁵ М. П. Горьков, ЖЭТФ, т. 34, № 735 (1958).
- ⁶ Д. М. Седракян, Астрофизика, т. 18, № 417 (1982).
- ⁷ Д. М. Седракян, К. М. Шахабасян, А. Г. Мовсисян, Астрофизика, т. 19, № 303 (1983).

УДК 581.132:581.111

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

В. А. Давтян, М. А. Салум

Сопряженное изменение физиологической активности листьев
 и корней в онтогенезе различных по скороспелости сортов томата

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. О. Казаряном 9/XII 1989)

Основным эндогенным фактором, обеспечивающим нормальное функционирование листового аппарата, является развитая корневая система с высокой поглощающей поверхностью и способностью. Показано, что ассимиляция CO_2 резко усиливается при укоренении листовых черенков (¹), высечек из листьев (²) или выводковых почек (³). При сокращении же массы активных корней значительно ослаблялась интенсивность фотосинтеза (⁴). Данное обстоятельство объясняется поступлением из корней с пасокой в надземную часть необходимых ферментов и разнообразных метаболитов, активно участвующих в формировании и деятельности фотосинтетического аппарата (⁴⁻⁶). Поэтому физиологическая активность последнего меняется сопряженно с работой корневой системы (⁷).

Несмотря на достигнутые успехи в области изучения корнелистовой функциональной связи, она нуждается в дальнейшей разработке с точки зрения скороспелости растений. Мы проводили наши исследования исходя из этого. Объектом служили ранне- (Гибрид—12, Аракс—322) и среднеспелые (Масиси—202, Нвер) сорта томатов, рассады которых развивались в девятилитровых вазонах с садовой почвой. Физиологические показатели листьев и корней определяли в фазах вегетативного роста, цветения, формирования и созревания плодов: интенсивность фотосинтеза определяли методом Чатского и Славика (⁸), освещенность—люксметром Ю—16, общую и рабочую поглощающую поверхность корней—по метиленовой синьке (⁹). Кроме того собирали пасоку и высушиванием в термостате при 105°C для определения содержания сухих веществ. Все определения проводились в трех повторностях, данные подвергались статистической обработке.

Определение интенсивности фотосинтеза листьев показало, что независимо от скороспелости сорта в течение онтогенеза ее величина меняется по одновершинной кривой с максимумом в фазе формирования плодов (рис. 1). С точки же зрения скороспелости выяснилось, что во всех исследуемых фазах развития при одинаковых условиях определения высокими показателями отличались среднеспелые сорта. Следовательно, активность ассимиляции углекислоты у растений томата является сортовым признаком и зависит от скороспелости сорта, о чем имеются и другие данные (^{10, 11}). Высокая фотосинтетическая способность среднеспелых сортов, по-видимому, объясняется формированием

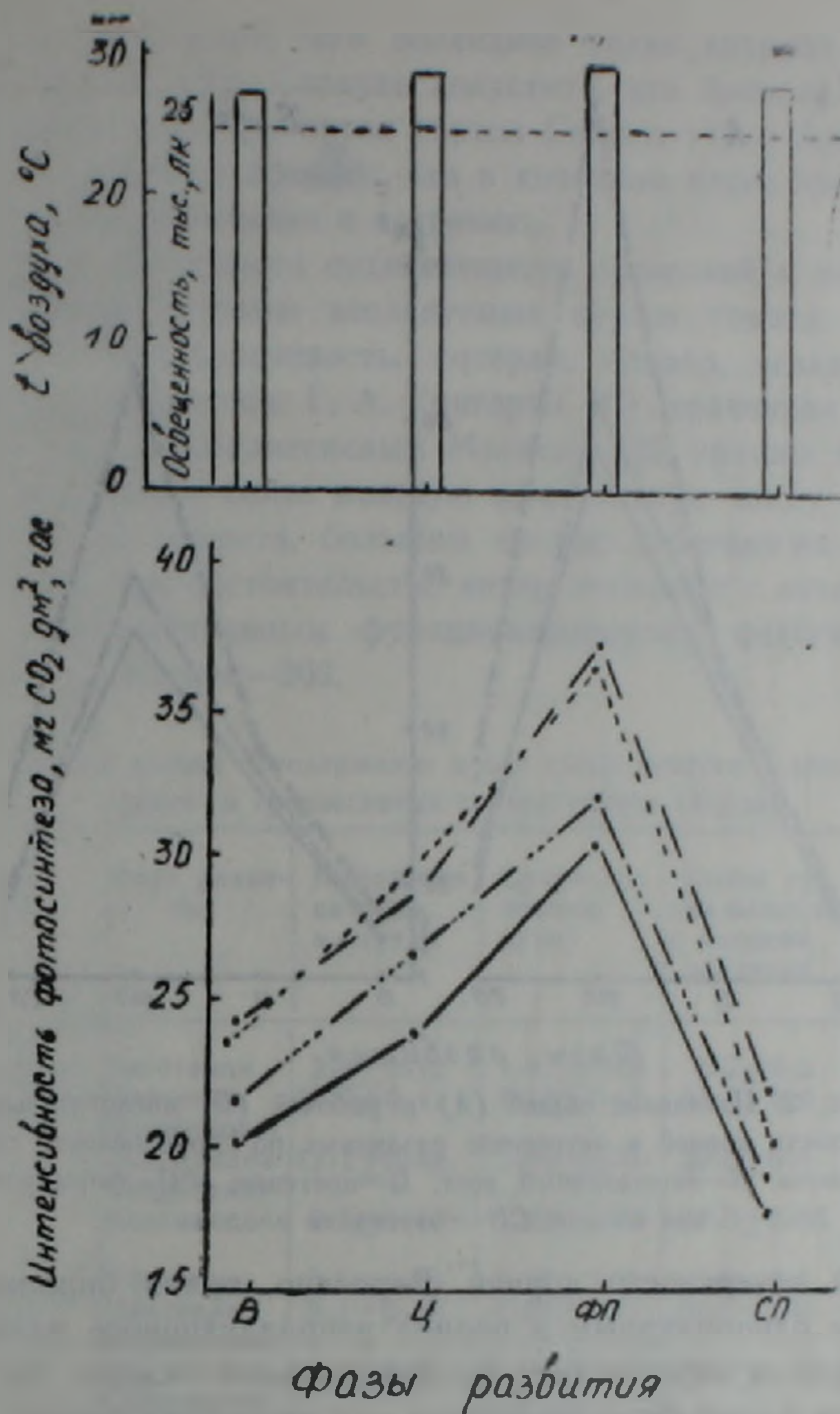


Рис. 1. Изменение интенсивности фотосинтеза (внизу) листьев в онтогенезе различных по скороспелости сортов томата. Вверху условия опыта. В—вегетативный рост; Ц—цветение; ФП—формирование плодов; СП—созревание плодов

большой вегетативной массы и урожая плодов, на что расходуются синтезированные в ходе фотосинтеза ассимилянты (¹² ¹³).

Как показало рассмотрение полученных данных в свете корнелистовой функциональной связи, физиологическая активность листьев подопытных сортов томата коррелировала с поглощающей поверхностью корней (рис. 2). Начиная с фазы вегетативного роста общая и рабочая поглощающая поверхность корней томатов нарастает и достигает наибольшей величины в период формирования плодов. Среднеспелые сорта, как правило, отличаются формированием большей поглощающей поверхности, особенно рабочей, за исключением фазы цветения, при которой показатели у всех сортов почти выравниваются, что, по-видимому, связано с высокой представленностью активных корней. Об этом свидетельствует также отношение рабочей поглощающей поверхности к общей. Созревание плодов характеризуется резким сокращением

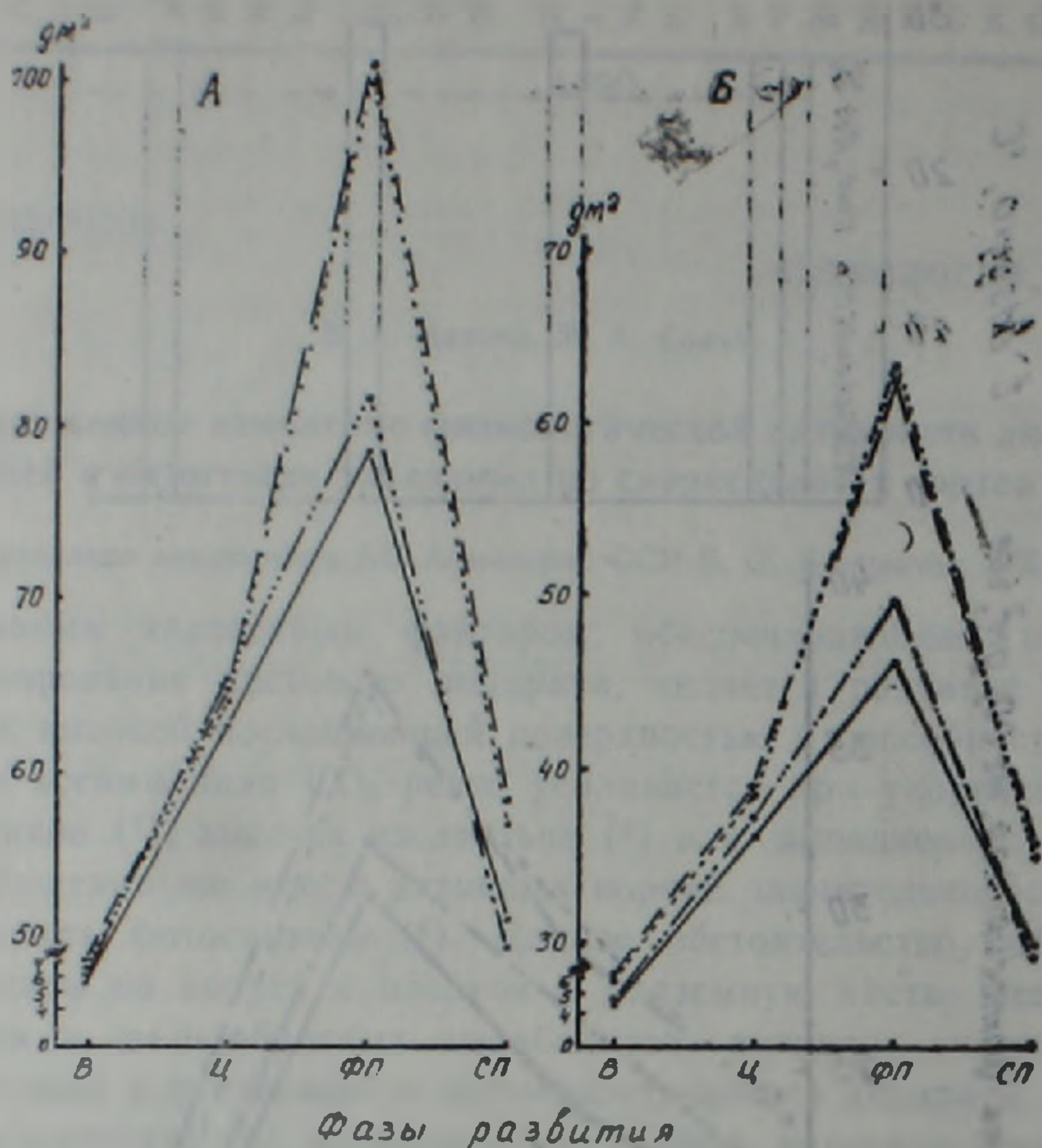


Рис. 2. Изменение общей (А) и рабочей (Б) поглотительной поверхности корней в онтогенезе различных по скороспелости сортов томата. В—вегетативный рост, Ц—цветение; ФП—формирование плодов, СП—созревание плодов

поглощающей поверхности корней. Вероятно, смена биполярного обмена веществ однополярным в период репродуктивного развития растений приводит к ослаблению функциональной связи лист→корень (4). У томатов в этой фазе онтогенеза она выражена сильно, в результате чего рост корней подавляется. Однако сравнительно высоким уровнем общей и рабочей поглощающей поверхности корней все еще выделяются среднеспелые сорта, что, по нашему мнению, является важным условием для продления периода их активной жизнедеятельности и, следовательно, вегетационного периода.

Повышенная представленность поверхности корней отражалась на выделении пасоки и выносе сухих веществ ею (таблица). Динамика этих показателей в течение индивидуального развития томатов имеет параболический характер. При этом наблюдалось несовпадение между количеством выделенной пасоки и концентрацией сухих веществ в ней: она интенсивнее выделялась в фазе формирования плодов, в то время как максимальный сухой вес обнаружен в фазе цветения.

Примечательно, что между скороспелостью сорта и транспортируемых из корней в надземную часть воды, минеральных элементов и корневых метаболитов существует определенная связь. Так, по выделению пасоки выгодно отличались среднеспелые сорта, а по содержанию сухих веществ—раннеспелые. Это объясняется возрастающим требованием формирующихся и развивающихся плодов к продуктам корнево-

го обмена, в результате чего последние более активно поступают в надземные органы (14). Следует допустить, что быстрое прохождение последовательных фаз развития сортов Гибрид—12 и Аракс—322, еще больше влияет на этот процесс, что в конечном итоге приводит к раннему завершению вегетации и старению.

При сравнении выноса сухих веществ с пасоккой и напряженности работы корневой системы исследуемых сортов томата проявляется определенная противоречивость, которая, однако, сглаживается при учете ростовых процессов. Г. А. Григорян (11), сравнивая раннеспелый сорт Аракс—322 со среднеспелым Масиси—202, пришел к выводу, что последний формирует более мощную вегетативную массу с высоким содержанием сухих веществ, большим числом побегов и их большей суммарной длиной. Это обстоятельство автор связывает с активным и сравнительно продолжительным функционированием фотосинтетического аппарата сорта Масиси—202.

Выделение пасоки и содержание в ней сухих веществ в онтогенезе ранне- и среднеспелых сортов томата ($M \pm m$)

Скоро-спелость	Сорт	Фаза разви-тия	Выделение пасоки, мг/сутки	Сухой вес пасоки, мг/мл	Вынос су-хих веществ с пасоккой, мг/сутки	Напряжен-ность рабо-ты корней, мг/г сухого ве-щества
Ранне-спелый	Гибрид-12	Вегетации	2.8 $\pm$ 0.12	1.87 $\pm$ 0.09	5.2 $\pm$ 0.5	79.6 $\pm$ 4.1
		Цветения	10.7 $\pm$ 0.41	3.18 $\pm$ 0.06	34.0 $\pm$ 0.6	86.1 $\pm$ 1.7
		Формирова-ния плодов	12.1 $\pm$ 0.54	2.40 $\pm$ 0.04	29.0 $\pm$ 0.5	44.3 $\pm$ 0.5
		Созревания плодов	5.5 $\pm$ 0.16	2.23 $\pm$ 0.02	12.6 $\pm$ 0.05	25.7 $\pm$ 1.1
	Аракс-322	Вегетации	3.0 $\pm$ 0.14	1.98 $\pm$ 0.13	5.9 $\pm$ 0.4	88.1 $\pm$ 4.8
		Цветения	9.1 $\pm$ 0.42	4.02 $\pm$ 0.11	36.6 $\pm$ 1.0	97.9 $\pm$ 4.0
		Формирова-ния плодов	14.0 $\pm$ 0.58	2.42 $\pm$ 0.08	33.9 $\pm$ 1.1	48.7 $\pm$ 1.5
		Созревания плодов	7.1 $\pm$ 0.30	2.00 $\pm$ 0.14	14.2 $\pm$ 0.5	27.5 $\pm$ 1.2
Средне-спелый	Масиси-202	Вегетации	4.7 $\pm$ 0.26	1.78 $\pm$ 0.06	8.4 $\pm$ 0.3	120.5 $\pm$ 2.5
		Цветения	17.5 $\pm$ 0.73	2.98 $\pm$ 0.06	52.2 $\pm$ 1.0	121.7 $\pm$ 0.7
		Формирова-ния плодов	18.4 $\pm$ 0.84	2.20 $\pm$ 0.04	40.5 $\pm$ 0.8	51.7 $\pm$ 0.6
		Созревания плодов	8.8 $\pm$ 0.50	1.50 $\pm$ 0.09	16.7 $\pm$ 0.8	28.4 $\pm$ 0.8
	Нвер	Вегетации	5.4 $\pm$ 0.33	1.69 $\pm$ 0.16	9.1 $\pm$ 0.9	133.2 $\pm$ 5.3
		Цветения	20.3 $\pm$ 0.40	3.09 $\pm$ 0.24	62.7 $\pm$ 5.1	155.4 $\pm$ 10.4
		Формирова-ния плодов	21.6 $\pm$ 0.74	2.04 $\pm$ 0.08	44.1 $\pm$ 1.7	54.0 $\pm$ 1.2
		Созревания плодов	9.6 $\pm$ 0.57	1.97 $\pm$ 0.09	18.9 $\pm$ 0.8	30.3 $\pm$ 0.9

Мы вправе полагать, что мощный вегетативный рост среднеспелых сортов является следствием обильного выноса сухих веществ с пасоккой и высокой напряженности работы корневых систем. При этом поступающие в надземную часть метаболиты корней, вероятно, используются во вторичном обмене и участвуют в ростовых процессах.

Таким образом, можно заключить, что одним из главных условий,

определяющих скороспелость растений, является корневая деятельность. При этом корни положительно коррелируют с физиологической активностью листьев. Раннеспелые сорта по показателям интенсивности фотосинтеза, общей и рабочей поглощающей поверхности корней и их физиологической активности намного уступают среднеспелым. Следует полагать, что у первых продукты листовой и корневой деятельности направлены главным образом на быстрое формирование генеративных органов и созревание плодов, в то время как у вторых высокая физиологическая активность полярных органов обеспечивает формирование мощной вегетативной массы и обильного урожая. В результате значительно продлевается период активной жизнедеятельности и вегетации растений в целом.

Институт ботаники

Академии наук Армянской ССР

Ереванский государственный университет

Վ. Ա. ԴԱՎԵՅԱՆ, Մ. Ա. ՍԱԼՈՒՄ

Տերևների և արմատների ֆիզիոլոգիական ակտիվության գույզակցված փոփոխությունը լուսիկի տարբեր վաղահասության սորտերի օնտոգենեզում

Ուսումնասիրվել է տերևների ֆոտոսինթեզի ակտիվության և արմատների կլանող մակերեսի մեջ եղած կապը լուսիկի վաղահաս (Հիրրիդ—12, Արաքս—322) և միջահաս (Մասիսի—202, Նվեր) սորտերի օնտոգենեզում:

Բացահայտված է, որ տերևների ասիմիլյացիոն ընդունակությունը և արմատների ընդհանուր և բանվորական մակերեսը աճում են մինչև պտուղների կազմակերպման փուլը: Հստ որում ցուցանիշների բացարձակ մեծությամբ աչքի են ընկնում միջահաս սորտերը: Վերջիններս բնութագրվում են նաև օնտոգենեզի ընթացքում արմատահյուսի արտադատման և նրանում չոր նյութերի ելքի համարյա բարձր ցուցանիշներով:

Ստացված տվյալները թույլ են տալիս եզրակացնելու, որ վաղահաս սորտերի մոտ ասիմիլյատները հիմնականում ծախսվում են գեներատիվ օրգանների արագ առաջացման և պտուղների հասունացման, իսկ միջահասների մոտ՝ նաև հզոր վեգետատիվ զանգվածի կազմակերպման վրա:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. О. Казарян, В. А. Давтян, Физиология растений, т. 29, в. 3 (1982).
- ² E. C. Hemphries, G. N. Thorne, *Ann. Bot.*, v. 24, № 111 (1961).
- ³ В. О. Казарян, В. А. Давтян, Р. С. Шахизиян и др., Биол. журн. Армении, т. 39, № 6 (1986).
- ⁴ В. О. Казарян, Строение высших растений, Наука, М., 1969.
- ⁵ Б. А. Рубин, В. Ф. Германова ДАН СССР, т. 107, № 5 (1956).
- ⁶ Б. А. Рубин, В. Ф. Германова, Усп. соврем. биологии, т. 45, в. 3 (1958).
- ⁷ В. О. Казарян, В. А. Давтян, Биол. журн. Армении, т. 19, № 1 (1966).
- ⁸ И. Чатский, Б. Славик, *Biol. Plant.* v. 2(2) (1960).
- ⁹ И. И. Колосов, Поглощительная деятельность корневых систем растений, Изд-во АН СССР, М., 1962.
- ¹⁰ В. В. Ефремова, Сб. н.-и. работ по масличным культурам (мат. научн. конф. молодых ученых, аспирантов), Майкоп, 1968.
- ¹¹ Г. А. Григорян, Канд. дис. Ереван, 1981.
- ¹² A. E. Murreek, *Growth*, v. 3, № 3 (1939).
- ¹³ H. Berdcka, J. Skupinska, *Acta Soc. bot. polon.*, v. 32, № 3 (1963).
- ¹⁴ Э. С. Абулджян, в кн: Онтогенез высших растений (Собр. Ереванского симп.), Изд-во АН АрмССР, Ереван 1970.